الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

- تعريف المصفوفات
- رمز المصفوفة
- رمز عناصر المصفوفة
- رتبة المصفوفة
- أنواع المصفوفات
- بناء المصفوفة
- تنظيم البينات في المصفوفات و تحليلها

الأفكار و الدروس التي تحتاجها كتأسيس لهذا الدرس (ملحق التأسيس)

- حل معادلة خطية من متغير واحد
- حل معادلتين بمتغيرين عن طريق التعويض و عن طريق الحذف
- حل المعادلة التربيعية
  - معادلة تربيعية من حدين (العامل المشترك – الجذر التربيعي – فرق بين مربعين
  - معادلة تربيعية من 3 حدود معامل x تربيع = 1
  - معادلة تربيعية من 3 حدود معامل x تربيع لا يساوي 1
  - طريقة اكمال المربع
  - استخدام القانون العام

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

تعريف المصفوفة

- هي ترتيب لأعداد او ارقام او مجهول و متغيرات احرف على شكل صفوف واعمدة ويأخذ شكلها شكل المستطيل وتكون محصورة بين قوسين على شكل [ ]
- مثال على المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$ مصفوفة ارقام مرتبة على شكل صفوف و أعمدة

$$B=\begin{bmatrix} x & c & d & k \\ m & a & y & a \\ a & w & s & u \end{bmatrix}$$ مصفوفة متغيرات مرتبة على شكل صفوف و أعمدة

$$C=\begin{bmatrix} x & 2 & d & 6 \\ \frac{2}{3} & a & y & 3^7 \\ a & w & \sqrt{9} & u \end{bmatrix}$$ مصفوفة ارقام و متغيرات مرتبة على شكل صفوف و أعمدة

الدرس
1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

الصف : هو الترتيب الافقي للأرقام او الاحرف

العمود : هو الترتيب العمودي للأرقام او الأحرف

الصف 1 يتكون من الأرقام 2 و4 و 6 و 8

العمود 4 يتكون من الأرقام 8 و 5 و 3

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{عمود 1} & \text{عمود 2} & \text{عمود 3} & \text{عمود 4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{صف 1} \\ \text{صف 2} \\ \text{صف 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

تسمية و رمز المصفوفة

- يرمز للمصفوفة بحرف كبير مثل A,B,C,K, وهكذا ، اذن رمز او اسم المصفوفة هو حرف كبير

$$B=\begin{bmatrix} x & c & d & k \\ m & a & y & a \\ a & w & s & u \end{bmatrix}$$

اسم المصفوفة هو B

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

اسم المصفوفة هو A

الدرس
1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

رمز العناصر داخل المصفوفة

- تسمى كل قيمة (رقم او مجهول او حرف) داخل المصفوفة ب**العنصر Element ويرمز لها بحف صغير مثل a , b , c يحدد الحرف الصغير من اسم المجموعة يعني اذا كان اسم المجموعة A فان اسم عناصرها تكون a و اذا كان اسم المجموعة B فان اسم عناصرها تكون b**
- **رمز عناصر المجموعة**

- **رمز عناصر المجموعة**

لاحظ اسم المجموعة A عناصرها تكون a

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ & & \end{bmatrix}$$

لاحظ اسم المجموعة B عناصرها تكون b

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{21} & b_{23} \\ & & \end{bmatrix}$$

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

تحديد مكان أي عنصر فى المصفوفة

بمعنى تحديد موقعه (تحديد موقع العنصر) يكون ذلك بعدد الصفوف و عدد الاعمدة .... كيف ؟؟

1- ننظر للعنصر المطلوب تحديد موقعه في المصفوفة

2- نعد باي صف موجود و نكتبه

3- نعد باي عمود يوجد و نكتبه

4- التعبير عن الموقع يكون بكاتبة رقم الصف أولا ثم رقم العمود ثانيا

يرمز لمكان العنصر a = a_{ij}

حيث i = هي رقم الصف

j= رقم العمود

ما موقع العنصر 5 العنصر 5 يقع في الصف 2 و العمود 3 اذن موقعه هو a_{23}	$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & y & x & z \end{bmatrix}$
ما موقع العنصر z العنصر z يقع في الصف 3 و العمود 4 اذن موقعه هو a_{34}	
ما موقع العنصر 2 العنصر 2 يقع في الصف 1 و العمود 1 اذن موقعه هو a_{11}	
ما موقع العنصر 0 العنصر 0 يقع في الصف 3 و العمود 1 اذن موقعه هو a_{31}	
ما موقع العنصر x العنصر x يقع في الصف 3 و العمود 3 اذن موقعه هو a_{33}	
ما موقع العنصر 7 العنصر 7 يقع في الصف 2 و العمود 4 اذن موقعه هو a_{24}	

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

رتبة المصفوفة

يمكن التعبير عن المصفوفة بما يسمى الرتبة او رتبة المصفوفة order

يعبر عن رتبة المصفوفة بالتعبير $m \; x \; n$ تقرا M في N

حيث m هي عدد الصفوف n هي عدد الاعمدة

مثال ما هي رتبة المصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

الرتبة هي

$$\boldsymbol{A(m \; x \; n)}$$

$$\boldsymbol{A(3 \; x \; 4)}$$

مصفوفة عدد الصفوف فيها 3 و عدد الاعمدة 4 اذن الرتبة

$$\boldsymbol{3 \; x \; 4}$$

- ملاحظة (حتى لا يكون هناك أي التباس):
  - **رتبة المجموعة او موقع العنصر كلاهما يتم تحديده بعدد الصفوف و عدد الاعمدة**
  - **العناصر تكون بالداخل و لها موقع يحدد برقم الصف ورقم العمود (موقع)**

الدرس
1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

❖ رتبة المجموعة العدد الكامل للصفوف x العدد الكامل للأعمدة

حساب : عدد عناصر أي مصفوفة يساوي حاصل ضرب عدد الصفوف في عدد الاعمدة يعني mxn

- **أسئلة و إجابات**

استعمل المصفوفة للإجابة على				$S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & y & x & z \end{bmatrix}$			
ما هو رمز المصفوفة	S	رمز المصفوفة هو الحرف الكبير					
ما هي رتبة المصفوفة	3x4	عدد الصفوف x عدد الاعمدة $[mxn]$					
اين يقع العنصر	8	يقع في صف	1	يقع في عمود	4	يرمز له	s_{14}
اين يقع العنصر	5	يقع في صف	2	يقع في عمود	3	يرمز له	s_{23}
اين يقع العنصر	0	يقع في صف	3	يقع في عمود	1	يرمز له	s_{31}
اين يقع العنصر	y	يقع في صف	3	يقع في عمود	2	يرمز له	s_{32}
اين يقع العنصر	z	يقع في صف	3	يقع في عمود	4	يرمز له	s_{34}
ما قيمة العنصر	s_{21}	الصف رقم	2	والعمود رقم	1	قيمته	1
ما قيمة العنصر	s_{33}	الصف رقم	3	والعمود رقم	3	قيمته	x
قارن بين موقع العنصر z و رتبة المجموعة	موقع العنصر s_{3x4} رتبة المصفوفة S_{3X4} دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة						نفس الرتبة

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

استعمل المصفوفة للإجابة على	$R = [1\ \ 4\ \ 5\ \ 6 - 8]$						
ما هو رمز المصفوفة	R	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	1X5	**عدد الصفوف x عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	5	يقع في صف	1	يقع في عمود	3	يرمز له	r_{1x3}
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	1	يقع في عمود	2	يرمز له	r_{1x2}
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	1	يقع في عمود	4	يرمز له	r_{1x4}
اين يقع العنصر	-8	يقع في صف	1	يقع في عمود	5	يرمز له	r_{1x5}
ما قيمة العنصر	r_{22}	الصف رقم	لا يوجد	والعمود رقم	2	قيمته	لا يوجد
ما قيمة العنصر	r_{12}	الصف رقم	1	والعمود رقم	2	قيمته	4
قارن بين موقع العنصر -8 و رتبة المجموعة	**موقع العنصر** r_{15} **رتبة المصفوفة** R_{15} دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة	نفس الرتبة					

استعمل المصفوفة للإجابة على	$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$						
ما هو رمز المصفوفة	C	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	5X1	**عدد الصفوف x عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	4	يقع في عمود	1	يرمز له	c_{41}
اين يقع العنصر	3	يقع في صف	2	يقع في عمود	1	يرمز له	c_{21}
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	c_{11}
اين يقع العنصر	$\sqrt{5}$	يقع في صف	5	يقع في عمود	1	يرمز له	c_{5x1}
ما قيمة العنصر	c_{12}	الصف رقم	لا يوجد	والعمود رقم	لا يوجد	قيمته	لا يوجد
ما قيمة العنصر	c_{41}	الصف رقم	4	والعمود رقم	1	قيمته	4
قارن بين موقع العنصر $\sqrt{5}$ و رتبة المجموعة	**موقع العنصر** c_{5X1} **رتبة المصفوفة** C_{5X1} دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة	نفس الرتبة					

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

استعمل المصفوفة للإجابة على		$N = [7]$					
ما هو رمز المصفوفة	N	رمز المصفوفة هو الحرف الكبير					
ما هي رتبة المصفوفة	1x1	عدد الصفوف X عدد الاعمدة $[mxn]$					
اين يقع العنصر	2	يقع في صف	لا يوجد	يقع في عمود	لا يوجد	يرمز له	
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	لا يوجد	يقع في عمود	لا يوجد	يرمز له	
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	لا يوجد	يقع في عمود	لايوجد	يرمز له	
اين يقع العنصر	7	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	n_{1x1}
ما قيمة العنصر	n_{1x2}	الصف رقم	1	والعمود رقم	لايوجد	قيمته	
ما قيمة العنصر	n_{2x1}	الصف رقم	لايوجد	والعمود رقم	1	قيمته	
ما قيمة العنصر	n_{1x1}	الصف رقم	1	والعمود رقم	1	قيمته	7
قارن بين موقع العنصر 7 و رتبة المجموعة		موقع العنصر n_{1x1} رتبة المصفوفة N_{1x1} دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة					نفس الرتبة

استعمل المصفوفة للإجابة على		$Z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
ما هو رمز المصفوفة	Z	رمز المصفوفة هو الحرف الكبير					
ما هي رتبة المصفوفة	3x3	عدد الصفوف X عدد الاعمدة $[mxn]$					
اين يقع العنصر	0	يقع في صف	في الكل	يقع في عمود	في الكل	يرمز له	z_{13}
اين يقع العنصر	0	يقع في صف	في الكل	يقع في عمود	في الكل	يرمز له	z_{23}
اين يقع العنصر	0	يقع في صف	في الكل	يقع في عمود	في الكل	يرمز له	z_{33}
ما قيمة العنصر	z_{11}	الصف رقم	1	والعمود رقم	1	قيمته	0
ما قيمة العنصر	z_{33}	الصف رقم	3	والعمود رقم	3	قيمته	0
تسمى المصفوفة الصفرية كل عناصرها تساوي صفر (مكان الصفر هو كل الأماكن المحتملة) عنما يتكرر قيمة العنصر اختار أي موقع الفمية دائما صفر							

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

استعمل المصفوفة للإجابة على			$H\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$				
ما هو رمز المصفوفة	H	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	2x4	**عدد الصفوف x عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	2	يقع في عمود	2	يرمز له	h_{22}
اين يقع العنصر	9	يقع في صف	1	يقع في عمود	3	يرمز له	h_{13}
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	2	يقع في عمود	1	يرمز له	h_{21}
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	2	يقع في عمود	4	يرمز له	h_{24}
ما قيمة العنصر	h_{22}	الصف رقم	2	والعمود رقم	2	قيمته	6
ما قيمة العنصر	h_{23}	الصف رقم		والعمود رقم		قيمته	8
قارن بين موقع العنصر 1 و رتبة المجموعة	**موقع العنصر** h_{24} **رتبة المصفوفة** H_{24} دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة						نفس الرتبة

استعمل المصفوفة للإجابة على			$V\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$				
ما هو رمز المصفوفة	V	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	4x2	**عدد الصفوف x عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	2	يقع في صف	3	يقع في عمود	2	يرمز له	v_{32}
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	3	يقع في عمود	1	يرمز له	v_{31}
اين يقع العنصر	7	يقع في صف	4	يقع في عمود	1	يرمز له	v_{41}
اين يقع العنصر	8	يقع في صف	4	يقع في عمود	2	يرمز له	v_{42}
ما قيمة العنصر	v_{12}	الصف رقم	1	والعمود رقم	2	قيمته	4
ما قيمة العنصر	v_{21}	الصف رقم	2	والعمود رقم	1	قيمته	5
قارن بين موقع العنصر 8 و رتبة المجموعة	**موقع العنصر** v_{42} **رتبة المصفوفة** V_{42} دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة						نفس الرتبة

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات

Introduction to Matrices

استعمل المصفوفة للإجابة على				$D\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}$			
ما هو رمز المصفوفة	D	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	3x3	**عدد الصفوف x عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	2	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	d_{11}
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	2	يقع في عمود	2	يرمز له	d_{22}
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	3	يقع في عمود	3	يرمز له	d_{33}
ما قيمة العنصر	d_{11}	الصف رقم	1	والعمود رقم	1	قيمته	2
ما قيمة العنصر	d_{32}	الصف رقم	3	والعمود رقم	2	قيمته	0
قارن بين موقع العنصر6 و رتبة المجموعة		**موقع العنصر** d_{33} **رتبة المصفوفة** D_{33} **دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة**					نفس الرتبة
مواقع العنصر 0 هي		d_{12} d_{13} d_{21} d_{23} d_{31} d_{32}					

استعمل المصفوفة للإجابة على				$U\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$			
ما هو رمز المصفوفة	U	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	3X3	**عدد الصفوف x عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	u_{11}
		يقع في صف	2	يقع في عمود	2	يرمز له	u_{22}
		يقع في صف	3	يقع في عمود	3	يرمز له	u_{33}
ما قيمة العنصر	u_{31}	الصف رقم	3	والعمود رقم	1	قيمته	0
ما قيمة العنصر	u_{22}	الصف رقم	2	والعمود رقم	2	قيمته	1

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

استعمل المصفوفة للإجابة على	$T\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$						
ما هو رمز المصفوفة	T	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	3x3	**عدد الصفوف X عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	2	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	t_{11}
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	2	يقع في عمود	2	يرمز له	t_{22}
اين يقع العنصر	5	يقع في صف	2	يقع في عمود	3	يرمز له	t_{23}
اين يقع العنصر	3	يقع في صف	1	يقع في عمود	3	يرمز له	t_{13}
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	3	يقع في عمود	3	يرمز له	t_{33}
ما قيمة العنصر	t_{32}	الصف رقم	3	والعمود رقم	2	قيمته	0
ما قيمة العنصر	t_{31}	الصف رقم	3	والعمود رقم	1	قيمته	0
قارن بين موقع العنصر 6 و رتبة المجموعة		**موقع العنصر t_{33}** **رتبة المصفوفةT_{33}** دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة					نفس الرتبة

استعمل المصفوفة للإجابة على	$L\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$						
ما هو رمز المصفوفة	L	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	3X3	**عدد الصفوف X عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	t_{11}
اين يقع العنصر	2	يقع في صف	2	يقع في عمود	1	يرمز له	t_{21}
اين يقع العنصر	3	يقع في صف	2	يقع في عمود	2	يرمز له	t_{22}
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	1	يقع في عمود	3	يرمز له	t_{13}
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	3	يقع في عمود	3	يرمز له	t_{33}
ما قيمة العنصر	l_{13}	الصف رقم	1	والعمود رقم	3	قيمته	4
ما قيمة العنصر	l_{12}	الصف رقم	1	والعمود رقم	2	قيمته	2
قارن بين موقع العنصر 6 و رتبة المجموعة		**موقع العنصر l_{33}** **رتبة المصفوفةL_{33}** دائما اخر عنصر بالمصفوفة يكون موقعه = رتبة المصفوفة					نفس الرتبة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

استعمل المصفوفة للإجابة على				$F\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}$			
ما هو رمز المصفوفة	F	**رمز المصفوفة هو الحرف الكبير**					
ما هي رتبة المصفوفة	3X3	**عدد الصفوف X عدد الاعمدة** $[mxn]$					
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	$\boldsymbol{f_{11}}$
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	2	يقع في عمود	2	يرمز له	$\boldsymbol{f_{22}}$
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	3	يقع في عمود	3	يرمز له	$\boldsymbol{f_{33}}$
ما قيمة العنصر	$\boldsymbol{f_{33}}$	الصف رقم	3	والعمود رقم	3	قيمته	6
ما قيمة العنصر	$\boldsymbol{f_{11}}$	الصف رقم	1	والعمود رقم	1	قيمته	1
مواقع العنصر 2 هي	f_{12} f_{21}						
مواقع العنصر 3 هي	f_{13} f_{31}						
مواقع العنصر 5 هي	f_{23} f f_{32}						

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

استنتاج مهم فى المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1- دائما العنصر الأخير في المصفوفة يكون موقعه مساوي لرتبة المجموعة

❖ **العنصر الأخير هو** a_{33} يساوي A_{33}

2- يوجد للمجوعة قطر و يكون فيها دائما عدد الاعمدة = عدد الصفوف

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

سؤال : ما هو العنصر داخل المجموعة يكون موقعه (رقم الصف و رقم العمود) مساوي لرتبة المجموعة

الجواب : العنصر الأخير دائما يكون موقعه مساوي لرتبة المجموعة

$$A_{3X3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

سؤال : ما هي العناصر التي تتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الاعمدة

الجواب : كل العناصر التي تقع على القطر 0 من اليسار الى اليمين)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

أنواع المصفوفات و رتبة كل نوع

1- مصفوفة صف Raw Matrix (يوجد صف واحد فقط ويوجد عدد من الاعمدة)

استعمل المصفوفة للإجابة على	$R=[1\ \ 4\ \ 5\ \ 6-8]$					
ما هو رمز المصفوفة	R	رمز المصفوفة هو الحرف الكبير				
ما هي رتبة المصفوفة	1X5	عدد الصفوف x عدد الاعمدة $[mxn]$				
ما نوع المصفوفة	مصفوفة صف لان فيها صف واحد فقط					
اين يقع العنصر	5	يقع في صف	1	يقع في عمود	3	يرمز له r_{1x3}
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	1	يقع في عمود	2	يرمز له r_{1x2}
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له r_{1x1}
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	1	يقع في عمود	4	يرمز له r_{1x4}
اين يقع العنصر	-8	يقع في صف	1	يقع في عمود	5	يرمز له r_{1x5}
ما قيمة العنصر	r_{22}	الصف رقم	لا يوجد	والعمود رقم	2	قيمته لا يوجد
ما قيمة العنصر	r_{12}	الصف رقم	1	والعمود رقم	2	قيمته 4
اذا كان عدد الصفوف m وعدد الاعمدة n فان مصفوفة الصف تتكون من صف واحد و اكثر من عمود $(m>n)$						

دائما موقع الصف = 1 فمثلا في مصفوفة الصف اذا اعطى قيمة لموقع الصف اكثر من واحد يكون العنصر غير موجود

في المثال السابق سال عن قيمة العنصر الذي موقعه r_{22}

لاحظ طلب صف رقم 2 و هذا أصلا غير موجود لان المصفوفة تتكون فقط من صف واحد

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات

Introduction to Matrices

2- مصفوفة عمود column Matrix (يوجد عمود واحد فقط ويوجد عدد من

استعمل المصفوفة للإجابة على	$C=\begin{bmatrix}1\\3\\4\\6\\\sqrt{5}\end{bmatrix}$

ما هو رمز المصفوفة	C	رمز المصفوفة هو الحرف الكبير					
ما هي رتبة المصفوفة	5X1	عدد الصفوف X عدد الاعمدة $[mxn]$					
ما نوع المصفوفة	مصفوفة عمود لان فيها عمود واحد فقط						
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	4	يقع في عمود	1	يرمز له	c
اين يقع العنصر	3	يقع في صف	2	يقع في عمود	1	يرمز له	c
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له	c
اين يقع العنصر	$\sqrt{5}$	يقع في صف	5	يقع في عمود	1	يرمز له	c_{5x1}
ما قيمة العنصر	c_{12}	الصف رقم	1	والعمود رقم	لا يوجد	قيمته	لايوجد
ما قيمة العنصر	c_{41}	الصف رقم	4	والعمود رقم	1	قيمته	4
اذا كان عدد الصفوف m وعدد الاعمدة n فان مصفوفة العمود تتكون من عمود واحد و اكثر من صف (m < n)							

