رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي | يوسف سليمان جرادات

نور محمد حسان | إبراهيم عقلة القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 | 06-5376266 | P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor | feedback@nccd.gov.jo | www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2025/4)، تاريـخ 2025/5/6 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2025/120)، تاريـخ 2025/6/17 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2025 / 2026 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2025.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 787 - 4

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/368)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	رياضيات الأعمال، كتاب الطالب: الصف الثاني عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الأول
إعداد / هيئة	الأردن، المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمّل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوي مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم العلمي: أ. د. محمد صبح صبابحة
التحكيم التربوي: أ. د. خالد محمد أبو اللوم
التصميم الجرافيكي: راكان محمد السعدي
التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الطبعة الأولى (التجريبية)
1446 هـ / 2025 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـــمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ ســعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراســية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلِّ المشكلات في مختلف الحقول، فقد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً، وأَعَدَّها وَفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القِيَم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتاب رياضيات الأعمال أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واســتخدامًا في تخصُّصات إدارة الأعمال؛ بُغْيَةَ إعداد طلبة حقل الأعمال لدراســة أيٍّ من هذه التخصُّصات في المرحلة الجامعية إعدادًا جيِّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. روعي في إعداد الكتاب أيضًا اشتماله على مستوى معرفي ومستوى مهاري مناسبين لطلبة الحقول جميعًا في حال اختار هؤلاء الطلبة دراسة مادة هذا الكتاب. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرِّجة تتيح للطلبة فرصة تعلُّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضًا تقديــم الموضوعات بطريقة مُنظَّمة، وجاذبــة، ومُدعَّمة بتمثيلات بيانية، ومُزوَّدة بإرشــادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلُّمهم بسلاســة من دون تعثُّر؛ فهي تُذكِّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتســبوها سابقًا، وتساعدهم على ربط الموضوعــات الجديدة بعضها ببعض ربطًا وثيقًا، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومســائلها بســياقات إدارة الأعمال التي تُحفِّز الطلبة على تعلُّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حلِّ المســائل نهجٌ ناجعٌ في ترســيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائية؛ فقد تضمَّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرســي، بوصفه مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيَّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقِّق العدالة في التعلُّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

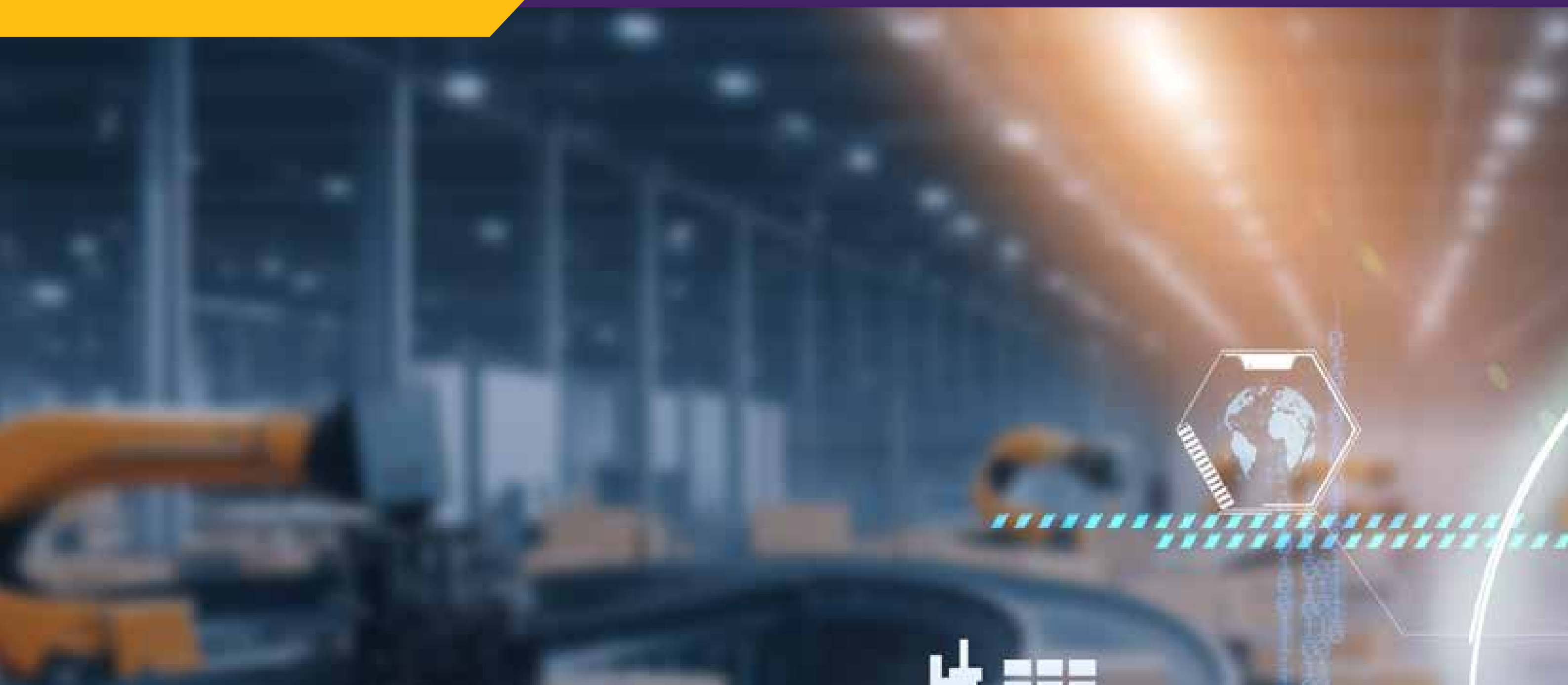
قائمة المحتويات

الوحدة
1

المصفوفات
Matrices

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَـدُّ المصفوفـات مـن المفاهيـم الأساسـية فـي الرياضيات، وهـي ترتبط ارتباطًا وثيقًـا بمختلف المجالات الرياضية وتطبيقاتها العملية. وقد شهدت السنوات الأخيرة اهتمامًا ملحوظًا بالمصفوفات، لا سـيَّما بعد اسـتعمالها في عمليات التخزين والتحليل للبيانات الضخمة التي تُشـكِّل العمود الفقري لكلٍّ من الذكاء الاصطناعي، وإنترنت الأشـياء، والتشـفير (علم تأميـن المعلومات وإخفائها). كذلك تُمثِّل المصفوفات أدوات أساسية في مهن إدارة الأعمال، مثل التسويق؛ إذ تُسهِم في تحليل بيانات الحملات والمحاسـبة، بما يسـاعد على إدارة البيانات المالية وتفسيرها بفعّالية.



تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تبسيط مقادير عددية.
- ✓ خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية.
- ✓ حلَّ معادلات خطِّية بمُتغيِّر واحد.
- ✓ حلَّ أنظمة معادلات خطِّية بمُتغيِّرين بالحذف والتعويض.
- ✓ حلَّ معادلات تربيعية بمُتغيِّر واحد.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ مفهوم المصفوفة، وعناصرها، ورتبتها، وأنواعها.
- ◄ جمع المصفوفات، وطرحها، وضربها في عدد ثابت، وضرب مصفوفة في أُخرى.
- ◄ إيجاد مُحدِّدات مصفوفات مُربَّعة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- ◄ حلَّ أنظمة معادلات خطِّية بمُتغيِّرين باستعمال قاعدة كريمر والنظير الضربي لمصفوفة المعاملات.
- ◄ إيجاد النظير الضربي لمصفوفة مُربَّعة من الرتبة الثانية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (10 – 6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

فكرة الدرس

- تعرُّف المصفوفات، ورتبها، وعناصرها.
- تعرُّف أنواع خاصة من المصفوفات.
- تنظيم البيانات في مصفوفة لتسهيل عملية تحليلها.

المصطلحات

المصفوفة، الرتبة، العنصر، مصفوفة صف، مصفوفة عمود، المصفوفة المُربَّعة، المصفوفة الصفرية، المصفوفتان المُتساوِيتان.

مسألة اليوم

سُئِلت الأُسَر في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثمَّ سُجِّلت النتائج في الجدول المجاور الذي يُبيِّن عدد الأُسَر التي تستعمل كل مصدر. كيف يُمكِن عرض بيانات الجدول بصورة أُخرى مُختصَرة؟

	أُخرى	الكاز	الكهرباء	الغاز
المدينة A	1253	4589	1678	3256
المدينة B	2564	5874	978	4560

المصفوفة: عناصرها، ورتبتها

المصفوفة (matrix) هي ترتيب على هيئة مستطيل لأعداد أو مُتغيِّرات في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين من النوع الآتي: [ ].

تُسمّى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا** (element)، ويُرمَز إلى المصفوفة بحروف كبيرة، مثل: $A, B, C, \ldots$، ويُرمَز إلى عناصرها بحروف صغيرة، مثل: $a, b, c, \ldots$. يُستدَلُّ على العنصر في المصفوفة بموقعه الذي يُحدِّده كلٌّ من الصف والعمود الذي يقع فيه العنصر، ويُكتَب رقم الصف أوَّلًا ثمَّ رقم العمود إلى يمين رمز العنصر من الأسفل، فيُرمَز مثلًا إلى العنصر الواقع في الصف 4 والعمود 2 في المصفوفة A بالرمز a_{42}.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 12 & 5 & 29 \\ 17 & 0 & 11 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{3 أعمدة}} \text{ 4 صفوف}$$

يوجد العنصر 6 في الصف 4 والعمود 2، ويُرمَز إليه بالرمز a_{42}.

معلومة

يعود تاريخ المصفوفات إلى العصور القديمة، لكنَّ مصطلح (المصفوفة) ظهر عام 1850م. أمّا كلمة (matrix) فهي لاتينية، ولها معانٍ عديدة، منها: المكان الذي يتشكَّل فيه الشيء أو يتولَّد.

يُمكِــن وصف المصفوفة **برتبتها** (order)؛ فالمصفوفة التي تحوي 3 صفوف و4 أعمدة يقال إنَّها مصفوفة من الرتبة 3×4

بوجــه عام، إذا حوت المصفوفة m من الصفوف، وn مــن الأعمدة، فإنَّها تكون مصفوفة من الرتبة $m \times n$، ويساوي عدد عناصرها ناتج ضرب العددين m، وn.

لغة الرياضيات

تُقـرَأ رتبـة المصفوفـة $m \times n$ علـى النحـو الآتي: m في n.

مثال 1

أستعمل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

رموز رياضية

يُســتعمَل الرمــز $A_{3\times2}$ للدلالة على المصفوفة A التي رتبتها 3×2

1 **ما رتبة المصفوفة A؟**

بما أنَّ المصفوفة A تحوي 3 صفوف، وعمودين، فإنَّ رتبتها هي: 3×2

2 **ما قيمة كلٍّ من العنصر a_{32} والعنصر a_{12}؟**

لغة الرياضيات

يُستعمَل مصطلح (مُدخَلات) أيضًـا للتعبيـر عـن عناصر المصفوفة.

- بما أنَّ العنصر a_{32} موجود في الصف 3 والعمود 2، فإنَّ قيمته هي: 4
- بما أنَّ العنصر a_{12} موجود في الصف 1 والعمود 2، فإنَّ قيمته هي: 5

3 **أين يقع العنصر الذي قيمته -1؟**

يقع العنصر الذي قيمته -1 في الصف 2 والعمود 1، ويُرمَز إليه بالرمز a_{21}.

أتحقَّق من فهمي

أستعمل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

a) ما رتبة المصفوفة B؟

b) ما قيمة كلٍّ من العنصر b_{24} والعنصر b_{13}؟

c) أين يقع العنصر الذي قيمته -3؟

إرشاد

رتبــة المصفوفة $m \times n$ هي تعبير، وليست عملية ضرب. فمثــلًا، إذا كانت رتبــة المصفوفة 3×2، فإنَّ ذلــك لا يعني ضرب هذيــن العدديــن بحيث يكون الناتج 6

أنواع خاصة من المصفوفات

توجد أســماء خاصة ببعض المصفوفات؛ فالمصفوفة التي تتكوَّن فقط من صف واحد وعدد من الأعمدة تُسمّى **مصفوفة صف** (row matrix)، مثل المصفوفة: $A = [2 \quad -4 \quad 0 \quad 7]$.

أمّــا المصفوفــة التــي تتكــوَّن من عمــود واحد وعِــدَّة صفوف فتُســمّى **مصفوفــة عمود** (column matrix)، مثل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

وأمّا المصفوفة التي يتســاوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة فتُســمّى **المصفوفة المُربَّعة** (square matrix)، مثل المصفوفة: $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

وأمّا المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفارًا فتُسمّى **المصفوفة الصفرية** (zero matrix)، مثل المصفوفة: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

المصفوفتان المُتساوِيتان (equal matrices) هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وعناصرهما المُتناظِرة مُتساوِية.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$
المصفوفتان غير مُتساوِيتين؛ لاختلاف رتبتيهما.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
المصفوفتان غير مُتســاوِيتين؛ لعدم تســاوي جميع العناصر المُتناظِرة فيهما.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
المصفوفتان مُتســاوِيتان؛ لأنَّهما من الرتبة نفســها، وعناصرهما المُتناظِرة مُتساوِية.

يُمكِن اســتعمال مفهوم تســاوي المصفوفات لإيجــاد قِيَم عناصر مجهولــة في مصفوفتين مُتساوِيتين.

أتعلَّم

المصفوفــة $A = [a]$ هي مصفوفة صف وعمود.

أتعلَّم

يُمكِن القول إنَّ المصفوفة C مُربَّعة من الرتبة 3

أتعلَّم

العناصــر المُتناظِــرة في مصفوفتيــن هي العناصر التــي تقــع فــي الصف والعمود نفسيهما. فمثلًا، إذا كانــت المصفوفة A والمصفوفة B مُتســاوِيتين، فــإنَّ العنصــر a_{ij} فــي المصفوفة A يُناظِر العنصر b_{ij} في المصفوفة B.

مثال 2

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

1 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

المصفوفة A مصفوفة مُربَّعة، ورتبتها هي: 2×2

2 $B = [4 \quad 5 \quad 7]$

المصفوفة B مصفوفة صف، ورتبتها هي: 1×3

3 $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة C مصفوفة عمود، ورتبتها هي: 4×1

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3y+10 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y.

$x + 1 = 10$ عنصران مُتناظِران في مصفوفتين مُتساوِيتين

$x = 9$ بطرح 1 من طرفي المعادلة

$3y + 10 = y$ عنصران مُتناظِران في مصفوفتين مُتساوِيتين

$2y + 10 = 0$ بطرح y من طرفي المعادلة

$2y = -10$ بطرح 10 من طرفي المعادلة

$y = -5$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن: $x = 9$، و $y = -5$.

أُفكِّر

أذكر مثالًا على مصفوفة مُربَّعة صفرية.

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

a) $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

b) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $F = [-4 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 0]$

d) إذا كانت: $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y.

تنظيم البيانات في المصفوفات وتحليلها

إنَّ تنظيم البيانات في مصفوفة يُسهِّل عملية تفسيرها وتحليلها. وقد يُقدِّم مجموع البيانات في صف أو عمود معلومة ذات معنى في بعض المسائل.

مثال 3 : من الحياة

بيانات: يُبيِّن الجدول المجاور الأطوال والكتل والأعمار والصفوف الدراسية للشقيقات الثلاث هديل وهبه ولانا في إحدى المدارس:

	الطول (cm)	الكتلة (kg)	العمر (year)	الصف الدراسي
هديل	135	38	10	5
هبه	155	50	14	9
لانا	145	45	12	6

1 أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 4×3، بحيث يُمثِّل الطول والكتلة والعمر والصف الدراسي صفوف المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 135 & 155 & 145 \\ 38 & 50 & 45 \\ 10 & 14 & 12 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

أُفكِّر

أُعيد كتابة المصفوفة بحيث تكون الكتل مُرتَّبة ترتيبًا تنازليًّا.

2 أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

مجموع عناصر الصف الأوَّل هو 435، وهذا المجموع يُمثِّل مجموع أطوال الشقيقات الثلاث.

3 أجد مجموع عناصر الصف الرابع، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

مجموع عناصر الصف الرابع هو20، وهذا المجموع لا يُمثِّل شيئًا ذا معنى.

4 هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر الصف الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم؛ لأنَّه يدلُّ على الوسط الحسابي لكتل الشقيقات الثلاث.

أتذكَّر

الوسط الحسابي لمجموعة من القِيَم يساوي ناتج جمع القِيَم مقسومًا على عددها.

أتحقَّق من فهمي

سـياحة: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج استطلاع آراء عيِّنـات من سُـكّان ثلاث قـرى متجاورة بخصوص مشروع سياحي يُراد إقامته في موقع يتوسَّط هذه القرى:

	مُؤيِّد	مُعارِض	مُحايِد
القرية A	800	130	70
القرية B	460	250	40
القرية C	1300	700	200

a) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أنْ يكون عدد المُؤيِّدين مُرتَّبًا ترتيبًا تصاعديًّا.

b) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

c) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

d) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد رتبة كل مصفوفة ممّا يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كل عنصر ممّا يأتي:

5) a_{31}

6) a_{23}

7) a_{14}

8) أُحدِّد موقع العنصر الذي قيمته 8 في المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

10 $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

9 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

13 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 0 & x+2y & 4 \\ 3x-11 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & z & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، y، وz.

14 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 9 & 2x+3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & x^2 \\ 2-y & 10 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

رياضة: يُبيِّن الجدول المجاور إنجازات ثلاثة من لاعبي كرة القدم في مباريات دوري الصفوف في إحدى المدارس:

	المباريات	التسديدات	الأهداف
سمير	8	15	7
أحمد	11	25	13
فوّاز	14	20	9

15 أُنظِّم هذه البيانات في المصفوفة S، بحيث تحوي صفوفها إنجازات اللاعبين الثلاثة، ويُرتَّب فيها عدد الأهداف تنازليًّا، ثمَّ أجد قيمة العنصر s_{32}.

16 أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

17 أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

كهربائيــات: تتوزَّع 3 مســتودعات لإحــدى وكالات تجارة الأجهــزة الكهربائية في 3 مدن. يوجد في مســتودع المدينة الأولى 200 ثلّاجة، و380 غسّــالة، و250 شاشة، و300 مروحــة، ويوجد فــي مســتودع المدينة الثانيــة 160 ثلّاجة، و540 غسّــالة، و290 مروحــة، ويوجد فــي مســتودع المدينة الثالثــة 120 ثلّاجة، و280 غسّــالة، و400 شاشة، و470 مروحة:

18 أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة تُمثِّل أعمدتها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثمَّ أُحدِّد رتبة المصفوفة الناتجة.

19 أجمع عناصر كل صف، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

20 أجمع عناصر كل عمود، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

21 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

22 **تبرير**: أُبيِّن إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإنَّ $A = B$.

23 **مسألة مفتوحة**: أُنشِئ مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 3، وأُسمّيها A، بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$، لكلٍّ من i, j.

24 **تبرير**: إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عددًا أوّليًّا، فماذا يُمكِن أنْ تكون رتبتها؟ أُبرِّر إجابتي.

إرشاد: العدد الأوَّليّ هو عدد أكبر من 1، وله عاملان فقط، هما: العدد 1، ونفسه.

25 **تبرير**: إذا كانت المسافة بين إربد وعمّان 88 km، والمسافة بين عمّان والعقبة 324 km، والمسافة بين إربد والعقبة 408 km، فأُنشِئ مصفوفة رتبتها 3×3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

26 **تحدٍّ**: أكتب المصفوفة B، حيث: $b_{ij} = 2i - j$ لكل $i \in \{1, 2, 3\}$، ولكل $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

27 **تحدٍّ**: أجد قيمة كلٍّ من x، وy، وz إذا كانت: $\begin{bmatrix} x+2y & x-y \\ x+y+3z & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$.

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

فكرة الدرس

- جمع المصفوفات، وطرحها، وضربها في عدد ثابت.
- تعرُّف خصائص العمليات على المصفوفات.

المصطلحات جمع مصفوفتين، طرح مصفوفتين، ضرب المصفوفة في عدد ثابت.

مسألة اليوم تُمثِّل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$ أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات (شـــاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأُخرى كبيرة في أحد الأكشـــاك. وقد قرَّر صاحب الكشك رفع الأســـعار بما نسبته 20%؛ نظرًا إلى زيادة التكاليف. ما المصفوفة التي تُمثِّل الأسعار الجديدة؟

جمع المصفوفات وطرحها

يُمكِـــن **جمع مصفوفتين** (adding two matrices) أو **طرحهما** (subtracting two matrices) إذا وفقط إذا كانت لهما الرتبة نفسها، وذلك بجمع العناصر المُتناظِرة في المصفوفتين في حالة الجمع، وطرح هذه العناصر في حالة الطرح.

مفهوم أساسي جمع المصفوفات وطرحها

بالكلمات: إذا كان A, B مصفوفتيـــن من الرتبـــة $m \times n$، فإنَّ $A + B$ مصفوفة من الرتبـــة $m \times n$، وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين اللذينِ يُناظِرانه في هاتين المصفوفتين. وبالمثل، فإنَّ $A - B$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$، وكل عنصر فيها يساوي ناتج طرح العنصرين المُناظِرين له في المصفوفة A والمصفوفة B.

بالرموز: إذا كان: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$، فإنَّ:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 1

إذا كان: $D=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$،

فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1 $A+C$

بما أنَّ A وC من الرتبة نفسها (الرتبة 3×2)، فإنَّه يُمكِن جمعهما.

بالتعويض
$$A+C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

بجمع العناصر المُتناظِرة
$$=\begin{bmatrix} 2+3 & 4+(-1) & 6+2 \\ -1+4 & -5+7 & 4+6 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط
$$=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

2 $A+B$

بما أنَّ A, B من رتبتين مختلفتين، فلا يُمكِن جمعهما.

3 $B-D$

بما أنَّ B وD من الرتبة نفسها (الرتبة 2×3)، فإنَّه يُمكِن إيجاد $B-D$.

بالتعويض
$$B-D=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

بطرح العناصر المُتناظِرة
$$=\begin{bmatrix} 5-2 & -2-4 \\ 3-5 & 0-3 \\ -7-(-9) & 6-1 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط
$$=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

أتحقَّق من فهمي

أستعمل المصفوفات الواردة في المثال 1 لإيجاد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

a) $C-A$ b) $D+B$ c) $C+D$

أتعلَّم

إذا كان: $Z=X+Y$،

فإنَّ: $z_{ij}=x_{ij}+y_{ij}$.

أتعلَّم

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الضرب في عــدد صحيح موجب هو جمــع مُتكــرِّر؛ فإذا كان A مصفوفة، فإنَّ $3A$ يُكافِئ $A+A+A$.

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

عند **ضرب المصفوفة في عدد ثابت** (scalar multiplication)، فإنَّ ذلك يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد الثابت.

مفهوم أساسي ضرب المصفوفة في عدد ثابت

بالكلمات: إذا كان A مصفوفــة رتبتهــا $m \times n$، وكان k عددًا ثابتًا، فــإنَّ kA مصفوفة رتبتها $m \times n$، وكل عنصر فيها يســاوي العنصر المُناظِر له في المصفوفة A مضروبًا في k.

بالرموز: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$، وكان k عددًا ثابتًا، فإنَّ:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 2

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$، فأجد $5C$

$$5C = 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 5(-2) & 5(7) \\ 5(3) & 5(4) \\ 5(6) & 5(5) \end{bmatrix}$$ بضرب كل عنصر في العدد 5

$$= \begin{bmatrix} -10 & 35 \\ 15 & 20 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $3D$ b) $-2D$ c) $1.5D$

خصائص العمليات على المصفوفات

إنَّ أغلب خصائص العمليــات على الأعداد الحقيقية تكون أيضًا صحيحة على المصفوفات. وفي ما يأتي مُلخَّص لهذه الخصائص.

مفهوم أساسي — خصائص العمليات على المصفوفات

إذا كان A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k, h عددين حقيقيين، فإنَّ:

1. $A + B = B + A$ الخاصية التبديلية لجمع المصفوفات
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات
3. $k(A + B) = kA + kB$ خاصية توزيع الضرب في ثابت

يُمكِن إجراء عمليات مُتعدِّدة الخطوات على المصفوفات، ويكون ترتيب هذه العمليات مُشابِهًا لترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

أتذكَّر

المسألة المُتعدِّدة الخطوات هي مسألة أحتاج إلى أكثر من عملية رياضية لحلِّها، مثل: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة.

مثال 3

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$، فأجد $3A + 2B - 5C$.

بالتعويض

$$3A + 2B - 5C = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

بضرب كل عنصر في الثابت

$$= \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 3(4) & 3(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(0) & 2(8) \\ 2(12) & 2(5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5(4) & 5(7) \\ 5(-8) & 5(1) \end{bmatrix}$$

بالتبسيط $= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 24 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 35 \\ -40 & 5 \end{bmatrix}$

بجمع العناصر المُتناظِرة وطرحها $= \begin{bmatrix} 3+0-20 & 6+16-35 \\ 12+24-(-40) & 9+10-5 \end{bmatrix}$

بالتبسيط $= \begin{bmatrix} -17 & -13 \\ 76 & 14 \end{bmatrix}$

أتذكَّر

أُجري العمليات الحسابية بحسب أولويات العمليات.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $H = [6 \quad -4 \quad 9]$، $G = [3 \quad 0 \quad 7]$، $F = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$، $E = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

a) $4E - 3F$

b) $2G + 6F$

c) $5(G + H)$

يُمكِن استعمال العمليات على المصفوفات لحلِّ مسائل حياتية.

مثال 4 : من الحياة

تجارة: لدى إحدى الشركات التجارية فرعان في مدينة عمّان، وفرعان آخران في مدينة إربد. إذا مثَّلت المصفوفة A والمصفوفة B مُعدَّل المبيعات والأرباح اليومية من الأدوات الكهربائية (بمئات الدنانير) في كلٍّ من فرعي هاتين المدينتين على الترتيب، فأجد المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل المبيعات والأرباح الشهرية لفروع الشركة في المدينتين معًا (بافتراض أنَّ الشهر 30 يومًا).

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{المبيعات} & \text{الأرباح} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{إربد 1} \\ \text{إربد 2} \end{array} \quad , \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{المبيعات} & \text{الأرباح} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{عمّان 1} \\ \text{عمّان 2} \end{array}$$

الخطوة 1: أجمع المصفوفة A والمصفوفة B.

بالتعويض $A + B = \begin{bmatrix} 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix}$

بجمع العناصر المُتناظِرة $= \begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix}$

الخطوة 2: أَضرِب المصفوفة الناتجة من الفرع السابق في 30 (بافتراض أنَّ الشهر 30 يومًا).

$$C = 30(A+B) = 30\begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix}$$ بضرب $(A+B)$ في 30

$$= \begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix}$$ بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في 30

إذن، المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل المبيعات والأرباح الشهرية لفروع الشركة في المدينتين معًا بمئات الدنانير هي: $\begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix}$.

أُفكِّر

هل توجد طريقة أُخرى لحلِّ المسألة؟

أتحقَّق من فهمي

زراعة: يملك كلٌّ من راشد وحمد مزرعة في الأغوار، ومزرعة أُخرى في المفرق. إذا مثَّلت المصفوفة A مُعدَّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما في الأغوار من البندورة والباذنجان والفلفل، ومثَّلت المصفوفة B مُعدَّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما في المفرق من الأصناف نفسها، فأجد المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل الإنتاج الأسبوعي (بالكيلوغرام) لمزرعتي راشد وحمد في الموقعين معًا.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{array}$$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

6 $[32 \quad -12 \quad 8] - [-6 \quad 43 \quad -7]$

7 $3\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

8 $\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

9 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 12 & -32 \\ 9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

10 $2\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

11 $-4\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}\right)$

12 $2\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

إذا كان: $\boldsymbol{C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}}$، $\boldsymbol{B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}}$، $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

13 $4A + 3B$

14 $2C - 3A$

15 $B + 1.5B$

16 $3B + 2C$

17 $2A - C$

18 $4A + 3C$

19 **رياضة:** لدى مَحَلِّ تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثَّلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان من جميع المقاسات (صغيرة، مُتوسِّطة، كبيرة) في شهر نيسان عام 2024 م، ومثَّلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023 م، فأجد المصفوفة التي تُمثِّل ما باعه كلٌّ من الفرعين في الشهرين معًا.

$$A = \begin{array}{c} \text{صغير} \quad \text{مُتوسِّط} \quad \text{كبير} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \text{صغير} \quad \text{مُتوسِّط} \quad \text{كبير} \\ \begin{bmatrix} 18 & 42 & 23 \\ 20 & 25 & 21 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}$$

20 **مدارس:** يُبيِّن الجدول المجاور محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م. تُخطِّط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما نسبته 40%. أكتب مصفوفة تُمثِّل ما يجب شراؤه للمختبرين، ومصفوفة أُخرى تُمثِّل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

	مقاعد	طاولات	أجهزة حاسوب
المختبر A	30	20	15
المختبر B	40	25	20

21 أجد قيمة كلٍّ من x، وy، وz التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$2\begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} z & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

22 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

23 **تبرير:** أُحدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مُساوِيًا لعدد عناصر المصفوفة B، فإنَّه يُمكِن إيجاد $A + B$.

24 **أكتشف الخطأ:** ما الخطأ في الحلِّ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

25 **مسألة مفتوحة:** أكتب المصفوفتين A, B، بحيث يكون: $3A + 2B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$

26 **تحدٍّ:** أجد المصفوفتين X, Y اللتين تُحقِّقان المعادلتين الآتيتين:

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, 3X + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

فكرة الدرس

- إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين.
- تعرُّف خصائص ضرب المصفوفات.

مسألة اليوم

دوَّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعته في متجرها من أكواب حافظة للحرارة مُتعدِّدة الحجوم (كبيرة، مُتوسِّطة، صغيرة) في أحد الأيام. كذلك دوَّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛ وهي إمّا مباشرة من المتجر، وإمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير JD 4.5، وسعر الكوب المُتوسِّط JD 4، وسعر الكوب الصغير JD 3.5، فكيف يُمكِن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي حصلت عليه سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع؟

صغير	مُتوسِّط	كبير	حجم الكوب
2	4	5	عبر شبكة الإنترنت
9	5	3	من المتجر

شروط ضرب المصفوفات

يُمكِن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مُساوِيًا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A التي رتبتها $m \times n$ في المصفوفة B التي رتبتها $n \times r$، فإنَّ رتبة المصفوفة الناتجة $A \times B$ هي: $m \times r$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & AB \\ m \times n & & n \times r & & m \times r \end{array}$$

مُتساوِيان

رتبة AB

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيِّ رمز ممّا يأتي للدلالة على ضرب المصفوفة A في المصفوفة B: $A \times B$, AB.

مثال 1

إذا كانت $A_{2\times3}$، وكانت $B_{2\times2}$، وكانت $C_{3\times2}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1 AB

$$\begin{array}{ccc} A & \times & B \\ 2 \times 3 & & 2 \times 2 \end{array}$$

غير مُتساوِيين

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد $A \times B$.

2 AC

$$\underset{2 \times 3}{A} \times \underset{3 \times 2}{C} = \underset{2 \times 2}{A \times C}$$

مُتساوِيان

رتبة $A \times C$

بمــا أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A يســاوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنَّــه يُمكِن إيجاد AC، وتكون رتبتها: 2×2

أُفكِّر

متــى يُمكِــن ضــرب مصفوفة في نفسها؟

أتحقَّق من فهمي

إذا كانت $A_{2\times2}$، وكانــت $B_{3\times2}$، وكانت $C_{2\times3}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

a) AB b) BC c) CA

ضرب المصفوفات

تختلف عملية ضرب مصفوفتين عن عمليتــي جمعهما وطرحهما؛ إذ لا تُضرَب العناصر المُتناظِرة في بعضها كما في عمليتي جمع المصفوفات وطرحها.

مفهوم أساسي: ضرب المصفوفات

بالكلمات: إذا كان A مصفوفــة مــن الرتبــة $m \times n$، وكان B مصفوفة من الرتبة $n \times p$، فــإنَّ العنصر الواقع في الصف i والعمود j في المصفوفة $A \times B$ يساوي مجموع نواتج ضرب عناصر الصف i من المصفوفة A في العناصر المُناظِرة لها في العمود j من المصفوفة B.

بالرموز: إذا كان: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$، فإنَّ:

$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$، حيث: $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{in}\, b_{nj}$

مثال 2

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$، وكان: $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد: AB.

الخطوة 1: أتحقَّق من إمكانية عملية الضرب.

رتبة المصفوفة A هي 2×3، ورتبة المصفوفة B هي 3×2. وبما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنَّه يُمكِن إيجاد المصفوفة AB، وتكون رتبتها: 2×2

الخطوة 2: أَضرِب عناصر الصف الأوَّل من المصفوفة A في عناصر العمود الأوَّل من المصفوفة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الأوَّل والعمود الأوَّل من المصفوفة AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times4+(-5)\times0+4\times2 & \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: أَضرِب عناصر الصف الأوَّل من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الأوَّل والعمود الثاني من المصفوفة AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1\times(-5)+(-5)\times(-1)+4\times0 \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: أَضرِب عناصر الصف الثاني من المصفوفة A في عناصر العمود الأوَّل من المصفوفة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الثاني والعمود الأوَّل من المصفوفة AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -3\times4+4\times0+7\times2 & \end{bmatrix}$$

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

الخطوة 5: أَضـرِب عناصر الصف الثاني من المصفوفة A فـي عناصر العمود الثاني من المصفوفـة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثـمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الثاني والعمود الثاني من المصفوفة AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & -3\times(-5)+4\times(-1)+7\times 0 \end{bmatrix}$$

إذن، المصفوفة AB الناتجة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

إرشاد

يُمكِـن دمـج الخطوات (1–4) معًـا، ثـمَّ كتابة نتيجـة الضرب مباشـرة من دون وصف العمليات كما فـي المثـال الثالث والمثال الرابع.

أتحقَّق من فهمي

a) إذا كان: $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$، وكان: $N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$، فأجد: MN.

b) إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، وكان: $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد: CD.

