الرياضيات

الصف العاشر

دليل المعلم

الوحدة الثانية

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	خطوات تنفيذ مشروع الوحدة	عدد الحصص
تهيئة الوحدة			• كتاب التمارين		1
الدرس 1: أوتار الدائرة وأقطارها ومماساتها.	• يتعرف الوتر، والقطر، والمماس، والقاطع في الدائرة. • يتعرف العلاقات بين الوتر والقطر والمماس والنظريات المرتبطة بها، وتوظيفها لإيجاد أطوال زوايا مجهولة وقياساتها. • يبرهن صحة علاقات باستعمال خصاص الأوتار والأقطار والمماسات.	الدائرة، مركز الدائرة، نصف القطر، القطر، الوتر، القاطع، المماس، نقطة التماس.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	الخطوة الأولى.	3
الدرس 2: الأقواس والقطاعات الدائرية.	• يحسب طول قوس من دائرة. • يحسب مساحة القطاع الدائري. • يحل مسائل تتضمن طول القوس ومساحة القطاع الدائري.	القوس، القطاع الدائري.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	متابعة الخطوة الأولى، والبدء بتنفيذ الخطوة الثانية.	3
الدرس 3: الزوايا في الدائرة.	• يتعرف الزاوية المركزية والزاوية المحيطية والعلاقة بينهما. • يتعرف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية المشتركة في القوس نفسه. • يتعرف الشكل الرباعي الدائري وخصائصه. • يتعرف الزاوية المماسية وعلاقتها بالزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه. • يوظف هذه العلاقات لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في الدائرة.	الزاوية المركزية، الزاوية المحيطية، الزاوية المقابلة لقطر الدائرة، الزاوية المماسية، القوس المقابل، الشكل الرباعي الدائري.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • ورقة المصادر (1).	متابعة الخطوة الثانية، والبدء بتنفيذ الخطوة الثالثة.	3
الدرس 4: معادلة الدائرة.	• يتعرف الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة الدائرة. • يكتب معادلة دائرة إذا عُلم مركزها وطول نصف قطرها. • يجد إحداثيي المركز وطول نصف القطر من معادلة الدائرة. • تحديد إن كان مستقيم معطى يشكل مماسًّا أم لا لدائرة أعطيت معادلتها. • يجد طول القطعة المماسية من نقطة خارجية إلى نقطة التماس على دائرة علمت معادلتها.	معادلة الدائرة، الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، الصورة العامة لمعادلة الدائرة.	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	متابعة الخطوة الثالثة، والبدء بتنفيذ الخطوة الرابعة.	3
استكشاف الدوائر المتماسة.	• يتعرف أوضاع دائرتين مرسومتين في مستوى واحد. • يستكشف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القطرين لدائرتين متماستين من الداخل أو من الخارج.		• برمجية جيوجبرا. • ورقة المصادر (2).	بدء الاستعداد لعرض النتائج.	1
الدرس 5: الدوائر المتماسة.	• يصف أوضاع دائرتين في المستوى. • يحسب طول المماس المشترك الداخلي والخارجي. • يوظف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القطرين لدائرتين، وطول المماس المشترك لإيجاد أطوال مجهولة.	الدوائر المتماسة، المماس المشترك الداخلي، المماس المشترك الخارجي	• جهاز الحاسوب.	استكمال التحضير لعرض النتائج.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز الحاسوب.		1
اختبار الوحدة					2
مجموع الحصص					20

الوحدةُ 2

نظرة عامة على الوحدة:

تعلـم الطلبة فيما سـبق الدائرة، ورسـمها، وخصائصها، وحســاب محيطهــا ومســاحتها، وســيتعلمون في هذه الوحدة مماســات الدائرة، والعلاقات المختلفة بين أقطار الدائرة وأوتارها ومماساتها، ويتعرفون الزوايا في الدائرة، وخصائص المضلـع الرباعي الدائــري، وطول القوس، ومســاحة القطاع الدائري، والصورتين القياســية والعامة لمعادلــة الدائــرة، ويكتبــون معادلة الدائــرة إذا توافرت معلومات كافية، ويميزون الدوائــر المتقاطعة والمتباعدة والمتماسة من الداخل والمتماسة من الخارج، ويحسبون طول المماس المشترك.


الوحدةُ 2

الدائرةُ

Circle

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ الدائرةُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ ظهورًا على سطحِ الأرضِ، بلْ في جميعِ الكونِ. فهيَ تظهرُ جليًّا في صـورِ الكواكبِ، وفي بؤبؤِ العينِ، وفي الفاكهةِ، وجذوعِ الأشجارِ، وغيرِ ذلكَ منَ المخلوقاتِ. وقدِ اسـتفادَ الإنسـانُ منَ الخصائـصِ الفريدةِ لهذا الشـكلِ المُعقَّدِ في مجالاتٍ عِدَّةٍ، مثلِ: الهندسةِ، والصناعةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ محيطِ الدائرةِ، ومساحتِها.
- ✓ تمييزَ حالاتِ تطابُقِ المثلثاتِ، وتشابُهِها.
- ✓ إيجـادَ مجموعِ قيـاسِ زوايا كلٍّ مـنَ المثلثِ، والشكلِ الرباعيِّ.
- ✓ إيجـادَ المسـافةِ بيـنَ نقطتيْنِ في المسـتوى الإحداثيِّ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ حسابَ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.
- ◄ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائـرةِ، والإفادةَ منْها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ.
- ◄ كتابةَ معادلةِ الدائرةِ، وإيجـادَ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.
- ◄ العلاقةَ بينْ دائرتيْنِ، وماهيةَ المماسّاتِ المشتركةِ.

36

التـرابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- إيجاد البُعْد بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

الصف الثامن

- تعرف نظريات المثلث المتطابق الضلعين.
- استخدام البرهان الهندسي في تشابه الأشكال الهندسية وتطابقها.
- تمييز حالات تشابه المثلثات وتطابقها.

الصف السابع

- تعرف عناصر الدائرة وحساب محيطها ومساحتها.

الصف العاشر

- تعرف خصائص الأوتار والأقطار والمماسات في الدائرة.
- حساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري.
- تعرف العلاقات بين الزوايا في الدائرة وتوظيفها لإيجاد قياسات زوايا مجهولة.
- تعرف خصائص المضلع الرباعي الدائري.
- إيجاد معادلة الدائرة بصورها المختلفة.
- تعرف الأوضاع المختلفة لدائرتين في مستوى واحد.
- استنتاج العلاقات الخاصة بالمسافة بين مركزي دائرتين متماستين.
- حساب طول المماس المشترك الداخلي أو الخارجي لدائرتين في مستوى واحد.

مشروعُ الوحدةِ

استعمالاتٌ علميةٌ لخصائصِ الدائرةِ

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنِ استعمالاتٍ علميةٍ لخصائصِ الدائرةِ، ووصفِها، ونمذجتِها.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في مكتبةِ المدرسةِ (أوْ في شبكةِ الإنترنتْ) عنْ نموذجٍ علميٍّ أوْ حياتيٍّ تُستعمَلُ فيهِ إحدى الخصائصِ الآتيةِ للدائرةِ:
- العلاقةُ بينَ الزوايا المركزيةِ والزوايا المحيطيةِ.
- العلاقةُ بينَ الزاويةِ المماسِّيةِ والزاويةِ المحيطيةِ المُشترِكةِ معَها في القوسِ نفسِهِ.
- الدوائرُ المُتماسَّةُ.
- معادلةُ الدائرةِ.

2 أكتبُ في مستندِ معالجِ النصوصِ (وورد) فقرةً أَصِفُ فيها النموذجَ الحياتيَّ أوِ العلميَّ الذي اخترتُهُ، مُحدِّدًا خصائصَ الدائرةِ الموجودةِ في هذا النموذجِ، ثمَّ أُفسِّرُها.

3 أُضيفُ إلى المستندِ صورًا توضيحيةً للنموذجِ، ذاكرًا مصدرَ المعلوماتِ والصورِ.

4 أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا الرسمِ شكلٍ يُوضِّحُ استعمالَ الخاصيةِ في النموذجِ، وأضعُ عليهِ قياساتِ الزوايا وأطوالَ الأضلاعِ جميعَها. وهذهِ بعضُ الإرشاداتِ التي قدْ تُساعِدُ على رسمِ الشكلِ التوضيحيِّ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:
- لرسمِ دائرةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Circle with Center through Point منْ شريطِ الأدواتِ.
- لإيجادِ قياسِ زاويةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Angle، ثمَّ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ، وضلعِ انتهائِها.
- لإيجادِ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Distance or Length، ثمَّ على القطعةِ المستقيمةِ.
- لرسمِ مماسٍّ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، أُحدِّدُ أولًا النقطةَ بالنقرِ على أيقونةِ Point، ثمَّ أيقونةِ Tangents.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:
- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، بما في ذلكَ صورةُ الشكلِ الذي رُسِمَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
- معلومةٌ جديدةٌ تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومُقترَحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

37

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار تطبيق علمي أو عملي مناسب لخصائص الدائرة.			
2	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا بفاعلية في المشروع.			
3	التحقُّق من صحة النموذج والصور والرسومات التوضيحية، ودقة الحسابات الخاصة بها واكتمالها.			
4	التقرير المكتوب كامل ومنظم			
5	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
6	عرض معلومة جديدة تعلمتها المجموعة في أثناء بحثها وعملها في المشروع.			
7	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:
استعمالات علمية لخصائص الدائرة.

هدف المشـروع: يهدف مشـروع الوحدة إلى تنمية معرفة الطلبة بخصائص الدائرة، والبحث عن نماذج علمية أو تطبيقات حياتية تستعمل فيه إحدى هذه الخصائص أو أكثر، فضلًا عن تنمية مهارات البحث في مصادر المعرفة المتوافرة، والمهارات الشخصية، مثل: التواصل، وحل المشكلات.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشـروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات (ثلاثية، أو رباعية) غير متجانسة، ثم اطلب إليهم أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشـروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشـروع أولًا بأول، وتعزيزه بالصور المناسبة للموضوع.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد مشروع المجموعة، وكتابة تقرير مفصل عن عملهم، وكيف أسهم كلٌّ منهم في إنجاز المشـروع، وبيان الصور والرسومات التوضيحية الكاملة، وإعداد عرض تقديمي (Power Point) للمشروع.
- بيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشـروع، واعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أي استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- ذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشـروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

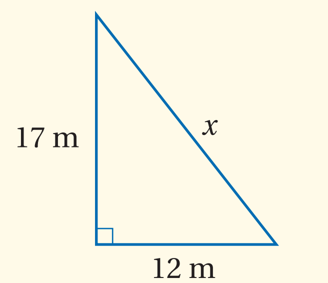
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشـروع، وإعداد عرض تقديمي، يحوي صـورًا لمراحل التنفيذ. - وضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشـروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة تضمين العرض تقريرًا يشمل وصفًا للنموذج العلمي أو الحياتي، وتحديد خصائص الدائرة الموجودة في النموذج باستعمال برنامج معالج النصوص (word)، وبيان كيفية تطويره، وتوثيق مصادر الصور التي جمعوها؛ لتعزيز مهاراتهم المعلوماتية، وتدريبهم على أهمية توثيق المصادر.

التقويم القبلي (التشخيصي):

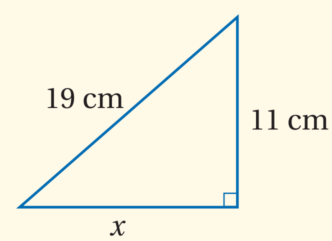
- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين لتساعد طلبتك على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة في عمود (أختبر معلوماتي)، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له في عمود (المراجعة).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فاستعن بالمسائل الإضافية الآتية:

1. أجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال المجاورة مُقرَّبةً إلى منزلة عشرية واحدة.

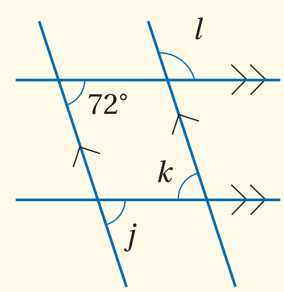
a)



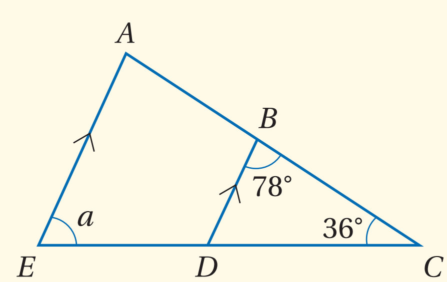
b)

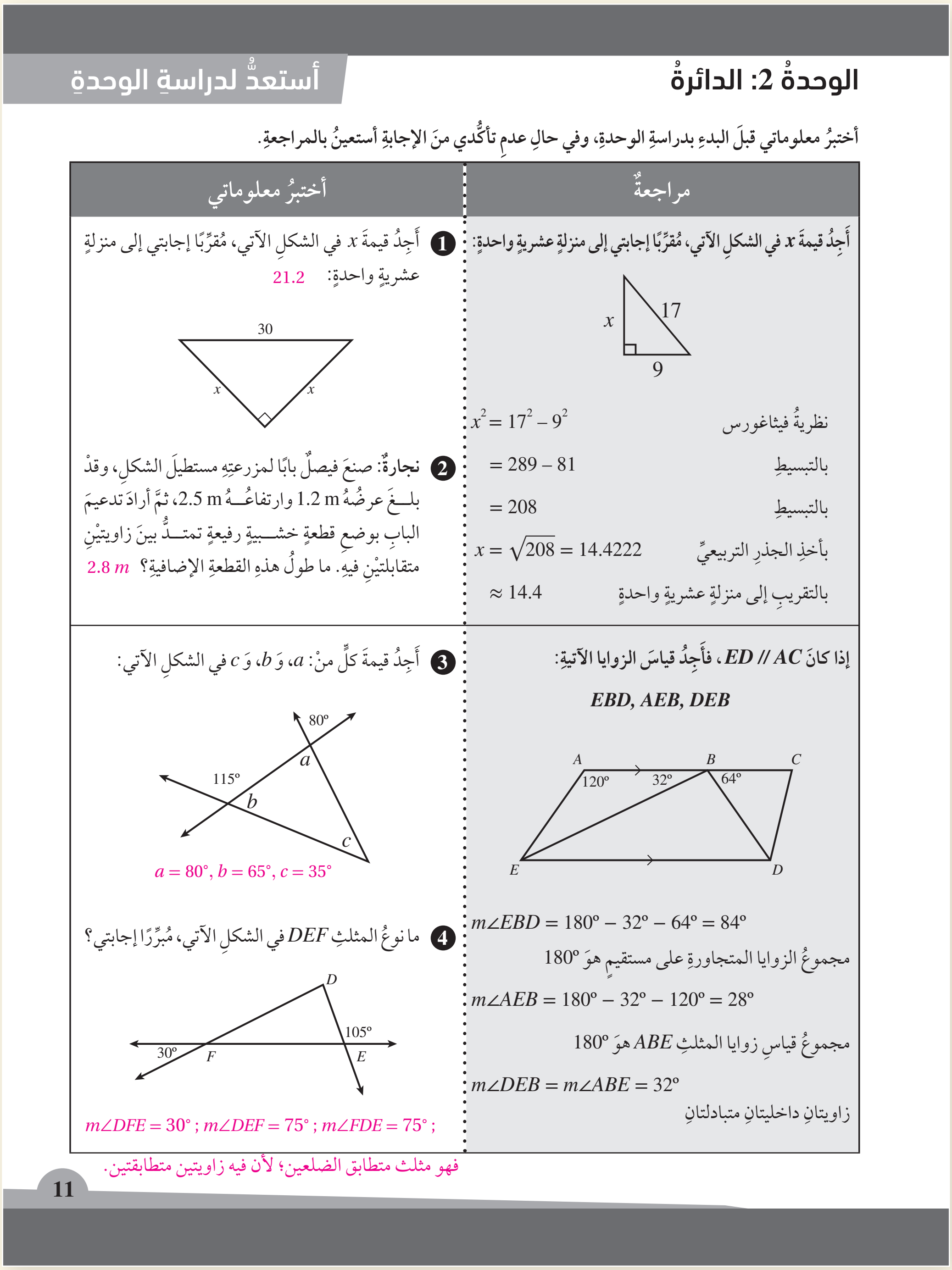


2. أجد قيمة كلٍّ من j، و k، و l في الشكل المجاور.