دائما موقع العمود = 1 فمثلا في مصفوفة العمود اذا اعطى قيمة لموقع العمود اكثر من واحد يكون العنصر غير موجود

في المثال السابق سال عن قيمة العنصر الذي موقعه c_{12}

لاحظ طلب عمود رقم 2 و هذا أصلا غير موجود لان المصفوفة تتكون فقط من عمود واحد

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

3- مصفوفة مربعة Square Matrix (تكون عدد الصفوف فيها مساوية لعدد الاعمدة) $(m = n)$

استعمل المصفوفة للإجابة على						$F\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$
ما هو رمز المصفوفة	F	رمز المصفوفة هو الحرف الكبير				
ما هي رتبة المصفوفة	3X3	عدد الصفوف x عدد الاعمدة $[mxn]$				
ما نوع المصفوفة		مصفوفة مربعة لان عدد الصفوف = عدد الاعمدة				
اين يقع العنصر	1	يقع في صف	1	يقع في عمود	1	يرمز له f_{11}
اين يقع العنصر	4	يقع في صف	2	يقع في عمود	2	يرمز له f_{22}
اين يقع العنصر	6	يقع في صف	3	يقع في عمود	3	يرمز له f_{33}
ما قيمة العنصر	f_{33}	الصف رقم	3	والعمود رقم	3	قيمته 6
ما قيمة العنصر	f_{11}	الصف رقم	1	والعمود رقم	1	قيمته 1
اذا كان عدد الصفوف m وعدد الاعمدة n فان مصفوفة المربعة تكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة (m = n)						

مصفوفة مربعة 6X6	مصفوفة مربعة 5X5	مصفوفة مربعة 4X4	مصفوفة مربعة 3x3
$K\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\\7&8&9&0&1&2\\2&1&0&9&8&7\\1&3&5&7&9&0\\0&9&1&2&8&3\end{bmatrix}$	$K\begin{bmatrix}1&3&6&8&9\\8&6&8&9&0\\5&3&6&2&1\\3&6&8&0&2\\2&4&6&8&0\end{bmatrix}$	$Q\begin{bmatrix}1&2&4&6\\3&5&7&9\\8&5&7&3\\1&3&5&7\end{bmatrix}$	$F\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$

4- المصفوفة الصفرية Zero Matrix (تكون قيمة عناصرها = صفر)

استعمل المصفوفة للإجابة على :		$Z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
ما هو رمز المصفوفة	Z		
ما هي رتبة المصفوفة	3X3		
ما نوع المصفوفة	صفرية مربعة	يمكن القول انها مربعة وصفرية (مربعة لان عدد الصفوف = عدد الاعمدة 3X3 وصفرية لان جميع عناصرها = صفر	

5- مصفوفة (العنصر الوحيد) Singleton Matrix(صف واحد فقط وعمود واحد فقط) تسمى أيضا المصفوفة المفردة

إذا احتوت المصفوفة على عنصر واحد فقط، تُسمى مصفوفة مفردة. وبالتالي، فإن

A = [aij] (mxn)

هي مصفوفة مفردة إذا كانت m = n = 1. على سبيل المثال، [2]، [3]، [a]، [–3] هي مصفوفات مفردة.

استعمل المصفوفة للإجابة على :		$N = [7]$	
ما هو رمز المصفوفة	N	الحرف الكبير هو اسم المجموعة	
ما هي رتبة المصفوفة	(mxn)	عدد الصفوف X عدد الاعمدة 1X1	
ما نوع المصفوفة		مصفوفة العنصر الوحيد	
اين يقع العنصر	7	يقع في الصف (1) و العمود(1) ويرمز له	n_{11}
اين يقع العنصر	3	غير موجود في المصفوفة	

7- مصفوفة (الوحدة) او المحايدة

- إذا كانت جميع عناصر قطر رئيسي في مصفوفة قطرية تساوي 1، فإنها تُسمى مصفوفة وحدة
- . يُرمز لمصفوفة الوحدة من الرتبة n بالرمز I_n. وبالتالي، تكون المصفوفة المربعة A = [aij] n×n
- من اهم المصفوفات في الوحدة
- هي مصفوفة مربعة
- قطرها الرئيسي عناصره = 1
- باقي العناصر = 0
- رمزها I

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- عملها يشبه عمل يشبه عمل 1 عند ضربه باي عدد حقيقي
- ضرب العدد 1 باي عدد حقيقي = العدد الحقيقي نفسه
- ضرب المصفوفة المحايدة I باي مصفوفة أخرى (من نفس الرتبة) = المصفوفة نفسها

equal matrices المصفوفتان المتساويتان

يوجد شرطين لكي نقول ان المصفوفتان متساويتان

- يُقال إن مصفوفتين A وB متساويتان إذا كانتا **من نفس الرتبة** ، أي:
  (أ) أي أن عدد الصفوف في A يساوي عدد الصفوف في B.
  (ب) أي أن عدد الأعمدة في A يساوي عدد الأعمدة في B.

- يُقال إن مصفوفتين A وB متساويتان إذا كانتا **وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية،**
- كل عنصرين متقابلين متساويين (العنصر في المصفوفتين الذي يحمل نفس رقم الصف و رقم العمود يجب ان يكونان متساويان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

رتبة المجموعة A هي 3X3
رتبة المجموعة B هي 3X3
بالنظر نجد كل عنصر في مجموعة A يساوي نظيره في المجموعة B
اذن نستطيع القول بان المجموعتان متساويتان

$a_{11} = b_{11} = 3$ $a_{12} = b_{12} = 5$ $a_{13} = b_{13} = 7$	$a_{21} = b_{21} = 2$ $a_{22} = b_{22} = 4$ $a_{23} = b_{23} = 6$	$a_{31} = b_{31} = 8$ $a_{32} = b_{32} = 4$ $a_{33} = b_{33} = 9$

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

التطبيق المهم على المصفوفات المتساوية

إيجاد عنصر مجهول في احدى المصفوفتين باستخدام حل المعادلة الخطية

السؤال الأول

حدد اذا ما كانت المصفوفات التالية متساوية ام لا و اذكر السبب

A	B	متساوية	السبب
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	لا	ليست من نفس الرتبة A= 2X3 B =3X2
$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	نعم	لهما نفس الرتبةA3X3 =B 3X3 العناصر المتناظرة متساوية
$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$,	نعم	لهما نفس الرتبةA2X2 =B 2X2 العناصر المتناظرة متساوية
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	لا	لهما نفس الرتبة لكن يوجد عناصر متناظرة غير متساوية $a_{23} \neq b_{23}$ $6 \neq 5$
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	لا	لهما نفس الرتبة لكن يوجد عناصر متناظرة غير متساوية $a_{22} \neq b_{22}$ $9 \neq 1$ $a_{34} \neq b_{34}$ $2 \neq 3$ $a_{41} \neq b_{41}$ $5 \neq 2$

السؤال الثاني : انتبه لصيغة السؤال

إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3y+10 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y.

يعني السؤال يقول ان المصفوفتين متساويتان وهذا يعني ان لهم نفس الرتبة و العناصر المتناظرة متساوية

لإيجاد المجهول نشكل معادلة خطية بسيطة

السؤال ابلغنا و اعلمنا انهما متساويتان و قد يشير السؤال الى أي عبارة تفيد المساواة

مثل وضع إشارة مساواة

او يذكر متساويتان

او المصفوفة A تساوي المصفوفة B

1) *x*+1=10

***x*= 10-1 ,,, X = 9**

2) 3y+10=y

- 3y-y=-10
- 2y=-10
- Y= -5

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

بناء المصفوفة و تنظيم البينات في المصفوفات و تحليلها

لكي نبني مصفوفة يجب ان نعرف رتبة المصفوفة

- حدد عدد الصفوف
- حدد عدد الاعمدة
- يجب ان يكون هناك علاقة لإيجاد قيمة العناصر

مثال

أنشئ مصفوفة من الرتبة 3x4 رمزها A و عناصرها a_{ij} حيث i هو رقم الصف و j هو رقم العمود و العلاقة هي aij = 2i + 3j

الإجابة

1- عدد الصفوف = 3

2- عدد الاعمدة = 4

3- ابني المصفوفة و التي رمزها A (3 صفوف و 4 أعمدة)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

4- جد قيمة العناصر بناءا على العلاقة

a_{11} = 2(i)+3(j) = 2(1)+3(1)=5 عوض رقم الصف و رقم العمود

a_{12} = 2(i)+3(j) = 2(1)+3(2)=2+6=8

a_{13} = 2(i)+3(j) = 2(1)+3(3)=2+9=11

a_{14} = 2(i)+3(j) = 2(1)+3(4)=2+12=14

a_{21} = 2(i)+3(j) = 2(2)+3(1)=4+3=7

a_{22} = 2(i)+3(j) = 2(2)+3(2)=4+6=10

a_{23} = 2(i)+3(j) = 2(2)+3(3)=4+9=13

a_{24} = 2(i)+3(j) = 2(2)+3(4)=4+12=16

a_{31} = 2(i)+3(j) = 2(3)+3(1)=6+3=9

a_{32} = 2(i)+3(j) = 2(3)+3(2)=6+6=12

a_{33} = 2(i)+3(j) = 2(3)+3(3)=6+9=15

a_{34} = 2(i)+3(j) = 2(3)+3(4)=6+12=18

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

الدرس
1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

تنظيم البينات في المصفوفات و تحليلها

تنظيم البينات في مصفوفة يسهل عملية التحليل وتفسير البينات الموجودة في المصفوفة وعملية جمع صف معين او عمود معين قد يعطي دلالات مهمة تفيد المحللين

أولا : تنظيم البينات

- من خلال صيغة السؤال يجب ان نحدد عدد المعطيات المطلوبة و هل هذه المعطيات مطلوب تنظيمها في صف او عمود (من هنا نعرف عدد الصفوف و عدد الاعمدة)
- من خلال صيغة السؤال : المطلوب وضع المعلومات في صف معين او عمود
- تشكيل المصفوفة و قد يطلب مجموع كل صف او كل عمود او ترتيب صف معين تنازليا او تصاعديا
- الإجابة على أسئلة التفسير و التحليل

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

مثال الكتاب

مثال 3 : من الحياة

بيانات: يُبيِّن الجدول المجاور الأطوال والكتل والأعمار والصفوف الدراسية للشقيقات الثلاث هديل وهبه ولانا في إحدى المدارس:

	الطول (cm)	الكتلة (kg)	العمر (year)	الصف الدراسي
هديل	135	38	10	5
هبه	155	50	14	9
لانا	145	45	12	6

قبل البدء بالإجابة عن الأسئلة

نلاحظ ما يلي

- عدد الصفوف 3 (هديل – هبة – لانا)
- عدد الاعمدة 4 (الطول – الكتلة – العمر – الصف الدراسي)
- رتبة المصفوفة 3X4

1 أُرتِّب هـــذه البيانات في مصفوفة رتبتها 3×4، بحيث يُمثِّل الطول والكتلة والعمر والصف الدراسي صفوف المصفوفة.

- السؤال يطلب عدد الصفوف 4 وعدد أعمدة 3

نشكل مصفوف من صفوف و أعمدة

الطول

الكتلة

العمر

الصف

انتبه طلب تسمية الصفوف بالترتيب

الصف الأول الطول

الصف الثاني الكتلة

الصف الثالث العمر

الصف الرابع الصف المدرسي

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

بمعنى ان الاعمدة ال 4 (الطول – الكتلة – العمر – الصف الدراسي) تتحول الى صفوف

فتصبح المصفوفة كما يلي

$$\begin{bmatrix} 135 & 155 & 145 \\ 38 & 50 & 45 \\ 10 & 14 & 12 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

قبل

$$\begin{bmatrix} 135 & 38 & 10 & 5 \\ 155 & 50 & 14 & 9 \\ 145 & 45 & 12 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 135 & 155 & 145 \\ 38 & 50 & 45 \\ 10 & 14 & 12 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

بعد

لاحظ تم تحويل الاعمدة الى صفوف لان السؤال طلب ذلك

هذه العملية تسمى (مدور المصفوفة او المصفوفة المنقولة) بمعنى تم تبديل صفوفها الى أعمدة و العمدة الى صفوف و يرمز لها دائما A^T

T: mean TRANSPOSE OF A MATRIX

نقل مصفوفة

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

2 أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

مجمــوع عناصــر الصــف الأوَّل هــو 435، وهــذا المجمــوع يُمثِّــل مجمــوع أطــوال الشــقيقات الثــلاث.

3 أجد مجموع عناصر الصف الرابع، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

مجموع عناصر الصف الرابع هو 20، وهذا المجموع لا يُمثِّل شيئًا ذا معنى.

4 هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر الصف الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم؛ لأنَّه يدلُّ على الوسط الحسابي لكتل الشقيقات الثلاث.

أُفكِّر

أُعيد كتابة المصفوفة بحيث تكون الكتل مُرتَّبة ترتيبًا تنازليًّا.

عندما يطلب الترتيب لعنصر ما ننقله و ننقل كامل العمود معه

عندما نقلنا 50 للبداية نقلنا معها 155 و 14 و 9 (كامل العمود يتم نقله)

ترتيب الكتل تنازلي

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 135 & 155 & 145 \\ 38 & 50 & 45 \\ 10 & 14 & 12 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{الطول} \\ \text{الكتلة} \\ \text{العمر} \\ \text{الصف} \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 155 & 145 & 135 \\ 50 & 45 & 38 \\ 14 & 12 & 10 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{الطول} \\ \text{الكتلة} \\ \text{العمر} \\ \text{الصف} \end{array} \end{array}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات

Introduction to Matrices

اتحقق من فهمي

أتحقَّق من فهمي

أستعمل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

a) ما رتبة المصفوفة B؟

b) ما قيمة كلٍّ من العنصر b_{24} والعنصر b_{13}؟

c) أين يقع العنصر الذي قيمته -3؟

رتبة المصفوفة B	عدد الصفوف X عدد الاعمدة	2 X 4
قيمة العنصر b_{24}	يقع في الصف 2 و العمود 4 هو العدد	-5
قيمة العنصر b_{13}	يقع في الصف 1 و العمود 3 هو العدد	0
يقع العنصر -3	يقع في الصف 2 و العمود 3 ويرمز له	b_{23}

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

a) $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

b) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $F = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

المصفوفة	الرتبة	النوع
D	3X3	مصفوفة مربعة $(m = n)$
E	2x3	مصفوفة صفرية كل عناصرها = صفر
F	1x5	مصفوفة صف تتكون من صف و اكثر من عمود

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

d) إذا كانت: $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y.

بما ان المصفوفتان متساويتان اذن كل عنصريين متناظرين متساوين

- $3x - 2 = 13$
  $3x = 13 + 2$
  $3x = 15$
  $X = 5$

- $2x + 4y = 18$
  $2(5) + 4y = 18$
  $10 + 4y = 18$
  $4y = 18 - 10$
  $4y = 8$
  $Y = 2$

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات

Introduction to Matrices

أتحقَّق من فهمي

سـياحة: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج استطلاع آراء عيِّنات من سُكّان ثلاث قرى متجاورة بخصوص مشروع سياحي يُراد إقامته في موقع يتوسَّط هذه القرى:

	مُؤيِّد	مُعارِض	مُحايِد
القرية A	800	130	70
القرية B	460	250	40
القرية C	1300	700	200

a) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أنْ يكون عدد المُؤيِّدين مُرتَّبًا ترتيبًا تصاعديًا.

b) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

c) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

d) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

قبل الإجابة

- نلاحظ الجدول يتكون من 3 صفوف (القرية A و القريةB و القرية C)
- يتكون من 3 أعمدة (مؤيد ، معارض ، محايد)

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

a) أرتِّب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أنْ يكون عدد المُؤيِّدين مُرتَّبًا ترتيبًا تصاعديًا.

لنحول الجدول الى مصفوفة كما هي ثم نرتب عمود المؤيدين من الأصغر الى الأكبر

$$\begin{array}{ccc} \text{مؤيد} & \text{معارض} & \text{محايد} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 800 & 130 & 70 \\ 460 & 250 & 40 \\ 1300 & 700 & 200 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 460 & 250 & 40 \\ 800 & 130 & 70 \\ 1300 & 700 & 200 \end{bmatrix}$$

تصاعدي

$$\begin{array}{ccc} \text{مؤيد} & \text{معارض} & \text{محايد} \\ \end{array}$$

b) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

$$\begin{bmatrix} 800 & 130 & 70 \end{bmatrix}$$ 1,000.00

المجموع 1000

<u>الرقم يمثل العدد الكلي للأشخاص الذين تم اخذ رايهم من القرية A</u>

c) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

معارض

130

250

700

1,080.00

المجموع 1080 و يمثل الرقم عدد المعارضين في الثلاث قرى

d) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أبرِّر إجابتي.

الوسط الحسابي هو مجموع العناصر مقسوم على عددها

الوسط الحسابي للعمود الثاني = $\frac{130+250+700}{3} = \frac{1080}{3} = 360$

لا يقدم أي بينات ذات معنى لأنه يفيد كمقارنة مع الأرقام الأخرى

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أُحدِّد رتبة كل مصفوفة ممّا يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$

المصفوفة	الرتبة	النوع	
1	1X2	مصفوفة صف	تتكون من صف و اكثر من عمود
2	3X3	مصفوفة مربعة	عدد الصفوف = عدد الاعمدة
3	1X4	مصفوفة عمود	تتكون من عمود و اكثر من صف
4	1X1	مصفوفة العنصر الوحيد	تتكون من عنصر واحد (عدد الصفوف = عدد الاعمدة = 1

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كل عنصر ممّا يأتي:

5) a_{31}

6) a_{23}

7) a_{14}

العنصر			
a_{31}	العنصر الذي يقع في الصف 3 و العمود 1	قيمته	7
a_{23}	العنصر الذي يقع في الصف 2 و العمود 3	قيمته	9
a_{14}	العنصر الذي يقع في الصف 1 و العمود 4	قيمته	-2
a_{34}	العنصر الذي يقع في الصف 3 و العمود 4	قيمته	12

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

8 أحدِّد موقع العنصر الذي قيمته 8 في المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

العنصر 8 يقع في الصف الثالث و العمود الثاني =

$$b_{32}$$

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

10 $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

9 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

الرقم	المصفوفة	الرتبة	النوع	
9	C	4X4	مصفوفة مربعة	عدد الصفوف = عدد الاعمدة
10	A	3X1	مصفوفة عمود	تتكون من عمود و اكثر من صف
11		1X4	مصفوفة صف	تتكون من صف و اكثر من عمود
12		2X2	صفرية و مربعة	صفرية لان كل عناصرها = 0 و مربعة لان عدد الصفوف = عدد العمدة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

13 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 0 & x+2y & 4 \\ 3x-11 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & z & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy، وz.

- Z= 2
- 3x – 11 = 4

  3x = 4 + 11

  3x = 15

  X = 5
- X + 2y = -1

  5 + 2y = -1

  2y = -1 -5

  2y = -6

  Y = -3

14 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 9 & 2x+3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & x^2 \\ 2-y & 10 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

• 2 – y = -5 -Y = -5-2 -y=-7 Y=7	• $x^2 = (2x+3)$ $x^2 - 2x - 3$ $(x-3)(x+1)$ X= 3 ,,,,,,, x =-1

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

رياضـة: يُبيِّـن الجـدول المجـاور إنجـازات ثلاثـة مـن لاعبـي كـرة القـدم فـي مباريـات دوري الصفــوف فــي إحــدى المــدارس:

	المباريات	التسديدات	الأهداف
سمير	8	15	7
أحمد	11	25	13
فوّاز	14	20	9

قبل البدء بالإجابة (عدد الصفوف 3 و عدد الاعمدة 3)

$$\begin{bmatrix} 8 & 15 & 7 \\ 11 & 25 & 13 \\ 14 & 20 & 9 \end{bmatrix}$$

15 أنظِّم هذه البيانات في المصفوفة S ، بحيث تحــوي صفوفها إنجازات اللاعبين الثلاثة، ويُرتَّب فيها عدد الأهداف تنازليًّا، ثمَّ أجد قيمة العنصر s_{32}.