يُمكِن استعمال ضرب المصفوفات في مواقف حياتية مُتعدِّدة.

معلومة

أمكـن لجهـاز الحاسـوب عـام 1997م تحقيـق إنجاز تاريخـي، تمثَّل فـي هزيمته بطل العالَم في لعبة الشطرنج غاري كاسباروف. وقد شكَّل هذا الحـدث نقطة تحوُّل في حقـل الـذكاء الاصطناعي، وأظهر كيـف يُمكِن لأجهزة الحاسـوب أنْ تتفـوَّق على العقل البشري.

مثال 3 : من الحياة

شـطرنج: تنافسـت ثلاث فِرَق فـي البطولـة النهائية لنـادي الشـطرنج، وقـد دُوِّن عـدد مَـرّات الفـوز والتعـادل لهـذه الفِـرَق فـي الجـدول المجـاور. إذا علمْـتُ أنَّ فـوز الفريـق في المبـاراة الواحـدة يعني حصولـه علـى 3 نقـاط، وأنَّ تعادلـه يعنـي حصوله علـى نقطة واحـدة، فأستعمل المصفوفـات فـي إيجـاد عـدد النقـاط التـي حصـل عليهـا كل فريـق لتحديـد الفريـق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل
A	5	4
B	6	3
C	4	5

الخطوة 1: أكتب مصفوفة لكلٍّ من النتائج والنقاط.

مصفوفة النتائج   مصفوفة النقاط

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أَضرِب مصفوفة النتائج في مصفوفة النقاط.

$$MN = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$ بتعويض المصفوفة M، والمصفوفة N

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 3 + 4 \times 1 \\ 6 \times 3 + 3 \times 1 \\ 4 \times 3 + 5 \times 1 \end{bmatrix}$$ بضرب المصفوفتين

$$= \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 17 \end{bmatrix}$$ بالتبسيط

إذن، تُمثِّل $\begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 17 \end{bmatrix}$ مصفوفة النقاط التي حصل عليها كل فريق؛ ما يعني أنَّ الفريق A أحرز 19 نقطة، والفريق B أحرز 21 نقطة، والفريق C أحرز 17 نقطة.

ومن ثَمَّ، فإنَّ الفريق B هو الفريق الفائز؛ لأنَّه حصل على أكبر عدد من النقاط.

أتحقَّق من فهمي

كرة قدم: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج 3 فِرَق لكرة القدم بعدما لعب كلٌّ منها 4 مباريات. إذا علمْتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، وأنَّ خسارته تعني عدم حصوله على أيِّ نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

خصائص ضرب المصفوفات

يُحقِّق ضــرب المصفوفات بعض خصائص ضــرب الأعداد الحقيقية. وفــي ما يأتي بعض خصائص الضرب التي تتحقَّق في المصفوفات.

مفهوم أساسي **خصائص ضرب المصفوفات**

تُعَــدُّ الخصائص الآتية صحيحة لأيِّ ثلاث مصفوفــات: R, S, T، وأيِّ عدد حقيقي c؛ شرط أنْ تكون عمليتا الجمع والضرب مُعرَّفتين في جميع الحالات الآتية:

1. $(RS)T = R(ST)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات
2. $c(RS) = (cR)S = R(cS)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي
3. $R(S+T) = RS + RT$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليسار
4. $(R+S)T = RT + ST$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليمين

أتعلَّم

الخاصية التبديلية لا تتحقَّق في ضــرب المصفوفات؛ أيْ إنَّ: $AB \neq BA$ حيث A و B مصفوفتان. بالرغــم مــن ذلــك، فقد توجــد حــالات خاصــة لمصفوفتين A و B تكون فيها $AB = BA$.

مثال 4

إذا كان: $R = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$، وكان: $k = 3$، فأجــد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(Q+R)$

$$P(Q+R) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

بتعويــض المصفوفات P، وQ، وR

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

بجمع المصفوفة Q، والمصفوفة R

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

بضــرب المصفوفــة الناتجة في المصفوفة P، والتبسيط

أتعلَّم

أُعيد حــلَّ الفــرع 1 من المثــال 4 بطريقة أُخرى، ثمَّ أُقارِن بين الإجابتين.

2 $k(PQ)$

$$k(PQ) = 3 \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$ بتعويـــض المصفوفـــة P، والمصفوفة Q، والثابت k

$$= 3 \times \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$ بضرب المصفوفة Q، والمصفوفة R

$$= \begin{bmatrix} 18 & 24 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$ بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة الناتجة في 3

3 $(PQ)R$

$$(PQ)R = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$ بتعويض المصفوفات P، Q، وR

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$ بضرب المصفوفة Q، والمصفوفة P

$$= \begin{bmatrix} 32 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$ بضرب المصفوفة الناتجة في المصفوفة R، والتبسيط

أتعلَّم

أُعيد حـــلَّ الفـــرع 2 من المثـــال 4 بطريقة أُخرى، ثمَّ أُقارِن بين الإجابتين.

أُفكِّر

هـــل $PQ = QP$؟ أُبـــرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $H = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$، وكان: $m = -4$، فأجـد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $(F+G)H$

b) $(FG)H$

c) $G(mH)$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان: $D=\begin{bmatrix} 2 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & 2 \\ 1.5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأُبيِّــن إذا كانــت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1. AB
2. BC
3. DC
4. BA
5. CD
6. BB
7. CB
8. BCD

9. إذا كان: $AB = C$، وكانت رتبة المصفوفة A هي: 3×4، ورتبة المصفوفة C هي: 5×4، فما رتبة المصفوفة B؟

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

10. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 8 & 10 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

18. $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^2$

19. $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2$

إرشاد: إذا كان A مصفوفة، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ A^n مصفوفة تُعبِّر عن ضرب A في نفسها n مرَّة.

20 **صناعة سيّارات**: تتوزَّع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة السيّارات في 3 مدن، ويُبيِّن الجدول المجاور عدد ما يُنتِجه كل مصنع يوميًا من 3 طرازات للسيّارات. إذا كان ربح الشركة في كل سيّارة من الطراز X هو JD1000، ومن الطراز D هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًا من جميع طرازات السيّارات (بافتراض أنَّ جميع السيّارات المُنتَجة مَبيعة).

	الطراز R	**الطراز D**	**الطراز X**
المدينة A	0	10	12
المدينة B	20	4	4
المدينة C	12	9	8

21 إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$، فأُبيِّن أنَّ: $AB = AC$.

إذا كان: $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$، وكان: $\boldsymbol{n} = -2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

23 $n(PQ)$

22 $(QR)P$

25 $(nR)P$

24 $R(PQ)$

إذا كان: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix}$، حيث $\boldsymbol{x, y}$ عددان صحيحان موجبان، فأجد:

26 AB بدلالة x, y.

27 BA بدلالة x, y.

28 أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x، و y التي تجعل $AB = BA$.

29 **مُكسِّرات**: يُعبِّئ مَحْمص خليطًا من المُكسِّرات والفواكه المُجفَّفة في نوعين من الأكياس كما في الجدول الأيسر، ويُبيِّن الجدول الأيمن عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المُكسِّرات والفواكه المُجفَّفة. أستعمل ضرب المصفوفات لإيجاد عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في كل نوع.

	بروتين	كربوهيدرات	دهون
مُكسِّرات	20	21	52
فواكه مُجففة	3	65	1

	مُكسِّرات (g)	فواكه مُجفَّفة (g)
الكيس 1	150	150
الكيس 2	200	100

30 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

31 **أكتشف الخطأ**: حَسَـبت كلٌّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة: $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \\ 11 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

كما يأتي:

إجابة عبير

$c_{23} = 12 - 8 - 18$

$= -14$

إجابة رنا

$c_{23} = -8 - 18 + 20$

$= -6$

أيُّهما إجابتها صحيحة؟ أُبرِّر إجابتي.

32 **تبرير**: إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة n، فلماذا $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$؟

33 **مسألة مفتوحة**: أكتب المصفوفتين A, B غير الصفريتين، بحيث يكون $AB = BA$.

34 **تحدٍّ**: أجد قيمة كلٍّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

فكرة الدرس

- حساب مُحدِّدات مصفوفات مُربَّعة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- حساب مساحة مُثلَّث عُلِمت إحداثيات رؤوسه باستعمال المُحدِّدات.
- استعمال قاعدة كريمر لحلِّ أنظمة مُكوَّنة من معادلتين خطِّيتين بمُتغيِّرين.

المصطلحات

المُحدِّدة، القُطْر الرئيس، مُحدِّدة الدرجة الثانية، مُحدِّدة الدرجة الثالثة، مصفوفة المعاملات، قاعدة كريمر.

مسألة اليوم

يُطلَق اسم المُثلَّث الذهبي على واحدة من أهمِّ الوِجهات السياحية في جنوب الأردن، وهي المنطقة التي تضمُّ مدينة العقبة ومدينة البترا ووادي رم. إذا كانت إحداثيات المناطق الثلاث على خريطة للمملكة في مستوى إحداثي، وحدته 1 km، هي: $(0, 0)$ للعقبة، و$(56, 116)$ للبترا، و$(6, 50)$ لوادي رم، فأستعمل المُحدِّدات لحساب مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه هذه المواقع الثلاثة.

المُحدِّدات

أتعلَّم

للمُحدِّدة استعمالات عِدَّة في الجبر والهندسة؛ إذ تُستعمَل في حلِّ أنظمة المعادلات الخطِّية، وحساب مساحة بعض الأشكال الهندسية.

المُحدِّدة (determinant) للمصفوفة المُربَّعة A هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة A، ويُرمَز إليه بالرمز $|A|$.

يُطلَق على مجموعة العناصر المُمتدَّة من الزاوية اليسرى العلوية إلى الزاوية اليمنى السفلية في المصفوفة اسم **القُطْر الرئيس** للمصفوفة (main diagonal).

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 9 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

القُطْر الرئيس

للقُطْر الرئيس دور أساسي في إيجاد مُحدِّدة مصفوفة من أيِّ رتبة. وفي ما يأتي طريقة إيجاد مُحدِّدة المصفوفة ذات الرتبة 2×2، أو ما يُسمّى **مُحدِّدة الدرجة الثانية** (second order determinant).

مُحدِّدة الدرجة الثانية

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُرمَز إلى مُحدِّدة المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$، وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القُطْر الرئيس مطروحًا منه ناتج ضرب عنصري القُطْر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1 $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 \times 5 - 2 \times 6$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$= 28$ بالتبسيط

2 $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -2 \times 8 - (-1) \times 7$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$= -9$ بالتبسيط

3 $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 6 - (-2) \times 3$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$= 0$ بالتبسيط

أتذكَّر

أُجري العمليات الحسابية بحسب أولويات العمليات.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

يُطلَق على مُحدِّدة المصفوفة ذات الرتبة 3×3 اسم **مُحدِّدة الدرجة الثالثة** (third order determinant)، ويُمكِن حساب قيمتها بطريقتين كما هو مُبيَّن أدناه.

أتعلَّم

مفهوم (المُحدِّدات) هو مفهوم واسع يرتبط بالمصفوفات المُربَّعة من أيِّ رتبة. وفي هذا الكتاب، سيقتصر الحديث فقط على مُحدِّدات المصفوفات من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.

مُحدِّدة الدرجة الثالثة

مفهوم أساسي

يُمكِن إيجاد مُحدِّدة المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة 1: باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1: أُعيد كتابة العمود الأوَّل والعمود الثاني على يمين المُحدِّدة.

الخطوة 2: أجد ناتج ضرب عناصر القُطْر الرئيس، وثلاثيات العناصر على المُوازِيات الحمراء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

الخطوة 3: أجد ناتج ضرب عناصر القُطْر الآخر، وثلاثيات العناصر على المُوازِيات الزرقاء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

الخطوة 4: أجد قيمة المُحدِّدة بطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

الطريقة 2: باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

أتعلَّم

يُمكِن إيجاد $|A|$ باستعمال صيغ أُخرى، منها:

$$|A| = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$|A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

مثال 2

أجد قيمة $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2

الطريقة 1: باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1: أُعيد كتابة العمود الأوَّل والعمود الثاني على يمين المُحدِّدة.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 1 & 6 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

الخطوة 2: أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها.

$6 \times 5 \times 1 = 30$ $\qquad$ $-4 \times 5 \times 3 = -60$

$-4 \times 1 \times 6 = -24$ $\qquad$ $3 \times 1 \times 1 = 3$

$3 \times 6 \times 3 = 54$ $\qquad$ $6 \times 6 \times 6 = 216$

الخطوة 3: أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$30 + (-24) + 54 = 60$ $\qquad$ $-60 + 3 + 216 = 159$

الخطوة 4: أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوَّل.

$$159 - 60 = 99$$

إذن، قيمة هذه المُحدِّدة هي: 99

الطريقة 2: باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (-4)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثالثة

$$= -4(15-6) - 3(18-1) + 6(36-5)$$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$$= 99$$ بالتبسيط

إذن، قيمة هذه المُحدِّدة هي: 99

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أفكِّر

أُعيد حلَّ المسألة باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2، وذلك باختيار عناصر الصف الثاني، ثمَّ أُقارِن بين الإجابتين.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل مُحدِّدة ممّا يأتي باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

حساب مساحة المُثلَّث باستعمال المُحدِّدات

يُمكِن حساب مساحة مُثلَّث عُلِمت إحداثيات رؤوسه في المستوى الإحداثي باستعمال القاعدة الآتية.

مفهوم أساسي مساحة مُثلَّث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

مساحة المُثلَّث الذي إحداثيات رؤوسه: $X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2), Z(x_3, y_3)$، هي نصف القيمة المُطلَقة للعدد A، حيث:

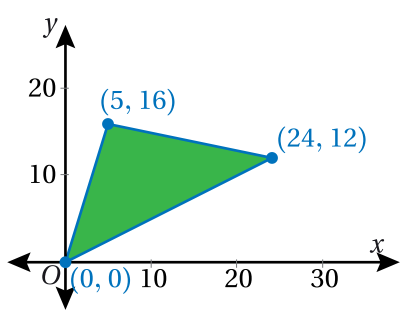
$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

إرشاد

تُستعمَل القيمة المُطلَقة للعدد A؛ لأنَّ المساحة لا تكون سالبة.

مثال 3 : من الحياة

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مُخطَّط لجزيرة على شكل مُثلَّث. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل 1 km، فأجد مساحة الجزيرة.



أتعلَّم

لا تتأثَّر مساحة المُثلَّث باختلاف ترتيب الرؤوس في المُحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

الخطوة 1: أجد قيمة المقدار A.

بتعويض $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 24$
$y_1 = 0, y_2 = 16, y_3 = 12$

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 16 & 1 \\ 24 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثالثة

$$= 0(16-12)-0(5-24)+1(60-384)$$

بالتبسيط

$$= -324$$

الخطوة 2: أجد مساحة المُثلَّث (الجزيرة).

صيغة مساحة مُثلَّث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|A|$$

إرشاد

إذا كانت النقاط الثلاث على استقامة واحدة، فإنَّ $|A| = 0$.

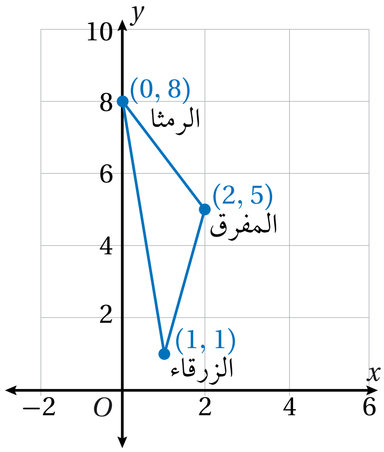
بتعويض $A = -324$ $\quad = \frac{1}{2}|-324|$

بإيجاد القيمة المُطلَقة، والتبسيط $\quad = 162$

إذن، مساحة هذه الجزيرة هي: $162\ km^2$

أتحقَّق من فهمي

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور إحداثيات كلٍّ من مدينة الزرقاء، ومدينة الرمثا، ومدينة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل 10 km، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المدن الثلاث.



أتذكَّر

إذا كان b عددًا حقيقيًّا، فإنَّ $|b|$ هو القيمة المُطلَقة للعدد b. أمّا إذا كان B مصفوفة مُربَّعة، فإنَّ $|B|$ هو مُحدِّدة تلك المصفوفة.

حلُّ أنظمة المعادلات والمُحدِّدات

يُمكِن استعمال المُحدِّدات لحلِّ أنظمة معادلات خطِّية بمُتغيِّرين، كلٌّ منها مكتوب في صورة: $ax + by = c$. أُنشِئ أوَّلًا مصفوفة عناصرها معاملات المُتغيِّرين x وy، وهي تُسمّى **مصفوفة المعاملات** (coefficient matrix)، ثمَّ أحسُب مُحدِّدتها؛ فإذا كانت المُحدِّدة لا تساوي صفرًا، فإنَّه يوجد حلٌّ وحيد للنظام. أمّا إذا كانت المُحدِّدة تساوي صفرًا، فإمّا ألّا يكون للنظام حلٌّ، وإمّا أنْ يكون له عدد لانهائي من الحلول. وفي حال لم تكن قيمة مُحدِّدة مصفوفة المعاملات صفرًا، فيُمكِن استعمال **قاعدة كريمر** (Cramer's rule) لإيجاد حلِّ النظام كما هو مُبيَّن أدناه.

قاعدة كريمر

مفهوم أساسي

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$،

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$، حيث $D \neq 0$، فإنَّ حلَّ النظام هو:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}.$$

أتعلَّم

سُمِّيت المُحدِّدات بهذا الاسم؛ لأنَّها تُحدِّد إذا كان لنظام من المعادلات حلٌّ وحيد أم لا.

مثال 4

أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن).

$$3x + 5y = 1$$
$$2x + y = -4$$

الخطوة 1: أجد مُحدِّدة مصفوفة المعاملات.

مصفوفة المعاملات $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

مُحدِّدة مصفوفة المعاملات $D = |C| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

بالتبسيط $= 3(1) - 2(5) = -7$

بما أنَّ $D \neq 0$، فإنَّه يوجد حلٌّ وحيد لهذا النظام.

الخطوة 2: أجد حلَّ النظام باستعمال قاعدة كريمر.

قاعدة كريمر $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$ ، $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}$

بالتعويض $= \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{-7}$ ، $= \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{-7}$

بحساب المُحدِّدات $= \dfrac{3(-4)-2(1)}{-7}$ ، $= \dfrac{1(1)-(-4)(5)}{-7}$

بالتبسيط $= \dfrac{-14}{-7} = 2$ ، $= \dfrac{21}{-7} = -3$

إذن، حلُّ النظام هو: $(-3, 2)$.

أتحقَّق:

أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ بالتعويض في نظام المعادلات.

$3x + 5y = 1$	المعادلتان الأصليتان	$2x + y = -4$
$3(-3)+5(2) \stackrel{?}{=} 1$	بالتعويض	$2(-3)+2 \stackrel{?}{=} -4$
$-9+10 \stackrel{?}{=} 1$	بالضرب	$-6+2 \stackrel{?}{=} -4$
$1 = 1$ ✓	بالتبسيط	$-4 = -4$ ✓

أتذكَّر

تعلَّمْتُ سابقًا ثلاث طرائق (بيانيًّا، بالحذف، بالتعويض) لحلِّ نظام معادلات مُكوَّن من معادلات خطِّية.

أتعلَّم

تتكوَّن مصفوفة المعاملات من معاملات المُتغيِّرات عند كتابة المعادلات بالصورة القياسية، ويُمثِّل كل عمود فيها معاملات أحد مُتغيِّرات المعادلات.

إرشاد

للتحقُّق من صِحَّة الحلِّ، يجب تعويض القِيَم في المعادلات الأصلية جميعها.

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

a) $-2x + 7y = 12$
$x + y = 3$

b) $4x - 3y = 29$
$2y + 5x = -5$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2:

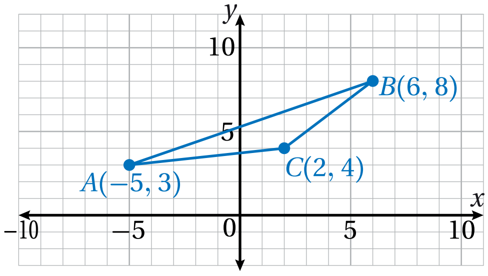
5) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

9) أجد مساحة المُثلَّث ABC المرسوم في المستوى الإحداثي أدناه.



10 **خرائـط:** يقع منزل خولة عند النقطة $B(3, 5)$ على خريطة إحداثية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة $C(7, 0)$، ويقع منزل نُهى عند النقطة $D(5, 9)$. أجد مساحة المُثلَّث BCD، علمًا بأنَّ الوحدة الواحدة على الخريطة تُمثِّل 20 m على الأرض.

أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

11
$$x + 5y = -17$$
$$3x - 4y = 6$$

12
$$2x - 3y = 29$$
$$6y - 4x = 12$$

13
$$5x - 4y = 22$$
$$4x + 3y = -1$$

14
$$6x - 7y = -11$$
$$5x + 4y = 40$$

15 ما قيمة c التي تجعل مُحدِّدة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفرًا؟

$$2x + y = 6$$
$$cy = 3 - x$$

16 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2 تُحقِّق الشرط المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

17 مُحدِّدتها تساوي صفرًا.

18 مُحدِّدتها تساوي -1

19 جميع عناصرها أعداد موجبة، ومُحدِّدتها -12

20 **تحدٍّ:** عند حلِّ نظام من معادلتين بمُتغيِّرين باستعمال قاعدة كريمر، فإنَّ الحلَّ هو: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$، و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$. ما قيمة كلٍّ من a، وb، وc؟

الدرس 5

النظير الضربي للمصفوفة

Multiplicative Inverse of Matrix

فكرة الدرس

- تعرُّف مصفوفة الوحدة، والنظير الضربي للمصفوفة.
- إيجاد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2
- كتابة معادلة مصفوفية لنظام من معادلتين خطِّيتين، وحلُّها.

المصطلحات مصفوفة الوحدة، مصفوفة مُنفرِدة، مصفوفة غير مُنفرِدة، المعادلة المصفوفية، النظير الضربي للمصفوفة.

مسألة اليوم استأجر مُنظِّمو رحلة بحرية في خليج العقبة 8 قوارب، بعضها يحمل 4 أشخاص، وبعضها الآخر يحمل 7 أشخاص. إذا كان عدد المشاركين في الرحلة 50 شخصًا، فأستعمل معادلة مصفوفية لإيجاد عدد القوارب المُستأجَرة من كل نوع.

مصفوفة الوحدة، والنظير الضربي للمصفوفة

معلومٌ أنَّ ناتج ضرب أيِّ عدد حقيقي في العدد 1 هو العدد نفسه؛ إذ إنَّ $x(1) = 1(x) = x$ لأيِّ عدد حقيقي x. لذلك يُسمّى العدد 1 عنصرًا مُحايِدًا لعملية ضرب الأعداد الحقيقية.

كذلك توجد مصفوفة مُربَّعة تُسمّى **مصفوفة الوحدة** (identity matrix)، ويُرمَز إليها بالرمز I، ويكون جميع عناصر قُطْرها الرئيس 1، وتكون بقيَّة عناصرها أصفارًا، وتمتاز بخاصية في ضرب المصفوفات تُشبِه خاصية العدد 1 في ضرب الأعداد الحقيقية.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

أتعلَّم

- مصفوفة الوحدة من الرتبة 2×2 هي:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- مصفوفة الوحدة من الرتبة 3×3 هي:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

يُمكِن التحقُّق من أنَّ ناتج ضرب المصفوفة I في أيِّ مصفوفة مُربَّعة A، لها نفس رتبة I، هو المصفوفة A نفسها؛ أيْ إنَّ:

$$I \times A = A \times I = A$$

مفهوم أساسي

المصفوفة المُحايِدة لعملية ضرب المصفوفات

بالكلمات: مصفوفة الوحدة I هي المصفوفة المُحايِدة لعملية ضرب المصفوفات، التي إذا ضُرِبت في أيِّ مصفوفة أُخرى من الرتبة نفسها كان ناتج الضرب هو المصفوفة الأُخرى نفسها.

بالرموز: لأيِّ مصفوفة مُربَّعة A، لها رتبة المصفوفة المُحايِدة I نفسها، فإنَّ:

$$I \times A = A \times I = A$$

أتعلَّم

إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة نفسها، وكان $AB = I$، فإنَّ $BA = I$.

إذا كانت المصفوفتان A, B مُربَّعتين من الرتبة نفسها، وكان: $A \times B = B \times A = I$، فإنَّ المصفوفة A تُسمّى **نظيرًا ضربيًّا** (multiplicative inverse) للمصفوفة B، وتُسمّى المصفوفة B أيضًا نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة A.

مفهوم أساسي

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة A هو المصفوفة A^{-1}، حيث:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

أتعلَّم

A^{-1} هو رمز للنظير الضربي للمصفوفة A، وليس $\frac{1}{A}$.

مثال 1

أُبيِّن في كلٍّ ممّا يأتي إذا كانت كل مصفوفة تُمثِّل نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة الأُخرى:

1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ بتعويض المصفوفة A، والمصفوفة B

$= \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(-3)+3(2) \\ 1(2)+2(-1) & 1(-3)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بضرب المصفوفتين، والتبسيط

بما أنَّ: $AB = I$، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تُمثِّل نظيرًا ضربيًّا للأُخرى.

أتعلَّم

إنَّ التعريف الأصلي للتحقُّق من أنَّ كل مصفوفة تُمثِّل نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة الأُخرى يُحتِّم اختبار أنْ تكون $AB = I$، و $BA = I$. وبما أنَّ تحقُّق أحد الشرطين يضمن تحقُّق الشرط الآخر، فإنَّنا نكتفي فقط باختبار أحد الشرطين.

2 $F = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

$$FG = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$ بتعويض المصفوفة F، والمصفوفة G

$$= \begin{bmatrix} 6(\frac{3}{4})+5(\frac{1}{4}) & 6(\frac{5}{8})+5(\frac{3}{8}) \\ 2(\frac{3}{4})+3(\frac{1}{4}) & 2(\frac{5}{8})+3(\frac{3}{8}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{4} & \frac{45}{8} \\ \frac{9}{4} & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$ بضرب المصفوفتين، والتبسيط

بما أنَّ: $FG \neq I$، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة F والمصفوفة G لا تُمثِّل نظيرًا ضربيًّا للأُخرى.

أتحقَّق من فهمي

أُبيِّن في كلٍّ ممّا يأتي إذا كانت كل مصفوفة تُمثِّل نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة الأُخرى:

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

إيجاد النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفرِدة من الرتبة 2×2

إذا كانت مُحدِّدة المصفوفة تساوي صفرًا، فلا نظيرَ ضربيًّا لها، وتُسمّى عندئذٍ **مصفوفة مُنفردة** (singular matrix). أمّا المصفوفة التي مُحدِّدتها لا تساوي صفرًا، فإنَّ لها نظيرًا ضربيًّا، وتُسمّى عندئذٍ **مصفوفة غير مُنفرِدة** (non– singular matrix).

يُمكِن إيجاد النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفرِدة من الرتبة 2×2، إذا كانت مُحدِّدتها لا تساوي صفرًا كما هو مُبيَّن أدناه.

مفهوم أساسي

النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفرِدة من الرتبة 2×2

بالكلمات: إذا كانت مُحدِّدة المصفوفة A ذات الرتبة 2×2 لا تساوي صفرًا، فإنَّ لها نظيرًا ضربيًّا يُمكِن إيجاده باتِّباع الخطوات الآتية:

1. تبديل موقع كلٍّ من عنصري القُطْر الرئيس.
2. ضرب عنصري القُطْر الآخر في -1
3. ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المُحدِّدة، أو $\left(\frac{1}{|A|}\right)$.

بالرموز: إذا كانت: $|A| \neq 0$، فإنَّ النظير الضربي للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

مثال 2

أُبيِّن إذا كانت كل مصفوفة ممّا يأتــي مُنفرِدة أو غير مُنفرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي للمصفوفة غير المُنفرِدة:

1 $M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3(10) - 6(5) = 30 - 30$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$= 0$ بالتبسيط

بما أنَّ: $|M| = 0$، فإنَّ المصفوفة M مُنفرِدة، ولا نظيرَ ضربيًّا لها.

2 $F = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

$|F| = 4(-2) - (-3)(6) = -8 + 18$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$= 10$ بالتبسيط

بمـــا أنَّ: $|F| \neq 0$، فإنَّ المصفوفة F غير مُنفرِدة، ولهـــا نظير ضربي، هو: F^{-1}، ويُمكِن إيجاده كما يأتي:

$F^{-1} = \frac{1}{|F|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2

$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أُبيِّــن إذا كانت كلٌّ من المصفوفات الآتية مُنفرِدة أو غير مُنفــرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي لغير المُنفرِدة منها:

a) $H = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $K = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$

أُفكِّر

كيــف يُمكِننــي التحقُّق مــن صِحَّــة إجابتي في الفــرع 2 مــن المثال 2؟ أُبرِّر إجابتي.

أُفكِّر

مــا علاقــة المصفوفة K بالمصفوفة K^{-1}؟

أتعلَّم

سيقتصر هذا الدرس على المعادلة المصفوفية التي تتضمَّن فقط عملية ضرب المصفوفات؛ أيِ المعادلة التي صورتها: $AX = B$، حيث A, B مصفوفتان معلومتان، و X مصفوفة مجهولة يُراد إيجادها.

أتذكَّر

النظير الضربي للعدد الحقيقي a هو العدد $\frac{1}{a}$، حيث $a \neq 0$، وحاصل ضرب أيِّ عدد حقيقي في نظيره الضربي هو العدد 1، وهو العنصر المُحايِد لضرب الأعداد الحقيقية.

المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية (matrix equation) هي معادلة تتضمَّن مصفوفات مجهولة (أو تكون بعض عناصرها مجهولة)، ومصفوفات معلومة، إضافةً إلى عمليات على تلك المصفوفات.

أمّا طريقة حلِّ المعادلة المصفوفية: $AX = B$ فتُشبِه طريقة حلِّ المعادلة: $ax = b$، حيث a, b, x أعداد حقيقية كما هو مُبيَّن أدناه.

معادلة جبرية		معادلة مصفوفية	
	$ax = b$		$AX = B$
بضرب الطرفين في $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b)$	بضرب الطرفين في A^{-1} من اليسار	$A^{-1}(AX) = A^{-1} \times B$
خاصية التجميع	$(\frac{1}{a} \times a)x = \frac{b}{a}$	خاصية التجميع	$(A^{-1} \times A)X = A^{-1}B$
خاصية النظير الضربي	$(1)x = \frac{b}{a}$	خاصية النظير الضربي	$(I)X = A^{-1}B$
خاصية العنصر المُحايِد	$x = \frac{b}{a}$	خاصية الضرب في المصفوفة المُحايِدة	$X = A^{-1}B$

لحلِّ نظام من معادلتين خطِّيتين بمُتغيِّرين، أُحوِّلهما أوَّلًا إلى معادلة مصفوفية صورتها: $AX = B$، حيث A مصفوفة معاملات المُتغيِّرين، وX مصفوفة المُتغيِّرات في المعادلتين الخطِّيتين، وB مصفوفة الثوابت، فيكون حلُّ هذا النظام هو: $X = A^{-1}B$؛ شرط أنْ تكون المصفوفة A غير مُنفرِدة.

مثال 3

أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إنْ أمكن):

$$5x + 3y = 3$$

$$x - 2y = 11$$

الخطوة 1: أكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل هذا النظام.

صيغة المعادلة المصفوفية

$$AX = B$$

بالتعويض

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أجد مُحدِّدة مصفوفة المعاملات.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5(-2) - 1(3)$$ باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$$= -13$$ بالتبسيط

بما أنَّ: $|A| \neq 0$، فإنَّه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A.

الخطوة 3: أجد A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2

$$= \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$$ بالتبسيط

الخطوة 4: أحُلّ المعادلة المصفوفية باستعمال الصيغة: $X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B$$ صيغة حلِّ المعادلة المصفوفية

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$ بضرب المصفوفتين، والتبسيط

إذن، حلُّ هذا النظام هو: $(3, -4)$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه عند حلِّ نظام المعادلات باستعمال قاعدة كريمر أو النظير الضربي، فإنَّ شرط أنْ تكون $|A| \neq 0$ ضروري.

أفكِّر

أحُلُّ نظام المعادلات في المثال 3 باستعمال قاعدة كريمر، ثمَّ أتأكَّد أنَّ الحلَّين مُتطابِقان.

أتحقَّق:

أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ بالتعويض في نظام المعادلات.

$x - 2y = 11$	المعادلة الأصلية	$5x + 3y = 3$
$3-2(-4) \stackrel{?}{=} 11$	بتعويض $x = 3, y = -4$	$5(3) + 3(-4) \stackrel{?}{=} 3$
$3 + 8 = 11$	بالضرب	$15 - 12 = 3$
$11 = 11$ ✓	بالتبسيط	$3 = 3$ ✓

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إنْ أمكن):

$$3x - y = 13$$

$$3y - 2x = 4$$

يُمكِن استعمال المعادلات المصفوفية لحلِّ مسائل عملية تؤول إلى نظام ذي معادلتين خطِّيتين بمُتغيِّرين.

مثال 4 : من الحياة

كيمياء: يعمل يوسف في أحد مختبرات البحوث، وهو يريد تحضير 50 L من محلول حمض الهيدروكلوريك (HCL) بحيث تكون نسبة تركيزه 35%. إذا علمْتُ أنَّ المختبر يحوي من هذا الحمض محلولًا نسبة تركيزه 15%، ومحلولًا آخرَ نسبة تركيزه 40%، فكم لترًا سيستعمل يوسف من كلا المحلولين؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها.

أفترض أنَّ يوسف سيستعمل x لترًا تركيزها 15%، و y لترًا تركيزها 40%

الخطوة 1: أكتب نظام المعادلات الذي يُمثِّل هذه المسألة.