3. أجد قياس الزاوية AED في الشكل المجاور.





الوحدةُ 2: الدائرةُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

مراجعةٌ	أختبرُ معلوماتي
أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ الآتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ: (17، 9، x) نظريةُ فيثاغورس $x^2 = 17^2 - 9^2$ بالتبسيطِ $= 289 - 81$ بالتبسيطِ $= 208$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ $x = \sqrt{208} = 14.4222$ بالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ ≈ 14.4	1. أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ الآتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ: 21.2 (30، x، x) 2. **نجارةٌ**: صنعَ فيصلٌ بابًا لمزرعتِهِ مستطيلَ الشكلِ، وقدْ بلغَ عرضُهُ 1.2 m وارتفاعُهُ 2.5 m، ثمَّ أرادَ تدعيمَ البابِ بوضعِ قطعةٍ خشبيةٍ رفيعةٍ تمتدُّ بينَ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ. ما طولُ هذهِ القطعةِ الإضافيةِ؟ 2.8 m
إذا كانَ $ED \parallel AC$، فأَجِدُ قياسَ الزوايا الآتيةِ: ***EBD, AEB, DEB*** (A، B، C، E، D، 120°، 32°، 64°) $m\angle EBD = 180° - 32° - 64° = 84°$ مجموعُ الزوايا المتجاورةِ على مستقيمٍ هوَ 180° $m\angle AEB = 180° - 32° - 120° = 28°$ مجموعُ قياسِ زوايا المثلثِ ABE هوَ 180° $m\angle DEB = m\angle ABE = 32°$ زاويتانِ داخليتانِ متبادلتانِ	3. أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a، وَ b، وَ c في الشكلِ الآتي: (80°، 115°، a، b، c) $a = 80°, b = 65°, c = 35°$ 4. ما نوعُ المثلثِ DEF في الشكلِ الآتي، مُبرِّرًا إجابتي؟ (D، F، E، 30°، 105°) $m\angle DFE = 30°$; $m\angle DEF = 75°$; $m\angle FDE = 75°$; فهو مثلث متطابق الضلعين؛ لأن فيه زاويتين متطابقتين.

11

إجابات المسائل الإضافية:

1) a. 20.8 b. 15.5

2) $j = 72°, \ k = 72°, \ l = 108°$

3) $m\angle AED = 66°$

الدرس 1

الدرس 1

أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها
Chords, Diameters and Tangents of a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الوتـرِ، والقُطْرِ، والممـاسِّ، وخصائصِ كلٍّ منْهـا، والعلاقاتِ التي تربـطُ بعضَها ببعضٍ، وتوظيفُ ذلكَ في إيجادِ أطوالِ وقياساتِ زوايا مجهولةٍ.

المصطلحاتُ الدائرةُ، المركزُ، الوترُ، القوسُ، القُطْرُ، نصفُ القُطْرِ، المماسُّ، نقطةُ التَّماسِّ، القاطعُ.

مسألةُ اليومِ في حديقةِ منـزلِ عبيرَ طاولـةٌ دائريةٌ، وهيَ تريدُ عمـلَ فتحةٍ عندَ مركزِها لتثبيـتِ عمودٍ يحمل مِظلَّةٍ بها. كيـفَ يُمكِنُ لعبيرَ تحديدُ مركزِ الطاولةِ؟

الدائرةُ (circle) هيَ المحلُّ الهندسيُّ لنقطةٍ تتحرَّكُ في المستوى، بحيثُ تظلُّ على البُعْدِ نفسِهِ عنْ نقطةٍ مُحدَّدةٍ تُسـمّى **مركزَ الدائرةِ** (center). أمّا **الوترُ** (chord) فهوَ قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بينَ نقطتيْنِ على الدائرةِ، ويُسـمّى الوترُ الذي يمرُّ بمركزِ الدائـرةِ **القُطْرَ** (diameter). ويُطلَقُ على القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ مركزَ الدائرةِ بنقطةٍ عليْها اسمُ **نصفِ القُطْرِ** (radius).

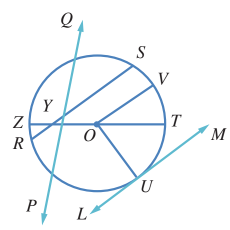
القاطعُ (secant) هوَ مسـتقيمٌ يقطعُ الدائرةَ في نقطتيْنِ، ويحوي وترًا فيها. أمّا المستقيمُ الذي يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ فيُسـمّى **المماسَّ** (tangent). ويُطلَقُ على نقطةِ التقاءِ المماسِّ بالدائرةِ اسمُ **نقطةِ التَّماسِّ** (point of tangency).

رموزٌ رياضيةٌ

- ترمزُ $\overleftrightarrow{LM}$ إلى المسـتقيمِ LM.
- ترمـزُ LM إلـى طـولِ القطعةِ المسـتقيمةِ. أمّا $\overline{LM}$ فترمزُ إلـى القطعةِ المستقيمةِ نفسِها.

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



1 **مماسًّا للدائرةِ.**

$\overleftrightarrow{LM}$

2 **أربعةَ أنصافِ أقطارٍ.**

$\overline{OV}$, $\overline{OT}$, $\overline{OZ}$, $\overline{OU}$

نتاجات الدرس

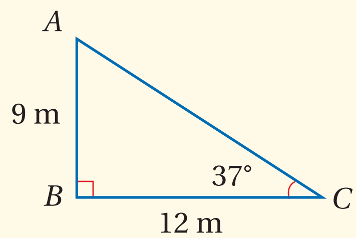
- يتعرف الوتر، والقطر، والمماس، والقاطع في الدائرة.
- يحـدد العلاقـات التـي تربـط الأقطـار والأوتار والمماسات في الدائرة.
- يوظف العلاقات بين الأقطار والأوتار والمماسـات في إيجـاد قياسـات زوايا وأطـوال مجهولة، وحل مسائل حياتية.

التعلم القبلي:

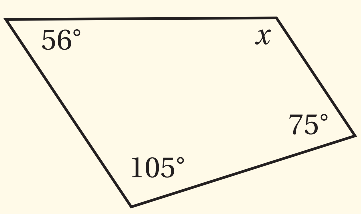
- نظرية فيثاغورس.
- مجموع قياسـات زوايا المثلث، ومجموع قياسـات زوايا الشكل الرباعي.
- خصائص كلٍّ مـن: المثلـث المتطابـق الضلعين، والمثلث المتطابق الأضلاع.
- شروط تطابق مثلثين.

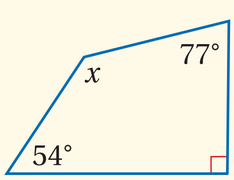
1 التهيئة

- ارسـم المثلث ABC المجاور على اللوح، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد AC، وقياس الزاوية A.

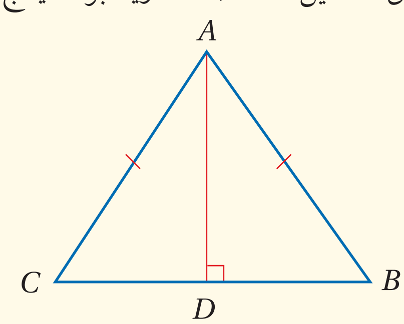


- ارسم الشكلين الرباعيين الآتيين، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد الزوايا المجهولة فيهما.





- ارسـم مثلثًا متطابق الضلعين، ثم ارسم العمود $\overline{AD}$، واطلب إلى الطلبة أن يبينوا سبب تطابق المثلثين ADC, ADB ويكتبوا ما ينتج من هذا التطابق.



2 الاستكشاف

- اطلب إلى الطلبة قراءة (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما مركز الدائرة؟ نقطة داخل الدائرة تبعد المسافة نفسها عن نقاط الدائرة جميعها.
  - » ماذا تسمى المسافة بين المركز وأي نقطة على الدائرة؟ تسمى طول نصف قطر الدائرة.
  - » ماذا تسمى القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين على الدائرة؟ تسمى وترًا للدائرة.
  - » إذا رسمت نصفي القطرين المارين بطرفي الوتر، فما نوع المثلث الناتج؟ متطابق الضلعين.
  - » إذا رسمت عمودًا من مركز الدائرة إلى وتر في الدائرة، فما العلاقة بين المثلثين الناتجين؟ متطابقان.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

3 التدريس

- ذكِّر الطلبة بعناصر الدائرة (المركز، القطر، نصف القطر، الوتر).
- عرِّف القاطع، ومماس الدائرة.
- ارسم شكلًا، ثم اطلب إلى الطلبة أن يُسمّوا المركز، وقطرًا، ونصف قطر، ووترًا في الدائرة.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال، مُبيِّنًا لهم عناصر الدائرة على الرسم، ثم اطلب إليهم ذكر أكثر من مثال على عناصر الدائرة، مثل: الوتر، ونصف القطر، والوتر، والمماس (إن أمكن)، مُؤكِّدًا – عن طريق المناقشة– أن الرسم يحوي قطرًا واحدًا، ومماسًّا واحدًا فقط.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

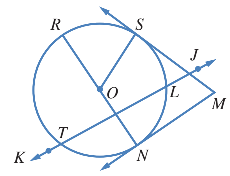
ملاحظات المعلم

3 قُطْرًا للدائرةِ.
$\overline{ZT}$

4 وترًا للدائرةِ.
$\overline{SR}$, $\overline{ZT}$

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



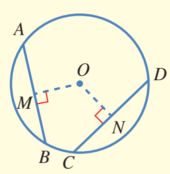
a) قاطعًا للدائرةِ. $\overleftrightarrow{JK}$

b) وترًا للدائرةِ. $\overline{LT}$; $\overline{RN}$

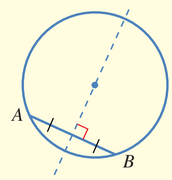
c) مماسًّا للدائرةِ. $\overline{MN}$; $\overline{MS}$

نظرياتٌ

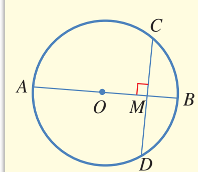
1 الوترانِ المُتطابِقانِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ. والوترانِ اللذانِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ مُتطابِقانِ.
مثالٌ: بما أنَّ $CD = AB$، فإنَّ $OM = ON$.
وإذا كانَ $OM = ON$، فإنَّ $AB = CD$.



2 المُنصِّفُ العموديُّ لأيِّ وترٍ في الدائرةِ يمرُّ بمركزِها.
مثالٌ: في الشكلِ المجاورِ، يقعُ مركزُ الدائرةِ على الخطِّ المُتقطِّعِ.



3 القُطْرُ (أوْ نصفُ القُطْرِ) العموديُّ على وترٍ في دائرةٍ يُنصِّفُ ذلكَ الوترَ.
مثالٌ: بما أنَّ $\overline{AB} \perp \overline{CD}$، فإنَّ $MC = MD$. وإذا مرَّ القُطْرُ بمنتصفِ وترٍ فإنَّهُ يعامدُهُ.



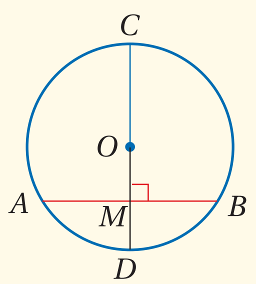
رموزٌ رياضيةٌ
يدلُّ الرمزُ $\perp$ على تعامُدِ قطعتَيْنِ، أوْ مستقيمَيْنِ.

39

إرشادات للمعلم

- ذكِّر كل طالب بضرورة إحضار منقلة ومسطرة وفرجار لرسم الأشكال وقياس الزوايا والأطوال.

- اطلب إلى الطلبة رسم دائرة ووتر فيها، ثم رسم المنصف العمودي لهذا الوتر باستعمال المسطرة والفرجار، وملاحظة دلالة هذا المنصف للدائرة.
- ارسم دائرة مركزها O، وارسم الوتر $\overline{AB}$ فيها، وارسم القطر $\overline{CD}$ الذي يعامد $\overline{AB}$ في النقطة M، ثم اطلب إلى الطلبة تخيل أن نهايتي الوتر $\overline{AB}$ تتحركان على الدائرة من دون تغيير طول $\overline{AB}$، وأن القطر $\overline{CD}$ يتحرك أيضًا بحيث يظل متعامدًا مع الوتر $\overline{AB}$، ثم اسألهم:
  » هل تتغير المسافة بين مركز الدائرة والوتر؟ لا.
  » ماذا تمثل النقطة M بالنسبة إلى الوتر؟ نقطة منتصفه.



- قدِّم النظريات الثلاث في الصفحة 39، ثم ناقِشها مع الطلبة.

إرشاد: وجِّه الطلبة إلى إمكانية استعمال البيكار (الفرجار المدبب الطرفين) لمقارنة أطوال الأضلاع.

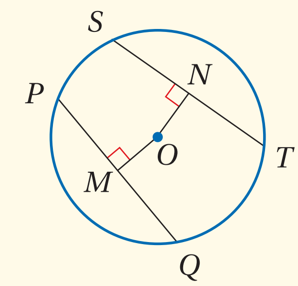
منهاجي
متعة التعليم الهادف

مثال 2

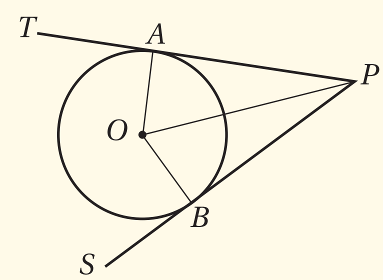
- ناقِش الطلبة في حل المثال، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال نظريــة الأوتار المتطابقة لإيجاد أطــوال مجهولة في الدائرة.