نريد مصفوفة تكون الصفوف هي إنجازات اللاعبين (الصفوف هي المباريات و التسديدات و الأهداف) يعني اتفل صفوف الجدول الى أعمدة و بالعكس (الاعمدة الى صفوف) و بعد ذلك اعد كتابة المصفوفة بحيث ترتب عدد الأهداف تنازليا

الاصلية

$$\begin{bmatrix} 8 & 15 & 7 \\ 11 & 25 & 13 \\ 14 & 20 & 9 \end{bmatrix}$$

نقل الصفوف الى أعمدة و بالعكس

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 15 & 25 & 20 \\ 7 & 13 & 9 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{المباريات} \\ \text{التسديدات} \\ \text{الأهداف} \end{array} \end{array}$$

ترتيب الأهداف تنازليا

$$\begin{bmatrix} 11 & 14 & 8 \\ 25 & 20 & 15 \\ 13 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$s_{32} = 9$$

16 أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

مجموع عناصر الصف الثاني = 25 + 20 + 15 = 60 يمثل العدد الكلي للتسديدات للاعبين الثلاثة

17 أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

مجموع عناصر العمود الثالث = 8 + 15 + 7 = 30 ليس له معنى

كهربائيات: تتوزَّع 3 مستودعات لإحدى وكالات تجارة الأجهزة الكهربائية في 3 مدن. يوجد في مستودع المدينة الأولى 200 ثلّاجة، و380 غسّالة، و250 شاشة، و300 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثانية 160 ثلّاجة، و540 غسّالة، و290 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثالثة 120 ثلّاجة، و280 غسّالة، و400 شاشة، و470 مروحة:

18 أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة تُمثِّل أعمدتها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثمَّ أُحدِّد رتبة المصفوفة الناتجة.

19 أجمع عناصر كل صف، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

20 أجمع عناصر كل عمود، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\text{ثلاجة} & \text{غسالة} & \text{شاشة} & \text{مروجة}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{مستودع المدينة الأولى}\\ \text{مستودع المدينة الثانية}\\ \text{مستودع المدينة الثالثة}\end{array} & \begin{bmatrix} 8 & 11 & 11 & 14 \\ 15 & 25 & 25 & 20 \\ 7 & 13 & 13 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

رتبة المصفوفة 3×4

19 أجمع عناصر كل صف، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\text{ثلاجة} & \text{غسالة} & \text{شاشة} & \text{مروجة}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 11 & 11 & 14 \\ 15 & 25 & 25 & 20 \\ 7 & 13 & 13 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

الرقم يمثل	المجموع
عدد الأجهزة بانواعها في المدينة الأولى	44
عدد الأجهزة بانواعها في المدينة الثانية	85
عدد الأجهزة بانواعها في المدينة الثالثة	42

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

20 أجمع عناصر كل عمود، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

$$\begin{array}{cccc} \text{ثلاجة} & \text{غسالة} & \text{شاشة} & \text{مروحة} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 11 & 11 & 14 \\ 15 & 25 & 25 & 20 \\ 7 & 13 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

	ثلاجة	غسالة	شاشة	مروحة
المجموع	30	49	49	43
الرقم يمثل	عدد صنف الثلاجات في المدن الثلاثة	عدد صنف الغسالات في المدن	عدد صنف الشاشات في المدن الثلاثة	عدد صنف المراوح في المدن الثلاثة

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

مسألة اليوم سُئِلت الأُسَر في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثمَّ سُجِّلت النتائج في الجدول المجاور الذي يُبيِّن عدد الأُسَر التي تستعمل كل مصدر. كيف يُمكِن عرض بيانات الجدول بصورة أُخرى مُختصَرة؟

	أخرى	الكاز	الكهرباء	الغاز
المدينة A	1253	4589	1678	3256
المدينة B	2564	5874	978	4560

يمكن تمثيلها بطريقة أخرى بنقل الصفوف الى أعمدة وبالعكس الاعمدة الي صفوف

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: أُبيِّن إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإنَّ $A = B$.

العبارة غير صحيحة لان شرط المساوة ان تكون عدد الصفوف و عدد الاعمدة متساوية أي لهما نفس الرتبة

1- قد تكون عدد عناصر المجوعة A = عدد عناصر المجموعة B و لكن الصفوف او الاعمدة غير متساوية

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

عدد العناصر متساوية لكن الرتبة مختلفة و القيم المتناظرة غير متساوية

2- قد تكون عدد العناصر متساوية و الرتبة متساوية لكن العناصر المتناظرة غير متساوية

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

23 مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 3، وأسمِّيها A، بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$، لكلٍّ من i, j.

أنشئ مصفوفة 3x3 على الصورة العامة

و انظر الى العناصر التي تحقق

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

العنصر	قيمة مقترحة
$a_{11} = a_{11}$ فقط	1
$a_{12} = a_{21}$	2
$a_{13} = a_{31}$	3
$a_{21} = a_{12}$	2
$a_{22} = a_{22}$ فقط	4
$a_{23} = a_{32}$	5
$a_{31} = a_{13}$	3
$a_{32} = a_{23}$	5
$a_{33} = a_{33}$ فقط	0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة: تُسمى المصفوفة المربعة A = [aij] مصفوفة متماثلة إذا كانت

aij = aji

لجميع قيمi,j

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

24 تبرير: إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عددًا أوّليًّا، فماذا يُمكِن أنْ تكون رتبتها؟ أُبرِّر إجابتي.

إرشاد: العدد الأوَّليّ هو عدد أكبر من 1، وله عاملان فقط، هما: العدد 1، ونفسه.

العدد الاولي هو عدد اكبر من 1 و له عاملان فقط

مثل 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11

اذا كان عدد عناصر المصفوفة عدد اولي اذن لا نستطيع توزيع الأرقام بصفوف و أعمدة مكتملة اذن

تكون المصفوفة B من نوع مصفوفة صف او مصفوفة عمود

مصفوفة صف تكوت رتبتها $(1\ x\ n)$

مصفوفة عمود تكون رتبتها $(mx1)$

$$B = \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ & 7 & \end{bmatrix}}$$

توضيح ليكن المصفوفة B عدد عناصرها 7 و هو عدد اولي حاول رتبها بصفوف و أعمدة متساوية لن تستطيع

لاحظ الصف الأخير غير مكتمل اذا الحل هو ترتيب العناصر اما مصفوفة صف او مصفوفة عمود

$$B = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

25 تبرير : إذا كانت المسافة بين إربد وعمّان 88 km، والمسافة بين عمّان والعقبة 324 km، والمسافة بين إربد والعقبة 408 km، فأُنشِئ مصفوفة رتبتها 3 × 3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث، ثمّ أُبرِّر إجابتي.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{عمان} & \text{اربد} & \text{العقبة} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{عمان} \\ \text{اربد} \\ \text{العقبة} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 88 & 324 \\ 88 & 0 & 408 \\ 324 & 408 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مصفوفة متماثلة و قطرها يساوي صفر

$$a_{ij} = a_{ji}$$

But when i = j = (a_{ij} and a_{ji}) = 0

$$a_{11} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{33} = 0$$

26 **تحدٍّ**: أكتب المصفوفة B، حيث: $b_{ij} = 2i - j$ لكل $i \in \{1, 2, 3\}$، ولكل $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- لاحظ عدد عناصر i ثلاثة عناصر وهي الصفوف
- وعدد عناصر j أربعة عناصر وهي الاعمدة
- اذن رتبة المصفوفة 3x4

أنشئ مصفوفة من الرتبة 3x4 بالصورة القياسية رمزها B

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- جد قيمة كل عنصر بتعويض قيمة i و تعويض قيمة j

b_{11}	=	2 (i) - j	=	2 (1)	−	1	=	1
b_{12}	=	3 (i) - j	=	2 (1)	−	2	=	0
b_{13}	=	4 (i) - j	=	2 (1)	−	3	=	-1
b_{14}	=	5 (i) - j	=	2 (1)	−	4	=	-2
b_{21}	=	6 (i) - j	=	2 (2)	−	1	=	3
b_{22}	=	7 (i) - j	=	2 (2)	−	2	=	2
b_{23}	=	8 (i) - j	=	2 (2)	−	3	=	1
b_{24}	=	9 (i) - j	=	2 (2)	−	4	=	0
b_{31}	=	10 (i) - j	=	2 (3)	−	1	=	5
b_{32}	=	11 (i) - j	=	2 (3)	−	2	=	4
b_{33}	=	12 (i) - j	=	2 (3)	−	3	=	3
b_{34}	=	13 (i) - j	=	2 (3)	−	4	=	2

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

27 تحدٍّ: أجد قيمة كلٍّ من x، وy، وz إذا كانت: $\begin{bmatrix} x+2y & x-y \\ x+y+3z & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$.

نشكل معادلات و نحل بطريقة التعويض

X + 2 y = 13 1

X – y = 7 2

X + y + 3 z = 2 3

عوض قيمة x و y في معادلة 3 لا يجاد z 9 + 2 + 3 z = 2 11 + 3 z = 2 3 z = 2-11 3 z = -9 Z = $\frac{-9}{3} = -3$	عوض قيمة y في معادلة 2 X – 2 = 7 X=7+2 = 9 X= 9	من معادلة رقم 1 X= 13 -2 y عوض قيمة x في معادلة 2 13 – 2 y - y =7 13 – 3 y = 7 -3 y = 7-13 -3 y = -6 Y =$\frac{-6}{-3} = 2$

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات

Introduction to Matrices

حلول أسئلة كتاب الطالب

أُحدِّد رتبة كل مصفوفة ممّا يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

المصفوفة	الرتبة
1	2 x 3
2	3 x 1
3	2 x 2
4	1 x 3
5	3 x 3
6	4 x3

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازيٌّ	40	60	75
شاي	30	40	55
قهوة	50	70	90
عصير	65	90	125

يُبيِّن الجدول المجاور الأسعار (بالقروش) لعدد من المشروبات في أحد المَحالِّ التجارية:

7) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 4×3، ثمَّ أُسمّي المصفوفة P.

8) أجد العنصر p_{32}، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله.

9) ما رمز العنصر 55 في هذه المصفوفة؟

المطلوب مصفوفة 4 صفوف و 3 أعمدة

$$P=\begin{bmatrix} 40 & 60 & 75 \\ 30 & 40 & 55 \\ 50 & 70 & 90 \\ 65 & 90 & 125 \end{bmatrix}$$

الرتبة	4X3
p_{32}	الصف 3 , و العمود 2 = 70
	يمثل قهوة و سط
55	موجود في صف 2 و عمود 3 و يرمز له
	p_{23}

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

10 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 5 & x+3 \\ 8 & 0 \\ 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ x+y & 0 \\ 1 & y+4 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y، و z.

• X + 3 = 4 X = 4-3 **X = 1**	• X + y = 8 1 + y = 8 Y = 8 – 1 **Y = 7**	• Z = y + 4 Z = 7 + 4 **Z = 11**

خدمات حكومية: يُتوقَّع إنشاء مدارس ومراكز صِحِّية جديدة عام 2025م وعام 2026م في ثلاث محافظات كما هو مُبيَّن في الجدول المجاور:

	المراكز الصِّحيَّة	المدارس
المحافظة 1	12	54
المحافظة 2	23	94
المحافظة 3	18	75

11 أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 2×3

12 أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

13 أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

الاصلية　　　　نقل الصفوف الى أعمدة و بالعكس

$$\begin{bmatrix} 54 & 12 \\ 94 & 23 \\ 75 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 54 & 94 & 75 \\ 12 & 23 & 18 \end{bmatrix}$$

- مجموع عناصر الصف الأول = 54+94+75 = 223 عدد المدارس في المحافظات الثلاثة
- مجموع عناصر العمود الثاني = 94+23 = 117 ليس له معنى

نهاية الدرس الأول

الدرس

2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

- جمع المصفوفات
- طرح المصفوفات
- ضرب المصفوفة بعدد ثابت
- خصائص العمليات على المصفوفات

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

جمع و طرح المصفوفات

- معنى جمع وطرح المصفوفات هو ان نقوم بجمع العناصر او طرح العناصر داخل المصفوفة ولكن يوجد شرط مهم للقيام بعملية الجمع و عملية الطرح
- يعني نقوم بجمع و طرح العناصر المتناظرة في المصفوفتين
- العناصر المتناظرة : كل عنصر في مصفوفة A له نظير في المصفوفة B و هي العناصر التي لها نفس الموقع

$$A=\begin{bmatrix} 40 & 60 & 75 \\ 30 & 40 & 55 \\ 50 & 70 & 90 \\ 65 & 90 & 125 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 42 & 58 & 74 \\ 32 & 38 & 54 \\ 52 & 68 & 89 \\ 67 & 88 & 124 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان 40 في المصفوفة A نظيره هو العدد 42 في المصفوفة B لان لهما نفس المكان

a_{11} نظيره b_{11}

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

الشرط الأساسي للقيام بعملية الجمع و الطرح

- يجب ان تكون رتبة المصفوفات متساوية حتى نستطيع القيام بالجمع و الطرح
- رتبة المصفوفة هي عدد الصفوف مضروبة بعدد الاعمدة بالترتيب (الصفوف أولا ثم الاعمدة ثانيا)
- رتبة المصفوفة (mxn) حيث m هي عدد الصفوف و n هي عدد الاعمدة

اعتمادا على المعلومات المطروحة حدد فيما اذا يجوز جمع او طرح المصفوفات التالية

المصفوفة A32	المصفوفة B32	نعم	لهما نفس الرتبة
مصفوفةA من 3 صفوف و 4 أعمدة	مصفوفةA من 3 صفوف و 3 أعمدة	لا	الرتبة مختلفة
مصفوفة A مصفوفة صف	مصفوفة B مصفوفة عمود	لا	الرتبة مختلفة
مصفوفة A مصفوفة مربعة من رتبة 3	مصفوفة B مصفوفة مربعة من رتبة 3	نعم	لهم نفس الرتبة
$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$،	$B=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$	لا	الرتبة مختلفة
$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	نعم	لهم نفس الرتبة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

القاعدة : نجمع العناصر المتناظرة

مفهوم أساسي

جمع المصفوفات وطرحها

بالكلمات: إذا كان A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$، فإنَّ $A + B$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$، وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين اللذين يُناظِرانه في هاتين المصفوفتين. وبالمثل، فإنَّ $A - B$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$، وكل عنصر فيها يساوي ناتج طرح العنصرين المُناظِرين له في المصفوفة A والمصفوفة B.

بالرموز: إذا كان: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$، فإنَّ:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

- المصفوفة الناتجة من الجمع او الطرح او الضرب في ثابت تكون رتبتها مساوية لرتبة المصفوفات المطروحة او المجموعة

$$[A_{3X2}] + [B_{3X2}] = [C_{3X2}]$$
$$[A_{3X2}] - [B_{3X2}] = [C_{3X2}]$$
$$3[A_{3X2}] = [C_{3X2}]$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

مثال 1

إذا كان: $D=\begin{bmatrix}2&4\\5&3\\-9&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&7&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&-2\\3&0\\-7&6\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2&4&6\\-1&-5&4\end{bmatrix}$،

فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

اتحقق من فهمي

ستعمل المصفوفات الواردة في المثال 1 لإيجاد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

a) $C-A$ b) $D+B$ c) $C+D$

A رتبتها هي 2 X 3	B رتبتها هي 3 X 2	C رتبتها هي 2 X 3	D رتبتها هي 3 X 2

a) ***C-A*** يمكن الطرح لان لهما نفس الرتبة

C_{23} = A_{23}

$C=\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&7&6\end{bmatrix}$ - $A=\begin{bmatrix}2&4&6\\-1&-5&4\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}(3-2)&(-1-4)&(2-6)\\(4--1)&(7--5)&(6-4)\end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix}1&-5&-4\\5&12&2\end{bmatrix}$

b) ***D+B*** يمكن الطرح لان لهما نفس الرتبة

D_{32} = B_{32}

$D=\begin{bmatrix}2&4\\5&3\\-9&1\end{bmatrix}$ + $B=\begin{bmatrix}5&-2\\3&0\\-7&6\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}7&2\\8&3\\-16&7\end{bmatrix}$

c) C+D لا يمكن جمعهما لانهما مختلفين في الرتبة $C_{23} \neq D_{32}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

عند **ضرب المصفوفة في عدد ثابت** (scalar multiplication)، فإنَّ ذلك يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد الثابت.

مفهوم أساسي

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

بالكلمات: إذا كان A مصفوفة رتبتها $m \times n$، وكان k عددًا ثابتًا، فإنَّ kA مصفوفة رتبتها $m \times n$، وكل عنصر فيها يساوي العنصر المُناظِر له في المصفوفة A مضروبًا في k.

بالرموز: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$، وكان k عددًا ثابتًا، فإنَّ:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

علاقة الجمع و الضرب

$2x3 = 6 \qquad 3+3 = 6$

- ضرب أي عدد بعدد صحيح و موجب يعني كرر العدد مرات تساوي العدد الصحيح
- ضرب العدد 3 بالرقم 2 يساوي جمع العدد 3 مرتين = 3+3
- ضرب عدد ثابت في مصفوفة (اضرب كل عنصر في المصفوفة بهذا العدد و ابقيه مكانه)

أتعلَّم

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الضرب في عـدد صحيح موجب هو جمـع مُتكـرِّر؛ فإذا كان A مصفوفة، فإنَّ $3A$ يُكافِئ $A+A+A$.

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $3D$　　b) $-2D$　　c) $1.5D$

a) 3D = $3\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3x0) & (3x4) & (3\ x-3) \\ (3x7) & (3\ x\ -2) & (3x1) \\ (3x8) & (3x10) & (3x6) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 12 & -9 \\ 21 & -6 & 3 \\ 24 & 3 & 18 \end{bmatrix}$

b) -2D = $-2\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -14 & 4 & -2 \\ -16 & -20 & -12 \end{bmatrix}$

b) 1.5D = $1.5\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -4.5 \\ 10.5 & -3 & 1.5 \\ 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

خصائص العمليات على المصفوفات

إنَّ أغلب خصائص العمليــات على الأعداد الحقيقية تكون أيضًا صحيحة على المصفوفات. وفي ما يأتي مُلخَّص لهذه الخصائص.

مفهوم أساسي

خصائص العمليات على المصفوفات

إذا كان A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k, h عددين حقيقيين، فإنَّ:

الخاصية التبديلية لجمع المصفوفات
1. $A + B = B + A$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

خاصية توزيع الضرب في ثابت
3. $k(A + B) = kA + kB$

يُمكِــن إجراء عمليات مُتعــدِّدة الخطوات على المصفوفات، ويكــون ترتيب هذه العمليات مُشابِهًا لترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

أتذكَّر

المســألة المُتعــدِّدة الخطــوات هــي مســألة أحتــاج إلــى أكثــر مــن عمليــة رياضيــة لحلِّهــا، مثــل: الجمــع، والطــرح، والضــرب، والقســمة.

❖ الخاصية التبديلية : تنطبق على الجمع فقط (الجمع عملية تبديله بمعنى اذا كان هناك رقمين فان جمع الرقم الأول مع الرقم الثاني = جمع الرقم الثاني مع الرقم الأول)

3+5= 5+3= 8

-3+5=5+(-3)=2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس

2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

- ❖ الخاصية التبديلية لا تنطبق على الطرح

$3-5 \neq 5-3$

الخاصية التجميعية (جمع ثلاث ارقام او اكثر) يجوز الجمع باي ترتيب (جمع الأول مع الثاني) ثم الناتج يجمع للرقم الثالث = جمع الأول مع الثالث ثم الناتج يجمع للثاني وهكذا

$(3+4)+5= (3+5)+4=(4+5)+3$

- ❖ الضرب بعدد ثابت (ضرب عدد ثابت في قوس – يتم التوزيع) بمعنى فك القوس

$3(2+4) = 3x2+3x4$

Or $3 (6)$

- ❖ جمع العدد مع الصفر (الصفر في الجمع و الطرح هو عنصر محايد لا يغير من النتيجة) $3+0=3$, $2-0=2$
- ❖ جمع العدد مع معكوس العدد نفسه (نفس العدد بإشارتين مختلفات) = صفر

$3+(-3)=0$ $(A)+(-A)= 0$

أتذكَّر

أُجري العمليات الحسابية بحسب أولويات العمليات.