- **المعادلة الأولى:** مجموع الكميتين هو 50 L. إذن، المعادلة التي تُعبِّر عن ذلك هي:

$$x + y = 50$$

- **المعادلة الثانية:** كمية الحمض في x لترًا مضافًا إليها كمية الحمض في y لترًا تساوي كمية الحمض في 50 L. إذن، المعادلة التي تُعبِّر عن ذلك هي:

$$0.15x + 0.40y = 17.5$$

إرشاد

كمية الحمض الموجودة في 50 L هي:

$50 \times 35\% = 17.5$

إذن، نظام المعادلات الذي يُعبِّر عن هذه المسألة هو:

$$x + y = 50$$

$$0.15x + 0.40y = 17.5$$

الخطوة 2: أكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل هذا النظام.

صيغة المعادلة المصفوفية

$$AX = B$$

بالتعويض

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.15 & 0.40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 17.5 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: أجد مُحدِّدة مصفوفة المعاملات.

باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثانية

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.15 & 0.40 \end{vmatrix} = 1(0.40) - 1(0.15)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{4}$$

بما أنَّ: $|A| \neq 0$، فإنَّه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A.

الخطوة 4: أجد النظير الضربي A^{-1}.

النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2 $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

بالتعويض $\quad =\frac{1}{\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} 0.40 & -1 \\ -0.15 & 1 \end{bmatrix}$

بالتبسيط $\quad =\begin{bmatrix} 1.6 & -4 \\ -0.6 & 4 \end{bmatrix}$

الخطوة 5: أحُلُّ المعادلة المصفوفية باستعمال الصيغة: $X=A^{-1}B$.

صيغة حلِّ المعادلة المصفوفية $\quad X=A^{-1}B$

بالتعويض $\quad =\begin{bmatrix} 1.6 & -4 \\ -0.6 & 4 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 50 \\ 17.5 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين، والتبسيط $\quad =\begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}$

إذن، الحلُّ هو $(10, 40)$؛ أيْ إنَّ يوسف سيستعمل 10 L من المحلول الذي تركيزه 15%، و 40 L من المحلول الذي تركيزه 40% لتحقيق هدفه.

أتحقَّق من فهمي

طهي: يوجد في معمل للحلويات محلولان، تركيز السُّكَّر في أحدهما 12%، وتركيزه في الآخر 20%. يريد الطاهي تحضير 20 L من محلول، تركيز السُّكَّر فيه 15%. كم لترًا سيستعمل الطاهي من كلا المحلولين المُتوافِرين في المعمل؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُبيِّن في كلٍّ ممّا يأتي إذا كانت كل مصفوفة تُمثِّل نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة الأُخرى:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3) $L = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

4) $G = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$

أُبيِّن إذا كانت كلٌّ من المصفوفات الآتية مُنفرِدة أو غير مُنفرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي لغير المُنفرِدة منها:

5) $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7) $S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

8) $V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظير الضربي (إنْ أمكن):

9) $3x + 5y = 13$, $x - 2y = -3$

10) $-2x + 4y = 6$, $x + 2y = 7$

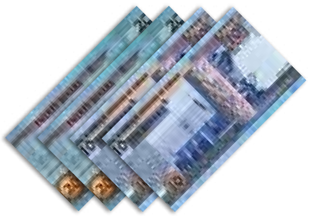
11) $5x - 8y = 31$, $2y - 3x = -13$

12) $x + y = 20$, $x - 2y = -1$

13) $3x + 2y = 8$, $x = y + 1$

14) $2x + 7y = 24$, $4x + 13y = 46$

15) **صيدلة:** لدى صيدلي محلولان، تركيز الملح في أحدهما 2%، وتركيزه في الآخر 12%. يريد الصيدلي تحضير 10 L من محلول، تركيز الملح فيه 10%. ما المعادلة المصفوفية التي يتعيَّن استعمالها لتحضير الكمية المطلوبة من المحلول؟ **أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها.**



16 **أوراق نقدية**: مع سعاد مجموعة من الأوراق النقدية من فئة JD 10، وفئة JD 20، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 750. إذا علمْتُ أنَّ عدد أوراق فئة العشرين دينارًا يقلُّ عن مثلي عدد أوراق فئة عشرة الدنانير بمقدار 5 أوراق، **فأكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة**، ثمَّ أحُلُّها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفئتين.

17 ما قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مُنفرِدة؟

18 ما قيمة a التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ نظيرًا ضربيًّا لنفسها؟

19 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة C، بحيث يكون: $(B+C)^{-1} = A$.

20 إذا كان A مصفوفة من الرتبة 2×2، حيث: $A^2 = 2A - 3I$، فأُثبِت أنَّ: $A^3 = A - 6I$.

21 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

22 **تبرير**: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وكانت: $a>0, d>0, b<0, c<0, |A| \neq 0$، فهل توجد عناصر سالبة في A^{-1}؟ أُبرِّر إجابتي.

23 **برهان**: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، وكان: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$، فأُثبِت أنَّ: $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

24 **أكتشف المختلف**: أيُّ المصفوفات الآتية مختلفة؟ أُبرِّر إجابتي.

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

25 **تحدٍّ**: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة B التي تُحقِّق المعادلة: $BA^2 = A$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 15 & -8 & 0 \\ 9 & 22 & -4 \\ -3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$، فإنَّ $a_{21}+a_{32}$ يساوي:

a) 15 b) −12

c) 5 d) −2

2 إذا كانت $A_{3\times2}$، وكانت $B_{2\times4}$، وكانت $C_{3\times2}$، فإنَّ العملية التي يُمكِن إيجادها هي:

a) $A+B$ b) $B+C$

c) $5B-3C$ d) $(A+C)B$

3 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 4 & x \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y & 2 \\ 4 & z \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & x-z \end{bmatrix}$، فإنَّ قيمة $(x+y+z)$ تساوي:

a) 10 b) 19

c) 21 d) 26

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix} -8 & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مُنفرِدة، فإنَّ قيمة x تساوي:

a) −8 b) −12

c) 6 d) −26

5 إذا كان: $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & -2 & -3 \end{bmatrix}$، فإنَّ قيمة العنصر c_{23} تساوي:

a) 39 b) 22

c) 25 d) 27

6 إذا كانت $L_{3\times4}$، وكانت $M_{5\times3}$، وكانت $N_{2\times5}$، فإنَّ رتبة المصفوفة T، حيث: $T = NML$، هي:

a) 2×3 b) 3×5

c) 3×4 d) 2×4

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a-3 & -2 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

7 أجد مُحدِّدة A بدلالة a.

8 أجد قِيَم a التي تجعل المصفوفة A مُنفرِدة.

9 أجد A^{-1} عندما $a = 3$.

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

10 $C(B+D)$

11 AB

12 $B+C$

13 $2B-3C$

14 أجد: $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ -2 & 11 & 9 \end{vmatrix}$.

15 يُبيِّن الجدول التالي توزيع سُكّان إحدى البلدات (بالآلاف) بحسب فئات العمر والجنس. أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة صفوفها فئات الأعمار، ثمَّ أُحدِّد رتبتها.

العمر	الذكور	الإناث
0 – 19	71	66
20 – 39	68	59
40 – 59	32	22
60 فأكثر	11	14

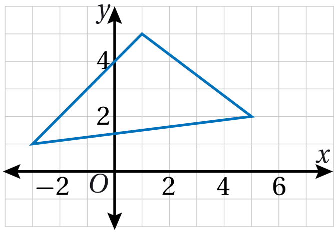
16 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة x التي تجعل $AB = BA$.

17 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت k والثابت h اللذينِ يجعلان $A^2 + kI = hA$.

18 إذا كانت: $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, A = [2 \quad -2]$، فأجد $BA - 2C^2$.

19 أحُلُّ المعادلة: $2X - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

20 أجد مساحة المُثلَّث الآتي باستعمال المُحدِّدات.



21 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر:

$$3x - 2y = 8$$
$$5x + 3y = 13$$

22 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي:

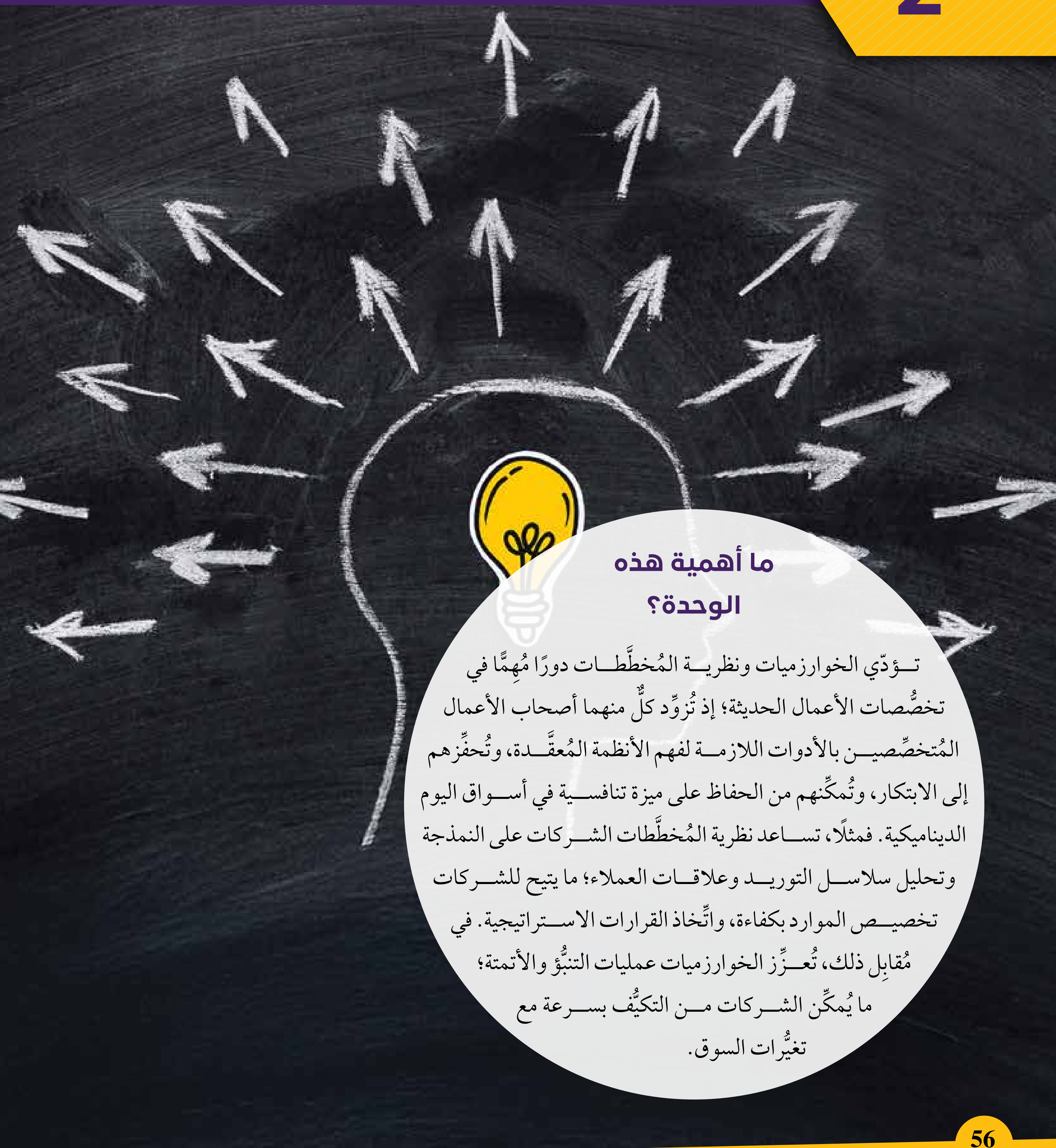
$$x - 5y = 14$$
$$3x - 8y = 28$$

23 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت لا يساوي 2، وكان: $B + B^{-1} = I$، فأجد قيمة a.

24 **كيمياء:** لدى عائشة 3 محاليل حمضية، تركيز الحمض في المحلول الأوَّل 10%، وتركيزه في المحلول الثاني 20%، وتركيزه في المحلول الثالث 40%. أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها لإيجاد الكميات التي يتعيَّن على عائشة مزجها من المحاليل الثلاثة للحصول على 100 mL من محلول حمضي نسبة تركيزه 18%، علمًا بأنَّ الكمية التي ستُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 10% تساوي أربعة أمثال ما سيُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 40%.

الوحدة
2

الخوارزميات ونظرية المُخطَّطات
Algorithms and Graph Theory



ما أهمية هذه الوحدة؟

تـؤدّي الخوارزميات ونظريـة المُخطَّطـات دورًا مُهمًّا في تخصُّصات الأعمال الحديثة؛ إذ تُزوِّد كلٌّ منهما أصحاب الأعمال المُتخصِّصيـن بالأدوات اللازمـة لفهم الأنظمة المُعقَّـدة، وتُحفِّزهم إلى الابتكار، وتُمكِّنهم من الحفاظ على ميزة تنافسـية في أسـواق اليوم الديناميكية. فمثلًا، تسـاعد نظرية المُخطَّطات الشـركات على النمذجة وتحليل سلاسـل التوريـد وعلاقـات العملاء؛ ما يتيح للشـركات تخصيـص الموارد بكفاءة، واتِّخاذ القرارات الاسـتراتيجية. في مُقابِل ذلك، تُعـزِّز الخوارزميات عمليات التنبُّؤ والأتمتة؛ ما يُمكِّن الشـركات مـن التكيُّف بسـرعة مع تغيُّرات السوق.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة.
- ✓ المصفوفات: مفهومها، وعناصرها، ورتبتها، وأنواعها، وكيفية تنظيم البيانات فيها.
- ✓ حلَّ المسألة باستعمال استراتيجية التخمين والتحقُّق.
- ✓ حلَّ المعادلات الخطِّية بمُتغيِّر واحد.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ الخوارزميات، وتطبيقها.
- ◄ خوارزميات تعبئة الصندوق، واستعمالها لإيجاد الحلِّ الأمثل لمسألة تعبئة.
- ◄ المُخطَّط، ومُكوِّناته، وبعض التعريفات الأساسية المُتعلِّقة به، وبعض أنواعه الخاصة.
- ◄ مصفوفة الجوار، ومصفوفة الوزن، واستعمالهما للتعبير عن الروابط في المُخطَّطات.
- ◄ تحديد إذا كان المُخطَّط المُعطى أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (20) و(21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

الخوارزميات
Algorithm

فكرة الدرس
- تعرُّف خوارزميات مُعطاة بالكلمات والرموز، وتطبيقها.
- تعرُّف خوارزمية مُخطَّط سَيْر العمليات، وتطبيقها.

المصطلحات الخوارزمية، الطريقة شبه الرمزية، جدول التتبُّع، مُخطَّطات سَيْر العمليات.

مسألة اليوم كيف يُمكِن التعبير بطريقة مُنظَّمة عن خطوات ضرب أيِّ عدد من ثلاث منازل في أيِّ عدد من منزلة واحدة؟ هل توجد أكثر من طريقة لذلك؟

$$\begin{array}{r} {}^{1\ 3} \\ 325 \\ \times \quad 6 \\ \hline 1950 \end{array}$$

الخوارزميات المكتوبة بالكلمات

تعلَّمْتُ في مبحث المهارات الرقمية أنَّ **الخوارزمية** (algorithm) مجموعة من التعليمات أو الخطوات المُنظَّمة التي تُحدِّد كيفية حلِّ مشكلة مُعيَّنة. كذلك تعلَّمْتُ العديد من الخوارزميات في مبحث الرياضيات، مثل ضرب عددين يتكوَّن كلٌّ منهما من منزلتين، أو جمع كسرين غير مُتشابِهين، أو إيجاد الوسيط لمجموعة من البيانات.

توجد طرائق عِدَّة لكتابة الخوارزمية، منها طريقة الكلمات؛ وهي وصف للخوارزمية بجمل (خطوات) مُتسلسِلة من دون استعمال أيِّ رموز في هذه الجمل. ويُبيِّن المثال الآتي كيف يُمكِن تطبيق خوارزمية مكتوبة بالكلمات.

أتعلَّم

تطبيق الخوارزمية يعني تتبُّع خطواتها واحدة تلو الأُخرى على مُدخَلة ما.

مثال 1

تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد يقبل القسمة على 11 أم لا:

1. أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية من العدد.
2. أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية من العدد.
3. أجد الفرق المُطلَق بين المجموعين في الخطوتين السابقتين.
4. إذا كان الفرق المُطلَق 0 أو يقبل القسمة على 11، فإنَّ العدد يقبل القسمة على 11، وإلّا فإنَّه لا يقبل القسمة على 11

أتذكَّر

الفرق المُطلَق يعني طرح العدد الأصغر من العدد الأكبر.

أُطبِّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على **11** أم لا:

1 **86416**

1. $6 + 4 + 8 = 18$ أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية
2. $1 + 6 = 7$ أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية
3. $18 - 7 = 11$ أجد الفرق المُطلَق

يقبل العدد 86416 القسمة على 11؛ لأنَّ العدد 11 (الفرق المُطلَق بين المجموعين) يقبل القسمة على 11

2 **78532**

1. $2 + 5 + 7 = 14$ أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية
2. $3 + 8 = 11$ أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية
3. $14 - 11 = 3$ أجد الفرق المُطلَق

لا يقبل العدد 78532 القسمة على 11؛ لأنَّ العدد 3 (الفرق المُطلَق بين المجموعين) لا يقبل القسمة على 11

أتحقَّق من فهمي

أُطبِّق الخوارزمية الواردة في المثال **1** لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على **11** أم لا:

a) 9768

b) 734852

أتعلَّم

العدد 86416 هو المُدخَلة التي تُطبَّق عليها الخوارزمية.

الخوارزميات المكتوبة بطريقة شبه رمزية

تُكتَب الخوارزمية أيضًا باستعمال **الطريقة شبه الرمزية** (pseudocode)، وفيها توصَف الخوارزمية بخطوات مُتسلسِلة مُرقَّمة تتضمَّن العديد من الرموز. غير أنَّ تتبُّع الخوارزمية المكتوبة بهذه الطريقة يكون صعبًا في بعض الأحيان، ويحتاج إلى تنظيم؛ لذا يُمكِن استعمال **جدول التتبُّع** (trace table) لتدوين القيمة الناتجة من كل خطوة أثناء تطبيق الخوارزمية.

أتذكَّر

تُعَدُّ الطريقة شبه الرمزية في كتابة الخوارزميات سهلة ومناسبة لأغلب الخوارزميات.

مثال 2

أتأمّل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:

1. Let $n = 1, A = 1$
2. Print A
3. Let $B = A + 2$
4. Print B
5. Let $n = n + 1, A = B$
6. If $n < 4$, go to step 3
7. If $n = 4$, Stop

1 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها.

step	n	A	B	Print
1	1	1		
2				1
3			3	
4				3
5	2	3		
6→3			5	
4				5
5	3	5		
6→3			7	
4				7
5	4	7		
6→7	Stop			

مُخرَجات الخوارزمية هي: 1, 3, 5, 7

2 أَصِف مُخرَجات الخوارزمية.

تُمثِّل مُخرَجات الخوارزمية الأعداد الفردية الموجبة التي تقلُّ عن العدد 9

أتعلَّم

لإنشـاء جـدول تتبُّـع لخوارزميـة شـبه رمزية، فإنَّنـي أضع عمـودًا لكل مُتغيِّـر ورد ذكـره فـي الخوارزميـة، إضافـةً إلى عمود رقم الخطوة، وعمود نواتج الأمر (Print).

أتعلَّم

إنَّ مـا كُتِب فـي الخطوة الخامسـة مـن هـذه الخوارزمية لا يُعَدُّ معادلة، وإنَّمـا يُمثِّـل تعليمـات. فمثـلًا: $n = n+1$ تعني إضافة 1 إلـى قيمة n من الخطوة السابقة، في حين تعنـي $A = B$ أنَّ قيمة A تساوي القيمة الحالية لـ B.

أتعلَّم

مُخرَجات الخوارزمية هي المُخرَجـات الناتجـة من الأمر (Print).

أتحقَّق من فهمي

أتأمَّل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:

1. Let $n = 1, A=1, B=n+A$
2. Print B
3. Let $C = B + 2$
4. Print C
5. Let $n = n+1, B = C$
6. If $n < 5$, go to step 3
7. If $n = 5$, Stop

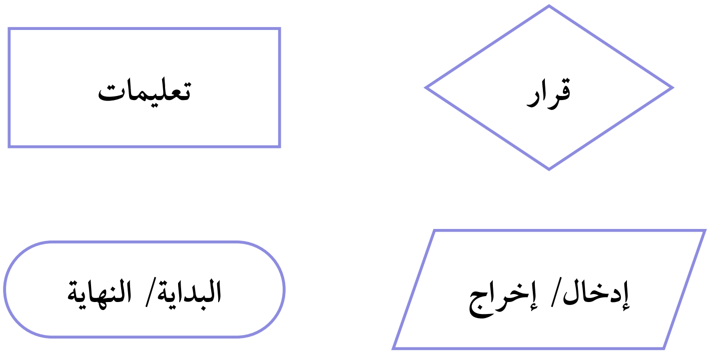
a) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها.

b) أَصِف مُخرَجات الخوارزمية.

الخوارزميات المُمثَّلة بمُخطَّطات سَيْر العمليات

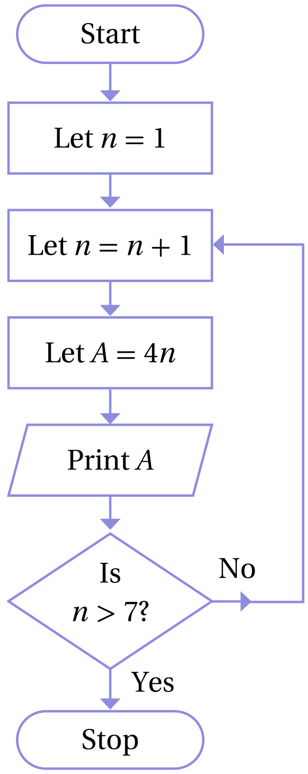
يُمكِن أيضًا تمثيل الخوارزمية باستعمال **مُخطَّط سَيْر العمليات** (flow chart)؛ وهو مُخطَّط يتكوَّن من أشكال هندسية مُرتبِطة بأسهم وخطوط تَصِف خطوات الخوارزمية وسَيْر العمليات فيها.

بوجه عام، تُستعمَل الأشكال (الصناديق) الآتية للدلالة على خطوات مُحدَّدة في الخوارزمية:



مثال 3

أتأمَّل الخوارزمية الآتية المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



1 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها.

n	A	Print	Is $n > 7$?
1			
2	8	8	no
3	12	12	no
4	16	16	no
5	20	20	no
6	24	24	no
7	28	28	no
8	32	32	yes

مُخرَجات الخوارزمية هي: 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32

2 أَصِف مُخرَجات الخوارزمية.

تُمثِّل مُخرَجات الخوارزمية مضاعفات العدد 4، التي تزيد على أو تساوي 8، وتقلُّ عن 36

أتعلَّم

يعمل n في الخوارزمية بوصفه عدّادًا، وهو عدّاد يضمن اكتمال الخوارزمية.

ألاحِظ أنَّ الخوارزمية تكتمل عندما $n = 8$.

أتعلَّم

يحتوي صندوق القرار على سؤال إجابته نعم (Yes) أو لا (No).

أتحقَّق من فهمي

أفتـرض أنَّ العمليـة في الصنـدوق الرابع من مُخطَّط سَـيْر العمليـات الوارد فـي المثال 3 هي: **Let $A = 2n$**، ثـمَّ أُجيب عـن كلٍّ ممّا يأتي:

a) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها.

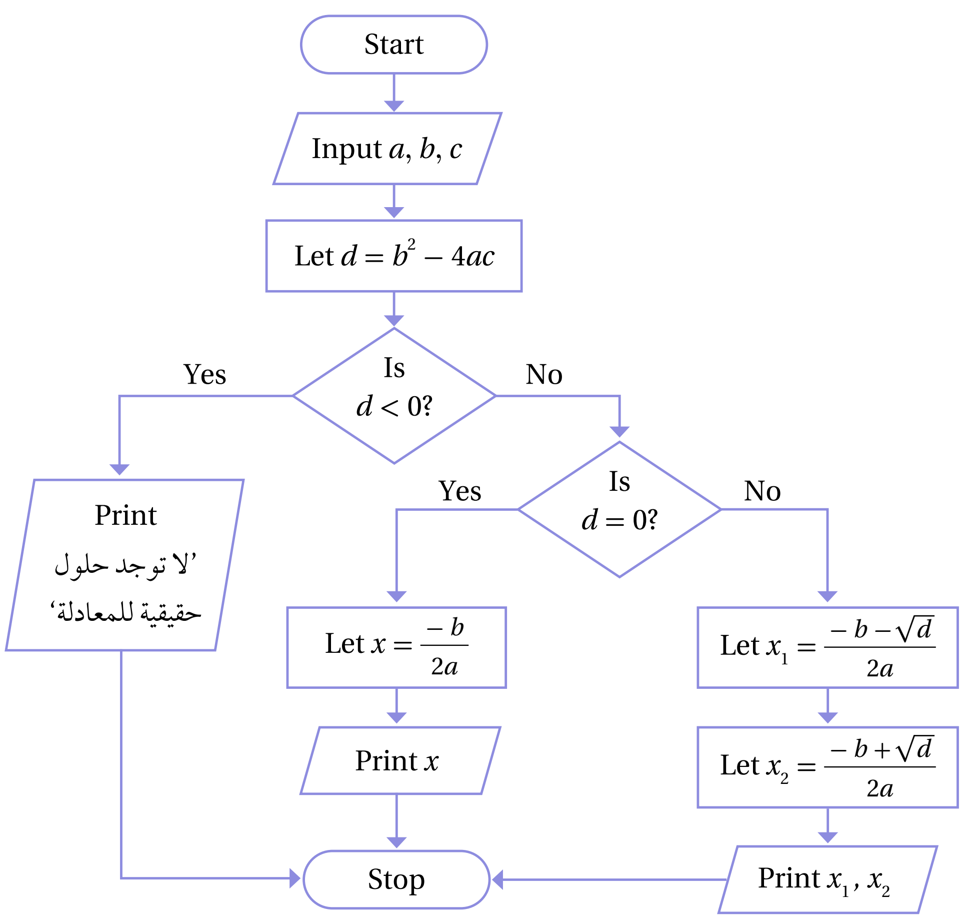
b) أَصِف مُخرَجات الخوارزمية.

توجد استعمالات رياضية للخوارزميات أكثر تعقيدًا من تلك التي نوقِشت في المثال السابق، مثل: تحديد إذا كان لمعادلة تربيعية حلول حقيقية أم لا، وإيجاد هذه الحلول.

مثال 4

تُستعمَل الخوارزمية الآتية لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$.

أُطبِّق الخوارزمية، ثمَّ أُحدِّد المُخرَج لكلٍّ من المعادلات التربيعية التالية:



أتعلَّم

تُستعمَل كلمة (Input) للدلالة علـى أمر إدخال المعطيات.

أتذكَّر

القانــون العــام لحــلِّ المعادلــة التربيعيــة: $ax^2+bx+c=0$، حيث $a \neq 0$، هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وتختلف طبيعة الناتج؛ لأنَّ المُميِّـز $\Delta = b^2-4ac$ قد يكون عددًا موجبًا، أو عددًا سالبًا، أو صفرًا.

أتذكَّر

إذا كانــت قيمــة المُميِّز موجبــةً، فإنَّــه يوجــد حلّان حقيقيان للمعادلة التربيعيــة. أمّــا إذا كانت قيمة المُميِّــز صفرًا، فإنَّه يوجد حــلٌّ حقيقي واحد للمعادلــة التربيعية. وإذا كانت قيمة المُميِّز سالبة، فــلا توجــد للمعادلــة التربيعية حلول حقيقية.

1) $x^2 + 7x + 15 = 0$

a	b	c	d	$d < 0?$
1	7	15	-11	Yes

المُخرَج: لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

2) $2x^2 + 20x + 32 = 0$

a	b	c	d	$d < 0?$	$d = 0?$	x_1	x_2
2	20	32	144	No	No	-8	-2

المُخرَج: $x_1 = -8, x_2 = -2$.

3) $4x^2 - 16x + 16 = 0$

a	b	c	d	$d < 0?$	$d = 0?$	x
4	-16	16	0	No	Yes	2

المُخرَج: $x = 2$.

أتحقَّق من فهمي

أُطبِّــق الخوارزميــة الــواردة فــي المثــال 4، ثــمَّ أُحــدِّد المُخــرَج لــكلٍّ مــن المعــادلات التربيعيــة الآتيــة:

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$

b) $3x^2 + 8x + 15 = 0$

c) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد يقبل القسمة على 12 أم لا:

1. أجمع أرقام العدد.
2. إذا كان المجموع في الخطوة الأولى يقبل القســمة على 3، فإنَّني أنتقل إلــى الخطوة الثالثة، وإلّا فإنَّ العدد لا يقبل القسمة على 12
3. إذا كان العدد المُكوَّن من أوَّل رقمين في العدد (آحاد العدد وعشــراته) يقبل القســمة على 4، فإنَّ العدد يقبل القسمة على 12، وإلّا فإنَّه لا يقبل القسمة على 12

أُطبِّق الخوارزمية السابقة لتحديد إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على 12 أم لا:

1 7104   2 3248940   3 5762   4 81456

تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد الكلي سعيدًا أم لا:

1. أجد مُربَّعات أرقام العدد.
2. أجد مجموع مُربَّعات أرقام العدد.
3. أضع مجموع مُربَّعات أرقام العدد بدلًا من العدد نفسه.
4. أستمرُّ في تكرار الخطوة الأولى والخطوة الثانية لكل ناتج حتّى أحصل على مجموع من منزلة واحدة؛ فإذا كان هذا المجموع 1، كان العدد سعيدًا في هذه الحالة، وإذا كان هذا المجموع 4، فيكون العدد وقتئذٍ غير سعيد.

أُطبِّق الخوارزمية السابقة لتحديد إذا كان كل عدد ممّا يأتي سعيدًا أم لا:

5 19   6 42   7 49   8 25

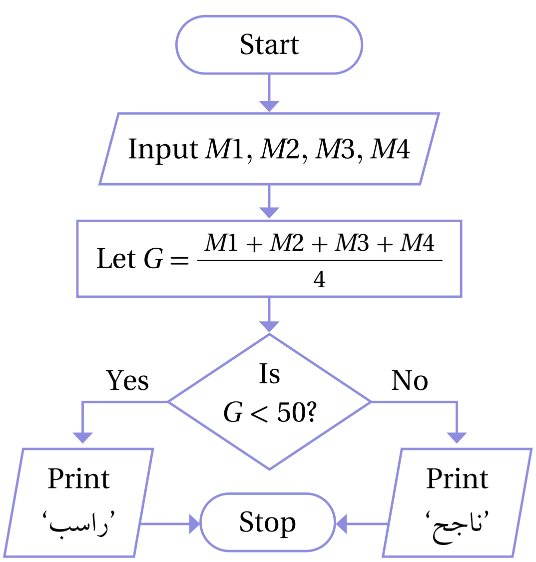
أتأمَّل الخوارزمية المجاورة، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:

1. Let $n = 0, x = 0, y = 1$
2. Let $x = x + 1, y = yx$
3. Print y
4. Let $n = n + 1$
5. If $n < 4$, go to step 2
6. If $n = 4$, Stop

9 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها.

10 أَصِف مُخرَجات الخوارزمية.

أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:



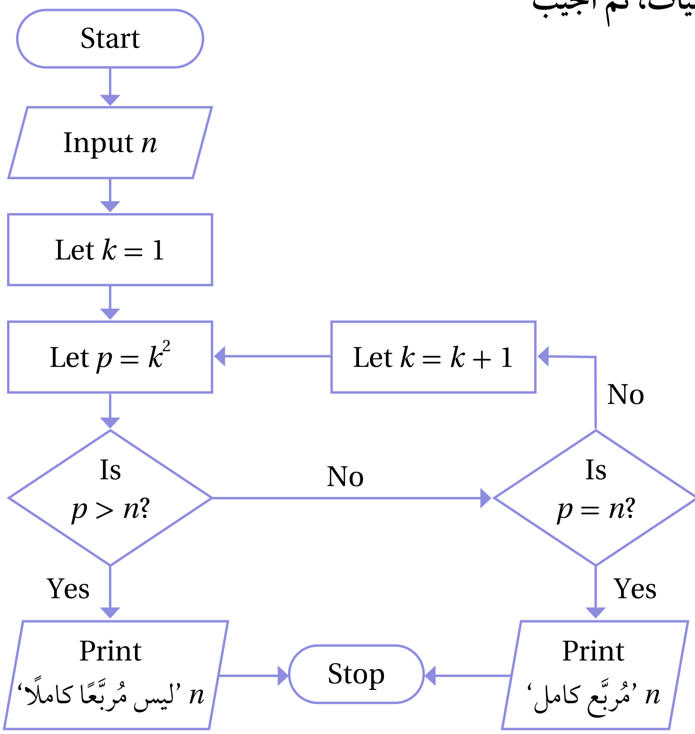
11 أَصِف الاستعمال الرياضي لهذه الخوارزمية.

12 أُطبِّق الخوارزمية على الأعداد الآتية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَج كلٍّ منها:

a) $M1 = 48, M2 = 52, M3 = 46, M4 = 49$

b) $M1 = 71, M2 = 85, M3 = 62, M4 = 45$

أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:



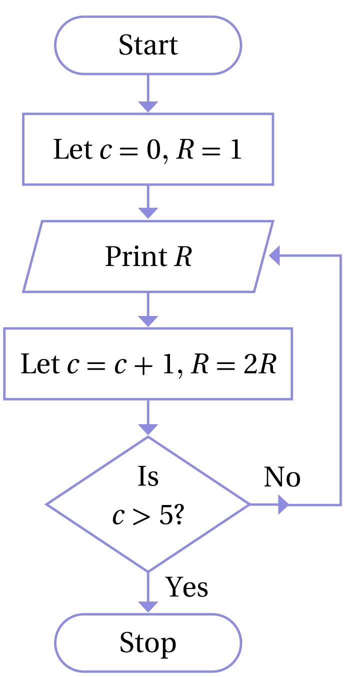
13 أَصِـف الاسـتعمال الرياضـي لهـذه الخوارزمية.