مثال إضافي

إذا كان $OM = ON$ فـي الشـكل المجــاور، وكان $ST = 3x - 4$، و $PQ = x + 6$، فأجد SN. 5.5

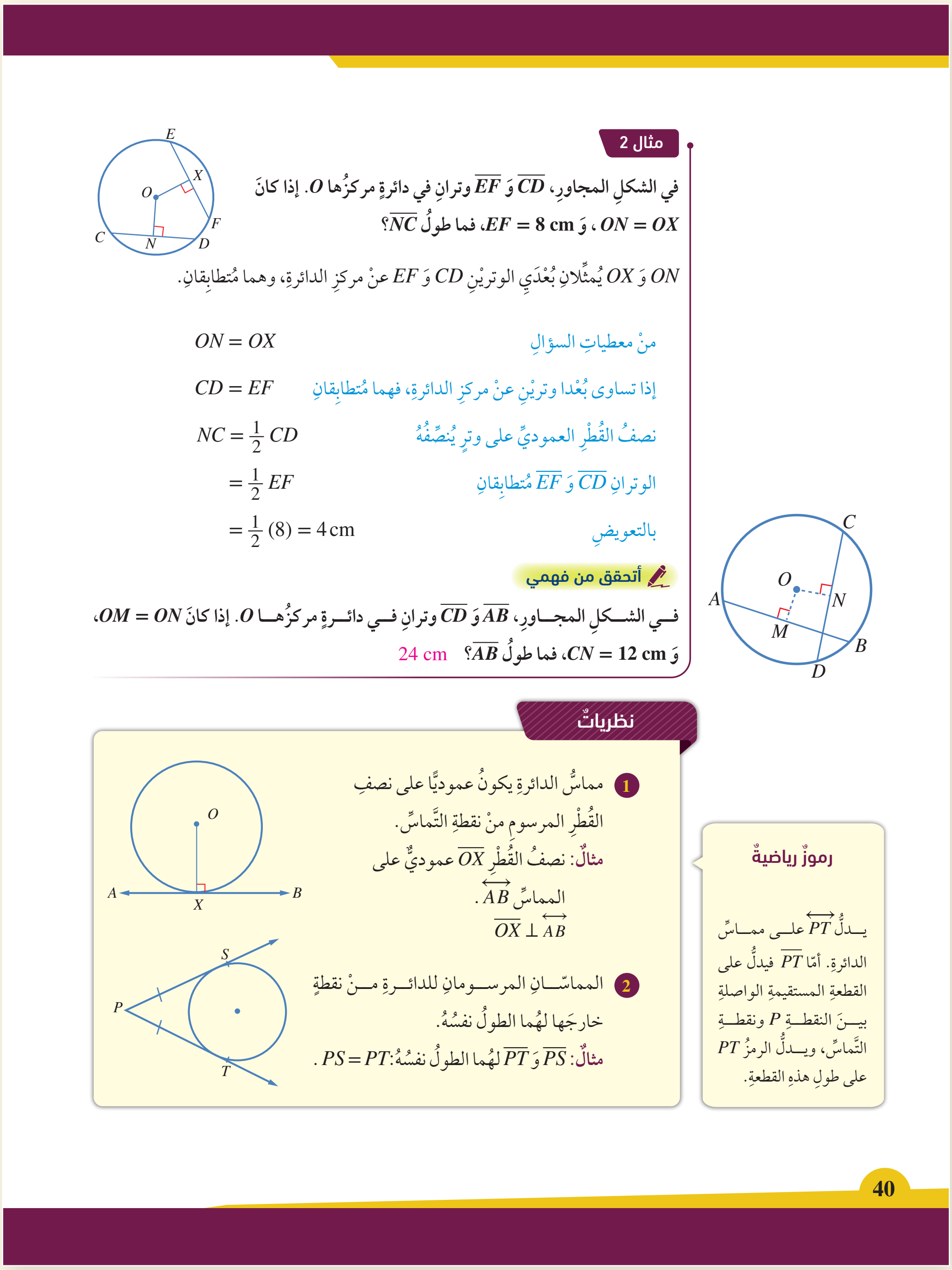


- اطلب إلى الطلبة رسـم دائرة، ومماسين لها من نقطة خارجها، ثم رسـم نصفي القطريـن المارين بنقطتي التماس، ثم وصـل مركز الدائرة بالنقطة التي رُسِـم منها المماسـان كما في الشـكل المجاور، ثم قياس الزاويتين OAP، و OBP، وقياس طولي $\overline{BP}$، و $\overline{AP}$، ثم تدوين ملاحظاتهم.



- قدِّم النظريتين في الصفحة 40، ثم ناقِشهما مع الطلبة.

إرشـاد: الفت انتباه الطلبة إلـى أنَّه يمكنهم اسـتعمال حافة المسـطرة، أو حافة المثلث القائم من أدوات الهندسـة أو حافة الدفتـر لتحديد إذا كان المماس عموديًّا على نصف القطر أم لا.



مثال 2

في الشكلِ المجاورِ، $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $ON = OX$ ، وَ $EF = 8$ cm، فما طولُ $\overline{NC}$؟

ON وَ OX يُمثِّلانِ بُعْدَي الوترَيْنِ CD وَ EF عنْ مركزِ الدائرةِ، وهما مُتطابِقانِ.

$ON = OX$ منْ معطياتِ السؤالِ

$CD = EF$ إذا تساوى بُعْدا وترَيْنِ عنْ مركزِ الدائرةِ، فهما مُتطابِقانِ

$NC = \frac{1}{2} CD$ نصفُ القُطْرِ العموديِّ على وترٍ يُنصِّفُهُ

$= \frac{1}{2} EF$ الوترانِ $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ مُتطابِقانِ

$= \frac{1}{2}(8) = 4$ cm بالتعويضِ

أتحقق من فهمي

فــي الشــكلِ المجــاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ فــي دائــرةٍ مركزُهــا O. إذا كانَ $OM = ON$، وَ $CN = 12$ cm، فما طولُ $\overline{AB}$؟ 24 cm

نظرياتٌ

1 مماسُّ الدائرةِ يكونُ عموديًّا على نصفِ القُطْرِ المرسومِ منْ نقطةِ التَّماسِّ.

مثالٌ: نصفُ القُطْرِ $\overline{OX}$ عموديٌّ على المماسِّ $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overline{OX} \perp \overleftrightarrow{AB}$

2 المماسّانِ المرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها لهُما الطولُ نفسُهُ.

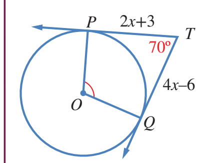
مثالٌ: $\overline{PS}$ وَ $\overline{PT}$ لهُما الطولُ نفسُهُ: $PS = PT$.

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ $\overleftrightarrow{PT}$ على مماسِّ الدائرةِ. أمّا $\overline{PT}$ فيدلُّ على القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطةِ P ونقطةِ التَّماسِّ، ويدلُّ الرمزُ PT على طولِ هذهِ القطعةِ.

40

مثال 3



جبْرٌ: في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{TP}$ وَ $\overleftrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

1 أَجدُ قيمةَ x.

مماسّانِ مرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها	$TP = TQ$
بالتعويضِ	$2x + 3 = 4x - 6$
بإضافةِ $2x - 6$ إلى الطرفيْنِ	$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$
بالتبسيطِ	$9 = 2x$
	$x = \frac{9}{2}$

2 أَجدُ قياسَ الزاويةِ POQ.

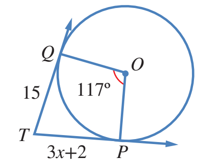
أفترضُ أنَّ قياسَ الزاويةِ POQ هوَ y:

مماسُّ الدائرةِ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ في نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle OQT = m\angle OPT = 90°$
مجموعُ قياسِ الزوايا الداخليةِ للشكلِ الرباعيِّ هو $360°$	$90° + 70° + 90° + y = 360°$
بالتبسيطِ	$250° + y = 360°$
بطرحِ $250°$ منَ الطرفيْنِ	$y = 360° - 250° = 110°$

رموزٌ رياضيةٌ

يرمزُ الحرفُ m في $m\angle OQT$ إلى قياسِ الزاويةِ OQT.

أتحقق من فهمي

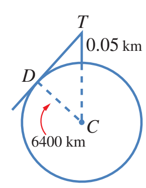


في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{TP}$ وَ $\overrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

a) أَجدُ قيمةَ x. 4.33

b) أَجدُ قياسَ الزاويةِ PTQ. 63°

مثال 4: من الحياة



أبراجٌ: يرتفعُ برجُ مراقبةٍ **50 m** عنْ مستوى الأرضِ.
ما أبعدُ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمّةِ البرجِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطْرِها **6400 km** تقريبًا؟

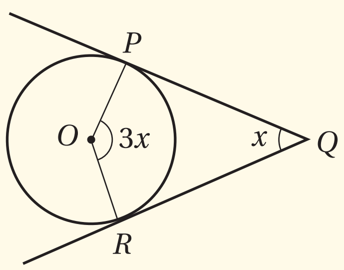
أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المسألةَ.

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل المثال، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال نظريات مماسات الدائرة لإيجاد أطوال وزوايا مجهولة في الدائرة.

مثال إضافي

$\overrightarrow{QP}$ ، و $\overrightarrow{QR}$ مماسان للدائرة في الشكل المجاور.
أجد قيمة x. $45°$



تنويع التعليم:

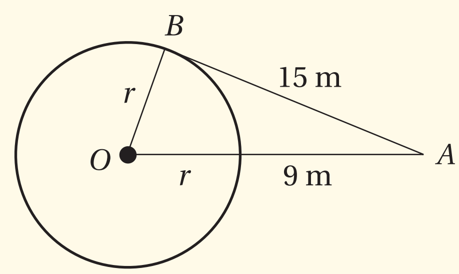
- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط بيان طريقة رسم مماس لدائرة من نقطة عليها.
رسم نصف قطر، ثم إنشاء عمود عليه من طرفه على الدائرة باستعمال الفرجار والمسطرة.

مثال 4: من الحياة

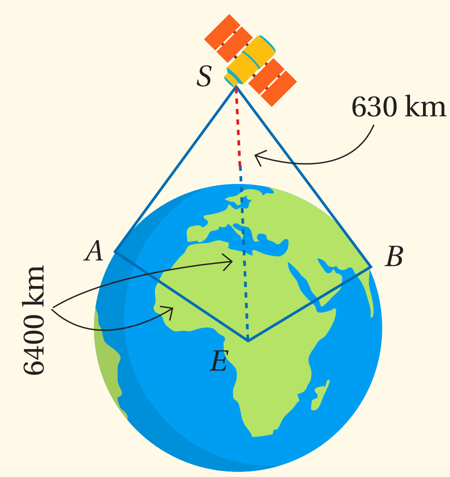
- ناقِش الطلبة في حل المثـال، مُبيِّنًا لهم كيفية توظيف خصائص مماسات الدائرة في موقف حياتي.

مثالان إضافيان

1 يقف مسعود عند النقطة A التي تبعد مسافة 9 m عن حافة حلبة تزلج دائرية الشكل، تبعد مسافة 15 m عن نقطة التماس B بين خط بصره وحافة الحلبة. أجد طول نصف قطر حلبة التزلج. 8 m



2 يرتفع قمر صناعي 630 km عن سطح الأرض، ويمكن منه مشاهدة المنطقة المحصورة بين المماسين $\overline{SA}$، و $\overline{SB}$ من سطح الأرض. إذا كانت الأرض كرة نصف قطرها 6400 km تقريبًا، فما طول المماس $\overline{SA}$؟ 2909 km تقريبًا.



الدائرةُ تُمثِّلُ الأرضَ، والنقطةُ T تُمثِّلُ قمَّةَ البرجِ، والمماسُّ $\overleftrightarrow{TD}$ يُمثِّلُ خطَّ البصرِ، ونقطةُ التَّماسِّ D هيَ أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ. ارتفاعُ البرجِ $50\text{ m} = 0.05\text{ km}$

المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ عندَ نقطةِ التَّماسِّ $m\angle TDC = 90^\circ$

نظريةُ فيثاغورس $(CT)^2 = (TD)^2 + (CD)^2$

بالتعويضِ $(6400 + 0.05)^2 = (TD)^2 + (6400)^2$

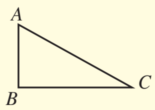
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $40960640.0025 = (TD)^2 + 40960000$

بطرحِ 40960000 منَ الطرفيْنِ $640.0025 = (TD)^2$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $25.3 \approx TD$

إذنْ، المسافةُ التي تُمثِّلُ أبعدَ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ هيَ: 25 km تقريبًا.

أتذكَّرُ



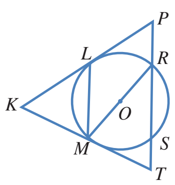
نظريةُ فيثاغورس: إذا كانَ المثلثُ ABC قائمَ الزاويةِ في B، فإنَّ:
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

أتحقق من فهمي

برجُ مراقبةٍ: تبعدُ أقصى نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ برجِ مراقبةٍ مسافةَ 32 km عنْهُ. ما ارتفاعُ قمَّةِ البرجِ عنْ سطحِ الأرضِ، علمًا بأنَّ طولَ نصفِ قُطْرِ الأرضِ 6400 km تقريبًا؟ 80 m

أتدرب وأحل المسائل

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



B

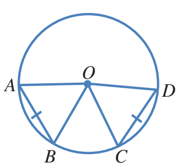
1 نصفَيْ قُطْريْنِ. $\overline{OR}$; $\overline{OM}$

2 وتريْنِ. $\overline{LM}$; $\overline{MR}$; $\overline{RS}$

3 مماسَّيْنِ. $\overrightarrow{KP}$; $\overrightarrow{KT}$

4 قاطعًا. $\overleftrightarrow{PT}$

$\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وتران لهما الطولُ نفسُهُ في دائرةٍ مركزُها O:



5 ما نوعُ المثلثِ AOB؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

6 هلِ المثلثانِ AOB وَ COD مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

7 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ OAB هوَ 65°، فما قياسُ الزاويةِ COD؟ 50°

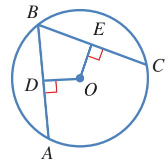
42

إجابات:

5) متطابق الضلعين؛ لأن $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصفا قطرين في الدائرة، فهما متطابقان.

6) نعم؛ لأن أضلاعهما المتناظرة متطابقة.
$OA = OC, OB = OD, AB = CD$

8 جَبْرٌ: في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ وترانِ مُتطابقانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $OE = x + 9$ ، وَ $OD = 3x - 7$، فما قيمةُ x؟ 8

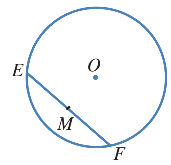


في الشكلِ المجاورِ، $\overline{EF}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها O، والنقطةُ M هيَ منتصفُ الوترِ $\overline{EF}$:

9 هلِ المثلثانِ EOM وَ FOM مُتطابقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

10 هلِ الزاويةُ EMO قائمةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

11 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ MOF هوَ $72°$، فما قياسُ الزاويةِ MEO؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

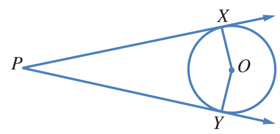


في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{PX}$ وَ $\overrightarrow{PY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

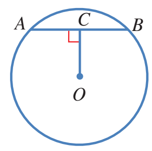
12 هلْ قياسُ الزاويةِ PXO هوَ $90°$؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

13 أُبيِّنُ أنَّ المثلثيْنِ XPO وَ YPO مُتطابِقانِ. انظر ملحق الإجابات.