الدرس
2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

ترتيب العمليات الحسابية (PEMDAS)

1. **الأقواس:(Parentheses/Brackets)**

تُجرى العمليات داخل الأقواس أولاً، من الداخل إلى الخارج ومن الأصغر إلى الأكبر.

2. **الأسس والجذور:(Exponents/Roots)**

بعد الأقواس، تأتي خطوة الأسس والجذور، مثل 5^2 أو جذر 16.

3. **الضرب والقسمة:(Multiplication and Division)**

تُجرى هاتان العمليتان بالترتيب الذي تظهران به من اليسار إلى اليمين.

4. **الجمع والطرح:(Addition and Subtraction)**

تُجرى هاتان العمليتان بالترتيب الذي تظهران به أيضاً من اليسار إلى اليمين.

مثال توضيحي:

لنحلّ المعادلة التالية: $20 \div (4^2 + 8 - 7 \times 2)$

1. **العمليات داخل الأقواس:**
   - **الأسس.** $4^2 = 16$ **:** فتصبح المعادلة: $20 \div (16 + 8 - 7 \times 2)$.
   - **الضرب.** $7 \times 2 = 14$ **:** فتصبح المعادلة: $20 \div (16 + 8 - 14)$.
   - **الجمع والطرح (من اليسار لليمين)** **:** $16 + 8 = 24$، ثم $24 - 14 = 10$.
2. **النتيجة النهائية:**
   - تصبح المعادلة $20 \div 10$.
   - النتيجة هي 2.

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس

2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $E=\begin{bmatrix}5\\-3\\9\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}6\\8\\12\end{bmatrix}, G=[3 \quad 0 \quad 7], H=[6 \quad -4 \quad 9]$، فأجـد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

a) $4E-3F$ b) $2G+6F$ c) $5(G+H)$

E (3X1)	F (3X1)	G (1 X3)	H (1X3)

a) 4E-3F لهما نفس الرتبة نستطيع اجراء عملية الطرح

$$4\begin{bmatrix}5\\-3\\9\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}6\\8\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\-12\\36\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}18\\24\\36\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\-36\\0\end{bmatrix}$$

b) 2G+6F بالنسبة لضرب الثابت بالمصفوفة لا يشترط ان تكون نفس الرتبة و لكن كونه يوجد عملية جمع و لان رتبة المصفوفات متساوية لا نستطيع اجراء الجمع اما الضرب يمكن

c) 5(G+H) لهما نفس الرتبة نستطيع اجراء عملية الجمع

نجمع أولا ثم الناتج نضربه بالثابت

$$5\ ([3 \quad 0 \quad 7] + [6 \quad -4 \quad 9]) = 5\ ([9 \quad -4 \quad 16]) = [45 \quad -20 \quad 80]$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

أتحقَّق من فهمي

زراعــة: يملك كلٌّ من راشــد وحمــد مزرعة في الأغــوار، ومزرعة أُخرى فــي المفرق. إذا مثَّلت المصفوفة A مُعدَّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغــرام) لمزرعتيهما في الأغوار من البندورة والباذنجان والفلفــل، ومثَّلت المصفوفة B مُعدَّل الإنتاج اليومــي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما فــي المفرق من الأصناف نفســها، فأجد المصفوفــة C التي تُمثِّل مُعدَّل الإنتاج الأســبوعي (بالكيلوغرام) لمزرعتي راشد وحمد في الموقعين معًا.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{array} , \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{array}$$

معدل الإنتاج اليومي : نضرب كمية الإنتاج لكل صنف بواحد يوم

معدل الإنتاج الأسبوعي : نضرب كمية الإنتاج بعدد 7 (الأسبوع 7 أيام)

معدل الإنتاج الشهري : نضرب الإنتاج اليومي ب 30 يوم على اعتبار ان الشهر 30 يوم

معدل الإنتاج السنوي : نضرب الإنتاج ل 365 يوم

الحل : نضرب كل انتاج في المصفوفة A ب 7 و كذلك المصفوفة B و نجمع الناتج

او (نجمع المصفوفة A و المصفوفة B و الناتج نضربه ب 7)

1) $A+B = C \begin{bmatrix} 330 & 600 & 400 \\ 500 & 730 & 420 \end{bmatrix}$

2) $7\,C = 7 \begin{bmatrix} 330 & 600 & 400 \\ 500 & 730 & 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2310 & 4200 & 2800 \\ 3500 & 5110 & 2940 \end{bmatrix}$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

الحل	الرتبة	المصفوفة
$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$	(3X3)+ (3X3)	1 $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
لا يجوز ليس لهما نفس الرتبة	(3X3) + (2X3)	2 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$	(3X1)- (3X1)	3 $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$	(2X2)- (2X2)	4 $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -6 & 36 & 4 \\ 7 & 9 & 21 \end{bmatrix}$	(2X3)+ (2X3)	5 $\begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 38 & -55 & 15 \end{bmatrix}$	(1X3)- (1X3)	6 $\begin{bmatrix} 32 & -12 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 43 & -7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 27 & -6 \\ 12 & 1 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$		7 $3\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 10 & -14 \\ 6 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$		8 $\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس

2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

المصفوفة	الرتبة	الحل
9 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 12 & -32\\9 & 6 & -3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}-2 & -6 & 16\\\frac{-9}{2} & -3 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$
10 $2\begin{bmatrix}1 & -5\\2 & 9\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & 2\\3 & -5\end{bmatrix}$	2X2 2X2	$\begin{bmatrix}2 & -10\\4 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & 6\\9 & -15\end{bmatrix}$
نضرب كل مصفوفة ثم مجمع		$\begin{bmatrix}14 & -4\\13 & 3\end{bmatrix}$
11 $-4\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 6\\-2 & 7 & 4\\6 & 3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 6 & 10\\5 & -4 & 1\\8 & -1 & 7\end{bmatrix}\right)$	3X3 3X3	$-4\begin{bmatrix}-9 & -5 & -4\\-7 & 11 & 3\\-2 & 4 & -2\end{bmatrix}$
نطرح المصفوفات و الناتج نضربه بالثابت		$=\begin{bmatrix}36 & 20 & 16\\28 & -44 & -12\\8 & -16 & 8\end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

12 $2\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -3 & 2\\ 6 & 0\end{bmatrix}$	2X3 2X3 2X3	$\begin{bmatrix}-8 & -4\\ 12 & 6\\ 0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 3\\ 0 & -3\\ 12 & -9\end{bmatrix}+$ $\begin{bmatrix}10 & 20\\ 15 & -10\\ -30 & 0\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}17 & 19\\ 27 & -7\\ -18 & -1\end{bmatrix}$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

إذا كان: $C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

A (2X2)	B (2X3)	C(2X2)

المصفوفة	الرتبة	الحل
13 $4A+3B$	2X2 2X3	لا يجوز
14 $2C-3A$	2X2 2X2	$2\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}6 & 4\\ 0 & -18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & -6\\ -9 & 30\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}-6 & 10\\ 9 & -48\end{bmatrix}$
15 $B+1.5B$	2X3 2X3	$\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}+1.5\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -1.5 & -7.5\\ 4.5 & 3 & 12\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}10 & -2.5 & -12.5\\ 7.5 & 5 & 20\end{bmatrix}$
16 $3B+2C$	2X3 2X2	لا يجوز

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

المصفوفة	الرتبة	الحل
17 $2A - C$	2X2 2X2	$2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}8 & -4\\ -6 & 20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}5 & -6\\ -6 & 29\end{bmatrix}$
18 $4A + 3C$	2X2 2X2	$4\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}16 & -8\\ -12 & 40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 6\\ 0 & -27\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}25 & -2\\ -12 & 13\end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

19 رياضة: لدى مَحَلٍّ تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثَّلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان من جميع المقاسات (صغيرة، مُتوسِّطة، كبيرة) في شهر نيسان عام 2024 م، ومثَّلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023 م، فأجد المصفوفة التي تُمثِّل ما باعه كلٌّ من الفرعين في الشهرين معًا.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{صغير} & \text{مُتوسِّط} & \text{كبير} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array} , \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{صغير} & \text{مُتوسِّط} & \text{كبير} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18 & 42 & 23 \\ 20 & 25 & 21 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}$$

- كل فرع باع لشهر واحد فقط (لا يحتاج ضرب العناصر باي رقم)
- الحل جمع المصفوفات فقط

$$C=\begin{bmatrix} 38 & 57 & 33 \\ 32 & 55 & 38 \end{bmatrix}$$

20 مدارس: يُبيِّن الجدول المجاور محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م. تُخطِّط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما نسبته 40%. أكتب مصفوفة تُمثِّل ما يجب شراؤه للمختبرين، ومصفوفة أُخرى تُمثِّل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

	أجهزة حاسوب	طاولات	مقاعد
المختبر A	15	20	30
المختبر B	20	25	40

لمعرفة عدد الأجهزة الجديدة نضرب بقيمة الزيادة $\frac{40}{100} = 0.4$

$$0.4\begin{bmatrix} 15 & 20 & 30 \\ 20 & 25 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 30 \\ 20 & 25 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 21 & 28 & 42 \\ 28 & 35 & 56 \end{matrix}$$

زيادة بما نسبته 40 بالمئة (الأرقام بالجدول تمثل 100% لزيادتها 40% نضرب بعدد ثابت 1.4) او نجمع المصفوفة الاصلية مع المصفوفة الجديد

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

21 أجد قيمة كلٍّ من x، وy، وz التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$2\begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} z & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

انتبه بما ان هناك إشارة مساواة و رتب المصفوفات متساوية شكل معادلات مباشرة

$$1)\ \begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 12 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 18 \\ 3z & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4z & 12 \\ 0 & 4x \end{bmatrix}$$

a) 2x = 3x -4z 1
b) 12 = 3z-0 2
c) 2y = -6 -4x 3

- من معادلة 2

  12 = 3z

  Z= 12/3 = 4
- في معادلة 1 عوض قيمة

  2x = 3x - 4(4)

  2x -3x = -16

  -x = -16

  X= 16
- في معادلة 3 عوض قيمة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

2y = -6 – 4 (16)

2 y = -6 – 64

2 y = 70

Y = 70/2 = 35

22 أَحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مسألة اليوم تُمثِّل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$ أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات (شـــاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأُخرى كبيرة في أحد الأكشـــاك. وقد قرَّر صاحب الكشك رفع الأســـعار بما نسبته 20%، نظرًا إلى زيادة التكاليف. ما المصفوفة التي تُمثِّل الأسعار الجديدة؟

الزيادة يعني نضرب الأرقام بعدد ثابت 20 % +% 100 = 120% = 1.2

$$1.2\begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.48 & 0.9 \\ 0.72 & 1.2 \\ 1.8 & 3 \end{bmatrix}$$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

مهارات التفكير العليا

23 تبرير: أُحدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مُساوِيًا لعدد عناصر المصفوفة B، فإنَّه يُمكِن إيجاد $A + B$.

غير صحيحة دائما (عدد العناصر ليس الشرط لجمع المصفوفات) الشرط ان تكون الرتبة للمصفوفة A و المصفوفة B متساوية (فمثلا مصفوفة صف من 3 عناصر لها نفس العدد من العناصر لمصفوفة عمود من 3 عناصر و مع ذلك لا يجوز الجمع بينهما)

$A = [1 \;\; 2 \;\; 3] \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ لهما نفس العدد من العناصر و لا يجوز الجمع

24 أكتشف الخطأ: ما الخطأ في الحلِّ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

لا يجوز الجمع لانهما ليست نفس الرتبة A_{2X2} و B_{2X3}

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

25 مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B، بحيث يكون: $3A + 2B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$

في مثل هذه المسائل أنشئ مصفوفة بالصور القياسية كتالي

ملاحظة المصفوفة A و المصفوفة B من الرتبة 2X3 كيف عرفنا ، بما انه يوجد مساوة اذن تكون رتب كل المصفوفات متساوية

$$3\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

اسهل طريقة افترض ان العنصر a دائما صفر و حل معادلة عادية

$3a_{11}+ 3b_{11} = 12$	Let $a_{11}= 0$ Then $b_{11} =$	$\frac{12}{3} =4$
$3a_{12}+ 3b_{12} = 8$,	Let $a_{12}= 0$ Then $b_{12} =$	$\frac{8}{3}$
$3a_{13}+ 3b_{13} = 10$	Let $a_{13}= 0$ Then $b_{13} =$	$\frac{10}{3}$
$3a_{21}+ 3b_{21} = 6$	Let $a_{21}= 0$ Then $b_{21} =$	$\frac{6}{3} =2$
$3a_{22}+ 3b_{22} = -5$	Let $a_{22}= 0$ Then $b_{22} =$	$\frac{5}{3} =$
$3a_{23}+ 3b_{23} = 11$	Let $a_{23}= 0$ Then $b_{23} =$	$\frac{11}{3}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & . & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \\ & . & \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

26 تحدٍّ: أجد المصفوفتين X, Y اللتين تُحقِّقان المعادلتين الآتيتين:

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, 3X + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

أولا راجع حل المعادلات بطريقة الحذف

ثانيا : هنا يوجد شرط و هو ان X يجب ان تصلح في المصفوفتين و كذلك Y

اكتب المصفوفة X بالصورة القياسية

اكتب المصفوفة Y بالصورة القياسية

اكتب المصفوفة 2Y بالصورة القياسية

اكتب المصفوفة 3X بالصورة القياسية

اكتب المصفوفة 4Y بالصورة القياسية

المصفوفة X	$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$	المصفوفة 3X	$3\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} \\ 3x_{21} & 3x_{22} \end{bmatrix}$
المصفوفة Y	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	المصفوفة 2 Y	$2\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 2y_{11} & 2y_{12} \\ 2y_{21} & 2y_{22} \end{bmatrix}$
		المصفوفة 4 Y	$4\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 4y_{11} & 4y_{12} \\ 4y_{21} & 4y_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2y_{11} & 2y_{12} \\ 2y_{21} & 2y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix},, \begin{bmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} \\ 3x_{21} & 3x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4y_{11} & 4y_{12} \\ 4y_{21} & 4y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

شكل معادلتين لكل عنصر من كل جزء وحل بطريقة الحذف

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

x11 – 2 y11 = 1 1
3 x11 + 4 y11 = 8 2
3[x11 – 2 y11 = 1] ضرب المعادلة الأولى ب3
3x11 – 6 y11 = 3 طرح المعادلتين 3 x11 + 4 y11 = 8 0+(-6-4) y11 = (3-8) -10 y11 = -5 y11 = **0.5** عوض قيمة Y11 في أي معادلة لإيجاد X11 x11 – 2 (0.5) = 1 x11 = 1+ 1 = 2

$$\begin{bmatrix} 2 & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix},,,,, \begin{bmatrix} 0.5 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

x12 – 2 y12 = 5 1
3 x12 + 4 y12 = 5 2
3[x12 – 2 y12 = 5] ضرب المعادلة الأولى ب3
3x12 – 6 y12 = 15 طرح المعادلتين 3 x12 + 4 y12 = 5 0+(-6-4) y12 = (15-5) -10 y12 = 10 y12 = -1 عوض قيمة Y11 في أي معادلة لإيجاد X11 x12 – 2 (-1) = 5 x12 = 5- 2 = 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix},,,,, \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & x_{22} \end{bmatrix} ,,,,,, \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -2.5 & y_{22} \end{bmatrix}$$

X21 – 2 y21 = -2 1
3 x21 + 4 y21 = -31 2
3[x21 – 2 y21 = -2] ضرب المعادلة الأولى ب3
3x21 – 6 y21 = -6 طرح المعادلتين 3 x21 + 4 y21 = -31 0+(-6-4) y21 = (-6 - -31) -10 y21 = 25 Y21 = -2.5 عوض قيمةY11 في أي معادلة لإيجاد X11 X21 – 2 (-2.5) = -2 x21 +5=-2 x21= -2-5 = -7

X22 – 2 y22 = 9 1
3 x22 + 4 y22 = 12 2
3[x22 – 2 y22 = 9] ضرب المعادلة الأولى ب3
3x22 – 6 y22 = 27 طرح المعادلتين 3 x22 + 4 y22 = 12 0+(-6-4) y22 = (27-12) -10 y22 = 15 Y22 = -1.5 عوض قيمةY11 في أي معادلة لإيجاد X11 X22 – 2 (-1.5) = 9 x22 +3=9 x22= 9-3 = 6

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -2.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

حل أسئلة كتاب الطالب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -9 & 30 & 36 \\ 12 & 15 & -24 \end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

A = 3X2	B =3X2	C =2X3	D =2X3

المصفوفة	الرتبة	الحل
1 $A + B$	3X2 3X2	$\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 2 & 8 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$
2 $B + C$	3X2 2X3	لا يجوز الجمع
3 $C - D$	2X3 2X3	$\begin{bmatrix} 5 & -30 & -28 \\ -11 & -10 & 28 \end{bmatrix}$
4 $B - A$	3X2 3X2	$\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -8 & -6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$
5 $4A$		$\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 20 & 28 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

المصفوفة	الرتبة	الحل
6 $3A - 2B$	3X2 3X2	$\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 15 & 21 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 10 \\ -6 & 2 \\ 16 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ 21 & 19 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$
7 $D + 2C$	2X3 2X3	$\begin{bmatrix} -9 & 30 & 36 \\ 12 & 15 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 & 16 \\ 2 & 10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 30 & 52 \\ 14 & 25 & -16 \end{bmatrix}$
8 $-\frac{2}{3}D$		$-\frac{2}{3}\begin{bmatrix} -9 & 30 & 36 \\ 12 & 15 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -20 & -24 \\ -8 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

9 أكتب المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$ في صورة: $A = kM$، حيث k عدد ثابت، وM مصفوفة عناصرها أعداد صحيحة.

اكتب المصفوفة M بالصورة القياسية

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$kM = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} \\ km_{21} & km_{22} \end{bmatrix}$$

لاحظ ان k هو العامل المشترك) اذن نجد العامل المشترك بين عناصر المصفوفة و تكون قيمة k منها نشكل معادلة لإيجاد قيم M

$$\frac{5}{3} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{7}{6}$$

(3),(2),(2X2),(3X2) = 3 . 2 .2 .2 .2 .3 = 3.2.2 =12

$$K= \frac{1}{12}$$

الان بسهولة نستطيع إيجاد قيم العناصر

a) $\frac{1}{12} m_{11} = \frac{5}{3} = m_{11} = \frac{5}{3} \text{x} \frac{12}{1} = 20$

b) $\frac{1}{12} m_{12} = \frac{-1}{2} = m_{12} = \frac{-1}{2} \text{x} \frac{12}{1} = -6$

c) $\frac{1}{12}m_{21}$ = $\frac{1}{4}$ = m_{21}= $\frac{1}{4}$ x $\frac{12}{1}$ = 3

d) $\frac{1}{12}m_{22}$ = $\frac{7}{6}$ = m_{22}= $\frac{7}{6}$ x $\frac{12}{1}$ = 14

$$kM = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

10 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 11 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3b \\ c & d \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb، وc، وd.

يوجد إشارة مساواة اذن تحقق شروط المساواة

a) 3+b = 9 .... b = 9-3 = 6

b) a+11= 3b , a+11= 3(6) , a+11=18 , a = 18-11 = 7

c) -2-4= c .. c = -6

d)-8+12 = d ,,, d= 4

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

11 إذا كانت: $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y.

لاحظ المصفوفة الأولى يوجد عنصر متساوي وهو قطر المصفوفة

اين يقع العنصر x في المصفوفة الأولى يقع في a11 و a22

اذن شكل معادلات من هذين العنصريين

$X - Y = 4$

$\underline{X + y = 6}$

$2X = 10$,,,,, $X = 5$

$5 - Y = 4$,,,,, $Y = 1$

نفس النتيجة اذا اخذنا معادلات العنصر X في المصفوفة الثانية

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

12 إذا كانت: $3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة B.