14 أُطبِّـق الخوارزميـة علـى العدديـن الآتيـن باسـتعمال جـدول التتبُّـع لإيجـاد مُخـرَج كلٍّ منهمـا:

a) $n = 24$

b) $n = 16$

أتأمَّـل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَـيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:

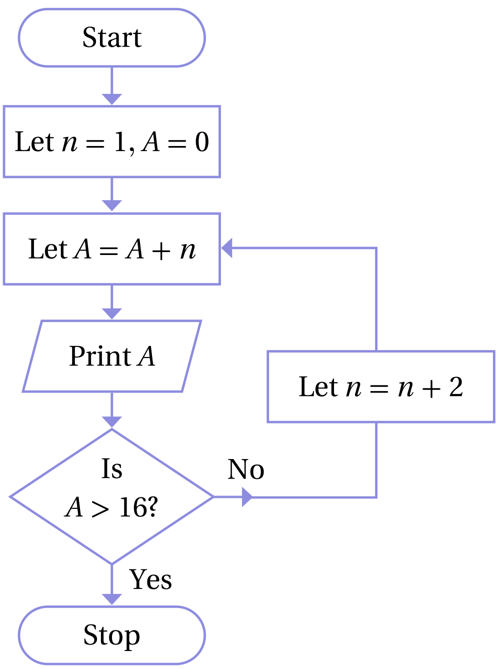


15 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها.

16 أَصِف مُخرَجات الخوارزمية.

مهارات التفكير العليا

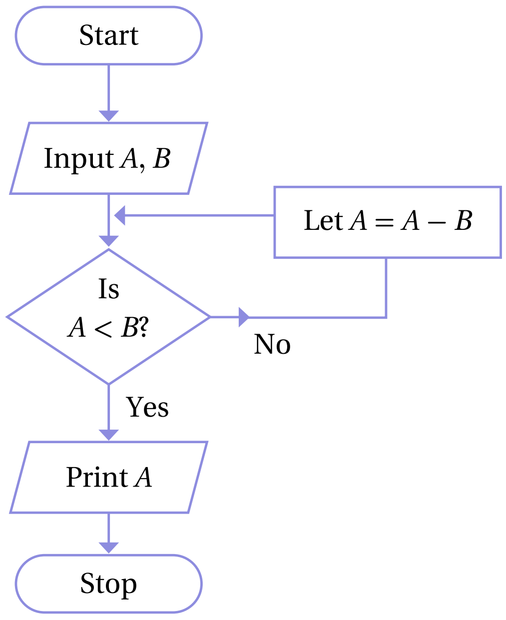
تبرير: أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:



17 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها.

18 أَصِف مُخرَجات الخوارزمية، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:



19 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع عندما $A = 27, B = 4$.

20 أَصِف ما يتحقَّق من تطبيق هذه الخوارزمية.

الدرس 2

خوارزميات تعبئة الصندوق
Bin-Packing Algorithms

فكرة الدرس تعرُّف خوارزميات تعبئة الصندوق، واستعمالها لإيجاد الحلِّ الأمثل لمسألة تعبئة.

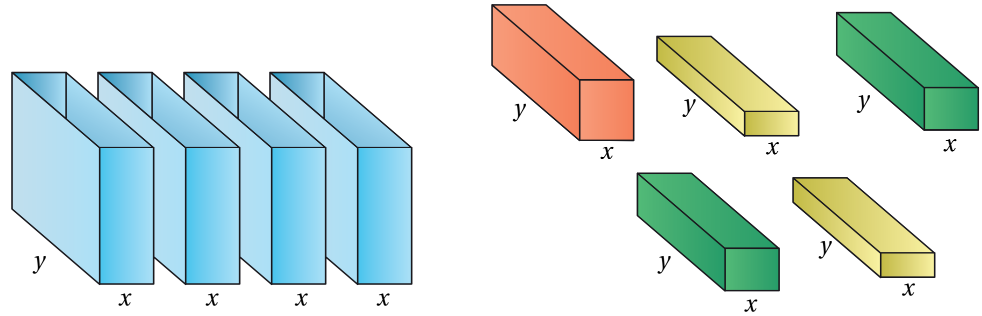
المصطلحات خوارزميات تعبئة الصناديق، خوارزمية المُلاءَمة الأولى، خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، خوارزمية الصندوق الكامل.

مسألة اليوم يرغب مُدرِّب في صالة رياضية أنْ يُرتِّب على رفوفٍ الأثقالَ المُبيَّنة كتلها (بالكيلوغرام) في ما يلي، علمًا بأنَّه يُمكِن لكل رَفٍّ منها أنْ يحمل 40 kg في الحدِّ الأقصى. كيف يُمكِن للمُدرِّب أنْ يُرتِّب الأثقال باستعمال أقل عدد من الرفوف؟

18 16 24 16 20 10 12 8 16 12 10 4 12 6 13

خوارزميات تعبئة الصندوق

إذا كان لديَّ n من العُلَب التي لها المقطع العرضي نفسه (مستطيل عرضه x، وطوله y)، لكنَّ ارتفاعاتها مُتفاوِتة كما يظهر في الشكل التالي، وأردت تعبئتها في صناديق، عرض كلٍّ منها x، وطول كلٍّ منها y، وارتفاعاتها مُتساوِية، فكيف يُمكِنني فعل ذلك باستعمال أقل عدد مُمكِن من الصناديق؟



الصناديق بعض العُلَب

تُسمّى المسألة السابقة مسألة تعبئة الصندوق، ويُمكِن حلُّها باستعمال ما يُسمّى **خوارزميات تعبئة الصناديق** (bin−packing algorithms).

يُستعمَل هذا النوع من الخوارزميات في حلِّ كثير من المسائل الحياتية التي تنطوي على المبدأ نفسه، مثل: تنظيم صناديق البضائع وترتيبها داخل حاويات الشحن، وتحميل البضائع في

شاحنات عليها قيود في الكتلة، وتخزين ملفات بيانات مختلفة الحجوم في عدد من الأقراص المُدمَجة.

تتمثَّل الخطوة الأولى لحلِّ مسألة تعبئة الصندوق في إيجاد الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة كما هو مُبيَّن في المثال الآتي.

مثال 1

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 10 وحدات طول، علمًا بأنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب.

5 7 3 5 6 2 4 4 7 4

الخطوة 1: أجد مجموع ارتفاعات العُلَب.

$5+7+3+5+6+2+4+4+7+4=47$ بجمع ارتفاعات العُلَب

الخطوة 2: أَقسِم مجموع ارتفاعات العُلَب على ارتفاع الصندوق الواحد.

$\frac{47}{10}=4.7$ بقسمة مجموع ارتفاعات العُلَب على ارتفاع الصندوق الواحد

≈ 5 بتقريب الناتج إلى الأعلى

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 5 صناديق.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّنا نجد بهذه الطريقة الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب، لكنَّ هذا العدد قد لا يكون كافيًا من الناحية العملية.

أُفكِّر

لماذا يُقرَّب الناتج إلى الأعلى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها وحدة طول واحدة، علمًا بأنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب.

0.5 0.7 0.5 0.2 0.4 0.2 0.5 0.1 0.6

خوارزمية المُلاءَمة الأولى

توجد خوارزميات عديدة لحلِّ مسألة تعبئة الصندوق، منها **خوارزميــة المُلاءَمة الأولى** (first–fit algorithm). وفي ما يأتي بيان لخطوات هذه الخوارزمية.

خوارزمية المُلاءَمة الأولى

خوارزمية

يُمكِن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

1. إيجاد الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
2. اتِّباع ترتيب العناصر (العُلَب) المُعطى في المسألة.
3. وضع كل عنصر في أوَّل صندوق مُتوافِر يَتَّسِع له، بَدْءًا بالصندوق الأوَّل في كل مَرَّة.
4. في حال لم يَتَّسِع أيُّ صندوق للعنصر الذي يُراد وضعه، فإنَّه يجب إضافة صندوق آخر.

أتعلَّم

إذا كان عدد الصناديق المُتوافِرة (التي حصلْتُ عليها) مُساوِيًا للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة، فهذا يعني أنَّني توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل.

مثال 2

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 1.5 وحدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

0.6 0.5 0.6 0.3 0.4 0.9 0.7 0.5 0.6 0.8

1 **أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.**

الخطوة 1: أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب.

بإيجاد مجموع ارتفاعات العُلَب

$$0.8+0.6+0.5+0.7+0.9+0.4+0.3+0.6+0.5+0.6=5.9$$

بقسمة مجموع ارتفاعات العُلَب على ارتفاع الصندوق الواحد

$$\frac{5.9}{1.5}=3.9\overline{3}$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى

$$\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق.

الخطوة 2: أضع كل عُلْبة في أوَّل صندوق مُتوافِرٍ يَتَّسِع لها، بَدْءًا بالصندوق الأوَّل في كل مَرَّة، وألتزِم ترتيب العناصر في المسألة.

عُلَب الصندوق الأوَّل B1: 0.8, 0.6

عُلَب الصندوق الثاني B2: 0.5, 0.7, 0.3

عُلَب الصندوق الثالث B3: 0.9, 0.4

عُلَب الصندوق الرابع B4: 0.6, 0.5

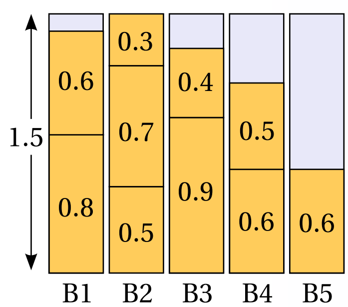
عُلَب الصندوق الخامس B5: 0.6

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى هو 5 صناديق.

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل المجاور ترتيب العُلَب في الصناديق الخمسة.

أُلاحِظ من الشكل أنَّ ارتفاع العُلَب في أيٍّ من الصناديق لم يتجاوز 1.5 وحدة طول.



2 **هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي.**

لا؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ يزيد على الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

3 **أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.**

لإيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أُحدِّد أوَّلًا الارتفاع المهدور في كل صندوق، ثمَّ أجمع قِيَم الارتفاعات المهدورة جميعها:

مجموع الارتفاعات المهدورة من الصناديق $0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.9 = 1.6$

إذن، هُدِر 1.6 وحدة طول في الصناديق جميعها.

أتعلَّم

الحرف B هو اختصار للكلمة الإنجليزية (Bin) التي تعني الصندوق.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتعلَّم

يُمكِن إيجاد الارتفاع المهدور بطريقة أُخرى، تتمثَّل في طرح مجموع ارتفاعات العُلَب من حاصل ضرب عدد الصناديق المُستعمَلة في التعبئة في ارتفاع الصندوق الواحد كالآتي:

$5 \times 1.5 - 5.9 = 1.6$

أتحقَّق من فهمي

يُــراد تعبئــة العُلَــب (المُعطــى ارتفاعاتهــا فــي مــا يلــي) فــي صناديــق، ارتفــاع كلٍّ منها 20 وحـدة طـول. إذا علمْـتُ أنَّ للعُلَـب والصناديـق المقطـع العرضـي نفسـه، فأُجيـب عـن الأسـئلة التاليـة تباعًـا:

7 17 6 5 15 2 11

a) أســتعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

b) هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي.

c) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة

تعلَّمْتُ في المثال السابق حلَّ مســائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ولكنْ توجد خوارزمية أُخرى يُمكِن اســتعمالها لحلِّ هذه المســألة، هي **خوارزمية المُلاءَمة الأولــى المُتناقِصــة** (first–fit decreasing algorithm)، التي تبدأ بترتيب مقاســات العناصر المُعطاة (ارتفاعات العُلَب مثلًا) ترتيبًــا تنازليًّا، ثمَّ تطبق خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العناصر في الصناديق كما هو مُبيَّن أدناه.

أتذكَّر

إنَّ تســمية مســائل تعبئة الصندوق بهذا الاســم لا يعني بالضرورة أنَّها جميعًا تتضمَّــن مِـلْءَ صناديــق بعُلَب أصغر منهــا، وإنَّما يعني أنَّها تقوم على المبدأ نفسه؛ لذا استُعمِلت كلمة (العناصر) بــدلًا من كلمة (العُلَــب) فــي صندوق الخوارزمية المجاور.

خوارزمية

خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة

يُمكِن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، وذلك باتِّباع الخطوتين الآتيتين:

1. ترتيب مقاسات العناصر تنازليًّا.
2. تطبيق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على العناصر التي أُعيد ترتيب مقاساتها.

مثال 3

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها وحدتان. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

0.6 1.5 1.6 0.2 0.4 0.5 0.7 0.1 0.9 0.3

1 **أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.**

الخطوة 1: أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب.

بإيجاد مجموع ارتفاعات العُلَب

$$0.6+1.5+1.6+0.2+0.4+0.5+0.7+0.1+0.9+0.3=6.8$$

بقسمة مجموع ارتفاعات العُلَب على ارتفاع الصندوق الواحد

$$\frac{6.8}{2}=3.4$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى

$$\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق.

الخطوة 2: أُرتِّب ارتفاعات العُلَب ترتيبًا تنازليًّا.

1.6 1.5 0.9 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1

الخطوة 3: أُطبِّق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على ارتفاعات العُلَب التي أُعيد ترتيب مقاساتها.

عُلَب الصندوق الأوَّل B1: 1.6, 0.4

عُلَب الصندوق الثاني B2: 1.5, 0.5

عُلَب الصندوق الثالث B3: 0.9, 0.7, 0.3, 0.1

عُلَب الصندوق الرابع B4: 0.6, 0.2

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة هو 4 صناديق.

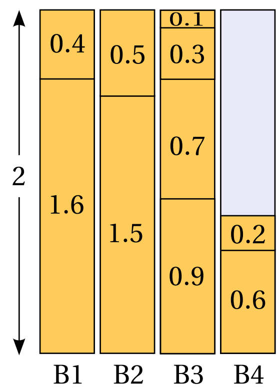
أُفكِّر

أَحُلُّ المثال 3 باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُقارِن بين الحلَّين.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل المجاور ترتيب العُلَب في الصناديق الأربعة.



2 **هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي.**

نعم؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ مُساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

3 **أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.**

أُلاحِظ عدم وجود ارتفاعات مهدورة إلّا في الصندوق الأخير، وهو ارتفاع يساوي 1.2 وحدة طول.

أتحقَّق من فهمي

أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لإعادة حلِّ المسألة الواردة في المثال 2، وأُحدِّد إذا كان الحلُّ الناتج هو الحلَّ الأمثل أم لا، وأجد مجموع الارتفاعات المهدورة في الصناديق جميعها، ثمَّ أُقارِن الحلَّ الذي توصَّلْتُ إليه بالحلِّ الناتج باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى.

أتعلَّم

بوجه عام، يكون الحلُّ الناتج من استعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة أفضل منه عند استعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، لكنَّ ذلك لا يعني بالضرورة التوصُّل إلى الحلِّ الأمثل دائمًا.

خوارزمية الصندوق الكامل

أُلاحِظ أنَّ الخوارزميتين اللتين تعلَّمْتُهما في المثالين السابقين لحلِّ مسائل تعبئة الصندوق تشترطان التزام الترتيب المُعطى أو الترتيب التنازلي لمقاسات العناصر. ولكنْ ثمَّة خوارزمية ثالثة يُمكِن استعمالها لحلِّ مسائل تعبئة الصندوق من دون الالتزام بأيِّ ترتيب لمقاسات العناصر، وهي **خوارزمية الصندوق الكامل** (full–bin packing algorithm).

تبدأ هـــذه الخوارزمية باختيار العناصر التي يُمكِن دمجها معًـــا لمِلْءِ الصندوق كاملًا بصرف النظر عن ترتيب مقاساتها، ثمَّ تعبئة العناصر المُتبقِّية باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى.

أتعلَّم

بوجه عـام، يكـون الحلُّ النـاتـج مـن اسـتعمال خوارزمية الصندوق الكامل أفضـل منه عند اسـتعمال خوارزميـة المُلاءَمـة الأولى أو المُلاءَمة الأولى المُتناقِصـة، لكـنَّ ذلك لا يعني بالضـرورة التوصُّل إلى الحلِّ الأمثل دائمًا.

خوارزمية **خوارزمية الصندوق الكامل**

يُمكِن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باســتعمال خوارزمية الصندوق الكامل، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

1. إيجاد الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
2. البحث عن العناصر التي يُمكِن أنْ تملأ صندوقًا كاملًا، ثمَّ تعبئتها أوَّلًا.
3. تطبيق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على العناصر المُتبقِّية.

مثال 4

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 17 وحدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن السؤالين التاليين تباعًا:

4.1 5.3 4.8 3.2 4.7 4.6 5.6 4.3 4.4 5.2 4 3

1 أســتعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديــق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

الخطوة 1: أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب.

$$3+4+5.2+4.4+4.3+5.6+4.6+4.7+3.2+4.8+5.3+4.1=53.2$$ بإيجاد مجموع ارتفاعات العُلَب

$$\frac{53.2}{17}=3.129$$ بقسمة مجموع ارتفاعات العُلَب على ارتفاع الصندوق الواحد

$$\approx 4$$ بتقريب الناتج إلى الأعلى

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق.

الخطوة 2: أُطبِّق خوارزمية الصندوق الكامل.

B1: 3, 4, 4.7, 5.3 عُلَب الصندوق الأوَّل

B2: 4.4, 4.6, 3.2, 4.8 عُلَب الصندوق الثاني

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الذي مُلِئ أوَّلًا هو الصندوق الأوَّل والصندوق الثاني، ثمَّ استُعمِلت خوارزمية المُلاءَمة الأولى لمِلْءِ الصندوق الثالث والصندوق الرابع.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

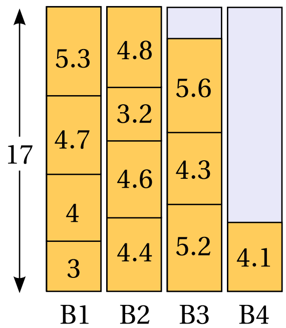
عُلَب الصندوق الثالث B3: 5.2, 4.3, 5.6

عُلَب الصندوق الرابع B4: 4.1

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 صناديق.

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل المجاور ترتيب العُلَب في الصناديق الأربعة.



2 هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ مُساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

أتحقَّق من فهمي

أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لإعادة حلِّ المسألة الواردة في المثال 3، وأُحدِّد إذا كان الحلُّ الناتج هو الحلَّ الأمثل أم لا، ثمَّ أُقارِن الحلَّ الذي توصَّلْتُ إليه بالحلِّ الناتج باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة.

مُلخَّص المفهوم

خوارزميات تعبئة الصندوق

اسم الخوارزمية	إيجابياتها	سلبياتها
خوارزمية المُلاءَمة الأولى.	• سهلة التطبيق.	• عدم تقديم حلٍّ جيِّد في أغلب الأحيان.
خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة.	• سهلة التطبيق. • تقديم حلٍّ جيِّد نوعًا ما بوجه عام.	• قد لا تُقدِّم الحلَّ الأمثل.
خوارزمية الصندوق الكامل.	• تقديم حلٍّ جيِّد بوجه عام.	• قد لا تُقدِّم الحلَّ الأمثل. • من الصعب تطبيقها إذا كان عدد العناصر كبيرًا جدًّا، وكانت مقاساتها قِيَمًا عشرية.

يُمكِن توظيف خوارزميات التعبئة في العديد مـن التطبيقات الحياتية التي تهدف إلى تقليص أكبر قَدْر من الهدر في المساحات والأطوال.

مثال 5 : من الحياة

قماش: في مـا يأتي أطوال 10 قطع قُماش بالمتر، يرغب تاجر في قَصِّها من لفّات قُماش كبيرة، طول كلٍّ منها 60 m:

10　12　9　16　28　38　23　17　45　32

1 **أجد الحدَّ الأدنى من عدد لفّات القُماش الكبيرة اللازمة لقَصِّ قطع القُماش.**

بإيجاد مجموع أطوال قطع القُماش
$$32+45+17+23+38+28+16+9+12+10=230$$

بقسمة مجموع أطوال قطع القُماش على طول اللفَّة الكبيرة الواحدة
$$\frac{230}{60}=3.8\overline{3}$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى
$$\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد لفّات القُماش الكبيرة اللازمة لقَصِّ قطع القُماش هو 4 لفّات.

2 **أُحدِّد كيف تُقَصُّ قطع القُماش باســتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد اللفّات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من القُماش.**

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الأولى　B1: 32, 17, 9

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الثانية　B2: 45, 12

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الثالثة　B3: 23, 28

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الرابعة　B4: 38, 16

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الخامسة　B5: 10

إذن، عـدد اللفّات اللازمة لقَصِّ قطـع القُماش ذات الأطوال المُعطاة باسـتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى هو 5 لفّات قُماش كبيرة.

لإيجاد طول الجزء المهدور من القُماش، أُحدِّد أوّلًا طول الجزء المهدور من كل لفَّة كبيرة، ثمَّ أجمع أطوال الأجزاء المهدورة:

$2 + 3 + 9 + 6 + 50 = 70$ مجموع أطوال الأجزاء المهدورة من لفّات القُماش الكبيرة

إذن، طول الجزء المهدور من القُماش هو 70 m

3 أُحدِّد كيف تُقَصُّ قطع القُماش باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد اللفّات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من القُماش.

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الأولى B1: 32, 28

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الثانية B2: 38, 12, 10

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الثالثة B3: 45, 9

قطع القُماش التي ستُقَصُّ من اللفَّة الرابعة B4: 17, 23, 16

إذن، عدد اللفّات اللازمة لقَصِّ قطع القُماش ذات الأطوال المُعطاة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 لفّات قُماش كبيرة.

لإيجاد طول الجزء المهدور من القُماش، أُحدِّد أوّلًا طول الجزء المهدور من كل لفَّة كبيرة، ثمَّ أجمع أطوال الأجزاء المهدورة:

$6 + 4 = 10$ مجموع أطوال الأجزاء المهدورة من لفّات القُماش الكبيرة

إذن، طول الجزء المهدور من القُماش هو 10 m

4 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل؛ لأنَّ عدد لفّات القماش الذي حصرْتُه من تطبيقها مُساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد اللفّات اللازمة.

أتعلَّم

الجزء المهدور من كل لفَّة هو طول اللفَّة الكلي (60 m) مطروحًا منه مجموع قطع القماش التي يُراد قَصُّها من تلك اللفَّة. فمثلًا، الجزء المهدور من اللفَّة الأولى هو:

$60-(32+17+9) = 2$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ كمية القُماش التي أُهدِرت باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى تزيد على كمية القُماش التي أُهدِرت باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل بمقدار 60 m؛ لذا يُعَدُّ قَصُّ قطع القُماش في هذه المسألة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل أفضل.

أتحقَّق من فهمي

تخزين البيانات: في ما يأتي سعات 9 ملفات حاسوبية (بالجيجابيت) يُراد حفظها في أقراص تخزين، سعة كلٍّ منها 100 جيجابايت:

41 61 38 47 74 87 73 52 29

a) أجد الحدَّ الأدنى من عدد أقراص التخزين اللازمة لحفظ الملفات.

b) أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

c) أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

d) أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 5 وحدات طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

0.6 2.4 1.2 0.8 3.1 0.9 2.8 1.6 2.6 1.4 1.8

1 أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

2 هل الحلُّ الناتج في السؤال السابق هو الحلُّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي.

3 أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

يُـــراد تعبئة العُلَب (المُعطـــى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديـــق، ارتفاع كلٍّ منها 60 وحدة طـــول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

12 28 35 47 19 45 38 10 31

4 أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

5 هل الحلُّ الناتج في السؤال السابق هو الحلُّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي.

6 أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

يُـــراد تعبئة العُلَب (المُعطـــى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديـــق، ارتفاع كلٍّ منها 65 وحدة طـــول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

39 27 11 31 10 35 16 15 21 42

7 أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

8 هل الحلُّ الناتج في السؤال السابق هو الحلُّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي.

9 أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

شحن: في ما يأتي كتل 7 أجهزة (بالكيلوغرام) يُراد شحنها في صناديق؛ على ألّا تتجاوز كتلة الصندوق الواحد 60 kg:

29 32 36 31 42 28 41

10 أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة.

11 أُحدِّد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باســتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثــمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

12 أُحدِّد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باســتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

13 أُحدِّد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

14 أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

أسلاك نحاسية: في ما يأتي أطوالٌ (بالسنتيمتر) لـ10 قطع يُراد قَصُّها من أسلاك نحاسية، طول كلٍّ منها 1 m:

42 19 30 63 12 47 55 18 45 58

15 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

16 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

17 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

18 أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

أثقال: أعود إلى المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

19 أُحدِّد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

20 أُحدِّد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

مهارات التفكير العليا

تبرير: في ما يأتي أطوال 8 قطع خشبية (بالسنتيمتر) تَلزم لصنع خزانة صغيرة، ويُراد قَصُّها من ألواح خشبية:

20 35 50 60 20 70 75 20

21 تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1 m، وسعرها 3 JD. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتحديد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح، ثمَّ أجد التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أحسُب الكمية المهدورة من الخشب.

22 تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1.5 m، وسعرها 4 JD. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتحديد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من هذه الألواح، ثمَّ أجد التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أحسُب الكمية المهدورة من الخشب.

23 أيُّ الخوارزميتين يُمكِن استعمالها لصنع الخزانة بتكلفة أقل؟ أُبرِّر إجابتي.

24 ما أقل تكلفة لصنع الخزانة إذا أمكن استعمال الألواح التي طولها 1 m والألواح التي طولها 1.5 m معًا؟ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: في ما يأتي كتل 9 حقائب سفر (بالكيلوغرام) يُراد نقلها في حاويات، ويُمكِن لكلٍّ منها أنْ تحمل كتلة إجمالية أقصاها 50 kg:

24 14 8 x 19 25 6 17 9

إذا علمْتُ أنَّ كتلة إحدى الحقائب لم تُقَسْ قياسًا دقيقًا، ولتكن x كيلوغرامًا، حيث: $19 < x \leq 23$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

25 أُحدِّد كيف تُوزَّع الحقائب على الحاويات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى.

26 أُحدِّد الطريقتين المُمكِنتين لتوزيع الحقائب على الحاويات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة.

27 أُحدِّد القيمة (القِيَم) المُمكِنة للمُتغيِّر x في كلٍّ من الطريقتين المُشار إليهما في السؤال السابق بعد توزيع الحقائب باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة.

الدرس 3

المُخطَّطات
Graphs

فكرة الدرس

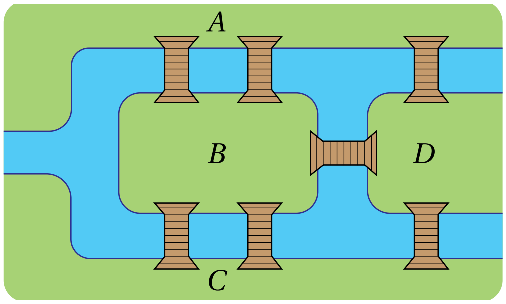
- تعرُّف المُخطَّط، ومُكوِّناته، وبعض التعريفات الأساسية المُتعلِّقة به.
- إيجـاد درجة كل رأس من رؤوس مُخطَّط مُعطى، وتعـرُّف العلاقة بين درجات الرؤوس وعدد الحافات، واستعمالها لحلِّ المسائل.

المصطلحات

مُخطَّـط، رأس، حافة، مُخطَّط موزون، نظرية المُخطَّطات، المسـار، مجموعة الرؤوس، مجموعة الحافات، مجموعة الدرجات، درجة الرأس، ممشـى، ممر، طريق، دارة، دارة هاملتون، دارة أويلر، حلقة، حافات مُتعدِّدة.

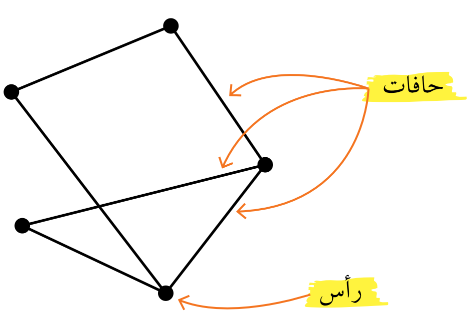
مسألة اليوم

يُبيِّن الشـكل المجـاور 4 مناطق فـي مدينة، يفصل بينها نهر مُتفرِّع، وقد أُنشِئت 7 جسور بيـن تلك المناطق. هل يُمكِـن زيارة المناطق الأربع جميعها، بَـدْءًا بإحداها؛ شـرط عبور الجسور السـبعة جميعها وعدم عبور أيِّ جسر منها مرَّتين، ثمَّ العودة إلى نقطة البداية؟



المُخطَّطات

تنطـوي العديد من المواقف الحياتية على روابط بين أشـخاص أو أماكن أو أشـياء مختلفة. فمثـلًا، ترتبط المدن بعضها ببعض عبر الطرق، وتتصل أجهزة الحاسـوب بعضها ببعض عبر شـبكات الإنترنت، ويُمكِن التعبير عن كلٍّ من هـذه الروابط بتمثيل بياني يُسـمّى **المُخطَّط** (graph)؛ وهو وسـيلة تُظهِـر كيف ترتبط الأشياء المختلفة بصريًّا، بحيث يُعبَّر عن هذه الأشياء بعُقَد تُسـمّى **الرؤوس** (vertices)، ويُعبَّر عن الروابط بين الرؤوس (إنْ وُجِدت) بخطوط (أو منحنيات) متصلة تُسمّى **الحافات** (edges) كما يظهر في الشكل المجاور.



أتعلَّم

تقاطـع حافتيـن فـي المُخطَّط لا يُمثِّل رأسًا.

نظرية المُخطَّطات (graph theory) هي تسـمية لفرع من فروع الرياضيات يُعْنى بدراسة المُخطَّطات.

مثال 1 : من الحياة

الباص السريع: **أتأمَّل الشكل الآتي الذي يُبيِّن شبكة الباص السريع داخل مدينة عمّان، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:**

1 **هل يُعَدُّ الشكل السابق مُخطَّطًا؟ أُبرِّر إجابتي.**

نعم؛ لأنَّه يحتوي على رؤوس، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس.

2 **أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط؟**

تُمثِّل الرؤوس المَحطّات التي يتوقَّف عندها الباص السريع، وتُمثِّل الحافات مسارات الباص السريع بين المَحطّات.

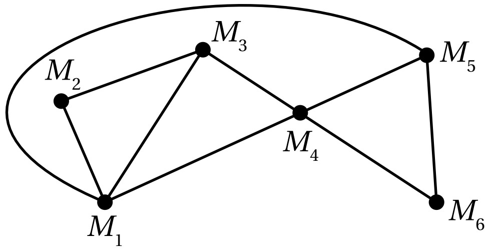
3 **أُحدِّد المَحطّات التي سيمرُّ بها الباص في رحلة من مُجمَّع المَحطَّة إلى حدائق الملك عبد الله.**

المَحطّات التي سيمرُّ بها الباص أثناء الرحلة هي: مستشفى الأمير حمزة، وتقاطع طارق، ومُجمَّع الشمال، ودوّار المدينة الرياضية.

الباص السريع

يُعَدُّ مشروع الباص السريع أوَّل نظام نقل عام حديث لمدينة عمّان، وهو يمتاز بالسرعة والمرونة والكفاءة والأمان والدِّقَّة في المواعيد؛ ما يُوفِّر كثيرًا من الوقت والجُهْد. وقد أُفرِد لهذا المشروع مسارب خاصة تسير عليها حافلات كبيرة تُقدِّم خدمات مُتميِّزة للرُّكّاب.

أتحقَّق من فهمي



طيـران: أتأمَّل الشــكل المجاور الذي يُبيِّن المســارات الجوية التــي تتبعها طائرات إحدى شــركات الطيران، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

a) هل يُعَدُّ الشكل المجاور مُخطَّطًا؟

b) أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط.

c) أُحدِّد المَحطّات التي ســتمرُّ بها إحدى الطائرات التابعة للشركة في رحلة من الرأس M_1 إلى الرأس M_6 (أذكر حلَّين مختلفين).

المُخطَّطات الموزونة

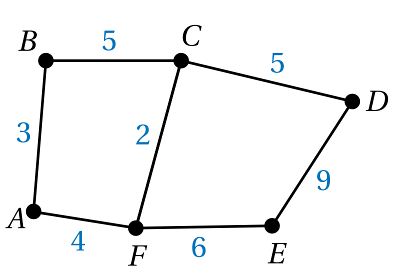
لغة الرياضيات

يُطلَق على القيمة المُقترِنة بالحافة اسم وزن الحافة.

يُطلَق علــى المُخطَّط الذي يحوي قيمة مُقترِنة بكل حافة من حافاته اســم **المُخطَّط الموزون** (weighted graph)، وتُمثِّل هذه القِيَم مقاييس عديدة، مثل: المسافة، والتكلفة، والزمن.

يُمكِن استعمال المُخطَّطات الموزونة لحلِّ العديد من المسائل الحياتية والعلمية، مثل تحديد المســار الذي يُمكِن به الوصول من موقع إلى آخر في إحدى المدن عبر أقصر مســار مُمكِن، أو بأقــل تكلفة مُمكِنة. وبلغة المُخطَّطات، فإنَّ **المســار** (route) من الرأس A إلى الرأس B هــو مجموعة من الحافات، تبدأ بالرأس A، وتنتهي بالرأس B، وقد يتكرَّر في المســار أيٌّ من الرؤوس والحافات.

مثال 2 : من الحياة



طرق: يُبيِّن الشــكل المجــاور مُخطَّطًــا للطرق الرئيســة في إحدى المدن، ويُمثِّل العدد على كل حافةٍ المســافة (بالكيلومترات) بين كل منطقتين في المدينة:

1 أجد طول المسار المباشر بين المنطقة F والمنطقة C.

طول المسار المباشر بين هاتين المنطقتين هو: 2 km

2 أُحدِّد أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D.