14 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ XPO هوَ $17°$، فما قياسُ الزاويةِ XOY؟ $146°$

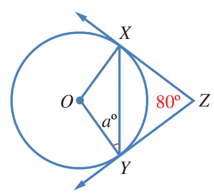


15 في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وترٌ طولُهُ 6 cm في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ACO هوَ $90°$، وَ $OC = 4$ cm، فما طولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ؟ 5 cm



16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات.

17 في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{ZX}$ وَ $\overrightarrow{ZY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ a. 40



43

إجابات:

9) نعم، متطابقان؛ لأن أضلاعهما المتناظرة متطابقة.

(لأن M منتصف EF) $EM = MF$

(لأنهما نصفا قطرين في الدائرة) $OE = OF$

(ضلع مشترك) $OM = OM$

10) الزاوية EMO قائمة؛ لأن $m\angle EMO = m\angle FMO$ ، ومجموعهما $180°$،
لأن EMF خط مستقيم، فقياس كلٍّ منهما يساوي $90°$

11) $18°$ ؛ لأن: $m\angle MFO = 90° - 72° = 18°$
$m\angle MEO = m\angle MFO$

12) نعم؛ لأن المماس يعامد نصف القطر المار بنقطة التماس.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة من 1 إلى 7، وتابِعهم في هذه الأثناء.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم– ثم ناقِشهم فيها.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأسئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.
- في السؤال 23، الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة رسم شكل للسؤال، وكتابة المعطيات عليه، واستعمال رموز للعناصر المطلوب إيجادها.

الواجب المنزلي:

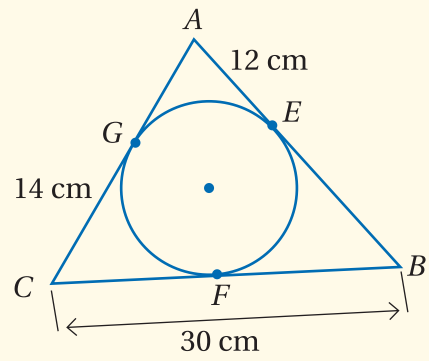
- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 8 إلى 20، إضافةً إلى الأسئلة ذوات الأرقام الفردية في الصفحة الثانية عشرة من كتاب التمارين، ونبِّههم إلى وجوب إكمال الرسم في السؤال التاسع.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل. ناقِشهم أيضًا في الأسئلة 9، 13، 15، ثم اطلب إليهم حل مسائل مهارات التفكير العليا (21–24) ضمن مجموعات غير متجانسة.

أخطاء مفاهيمية:

قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل مسائل تتعلق بالزوايا في الدائرة، وبخاصة عندما يكون المطلوب إيجاد أكثر من زاوية واحدة في الشكل؛ لذا وجِّههم إلى كتابة جميع الزوايا التي يعرفونها على الشكل قبل البدء بالحل.

5 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط حساب محيط المثلث ABC المجاور الذي تمس أضلاعه الدائرة في النقاط: E ، F، و G.
  84 cm

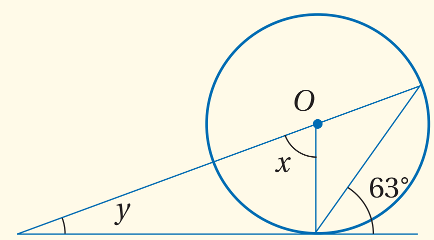


تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة بدء البحث عن أحد النماذج العلمية أو الحياتية التي تستعمل خصيصة أو أكثر من خصائص الدائرة، وتحديد هذه الخصيصة.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة تلخيص ما تعلموه عن المماسات والأقطار في هذا الدرس، واستعماله لإيجاد قيمة x و y في الشكل المجاور. $x = 54°;\ y = 36°$

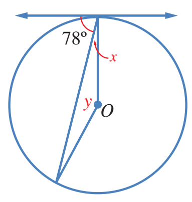


المفاهيم العابرة:

- أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي بند (**مسألة اليوم**) ببداية الدرس، عزِّز الوعي **بالقضايا الأخلاقية (الجمال)** عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن تقدير الجمال، وتأثير زراعة الحدائق وتنسيقها في زيادة درجة السعادة لديهم، ثم اسألهم:
  » أيُّكم يحب الحدائق؟
  » كيف تعتني بها؟
- ثم اسألهم:
  » اذكر حالات أو أشياء تحبها وتراها جميلة.

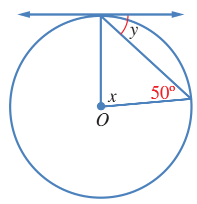
يَظهرُ في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ x وَ y في كلِّ حالةٍ.

18



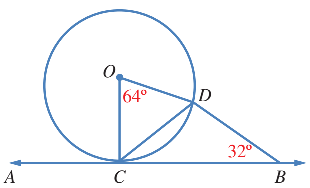
$x = 12°\ ,\ y = 156°$

19



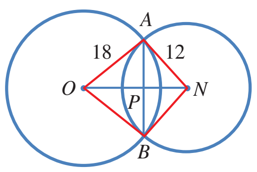
$x = 80°\ ,\ y = 40°$

20 في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O في النقطةِ C. لماذا يُعَدُّ المثلثُ BCD مُتطابِقَ الضلعيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
انظر الهامش.



مهارات التفكير العليا

21 **تحدٍّ:** $\overline{AB}$ وترٌ مشتركٌ بينَ دائرتيْنِ متقاطعتيْنِ، وهوَ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{ON}$ الواصلةِ بينَ مركزيْهِما. إذا كانَ $AB = 14$ cm، فما طولُ $\overline{ON}$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر ملحق الإجابات.



22 **برهانٌ:** $\overline{AB}$ ، وَ $\overline{CD}$ وترانِ متساويانِ في دائرةٍ مركزُها N. أُثبِتُ أنَّ لهُما البُعْدَ نفسَهُ عنِ النقطةِ N.
انظر ملحق الإجابات.

23 **تبريرٌ:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها N في النقطةِ A، وطولُ نصفِ قُطْرِها 3 cm، وَ $BA = 5$ cm. قالَتْ سارةُ إنَّ $BN = 4$ cm؛ لأنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هلْ قولُ سارةَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
انظر ملحق الإجابات.

24 **أَكتبُ:** كمْ مماسًّا يُمكِنُ أنْ يُرسَمَ للدائرةِ منْ نقطةٍ عليْها، ومنْ نقطةٍ خارجَها، ومنْ نقطةٍ داخلَها؟ أُبرِّرُ إجابتي.
يمكن رسم مماس واحد فقط للدائرة من نقطة عليها، ويمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة خارجها، ولا يمكن رسم أي مماس للدائرة من نقطة داخلها؛ لأن أي مستقيم مرسوم من نقطة داخل الدائرة يقطعها في نقطتين.

إجابات:

20) المثلث ODC متطابق الضلعين؛ لأن:

نصفا قطرين في الدائرة $OD = OC$

$m\angle CDO = m\angle DCO = (180° - 64°) \div 2 = 58°$

$m\angle DCB = 90° - 58° = 32°,\ m\angle DCB = m\angle DBC = 32°$

إذن: المثلث BCD متطابق الضلعين؛ لأن فيه زاويتين متطابقتين.

الدرس 2

الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ

Arcs and Sectors

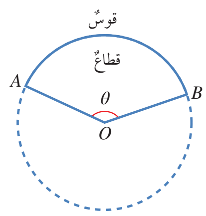
فكرةُ الدرسِ حسابُ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ، وحَلُّ مسائلَ تتعلَّقُ بِهِما.

المصطلحاتُ القوسُ، القطاعُ.

مسألةُ اليومِ أَعَدَّتْ عفافُ فطيرةَ بيتزا في وعاءٍ دائريٍّ طولُ قُطْرِهِ 24 cm. وبعدَ أنْ خبزَتْها أحدثَتْ فيها شَقَّيْنِ منَ المركزِ إلى الطرفِ، بحيثُ كانَ قياسُ الزاويةِ بينَهُما 45°. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ مساحةِ الجزءِ الذي قطعَتْهُ عفافُ منَ الفطيرةِ؟

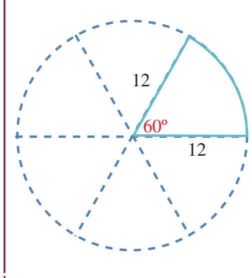
القوسُ (arc) هوَ جزءٌ منْ الدائرةِ مُحدَّدٌ بنقطتيْنِ عليْها. و**القطاعُ** (sector) هوَ جزءٌ منَ الدائرةِ محصورٌ بينَ قوسٍ منْها ونصفَيِ القُطْريْنِ اللذيْنِ يمرّانِ بطرفَيِ القوسِ.

تُمثِّلُ الزاويةُ AOB في الشكلِ المجاورِ زاويةَ القطاعِ الذي يُعَدُّ كسرًا منَ الدائرةِ. ويُمكِنُ استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لكتابةِ هذا الكسرِ، وذلكَ بقسمةِ قياسِ الزاويةِ على الدورةِ الكاملةِ؛ أيْ: $\frac{\theta}{360^\circ}$، حيثُ θ قياسُ زاويةِ القطاعِ.

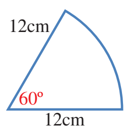


مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ:



1. **طولَ القوسِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).**



القطاعُ كسرٌ منَ الدائرةِ، وهذا الكسرُ هوَ $\frac{1}{6} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$. وبما أنَّ طولَ قُطْرِ الدائرةِ 24 cm، فإنَّ طولَ محيطِها: $24 \times \pi = 24\pi$ cm

إذنْ، طولُ القوسِ يساوي $\frac{1}{6}$ طولِ محيطِ الدائرةِ؛ أيْ:

$24\pi \div 6 = 4\pi$ cm

45

تعزيز اللغة ودعمها:

كــرِّر المصطلحــات الرياضية المســتخدمة في الــدرس باللغتيــن العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس 2

نتاجات الدرس

- يحسب طول قوس من دائرة.
- يحسب مساحة القطاع الدائري.
- يحل مسـائل على طـول القوس، ومسـاحة القطاع الدائري.

التعلم القبلي:

- حساب محيط الدائرة.
- حساب مساحة الدائرة.

1 التهيئة

- ارســم على اللوح دائرتين، نصف قطر كلٍّ منهما 5 cm، و 10 cm
- اطلب إلى الطلبة حساب محيطيهما، ومساحتيهما.
- ناقِش الطلبــة في العلاقة بين نصفي القطرين والمحيطين والمســاحتين؛ لاســتنتاج أنَّه إذا تضاعــف نصف القطر مرتين فإنَّ المحيط سيتضاعف مرتين، في حين تتضاعف المساحة 4 مرات.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**) ثم اسألهم:
  - » ما قياس زاوية الدورة الكاملة؟ 360°
  - » ما الكســر الذي تمثلــه الزاوية 45° مــن الدورة الكاملة؟ $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$
  - » ما مساحة الفطيرة كاملة؟ $144\pi \approx 452.4 cm^2$
  - » ماذا يمثل الجــزء الذي قطعته عفاف من الفطيرة؟ $\frac{1}{8}$ الفطيرة.

3 التدريس

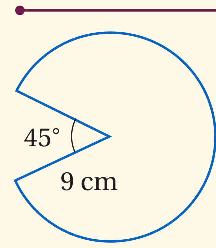
- اطلب إلى الطلبة كتابة محيط دائرة بدلالة نصف قطرها r، ثم كتابة طول الجزء المنحني من نصف تلك الدائرة وربعها.
- عرِّف القوس، والقطاع الدائري، ثم خذ قوسًا يقابل زاوية قياسها $40°$ عند مركز الدائرة، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما الكسر الذي يمثله هذا القوس من محيط الدائرة؟ $\frac{1}{9}$
  - » ما طول هذا القوس؟ 8.37 cm
- اسأل الطلبة عن مساحة القطاع الذي زاويته $40°$. $50.24cm^2$
- وضِّح للطلبة أنه إذا كان القوس AB يقابل الزاوية θ عند مركز دائرة نصف قطرها r، فإن طول القوس AB يساوي $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$، وإن مساحة هذا القطاع الدائري هي: $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$
- أكِّد للطلبة أن قياس زاوية القطاع هو الذي يحدد الكسر الذي يمثله القوس من محيط الدائرة، وتمثله مساحة القطاع من مساحة الدائرة، وأن القانون أقل أهمية.

مثال 1

- شارِك الطلبة في حل المثالين 1 و2 اللذين يبينان كيفية حساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري إذا عُلِمت زاويته.

مثال إضافي

أجد طول القوس ومساحة القطاع الدائري المجاور، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلة عشرية واحدة.



$\ell \approx 49.5\ cm\ ;\ A \approx 222.7\ cm^2$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

---

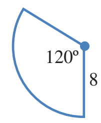
2 مساحةُ القطاعِ.

مساحةُ الدائرةِ هيَ: $\pi \times 12^2 = 144\pi\ cm^2$

مساحةُ القطاعِ تساوي $\frac{1}{6}$ مساحةِ الدائرةِ؛ أيْ: $144\pi \div 6 = 24\pi\ cm^2$

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ طولَ القوسِ، ومساحةَ القطاعِ الدائريِّ. $\ell = 16.8$ ، $A \approx 67.0$



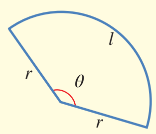
تعرَّفْنا في المثالِ السابقِ أنَّ القطاعَ هوَ كسرٌ منَ الدائرةِ، وأنَّهُ يُمكِنُ دائمًا استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لحسابِ طولِ القوسِ ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ

إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ $\theta°$، وطولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ r، وطولُ القوسِ l، ومساحةُ القطاعِ A، فإنَّ:

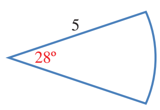
$$l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$$



مثال 2

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



زاويةُ القطاعِ هيَ $28°$، وطولُ نصفِ القُطرِ هوَ 5 وحداتِ طولٍ:

$l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$ قانونُ طولِ القوسِ

$l = \frac{28°}{360°} \times \pi \times 2 \times 5$ بتعويضِ $\theta = 28°, r = 5$

≈ 2.4 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، طولُ هذا القوسِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 2.4 وحدةِ طولٍ.

$A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$ قانونُ مساحةِ القطاعِ

$= \frac{28°}{360°} \times \pi \times 5^2$ بتعويضِ $r = 5, \theta = 28°$

≈ 6.1 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

أخطاء مفاهيمية:

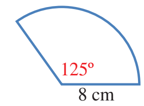
قد يخطئ بعض الطلبة في حل المثال الإضافي فيعوضون الزاوية $45°$ لإيجاد طول القوس، أو مساحة القطاع. أكد عليهم أن قياس الزاوية يساوي $315°$

إذنْ، مساحةُ هذا القطاعِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: 6.1 وحدةٍ مربعةٍ.

أتحققُ من فهمي

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.