مباشر شكل معادلات (اكتب المصفوفة B بالصورة القياسية)

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} \\ 2b_{21} & 2b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $6\text{-}2b_{11} = 3$, b_{11} = - 2b = 3-6 ...... -2b =-3 ,,, b = $\frac{3}{2}$

b) $-3\text{-}2b_{12} = 5$, b_{12} = - 2b = 5+3 ...... -2b =8 ,,, b =$\frac{8}{-2}$ =-4

c) $12\text{-}2b_{21} = -2$, b_{21} = - 2b = -2-12 ... -2b =-14 ,,, b = $\frac{14}{2}$= 7

d) $15\text{-}2b_{22} = 1$, b_{22} = - 2b = 1-15 ...... -2b =-14 ,,, b = $\frac{14}{2}$ = 7

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ & . \\ 12 & 15 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ & . \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ & . \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

13 أجد قيمة كلٍّ من x، وy التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$x[0 \quad 1 \quad 3]+y[0 \quad 0 \quad 5]=[0 \quad (3-y) \quad -7]$$

$$[0 \;\; x \;\; 3x]+[0 \;\; 0 \;\; 5y] = [0 \;\; (3-y) \;\; -7]$$

X= (3 – y)	3 x + 5 y = -7 3 (3-y) +5y =-7 9-3y+5y=-7 9 +2 y = -7 2 y = -7 -9 Y = -16/2 Y = -8 X = 3- -8 = 11

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 2

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

14 صناعة: يُبيِّن الجدول الأيسر عدد ما أنتجته 3 مصانع لإحدى الشركات من 3 طرازات لأجهزة التكييف المنزلي في النصف الأوَّل من عام 2020م، ويُبيِّن الجدول الأيمن عدد أجهزة التكييف المنزلي المُنتَجة في النصف الثاني من العام نفسه في هذه المصانع. أكتب مصفوفة تُمثِّل عدد ما أنتجه كل واحد من هذه المصانع الثلاثة من طرازات أجهزة التكييف المنزلي عام 2020م.

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	850	1200	670
المصنع 2	540	860	530
المصنع 3	620	750	490

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	700	1300	670
المصنع 2	650	1000	890
المصنع 3	480	900	540

$$\begin{bmatrix} 850 & 1200 & 670 \\ 540 & 860 & 530 \\ 620 & 750 & 490 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 700 & 1300 & 670 \\ 650 & 1000 & 890 \\ 480 & 900 & 540 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1550 & 2500 & 1340 \\ 1190 & 1860 & 1420 \\ 1100 & 1650 & 1030 \end{bmatrix}$$

نهاية الدرس الثاني

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

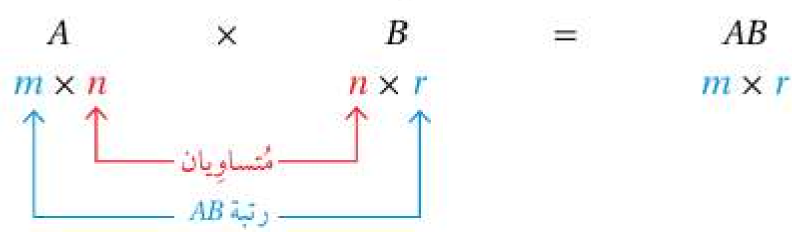
إذا كانت A وB أي مصفوفتين، فسيتم تعريف حاصل ضربهما AB فقط عندما يكون عدد الأعمدة في A مساويًا لعدد الصفوف في B.

إذا كان $A[a_{ij}]_{mxn}$ $B[b_{ij}]_{nxr}$، فإن حاصل ضربهما $[c_{ij}]$ = AB = C سيكون مصفوفة من الدرجة

m × r

شروط ضرب المصفوفات

يُمكِن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مُساوِيًا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفــة A التي رتبتها $m \times n$ في المصفوفة B التي رتبتها $n \times r$، فإنَّ رتبة المصفوفة الناتجة $A \times B$ هي: $m \times r$.



بمفهوم اخر يجب ان يكون هناك عامل مشترك بين المصفوفات التي نريد اجراء عملية الضرب عليها و العامل المشترك هو

أعمدة المصفوفة A = صفوف المصفوفة B = حسب المخطط أعلاه انظر الى الرقمين الداخليين

النتيجة مصفوفة تكون من رتبة (عدد صفوف A X عدد أعمدة B)

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

$A_{m\,n}$ $B_{n\,r}$ $C_{m\,r}$

$\boxed{A}\ \boxed{B} = \boxed{C}$

m	n		n	r		m	r

داخلي

خارجي

مصفوفة جديدة اخذت الرتبة
عدد الصفوف من الأولى و
عدد الاعمدة من الثانية

استخدم تعريف المصفوفات التالية للحكم فيما اذا نستطيع اجراء الضرب ام لا

$A_{2\ 3}$ $B_{2\ 2}$

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

$A_{2\ 3}$ $C_{3\ 2}$

متساويتان

2X2

يمكن اجراء الضرب و المصفوفة الناتجة تكون من رتبة

$B_{2\ 2}$ $C_{3\ 2}$

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أتحقَّق من فهمي

إذا كانت $A_{2\times2}$، وكانــت $B_{3\times2}$، وكانت $C_{2\times3}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

a) AB b) BC c) CA

A 2 2 B 3 2

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

B 3 2 C 2 3

متساويتان

يمكن اجراء الضرب و المصفوفة الناتجة تكون من رتبة 3X3

C 2 3 A 2 2

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

هل يجوز ضرب مصفوفة صف من 3 أعمدة مع مصفوفة عمود مع 3 صفوف اذا كانت الإجابة نعم ما نوع المصفوفة الناتجة (الإجابة نعم)

$A_{1\ 3}$ $B_{3\ 1}$

متساويتان

3X1

يمكن اجراء الضرب و المصفوفة الناتجة تكون من رتبة

الناتج مصفوفة عمود من 3 صفوف

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

ضرب المصفوفات

تختلف عملية ضرب مصفوفتين عن عمليتـي جمعهما وطرحهما؛ إذ لا تُضرَب العناصر المُتناظِرة في بعضها كما في عمليتي جمع المصفوفات وطرحها.

كيفية اجراء الضرب تكون باختصار (ضرب صف في عمود)

- نأخذ الصف الأول من المصفوفة الأولى و نضربه كل مرة بعمود من المصفوفة الثانية ونجمع النتاج لكل صف Xعمود
- نأخذ الصف الثاني من المصفوفة الأولى و نضربه كل مرة بعمود من المصفوفة الثانية ونجمع النتاج لكل صف Xعمود

الصف الأول X (العمود الأول + العمود الثاني + العمود الثالث + ...)
الصف الثاني X (العمود الأول + العمود الثاني + العمود الثالث + ...)
الصف الثالث X العمود الأول + العمود الثاني + العمود الثالث + ...)

$$\begin{array}{c} \text{صف 1} \\ \text{صف 2} \\ \text{صف 3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{عمود 1} & \text{عمود 2} & \text{عمود 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{صف 1} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \text{عمود 1} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

مثال 2

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$، وكان: $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد: AB.

$$A_{23} \text{ X } B_{3X2}$$

بما انها حققت الشرط اذن نستطيع اجراء عملية الضرب

- $[1 \;\; -5 \;\; 4]\; X \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (1x4) + (-5x0) + (4x2)$ = 4+0+8=12
- $[1 \;\; -5 \;\; 4]\; X \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$ 1 (-5) + -5 (-1) + 4(0) = -5+5+0
- $[-3 \;\; 4 \;\; 7]\; X \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ = -3 (4) + 4 (0) +7 (2) = -12+0+14= 2
- $[-3 \;\; 4 \;\; 7]\; X \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$ -3 (-5) + 4 (-1)+ 7 (0) = 15-4+0 = 11

AB$\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$

الدرس 3

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

أتحقّق من فهمي

a) إذا كان: $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$، وكان: $N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$، فأجد: MN.

$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ = (3x4)+(1x6) = 12+6=18
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ = (3x0)+(1x-3)= 0 + -3 = -3
- $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ = (2x4)+(5x6) = 8 + 30 = 38
- $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ = (2x0)+(5x-3) = 0-15= -15

$$\begin{bmatrix} 18 & -3 \\ 38 & -15 \end{bmatrix}$$

b) إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، وكان: $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد: CD.

- $[1 \quad 0]x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 1x2 + 0 x1 = 2
- $[1 \quad 0]x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = 1x1 + 0x-1 = 1
- $[1 \quad 0]x\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 1x3 + 0x0 = 3
- $[2 \quad 1]x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 2x2+1x1 = 5
- $[2 \quad 1]x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = 2x1+ 1x-1 = 1
- $[2 \quad 1]x\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 2x3 + 1x0 = 6
- $[3 \quad 2]x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 3x2+2x1 = 8
- $[3 \quad 2]x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = 3x1 + 2x-1 = 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

- $[3 \;\; 2] x \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 3x3 +2x0 = 9

أتحقق من فهمي

كــرة قدم: يُبيِّن الجدول المجــاور نتائج 3 فِرَق لكرة القدم بعدمــا لعب كلٌّ منها 4 مباريات. إذا علمْــتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقــاط، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطــة واحــدة، وأنَّ خســارته تعني عدم حصوله على أيِّ نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

a) شكل مصفوفة من الجدول لتكن المصفوفة A

b) فوز= 3 نقاط ...... تعادل = 1 نقطة ..... خسارة = 0 نقاط (هذه مصفوفة عمودية من 3 عناصر) لتكن المصفوفة B

c) جد ناتج ضرب المصفوفات A و B

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\3 & 1 & 0\\1 & 1 & 2\end{bmatrix} X\ B = \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$$ لاحظ الرتبة لكل مصفوفة

3 X 3 = **3** X 2 متساويات نستطيع اجراء الضرب

- $[1\ \ 0\ \ 3\,]\,X\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$ = 1X3 + 0 X1 + 3 X 0 = 3
- $[3\ \ 1\ \ 0\,]\,X\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$ = 3X3 + 1X1 + 0X0 = 10
- $[1\ \ 1\ \ 2\,]\,X\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$ = 1 X3 + 1X1 + 2X0 = 4

A	$\begin{bmatrix}3\\10\\4\end{bmatrix}$
B	
C	

الفائز فريق B

الدرس 3

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

خصائص عملية الضرب في المصفوفات

- ضرب المصفوفات ليس تبادليًا بشكل عام، أي بشكل عام $AB \neq BA$ (مهم جدا)
  - خاصية الضرب في الاعداد الحقيقة تبادلية بمعنى ان $2x3=3x2$ هذا لا ينطبق على المصفوفات
- عملية ضرب المصفوفات هي عملية ارتباطية، أي $(AB)C=A(BC)$.
  - في الاعداد الحقيقة $(3x2)x4 = 3x(2x4)$ وهذا ينطبق على المصفوفات
- ضرب المصفوفات هو توزيعي على جمع المصفوفات (هام جدا)
- من اليسار $R(S+T) = RS + RT$ (R ضرب S وليس العكس ، R ضرب T وليس العكس)

الحرف الموجود خارج القوس أولا

- من اليمين $(R+S)T = RT+ST$ (R ضرب T وليس العكس ، R ضرب S وليس العكس)

الحرف الموجود خارج القوس ثانيا

يعني يوجد مصفوفتين داخل القوس وواحدة خارج القوس (انتبه للترتيب) لان عملية الضرب ليست تبادلية (انتبه أي مصفوفة اول)

- يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين مصفوفة فارغة في حين لا تكون أي منهما فارغة، أي إذا كان $AB = 0$، فليس من الضروري أن يكون $A = 0$ أو $B = 0$.
  - في الاعداد الحقيقة اذا كانت نتيجة الضرب = صفر بالتأكيد يكون احد الرقمين =0
  - هذا ليس شرط في المصفوفات
- حاصل ضرب المصفوفة في مصفوفة فارغة يكون دائمًا مصفوفة فارغة.
  - في الاعداد الحقيقة ناتج ضرب أي رقم بصفر = صفر
  - وينطبق هذا على المصفوفات (اذا ضربنا أي مصفوفة بمصفوفة فارغة او صفرية يعني كل عناصرها صفر) = النتيجة مصفوفة صفرية

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

- ضرب المصفوفة بنفسها عدة مرات تتمثل ب A^T
كما هو في الاعداد الحقيقة 4^3 يعني ضرب العدد 4 بنفسه 3 مرات

A^3 = A X A X A

ضرب المصفوفة بنفسها لا يحقق شرط الضرب
الا في المصفوفة المربعة فقط والتي لهما نفس الرتبة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أتحقق من فهمي

إذا كان: $H = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$، وكان: $m = -4$، فأجـد كُلًّا

$H = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

H = 2X2   G= 2X2   F = 2X2

متساويتان   متساويتان

a) (F+G)H	يمكن جمع F و G ثم النتاج نضربه ب H **او توزيع الضرب (F+G)H= FH+GH** انتبه اول F مضروبة ب H وليس العكس و كذلك G مضروبة H و ليس العكس (خاصية التجميع من اليمين)
F+G	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$
(F+G) H	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
	= 4X7 + (-1)(4) = 28 -4 = 24 = 4X5+ (-1) (2) = 20-2 = 18 = 4X7+8X4 = 28 +32 = 60 =4X5+8 X2 = 20 + 16 = 36 $= \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 60 & 36 \end{bmatrix}$

الدرس 3

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

الطريقة الثانية نطبق خاصية التجميع من اليمين

الحرف الموجود على اليمين اذن الحرف ثانيا (بهذا الترتيب غير ذلك خطا)

(F+G)H = FH+GH

1) $F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X\ H = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

= 4 X 7 + -2 X 4 = 20

= 4 X5 + -2 X 2 = 16

=3 X7 + 3 X 4 = 41

= 3X5 + 5 X2 = 25

$\begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 41 & 25 \end{bmatrix}$.............1

+

2) $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X\ H = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

= 0 X7 + 1 X4 = 4

= 0X 4 + 1 X2 = 2

= 1 X7 + 3 X4 = 19

= 1 X 4 + 3 X2 = 11

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 19 & 11 \end{bmatrix}$............2

اجمع 1 مع 2

$$= \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 60 & 36 \end{bmatrix}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا كان: $D=\begin{bmatrix} 2 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & 2 \\ 1.5 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأُبيِّـن إذا كانـت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

	AB غير متساوية — A: 2 2 — B: 3 2 لا يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة
	BC متساوية — B: 3 2 — C: 2 3 يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة 3X3
	DC غير متساوية — D: 3 3 — C: 2 3 لا يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة
	BA متساوية — B: 3 2 — A: 2 2 يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة 3 X2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

CD متساوية **C** **D** يمكن الضرب 2 3 3 3 رتبة المصفوفة الجديدة **2X3**	
BB غير متساوية **B** **B** لا يمكن الضرب 3 2 3 2 رتبة المصفوفة الجديدة	
CB متساوية **C** **B** يمكن الضرب 2 3 3 2 رتبة المصفوفة الجديدة **3X3**	
BCD غير متساوية	
BC متساوية **B** **C** يمكن الضرب 3 2 2 3 **k** رتبة المصفوفة الجديدة **2X2**	
KD غير متساوية **K** **D** لا يمكن الضرب 2 2 3 3 رتبة المصفوفة الجديدة	

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

9 إذا كان: $AB = C$، وكانت رتبة المصفوفة A هي: 3×4، ورتبة المصفوفة C هي: 5×4، فما رتبة المصفوفة B؟

AB **A** **B** **C**

4 3 m n = 4 5

m= 3 n = 5

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

10 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 8 & 10 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

18 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^2$

19 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

10

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{لايجوز} \end{bmatrix}$$

2X2	3X2	

11

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

3X1	1X3	3X3

12

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 5 \\ -4 & 14 & 18 \end{bmatrix}$$

2X3	3X3	2X3

(3 X 0)	+	(-1 X -2)	+	(2 X 4)	=	10
(3 X 3)	+	(-1 X 1)	+	(2 X 7)	=	22
(3 X 2)	+	(-1 X 5)	+	(2 X 2)	=	5

(4 X 0)	+	(2 X -2)	+	(0 X 4)	=	-4
(4 X 3)	+	(2 X 1)	+	(0 X 7)	=	14
(4 X 2)	+	(2 X 5)	+	(0 X 2)	=	18

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

13

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

(3 X 5) + (0 X 0)	=	15
(3 X 0) + (0 X 4)	=	0

(0 X 5) + (2 X 0)	=	0
(0 X 0) + (2 X 4)	=	8

14

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

1X3 3X1 1X1

(8 X 1) + (10 X -3) + (-7 X -5)	=	13

15

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 & 11 \\ -45 & 24 & 21 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

3X2 2X3 3X3

(-2 X -5) + (-1 X 0)	=	10
(-2 X 6) + (-1 X 6)	=	-18
(-2 X -4) + (-1 X -3)	=	11

(9 X -5) + (-5 X 0)	=	-45
(9 X 6) + (-5 X 6)	=	24
(9 X -4) + (-5 X -3)	=	-21

(3 X -5) + (-1 X 0)	=	-15
(3 X 6) + (-1 X 6)	=	12
(3 X -4) + (-1 X -3)	=	-9

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

16

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$$

2X1	1X2	2X2

(2 X -1)	=	-2
(2 X 4)	=	8
(5 X -1)	=	-5
(5 X 4)	=	20

17

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}$$

2X2	2X2	2X2

(2 X 8)	+	(4 X -4)	=	0
(2 X -14)	+	(4 X 7)	=	0

(0 X 8)	+	(3 X -4)	=	-12
(0 X -14)	+	(3 X 7)	=	21

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

18 $\left(\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right)^{\boxed{2}} \quad \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}7 & -8\\ 16 & 23\end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة بنفسها لا يجوز الا اذا كانت مصفوفة مربعة لانها تحقق شرط الضرب

(3 X 3)	+	(-1 X 2)	=	7
(3 X -1)	+	(-1 X 5)	=	-8

(2 X 3)	+	(5 X 2)	=	16
(2 X -1)	+	(5 X 5)	=	23

19 $\left(\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\right)^{\boxed{2}} = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}} \times \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}} =$ [لايجوز]

غير متساويتان

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

20 **صناعة سيّارات:** تتوزَّع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة السيّارات في 3 مدن، ويُبيِّن الجدول المجاور عدد ما يُنتِجه كل مصنع يوميًّا من 3 طرازات للسيّارات. إذا كان ربح الشركة في كل سيارة من الطراز X هو JD1000، ومن الطراز D هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًّا من جميع طرازات السيّارات (بافتراض أنَّ جميع السيّارات المُنتَجة مَبيعة).

	الطراز X	الطراز D	الطراز R
المدينة A	12	10	0
المدينة B	4	4	20
المدينة C	8	9	12

20

$$\underset{3X3}{\begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}} \ \mathbf{X} \ \underset{3X1}{\begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix}} = \underset{3X1}{\begin{bmatrix} 32000 \\ 62000 \\ 56000 \end{bmatrix}}$$

(12 X 1000) + (10 X 2000) + (0 X 2500) =	32,000.00
(4 X 1000) + (4 X 2000) + (20 X 2500) =	62,000.00
(8 X 1000) + (9 X 2000) + (12 X 2500) =	56,000.00

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

21 إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$، فأُبيِّن أنَّ: $AB = AC$.