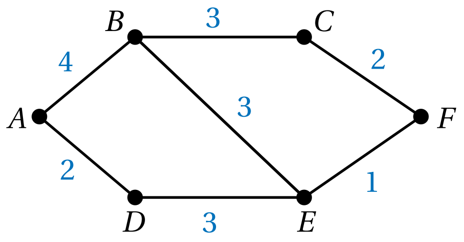
لتحديد أقصر مسار بين هاتين المنطقتين، أُحدِّد أوَّلًا جميع المسارات التي تصل بينهما، وأجد طول كلٍّ منها، ثمَّ أُحدِّد أقصر مسار بين هذه المسارات:

المسار	طول المسار (بالكيلومترات)
$ABCD$	$3 + 5 + 5 = 13$ km
$AFED$	$4 + 6 + 9 = 19$ km
$AFCD$	$4 + 2 + 5 = 11$ km
$ABCFED$	$3 + 5 + 2 + 6 + 9 = 25$ km

إذن، أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D هو $AFCD$، وطوله 11 km

أتحقَّق من فهمي

طرق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن، ويُمثِّل العدد على كل حافةٍ الزمن (بالساعات) الذي تستغرقه سيّارة في قطع المسافة بين كل مدينتين:



a) أُحدِّد الزمن الذي تستغرقه السيّارة في قطع المسار المباشر بين المدينة B والمدينة E.

b) أُحدِّد أقل زمن تستغرقه السيّارة في الوصول من المدينة A إلى المدينة F، والمسار الذي تتبعه في هذه الرحلة.

لغة الرياضيات

المسار المباشر بين رأسين في مُخطَّط هو الحافة بين هذين الرأسين (إنْ وُجِدت).

أتعلَّم

طول المسار هو مجموع أوزان حافاته.

أتعلَّم

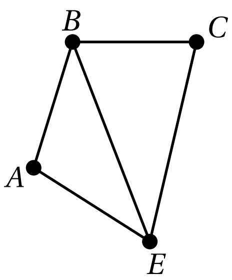
من غير المنطقي النظر في المسارات التي تحوي حافات مُكرَّرة في المثال 2

أتعلَّم

بوجه عام، لا تُرسَم المُخطَّطات الموزونة وَفق تناسب دقيق بين القِيَم المُقترِنة بالحافات؛ فقد تبدو حافتان مُتساوِيتين في الطول، في حين أنَّهما تقترنان بقيمتين مختلفتين.

رؤوس المُخطَّط وحافاته

في ما يأتي بعض التعريفات الأساسية الخاصة بنظرية المُخطَّطات:



المُخطَّط R

- **مجموعة الرؤوس** (vertices set): مجموعة تحوي جميع رؤوس المُخطَّط. فمثلًا، مجموعة رؤوس المُخطَّط R المجاور هي: (A, B, C, E).
- **مجموعة الحافات** (edges set): مجموعة تحوي جميع حافات المُخطَّط. فمثلًا، مجموعة حافات المُخطَّط R المجاور هي: (AB, AE, BC, BE, CE)، حيث يُعبِّر الرمز AB مثلًا عن الحافة بين الرأس A والرأس B.
- **درجة الرأس** (degree of the vertex): عدد يُعبِّر عن عدد الحافات التي تلتقي عند الرأس. فمثلًا، درجة الرأس A في المُخطَّط R أعلاه هي 2، ودرجة الرأس B في المُخطَّط نفسه هي 3
- **مجموعة الدرجات** (degree set): مجموعة تحوي جميع درجات رؤوس المُخطَّط. فمثلًا، مجموعة الدرجات للمُخطَّط R أعلاه هي:

$$\deg R = (2, 2, 3, 3)$$

أتعلَّم

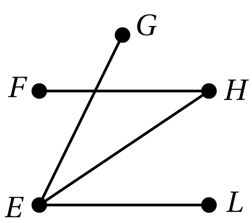
إذا كانت درجة الرأس عددًا زوجيًّا، فإنَّها تُسمّى درجة زوجية، أمّا إذا كانت عددًا فرديًّا، فإنَّها تُسمّى درجة فردية. فمثلًا، للرأس B في المُخطَّط R المجاور درجة فردية، وللرأس C فيه درجة زوجية.

رموز رياضية

يُرمَز إلى مجموعة درجات المُخطَّط R أعلاه بالرمز $\deg R$، علمًا بأنَّ deg اختصار للكلمة الإنجليزية (degree) التي تعني الدرجة.

مثال 3

أتأمَّل المُخطَّط R المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



المُخطَّط R

1 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

- مجموعة الرؤوس هي: (E, F, G, H, L).
- مجموعة الحافات هي: (EL, EH, EG, FH).

أُفكِّر

هل تُعَدُّ نقطة تقاطع الحافة FH مع الحافة EG رأسًا؟ أُبرِّر إجابتي.

2 أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
E	3	فردية
F	1	فردية
G	1	فردية
H	2	زوجية
L	1	فردية

3 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

$$\deg R = (1, 1, 1, 2, 3)$$

أتعلَّم

الحافة بين الرأس L والرأس E تُكتَب EL أو LE.

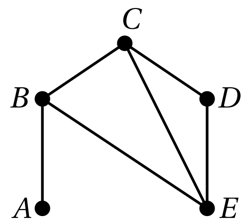
أتحقَّق من فهمي

أتأمَّل المُخطَّط G المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:

a) أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

b) أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

c) أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.



المُخطَّط G

مجموع درجات رؤوس المُخطَّط

يُمكِن أيضًا إيجاد مجموع درجات رؤوس أيِّ مُخطَّط إذا عُلِم عدد حافاته، وذلك بضرب عدد حافاته في 2؛ لأنَّ كل حافة ترتبط برأسين.

مفهوم أساسي **مجموع درجات رؤوس المُخطَّط**

إذا كان لمُخطَّطٍ n من الرؤوس، وE من الحافات، فإنَّه يُمكِن إيجاد مجموع درجات رؤوس هذا المُخطَّط باستعمال العلاقة الآتية:

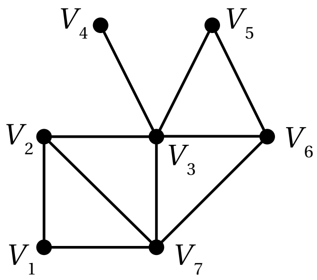
$$\sum_{k=1}^{n} (\deg V_k) = 2E$$

حيث $\deg V_k$ درجة الرأس V_k.

أُفكِّر

نتيجةً للمفهوم الأساسي المجاور؛ فإنَّ عدد الرؤوس ذات الدرجة الفردية يجب أنْ يكون زوجيًّا أو 0، لماذا؟

مثال 4



1 **أجد مجموع درجات رؤوس المُخطَّط المجاور.**

للمُخطَّط المجاور 10 حافات؛ لذا يُمكِن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي:

$$\sum_{k=1}^{n} (\deg V_k) = 2E$$ علاقة مجموع درجات رؤوس المُخطَّط

$$\sum_{k=1}^{7} (\deg V_k) = 2(10)$$ بتعويض $n = 7, E = 10$

$$= 20$$ بالتبسيط

إذن، مجموع درجات رؤوس المُخطَّط هو: 20

2 **مُخطَّط له 6 رؤوس و9 حافات، ودرجات رؤوسه هي: $x, 2x, 2x-1, x+1, x+1, x^2-1$.**

أجد قيمة المُتغيِّر x.

$$\sum_{k=1}^{n} (\deg V_k) = 2E$$ علاقة مجموع درجات رؤوس المُخطَّط

$$x + 2x + 2x-1 + x + 1 + x + 1 + x^2 - 1 = 2(9)$$ بالتعويض

$$x^2 + 7x = 18$$ بالتبسيط

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$ بطرح 18 من طرفي المعادلة

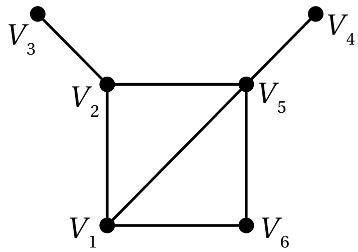
$$(x + 9)(x - 2) = 0$$ بالتحليل

$$x + 9 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$ باستعمال خاصية الضرب الصفري

$$x = -9 \qquad x=2$$ بحلِّ كل معادلة

بما أنَّ x يُمثِّل درجة أحد الرؤوس، فإنَّه من غير المُمكِن أنْ يكون x سالبًا. إذن: $x = 2$.

أتحقَّق من فهمي



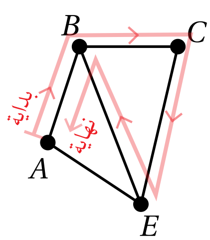
a) أجـد مجمـوع درجـات رؤوس المُخطَّط المجاور.

b) مُخطَّط له 5 رؤوس و6 حافات، ودرجات رؤوسه هي: $x, x^2+2, 3x-1, 3x, 2x+1$.

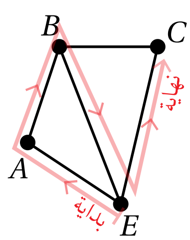
أجد قيمة المُتغيِّر x.

الممشى والممر والطريق والدارة والحلقة في المُخطَّط

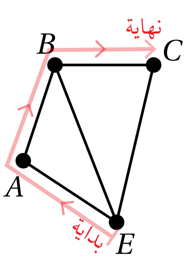
- **الممشى** (walk): سلسلة من الحافات في المُخطَّط، تُمثِّل فيها نهاية كل حافةٍ بداية حافة أُخرى، ما عدا الحافة الأخيرة. فمثلًا، $ABCEBA$ ممشى في المُخطَّط المجاور.



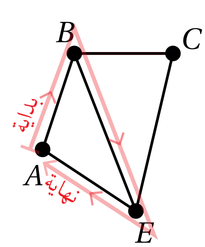
- **الممر** (trail): ممشـى لا تتكرَّر فيه أيُّ حافة، ويُمكِن أنْ تتكرَّر فيه الرؤوس. فمثلًا، $EABEC$ ممر في المُخطَّط المجاور.



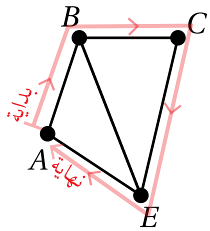
- **الطريق** (path): ممـر لا يتكرَّر فيـه أيُّ رأس. فمثلًا، $EABC$ طريق في المُخطَّط المجاور.



- **الـدارة** (circuit): ممـر رأس بدايتـه هو نفسـه رأس نهايته، ولا يتكـرَّر فيه أيُّ رأس، ما عـدا رأس البدايـة ورأس النهاية. فمثلًا، $ABEA$ دارة في المُخطَّط المجاور.



- **دارة هاملتـون** (Hamiltonian circuit): دارة تحوي جميع رؤوس المُخطَّط. فمثـلًا، $ABCEA$ دارة هاملتون في المُخطَّط المجاور.



لغة الرياضيات

يُطلَق أيضًا على الممشى اسم المسار.

أتعلَّم

يُمكِـن تكـرار الحافات والرؤوس في الممشـى. فمثـلًا، فـي الممشـى $ABCEBA$ المجـاور تكـرَّرت الحافـة AB (أو BA).

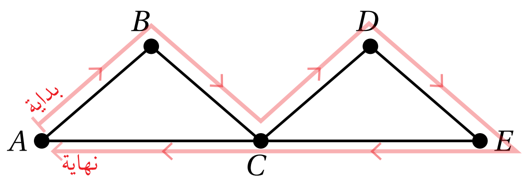
أتعلَّم

لا يُشـترَط في أيٍّ من الممشـى، أو الطريـق، أو الممـر، أو الـدارة أنْ يحـوي جميـع رؤوس المُخطَّط.

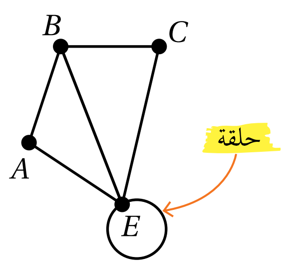
أتعلَّم

لا تتكـرَّر أيُّ حافـة في الدارة، ولا في الطريق.

- **دارة أويلر** (Eulerian circuit): ممر رأس بدايته هو نفســـه رأس نهايته، وهو يشـــمل جميع حافات المُخطَّط من دون تكرار. فمثلًا، دارة $ABCDECA$ دارة أويلر في المُخطَّط المجاور.



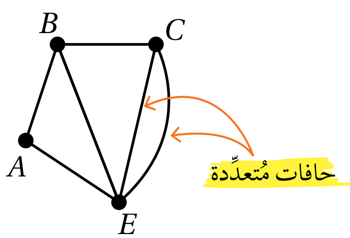
- **الحلقــة** (loop): حافة تبدأ بالرأس نفســه، وتنتهــي به. فمثــلًا، EE حلقة فــي المُخطَّط المجاور.



أتعلَّم

درجــة الــرأس E فــي هذه الحالة هــي 5؛ لأنَّ الحلقة تُعَدُّ حافة في كلا الاتجاهين.

- **الحافات المُتعدِّدة** (multiple edges): حافتــان أو مجموعــة من الحافــات التي تربط زوجًا من الرؤوس. فمثلًا، الحافات المُتعدِّدة فــي المُخطَّط المجاور تربط بين الرأس E والرأس C.

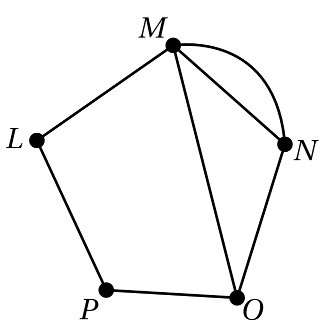


أتعلَّم

عنــد تحديــد مجموعة الحافــات فــي المُخطَّط المجاور، يجب ذكر EC مَرَّتين؛ نظــرًا إلى وجود حافتين تربطان بين الرأس E والرأس C.

مثال 5

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُحدِّد فيه ممشًــى لا يُمثِّل ممــرًّا، وممرًّا لا يُمثِّــل طريقًا، وطريقًــا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت).



- ممشى لا يُمثِّل ممرًّا: $POMNOP$.
- ممر لا يُمثِّل طريقًا: $MLPOMN$.
- طريق: $MLPO$.
- دارة: $LMOPL$.
- دارة هاملتون: $LMNOPL$.
- دارة أويلر: لا يُمكِن إيجاد دارة أويلر في هذا المُخطَّط.

أتعلَّم

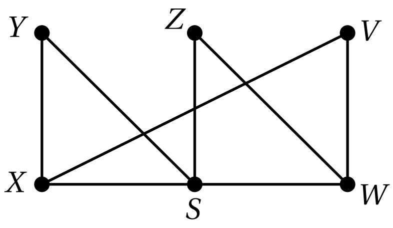
الممشــى $POMNOP$ في المثال المجاور ليس ممــرًّا؛ لأنَّ الحافــة OP تكرَّرت فيه.

أتعلَّم

إذا كانت درجة كل رأس مــن رؤوس المُخطَّــط زوجيــة، وكان يوجــد ممر بين أيِّ رأســين في المُخطَّط، فــإنَّ المُخطط يحتوي على دارة أويلر.

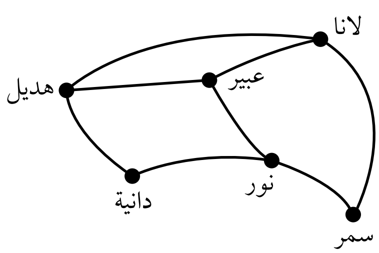
أتحقَّق من فهمي

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُحدِّد فيه ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت).



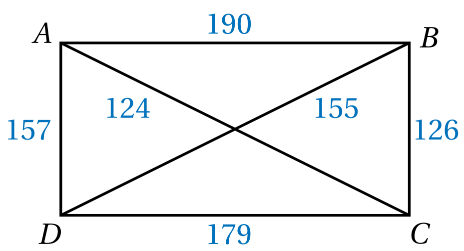
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أتأمَّل الشكل المجاور الذي يُبيِّن علاقات الصداقة التي تربط بين مجموعة من الفتيات في أحد مواقع التواصل الاجتماعي، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



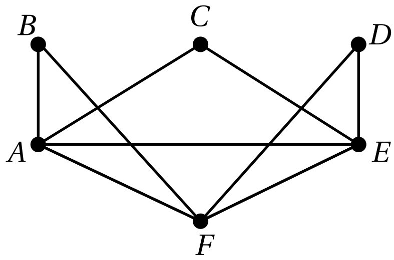
1. هل يُعَدُّ الشكل المجاور مُخطَّطًا؟
2. أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط.
3. كم صديقةً للانا في هذا الموقع؟
4. مَنِ الصديقات المُشترَكات بين عبير ودانية؟

مندوب مبيعات: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لتكلفة تنقُّل مندوب مبيعات بين مجموعة من المحافظات الأردنية للترويج لمُنتَج جديد، حيث يُمثِّل العدد على كل حافةٍ التكلفة بالدينار للتنقُّل بين كل محافظتين:



5. أجد تكلفة ذهاب مندوب المبيعات في مسار مباشر من المحافظة A إلى المحافظة B، ثمَّ إلى المحافظة C.
6. أُحدِّد أقل تكلفة للذهاب من المحافظة B إلى المحافظة D، ثمَّ أُحدِّد المسار الذي اتخذته لذلك.

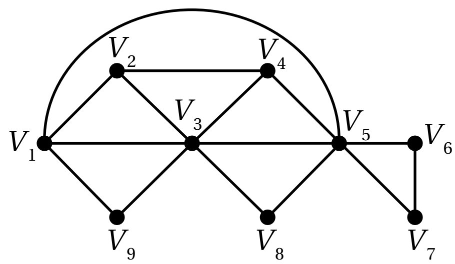
أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



7 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

8 أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

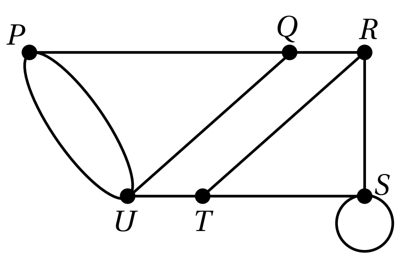
9 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.



10 أجد مجموع درجات رؤوس المُخطَّط المجاور.

11 مُخطَّط له 5 رؤوس و6 حافات، ودرجات رؤوسه هي: $x, 2x, x^2+3, x+1, 2x+1$. أجد قيمة المُتغيِّر x.

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



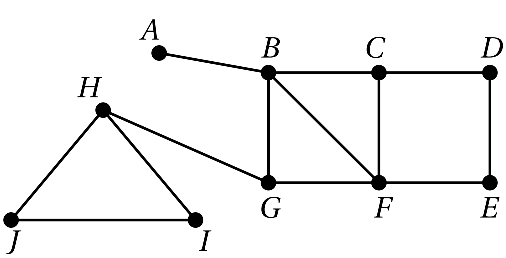
12 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

13 أجد مجموع درجات رؤوس المُخطَّط.

إرشاد: عند استعمال صيغة مجموع درجات الرؤوس، تُعَدُّ الحلقة حافة واحدة.

14 أُحــدِّد في المُخطَّط ممشًــى لا يُمثِّل ممــرًّا، وممــرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت).

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُحدِّد فيه:

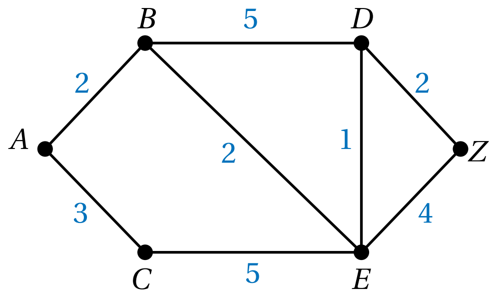


15 ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا.

16 ممرًّا لا يُمثِّل طريقًا.

17 خمسة طرق من B إلى D.

18 دارةً.

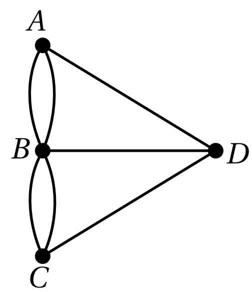


طرق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للطرق الرئيسة التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن، ويُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالكيلومتر) بين كل منطقتين:

19 أُحدِّد طول أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة Z، ثمَّ أُحدِّد المسار الذي اتخذته لذلك.

20 أجد دارة تبدأ بالرأس B، وتنتهي به، ثمَّ أجد طولها بالكيلومتر.

21 أجد دارة هاملتون، ثمَّ أجد طولها بالكيلومتر.



22 جسور: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للمسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). أستعين بالمُخطَّط وما تعلَّمْتُه في هذا الدرس عن دارة أويلر للإجابة عن المسألة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أرسم مُخطَّطًا يُحقِّق الوصف المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

23 يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس، و6 حافات.

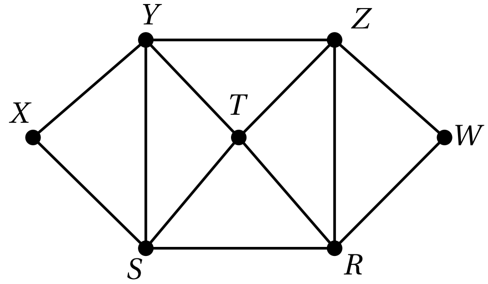
24 يتضمَّن المُخطَّط 5 رؤوس، و8 حافات، وحلقة واحدة.

25 يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس درجاتها فردية، ورأسًا درجته زوجية.

26 يتضمَّن المُخطَّط 3 رؤوس درجة كلٍّ منها 2، ورأسين درجة كلٍّ منهما 1

27 يتضمَّن المُخطَّط رأسين درجة كلٍّ منهما 2، ورأسًا درجته 3، ورأسًا درجته 1

28 يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس درجة كلٍّ منها 5، و3 رؤوس درجة كلٍّ منها 2



تحدٍّ: أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:

29 أُحدِّد دارة هاملتون في المُخطَّط.

30 أُحدِّد دارة أويلر في المُخطَّط.

الدرس 4

أنواع خاصة من المُخطَّطات

Special Types of Graphs

فكرة الدرس

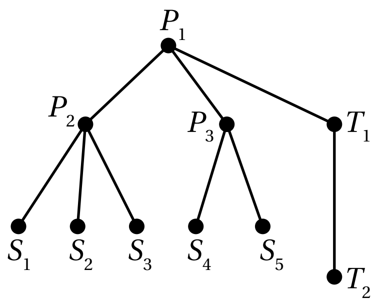
- تعرُّف أنواع خاصة من المُخطَّطات.
- تعرُّف مصفوفة الجوار، واستعمالها للتعبير عن الروابط في المُخطَّطات.
- تعرُّف مصفوفة الوزن، واستعمالها لتمثيل العلاقات بين الرؤوس في مُخطَّط موزون.

المصطلحات

المُخطَّط البسيط، المُخطَّط المتصل، المُخطَّط الجزئي، المُخطَّط الكامل، المُخطَّط المُكمِّل، الشجرة، الشجرة الشاملة، خوارزمية برايم، مصفوفة الجوار، مصفوفة الوزن.

مسألة اليوم

يُبيِّن المُخطَّط المجاور طريقة توصيل عدد من مصابيح الإنارة (S) والقواطع (P) والمَقابس (T) في غرفة:



1) ماذا يُشبِه المُخطَّط الناتج؟

2) هل يُمكِن تمثيل المُخطَّط بأكثر من طريقة؟

تعرَّفْتُ في الدرس السابق مفهوم المُخطَّط ومُكوِّناته وبعض التعريفات الأساسية المُتعلِّقة به، وسأتعرَّف في هذا الدرس بعض الأنواع الخاصة من المُخطَّطات.

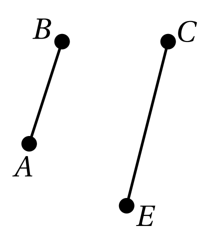
المُخطَّط البسيط، والمُخطَّط المتصل، والمُخطَّط الجزئي

يُطلَق على المُخطَّط الذي لا توجد فيه حلقة أو حافات مُتعدِّدة اسم **المُخطَّط البسيط** (simple graph).

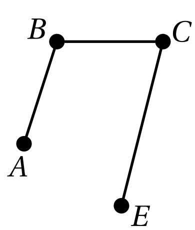
أمّا **المُخطَّط المتصل** (connected graph) فهو مُخطَّط يمتاز بوجود طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه. أنظر الشكل الآتي الذي يُبيِّن مُخطَّطًا متصلًا ومُخطَّطًا آخرَ غير متصل.

أتذكَّر

الطريق هو ممر لا يتكرَّر فيه أيُّ رأس.

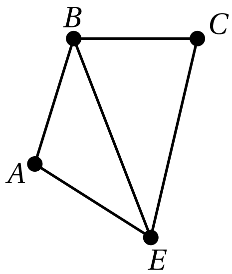


مُخطَّط غير متصل



مُخطَّط متصل

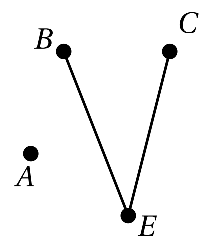
وأمّا **المُخطَّط الجزئي** (subgraph) من مُخطَّط ما فهو مُخطَّط تنتمي جميع رؤوسه وحافاته إلى هذا المُخطَّط. في ما يأتي مُخطَّطات جزئية من المُخطَّط R المُبيَّن في الشكل المجاور.



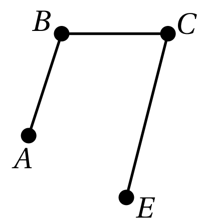
المُخطَّط R

أتعلَّم

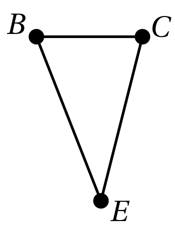
لا يُشترَط في المُخطَّط الجزئي أنْ يكون متصلًا.



المُخطَّط الجزئي 3



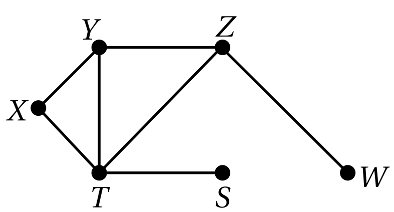
المُخطَّط الجزئي 2



المُخطَّط الجزئي 1

مثال 1

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



أتذكَّر

الحلقة هي حافة تبدأ عند الرأس نفسه، وتنتهي به. أمّا الحافات المُتعدِّدة فهي تُعبِّر عن وجود أكثر من حافة بين رأسين.

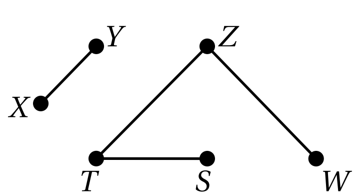
1 **هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.**

نعم؛ لأنَّه لا يحوي حلقات أو حافات مُتعدِّدة.

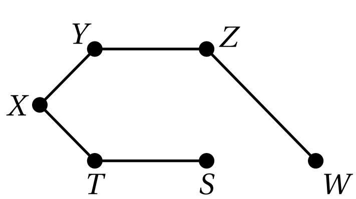
2 **هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.**

نعم؛ لأنَّه يُمكِن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.

3 **أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.**



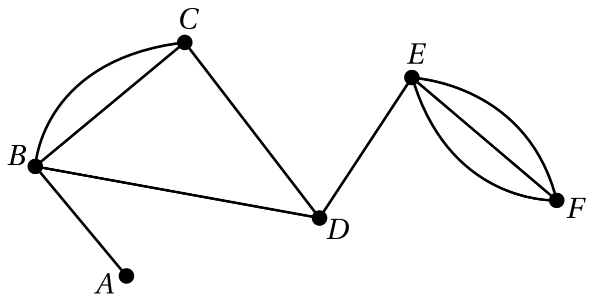
المُخطَّط الجزئي 2



المُخطَّط الجزئي 1

أتحقَّق من فهمي

أتأمّل المُخطَّـط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



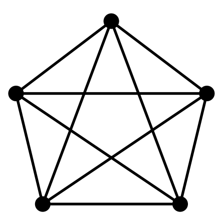
a) هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.

b) هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

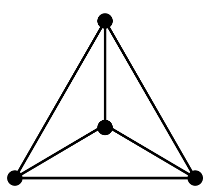
c) أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.

المُخطَّط الكامل، والمُخطَّط المُكمِّل

المُخطَّط الكامل (complete graph) هو مُخطَّط بسيط يتصل كل رأسين فيه بحافة واحدة، ويُرمَز إلى المُخطَّط الكامل الذي يحوي n من الرؤوس بالرمز K_n. أنظر الشـكل الآتي الذي يُبيِّن المُخطَّط K_4 والمُخطَّط K_5.



المُخطَّط K_5



المُخطَّط K_4

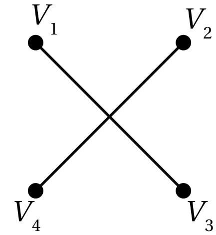
أتذكَّر

المُخطَّـط البسـيط هو مُخطَّط لا توجد فيه حلقة أو حافات مُتعدِّدة.

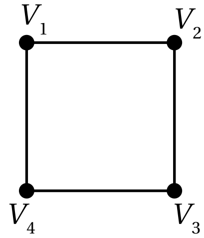
وأمّا المُخطَّط البسـيط الذي عدد رؤوسه مسـاوٍ لعدد رؤوس المُخطَّط البسيط G، وليكن n، والذي تكون مجموعة حافاته هي جميع الحافات الموجودة في المُخطَّط K_n وغير الموجودة في المُخطَّط G، فيُسـمّى **المُخطَّط المُكمِّـل** (the complement graph) للمُخطَّط G، ويُرمَز إليه بالرمز $\overline{G}$. أنظر الشكل الآتي الذي يُبيِّن المُخطَّط G والمُخطَّط المُكمِّل له $\overline{G}$.

أتعلَّم

إذا أضفنا حافات المُخطَّط المُكمِّل للمُخطَّط نفسه، فإنَّه يَنتج مُخطَّط كامل.



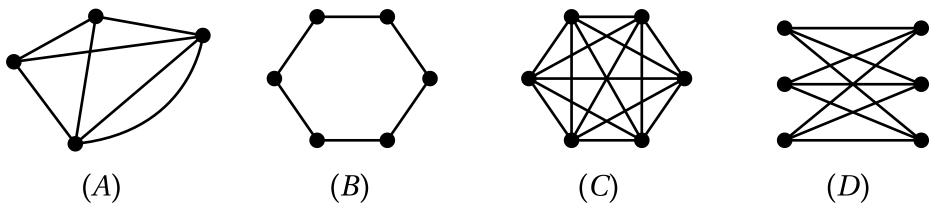
$\overline{G}$ المُخطَّط المُكمِّل للمُخطَّط G



المُخطَّط G

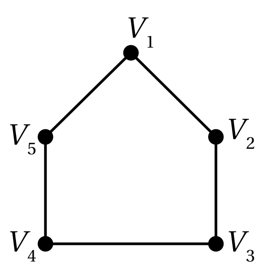
مثال 2

1 أُحدِّد المُخطَّط الكامل ممّا يأتي، وأُسمّيه بالرموز، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



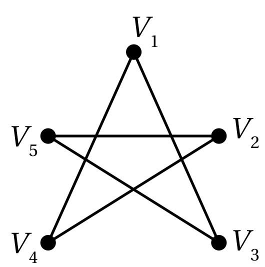
المُخطَّط الكامل من بين هذه المُخطَّطات هو المُخطَّط C؛ لأنَّ كل رأسين من رؤوسه متصلان بحافة واحدة فقط. ويُرمَز إلى هذا المُخطَّط بالرمز K_6. أمّا المُخطَّط A فهو غير كامل؛ لأنَّه مُخطَّط غير بسيط؛ إذ يتصل رأسان من رؤوسه بحافتين. وأمّا المُخطَّطان B و D فهما ليسا كاملين؛ لأنَّ فيهما رؤوسًا غير متصلة بحافات.

2 أرسم $\overline{R}$ للمُخطَّط R المجاور.



المُخطَّط R

يُبيِّن الشكل الآتي المُخطَّط $\overline{R}$ المُكمِّل للمُخطَّط R المجاور.



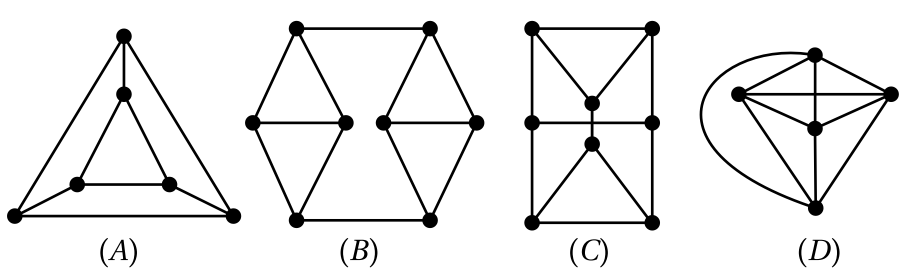
المُخطَّط $\overline{R}$

أتعلَّم

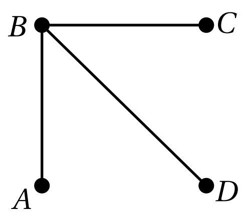
لرسم $\overline{R}$ للمُخطَّط R المجاور، أبدأ برسم K_5، ثمَّ أحذف منه جميع الحافات الموجودة في R.

أتحقَّق من فهمي

a) أُحدِّد المُخطَّط الكامل ممّا يأتي، وأُسمّيه بالرموز، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



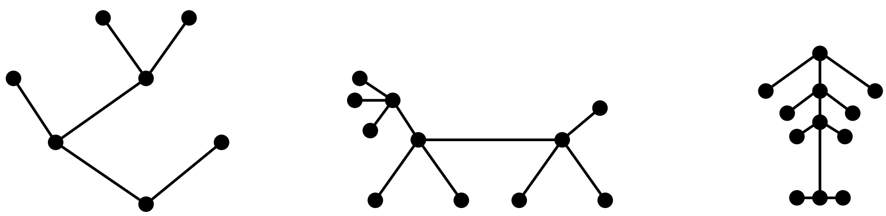
b) أرسم $\overline{R}$ للمُخطَّط R المجاور.



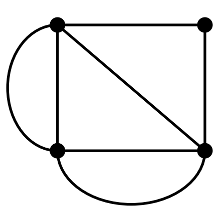
الشجرة، والشجرة الشاملة

يُطلَق على المُخطَّط المتصل الذي لا يحوي أيَّ دارة اسم **الشجرة** (tree).