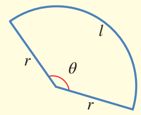
$\ell = 17.5$ cm
$A \approx 69.8$ cm^2



مفهومٌ أساسيٌّ

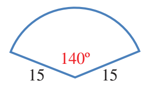
محيطُ القطاعِ الدائريِّ (L) هوَ المسافةُ حولَ القطاعِ، وهيَ تساوي طولَ قوسِ القطاعِ، مضافًا إليْهِ مِثْلا طولِ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$



مثال 3

أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ في الشكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 140°، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 15 وحدةَ طولٍ:

$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$ قانونُ محيطِ القطاعِ

$= (\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15) + 2 \times 15$ بتعويضِ $r = 15, \theta = 140^\circ$

≈ 66.6519 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، محيطُ هذا القطاعِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 66.7 وحدةَ طولٍ.

رموزٌ رياضيةٌ

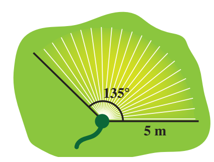
يرمزُ الحرفُ l إلى طولِ القوسِ، ويرمزُ الحرفُ L إلى محيطِ القطاعِ.

أتحققُ من فهمي

أَجِدُ محيطَ قطاعٍ دائريٍّ زاويتُهُ 225°، في دائرةٍ طولُ نصفِ قُطْرِها 50 cm، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 296.3 cm

مثال 4: من الحياة

حديقةُ منزلٍ وُضِعَ في أحدِ أطرافِها مِرَشٌّ للماءِ، يدورُ حولَ الرأسِ بزاويةٍ مقدارُها 135°، فيصلُ الماءُ إلى مسافةِ 5 m منَ المِرَشِّ. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ التي سيرويها هذا المِرَشُّ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



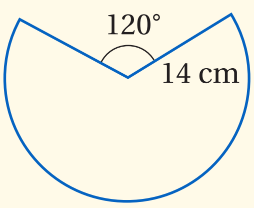
إرشاد: نبه الطلبة أنه عند تعويض قيمة π فإنهم يحصلون على إجابة تقريبية، وتكون الإجابة التي تحوي π هي الإجابة الدقيقة.

مثال 3

- عرِّف للطلبة مفهوم محيط القطاع الدائري، مُبيِّنًا لهم كيفية حسابه.
- شارِك الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية حساب محيط قطاع دائري.

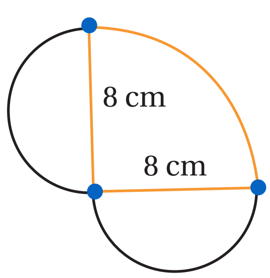
مثال إضافي

أجد محيط القطاع الدائري المجاور، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلة عشرية واحدة. 86.6 cm



أخطاء مفاهيمية:

- قد يغفل بعض الطلبة عن إضافة مثلي طول نصف قطر الدائرة عند حساب محيط القطاع الدائري، وذلك بكتابة طول القوس فقط إجابة للمحيط؛ لذا نبِّههم إلى ذلك، واذكر أمثلة على حساب محيط نصف دائرة، وربع دائرة، وأشكال مركبة تحوي أقواسًا من دوائر.
- في المقابل، قد يضيف بعض الطلبة مثلي طول نصف القطر عندما لا يلزم ذلك في حال تكوّن المحيط من خطوط منحنية فقط، كما في المثال الآتي.
  - » يتكون الشكل المجاور من ربع دائرة، طول نصف قطرها 8 cm، ومن نصفي دائرتين. أجد محيط الشكل. 12 π



- أخبر الطلبة أنه لا يجوز استعمال قانون محيط القطاع الدائري في هذه الحالة، وأن المحيط يساوي مجموع أطوال الأقواس الثلاثة.

مثال 4: من الحياة

- شـارِك الطلبة في حل المثال 4 الذي يعرض لمسألة حياتية يراد حساب مساحة قطاع دائري فيها.

مثال إضافي

- في محل لبيع البيتزا يوجد نوعان من شـطائر البيتزا، أحدهمـا قطره 35 cm، وهو يقسـم إلـى قطاعات زاويتها 60°، والآخر قطره 40 cm، وهو يقسـم إلى قطاعات زاويتها 45°. ما الفرق بين مساحة قطعة بيتزا من النوع الأول وأخرى من النوع الثاني؟ $3.3\ cm^2$

4 التدريب

- وجّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المسـائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسـئلة من 1 إلى 11، وتابِعهم في هذه الأثناء.

مهارات التفكير العليا

- أشـرِك الطلبـة كافةً في حـل هذه المسـائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شـرطًا أن يتمكَّـن الطلبة كافةً من حل المسـائل جميعها، ولكن يجب عليهـم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلب علـى ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأسـئلة ضمن مجموعات غير متجانسـة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسـئلة ذوات الأرقام الزوجية من 12 إلى 22، إضافةً إلى الأسـئلة ذوات الأرقـام الفردية في الصفحة الثالثة عشـرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل. ناقِشـهم أيضًا في الأسئلة 23 ,21 ,19 ,17 ,13 .

تُمثِّلُ المنطقةُ التي سيرويها المِرَشُّ قطاعًا دائريًّا زاويتُهُ 135°، وطولُ نصفِ قُطرِهِ 5 m:

$A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$ قانونُ مساحةِ القطاعِ

$= \frac{135°}{360°} \times \pi \times 5^2$ بتعويضِ $r = 5, \theta = 135°$

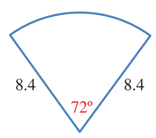
≈ 29.5 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، مساحةُ هذهِ المنطقةِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: $29.5\ m^2$

أتحقق من فهمي

طولُ عقربِ الدقائقِ في سـاعةٍ حائطٍ هوَ 15 cm. ما المسـافةُ التي يقطعُها رأسُ العقربِ في حركتِهِ منَ العددِ 9 إلى العددِ 2؟ 39.3 cm

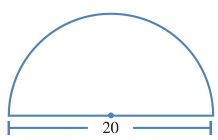
أتدرب وأحل المسائل



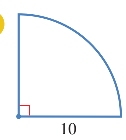
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا:

1. أُعبِّرُ بكسرٍ عنِ الجزءِ الذي يُمثِّلُهُ هذا القطاعُ منَ الدائرةِ. $\frac{1}{5}$
2. أجِدُ طولَ القوسِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 10.6
3. أجِدُ مساحةَ القطاعِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 44.3

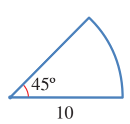
أجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

4. 

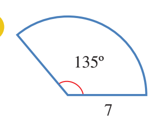
$\ell = 10\pi$, $A = 50\pi$

5. 

$\ell = 5\pi$, $A = 25\pi$

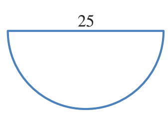
6. 

$\ell = 2.5\pi$, $A = 12.5\pi$

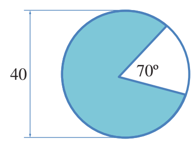
7. 

$\ell = 5.25\pi$, $A = 18.375\pi$

8. أجِدُ مساحةَ نصفِ الدائرةِ المجاورةِ، ثمَّ أجِدُ محيطَها. 245.4; 64.3

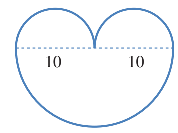


9 أجدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ المجاورِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). أُبرِّرُ إجابتي.
$322.2\ \pi$



10 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. بقسمة مساحة الفطيرة على 8
$56.5\ cm^2$

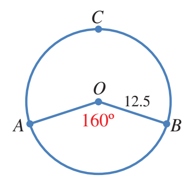
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ 3 أنصافِ دوائرَ:



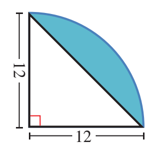
11 أجدُ محيطَ الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). 20π

12 أجدُ مساحةَ الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). 75π

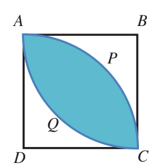
13 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ دائرةٍ، طولُ نصفِ قُطرِها 12.5 وحدةِ طولٍ.
أجدُ طولَ القوسِ ACB. 43.6



14 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ ربعَ دائرةٍ. أجدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). $36\pi - 72$



15 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 8 cm، ويُمثِّلُ APC وَ AQC قوسينِ منْ دائرتيْنِ مركزاهُما D وَ B على التوالي. أجدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). $32\pi - 64$



16 صمَّمَ مهندسٌ مِرَشَّ مياهٍ لريِّ منطقةٍ مساحتُها $100\ m^2$ على هيئةِ قطاعٍ دائريٍّ طولُ نصفِ قُطرِهِ 15 m. ما زاويةُ دورانِ هذا المِرَشِّ؟ 51°

المفاهيم العابرة:

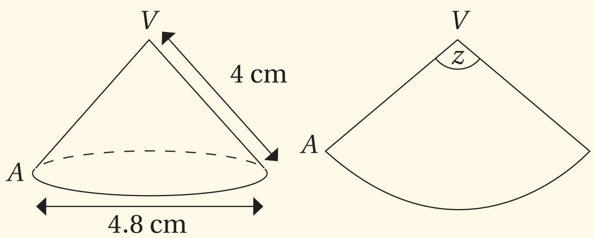
- أكّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي المثال 4 من الحياة، عزِّز الوعي **بالقضايا البيئية (ترشيد استهلاك المياه)** عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهمية ترشيد استهلاك الماء في حفظ التوازن البيئي والمحافظة على الموارد المائية.
- وجِّه الطلبة إلى التحدث عن مقترحاتهم، ودور كلٍّ منهم في المحافظة على التوازن البيئي وترشيد استهلاك الماء.
- استمع لمقترحاتهم، مُعزِّزًا الجيد منها.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، فضع كلًّا منهم مع طالب آخر من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط السؤال الآتي:
  » يبين الشكل الآتي مخروطًا من الورق المقوى، قطر قاعدته 4.8 cm، وطول راسمه 4 cm، إذا قُصَّ على طول المستقيم AV، وبُسِطَ ليُكوِّن القطاع الدائري المُبيَّن في الشكل، فما قياس الزاوية z؟ 216°



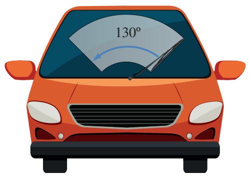
تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة متابعة البحث عن أحد النماذج العلمية أو الحياتية التي تستعمل خصيصة أو أكثر من خصائص الدائرة، وتحديد هذه الخصيصة، وكذلك التقاط صور توضيحية للنموذج، وبدء كتابة تقرير باستعمال مستند معالج النصوص (وورد) يتضمن وصفًا للنموذج مع الصور.
- ذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم والصور.

6 الختام

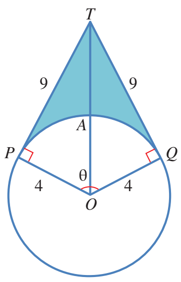
- ارســم قطاعين دائريين، زاويــة الأول $40°$، وطول نصف قطره 4 cm، وزاوية الثاني $20°$ ، وطول نصف قطره 8 cm،
- ثم اسأل الطلبة:
  - » أي القطاعين قوسه أطول؟
  - » أيهما محيطه أطول؟
  - » أيهما مساحته أكبر؟
- امنــح الطلبــة دقيقتيــن أو ثــلاث دقائــق للتفكير ضمــن مجموعات ثنائيــة، ثم تقديــم ملاحظاتهم. (طولا القوسـين متسـاويان، محيط الثانــي أطول، مســاحة القطاع الثاني تساوي مثلي مســاحة القطاع الأول).
- اطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على قطاعات دائرية تشبه القطاعين السابقين، ولها طول القوس نفسه.

من الإجابات المحتملة:
$180°$ و 2 cm؛ $60°$ و 6 cm؛ $120°$ و 3 cm؛ $22.5°$ و 16 cm



17 سـيارات: يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ ماسـحةَ الزجاجِ الأماميِّ لسيارةٍ. إذا كانَ طولُ شفرةِ الماسـحةِ 40 cm، وطولُ شفرةِ الماسحةِ معَ ذراعِها 66 cm، فما مسـاحةُ الزجاجِ التي تُنظِّفُها الماسـحةُ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ؟ انظر الهامش.

مهارات التفكير العليا



تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 4 cm. إذا كانَ $TP = TQ = 9$ cm، فأجِدُ:

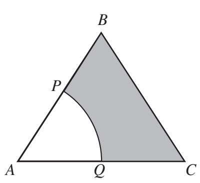
18 قياسَ الزاويةِ θ. انظر الهامش.

19 طولَ القوسِ PAQ. 9.2 cm

20 مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ. 17.6 cm²

21 مسـألةٌ مفتوحةٌ: أرسمُ دائرتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الأولى مختلفٌ عنْ نصفِ قُطْرِ الثانيةِ، ثمَّ أرسمُ قطاعًا دائريًّا في كلِّ دائرةٍ، بحيثُ يكونُ للقطاعيْنِ المساحةُ نفسُها. انظر الهامش.

22 تحدٍّ: اشـترى سعيدٌ فطيرةَ بيتزا دائريةَ الشـكلِ طولُ قُطْرِها 36 cm، ثمَّ قسَّمَها إلى قطعٍ متساويةٍ. بعدَ ذلكَ أكلَ منها قطعتيْنِ تُمثِّلانِ معًا 180 cm² منْها. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ لقطعةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ. $32°$



23 تحدٍّ: يُمثِّلُ الشـكلُ المجاورُ مثلثًا مُتطابقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ 6 cm. إذا كانَتِ النقطتانِ P وَ Q تُنصِّفـانِ الضلعيْنِ $\overline{AB}$ وَ $\overline{AC}$ على التوالـي، وكانَ APQ قطاعًا دائريًّا منْ دائرةٍ مركزُها A، فأَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ. انظر ملحق الإجابات.

إرشـاد: ذكِّر الطلبة بكيفية إيجـاد قياس زاوية في مثلـث قائم الزاوية باستعمال النسب المثلثية.

إجابات:

17) $A = \frac{130}{360} \times 66^2 \times \pi - \frac{130}{360} \times 26^2 \times \pi \approx 4175 \text{ cm}^2$

18) $\tan(\frac{1}{2}\theta) = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\theta \approx 66° \Rightarrow \theta \approx 132°$

21) ستتنوع إجابات الطلبة. وهذا مثال على إحدى الإجابات:

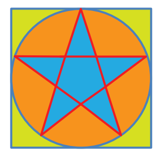
دائرة نصف قطرها 12 cm، وزاوية القطاع $60°$ مع دائرة نصف قطرها 6 cm، وزاوية القطاع $240°$، أو نصف القطر 24 cm، والزاوية $15°$ مسـاحة هذه القطاعات الثلاثة هي 75.4 cm² تقريبًا.

الزوايا في الدائرة
Angles in a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرةِ، وتوظيفُها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ وحَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

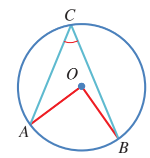
المصطلحاتُ الزاويةُ المركزيةُ، الزاويةُ المحيطيةُ، القوسُ المقابلُ، الزاويةُ المُقابِلةُ لقُطرِ الدائرةِ، الرباعيُّ الدائريُّ، الزاويةُ المماسيةُ.