21

$$A \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} \quad B \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2X2} \quad C \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}_{2X2}$$

$$AB \quad \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2X2} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}_{2X2}$$

(12 X 4) + (4 X 0) =	48
(12 X 6) + (4 X 1) =	76
(9 X 4) + (3 X 0) =	36
(9 X 6) + (3 X 1) =	57

$$AC \quad \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} \times \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}_{2X2} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}_{2X2}$$

(12 X 5) + (4 X -3) =	48
(12 X 8) + (4 X -5) =	76
(9 X 5) + (3 X -3) =	36
(9 X 8) + (3 X -5) =	57

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

إذا كان: $R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$، وكان: $n = -2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

22 $(QR)P$

23 $n(PQ)$

24 $R(PQ)$

25 $(nR)P$

22

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3X2} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2X3} \quad P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$$

(QR)P

$$QR \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2X3} X \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3X2} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -14 \end{bmatrix}_{2X2}$$

(3 X -2) + (-1 X 9) + (2 X 3) =	-9
(3 X -1) + (-1 X -5) + (2 X -1) =	0
(4 X -2) + (2 X 9) + (0 X 3) =	10
(4 X -1) + (2 X -5) + (0 X -1) =	-14

$$(QR) \quad P \quad \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -14 \end{bmatrix}_{2X2} X \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} = \begin{bmatrix} -108 & -36 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}_{2X2}$$

(-9 X 12) + (0 X 9) =	-108
(-9 X 4) + (0 X 3) =	-36
(10 X 12) + (-14 X 9) =	-6
(10 X 4) + (-14 X 3) =	-2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

23

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

3X2   2X3   2X2

n(PQ)

$$PQ = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix}$$

2X2   2X3   2X3

(12 X 3) + (4 X 4) =	52
(12 X -1) + (4 X 2) =	-4
(12 X 2) + (4 X 0) =	24
(9 X 3) + (3 X 4) =	39
(9 X -1) + (3 X 2) =	-3
(9 X 2) + (3 X 0) =	18

n (PQ)

$$2 \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & -8 & 48 \\ 78 & -6 & 36 \end{bmatrix}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

24

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3X2} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2X3} \quad P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$$

R(PQ)

$$PQ \quad \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2X3} = \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix}_{2X3}$$

(12 X 3) + (4 X 4) =	52
(12 X -1) + (4 X 2) =	-4
(12 X 2) + (4 X 0) =	24
(9 X 3) + (3 X 4) =	39
(9 X -1) + (3 X 2) =	-3
(9 X 2) + (3 X 0) =	18

$$R\ (PQ) \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3X2} \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix}_{2X3} = \begin{bmatrix} -143 & 11 & -66 \\ 273 & -21 & 126 \\ 117 & -9 & 54 \end{bmatrix}_{3X3}$$

(-2 X 52) + (-1 X 39) =	-143
(-2 X -4) + (-1 X -3) =	11
(-2 X 24) + (-1 X 18) =	-66
(9 X 52) + (-5 X 39) =	273
(9 X -4) + (-5 X -3) =	-21
(9 X 24) + (-5 X 18) =	126
(3 X 52) + (-1 X 39) =	117
(3 X -4) + (-1 X -3) =	-9
(3 X 24) + (-1 X 18) =	54

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

25

$R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ 3X2 $\quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 2X3 $\quad P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ 2X2

(*n* R)

$$2 \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 18 & -10 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

(n R) P

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 18 & -10 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66 & -22 \\ 126 & 42 \\ 54 & 18 \end{bmatrix}$$

3X2 2X2 3X2

(-4 X 12) + (-2 X 9) = -66
(-4 X 4) + (-2 X 3) = -22
(18 X 12) + (-10 X 9) = 126
(18 X 4) + (-10 X 3) = 42
(6 X 12) + (-2 X 9) = 54
(6 X 4) + (-2 X 3) = 18

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

إذا كان: $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix}$، $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix}$، حيث x, y عددان صحيحان موجبان، فأجد:

26 AB بدلالة x, y.

27 BA بدلالة x, y.

28 أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x، و y التي تجعل $AB = BA$.

26

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ X & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ Y & 4 \end{bmatrix}_{2X2}$ $AB = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ (-2X)+3Y & 12 \end{bmatrix}_{2X2}$

27

$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ Y & 4 \end{bmatrix}_{2X2}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ X & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$ $BA = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ (2Y)+4X & 12 \end{bmatrix}_{2X2}$

28 أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x، و y التي تجعل $AB = BA$.

28) -2X+3Y = 2Y+4X   -2(1)+3X6= -2+18= 16

-2X-4X = 2Y -3Y   2(6)+4(1) = 12 +4 = 16

-6X = -1 Y

X= 0 , Y= 0 الصفر ليس من ضمن الحل لأنه طالب قيمة صحيحة موجبة

X= 1 , Y = 6

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

29 مُكسَّــرات: يُعبِّئ مَحْمص خليطًا من المُكسّرات والفواكه المُجفَّفة في نوعين من الأكياس كما في الجدول الأيسر، ويُبيِّن الجدول الأيمن عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المُكسَّــرات والفواكه المُجفَّفة. أستعمل ضرب المصفوفات لإيجاد عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في كل نوع.

	دهون	كربوهيدرات	بروتين
مُكسَّرات	52	21	20
فواكه مُجفَّفة	1	65	3

	فواكه مُجفَّفة (g)	مُكسَّرات (g)
الكيس 1	150	150
الكيس 2	100	200

29

$$\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 200 & 100 \end{bmatrix}} \times \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 20 & 21 & 52 \\ 3 & 65 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 3450 & 12900 & 7950 \\ 4300 & 10700 & 10500 \end{bmatrix}}$$

2X2   2X3   2X3

(150 X 20)	+	(150 X 3)	= 3450
(150 X 21)	+	(150 X 65)	= 12900
(150 X 52)	+	(150 X 1)	= 7950

(200 X 20)	+	(100 X 3)	= 4300
(200 X 21)	+	(100 X 65)	= 10700
(200 X 52)	+	(100 X 1)	= 10500

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

30 أحُلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مسألة اليوم دوّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعته في متجرها مـن أكواب حافظة للحرارة مُتعدِّدة الحجوم (كبيرة، مُتوسِّطة، صغيرة) في أحد الأيام. كذلك دوّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛ وهي إمّا مباشرة من المتجر، وإمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير JD 4.5، وسعر الكوب المُتوسِّط JD 4، وسعر الكوب الصغير JD 3.5، فكيف يُمكِن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي حصلت عليه سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع؟

حجم الكوب	كبير	مُتوسِّط	صغير
عبر شبكة الإنترنت	5	4	2
من المتجر	3	5	9

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.5 \\ 4.0 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.5 \\ 65.0 \end{bmatrix}$$

2X3 3X1 2X1

(5 X 4.5) + (4 X 4) + (2 X 3.5) =	45.5
(3 X 4.5) + (5 X 4) + (9 3.5) =	65.0

مهارات التفكير العليا

31 أكتشف الخطأ: حَسَبت كلٌّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة: $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \\ 11 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

كما يأتي:

إجابة رنا

$c_{23} = -8 - 18 + 20$

$= -6$

إجابة عبير

$c_{23} = 12 - 8 - 18$

$= -14$

أيُّهما إجابتها صحيحة؟ أُبرِّر إجابتي.

C 2 3 = (الصف الثاني من الاولى X العمود الثالث من الثانية)

= (-2X4) + (3X-6) + (4X5)

= -8 -18 +20 = -6 إجابة رنا هي الصحيحة

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

32 تبرير: إذا كان A, B مصفوفتين مُربّعتين من الرتبة n، فلماذا $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$؟

أولا نتذكر ان عملية الضرب في المصفوفات ليست تبادلية

AB≠ BA

فك الاقواس في المسالة ثم استخدم خاصية التوزيع لإيجاد الإجابة

$(A+B)^2$= (A+B) (A+B)

= A^2+AB+BA+B^2 $\neq$ A^2+2AB+B^2

في المصفوفات لا يجوز كتابة AB وBA = 2AB لانهما ليست متساويتان في المصفوفات

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس **3**

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

33 مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B غير الصفريتين، بحيث يكون $AB = BA$.

- لتحقيق الشرط AB = BA، يجب أن تكون المصفوفتان A وB مصفوفتين مربعتين متساويتين في الحجم،
- أن يكون بينهما تبادل. على سبيل المثال، إذا كانت A هي مصفوفة الوحدة (يعني قطرها الرئيسي = 1)، فإن أي مصفوفة مربعة B بنفس الحجم ستحقق الشرط AB = BA = B،
- أو إذا كانت A وB مصفوفتين قطريتين (يعني القطر الرئيسي لا يساوي صفر و باقي العناصر = 0) متساويتين في الحجم، فإن حاصل ضربهما AB وBA سيكون متطابقًا.

مثال 1 (اختار A مصفوفة وحدة و B أي مصفوفة بشرط مربعة لها نفس رتبة A

$$A\underset{2X2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \times B\underset{2X2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = AB\underset{2X2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}$$

(1 x 2) + (0 x 4) =	2
(1 x 3) + (0 x 5) =	3
(0 x 2) + (1 x 4) =	4
(0 x 3) + (1 x 5) =	5

$$B\underset{2X2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} \times A\underset{2X2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = BA\underset{2X2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}$$

(2 x 1) + (3 x 0) =	2
(2 x 0) + (3 x 1) =	3
(4 x 1) + (5 x 0) =	4
(4 x 0) + (5 x 1) =	5

AB = BA

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

مثال 2 نختار المصفوفة A و B مصفوفات قطرية مربعة من نفس الرتبة

$$A\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \times B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} = AB\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} \times A\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} = BA\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2X2}$$

$$AB = BA$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

34 تحدٍّ: أجد قيمة كلٍّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

اجري عملية الضرب سننتج معادلات حل كل معادلتين تحتوي على نفس المجاهيل

- $(3e+4g)= 1$ 1
- $(3f+4h)=12$....................2
- $(-e+5g)= 6$ 3
- $-f + 5h = 15$ 4

حل معادلات 2 و 4	حل معادلات بطريقة الحذف (1 و 3)
$3f+4h=12$ $-f+5h=15$ ضرب ب 3 وجمع المعادلتين $3f+4h = 12$ $-3f+15h=45$ $19h= 57$ $h=\frac{57}{19} = 3$ عوض لايجاد $3(f) +4x3= 12$ $3f+12=12$ $3f= 12-12$ $f=0$	$3e+4g= 1$ $-e+5g= 6$ (ضرب ب 3 وجمع المعادلتين $3e+4g= 1$ $-3e+15g=18$ $19 g = 19$ $g = \frac{19}{19} = 1$ عوض لإيجاد $3 e + 4 (1) = 1$ $3e = 1- 4$ $e=\frac{-3}{3} = -1$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

إذا كانت $A_{5\times3}$، وكانت $B_{2\times3}$، وكانت $C_{3\times5}$، فأُحدِّد عمليات الضرب المُمكِنة ممّا يأتي، ثمَّ أجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1 AB — A B

غير متساوية — 5 3 2 3

لايمكن اجراء الضرب

2 AC — A C

متساوية

يمكن الضرب — 5 3 3 5

رتبة المصفوفة الجديدة 5X5

3 CA — C A

متساوية

يمكن الضرب — 3 5 5 3

رتبة المصفوفة الجديدة 3X3

4 BC — B C

متساوية

يمكن الضرب — 2 3 3 5

رتبة المصفوفة الجديدة 2X5

5 CB — C B

غير متساوية

لايمكن اجراء الضرب — 3 5 2 3

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

إذا كان: $D=\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&2\\-4&3\\1&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&-2\\-4&1&7\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}3&-2\\1&4\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

⑥AB

$A\begin{bmatrix}3&-2\\1&4\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}5&3&-2\\-4&1&7\end{bmatrix}$ $AB\begin{bmatrix}23&7&-20\\-11&7&26\end{bmatrix}$

⑦BA

$B\begin{bmatrix}5&3&-2\\-4&1&7\end{bmatrix}$ $A\begin{bmatrix}3&-2\\1&4\end{bmatrix}$ $BA\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}$

2X3 2X2 لا يجوز

⑧BC

$B\begin{bmatrix}5&3&-2\\-4&1&7\end{bmatrix}$ $C\begin{bmatrix}2&2\\-4&3\\1&5\end{bmatrix}$ $BC\begin{bmatrix}-4&9\\-5&30\end{bmatrix}$

2X3 3X2 2X2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

⑨CB

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad CB = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix}$$

3X2 2X3 3X3

⑩BD

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad BD = \begin{bmatrix} -7 \\ -16 \end{bmatrix}$$

2X3 3X1 2X1

⑪**2A+3BC**

$2A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ 2X2	$BC = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$	$3BC = \begin{bmatrix} -12 & 27 \\ -15 & 90 \end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

$$2A \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + 3BC \begin{bmatrix} -12 & 27 \\ -15 & 90 \end{bmatrix} \quad 2A+3BC \begin{bmatrix} -6 & 23 \\ -13 & 98 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

⑫ A^2

$$A \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad AA \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

⑬ A^3

$$AA \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad AAA \begin{bmatrix} 7 & -70 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

⑭ $(CB)^2$

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix}$$

$$CB \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix} \quad CB \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix} \quad CBCB \begin{bmatrix} -402 & 24 & 582 \\ -211 & 57 & 376 \\ -781 & 72 & 1171 \end{bmatrix}$$

3X3 3X3 3X3

⑮ إذا كانت: $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

- 1(Y) + 3(3) = 7 ....① Y + 9 = 7 Y = 7-9 = -2
- 1(-1) +3(-2) = -7 ....② -1-6=-7
- XY + 2(3) = 8..............③ XY + 6 = 8 XY = 8- 6 =2
- X(-1) +2(-2) = -3..............④ -X +4 = -3 -X = -3+4 = -1

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

A $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ AB $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

2 X 2 2 X 2 2X2

16 أجد ناتج: $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times [3 \quad 2 \quad -4]$.

KQ $\begin{bmatrix} 5 & 16 \end{bmatrix}$ R $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ KQR $\begin{bmatrix} -18 & 90 \end{bmatrix}$

1X2 2X2 1X2

K $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ Q $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ KQ $\begin{bmatrix} 5 & 16 \end{bmatrix}$

1X3 3X2 1X2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

17 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$، فأجد B^3.

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

BB $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2X2

BB $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2X2

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

BBB $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

18 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة C، بحيث يكون $A + C = BC$.

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مصفوفة C يجب ان تكون 2X1 لكي تحقق شروط الجمع

شكل معادلات و حل المسالة

A+C = $\begin{bmatrix} 6 + x \\ 18 + y \end{bmatrix}$ = BC = $\begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 2x - y \end{bmatrix}$

1) 6 + x = 3x + 4 y

- 6 + x -3x = 4 y
- 6 -2x = 4 y
- -2x = 4y – 6
- X = -2y +3
- X = 3-2y

B $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ BC $\begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$

2) 18 + y = 2x -y

- 18+y = 2 (3-2y) -y
- 18+y = 6 -4y-y
- 18+y = 6-5y
- Y+5y = 6 -18
- 6y = -12
- Y = -2
- X=3-2x-2 = 3+4 = 7

A $\begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$ + C $\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ A+C $\begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

مبيعات: يُبيِّن الجدول الأيمن قيمة مبيعات أحذية الرجال والنساء والأطفال (بالدنانير) لثلاثة مندوبي مبيعات، ويُبيِّن الجدول الأيسر نسب العمولة القديمة والجديدة للمبيعات. أُجيب عن السؤالين التاليين اعتمادًا على المعلومات الواردة في هذين الجدولين:

	أحذية الرجال	أحذية النساء	أحذية الأطفال
المندوب 1	1200	2300	900
المندوب 2	3100	2800	1100
المندوب 3	3700	2600	800

	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
أحذية الرجال	9%	9.5%
أحذية النساء	9%	10%
أحذية الأطفال	13%	12%

19 أجد المصفوفة التي تُمثِّل ما يجنيه كلٌّ من المندوبين الثلاثة وَفق النسبة الجديدة والنسبة القديمة

$$A = \begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9\% & 9.50\% \\ 9\% & 10\% \\ 13\% & 12\% \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 432.00 & 452.00 \\ 674.00 & 706.50 \\ 671.00 & 707.50 \end{bmatrix}$$

3X3 3X2 3X2

المجوع					
منودوب 1	884.00	=	452.00	+	432.00
منودوب 2	1,380.50	=	706.50	+	674.00
منودوب 3	1,378.50	=	707.50	+	671.00

20 أُحدِّد المندوب الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

المندوب الثاني

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أُحدِّد إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

21 إذا أمكن إيجاد AB و BA، فإنَّ المصفوفة A والمصفوفة B مُربَّعتان.

22 إذا كان AB مصفوفة صفرية، فإنَّ A مصفوفة صفرية، أو B مصفوفة صفرية.

21) ليست صحيحة دائما لأنه يجب ان تكون مربعتان و من نفس الحجم أي نفس الرتبة

22) أي مصفوفة تضرب بمصفوفة صفرية الناتج مصفوفة صفرية العبارة صحيحة دائما

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

المُحدِّدات

المُحدِّدة (determinant) للمصفوفة المُربَّعة A هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة A، ويُرمَز إليه بالرمز $|A|$.

يُطلَق على مجموعة العناصر المُمتدَّة من الزاوية اليسرى العلوية إلى الزاوية اليمنى السفلية في المصفوفة اسم **القُطْر الرئيس** للمصفوفة (main diagonal).

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 9 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

القُطر الرئيس

للقُطر الرئيس دور أساسي في إيجاد مُحدِّدة مصفوفة من أيِّ رتبة. وفي ما يأتي طريقة إيجاد مُحدِّدة المصفوفة ذات الرتبة 2×2، أو ما يُسمّى **مُحدِّدة الدرجة الثانية** (second order determinant).