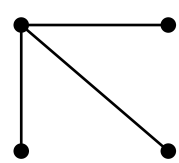
في ما يأتي ثلاثة مُخطَّطات يُعَدُّ كلٌّ منها شجرة:



تُسمّى الشجرة T **شجرة شاملة** (spanning tree) للمُخطَّط المتصل G إذا كانت T مُخطَّطًا جزئيًّا من G، وتحوي جميع رؤوسه كما هو مُبيَّن في الشكل الآتي.



المُخطَّط G.



الشجرة T شجرة شاملة للمُخطَّط G.

أتذكَّر

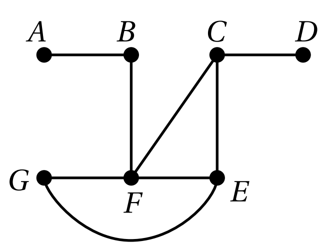
الدارة هي ممرٌّ رأسُ بدايته هو نفسه رأس نهايته، ولا يتكـرَّر فيه رأس آخر أكثر من مَرَّة واحدة.

لغة الرياضيات

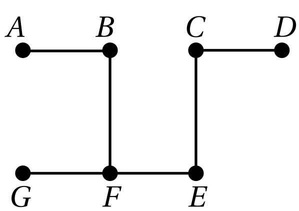
توجد أسماء أُخرى عديدة للشجرة الشاملة، أكثرها شهرة: شجرة الانتشار، وشجرة الامتداد، والشجرة المُغطِّية.

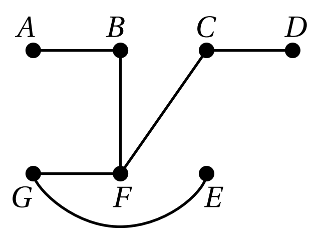
مثال 3

أرسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط المجاور.



يُمكِن رسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط المجاور كما يأتي:





أتعلَّم

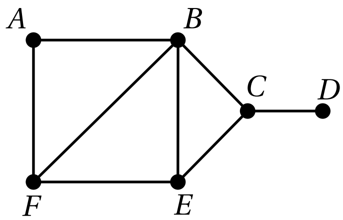
يُمكِن رسم أشجار شاملة عديدة للمُخطَّط. كذلك يُمكِن للشجرة الشاملة أنْ تكون شجرة شاملة لأكثر من مُخطَّط.

أتعلَّم

الشجرة الشاملة هي شجرة؛ لذا ينبغي أنْ تكون متصلة، وألّا تحوي أيَّ دارة.

أتحقَّق من فهمي

أرسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط المجاور.



أُفكِّر

هل يُمكِن للشجرة أنْ تحتوي على حافات مُتعدِّدة أو حلقات؟ أُبرِّر إجابتي.

أصغر شجرة شاملة

تعلَّمْتُ في المثال السابق إيجاد أشجار شاملة لمُخطَّط متصل. ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط المتصل الموزون؟

يُمكِن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط المتصل الموزون باستعمال **خوارزمية برايم** (Prim's algorithem)، التي يُمكِن بها تحديد أقصر طريقة وأسرعها لربط جميع الرؤوس في المُخطَّط المتصل الموزون، بحيث يكون مجموع أوزان الحافات في هذه الشجرة الشاملة أقل ما يُمكِن.

أتعلَّم

مفهوم (أصغر شجرة شاملة) مُرتبِط فقط بالمُخطَّطات الموزونة.

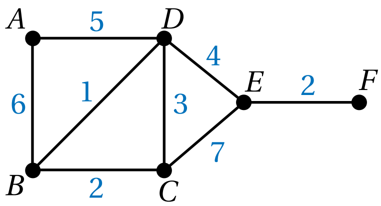
خوارزمية | **خوارزمية برايم**

يُمكِن إيجاد أصغر شجرة شاملة لمُخطَّط متصل موزون باستعمال خوارزمية برايم، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

1. اختيار أيِّ رأس في المُخطَّط لبَدْء رسم (إنشاء) الشجرة.
2. تحديد أقل حافة وزنًا تربط بين رأس موجود في الشجرة ورأس لم يُضَفْ بعدُ إلى الشجرة. وفي حال وجود حافات عديدة لها الوزن نفسه، فإنَّه يُمكِن اختيار أيٍّ منها. وإذا شكَّلت الحافة دارة، فإنَّها لا تضاف إلى الشجرة.
3. تكرار الخطوة الثانية حتّى تكتمل إضافة جميع الرؤوس، ويتمَّ ربطها بالشجرة.
4. كتابة الحافات المضافة إلى الشجرة بالترتيب.

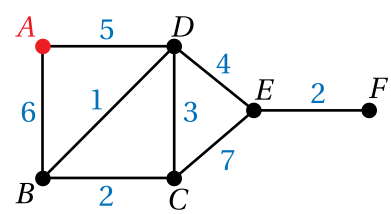
مثال 4 : من الحياة

أكبال كهربائية: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لأكبال كهربائية تربط بين مَحطّات التوزيع في إحدى المناطق. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الكَبْل (بالكيلومترات) بين كل مَحطّتين في المنطقة:

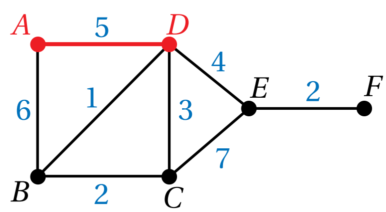


1 أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.

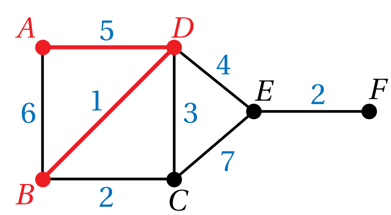
1. أختار أيَّ رأس في المُخطَّط لبَدْء رسم (إنشاء) الشجرة الشاملة، وليكن الرأس A.



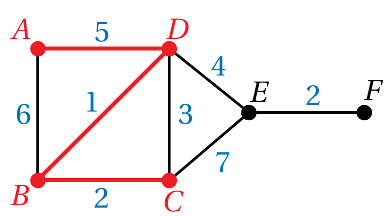
2. أُحدِّد أقل حافة وزنًا مُرتبِطة بالرأس A، وهي AD، ثمَّ أُضيفها إلى الشجرة.



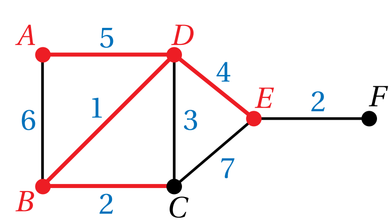
3. أُضيف الحافة DB إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبِطة بالرأس A والرأس D اللذينِ أُضيفا إلى الشجرة أصلًا.



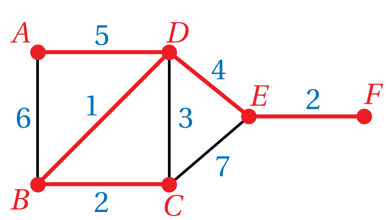
4. أُضيف الحافة BC إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبِطة بالرؤوس: A, D, B التي أُضيفت إلى الشجرة أصلًا.



5. أُضيف الحافة DE إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبِطة بالرؤوس: A, D, B, C التي أُضيفت إلى الشجرة أصلًا.



6. أُضيف الحافة EF إلى الشجرة.



بما أنَّه تمَّ ربط جميع رؤوس المُخطَّط معًا، فإنَّ ذلك يعني رسم (إنشاء) أصغر شجرة شاملة.

الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة الشاملة بالترتيب هي: AD, DB, BC, DE, EF.

2 **أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأكبال يَلزم لربط جميع المَحطّات في المنطقة.**

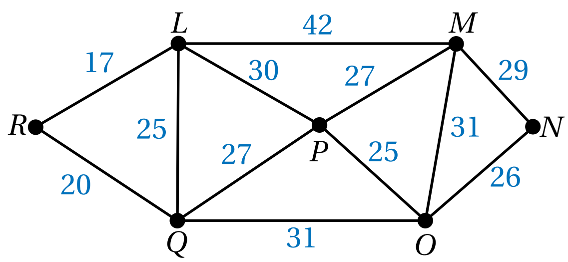
لإيجاد أقل طول للأكبال، أجد الوزن الكلي للشجرة الشاملة الناتجة في السؤال السابق، وذلك بجمع أوزان الحافات في الشجرة كما يأتي:

$$5 + 1 + 2 + 4 + 2 = 14$$

إذن، أقل طول من الأكبال يَلزم لربط جميع المَحطّات في المنطقة هو: 14 km

أتحقَّق من فهمي

أنابيب مياه: **يُبيِّن الشكل المجاور مُخططًا لشبكة أنابيب مياه تصل بين المَحطّات الرئيسة في إحدى المدن. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الأنبوب (بالكيلومتر) بين كل مَحطَّتين في المدينة:**



a) أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إليها بالترتيب.

b) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأنابيب يَلزم لربط جميع المَحطّات في المدينة.

تمثيل المُخطَّطات باستعمال المصفوفات

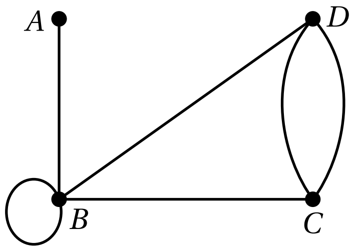
تعرَّفْتُ في الدرس السابق أنَّ المُخطَّط تمثيل بياني يُستعمَل للتعبير عن روابط بين أشياء باستعمال رؤوس وحافات. ولكنْ يُمكِن أيضًا التعبير عن هذه الروابط باستعمال المصفوفات. فمثلًا، يُمكِن التعبير عن المُخطَّطات غير الموزونة باستعمال **مصفوفة الجوار** (adjacency matrix)؛ وهي مصفوفة مُربَّعة رتبتها $n \times n$، ومُدخَلاتها عدد الحافات التي تربط بين كل رأسين في المُخطَّط، إضافةً إلى عدد الحافات التي تربط الرؤوس بنفسها (الحلقات). أمّا المُخطَّطات الموزونة فيُمكِن التعبير عنها باستعمال **مصفوفة الوزن** (weight matrix)؛ وهي مصفوفة مُربَّعة رتبتها $n \times n$، ومُدخَلاتها أوزان الحافات التي تربط بين كل رأسين في المُخطَّط، إضافةً إلى أوزان الحافات التي تربط الرؤوس بنفسها (الحلقات).

أتعلَّم

تُمثِّل n في رتبة المصفوفة عدد رؤوس المُخطَّط، ويُمثِّل كل صف وكل عمود في المصفوفة رأسًا من رؤوس المُخطَّط.

مثال 5

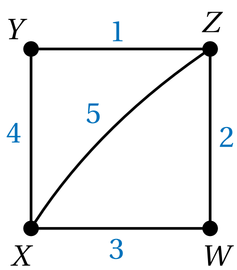
1 **أُمثِّل المُخطَّط المجاور بمصفوفة الجوار.**



- بما أنَّ المُخطَّط يحوي 4 رؤوس، فإنَّ رتبة المصفوفة هي 4×4
- أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف لتسهيل الحلِّ، ثمَّ أملأ مُدخَلات المصفوفة بعدد الحافات بين كل رأسين من الصفوف والأعمدة.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2 **أُمثِّل المُخطَّط الموزون المجاور بمصفوفة الوزن.**

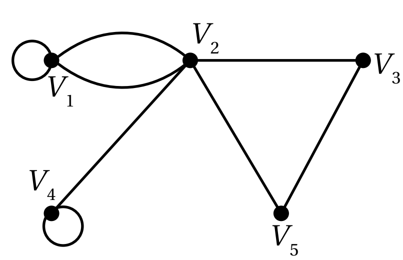


- بما أنَّ المُخطَّط يحوي 4 رؤوس، فإنَّ رتبة المصفوفة هي 4×4
- أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف لتسهيل الحلِّ، ثمَّ أملأ مدخلات المصفوفة بأوزان الحافات بين كل رأسين من الصفوف والأعمدة.

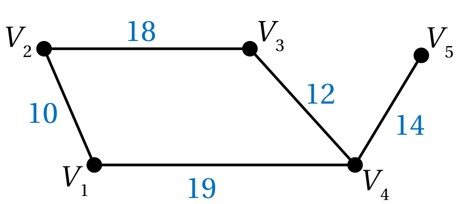
$$\begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & Z & W \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 4 & 5 & 3 \\ 4 & - & 1 & - \\ 5 & 1 & - & 2 \\ 3 & - & 2 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

أتحقَّق من فهمي

a) أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الجوار.



b) أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الوزن.



أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ المُدخَلة 0 تدلُّ على عدم اتصال الرأسين في مصفوفة الجوار، وأُلاحِظ أيضًا أنَّه تمَّ حساب كل حافة مرَّتين (مرَّة لكلٍّ من الرأسين اللذين تصل بينهما)، وكذا الحال بالنسبة إلى الحلقة؛ فهي تُحسَب مرَّتين؛ لأنَّه يُمكِن عَدُّها حافة في كلا الاتجاهين.

أتعلَّم

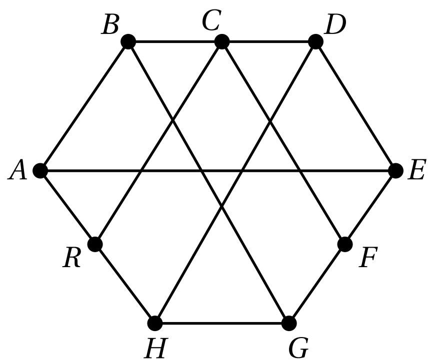
يُستعمَل الرمز – في مصفوفة الوزن للدلالة على عدم اتصال الرأسين في المُخطَّط.

أُفكِّر

1) ما دلالة مجموع مُدخَلات كل صف في مصفوفة الجوار؟
2) ما دلالة مجموع كل عمود في مصفوفة الجوار؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



1 هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.

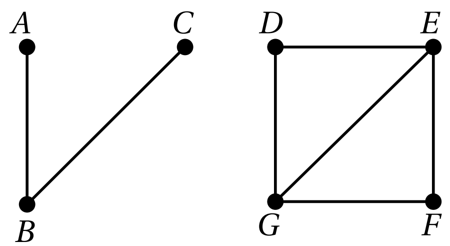
2 هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

3 هل المُخطَّط كامل؟ أُبرِّر إجابتي.

4 أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.

5 أرسم شجرة شاملة للمُخطَّط.

أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:

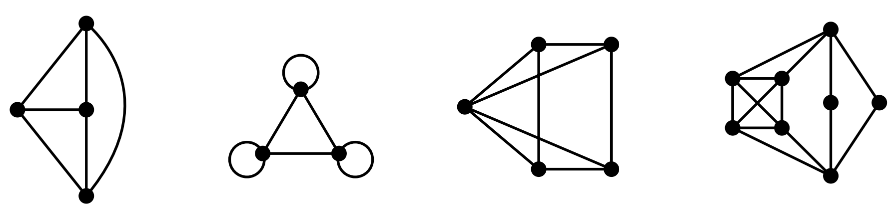


6 هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.

7 هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

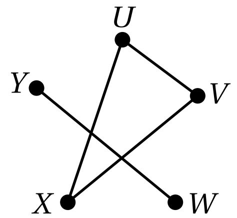
8 أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.

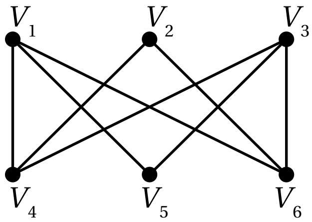
9 أُحدِّد المُخطَّط الكامل ممّا يأتي، وأُسمّيه بالرموز، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



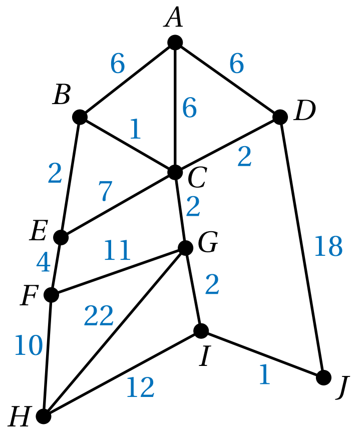
(A) (B) (C) (D)

أرسم المُخطَّط المُكمِّل لكلٍّ من المُخطَّطات الآتية:

11 

10 

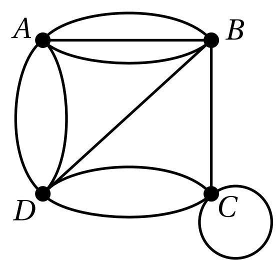
إنترنت: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لشبكة إنترنت تصل بين مجموعة من الحواسيب في إحدى المكتبات العامة. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الكَبْل (بالمتر) بين كل جهازي حاسوب في المكتبة. أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

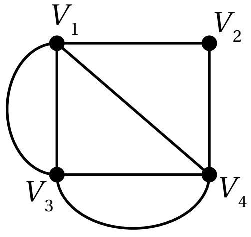


12 أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.

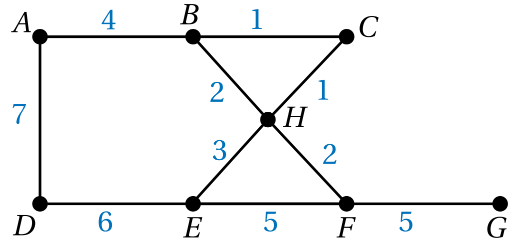
13 أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل تكلفة تَلزم لربط جميع الحواسيب في المكتبة، علمًا بأنَّ تكلفة تمديد المتر الواحد من الكَبْل JD 3.

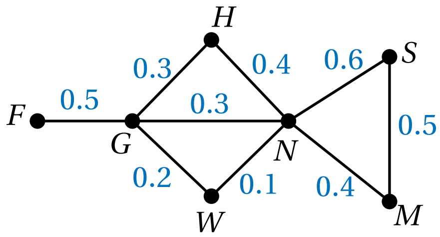
أُمثِّل كل مُخطَّط ممّا يأتي بمصفوفة الجوار:

15 

14 

أُمثِّل كل مُخطَّط ممّا يأتي بمصفوفة الوزن:

17 

16 

18 أرسم المُخطَّط المُمثَّل في مصفوفة الجوار الآتية.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19 تُمثِّل مصفوفة الوزن الآتية أطوال أنابيب المياه (بالمتر) التي تصل بين المرشّـات في إحدى المَزارع. أرسـم المُخطَّط الموزون الذي تُمثِّله المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} - & 11 & 4 & - & - & - \\ 11 & - & - & 8 & - & - \\ 4 & - & - & 9 & - & 10 \\ - & 8 & 9 & - & 7 & - \\ - & - & - & 7 & - & 9 \\ - & - & 10 & - & 9 & - \end{bmatrix}$$

مهارات التفكير العليا

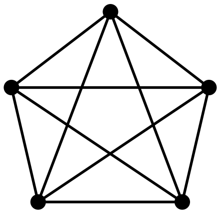
مسألة مفتوحة: أرسم كُلًّا ممّا يأتي:

20 مُخطَّط كامل، عدد رؤوسه 7

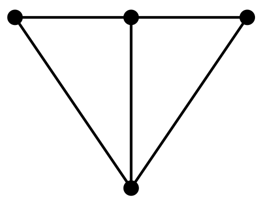
21 مُخطَّط متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كلٍّ منها 3

22 مُخطَّط بسيط، غير متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كلٍّ منها 2

23 **تبرير:** أرسم المُخطَّط المُكمِّل للمُخطَّط المجاور، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



24 **تحدٍّ:** أرسم جميع الأشجار الشاملة التي يُمكِن أنْ تنتج من المُخطَّط الآتي:



الدرس 5

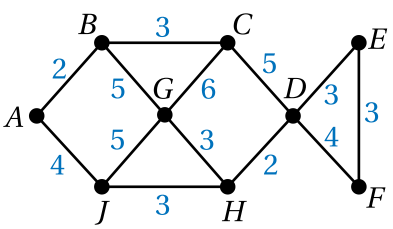
مُخطَّطات أويلر
Euler Graphs

فكرة الدرس

- تحديد إذا كان المُخطَّط المُعطى أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.
- تعرُّف خوارزمية فحص المسار، واستعمالها لإيجاد أقصر مسار في مُخطَّط متصل موزون يشمل كل حافة في المُخطَّط مَرَّة واحدة على الأقل، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به.

المصطلحات مُخطَّط أويلري، مُخطَّط شبه أويلري، المسار الأويلري، خوارزمية فحص المسار الأويلري.

مسألة اليوم يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للمسارات التي تسلكها سيّارة البريد بين 9 مواقع تابعة لإحدى الشركات، ويُمثِّل العدد على كل حافةٍ تكلفة الوقود (بالدينار) الذي تستهلكه السيّارة بين كل موقعين. أُحدِّد مسارًا يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها، ويشمل كل حافة في المُخطَّط، بحيث تستهلك السيّارة أقل كمية من الوقود إذا سلكت هذا المسار.

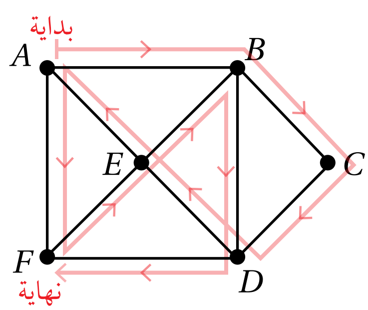


المُخطَّط الأويلري، والمُخطَّط شبه الأويلري

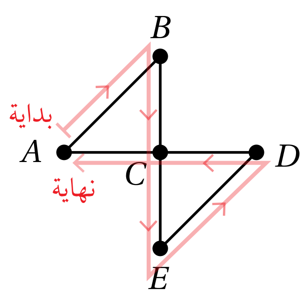
تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ دارة أويلر ممرٌّ رأسُ بدايته هو نفسه رأس نهايته، وأنَّه يشمل جميع حافات المُخطَّط من دون تكرار. وفي حال كان المُخطَّط المتصل يحتوي على دارة أويلر، فإنَّه يُسمّى **مُخطَّطًا أويلريًّا** (Eulerian graph).

أمّا المُخطَّط المتصل الذي يحوي ممرًّا يشمل جميع حافاته من دون تكرار، ورأس بدايته مختلف عن رأس نهايته، فيُسمّى **مُخطَّطًا شبه أويلري** (semi– Eulerian graph).

في ما يأتي مثال على مُخطَّط أويلري، ومثال آخر على مُخطَّط شبه أويلري.



مُخطَّط شبه أويلري



مُخطَّط أويلري

أتذكَّر

الممر هو ممشى لا تتكرَّر فيه أيُّ حافة، ويُمكِن أنْ تتكرَّر فيه الرؤوس.

أُفكِّر

هل تحتوي دارة أويلر بالضرورة على جميع رؤوس المُخطَّط؟ أُبرِّر إجابتي.

يصعب أحيانًا تمييز المُخطَّط الأويلري مـــن غيره عن طريق النظر إليه فقط. وفي هذه الحالة، يُمكِن الاستعانة بالنظرية الآتية:

سُــمِّي المُخطَّــط الأويلري بهذا الاسم نسبةً إلى مُكتشِفه عالِم الرياضيات السويسري ليونارد أويلر الذي عاش في القرن الثامن عشر الميلادي، ووضع نظرية المُخطَّطات.

نظرية **المُخطَّط الأويلري**

- إذا كان المُخطَّط متصلًا، ودرجة كل رأس من رؤوســه زوجية، فإنَّه يكون أويلريًّا. أمّا إذا كان المُخطَّط متصلًا، ويحوي رأسين فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّه يكون شبه أويلري.
- إذا كان عــدد الــرؤوس ذات الدرجة الفردية فــي المُخطَّط أكثر من رأســين، فإنَّ المُخطَّط لا يكون أويلريًّا، ولا شبه أويلري.
- إذا لم يكن المُخطَّط متصلًا، فإنَّه لا يكون أويلريًّا، ولا شبه أويلري.

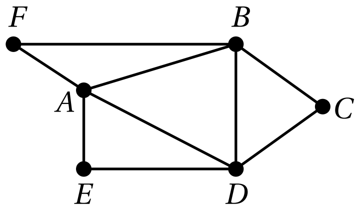
أتعلَّم

من المســتحيل أنْ يكون المُخطَّط أويلريًّا وشــبه أويلري في الوقت نفسه.

مثال 1

أتأمَّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

1



الخطوة 1: **أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا.**

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك).

الخطوة 2: **أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.**

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	4	زوجية
B	4	زوجية
C	2	زوجية
D	4	زوجية
E	2	زوجية
F	2	زوجية

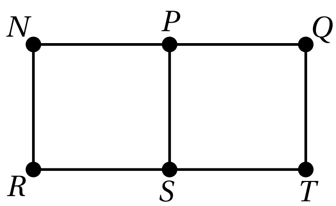
الخطوة 3: **أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس.**

بما أنَّ جميع درجات رؤوس المُخطَّط زوجية، فإنَّ المُخطَّط أويلري.

أفكِّر

أُحدِّد دارة أويلر من المُخطَّط.

2



الخطوة 1: **أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا.**

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك).

الخطوة 2: **أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.**

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
N	2	زوجية
P	3	فردية
Q	2	زوجية
R	2	زوجية
S	3	فردية
T	2	زوجية

الخطوة 3: **أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس.**

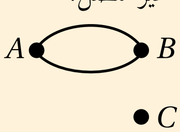
بما أنَّه يوجد رأسان فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّ المُخطَّط شبه أويلري.

أفكِّر

أُحدِّد ممرًّا شبه أويلري من المُخطَّط.

أتعلَّم

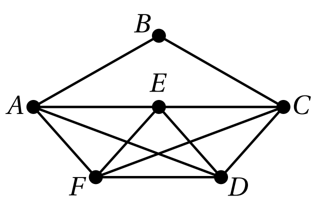
عندما نتحدَّث عن المُخطَّطات الأويلرية أو المُخطَّطات شبه الأويلرية، فإنَّنا نهتمُّ فقط بالمُخطَّطات المتصلة. فمثلًا، المُخطَّط الآتي يحوي دارة أويلر، لكنَّه ليس مُخطَّطًا أويلريًّا؛ لأنَّه غير متصل.



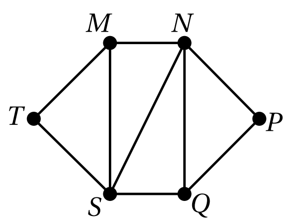
أتحقَّق من فهمي

أتأمَّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

a)



b)



إيجاد طول أقصر مسار في مُخطَّط أويلري أو مُخطَّط شبه أويلري

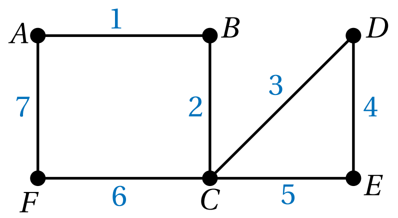
المسـار الأويلري (Eulerian route) هو مسار في المُخطَّط يشمل كل حافة في المُخطَّط مَرَّة واحدة على الأقل، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به. يُمكِن استعمال **خوارزمية فحص المسـار الأويلري** (Eulerian route inspection algorithm) لإيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط متصل موزون. أمّا إذا كان المُخطَّط أويلريًّا، فإنَّ أقصر مسار أويلري فيه يكون دارة أويلر، وهو مسار يتضمَّن جميع حافات المُخطَّط، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به. ومن ثَمَّ، فإنَّ طول أقصر مسار أويلري يساوي الوزن الكلي للمُخطَّط. وأمّا إذا كان المُخطَّط شبه أويلري، فإنَّ طول أقصر مسار أويلري فيه يكون الوزن الكلي للمُخطَّط، مضافًا إليه مجموع أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذينِ درجتهما فردية؛ وذلك لضمان البَدْء بنفس الرأس والانتهاء به.

أتذكَّر

الطريق ممر لا يتكرَّر فيه أيُّ رأس.

مثال 2

1 **أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس F، وينتهي به.**



أُلاحِظ من المخطط أنَّ درجة كل رأس من رؤوسه زوجية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط أويلري. ومنه، فإنَّ طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط يساوي الوزن الكلي للمُخطَّط.

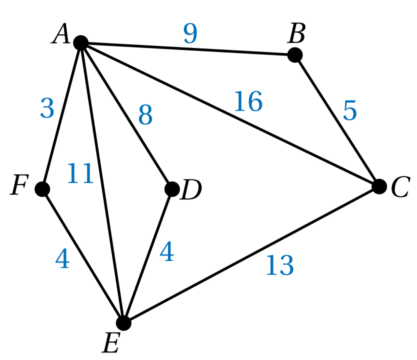
$$7 + 1 + 2 + 6 + 3 + 4 + 5 = 28$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس F، وينتهي به، هو: 28 وحدة.

أتعلَّم

الوزن الكلي للمُخطَّط الموزون هو مجموع أوزان جميع حافاته.

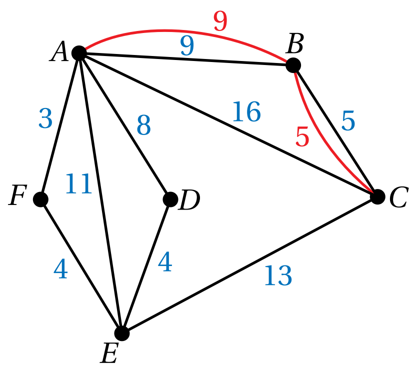
2 **أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس E، وينتهي به.**



أُلاحِظ من المُخطَّط وجود رأسين فقط ، درجة كلٍّ منهما فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط شبه أويلري.

الخطوة 1: أُكرِّر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذينِ درجتهما فردية في المُخطَّط.

الرأسان اللذان درجتهما فردية هما: A وC، وأقصر طريق يصل بينهما هو: ABC؛ لذا أُكرِّر حافات هذا الطريق في المُخطَّط كما في الشكل المجاور.



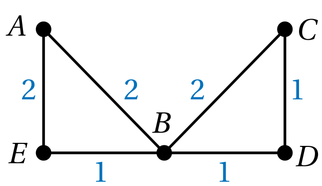
الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$$3+9+9+5+5+16+13+4+8+11+4=87$$

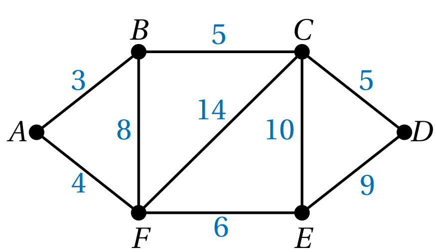
إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس E، وينتهي به، هو: 87 وحدة.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس D، وينتهي به، ويشمل كل حافة من حافاته.



b) أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس F، وينتهي به، ويشمل كل حافة من حافاته.



أتعلَّم

إنَّ إضافة الوزن 5 و9 لا تعني أنَّنا أضفنا حافات جديدة إلى المُخطَّط، وإنَّما تعني أنَّ المسار قد احتوى على هاتين الحافتين مُكرَّرتين حتّى يتمكَّن من البَدْء بنفس الرأس والانتهاء به.

أتعلَّم

يُمكِن للمسار الأويلري أنْ يشمل الحافة أكثر من مَرَّة، ولكنْ يجب أنْ يبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به.

إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط متصل غير أويلري ولا شبه أويلري

تعلَّمْتُ في المثال السابق استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري لإيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط أويلري أو مُخطَّط شبه أويلري. والآن سأتعلَّم كيف يُمكِن إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط غير أويلري ولا شبه أويلري.

أتعلَّم

عندما نتحدَّث عن المسار الأويلري، فإنَّنا نهتمُّ فقط بالمُخطَّطات المتصلة؛ فإذا لم يكن المُخطَّط متصلًا، فإنَّه لا يحوي مسارًا أويلريًّا.

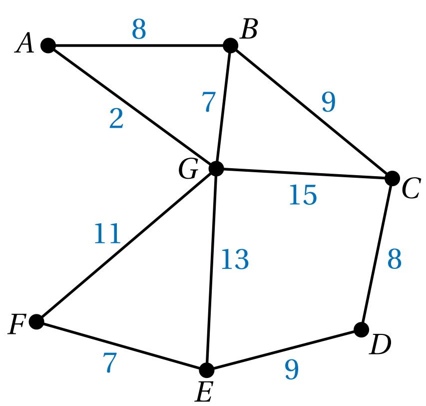
خوارزمية

يُمكِن إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط متصل غير أويلري ولا شبه أويلري باستعمال خوارزمية فحص المسار، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

1. تحديد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط.
2. تحديد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية (حتّى تصبح درجات جميع الرؤوس زوجية)، ثمَّ إيجاد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.
3. اختيار الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن، ثمَّ إضافة هذه الحافات إلى المُخطَّط.
4. إيجاد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج الذي يساوي طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط.

مثال 3 : من الحياة

أنابيب ريٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لأنابيب كبيرة تصل بين النقاط الرئيسة في إحدى المَزارع. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الأنبوب (بالمتر) بين كل نقطتين. يُراد تنظيف الأنابيب من الداخل بآلة تحوي خرطومًا رفيعًا مرنًا في مُقدِّمته أداة لضخ الماء بضغط عالٍ في اتجاه الجدران الداخلية للأنابيب الكبيرة لتنظيفها من الداخل. إذا علمْتُ أنَّه يُمكِن إدخال الخرطوم في النقطة B وإخراجه منها فقط، فأجد أقل طول من الخرطوم يَلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة.



بما أنَّه لا يُمكِن إدخال الخرطوم إلّا في الرأس B وإخراجه من هذا الرأس فقط، وبما أنَّه يجب تنظيف جميع الأنابيب؛ فإنَّه يُمكِن استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري لإيجاد أقصر طول لازم من الخرطوم (أقصر مسار يحوي جميع حافات المُخطَّط).

أُلاحِظ من المُخطَّط وجود أكثر من رأسين، درجة كلٍّ منها فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط ليس أويلريًّا ولا شبه أويلري.

الخطوة 1: أُحدِّد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط.

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط هي: B, C, E, G.

معلومة

آلة تنظيف الأنابيب هي جهاز كهربائي مُزوَّد بأنبوب مرن ذي رأس معدني دوّار، يعمل على ضَخِّ الماء بضغط عالٍ في جميع الاتجاهات. تُستعمَل هذه الآلة بفعّالية لتنظيف أنابيب مياه الريِّ وإزالة الانسدادات في أنظمة الصرف الصِّحّي.