مسألةُ اليوم يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ تصميمًا مُكوَّنًا مِنْ نجمةٍ خماسيةٍ منتظمةٍ محاطةٍ بدائرةٍ يحيطُ بها مربَّعٌ. ماذا تُسمّى الزوايا عندَ رؤوسِ النجمةِ؟ كيفَ نجدُ قياسَ كلٍّ منْها؟



تُسمّى الزاويةُ التي يكونُ رأسُها في مركزِ الدائرةِ، وضلعاها نصفَيْ قُطرَيْنِ للدائرةِ **زاويةً مركزيةً** (central angle). ففي الشكلِ الآتي، AOB زاويةٌ مركزيةٌ في الدائرةِ التي مركزُها O، ويُسمّى القوسُ $\widehat{AB}$ **القوسَ المقابلَ** (subtended arc).

يُسمّى $\widehat{AB}$ القوسَ الأصغرَ، ويُسمّى $\widehat{ACB}$ القوسَ الأكبرَ.



تُسمّى الزاويةُ التي يقعُ رأسُها على الدائرةِ، ويكونُ ضلعاها وترَيْنِ في الدائرةِ **زاويةً محيطيةً** (inscribed angle). ففي الشكلِ السابقِ، الزاويةُ ACB محيطيةٌ، والزاويةُ AOB مركزيةٌ، وهما مرسومتانِ على نفسِ القوسِ $\widehat{AB}$. وعندَ قياسِ هاتيْنِ الزاويتيْنِ سنجدُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ AOB يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.

نظريةٌ

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ:

$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$

51

الدرس 3

نتاجات الدرس

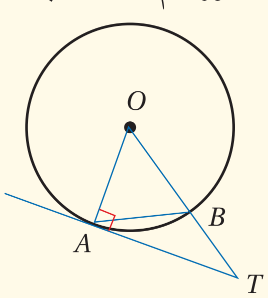
- يتعرف العلاقة بين قياسي الزاوية المحيطية والزاوية المركزية المرسومتان على القوس نفسه في الدائرة.
- يتعرف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- يتعرف العلاقة بين قياسات زوايا الشكل الرباعي الدائري.
- يتعرف العلاقة بين قياسي الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.
- يوظف العلاقات بين قياسات الزوايا في الدائرة في حل مسائل رياضية وحياتية.

التعلم القبلي:

- معرفة المفردات الخاصة بالدائرة (مركز، نصف قطر، قطر، وتر، قاطع، مماس، قوس).
- مجموع قياسات كلٍّ من زوايا المثلث، وزوايا الشكل الرباعي، والزوايا حول نقطة.
- العلاقات بين الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين.
- خصائص كلٍّ من المثلث المتطابق الضلعين، والمثلث المتطابق الأضلاع، ومتوازي الأضلاع.

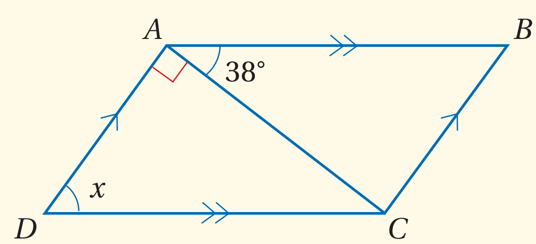
1 التهيئة

- ارسم على اللوح الشكل المجاور، ثم اسأل الطلبة:



  » ماذا تسمى $\overline{OB}$؟
  تسمى نصف قطر.
  » ماذا تسمى $\overline{AB}$؟
  تسمى وترًا.
  » ماذا يسمى $\overrightarrow{TA}$؟
  يسمى مماسًا.
  » ما نوع المثلث OAB؟ لماذا؟ متطابق الضلعين؛ لأن $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصفا قطرين متطابقان.
  » إذا كان قياس الزاوية ABO هو $65°$، فما قياس الزاوية AOB؟ لماذا؟ $50°$ ؛ لأن زاويتي القاعدة متطابقتان، ومجموع زوايا المثلث هو $180°$

- ارسم على اللوح الشكل المجاور، ثم اسأل الطلبة:



  » ماذا يسمى هذا الشكل الرباعي؟ ما خصائصه؟
  » ما قيمة x؟ ولماذا؟ $52°$
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أخرى؟
  » اذكرها.
- وبهذا يشارك أكبر عدد منهم، وتتعزز لديهم مهارات التواصل، وتقبُّل الرأي الآخر.

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

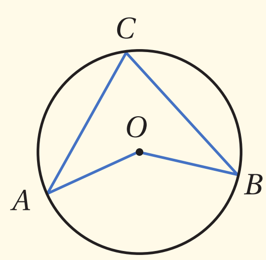
- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما المضلع المنتظم؟ مضلع لجميع أضلاعه الطول نفسه، ولجميع زواياه القياس نفسه.
  - » ماذا يسمى الشكل الظاهر في وسط النجمة؟ يسمى مضلعًا خماسيًّا منتظمًا.
  - » ما قياس كل واحدة من الزوايا الداخلية في هذا المضلع الخماسي المنتظم؟ $108°$
  - » ما قياس زوايا أحد المثلثات الصغيرة الخمسة الظاهرة في الشكل؟ $72°, 72°, 36°$
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

إرشادات للمعلم

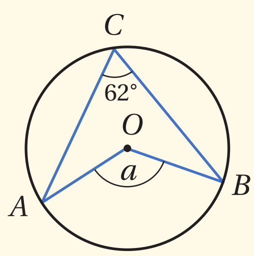
ذكِّر كل طالب بضرورة إحضار منقلة ومسطرة وفرجار لرسم الأشكال وقياس الزوايا والأطوال.

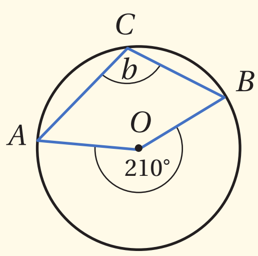
3 التدريس

- اطلب إلى كل طالب رسم الشكل المجاور على دفتره، علمًا بأن O هو مركز الدائرة.



- عرِّف للطلبة الزاوية المركزية، والزاوية المحيطية، والقوس المقابل لهما.
- اطلب إلى الطلبة تلوين الزاويــة c بلون غامق، والزاوية AOB بلون فاتح، ثم قَصَّ الزاويتين.
- اطلب إلى الطلبة ثني الزاوية O من المنتصف بحيث ينطبق الضلعان OA و OB، ثم وضع الزاوية C فوقها، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- اسأل أحد الطلبة:
  - » ما العلاقة بين قياس الزاويتين ACB، وAOB؟ قياس الزاوية AOB يساوي مثلي قياس الزاوية ACB.
  - » من يوافقه الرأي؟
  - » من لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكرها.
- وضِّح للطلبة أن هذا صحيــح دائمًا، ثم اكتب نص النظرية على اللوح، أو اعرضها أمامهم على لوحة من الكرتون.
- اذكر أمثلة عددية بسيطة ومباشرة، من مثل السؤالين الآتيين:
  - » ما قيمة كلٍّ من a، وb؟





- اســتمع لإجابات الطلبة، وقــدِّم لهم التغذيــة الراجعة والدعم اللازم في حينه.

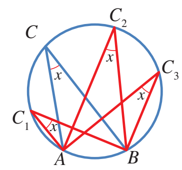
إرشادات للمعلم

المجــال العاطفــي لا يقــل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابــة الصحيحة، فمن يســتطيع إعطاء إجابة أخــرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المســتخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

إذا رسـمْنا زوايا محيطيةً أُخرى مُقابِلةً للقوسِ AB سنجدُ أنَّ لها القياسَ نفسَهُ.



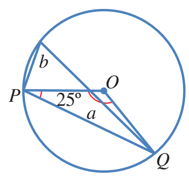
نظريةٌ

جميعُ الزوايا المحيطيةِ المرسومةِ على قوسٍ واحدٍ في دائرةٍ لها القياسُ نفسُهُ:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$

مثال 1

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قياسُ الزاويتيْنِ المشارِ إليْهِما بالحرفيْنِ a وَ b؟



المثلثُ OPQ مُتطابِقُ الضلعيْـنِ؛ لأنَّ $\overline{OQ}$ وَ $\overline{OP}$ نصفا قُطْريْنِ في الدائرةِ ومجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ هوَ 180°. إذنْ:

$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180^\circ$ نُعوِّضُ قياساتِ الزوايا المعلومةِ:

$a + 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$ في المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْنِ تتطابقُ زاويتا القاعدةِ

$a + 50^\circ = 180^\circ$ بالتبسيطِ

$a + 50^\circ - 50^\circ = 180^\circ - 50^\circ$ بطرحِ 50° منَ الطرفيْنِ

$a = 130^\circ$

$b = 130^\circ \div 2$ قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ نفسِهِ

$= 65^\circ$

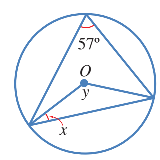
أَتذكَّرُ

زاويتا قاعدةِ المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْـنِ متسـاويتانِ في القياسِ.

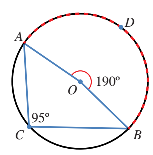
أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

$x = 33^\circ;\ y = 114^\circ$



قـدْ يكونُ قيـاسُ الزاويـةِ المركزيةِ أكبـرَ منْ 180°. ففي الشـكلِ المجاورِ، الزاويةُ AOB مُقابِلةٌ للقوسِ $\overset{\frown}{ADB}$، وقياسُـها 190°، وهوَ ضعفُ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.



52

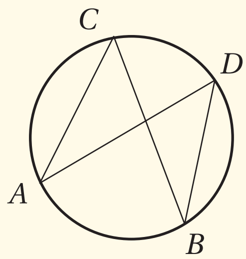
إرشادات للمعلم

- يمكن توجيـه الطلبة إلى تلوين الزوايا المحيطية المرسـومة على القوس نفسه بألوان مختلفة، ثم قصها، ووضعها فوق بعضها؛ لمقارنة قياساتها، ثم تدوين ملاحظاتهم، وذلك لاستكشـاف نظرية الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه.
- اسـتعمل برمجية جيوجبرا، وشجِّع الطلبة على اسـتعمالها؛ لاستكشاف العلاقات بين الزوايا المحيطية والزوايا المركزية.

أخطاء مفاهيمية:

قـد يخطئ بعـض الطلبة في أثنـاء حلهم مسـائل الزوايا المحيطيـة والزوايا المركزية؛ فلا ينتبهون إلى القوس المشـترك؛ لذا أكِّد لهـم ضرورة الانتباه إلى ذلك، وأن شـرط تطبيق هذه النظريات هو رسـمها على القوس نفسه، أو على أقواس متساوية.

- اطلب إلى الطلبة رسم الشكل أدناه على دفاترهم، ثم قياس جميع الزوايا المحيطية المُبيَّنة في الشكل، ثم تدوين ملاحظاتهم عليها. سيلاحظ الطلبة أن الزوايا المحيطية المقابلة للقوس نفسه متطابقة.



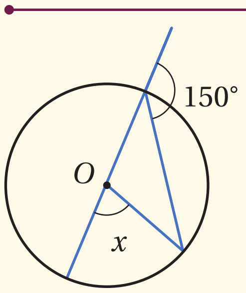
- بيِّن للطلبة أن هذا صحيـح دائمًا، وأنه يمثل موضوع نظريـة ثانية من نظريـات الدائرة (الزوايـا المحيطية المرسومة على القوس نفسه).

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1 الـذي يبين كيفية إيجاد زوايا في الدائرة اعتمادًا على نظريات الزوايا المحيطية، والزوايا المركزية، والعلاقات السابقة.

مثال إضافي

- مـا قيمة x في الشـكل المجـاور، علمًا بأن O هو مركز الدائرة؟ 60°



التقويم التكويني:

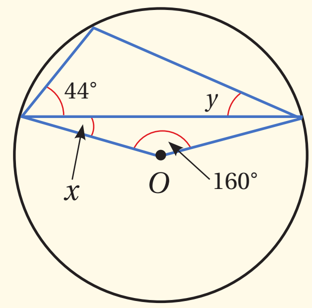
- اطلب إلـى الطلبة حل التدريب فـي بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات غير متجانسة).
- اختر بعض الإجابات التي تحـوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشـها على اللوح، ولا تذكر اسـم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

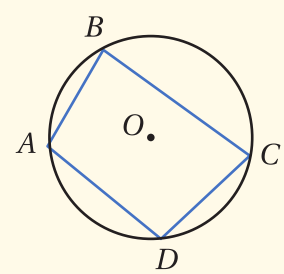
مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 الــذي يبين العلاقة بين الزاوية المحيطية المشتركة في القوس مع زاوية مركزية منعكسة (أكبر من $180°$).

مثال إضافي

- ما قيمة كلٍّ من x، و y في الشكل أدناه، علمًا بأن O هو مركز الدائرة؟ $x = 10° ; y = 36°$

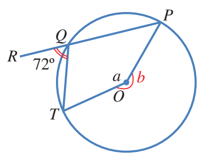




- اطلــب إلى الطلبة رســم الشــكل المجــاور على دفاترهــم، علمًا بأن O هو مركــز الدائــرة. بيِّن لهم أن الشــكل الرباعي الذي تقع رؤوســه على الدائرة يسمى مضلعًا رباعيًّا دائريًّا، وأن الزاويتين A، و C تســميان زاويتين متقابلتين فيه. وكذلك الزاويتان B، و C؛ فهما متقابلتان.
- اطلب إلى الطلبة تلوين رؤوس الشكل الرباعي الأربعة بألوان مختلفة، ثم قــص الزاويتين A، و C، ثم وضع الرأسين بجانب بعضهما، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- اطلب إلى الطلبة تكرار الخطوة الســابقة للرأسين B، و D، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- اسأل الطلبة:
  » ما العلاقة بين قياســي الزاويتيــن المتقابلتين في الشــكل الرباعي الدائري؟ لماذا؟ مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين يساوي $180°$
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أخرى؟
  » اذكرها.
  » اكتب نص النظرية على اللوح.

مثال 2

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ P , Q , R على استقامةٍ واحدةٍ، فما قياسُ الزاويةِ a؟



> **أتذكَّرُ**
> - قياسُ الزاويةِ المستقيمةِ هوَ $180°$.
> - مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ $360°$.

$m\angle PQT = 180° - 72° = 108°$ الزاويتانِ PQT, RQT تُشكِّلانِ زاويةً مستقيمةً

$a + b = 360°$ مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ $360°$

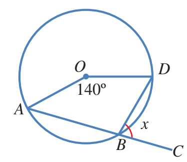
$b = 2 \times 108° = 216°$ قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ

$a + 216° = 360°$ بتعويضِ قيمةِ b

$a = 360° - 216° = 144°$ بطرحِ $216°$ منَ الطرفيْنِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ x؟ $70°$

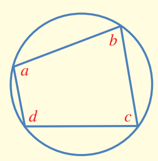


إذا وقعَتْ رؤوسُ مُضلَّعٍ رباعيٍّ على دائرةٍ، فإنَّهُ يُسمّى **رباعيًّا دائريًّا** (cyclic quadrilateral). وإذا حسَبْنا مجموعَ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ، فإنَّهُ يكونُ $180°$.