مراجعة : المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي تكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة (لها نفس الرتبة)

مثال :

- مصفوفة مربعة 2X2 هي مصفوفة مربعة لها عدد صفوف 2 و عدد أعمدة 2 تسمى أيضا مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية
- مصفوفة مربعة 3X3 هي مصفوفة مربعة لها عدد صفوف 3 و عدد أعمدة 3 تسمى أيضا مصفوفة مربعة من الدرجة الثالثة
- مصفوفة مربعة 4X4 هي مصفوفة مربعة لها عدد صفوف 4 و عدد أعمدة 4 تسمى أيضا مصفوفة مربعة من الدرجة الرابعة

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

مراجعة مفاهيم وتعريف المصفوفة و عناصرها

ليكن المصفوفة A

$$A_{3X3}=\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

- اسم المصفوفة هي الحرف الكبير A
- رتبة المصفوفة (mxn) = 3x3 = عدد الصفوف x عدد الاعمدة
- عناصر المصفوفة هي الأرقام او الاحرف التي تكون داخل المصفوفة
- يسمى العنصر بحرف صغير و يرمز له بموقعه (مكان الصف ثم مكان العمود
- a_{ij} حيث i هي رقم الصف و j رقم العمود
- a_{13} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 1 و العمود رقم 3
- a_{33} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 3 و العمود رقم 3
- a_{23} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 2 و العمود رقم 3
- a_{31} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 3 و العمود رقم 1

هذا شكل المصفوفة القياسي (دائما يبقى في الذاكرة)

الدرس 4

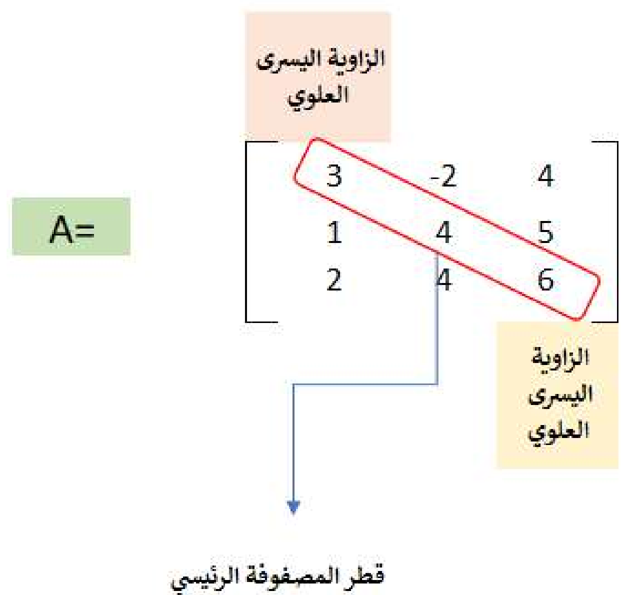
المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

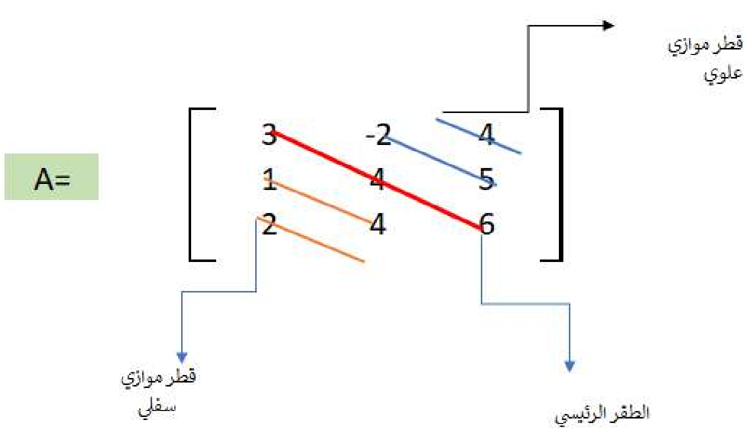
مفهوم جديد :

- اين يكون رقم الصف = رقم العمود
- الإجابة في العناصر التالية : a11,a22,a33
- هذه العناصر تشكل ما يسمى (القطر الرئيسي للمصفوفة)

اذن دائما العناصر التي تمتد من الزاوية اليسار (الطرف العلوي) الى الزاوية اليمنى (الطرف السفلي) تشكل قطر المصفوفة الرئيسية



يوجد اقطار موازية للقطر الرئيسي (فوق القطر الرئيسي و اسفل القطر الرئيسي



اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

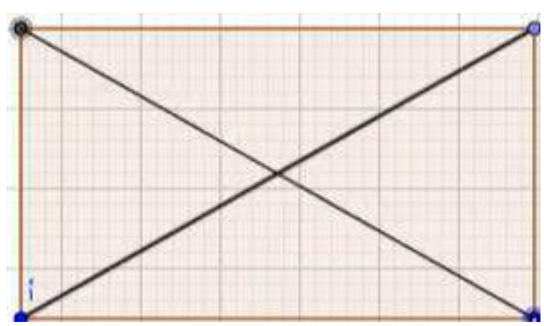
- يوجد قطر ثاني للمصفوفة لكنه ليس القطر الرئيسي و هو عكس القطر الرئيسي و يتكون من العناصر a13,a22,a31

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & \boxed{4} \\ 1 & \boxed{4} & 5 \\ \boxed{2} & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

قطر المصفوفة الثاني

تذكر من تعريف المصفوفة انها مستطيل

للمستطيل قطرين (الخط الواصل من الزاوية للزاوية هو القطر)



الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

- المحددة ؛ هي عدد حقيقي (يعني القيمة النهائية بعد حسابها ينتج عدد حقيقي مثل 3 و 5 و 9) و هكذا ، يرتبط في المصفوفة يعني نجده من خلال المصفوفة
- الفائدة من هذا الرقم هو قياس قدرة المصفوفة على التمدد او التقلص وهذه فائدة هندسية
- اذا كان المحدد = صفر فهذا يعني ان المصفوفة غير قابلة للعكس (إيجاد معكوس لها)
- اذا كان المحدد لا يساوي صفر يدل على ان هناك معكوس للمصفوفة

كيف نسمي المحددة

اذا كان هناك مصفوفة مربعة اسمها A فانه يرمز للمحددة $|A|$

تغير رمز المصفوفة الى خط يشبه القيمة المطلقة

$$[A] \longrightarrow |A|$$

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

طريقة إيجاد المحددة من الدرجة الثانية

أولا : للمصفوفة المربعة من الدرجة الثانية (يسمى محددة الدرجة الثانية)

يجب ان تكون المصفوفة مربعة و من الدرجة الثانية **الرتبة 2x2**

مُحدِّدة الدرجة الثانية

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُرمَز إلى مُحدِّدة المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$، وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القُطر الرئيس مطروحًا منه ناتج ضرب عنصري القُطر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

D= $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ (0 x 4) – (-3 x 1) = 3

D= $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ (5 x 0) – (20 x 2) = -40

D= $\begin{vmatrix} 9 & 5 \end{vmatrix}$ (9 x #) – (5 x 3) = -33

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

طريقة إيجاد المحددة من الدرجة الثالثة

للمصفوفة المربعة من الدرجة الثالثة (يسمى محددة الدرجة الثالثة)يجب ان تكون المصفوفة مربعة و من الدرجة الثالثة الرتبة 3x3

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

الطريقة الأولى تسمى : طريقة قاعدة الأقطار

المطلوب هو تشكيل اقطار رئيسية كل قطر من 3 عناصر

اذا نظرت لأقطار المصفوفة الثلاثية نجد

- **القطر الرئيسي مكون من 3 عناصر**
- **القطر الموازي الأول مكون من 2 عنصر (مشكلة) يجب ان يتكون من 3 عناصر**
- **القطر الموازي الثاني مكون من عنصر 1 (مشكلة) يجب ان يتكون من 3 عناصر**

لحل المشكلة

- **نعيد كتابة العمود الأول و العمود الثاني على يمين المصفوفة ثم نشكل الأقطار**
- **نجد ان عدد العناصر لكل قطر أصبحت 3 عناصر و هو المطلوب**

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -3 & 1 & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ 4 & 7 & 6 & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ -2 & 2 & 8 & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{array}\right.$$

- تتشكل القطر الرئيسي مع الأقطار الموازية له
- نجد حاصل ضرب كل قطر من الأقطار الثلاث
- نجمع النواتج
  - القطر الرئيسي 280 =(5x7x8)
  - القطر الموازي الأول 36 =(-3x6x-2)
  - القطر الموازي الثاني 8 =(1x4x2)
  - اجمع النواتج 324 =(280+36+8) .... ①
- نعيد نفس الخطوات على الأقطار المعاكسة
- القطر الرئيسي المعاكس -14 =(1x7x-2)
- القطر الموازي الأول 60 =(5x6x-2)
- لقطر الموازي الثاني -96 =(-3x4x8)
- اجمع النواتج -50 =(14+60-96) .... ②

العمل على القطر المعاكس

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -3 & 1 & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ 4 & 7 & 6 & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ -2 & 2 & 8 & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{array}\right.$$

القيمة النهائية = ناتج 1 – ناتج 2 ..... = (324 - - 50) = (324 + 50) = 374

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الطريقة الثانية تسمى : استخدام محددة الدرجة الثانية

الفكرة هي تحويل المصفوفة الى ثنائية و يكون ذلك عن طريق 3 خطوات كل مرة نشطب قيمة عمود

أولا : نضع الإشارات التالية بالترتيب فوق كل عمود من المصفوفة

+	−	+
-4	3	6
6	5	1
1	6	3

$+\;-4\begin{vmatrix}5 & 1\\6 & 3\end{vmatrix}$, $-\;-3\begin{vmatrix}6 & 1\\1 & 3\end{vmatrix}$, $+\;6\begin{vmatrix}6 & 5\\1 & 6\end{vmatrix}$

نجمع النواتج

استخدام المحددة الثانية	الطريقة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثاني في الصف الأول

+	−	+
-4	3	6
6	5	1
1	6	3

$+\;-4\begin{vmatrix}5 & 1\\6 & 3\end{vmatrix} = -4\,((5\times3)-(1\times6)) = -4\,(9) = -36$

$-\;-3\begin{vmatrix}6 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} = -3\,((6\times3)-(1\times1)) = -3\,(17) = -51$

$+\;6\begin{vmatrix}6 & 5\\1 & 6\end{vmatrix} = 6\,((6\times6)-(5\times1)) = 6\,(31) = 186$

$= (-36) + (-51) + (186) = \boxed{99}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

اتحقق من فهمي

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{matrix}$$

(1 x 3 x 2)=	6
(3 x 4 x -5)=	-60
(9 x -2 x 7)=	-126
	-180

العمل على القطر المعاكس

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{matrix}$$

(9 x 3 x -5)=	-135
(1 x 4 x 7)=	28
(3 x -2 x 2)=	-12
	-119

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

+	–	+

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

+ 1 $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ = 1 ((3 x 2) - (4 x 7)) = 1 (-22)= -22

– -3 $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ = -3 ((-2 x 2) - (4 x -5)) = -3 (16)= -48

+ 9 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ = 9 ((-2 x 7) - (3 x -5)) = 9 (1)= 9

= (-22) + (-48) + (9) = **-61**

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

اتحقق من فهمي

b)

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

0	-5	-1	0	-5	0	(0 x 1 x 9)= 0
4	1	6	4	1	-210	(-5 x 6 x 7)= -210
7	8	9	7	8	-32	(-1 x 4 x 8)= -32
					-242	-242

العمل على القطر المعاكس

0	-5	-1	0	-5	-7	(-1 x 1 x 7)= -7
4	1	6	4	1	0	(0 x 6 x 8)= 0
7	8	9	7	8	-180	(-5 x 4 x 9)= -180
					-187	-187

= (-242) - (-187) = -55

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثاني في الصف الأول

+	−	+

b)

$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ + **0** $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ = **0** ((1 x 9) - (6 x 8)) = 0 (-39)= 0

$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ − **5** $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ = **5** ((4 x 9) - (6 x 7)) = 5 (-6)= -30

$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ + **-1** $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ = **-1** ((4 x 8) - (1 x 7)) = -1 (25)= -25

= (0) + (-30) + (-25) = -55

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

حساب مساحة المُثلَّث باستعمال المُحدِّدات

يُمكِن حســاب مســاحة مُثلَّث عُلِمت إحداثيات رؤوسه في المســتوى الإحداثي باستعمال القاعدة الآتية.

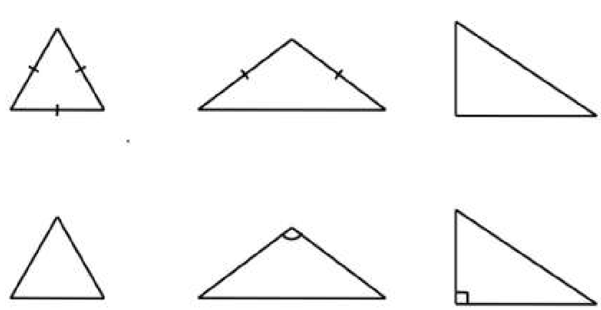
مفهوم أساسي مساحة مُثلَّث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

مساحة المُثلَّث الذي إحداثيات رؤوسه: $X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2), Z(x_3, y_3)$، هي نصف القيمة المُطلَقة للعدد A، حيث:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

المثلث هو عبارة عن شكل هندسي مكون من 3 اضلاع و 3 زوايا له أنواع مختلفة مثل

- متساوي الساقين (مراجعة قانون المسافة بين نقطتين و قانون منتصف المسافة)
- متساوي الاضلاع
- مختلف الاضلاع
- المثلث القائم الزاوية (مراجعة قانون فيثاغورس)



اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
4

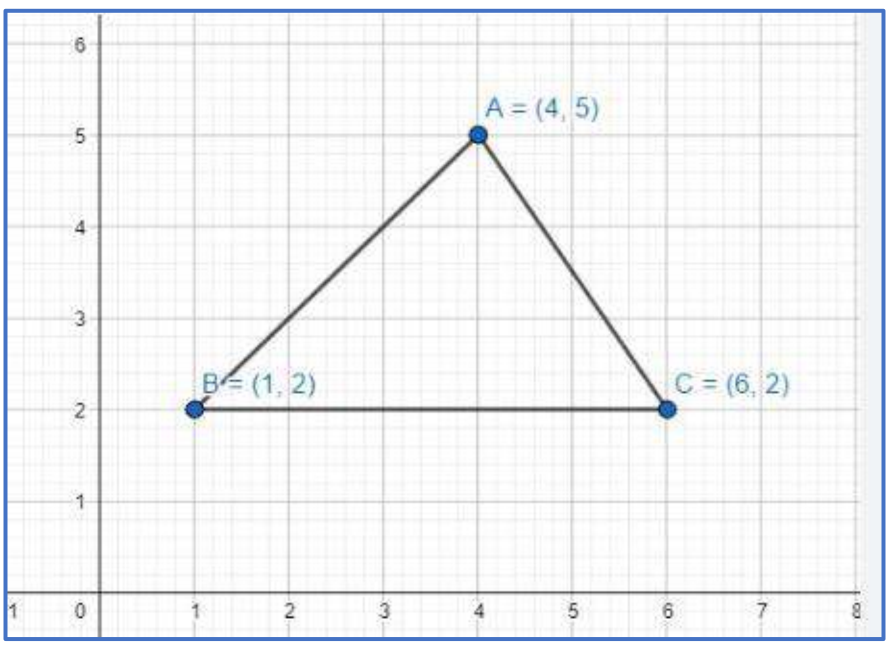
المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

- يتم تمثيل المثلث على المستوى الاحداثي من خلال احداثيات رؤوس المثلث
- أي نقطة على المستوى تتمثل بقيمة x و y
- النقطة x,y في المصفوفات تتمثل في صف

A (x_1,y_1)   B (x_2,y_2)   C (x_3,y_3)

كل نقطة نضعها في صف من المصفوفة بالترتيب

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$



حساب مساحة المثلث عن طريق المحدد

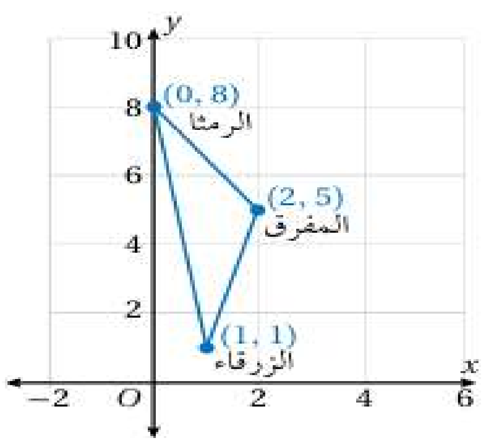
$$A\left(\frac{1}{2}\right) \text{x} \left(\text{القاعدة}\right) \text{x} \left(\text{الارتفاع}\right)$$

- شكل من رؤوس المثلث محددة ثلاثية
- العمود الثالث دائما عناصره (1) (1) (1)
- جد المحدد الثلاثية و اقسمها على 2

مثال جد مساحة المثلث في الشكل المقابل

أتحقق من فهمي

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور إحداثيات كلٍّ من مدينة الزرقاء، ومدينة الرمثا، ومدينة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل 10 km، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المدن الثلاث.



الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

العمل على القطر الرئيسي						طريقة الأقطار		
A	1	1	B	2	5	C	0	8

1	1	1	1	1	5	(1 x	5 x	1)=	5
2	5	1	2	5	0	(1 x	1 x	0)=	0
0	8	1	0	8	16	(1 x	2 x	8)=	16
					21				21

العمل على القطر المعاكس

1	1	1	1	1	0	(1 x	5 x	0)=	0
2	5	1	2	5	8	(1 x	1 x	8)=	8
0	8	1	0	8	2	(1 x	2 x	1)=	2
					10				10

= (21) - (10) =	11			
مساحة المثلث =	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع			
مساحة المثلث =	0.5	11 =	5.50	
كل وحدة تمثل	10 km		55.00	KM^2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

حلُّ أنظمة المعادلات والمُحدِّدات

يُمكِن استعمال المُحدِّدات لحلِّ أنظمة معادلات خطِّية بمُتغيِّرين، كلٌّ منها مكتوب في صورة: $ax + by = c$. أُنشِئ أوَّلًا مصفوفة عناصرها معاملات المُتغيِّرين x و y، وهي تُسمّى **مصفوفة المعاملات** (coefficient matrix)، ثمَّ أحسُب مُحدِّدتها؛ فإذا كانت المُحدِّدة لا تساوي صفرًا، فإنَّه يوجد حلٌّ وحيد للنظام. أمّا إذا كانت المُحدِّدة تساوي صفرًا، فإمّا ألّا يكون للنظام حلٌّ، وإمّا أنْ يكون له عدد لانهائي من الحلول. وفي حال لم تكن قيمة مُحدِّدة مصفوفة المعاملات صفرًا، فيُمكِن استعمال **قاعدة كريمر** (Cramer's rule) لإيجاد حلِّ النظام كما هو مُبيَّن أدناه.

مفهوم أساسي — **قاعدة كريمر**

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$،

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$، حيث $D \neq 0$، فإنَّ حلَّ النظام هو:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}.$$

شرح المفهوم

1- نستخدم المحددة لتحديد ما اذا كان نظام المعادلات له حلول ام لا

2- اذا كانت قيمة المحددة = صفر يعني لا يوجد حل لنظام المعادلات او له عدد لا نهائي من الحلول

3- اذا كانت المحددة لا تساوي صفر (سواء موجب او سالب هذا يعني يوجد حل للنظام)

4- لايجاد هذا الحل نستخدم قاعدة كريمر

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

خطوات الحل

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

a) $-2x + 7y = 12$
$x + y = 3$

b) $4x - 3y = 29$
$2y + 5x = -5$

رتب المعادلات (اذا لم تكن مرتبة)

a) $-2x + 7y = 12$

$x + y = 3$

شكل مصفوفة للارقام ما قبل إشارة المساواة ومصفوفة للارقام ما بعد المساواة

$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$............①

جد المحددة للطرف الايسر و يكون المحدد الرئيسي D

$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$|D|$ = (-2X1) – (7X1) = -2-7=-9

لايجاد محدد X نشكل محددة نستبدل عمود X بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DX

$|D_X| = \begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$..................②

DX= 12 X 1 – 7 X3 = 12 -21 = 9

لايجاد محدد Y نشكل محددة نستبدل عمود Y بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DY

$|D_Y| = \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$..................③

DY= -2 X 3 – 12 X1 = -6 -12 = -18

X = $\frac{9}{-9}$ = -1

Y = $\frac{-18}{-9}$ = 2

X = DX /D Y = DY /D

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

b) $4x - 3y = 29$

$2y + 5x = -5$

رتب المعادلات بحيث x تحت بعض و Y تحت بعض

- $4x - 3Y = 29$
- $5x + 2Y = -5$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -5 \end{bmatrix} \text{............} ①$$

شكل مصفوفة للارقام ما قبل إشارة المساوة ومصفوفة للارقام ما بعد المساواة

$$|D| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

جد المحددة للطرف الايسر و يكون المحدد الرئيسي D

$|D| = (4X2) - (-3X5) = 8 + 15 = 23$

$$|D_X| = \begin{vmatrix} 29 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \text{..................} ②$$

لايجاد محدد X نشكل محددة نستبدل عمود X بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DX

DX= 29 X 2 – (-3 X-5) = 58 -15 = 43

$$|D_Y| = \begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} \text{..................} ③$$

لايجاد محدد Y نشكل محددة نستبدل عمود Y بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DY

DY= 4 X -5 – (29x5) = -20-145= -165

X = DX /D

Y = DY /D

X = 43/23

Y = -165/23

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أتحقّق من فهمي

أَحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

a)

$$-2x + 7y = 12$$
$$1x + 1y = 3$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|D| \quad \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \text{ X } 1) - (7 \text{ X } 1) = -9$$

$$|DX| \quad \begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (12 \text{ X } 1) - (7 \text{ X } 3) = -9$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 1$$

$$|DY| \quad \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2 \text{ X } 3) - (12 \text{ X } 1) = -18$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = 2$$

حل النظام	(1 , 2)

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

b) $4x + (-3)y = 29$
$5x + 2y = -5$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (4 \times 2) - (-3 \times 5) = 23$$

$$DX = \begin{vmatrix} 29 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (29 \times 2) - (-3 \times -5) = 43$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 2$$

$$DY = \begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = (4 \times -5) - (29 \times 5) = -165$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -7$$

حل النظام	(2 , -7)

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1. $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad (2 \times 3) - (-5 \times 1) = 11$

2. $D = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad (0 \times 1) - (5 \times -4) = 20$

3. $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad (3 \times 4) - (6 \times 2) = 0$

4. $D = \begin{vmatrix} -5 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad (-5 \times 4) - (1 \times 3) = -23$

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2 × 2:

5

العمل على القطر الرئيسي					طريقة الأقطار	
0 -3 1	0 -3	0			(0 x 8 x 3)=	0
5 8 -2	5 8	24			(-3 x -2 x 4)=	24
4 7 3	4 7	35			(1 x 5 x 7)=	35
		59				59