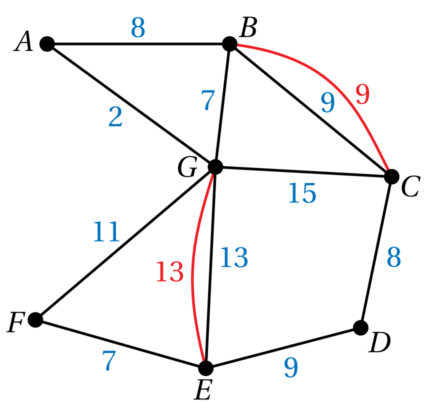
الخطوة 2: أُحدِّد الطرائق المختلفة لإضافــة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثمَّ أجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

مجموع أوزان الحافات المضافة	الحافات المضافة	
$9 + 13 = 22$	BC, GE	الطريقة الأولى
$7 + 17 = 24$	BG, CE	الطريقة الثانية
$20 + 15 = 35$	BE, CG	الطريقة الثالثة

ملحوظة: طول الحافة CE المضافة في الطريقة الثانية يســاوي مجموع طولي الحافتين CD وDE بحيث يكون طول المســار بين هذين الرأسين أقصر ما يُمكِن، وطول الحافة BE المضافة في الطريقة الثالثة يساوي مجموع طولي الحافتين GE و BG.

الخطوة 3: أختار الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن، ثمَّ أُضيف هذه الحافات إلى المُخطَّط.

الطريقــة التي أُضيفت فيهــا حافات إلى المُخطَّط وزنهــا أقل ما يُمكِن هــي الطريقة الأولى؛ لذا أُكرِّر حافات هذه الطريقة في المُخطَّط كما في الشكل المجاور.



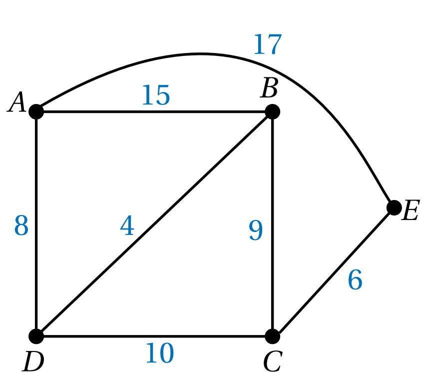
الخطوة 4: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$$8 + 9 + 9 + 8 + 9 + 7 + 11 + 2 + 7 + 15 + 13 + 13 = 111$$

إذن، أقل طول من الخرطوم يَلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة هو: 111 m

أتحقَّق من فهمي

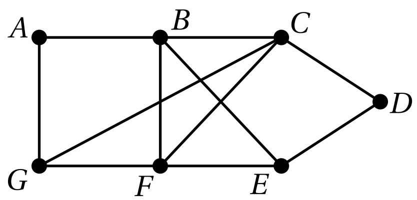
طرق: يُبيِّـن الشـكل المجـاور مُخطَّطًا للطرق الرئيسـة بيـن مجموعة مـن المناطق. وفيـه يُمثِّل العـدد على كل حافـةٍ المسـافة (بالكيلومتر) بيـن كل منطقتيـن. أجـد طـول أقصر مسـار يبـدأ بالمنطقـة A، وينتهي بهـا، ويشـمل كل حافة فـي المُخطَّط.



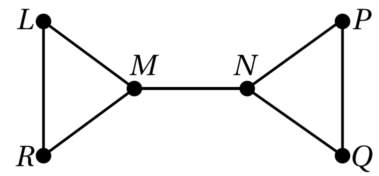
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أتأمَّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك:

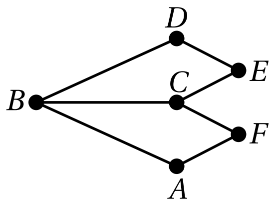
1



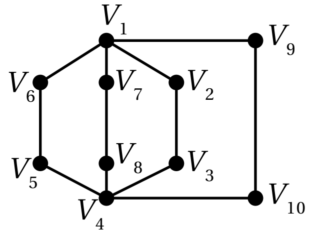
2



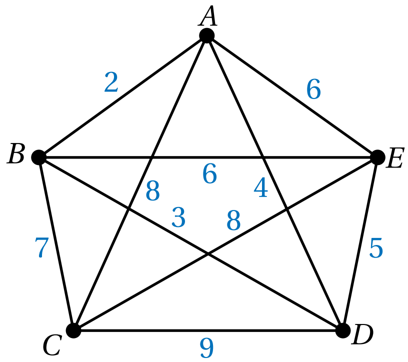
3



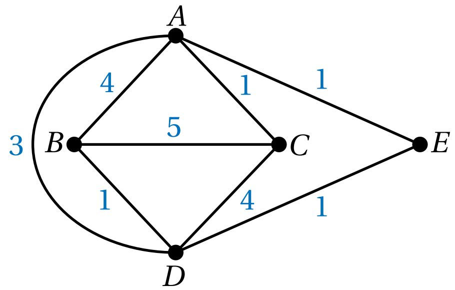
4



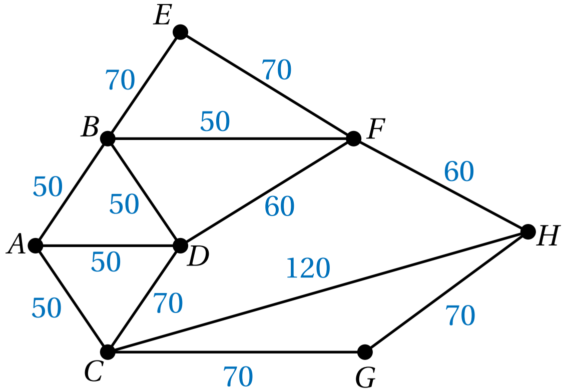
5 أجد طول أقصر مســـار أويلري في المُخطَّط الموزون الآتي، يبدأ بالرأس A، وينتهي به.

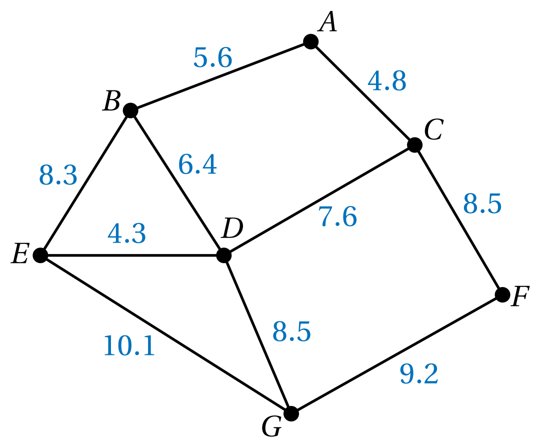


6 أجد طول أقصر مســـار أويلري في المُخطَّط الموزون الآتي، يبدأ بالرأس B، وينتهي به.



7 طرق: يُبيِّن الشـــكل التالي مُخطَّطًا للطرق الرئيســـة بين مجموعة من المدن. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالكيلومتر) بين كل مدينتين. أجد طول أقصر مسار أويلري يبدأ بالمدينة A، وينتهي بها.





8 **أنفاق:** يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لأنفاق تصريف مياه الأمطار في إحدى المدن. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول النفق بالكيلومتر. إذا علمْتُ أنَّ الفريق الهندسي المسؤول عن صيانة الأنفاق يرغب في فحصها قبل حلول فصل الشتاء للتحقُّق من عدم انسدادها، وأنَّه يتعيَّن على الفريق المرور بكل نفق مَرَّة واحدة على الأقل، وأنَّه سيبدأ مهمته من الرأس A، وينتهي به؛ فأجد طول أقصر مسار يُمكِن أنْ يمرَّ به الفريق لإنجاز مهمته.

9 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

10 **أكتشف الخطأ:** قالت سلمى: "إنَّ أيَّ مُخطَّط كامل K_n، حيث $n > 2$، هو مُخطَّط أويلري". أكتشف الخطأ في قول سلمى، ثمَّ أُصحِّحه.

تبرير: أتأمَّل مصفوفة الجوار المجاورة التي تُمثِّل مُخطَّطًا غير موزون، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا من دون رسم المُخطَّط:

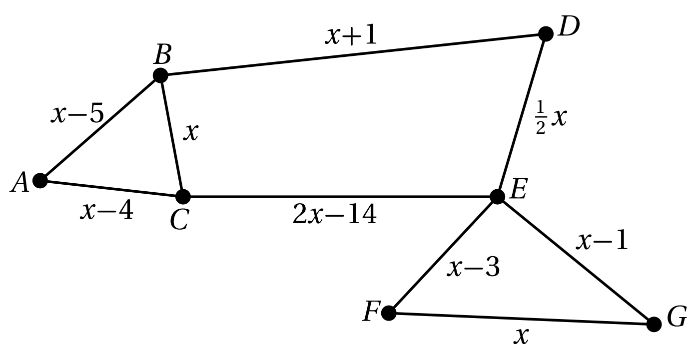
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

11 هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

12 هل المُخطَّط أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك؟ أُبرِّر إجابتي.

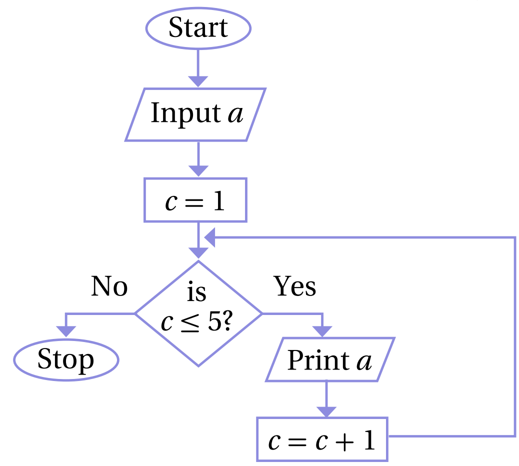
إرشاد: أستعين بالمصفوفة لكتابة مجموعة درجات رؤوس المُخطَّط.

13 **تحدٍّ:** يُبيِّن الشكل التالي مُخطَّطًا موزونًا يُمثِّل المسافات بين مجموعة من المناطق بالكيلومتر. إذا كان طول أقصر مسار في المُخطَّط باستعمال خوارزمية فحص المسار هو 100 km، فأجد قيمة الثابت الحقيقي x.



أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إحــدى التالية تُمثِّــل وصفًا لمُخرَجــات الخوارزمية الآتية:



a) الأعداد من 1 إلى 5

b) العدد a مُكرَّرًا 5 مَرّات.

c) الأعداد من 1 إلى 4

d) العدد a مُكرَّرًا 4 مَرّات.

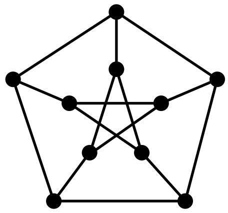
2 يُراد تعبئة العُلَب (المُعطــى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 19 وحــدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فإنَّ عدد الصناديــق اللازمة لتعبئة العُلَب باســتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى هو:

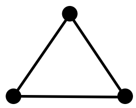
11 2 15 5 6 17 7 12

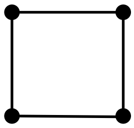
a) 3 b) 4

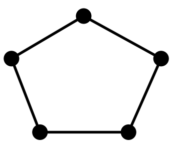
c) 5 d) 6

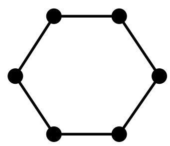
3 الذي يُمثِّــل مُخطَّطًا جزئيًّا مــن المُخطَّط المجاور هو:



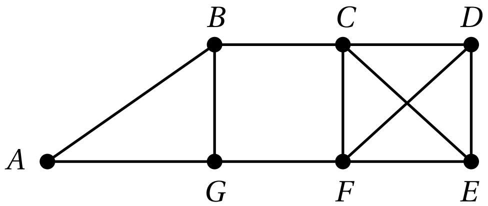
a) 

b) 

c) 

d) 

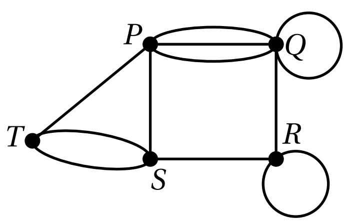
4 الذي يُمثِّل ممرًّا في المُخطَّط الآتي هو:



a) $ABCDCB$ b) $ABCDFCB$

c) $ABCFGA$ d) $ABCDECB$

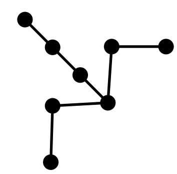
5 مجموع درجات رؤوس المُخطَّط الآتي يساوي:

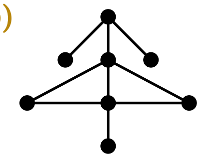


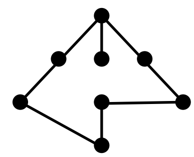
a) 18 b) 20

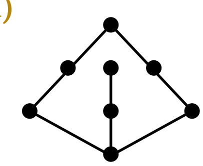
c) 22 d) 24

6 الذي يُمثِّل شجرة في ما يأتي هو:

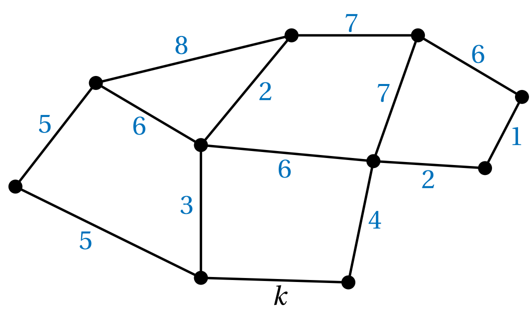
a)


b)


c)


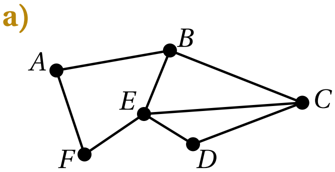
d)


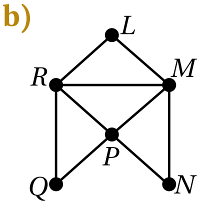
7 إذا كان وزن أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط الآتي، تمرُّ بالحافة التي وزنها k، هو 33، فإنَّ قيمة الثابت k تساوي:

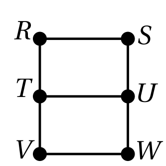


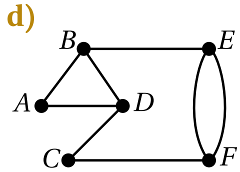
a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

8 المُخطَّط الأويلري من المُخطَّطات الآتية هو:

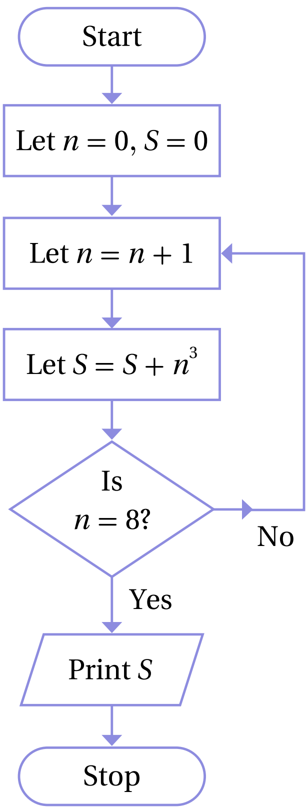
a)


b)


c)


d)


أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



9 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجها.

10 أَصِف مُخرَج الخوارزمية.

11 أُطبِّق الخوارزمية الآتية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها عندما $P = 400, R = 5, T = 3$.

1. Input P, R, T
2. Let $A = P, K = 0$
3. Let $K = K + 1$
4. Let $I = (A \times R)\ /100$
5. Let $A = A + I$
6. If $K < T$, go to step 3
7. Let $M = A/(12 \times T)$
8. Print M
9. Stop

شحن: في ما يأتي كتل 10 صناديق (بالكيلوغرام) يُراد نقلها في شاحنات، ويُمكِن لكلٍّ منها أنْ تحمل كتلة إجمالية أقصاها 300 kg:

175 135 210 105 100 150 60 20 70 125

12 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

13 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

14 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

15 أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 5 وحدات طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

2.6 0.8 2.1 1.2 0.9 1.7 2.3 0.3 1.8 2.7

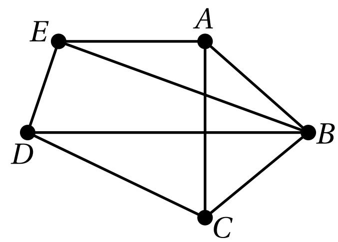
16 أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

17 أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

18 أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

19 أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

أتأمَّل المُخطَّط الآتي، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يلي:



20 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

21 أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

22 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

23 أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.

24 أُحدِّد من المُخطَّط ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون تبدأ بالرأس A، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت).

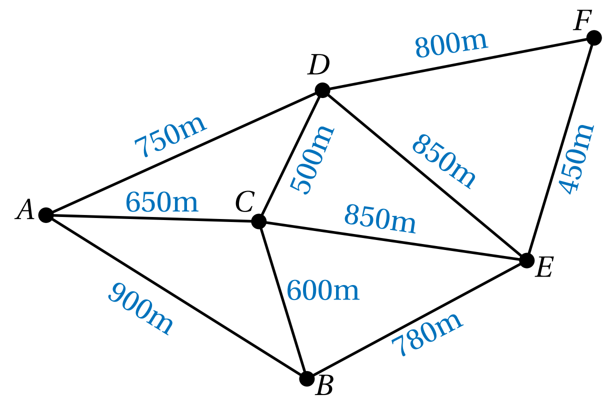
25 هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

26 هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.

27 أرسم شجرتين للمُخطَّط.

28 أرسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط.

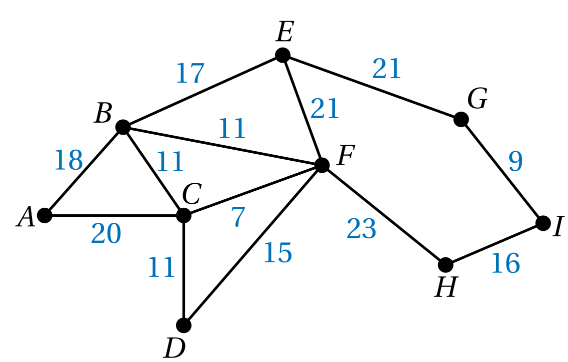
يُبيِّن الشكل الآتي مُخطَّطًا لـ 6 منازل في إحدى القرى. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالمتر) بين كل منزلين:



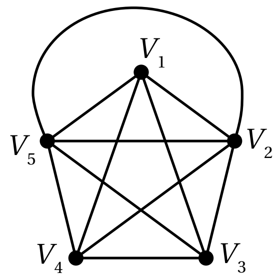
29 أجد طول المسار المباشر بين المنزل E والمنزل D.

30 أُحدِّد طول أقصر مسار بين المنزل B والمنزل D، والمسار الذي اتخذته لذلك.

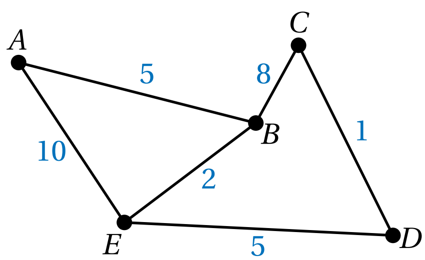
31 يُبيِّن المُخطَّط الموزون التالي أطوال الطرق التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن بالكيلومتر. أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.



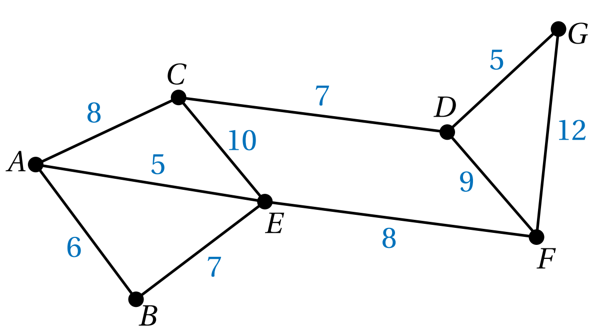
32 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الجوار.



33 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الوزن.



34 يُبيِّن المُخطَّط الموزون التالي أطوال الطرق التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن بالكيلومتر. أجد طول أقصر مسار أويلري يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها.



الوحدة
3

البرمجة الخطِّية
Linear Programming

ما أهمية هذه الوحدة؟

طُــوِّرت نظرية البرمجة الخطِّية فــي بداية الحرب العالمية الثانية عام 1939م، واستُعمِلت لتقليل التكلفة وزيادة الإنتاجية في كثير من المجالات، وقد استفادت منها الشــركات التجارية في جَنْي مزيد من الأرباح وتقليل الخســائر، وكذلــك جدولة رحلات الطيران، وإنشاء خطوط الهاتف.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حلَّ متباينة خطِّيَّة بمُتغيِّر واحد، وتمثيلها على خطِّ الأعداد.
- ✓ تمثيل متباينة خطِّيَّة بمُتغيِّرين في المستوى الإحداثي.
- ✓ حلَّ نظام مُكوَّن من معادلتين خطِّيَّتين بمُتغيِّرين.
- ✓ تمثيل نظام مُكوَّن من معادلتين خطِّيَّتين بمُتغيِّرين بيانيًّا.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ حلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطِّيَّة بمُتغيِّرين بيانيًّا.
- ◄ حلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطِّيَّة بمُتغيِّرين باستعمال برمجية جيوجبرا.
- ◄ حلَّ مسائل حياتية عن البرمجة الخطِّيَّة.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (39–36) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

حلُّ نظام متباينات خطِّية بمُتغيِّرين بيانيًّا

Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

فكرة الدرس حلُّ نظام مُكوَّن من متباينات خطِّية بمُتغيِّرين بيانيًّا.

المصطلحات نظام المتباينات الخطِّية، مجموعة الحلِّ.

مسألة اليوم قدَّم مَحَلٌّ لتبديل زيوت السيّارات عرضًا مجّانيًّا لغسل السيّارات. إذا كان الحدُّ الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيّارة يوميًّا، بتكلفة لا تزيد على 75 JD، فكم سيّارة كبيرة وصغيرة يُمكِن غسلها يوميًّا بحسب هذا العرض؟


تكلفة غسل السيّارة الكبيرة 3 JD.


تكلفة غسل السيّارة الصغيرة 2 JD.

يتكوَّن **نظام المتباينات الخطِّية** (system of linear inequalities) من متباينتين خطِّيتين أو أكثر. ويُطلَق على مجموعة الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق جميع المتباينات اسم **مجموعة الحلِّ** (solution set). فمثلًا، يتكوَّن النظام الآتي من ثلاث متباينات خطِّية:

المتباينة الخطِّية الأولى $x + y < 2$

المتباينة الخطِّية الثانية $-2x + y > -1$

المتباينة الخطِّية الثالثة $x - 3y \leq -2$

يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنَّه يُحقِّق المتباينات جميعها.

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الخطِّية الأولى $-1 + 2 = 1 < 2$ ✓

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الخطِّية الثانية $-2(-1) + 2 = 4 > -1$ ✓

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الخطِّية الثالثة $-1-3(2) = -7 \leq -2$ ✓

لحلِّ نظام متباينات، أُمثِّل كل متباينة فيه بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، ثمَّ أُظلِّل المنطقة المُشترَكة بين مناطق حلِّ المتباينات جميعها؛ إذ تُمثِّل هذه المنطقة مجموعة حلِّ النظام.

أتعلَّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات

تدلُّ جملة (الزوج المُرتَّب يُحقِّق متباينة) على أنَّ المتباينة تكون صحيحة عند تعويض هذا الزوج فيها.

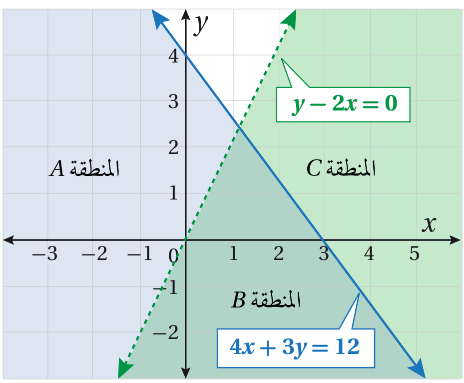
مثال 1

أُمثِّل منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي، ثمَّ أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ:

$$4x + 3y \leq 12$$
$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: أُمثِّل المستقيمين الحدوديين.

$$4x + 3y = 12$$
$$y - 2x = 0$$



أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين في المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتَي الحلِّ كما في الشكل المجاور.

أتذكَّر

إذا تضمَّنت المتباينة رمز > أو رمز <، فإنَّ المستقيم الحدودي لا يدخل ضمن منطقة الحلِّ، ويكون تمثيله بخطٍّ مُتقطِّع.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة التقاطع بين حلَّي المتباينتين.

أُلاحِظ أنَّ حلَّ المتباينة: $4x + 3y \leq 12$ هو المنطقتان A و B، وأنَّ حلَّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B و C. إذن، المنطقة B المُشترَكة بين منطقتَي حلِّ المتباينتين هي منطقة حلِّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ.

أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ باختيار زوج مُرتَّب يقع في منطقة حلِّ النظام (المنطقة B)، مثل $(2, -1)$، ثمَّ تعويضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الخطِّيَّة الأولى	$4x + 3y \leq 12$
بالتعويض	$4(2) + 3(-1) \overset{?}{\leq} 12$
ناتج التعويض يُحقِّق المتباينة	$5 \leq 12$ ✓
المتباينة الخطِّيَّة الثانية	$y - 2x < 0$
بالتعويض	$-1 - 2(2) \overset{?}{<} 0$
ناتج التعويض يُحقِّق المتباينة	$-5 < 0$ ✓

أتذكَّر

للتحقُّق من صِحَّة الحلِّ، يجب تعويض زوج مُرتَّب من منطقة الحلِّ في متباينات النظام جميعها.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي، ثمَّ أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ:

$$2x - 4y \geq -5$$

$$x + 7y < 7$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتذكَّر

يُرمَز إلى المجموعة الخالية بالرمز { }، أو الرمز ∅ (تُقرَأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا تحوي عناصر.

لا يكون لنظام المتباينات حلٌّ أحيانًا؛ لعدم وجود منطقة مُشتركة بين مناطق حلِّ المتباينات المُكوِّنة له، عندئذٍ تكون مجموعة الحلِّ هي المجموعة الخالية.

مثال 2

أُمثِّل منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$2x - 4y \leq -2$$

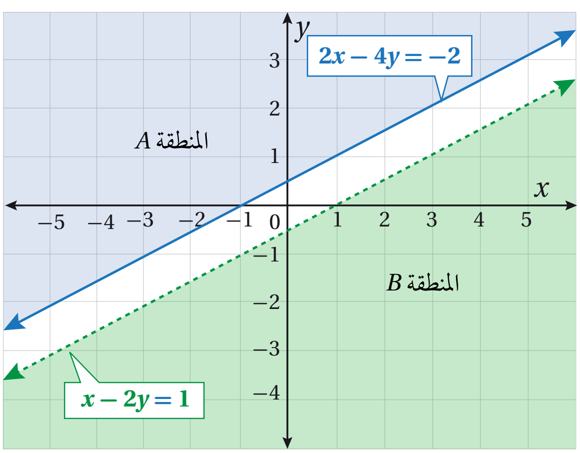
$$x - 2y > 1$$

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين الآتيين في المستوى الإحداثي نفسه:

$$2x - 4y = -2$$

$$x - 2y = 1$$

وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتَي الحلِّ كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ أنَّ حلَّ المتباينة: $2x - 4y \leq -2$ هو المنطقة A، وأنَّ حلَّ المتباينة: $x - 2y > 1$ هو المنطقة B، وأنَّه لا يوجد تقاطع بين منطقتَي حلِّ المتباينتين. إذن، المجموعة الخالية ∅ هي منطقة حلِّ النظام.

أتعلَّم

أُلاحِظ من المتباينة الثانية في هذا المثال أنَّ $2x - 4y > 2$؛ وهذا يُناقِض المتباينة الأولى $2x - 4y \leq -2$؛ ما يعني عدم وجود أيِّ زوج مُرتَّب يُمكِن أنْ يُحقِّق المتباينتين في الوقت نفسه.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$5x - 2y < 3$$

$$2.5x - y \geq 2$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحلِّ هي المنطقة المُشترَكة بين مناطق حلِّ المتباينات جميعها.

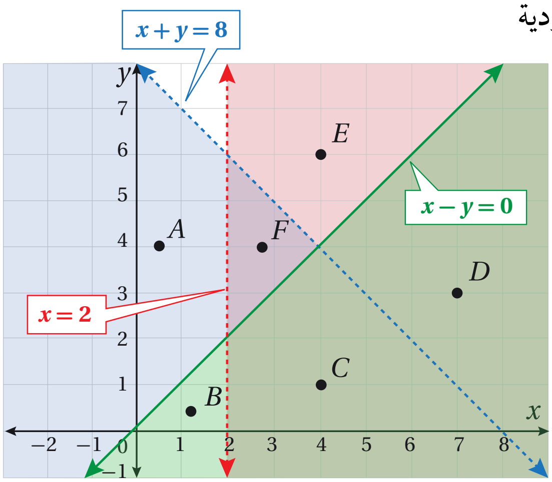
مثال 3

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$
$$x + y < 8$$
$$x > 2$$

الخطوة 1: أُمثِّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية الآتية في المستوى الإحداثي نفسه كما في الشكل المجاور:

$$x - y = 0$$
$$x + y = 8$$
$$x = 2$$



الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلِّ.

أُظلِّل منطقة حلِّ المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: A, B, C, F.

أُظلِّل منطقة حلِّ المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: B, C, D.

أُظلِّل منطقة حلِّ المتباينة: $x > 2$ باللون الزهري، وهي المناطق: C, D, E, F.

أُلاحِظ أنَّ المنطقة C هي المنطقة المُشترَكة بين مناطق حلِّ المتباينات الثلاث. إذن، هي منطقة حلِّ النظام.

أتعلَّم

إذا تكوَّن نظام المتباينات الخطِّية بمُتغيِّرين من متباينتين فقط، ولم يكن للنظام حلٌّ، فإنَّ هذا يعني بالضرورة أنَّ المستقيمين الحدوديين متوازيان. غير أنَّ ذلك لا ينطبق على النظام في حال وجود أكثر من متباينتين؛ إذ قد لا تتقاطع مناطق حلِّ المتباينات بالرغم من أنَّ المستقيمات غير متوازية.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$
$$x - 5y > 6$$
$$2x - 5y < -3$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

تُستعمَل أنظمة المتباينات الخطِّية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكِن بها تحديد القِيَم المُمكِنة للمُتغيِّرات وَفق شروط مُحدَّدة.

مثال 4 : من الحياة

نجارة: يريد نجّار شراء نوعين من المسامير، ووجد أنَّ ثمن الكيلوغرام الواحد من النوع الأوَّل JD 4، ومن النوع الثاني JD 6. إذا أراد شراء ما لا يقلُّ عن 10 kg من النوعين، بحيث لا يزيد الثمن الكلي على JD 48، فأجد مقدار ما يُمكِنه شراؤه من كل نوع.

يوجد في هذه المسألة مُتغيِّران مجهولان، هما: كمية المسامير من النوع الأوَّل، وكمية المسامير من النوع الثاني، وتوجد قيود على هذين المُتغيِّرين مُحدَّدة بحدٍّ أدنى للكتلة الكلية لِما سيشتريه النجّار من النوعين، وحدٍّ أعلى لمقدار ما سيدفعه للكميتين من كلا النوعين.

الخطوة 1: أُعبِّر عن المسألة جبريًّا بنظام من المتباينات الخطِّية.

أفترض أنَّ كتلة المسامير من النوع الأوَّل هي x، ومن النوع الثاني هي y، ثمَّ أكتب نظام المتباينات الخطِّية المُرتبِط بالشروط الواردة في نَصِّ المسألة.

$x + y \geq 10$ لا تقلُّ الكتلة الكلية لنوعي المسامير عن 10 kg

$4x + 6y \leq 48$ لا يزيد الثمن الكلي لنوعي المسامير على JD 48

$x \geq 0$ لا يُمكِن أنْ تكون كتلة النوع الأوَّل سالبة

$y \geq 0$ لا يُمكِن أنْ تكون كتلة النوع الثاني سالبة

بعد تبسيط المتباينة: $4x + 6y \leq 48$ بالقسمة على 2، فإنَّ نظام المتباينات الذي يُمثِّل هذه المسألة هو:

$$x + y \geq 10$$
$$2x + 3y \leq 24$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

أتعلَّم

نحتاج في بعض المسائل الحياتية إلى إضافة الشرطين: $x \geq 0, y \geq 0$؛ لأنَّ قِيَم المُتغيِّرات فيها لا يُمكِن أنْ تكون سالبة، مثل: الكتلة، والمسافة.

لغة الرياضيات

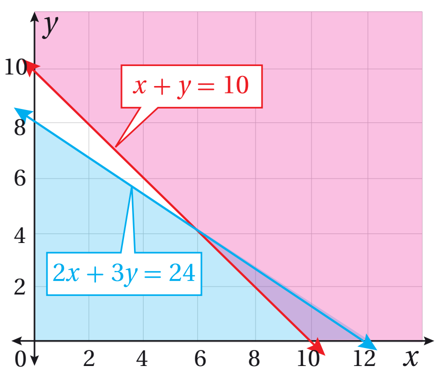
a على الأكثر تُكافِئ $x \leq a$، و b على الأقل تُكافِئ $x \geq b$.

الخطوة 2: أُمثِّل نظام المتباينات الخطِّيّة بيانيًّا.

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين: $x + y = 10, 2x + 3y = 24$ في المستوى الإحداثي نفسه، وأقصر الرسم على الربع الأوَّل؛ لأنَّ $x \geq 0, y \geq 0$، ثمَّ أُظلِّل منطقة الحلِّ لكل متباينة.

الخطوة 3: أُحدِّد منطقة الحلِّ.

أُلاحِظ أنَّ مناطق الحلِّ تتقاطع في منطقة مُغلَقة على شكل مُثلَّث، هي منطقة حلِّ النظام، وأنَّ النقاط: $(9, 2), (9, 1), (8, 2), (6, 4)$ وغيرها كثير تقع في منطقة الحلِّ. فمثلًا، يُمكِن للنجّار شراء 6 kg من النوع الأوَّل، و 4 kg من النوع الثاني، أو 9 kg من النوع الأوَّل، و 1 kg من النوع الثاني، وهكذا الحال بالنسبة إلى بقيَّة النقاط الواقعة في منطقة الحلِّ.