نظريةٌ

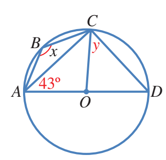
مجموعُ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ في المُضلَّعِ الرباعيِّ الدائريِّ هوَ $180°$:

$b + d = 180°, a + c = 180°$



مثال 3

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟



$m\angle ACO = 43°$ المثلثُ ACO مُتطابِقُ الضلعيْنِ

$y + m\angle ACO = 90°$ الزاويةُ ACD محيطيةٌ مشتركةٌ معَ الزاويةِ المركزيةِ AOD بالقوسِ نفسِهِ

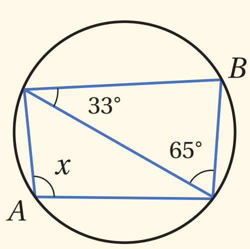
$y + 43° = 90°$ بالتعويضِ

مثال 3

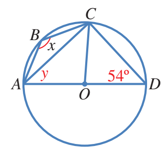
- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية إيجاد زوايا في الدائرة ضمن مضلع رباعي دائري.
- وجِّــه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3) ضمن مجموعات ثنائية، وقدِّم التغذية الراجعة.

مثال إضافي

- ما قيمة x في الشكل الآتي؟ $98°$



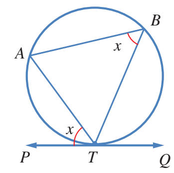
بطرحِ °43 منَ الطرفيْنِ	$y = 90° - 43°$
	$= 47°$
الشكلُ $ABCD$ رباعيٌّ دائريٌّ	$x + m\angle ADC = 180°$
المثلثُ OCD مُتطابِقُ الضلعيْنِ	$m\angle ADC = y = 47°$
بتعويضِ قيمةِ y	$x + 47° = 180°$
بطرحِ °47 منَ الطرفيْنِ	$x = 180° - 47°$
	$= 133°$



أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

$x = 126°\ ;\ y = 36°$



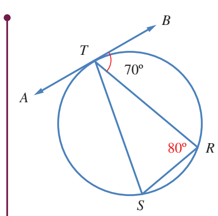
فـي الشـكلِ المجـاورِ، $\overleftrightarrow{PQ}$ هـوَ مماسٌّ للدائـرةِ عنـدَ النقطـةِ T، وَ $\overline{TA}$ هـوَ وتـرٌ للدائـرةِ. تُسـمّى الزاويـةُ المحصـورةُ بيـنَ المماسِّ والوتـرِ المـارِّ بنقطـةِ التَّمـاسِّ **الزاويـةَ المماسِّـيةَ** (angle between a tangent and a chord). وهـذهِ الزاويـةُ تحصرُ القـوسَ $\overparen{TA}$ ، ويُمكِـنُ ملاحظةُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المماسِّـيةِ PTA يسـاوي قيـاسَ الزاويةِ ABT المحيطيـةِ المرسـومةِ على القوسِ $\overparen{TA}$ نفسِـهِ.

نظريةٌ

قياسُ الزاويةِ المماسِّيةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

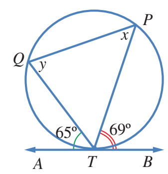
مثال 4



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ ATS وَ TSR.

زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ	$m\angle ATS = m\angle TRS = 80°$
زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ	$m\angle TSR = m\angle BTR = 70°$

أتحقق من فهمي



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T.

أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا: TQP، وَ TPQ، وَ QTP.

$m\angle TPQ = 65°$
$m\angle TQP = 69°$
$m\angle QTP = 56°$

54

تنويع التعليم:

اطلب إلى الطلبة ذوي المستـــوى فوق المتوسط إثبات أن مجموع قياســي كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي °180.

- ارسم على اللوح دائرة، ثم ارسم مماسًّا لها، ووترًا فيها يمر بنقطة التماس، مُبيِّنًا للطلبة أن الزاوية المحصورة بين المماس والوتر تسمى زاوية مماسية.
- ارســم زاوية محيطية تقابل القــوس المقابل للزاوية المماســية، ثم اطلب إلى الطلبة التحقُّق من أن لهاتين الزاويتين القياس نفسه.
- وزِّع علــى الطلبة نســخًا مــن **ورقة المصــادر 1** في الملحق، ثــم اطلب إليهم تحديــد الزاوية المحيطية المشــتركة مع الزاوية المماســية في القوس نفســه، والتحقُّق من تساوي قياســيهما، وكتابة الحرف نفسه على الزوايا المتطابقة.
- تابع الطلبة في أثناء أدائهم المهمة المطلوبة، ولا سيما ما يتعلَّق منها بالشــكل الثالث، وتأكَّــد أنه كُتِب على إحدى الزاويتيــن الحرف p ، وكُتِــب على الأخرى الحرف q ، ثم اسألهم:

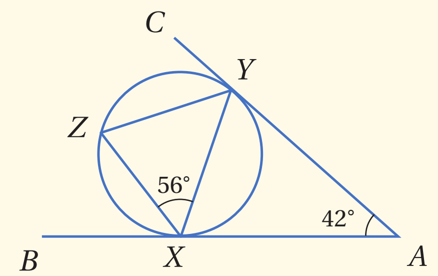
» كيــف يُثبِت الشــكل الثالث أن مجموع قياســي الزاويتين المتقابلتين في الشــكل الرباعي الدائري هو °180؟ p ، و q هما قياسا زاويتين متجاورتين تُكوِّنان زاوية مستقيمة.

مثال 4

- ناقِش الطلبة في حــل المثال 4 الذي يبين كيفية إيجاد قيــاس زوايا في الدائــرة اعتمادًا علــى نظرية الزاوية المماسية.

مثال إضافي

- $\overrightarrow{AB}$ ، و $\overrightarrow{AC}$ مماسان لدائرة في النقطتين X، وY . أجد قياس الزاوية XYZ، مبررًا إجابتي.



$$m\angle YXA = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$$

(المثلث AXY متطابق الضلعين؛ لأن $AX = AY$).

$$m\angle ZXB = 180° - (69° + 56°) = 55°$$

(AXB خط مستقيم).

$$m\angle XYZ = m\angle ZXB = 55°$$

(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان في القوس نفسه).

4 التدريب

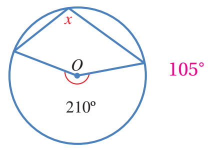
- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل المسائل فيها.
- إذا واجــه بعض الطلبــة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

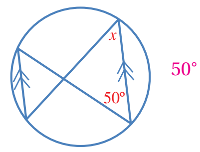
مهارات التفكير العليا

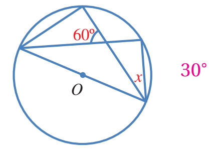
- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّــر أنه ليس شــرطًا أن يتمكَّن الطلبــة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلــب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأســئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

أتدرب وأحل المسائل

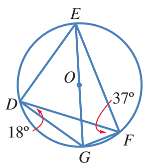
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

1 

2 

3 

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فَأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

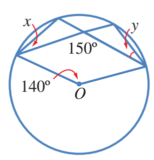


4 $m\angle EGF$. $72°$

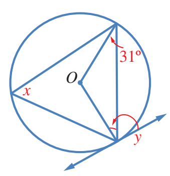
5 $m\angle DEG$. $37°$

6 $m\angle EDF$. $72°$

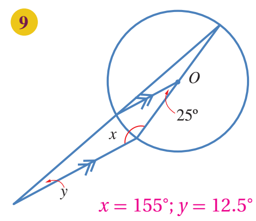
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

7 

$x = 40°; y = 40°$

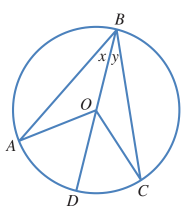
8 

$x = 59°; y = 31°$

9 

$x = 155°; y = 12.5°$

في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O، وقياسُ الزاويةِ ABO هوَ $x°$، وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ $y°$:



10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAO. x

11 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AOD. $2x$

12 أُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ. انظر الهامش.

إرشاد:

قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل مســائل تتعلق بالزوايا في الدائرة، وبخاصة عندما يكــون المطلوب إيجاد أكثر من زاوية واحدة في الشــكل؛ لذا وجِّههم إلى كتابة جميع الزوايا التي يعرفونها على الشكل قبل البدء بالحل.

إجابات:

12)
$$\begin{aligned} m\angle AOC &= m\angle AOD + m\angle DOC \\ &= 2x + 2y \\ &= 2(x + y) \\ &= 2\, m\angle AOB \end{aligned}$$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في صفحة الدرس من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل أسئلة مهارات التفكير العليا، ثم عرض حلها أمام أفراد المجموعات الأخرى لمناقشته.

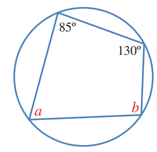
تنويع التعليم:

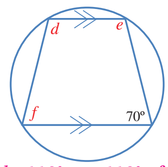
إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، فضع كلًّا منهم مع طالب آخر من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

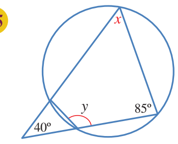
إرشادات للمعلم

- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة ذوات الأرقام من 1 إلى 6، وتابِعهم بعد الانتهاء من حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة (7–12)، والأسئلة (1–6) في الصفحة 14 من كتاب التمارين بوصفها واجبًا منزليًّا. وفي اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.
- بعد الانتهاء من حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 4)، اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة ذوات الأرقام الفردية من 13 إلى 25، وتابِعهم في هذه الأثناء، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 16 إلى 26، والأسئلة (7 – 10) في الصفحة 14 من كتاب التمارين بوصفها واجبًا منزليًّا.

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

13 
$a = 50°; b = 95°$

14 
$d = 110°; e = 110°, f = 70°$

15 
$x = 55°; y = 125°$

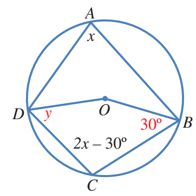
في الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ $PQRT$ ، قياسُ الزاويةِ ROQ هوَ $38°$، حيثُ O مركزُ الدائرةِ، وَPOT قُطْرٌ فيها يوازي QR. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

16 ROT. $71°$

17 QRT. $125.5°$

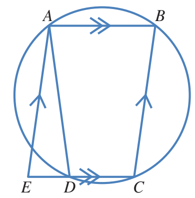
18 QPT. $54.5°$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O:



19 لماذا $3x - 30° = 180°$؟ انظر الهامش.

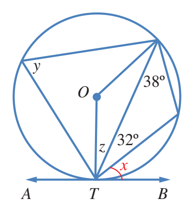
20 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشارِ إليْها بالحرفِ y، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي. انظر الهامش.

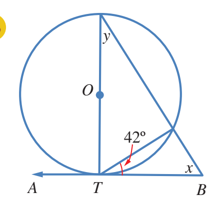


21 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $ABCE$ متوازيَ أضلاعٍ. أُبيِّنُ أنَّ قياسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

انظر ملحق الإجابات.

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

22 
$x = 38°; y = 70°; z = 20°$

23 
$x = 48°; y = 42°$

إجابات:

19) الزاويتان A، و C متقابلتان في مضلع رباعي دائري، ومجموع قياسيهما $180°$، إذن:

$$x + (2x - 30°) = 180°$$
$$3x - 30° = 180°$$

20) $3x = 210°$

$x = 70°$

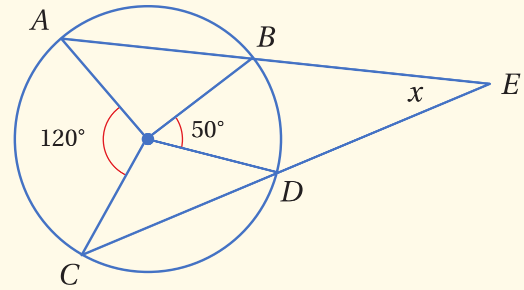
$m\angle DCB = 140° - 30° = 110°,\ m\angle DOB = 2 \times 70° = 140°$

بما أن مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي هو $360°$، فإن:

$110° + 140° + 30° + y = 360° \qquad y = 360° - 280° = 80°$

5 الإثراء

- إذا كانــت O هي مركز الدائرة في الشــكل المجاور، فأجد قيمة x، مُبيِّنًا خطوات الحل. $35°$
(**إرشاد:** ارسم الوتر $\overline{BC}$).



- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوســط إثبات أن قياس الزاوية المماســية يساوي نصــف قياس الزاويــة المركزية المشــتركة معها في القوس نفسه.
- اطلب إلــى الطلبة ذوي المســتوى دون المتوســط استكشــاف نظرية الزاوية المماســية؛ بتلوين الزوايا المعنية، ثم قصها، ثم وضعها فوق بعضها، ثم تدوين استنتاجهم.

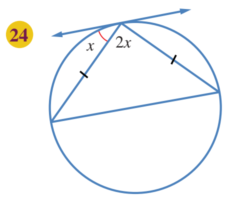
تعليمات المشروع:

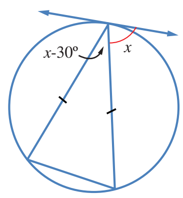
- اطلب إلى الطلبة الذين تناول نموذجهم أضلاعًا أو زوايا في الدائرة تنفيذ الخطوة الثالثة من المشروع، واستعمال برمجية جيوجبرا لرســم النموذج في جهاز الحاسوب، وإيجاد قياســات زواياه وأطوال أضلاعه، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة إكمالهم التقرير الذي بدؤوا إعداده، وتضمينه تفسيرًا للخصيصة التي يتمتع بها نموذجهم.
- وجِّه الطلبة الى الاســتعانة بمعلِّم الحاسوب، أو قيِّم المختبر، أو أحــد الزملاء الذيــن يمتلكون مهارات حاســوبية في حال واجهتهم مشــكلة ما في استعمال الجهاز أو البرمجية.

6 الختام

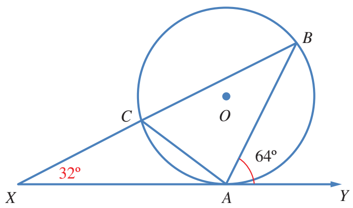
- اطلــب إلــى الطلبة أن يكتبــوا قائمة تحــوي جميع النظريات التي درسوها في هذه الوحدة، وأن يُميِّز كلٌّ منهم أكثر نظرية أتقن حل أسئلتها بلون مميز. وكذلك تمييز النظرية التي واجــه صعوبة في إتقان حلها بلون أحمــر، فضلًا عن ذكــر مقترحاته بخصــوص كيفية مواجهــة هذا التحدي؛ **ما يُعــزِّز لديهم مهارات إدارة الذات وحل المشكلات.**

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ الشكلَيْنِ الآتيَيْنِ:

24


25


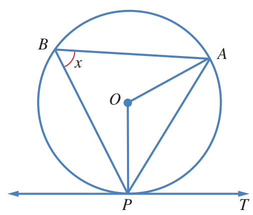
26 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ في الشــكلِ الآتي، ويُمثِّلُ $\overleftrightarrow{XY}$ مماسًّــا للدائرةِ عندَ A . إذا كانَتِ النقــاطُ B وَ C وَ X تُمثِّلُ خطًّا على اســتقامةٍ واحدةٍ، فأُثبِتُ أنَّ المثلثَ ACX مُتطابِقُ الضلعيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات.