العمل على القطر المعاكس				
0 -3 1	0 -3	32	(1 x 8 x 4)=	32
5 8 -2	5 8	0	(0 x -2 x 7)=	0
4 7 3	4 7	-45	(-3 x 5 x 3)=	-45
		-13		-13

= (59) - (-13) = 72

استخدام المحددة الثانية	الطريقة الثانية

+ – +

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

5

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ + 0 $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ = 0 ((8 x 3) - (-2 x 7)) = 0 (38)= 0

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ – 3 $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ = 3 ((5 x 3) - (-2 x 4)) = 3 (23)= 69

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ + 1 $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ = 1 ((5 x 7) - (8 x 4)) = 1 (3)= 3

= (0) + (69) + (3) = 72

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس
4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

6

-4	3	2	-4	3	-40	(-4 x 5 x 2)=	-40
6	5	1	6	5	-12	(3 x 1 x -4)=	-12
-4	3	2	-4	3	36	(2 x 6 x 3)=	36
					-16		-16

العمل على القطر المعاكس

-4	3	2	-4	3	-40	(2 x 5 x -4)=	-40
6	5	1	6	5	-12	(-4 x 1 x 3)=	-12
-4	3	2	-4	3	36	(3 x 6 x 2)=	36
					-16		-16

= (-16) - (-16) = 0

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

+	−	+

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

6

-4	3	2	+				
6	5	1	-4	5	1	= -4 ((5 x 2) - (1 x 3)) = -4 (7)=	-28
-4	3	2		3	2		
-4	3	2	−				
6	5	1	-3	6	1	= -3 ((6 x 2) - (1 x -4)) = -3 (16)=	-48
-4	3	2		-4	2		
-4	3	2	+				
6	5	1	2	6	5	= 2 ((6 x 3) - (5 x -4)) = 2 (38)=	76
-4	3	2		-4	3		

= (-28) + (-48) + (76) = 0

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

طريقة الأقطار		العمل على القطر الرئيسي

7

-6	-1	-2	-6	-1	-30	(-6 x 5 x 1)=	-30
2	5	0	2	5	0	(-1 x 0 x 4)=	0
4	3	1	4	3	-12	(-2 x 2 x 3)=	-12
					-42		-42

العمل على القطر المعاكس

-6	-1	-2	-6	-1	-40	(-2 x 5 x 4)=	-40
2	5	0	2	5	0	(-6 x 0 x 3)=	0
4	3	1	4	3	-2	(-1 x 2 x 1)=	-2
					-42		-42

= (-42) - (-42) = **0**

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

+	−	+

7

-6	-1	-2	+			
2	5	0	-6	5	0	= -6 ((5 x 1) - (0 x 3)) = -6 (5)= -30
4	3	1		3	1	

-6	-1	-2	−			
2	5	0	1	2	0	= 1 ((2 x 1) - (0 x 4)) = 1 (2)= 2
4	3	1		4	1	

-6	-1	-2	+			
2	5	0	-2	2	5	= -2 ((2 x 3) - (5 x 4)) = -2 (-14)= 28
4	3	1		4	3	

= (-30) + (2) + (28) = **0**

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

8

6	0	4	6	0	-36	(6 x -3 x 2)=	-36
0	-3	0	0	-3	0	(0 x 0 x 1)=	0
1	0	2	1	0	0	(4 x 0 x 0)=	0
					-36		-36

العمل على القطر المعاكس

6	0	4	6	0	-12	(4 x -3 x 1)=	-12
0	-3	0	0	-3	0	(6 x 0 x 0)=	0
1	0	2	1	0	0	(0 x 0 x 2)=	0
					-12		-12

= (-36) - (-12) = **-24**

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

+	−	+

8

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad + \; 6 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\,(\,(-3 \times 2) - (0 \times 0)\,) = 6\,(-6) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad - \; 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,(\,(0 \times 2) - (0 \times 1)\,) = 0\,(0) = 0$$

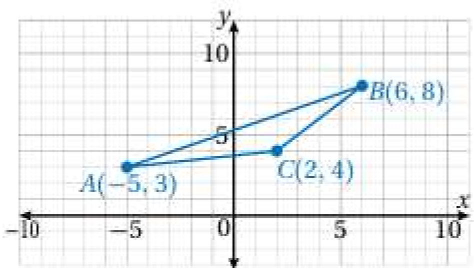
$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad + \; 4 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,(\,(0 \times 0) - (-3 \times 1)\,) = 4\,(3) = 12$$

= (-36) + (0) + (12) = **-24**

الدرس **4**

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

9 أجد مساحة المُثلَّث ABC المرسوم في المستوى الإحداثي أدناه.



طريقة الأقطار					العمل على القطر الرئيسي			
C	6	8	B	2	4	A	-5	3

-5	3	1	-5	3	-20	(	-5 x	4 x	1	)=	-20
2	4	1	2	4	18	(	3 x	1 x	6	)=	18
6	8	1	6	8	16	(	1 x	2 x	8	)=	16
					14						14

العمل على القطر المعاكس

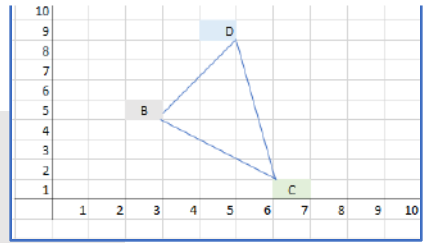
-5	3	1	-5	3	24	(	1 x	4 x	6	)=	24
2	4	1	2	4	-40	(	-5 x	1 x	8	)=	-40
6	8	1	6	8	6	(	3 x	2 x	1	)=	6
					-10						-10

= (14) - (-10) =	24	
مساحة المثلث =	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع	
مساحة المثلث =	0.5 24 =	12.00

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

10 خرائط: يقع منزل خولة عند النقطة $B(3, 5)$ على خريطة إحداثية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة $C(7, 0)$، ويقع منزل نُهى عند النقطة $D(5, 9)$. أجد مساحة المُثلَّث BCD، علمًا بأنَّ الوحدة الواحدة على الخريطة تُمثِّل 20 m على الأرض.



طريقة الأقطار — العمل على القطر الرئيسي

A	3	5	B	7	0	C	5	9

3	5	1	3	5	0	(	3 x	0 x	1) =	0
7	0	1	7	0	25	(	5 x	1 x	5) =	25
5	9	1	5	9	63	(	1 x	7 x	9) =	63
					88					88

العمل على القطر المعاكس

3	5	1	3	5	0	(	1 x	0 x	5) =	0
7	0	1	7	0	27	(	3 x	1 x	9) =	27
5	9	1	5	9	35	(	5 x	7 x	1) =	35
					62					62

= (88) - (62) =	26	
مساحة المثلث =	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع	
مساحة المثلث =	0.5 26 =	13.00
كل وحدة تمثل	20 m	260.00 M^2

y

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

11

$$1x + 5y = -17$$
$$3x + -4y = 6$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحدد الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D \; \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (1 \times -4) - (5 \times 3) = -19$$

$$DX \; \begin{vmatrix} -17 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = (-17 \times -4) - (5 \times 6) = 38$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = -2$$

$$DY \; \begin{vmatrix} 1 & -17 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (1 \times 6) - (-17 \times 3) = 57$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -3$$

حل النظام	(-2 , -3)

12

2	x	+	-3	y	=	29
-4	x	+	6	y	=	12

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (2 \times 6) - (-3 \times -4) = 0$$

$$DX = \begin{vmatrix} 29 & -3 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = (29 \times 6) - (-3 \times 12) = 210$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = \infty$$

$$DY = \begin{vmatrix} 2 & 29 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = (2 \times 12) - (29 \times -4) = 140$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = \infty$$

حل النظام	(∞, ∞)

بمعنى لها عدد لا نهائي من الحلول

13 $5x + -4y = 22$
$4x + 3y = -1$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D \; \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (5 \times 3) - (-4 \times 4) = 31$$

$$DX \; \begin{vmatrix} 22 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (22 \times 3) - (-4 \times -1) = 62$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 2$$

$$DY \; \begin{vmatrix} 5 & 22 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (22 \times 4) = -93$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -3$$

حل النظام	(2 , -3)

14

$$6x + -7y = -11$$
$$5x + 4y = 40$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (6 \times 4) - (-7 \times 5) = 59$$

$$DX = \begin{vmatrix} -11 & -7 \\ 40 & 4 \end{vmatrix} = (-11 \times 4) - (-7 \times 40) = 236$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 4$$

$$DY = \begin{vmatrix} 6 & -11 \\ 5 & 40 \end{vmatrix} = (6 \times 40) - (-11 \times 5) = 295$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = 5$$

حل النظام	(4 , 5)

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

15 ما قيمة c التي تجعل مُحدِّدة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفرًا؟

$$2x + y = 6$$
$$cy = 3 - x$$

رتب المعادلات بحيث x تحت بعض و Y تحت بعض

2 x + y = 6

X + c y = 3

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}$ $|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & C \end{vmatrix}$ = 2 C -1 = 0 ... 2C = 1 C = $\frac{1}{2}$

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2 × 2 تُحقِّق الشرط المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

17 مُحدِّدتها تساوي صفرًا.

18 مُحدِّدتها تساوي -1

19 جميع عناصرها أعداد موجبة، ومُحدِّدتها -12

17) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

18) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

مسألة اليوم

يُطلَق اسم المُثلَّث الذهبي على واحدة من أهمِّ الوِجهات السياحية في جنوب الأردن، وهي المنطقة التي تضمُّ مدينة العقبة ومدينة البترا ووادي رم. إذا كانت إحداثيات المناطق الثلاث على خريطة للمملكة في مستوى إحداثي، وحدته 1 km، هي: (0, 0) للعقبة، و(56, 116) للبترا، و(6, 50) لوادي رم، فأستعمل المُحدِّدات لحساب مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه هذه المواقع الثلاثة.

طريقة الأقطار						العمل على القطر الرئيسي		
A	0	0	B	56	116	C	6	50

0 0 1	0 0	0	(0 x	116 x	1) =	0
56 116 1	56 116	0	(0 x	1 x	6) =	0
6 50 1	6 50	2800	(1 x	56 x	50) =	2800
		2800				2800

العمل على القطر المعاكس

0 0 1	0 0	696	(1 x	116 x	6) =	696
56 116 1	56 116	0	(0 x	1 x	50) =	0
6 50 1	6 50	0	(0 x	56 x	1) =	0
		696				696

= (2800) - (696)	=	2104			
مساحة المثلث	=	$\frac{1}{2}$ x	القاعدة	x	الارتفاع
مساحة المثلث	=	0.5	2104 =	1,052.00	
كل وحدة تمثل		1 km		1,052.00	kM^2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

20 تحدٍّ: عند حلّ نظام من معادلتين بمُتغيِّرين باستعمال قاعدة كريمر، فإنَّ الحلّ هو: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$، و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.
ما قيمة كلٍّ من a، و b، و c؟

باستخدام القاعدة

قاعدة كريمر

مفهوم أساسي

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$،

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$، حيث $D \neq 0$، فإنَّ حلّ النظام هو:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}.$$

$$a_1x + b_1y = c1$$

$$a_2x + b_2y = c2$$

DX = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1 & b1 \\ C2 & b2 \end{vmatrix}$

$$a_1x + 2y = 1$$

$$a_2x + 4y = 3$$

DY = $\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ b & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ b & 4 \end{vmatrix} = 5$

7x4 – 2b = 5

28-2b=5 b = $\frac{23}{2}$

العمود 1 و 3 يشكل الأرقام بعد المساواة في المعادلة

يعني قيمة C1 و C2

الأرقام 2 و 4 هي قيم معاملات Y في المعادلة

a = c1 = 1

c = c2 = 3

b من المعادلة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

كتاب الطالب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1. $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad (5 \times 1) - (3 \times -2) = 11$

2. $D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad (4 \times 4) - (5 \times 3) = 1$

3. $D = \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad (-5 \times 6) - (10 \times -3) = 0$

4.

العمل على القطر الرئيسي				طريقة الأقطار	
7 -3 1	7 -3		0	(7 x 0 x 6)=	0
8 0 4	8 0		-24	(-3 x 4 x 2)=	-24
2 -5 6	2 -5		-40	(1 x 8 x -5)=	-40
			-64		-64

العمل على القطر المعاكس					
7 -3 1	7 -3		0	(1 x 0 x 2)=	0
8 0 4	8 0		-140	(7 x 4 x -5)=	-140
2 -5 6	2 -5		-144	(-3 x 8 x 6)=	-144
			-284		-284

= (-64) - (-284) = 220

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

5

العمل على القطر الرئيسي						طريقة الأقطار	
4	-2	-4	**4**	**-2**	**-24**	(4 x 3 x -2)=	-24
-6	3	6	**-6**	**3**	**12**	(-2 x 6 x -1)=	12
-1	0	-2	**-1**	**0**	**0**	(-4 x -6 x 0)=	0
					-12		-12

العمل على القطر المعاكس							
4	-2	-4	**4**	**-2**	**12**	(-4 x 3 x -1)=	12
-6	3	6	**-6**	**3**	**0**	(4 x 6 x 0)=	0
-1	0	-2	**-1**	**0**	**-24**	(-2 x -6 x -2)=	-24
					-12		**-12**

= (-12) - (-12) = 0

6

العمل على القطر الرئيسي						طريقة الأقطار	
5	-3	1	**5**	**-3**	**280**	(5 x 7 x 8)=	280
4	7	6	**4**	**7**	**36**	(-3 x 6 x -2)=	36
-2	2	8	**-2**	**2**	**8**	(1 x 4 x 2)=	8
					324		324

العمل على القطر المعاكس							
5	-3	1	**5**	**-3**	**-14**	(1 x 7 x -2)=	-14
4	7	6	**4**	**7**	**60**	(5 x 6 x 2)=	60
-2	2	8	**-2**	**2**	**-96**	(-3 x 4 x 8)=	-96
					-50		-50

= (324) - (-50) = 374

7 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من $|AB|$، و$|BA|$.

$|A|$ = (-2X4)-(5X-3) = -8 +15 = 7

$|B|$ = (6X0)-(-1X5) = 0 +5 =

المحدد هو رقم حقيقي و
ينطبق عليه الضرب بالتبادل

$|AB| = 7\ X5 = 30$

$|BA| = 5\ X7 = 30$

8 إذا كانت: $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$، فأجد قيمة x.

D= $(x.x) - (8\ \mathrm{x}2\ )$ = $x^2 - 16$

$x^2 - 16$=9

x^2=9 +16

x^2=25

$\sqrt{x^2 = \sqrt{25}}$

X= (± 5)

9 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^2، ثمَّ أُبيِّن علاقتها بمُحدِّدة A.

$A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} X \; A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \; AXA \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

2X0 - (-1X4) = 4 **(0X-4)-(-2*8) =16**

العلاقة محددة A^2 = ضعف محددة A لأنها ارقام حقيقة

10 تُعطى معادلة المســـتقيم المارِّ بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ بالقاعدة: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. أستعمل هذه القاعدة لإيجاد معادلة المستقيم المارِّ بالنقطتين $(-1, 3), (2, -5)$.

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال قاعدة كريمر:

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

11

$$3x + (-5)y = 22$$
$$2x + 1y = 6$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times 1) - (-5 \times 2) = 13$$

$$DX = \begin{vmatrix} 22 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (22 \times 1) - (-5 \times 6) = 52$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 4$$

$$DY = \begin{vmatrix} 3 & 22 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (3 \times 6) - (22 \times 2) = -26$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -2$$

حل النظام	(4 , -2)

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

⑫

$$5x + 3y = 7$$
$$2x + -4y = 8$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (5 \times -4) - (3 \times 2) = -26$$

$$DX = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = (7 \times -4) - (3 \times 8) = -52$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 2$$

$$DY = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (5 \times 8) - (7 \times 2) = 26$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -1$$

حل النظام	(2 , -1)

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

⑬ $3x + (-1)y = 10$
$-5x + 4y = 6$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4) - (-1 \times -5) = 7$$

$$DX = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (10 \times 4) - (-1 \times 6) = 46$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 7$$

$$DY = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = (3 \times 6) - (10 \times -5) = 68$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = 10$$

حل النظام	(7 , 10)

14 حلَّت سلمى نظامًا من معادلتين خطِّيتين بالمُتغيِّرين x، وy باستعمال قاعدة كريمر، فوجدت أنَّ:

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{D}$, $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{D}$. ما قيمة كلٍّ من x، وy؟

- العمود الأول في X هو قيمة ما بعد المساواة في المعادلات
- نفسه العمود الثاني في y هو قيمته ما بعد المساواة في المعادلات

$a_1x + b_1y = c_1$ ….. $a_1x + b_1y = 3$

$a_2x + b_2y = c_2$ ….. $a_2x + b_2y = -1$

- العمود الثاني في x يشكل قيم y ، $b2= 2$ $b1=5$
- العمود الثاني في y يشكل قيم x ، $a2= 1$ $a1=4$

$4x + 5_1y = 3$
$1x + 2y = -1$

D= $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = (4X2)-(5X1) = 8 -5 =3

$$X = \frac{DX}{D} = \frac{(3\ .\ 2)-(5\ .-1)}{3} = \frac{11}{3}$$

$$Y = \frac{DY}{D} = \frac{(4\ .-1)-(3\ .1)}{3} = \frac{-7}{3}$$

15 أجد مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه: $A(-2, 5), B(7, 11), C(1, 15)$ باستعمال المُحدِّدات.

العمل على القطر الرئيسي					طريقة الأقطار			
A	-2	5	B	7	11	C	1	15

-2	5	1	-2	5	-22	(-2 x	11 x	1) =	-22
7	11	1	7	11	5	(5 x	1 x	1) =	5
1	15	1	1	15	105	(1 x	7 x	15) =	105
					88				88

العمل على القطر المعاكس

-2	5	1	-2	5	11	(1 x	11 x	1) =	11
7	11	1	7	11	-30	(-2 x	1 x	15) =	-30
1	15	1	1	15	35	(5 x	7 x	1) =	35
					16				16

= (88) - (16)	=	72
مساحة المثلث	=	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع
مساحة المثلث	=	0.5 72 = 36.00
كل وحدة تمثل		36.00

16 نقـود: يوجد في صندوق مُحاسِب 75 ورقة نقد أردنية من فئة الدينار وخمسة الدنانير وعشرة الدنانير، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 460. إذا كان عدد أوراق النقد من فئة خمسة الدنانير يساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار، فأجد عدد ما في الصندوق من أوراق النقد لكل فئة باستعمال قاعدة كريمر.

- معادلة عدد الأوراق النقدية 75 ورقة
- نفرض

1 J.D = X

5 J.D = Y ……. = 4X   من السؤال 4 اضعاف الدينار

10 J.D = Z

X+4X+Z= 75

5X+Z = 75   ……..1

- معادلة مجموع قيمة الأوراق 460 دينار
- عدد ورقة الدينار X وقيمة كل ورقة 1
- عدد ورقة الخمسة 4X وقيمة كل ورقة 5
- عدد ورقة العشرة Z و قيمة كل ورقة 10

(1) X + 5 (4X) + 10 Z = 460

X +20 X + 10 Z = 460

21 X + 10 Z = 460 ……..2

حل المعادلات بطريقة كريمر

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$5x + 1Z = 75$$
$$21x + 10Z = 460$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 460 \end{bmatrix}$$

$$D \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (1 \times 21) = 29$$

$$DX \begin{vmatrix} 75 & 1 \\ 460 & 10 \end{vmatrix} = (75 \times 10) - (1 \times 460) = 290$$

$$X = \frac{DX}{D} \qquad x = 10$$

$$DZ \begin{vmatrix} 5 & 75 \\ 21 & 460 \end{vmatrix} = (5 \times 460) - (75 \times 21) = 725$$

$$Z = \frac{DZ}{D} \qquad Z = 25$$

حل النظام	(10 , 25)

X= 10 , Y = 4X = 4X10 = 40 , Z = 25

10 ورقات من فئة الدينا

40 ورقة من فئة الخمسة

25 من فئة العشرة