أفكِّر

أكتب قائمة تحوي جميع النقاط التي يُمكِن أنْ تكون حلولًا مُمكِنةً لنظام المتباينات الخطِّيّة.

أتحقَّق من فهمي

محميات: يوجد في محمية للحيوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يُشرِف على إطعامها والاعتناء بها أنَّ:

- **في المحمية 6 حيوانات على الأقل.**
- **عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيوانًا.**
- **عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.**
- **في المحمية اثنين من الغزلان على الأقل.**

a) ما أقل عدد مُمكِن من الأيائل؟

b) ما أكثر عدد مُمكِن من الغزلان؟

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

تُعَدُّ محمية الغزلان في دِبِّين إحدى أكبر المحميات الطبيعية في الأردن.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُمثِّل منطقة حلِّ كلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية:

1) $x + 3y > 1$
$5x - y \leq 2$

2) $-3x - 12y > -9$
$x + 4y \geq 5$

3) $x - 11y < 6$
$-2x + 22y > -12$

4) $3x + 5y \leq 1$
$3x + 5y \leq 3$

5) $2x - 7y > 2$
$2x - 7y \leq 2$

6) $13x - y < 11$
$x + y \geq 0$

7) $9x - y < 2$
$x + 3y > -1$
$x - y > -3$

8) $5x - 5y < 2$
$2x - 2y > 1$
$x \geq y$

9) $x \leq y$
$x - 5y < 6$
$10x - y > 3$

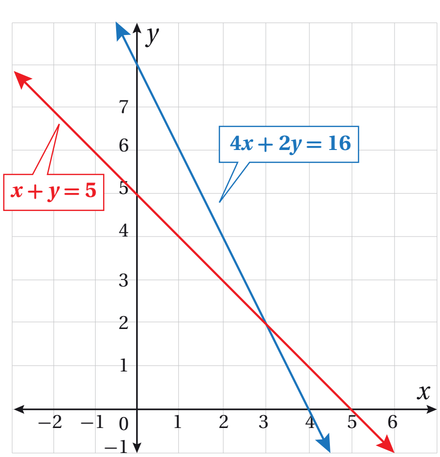
إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

10) **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين، ودينارًا واحدًا للأطفال، ويتَّسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر. إذا كانت x تُمثِّل عدد البالغين، وy تُمثِّل عدد الأطفال، فكم شخصًا من البالغين والأطفال قد يوجد على متن القارب، علمًا بأنَّ رَيْع بيع التذاكر أقل من JD 12؟

11) **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمّان والعقبة JD 25، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة JD 50. إذا كان رَيْع بيع التذاكر JD 1600 على الأقل، وبيعت 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر المُمكِن لكل درجة.

12) أُظلِّل منطقة حلِّ النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور، ثمَّ أكتب جميع حلول النظام المُمكِنة، علمًا بأنَّ x وy عددان صحيحان موجبان:

$$x + y \geq 5$$
$$4x + 2y \leq 16$$



13 **جامعات:** أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و1200 نقطة في الامتحانين معًا؛ شـــرط ألّا يقلَّ المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألّا يقلَّ المجموع في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة.

أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعيَّن على سامية إحرازها في كل امتحان لتُقبَل في الجامعة.

14 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

15 **تبرير:** أَصِف منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانيًّا:

$$2x + y \leq 7$$

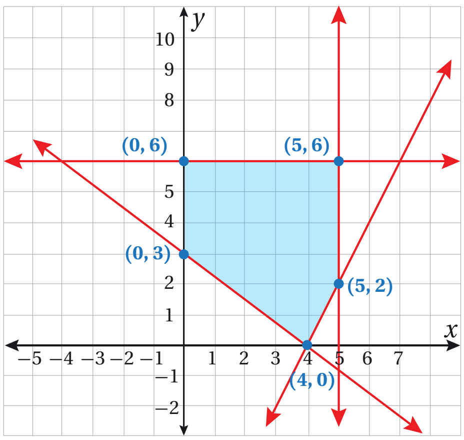
$$2x + y \geq 7$$

مسألة مفتوحة: أكتب نظامين يتكوَّن كلٌّ منهما من متباينتين خطِّيتين بمُتغيِّرين، بحيث تكون مجموعة الحلِّ:

16 واقعة في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي.

17 المجموعة الخالية.

18 **تحدٍّ:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حلِّه هي المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني الآتي:



معمـل برمجيـة جيوجبـرا

تمثيل نظام متباينات خطِّية بمُتغيِّرين بيانيًّا

Graphing System of Linear Inequalities In Two Variables

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطِّية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحلِّ.

مثال

أُمثِّل نظام المتباينات الخطِّية الآتي بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثمَّ أُحدِّد منطقة الحلِّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

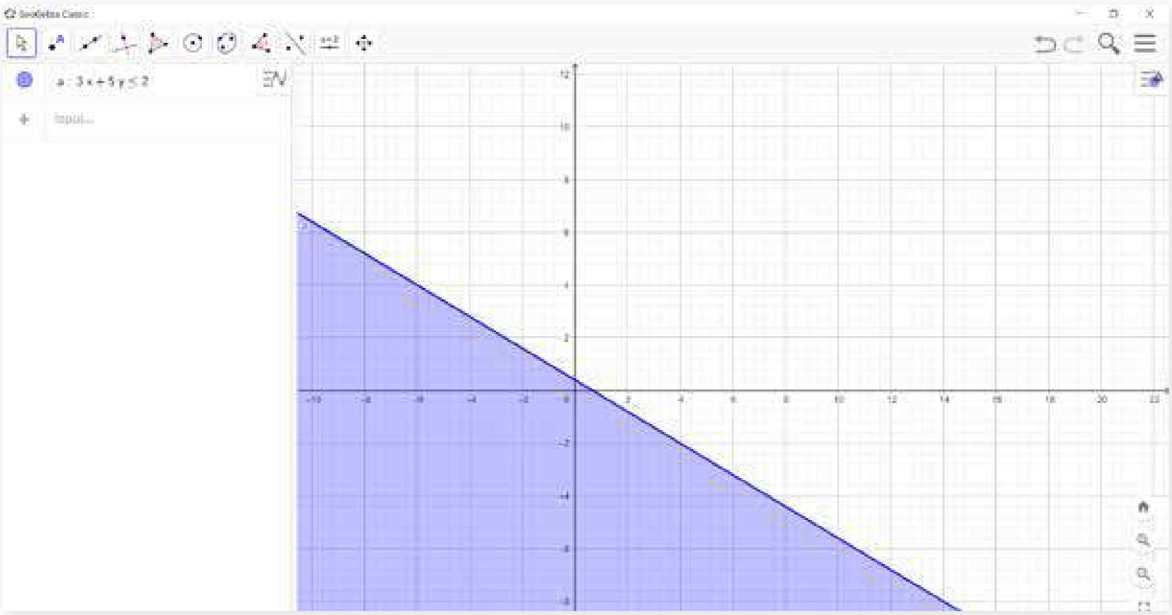
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: تمثيل المتباينة الأولى بيانيًّا.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

3	x	+	5	y	≤	2

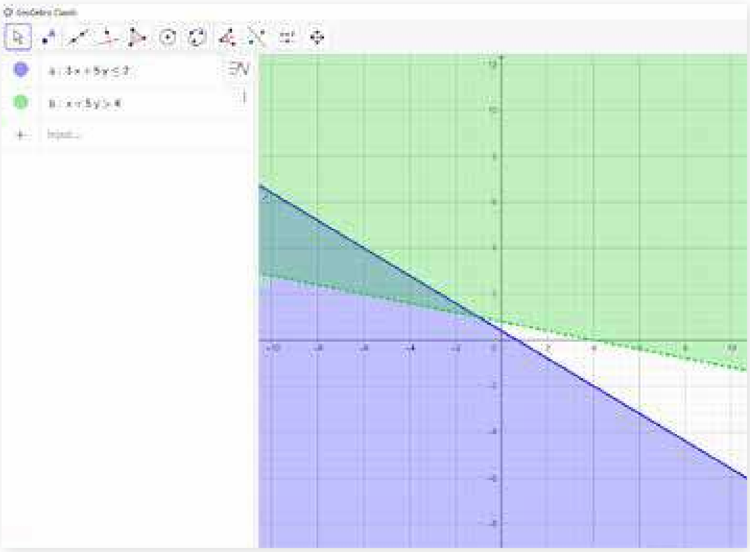
أُلاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



الخطوة 2: تمثيل المتباينة الثانية بيانيًّا.

أكتب المتباينة الثانية في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

x	+	5	y	>	4

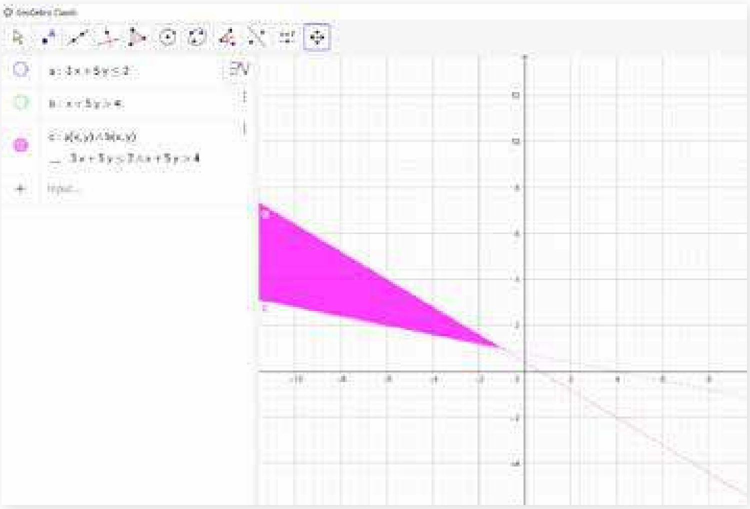


الخطـوة 3: تغييـــر اللون الأزرق الـــذي حدَّدته برمجية جيوجبرا لمنطقة أُخـــرى؛ لتمييزها من منطقة الحلِّ الأولى.

أنقر المتباينة التي يُراد تغيير لون منطقة حلِّها على يســار الشاشــة، ولتكن المتباينة الثانية، ثمَّ أنقر الرمز ⋮ الذي بجانبهــا، وأختار (settings)، ثمَّ (color) من القائمة التي ظهرت على يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا آخرَ مثل الأخضر.

الخطوة 4: تفسير المناطق الظاهرة.

أُلاحِظ وجــود 4 مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانيــة باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونيــن معًا، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كل منطقة؟



الخطوة 5: إظهار منطقة الحلِّ بشكل مُنفصِل.

يُمكِنني إظهار منطقة الحلِّ بشــكل مُنفصِل عن المناطق الأُخرى، وذلك بالضغط على زرِّ اللون المجاور لــكل متباينة؛ فيختفــي عندئذٍ تظليل المناطــق، ثمَّ كتابــة الصيغة الآتية في شــريط الإدخــال: $a\&\&b$، حيث تُمثِّل a و b اســمَي المنطقتين المُمثِّلتيــن للمتباينتين؛ فتظهر منطقة الحلِّ بشكل مُنفصِل كما في الشكل المجاور.

أتدرَّب

أُمثِّل كُلًّا من أنظمة المتباينات الخطِّية الآتية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثمَّ أُحدِّد منطقة الحلِّ:

1. $-5x - 2y \geq 3$
   $x + y < -3$
2. $0.5x + 7y > -2$
   $x < y$
3. $x - y \geq 0$
   $x + y \leq 0$
4. $9x - 6y > 8$
   $27x - 18y < 1$

الدرس 2

البرمجة الخطِّية
Linear Programming

فكرة الدرس نمذجة مواقف حياتية بمسألة يُمكِن حلُّها باستعمال طريقة البرمجة الخطِّية بيانيًّا.

المصطلحات القيود، البرمجة الخطِّية، منطقة الحلول المُمكِنة، الاقتران الهدف، الحلُّ الأمثل.

مسألة اليوم دخلت سلمى مَحَلًّا لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على JD 4 ثمنًا لـ 15 شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المُعلَّقة داخل المَحَلِّ معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كَمٍّ مُمكِن من البندورة؟

نوع شتلة البندورة	A	B
الثمن بالدينار	0.2	0.3
أقل إنتاج مُتوقَّع	4 kg	5 kg

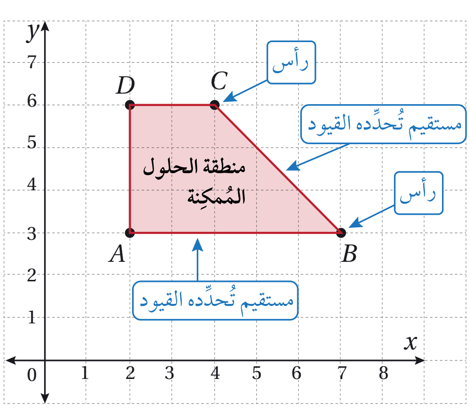
إرشاد
سيقتصر هذا الدرس فقط على البرمجة الخطِّية بمُتغيِّرين.

البرمجة الخطِّية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني في المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة مُمكِنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة مُمكِنة (قيمة صغرى) لاقتران يُسمّى **الاقتران الهدف** (objective function)، ضمن مجموعة **قيود** (constraints)، يُمثِّل كلٌّ منها متباينة خطِّية. فبتمثيل المتباينات الخطِّية (القيود) تتحدَّد منطقة حلٍّ مُشترَكة لها تُسمّى **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible region)، وفيها تتحقَّق أكبر قيمة مُمكِنة أو أصغر قيمة مُمكِنة للاقتران الهدف عند رؤوس المُضلَّع الذي يُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تُعرَّف البرمجة الخطِّية بمُتغيِّرين أيضًا بأنَّها طريقة البحث عن **الحلِّ الأمثل** (optimal solution)، وتتكوَّن مسألتها ممّا يأتي:

1. **الاقتران الهدف**: يكون في صورة: $P = ax + by$، حيث:
   P: اسم الاقتران (مثل الربح).
   a, b: عددان حقيقيان. x, y: مُتغيِّران.

2. **القيود**: نظام من المتباينات الخطِّية، وهي تُكتَب بدلالة المُتغيِّرين x, y، وتُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الحلُّ الأمثل

مفهوم أساسي

إذا وُجِدت قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنَّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

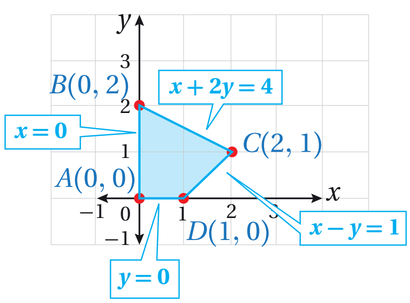
مثال 1

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $P = 3x + 2y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x - y \leq 1$$
$$x + 2y \leq 4$$
$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

الخطوة 1: أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطِّية (القيود) بيانيًّا، ثمَّ أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من نقاط رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة، وهي: A, B, C, D، ثمَّ أضعها في جدول، وأحسب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلٍّ منها.

$P = 3x + 2y$	رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة
$P = 3(0) + 2(0) = 0$	$A(0, 0)$
$P = 3(0) + 2(2) = 4$	$B(0, 2)$
$P = 3(2) + 2(1) = 8$	$C(2, 1)$
$P = 3(1) + 2(0) = 3$	$D(1, 0)$

القيمة العظمى

الخطوة 3: أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ أنَّ أكبر قيمة للاقتران P هي 8، وأنَّها تظهر عندما $x = 2, y = 1$.

أتحقَّق من فهمي

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $T = 4x + 5y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \leq 16$$
$$3x + 2y \leq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

أتذكَّر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.

يسعى القائمون على الشركات الصناعية والتجارية ومختلف الأعمال إلى تخفيض الكلفة وزيادة الإنتاجية وتحقيق أكبر ربح مُمكِن، لكنَّ ذلك يخضع لقيود ومُحدِّدات، مثل: التمويل، وعدد العُمّال، وعدد ساعات العمل، وعوامل العرض والطلب، وغير ذلك من المُتغيِّرات. لحلِّ هذا النوع من المسائل، أستعمل البرمجة الخطِّية، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 صياغة الفرضيات، وكتابة اقتران الهدف الذي يُراد إيجاد قيمته العظمى أو قيمته الصغرى، ثمَّ تحديد القيود.

الخطوة 2 تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، ثمَّ تظليل منطقة الحلول المُمكِنة.

الخطوة 3 تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة، وذلك بإيجاد نقاط تقاطع المستقيمات الحدودية عند تلك الرؤوس.

الخطوة 4 اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وَفقًا لِما هو مطلوب في المسألة، وذلك بتعويض إحداثيات الرؤوس في اقتران الهدف.

مثال 2 : من الحياة

يبيع متجر نوعين من أجهزة الحاسوب المحمولة، تكلفة الجهاز الواحد من النوع الأوَّل JD 250، وتكلفة الجهاز الواحد من النوع الثاني JD 400. يُحقِّق الجهاز الواحد من النوع الأوَّل ربحًا مقداره JD 45، في حين يُحقِّق الجهاز الواحد من النوع الثاني ربحًا مقداره JD 50. قدَّر صاحب المتجر أنَّ إجمالي الطلب الشهري على الأجهزة لا يتجاوز 250 جهازًا، وبيَّن عدم قدرته على استثمار أكثر من JD 70000 في المتجر. كم عدد الأجهزة التي يتعيَّن على صاحب المتجر توفيرها للزبائن من كل نوع لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

الخطوة 1: أُعبِّر عن كلٍّ من اقتران الهدف والقيود جبريًّا.

أفترض أنَّ عدد أجهزة الحاسوب التي سيُوفِّرها صاحب المتجر من النوع الأوَّل هو x، وأنَّ عدد الأجهزة التي سيُوفِّرها من النوع الثاني هو y. إذا افترضْتُ أنَّ صاحب المتجر سيبيع جميع الأجهزة المُتوافِرة لديه، فإنَّ الربح المُتوقَّع هو: $P = 45x + 50y$.

المطلوب أنْ يكون الربح أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

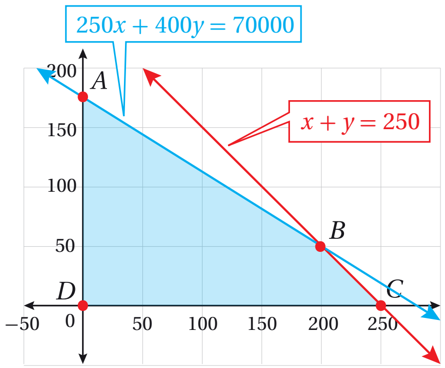
$$250x + 400y \le 70000 \;,\quad x + y \le 250 \;,\quad x \ge 0 \;,\quad y \ge 0$$

أتذكَّر

تُسمّى المتباينتان $x \ge 0, y \ge 0$ قيودًا أو شروط عدم السالبية، وهما توجدان في مسائل البرمجة الخطِّية الحياتية بصورة ضمنية.

الخطوة 2: **أُمثِّل القيود بيانيًّا.**

أُمثِّل نظام المتباينات، ثمَّ أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 3: **أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة، ثمَّ أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.**

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D، ثمَّ أجد قيمة الربح P عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$P = 45x + 50y$
$A(0, 175)$	$P = 45\ (0) + 50\ (175) = 8750$
$B(200, 50)$	$P = 45\ (200) + 50\ (50) = 11500$
$C(250, 0)$	$P = 45\ (250) + 50\ (0) = 11250$
$D(0, 0)$	$P = 45\ (0) + 50\ (0) = 0$

القيمة العظمى

أُلاحِظ من الجدول أنَّ أكبر ربح مُمكِن هو JD 11500، وأنَّ هذا الربح يتحقَّق عند بيع 200 جهاز من النوع الأوَّل، و 50 جهازًا من النوع الثاني.

أتحقَّق من فهمي

يُنتِج مشغل صغير للأثاث المعدني 36 خزانة على الأكثر أسبوعيًّا من نوعين مختلفين: A، و B. يبلغ ربح الخزانة الواحدة من النوع A JD 35، ومن النوع B JD 45. إذا كان ما يُباع من النوع A لا يقلُّ عن 3 أمثال ما يُباع من النوع B، فأجد عدد الخزائن التي يُنتِجها المشغل من كل نوع لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

أُلاحِظ من المثالين السابقين أنَّ منطقة الحلِّ المُمكِنة التي تُحدِّدها القيود كانت محدودة، لكنَّ بعض المسائل الحياتية تتضمَّن إيجاد أقل تكلفة مُمكِنة، أو أقل كمية مُستهلَكة وغير ذلك، فتكون منطقة الحلِّ عندئذٍ غير محدودة؛ لأنَّ قيودها تفرض ذلك.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ منطقة الحلول المُمكِنة مُرتبِطة فقط بالمُحدِّدات، وليس لاقتران الهدف أيُّ علاقة بها.

أتذكَّر

يُمكِن إيجاد إحداثيي النقطة B بحلِّ المعادلتين معًا بطريقة الحذف أو التعويض. كذلك يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لإيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين، علمًا بأنَّ النقطة A تُمثِّل المقطع y للمعادلة الآتية:

$250x + 400y = 70000$

مثال 3 : من الحياة

يخلط بعض مُربّي الماشـية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقل. ويُبيِّن الجدول المجاور تكلفة الكيـس الواحد من كل نوع، وعـدد الوحدات التـي يحويها من البروتينات والمعادن والفيتامينات. إذا احتاجت الماشية يوميًّا إلى 150 وحدة من البروتينات، و90 وحـدة من المعادن، و60 وحـدة من الفيتامينـات على الأقل، فكم كيسًـا من النوع 1 والنوع 2 معًا يُمكِن أنْ تستهلكه الماشية بأقل تكلفة مُمكِنة؟

	النوع 1	النوع 2
تكلفة الكيس الواحد	JD 10	JD 12
عدد وحدات البروتينات	40	30
عدد وحدات المعادن	20	20
عدد وحدات الفيتامينات	10	30

الخطوة 1: أصوغ الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الأكياس من النوع 1 هو x، وأنَّ عدد الأكياس من النوع 2 هو y.

إذا افترضْتُ أنَّ هذه الماشية تستهلك كل ما يُقدَّم لها من النوعين يوميًّا، فإنَّ التكلفة C هي:

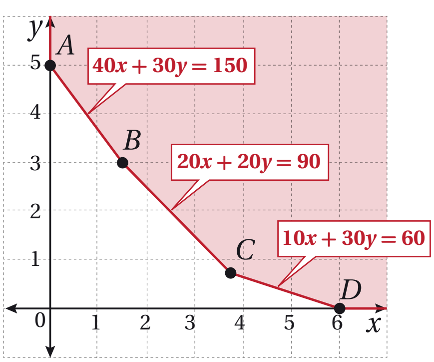
$$T = 10x + 12y$$

المطلوب أنْ تكون التكلفة أقل ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$40x + 30y \geq 150 \ , \ 20x + 20y \geq 90 \ , \ 10x + 30y \geq 60 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

الخطوة 2: أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظـام المتباينات الخطِّية، ثمَّ أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.

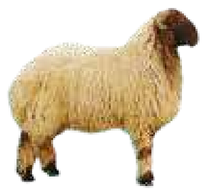


الخطوة 3: أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحـدِّد إحداثيي كلٍّ مـن النقـاط: A, B, C, D، ثـمَّ أجـد قيمـة التكلفـة T عنـد كلٍّ منهـا كمـا فـي الجـدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$T = 10x + 12y$
$A(0, 5)$	$T = 10(0) + 12(5) = 60$
$B(1.5, 3)$	$T = 10(1.5) + 12(3) = 51$
$C(3.75, 0.75)$	$T = 10(3.75) + 12(0.75) = 46.5$
$D(6, 0)$	$T = 10(6) + 12(0) = 60$

معلومة



يعتمد تسـمين الماشية على تغذيتها بخليط مُعَدٍّ بنسـب مُحدَّدة مـن الحبوب (مثل: الذرة الصفراء، والشـعير)، والتبن، وقشور الفول، وملح الطعام، والفيتامينات.

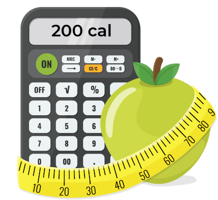
أتعلَّم

مـن غيـر المنطقـي في المسـائل الحياتية، مثل المثـال 3، البحـث عن أكبر قيمة لاقتران الهدف. ففي هذا المثال، لا يُمكِن إيجاد أكبر قيمـة مُمكِنة لاقتران الهدف؛ لأنَّه غير محدود.

الخطوة 4: أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ من الجدول أنَّ أقل تكلفة مُمكِنة هي JD 46.5، وأنَّ الماشـية تسـتهلك وقتئذٍ 3.75 أكيـاس من العلـف 1، و0.75 كيس مـن العلف 2، لتوفيـر الحدِّ الأدنى الـذي يَلزمها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

معلومة



أفادت بعض الدراسـات أنَّ جسـم الإنسـان يحتاج إلى نحـو 2000 سـعرة حرارية يوميًّـا، وأنَّ ذلك يختلف من شـخص إلى آخر تبعًا لعمر الشـخص، وكتلتـه، ونوع الأنشـطة والتماريـن التـي يمارسها.

أتحقَّق من فهمي

حمية غذائية: يشـترط نظـام للحمية الغذائية توافر ما لا يقلُّ عن **300** سعرة حراريـة، و**36** وحدة مـن فيتامين A، و**90** وحـدة مـن فيتاميـن C، ضمن الجزء السـائل من الوجبـة الغذائية.

	النوع 2	النوع 1
سعر العلبة الواحدة	JD 0.3	JD 0.25
عدد السعرات الحرارية	60	60
عدد وحدات فيتامين A	6	12
عدد وحدات فيتامين C	30	10

ويُبيِّن الجدول المجاور تكلفة العلبة الواحدة من نوعين مختلفين من الألبان، وعدد السـعرات الحراريـة، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويهـا العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يُمكِن أنْ يستهلكها يوميًّا شخص يتَّبِع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية مُمكِنة؟

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P = 4x + 3y$
$x + 2y \leq 4$
$x - y \leq 1$
$x \geq 0 , y \geq 0$

2) $R = 10x + 7y$
$0 \leq x \leq 60$
$0 \leq y \leq 60$
$5x + 6y \leq 420$

3) $Z = 1.5x + y$
$x + 3y \leq 15$
$4x + y \leq 16$
$x \geq 0 , y \geq 0$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

4) $Q = 4x + 5y$
$x + y \geq 8$
$3x + 5y \geq 30$
$x \geq 0 , y \geq 0$

5) $C = 8x + 4y$
$x + 2y \geq 4$
$3x + y \geq 7$
$2y - x \geq 7$
$x \geq 0 , y \geq 0$

6) $K = 25x + 35y$
$8x + 9y \leq 7200$
$8x + 9y \geq 3600$
$x \geq 0 , y \geq 0$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

زراعة: يُباع في محل للوازم الزراعية نوعان من الأسمدة هما A, B، ويُبيّن الجدول المجاور مكوّنات الكيلوغرام الواحد من هذين السمادين:

النوع	أمونيا (وحدة)	نيترات (وحدة)	فوسفات (وحدة)
A	3	3	6
B	10	4	4

يُريد مزارع أن يكوّن مزيجًا من السمادين يحتوي على 36 وحدة على الأقلّ فوسفات، و24 وحدة على الأقلّ نيترات، و30 وحدة على الأقلّ أمونيا.

7) إذا كان ثمن الكيلوجرام من النوع A دينارًا واحدًا، ومن النوع B JD 1.5، فأكتبُ اقتران التكلفة ونظام متباينات يصف هذا الموقف.

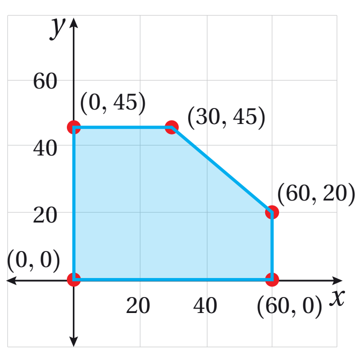
8) أُمثّل منطقة حلّ نظام المتباينات، وأجد إحداثيات رؤوسها.

9) أجد عدد الكيلوغرامات التي يشتريها من كل نوع؛ ليُحقّق غايته بأقلّ تكلفة.

10) **دعاية**: أراد صلاح طباعة كُتيِّبات ونشرات دعائية لتسويق مُنتَجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكُتيِّب الواحد 3 صفحات، وتحوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكُتيِّب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرَّر صلاح أنَّه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة، مُمثَّلةً في 50 كُتيِّبًا على الأقل، و150 نشرة على الأقل. كم عدد الكُتيِّبات والنشرات التي يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يُمكِن؟

11) أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا



12) **تبرير**: أجد أكبر قيمة مُمكِنة لاقتران الهدف: $P = 5x + 6y$ ضمن منطقة الحلول المُمكِنة التي يُمثِّلها الشكل المجاور، وأُبرِّر إجابتي، ثمَّ أجد نقاطًا أُخرى ضمن منطقة الحلِّ يتحقَّق عندها أكبر قيمة لاقتران الهدف، وأُبرِّر إجابتي.

13) **تحدٍّ**: أجد اقتران هدف صورته: $G = ax + by$، حيث a, b عددان حقيقيان موجبان، وله أكبر قيمة عند النقطة $(2, 3)$، وهي 18، ضمن القيود المجاورة:

$$x + 2y \leq 8$$
$$x + y \leq 5$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

إرشاد: يوجد أكثر من إجابة.

14) **تحدٍّ**: أجد مجموعة قِيَم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي تجعل لاقتران الهدف: $D = 3x + ny$ أكبر قيمة مُمكِنة عند النقطة $(3, 4)$، ضمن القيود المجاورة:

$$x + 3y \leq 15$$
$$4x + y \leq 16$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 الزوج الذي يُمثِّل حلًّا لنظام المتباينات الآتي هو:

$$y + 5x < 7$$
$$2x - y \geq -3$$

a) $(3, 2)$ b) $(0, 0)$

c) $(-4, -2)$ d) $(2, 8)$

2 إذا كان لنظام متباينات خطِّية منطقة حلٍّ محدودة، رؤوسها هي: $P(0, 2), Q(2, 3), R(4, 2), S(3, 0)$، فإنَّ القيمة العظمى لاقتران الهدف: $T = 2x + y$ تتحدَّد عند الرأس:

a) P b) Q

c) R d) S

3 نظام المتباينات الذي ليس له حلٌّ هو:

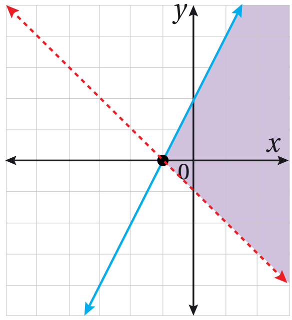
a) $3x + 5y \geq 15$, $2x + 3y \geq 6$

b) $x + 2y \geq 2$, $2x + 4y \leq 0$

c) $4x + 3y \geq 6$, $4x + 3y \leq 10$

d) $x + y \geq 6$, $x + y \geq 3$

4 نظام المتباينات الذي له التمثيل البياني الآتي هو:



a) $y \leq 2x + 2$, $y > -x - 1$

b) $y \geq 2x + 2$, $y < -x - 1$

c) $y < 2x + 2$, $y \leq -x - 1$

d) $y > 2x + 2$, $y \leq -x - 1$

أَحُلُّ كل نظام متباينات خطِّية ممّا يأتي:

5 $x - 8y \leq 9$
$4x + 7y > 3$

6 $12x + 10y > 1$
$-5x - 8y < 2$
$3x + y \geq -6$

7 أجد جميع الحلول المُمكِنة لنظام المتباينات الآتي، حيث m و n عددان صحيحان موجبان:

$$m + n > 4$$
$$3m + 7n \leq 21$$

8 أجد أكبر قيمة للاقتران: $P = 4x + y$ ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 50$$
$$3\,x + y \leq 90$$
$$x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0$$

9 أجد أصغر قيمة للاقتران: $C = 200x + 500y$ ضمن القيود الآتية:

$$x + 2\,y \geq 10$$
$$3\,x + 4\,y \leq 24$$
$$x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0$$

طرود خيرية: يريد تاجر مواد تموينية تشغيل عدد من العُمّال يومًا واحدًا لتجهيز طرود تُباع في شهر رمضان. حدَّد التاجر أجرة العامل الماهر في هذا اليوم بـ JD 30، وأجرة العامل المُبتدِئ بـ JD 20، لكنَّه لا يريد أنْ يُنفِق أكثر من JD 630 على تجهيز الطرود. استطاع التاجر إيجاد 15 عاملًا ماهرًا فقط؛ لذا قرَّر أنْ يُشغِّل عاملًا ماهرًا واحدًا على الأقل مُقابِل كل 3 عُمّال مُبتدِئين، علمًا بأنَّ العامل الماهر يُجهِّز 25 طردًا في الساعة، والعامل المُبتدِئ يُجهِّز 18 طردًا في الساعة:

10 أكتب نظام متباينات يُمثِّل هذه المعلومات، ثمَّ أُمثِّله

11 أجد عدد العُمّال المَهَرة والعُمّال المُبتدِئين الذين يجب تشغيلهم لتجهيز أكبر عدد مُمكِن من الطرود.

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المُتدرِّبات x، وعدد الطلاب المُتدرِّبين y، ولا يقلُّ العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقلُّ عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

12 أشرح بالكلمات معنى: $2y \geq x$.

13 إذا كان عدد الطالبات المُتدرِّبات 6، فما العدد المُمكِن للطلاب المُتدرِّبين؟

14 يُنتِج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآلتين A و B معًا. ويُبيِّن الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلٍّ من الآلتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كل نوع يجب أنْ يُنتِج المصنع يوميًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

	القطعة من النوع الأوَّل	القطعة من النوع الثاني
زمن المعالجة في الآلة A	2 h	1 h
زمن المعالجة في الآلة B	1 h	1 h
مقدار الربح	JD 10	JD 15