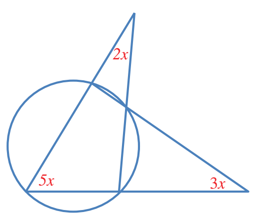
مهارات التفكير العليا

27 **تبريــرٌ:** قالَــتْ فاتــنُ إنَّ الزاويــةَ المحيطيةَ المرســومةَ على قُطرِ الدائــرةِ زاويةٌ قائمــةٌ. هلْ قولُ فاتــنَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش.

28 **تبريرٌ:** في الشــكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PT}$ مماسٌّ لدائــرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ PBA هوَ $x°$، فأُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ APT يســاوي قياسَ الزاويةِ ABP، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ. انظر ملحق الإجابات.



29 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ. انظر ملحق الإجابات.



المفاهيم العابرة:

أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمــواد حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي أسئلة البرهان الرياضي جميعها، والتبرير تحديدًا ضمن السؤالين 26، 28، وجِّه الطلبة إلى اتباع الخطوات المنطقية المتسلســلة فــي أثناء البرهان، وكتابة تبريراتهم لــكل خطوة، وكيفية حصولهــم على الإجابة، ما يُعــزِّز لديهم المهارات الحياتية، ومهارات التفكير، مثل: التحليل والربط والتفسير، وتقديم الأدلة والبراهين.

إرشــاد: في السؤال 29، ذكِّر الطلبة بنظرية الزاوية الخارجية للمثلث التي تنص على أن قياس الزاوية الخارجية في المثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

إجابة:

27) نعم، هي على صواب؛ لأن الزاوية المقابلة لقطر الدائرة تشترك في القوس مع زاوية مركزية مستقيمة قياسها $180°$ ؛ لذا يكون قياسها نصف $180°$ ؛ أي $90°$.

الدرس 4

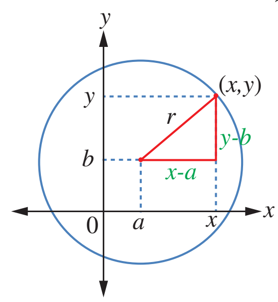
معادلةُ الدائرةِ
Equation of a Circle

فكرةُ الدرسِ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ، وإيجادُ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.

المصطلحاتُ معادلةُ الدائرةِ، الصورةُ القياسيةُ، الصورةُ العامةُ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّـلُ النقطةُ $(7, 4)$ موقعَ محطةِ إذاعةٍ يُلتقَـطُ بثُّها في دائرةٍ نصفُ قُطْرِها 224 km. إذا كانَ فـوّازٌ يقيمُ في بيتٍ تُمثِّلُهُ النقطةُ $(-75, 95)$ على مسـتوًى إحداثيٍّ وحدتُهُ 1 km، فكيفَ يستطيعُ معرفةَ إنْ كانَ بثُّ هذهِ الإذاعةِ يصلُ بيتَهُ أمْ لا؟

معادلـةُ الدائرةِ (equation of the circle) هيَ العلاقةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيِّ x والإحداثيِّ y لـكلِّ نقطةٍ واقعةٍ على الدائرةِ. فإذا عُوِّضَ إحداثيا نقطـةٍ في المعادلةِ، وكانَتِ النتيجةُ عبارةً صحيحةً، فهذا يعني أنَّ تلكَ النقطةَ تقعُ على الدائرةِ.



يُمثِّلُ الشـكلُ المجـاورُ دائرةً مركزُهـا النقطةُ (a, b)، وطـولُ نصـفِ قُطْرِهـا r. والنقطـةُ (x, y) تقعُ على الدائرةِ. ألاحِظُ أنَّهُ يُمكِنُ تكوينُ المثلـثِ قائمِ الزاويةِ الذي طـولُ ضلعِهِ الأفقيِّ $(x-a)$، وطولُ ضلعِهِ الرأسيِّ $(y-b)$، وطولُ وترِهِ r. وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس تنتجُ المعادلةُ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ التي تُسـمّى **الصورةَ القياسيةَ** (standard form) لمعادلةِ الدائرةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

1. الصورةُ القياسـيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
2. معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $(0, 0)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ:
$$x^2+y^2=r^2$$

58

الدرس 4

نتاجات الدرس

- يجد معادلة الدائرة بالصورة القياسية.
- يجد معادلة الدائرة بالصورة العامة.
- يجد مركز الدائرة ونصف قطرها إذا أُعطِيت معادلتها.
- يجد طول القطعة المماسية من نقطة خارجية إلى نقطة التماس على دائرة علمت معادلتها.

التعلم القبلي:

- التطبيق على نظرية فيثاغورس.
- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي.
- حساب المسافة بين نقطتين في المستوى.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بنظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين.
- اطلب إلى الطلبة تعيين النقاط الآتية في المستوى الإحداثي: $A(-1, 4), B(3,6), C(0, 12)$، ثم إيجاد الأطوال:
  » AB, AC, BC، وتحديد نوع المثلث ABC مع بيان السبب. المثلث قائم الزاوية في B لأنه يحقق نظرية فيثاغورس.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد إحداثيي نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AB}$، و $\overline{AC}$. $(-0.5, 8), (1, 5)$
- اكتب المعادلة الآتية: $x^2+y^2=9$، ثم اسأل الطلبة:
  » ماذا تعرفون عن هذه المعادلة؟
  » هل رأيتم مثلها سابقًا؟
- استمع لإجابات أكبر عدد منهم، ثم أخبرهم أنهم سيتعرفون مثل هذه المعادلات في هذا الدرس.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  » ماذا تمثل النقطة $(7, 4)$ في هذه المسألة؟ موقع المحطة، ومركز الدائرة التي يصلها البث.
  » مـاذا تمثل النقاط التي يصلها بث هذه المحطة الإذاعية؟ النقاط الواقعة على الدائرة، والنقاط الواقعة داخل الدائرة.
  » كيف تعرف إن كانت نقطة ما واقعة على الدائرة، أو داخلها، أو خارجها؟ بإيجاد بُعدها عن مركز الدائرة، ومقارنتها بطول نصف قطر الدائرة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

مثال 1

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

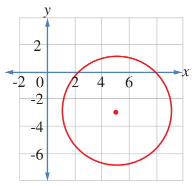
1) المركزُ هوَ النقطةُ $(-2, 7)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ 6 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
$(a, b) = (-2, 7), r = 6$	$(x-(-2))^2 + (y-7)^2 = 6^2$
	$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 36$

2) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ القُطْرِ 5 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ	$x^2 + y^2 = r^2$
بتعويضِ $r = 5$	$x^2 + y^2 = 5^2$
	$x^2 + y^2 = 25$

3) الدائرةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ.



عنـدَ النظرِ إلى الدائرةِ يَتبيَّـنُ أنَّ مركزَها النقطـةُ $(5, -3)$، وأنَّ طولَ نصفِ قُطْرِها 4 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
$(a, b) = (5, -3), r = 4$	$(x-5)^2 + (y-(-3))^2 = 4^2$
	$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$

أتحقق من فهمي

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ: انظر الهامش.

a) المركزُ هوَ النقطةُ $(0, 4)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ 9 وحداتٍ.

b) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ القُطْرِ 8 وحداتٍ.

إذا عُلِمَ مركزُ الدائرةِ ونقطةٌ واقعةٌ عليْها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ، ثمَّ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ.

مراجعةُ المفهومِ

إذا كانَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْنِ $A(x_1, y_1)$، وَ $B(x_2, y_2)$، هوَ d فإنَّ:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

3 التدريس

- ذكِّـر الطلبة بمعادلة الخط المسـتقيم، ثم بيِّن لهم أن مفهوم معادلة أي منحنى في المستوى الإحداثي يعني وجود علاقة تربط إحداثيي النقاط الواقعة عليه.
- وضِّح للطلبة أنه يمكن إيجـاد معادلة الدائرة بفرض نقطة $P(x, y)$ علـى محيطها، وإيجـاد العلاقة التي تربط بين x، و y برسم مثلث قائم الزاوية، أحد رؤوسه النقطـة P، والـرأس الآخر مركز الدائـرة، ثم تطبيق نظرية فيثاغورس عليه، أو استعمال قانون المسافة بين نقطتين.
- ناقِش الطلبة في طريقة التوصُّل إلى الصيغة القياسـية لمعادلة الدائرة، ثم اذكر أمثلة بسيطة عليها، مُبيِّنًا كيف يمكن إيجـاد إحداثيي المركز وطـول نصف القطر لدائرة أُعطيت معادلتها بالصورة القياسية:
- اكتب المعادلة: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما إحداثيا مركز هذه الدائرة؟ $(2, 3)$.
  - » ما طول نصف قطرها؟ 5 وحدات طول.
  - » أي النقاط تقـع على هذه الدائـرة: $A(-2, 6)$، أم $B(5, -2)$، أم $C(-1, 7)$؟ النقطتـان A، و C تقعان عليها.
  - » إذا كان الإحداثـي x لنقطة واقعة على هذه الدائرة هو 6، فمـاذا يكون الإحداثـي y لها؟ $y = 0$، أو $y = 6$

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثـال 1 الذي يبين كيفية كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية إذا عُلِم مركزها وطول نصف قطرها.

مثال إضافي

- اكتـب معادلة دائرة مركزهـا $(4, -2)$ وطول قطرها $\sqrt{52}$ وحدة. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 13$

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشـها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 1):

a) $x^2 + (y-4)^2 = 81$

b) $x^2 + y^2 = 16$

مثال 2

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(-7, 13)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 4)$.

أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ قانونُ المسافةِ بينَ نقطتينِ

$r^2 = (5 - (-7))^2 + (4 - 13)^2$ بالتعويضِ

$= 144 + 81$ بالتبسيطِ

$= 225$

$r = \sqrt{225} = 15$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ

والآنَ، أُعوِّضُ إحداثيَّي المركزِ وقيمةَ r^2 في الصورةِ القياسيةِ لمعادلةِ الدائرةِ، فأَجِدُ أنَّ معادلةَ هذهِ الدائرةِ هيَ:

$$(x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 225.$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(4, -3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(2, 0)$. انظر الهامش.

إذا علمْنا معادلةَ دائرةٍ بالصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، فإنَّهُ يُمكِنُ فكُّ الأقواسِ وإعادةُ الترتيبِ، فتنتجُ المعادلةُ: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

يُمكِنُ أيضًا كتابةُ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ الآتيةِ:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيثُ: $f = -a, g = -b, c = a^2 + b^2 - r^2$، وهيَ تُسمّى **الصورةَ العامةَ** (general form) لمعادلةِ الدائرةِ.

إذا علمْنا الصورةَ العامةَ لمعادلةِ أيِّ دائرةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحويلُها إلى الصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، وذلكَ بإكمالِ المربَّعِ.

مراجعةُ المفهومِ

لإكمالِ المربَّعِ للحدَّيْنِ $x^2 + ax$، يضافُ $\left(\frac{a}{2}\right)^2$، ثمَّ يُطرَحُ، فينتجُ مربَّعٌ كاملٌ هوَ $(x + \frac{a}{2})^2$ وبذلكَ يتحوَّلُ $x^2 + ax$ إلى $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 13$

أخطاء مفاهيمية:

قد يُعوِّض بعض الطلبة الطول المعطى في السؤال بدل نصف قطر الدائرة في المعادلة من دون انتباه إلى أن المعطى طول قطر، أو نصف قطر؛ لذا نبِّههم على التحقُّق من الطول المعطى، فإن كان قطرًا وجب عليهم قسمته على 2؛ لينتج نصف القطر الذي يجب تعويضه في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يبين كيفية كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية إذا عُلِم مركزها ونقطة واقعة عليها.

مثال إضافي

- اكتب معادلة دائرة مركزها $(-1, 3)$، وتمر بالنقطة $(-4, 6)$. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 18$

- ناقِش الطلبة في عملية تحويل معادلة الدائرة من الصورة القياسية إلى الصورة العامة.
- اكتب معادلة دائرة بالصورة القياسية، مثل: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$، ثم اطلب إلى الطلبة تحويلها إلى الصورة العامة.
- ذكِّر الطلبة بضرورة إكمال المربع، مُبيِّنًا لهم طريقة تحويل معادلة دائرة من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بإكمال المربع عن طريق المثال الآتي:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية الانتقال من الصورة العامة إلى الصورة القياسية، وإيجاد إحداثيي مركز الدائرة، وطول نصف قطرها من معادلتها.

مثال إضافي

- حوِّل معادلة الدائرة: $3x^2+3y^2-12x+18y-12=0$ إلى الصورة القياسية، ثم اكتب إحداثيي مركزها، وطول نصف قطرها.

$(x-2)^2+(y+3)^2=17;\ (2,-3)\ ;r=\sqrt{17}$

إرشاد: نبِّه الطلبة إلى ضرورة قسمة طرفي المعادلة على معامل x^2 (الذي يكون مطابقًا لمعامل y^2 في معادلة الدائرة) إن لم يكن 1، قبل إكمال المربع.

مثال 3

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2+y^2-8x+6y-56=0$.

بإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي x ينتجُ: $x^2-8x=(x-4)^2-16$، وبإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي y ينتجُ: $y^2+6y=(y+3)^2-9$.

وبذلكَ يُمكِنُ تحويلُ المعادلةِ $x^2+y^2-8x+6y-56=0$ إلى:

$$(x-4)^2-16+(y+3)^2-9-56=0$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2=81.$$

بمقارنةِ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$، نجدُ أنَّ:

$$a=4\ ,\ b=-3,\ r=9.$$

إذنْ، مركزُ هذهِ الدائرةِ هوَ النقطةُ $(4,-3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 9 وحداتٍ.

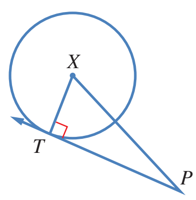
أتحقق من فهمي انظر الهامش.

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2+y^2+2x-10y-10=0$.

تعلَّمْتُ في درسٍ سابقٍ أنَّ مماسَّ الدائرةِ يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وأنَّهُ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ. وهذا يفيدُ في التحقُّقِ منْ أنَّ مستقيمًا معطًى هوُ مماسٌّ لدائرةٍ معطاةٍ، وحسابِ طولِ قطعةٍ مماسِّيةٍ كما في المثالَيْنِ الآتييْنِ.

مثال 4

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P\ (6,-6)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x+5)^2+(y-4)^2=25$.



أَرسمُ مُخطَّطًا، ولتكنِ النقطةُ X مركزَ الدائرةِ، وَT نقطةَ التَّماسِّ.

لحسابِ طولِ المماسِّ $\overline{PT}$، ثُم أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ القائمِ XTP، الذي يُمكِنُ إيجادُ طولَيْ ضلعيْنِ فيهِ، هما: نصفُ القُطْرِ $\overline{XT}$، والوترُ $\overline{XP}$.

طولُ نصفِ القُطْرِ XT هوَ 5. ولحسابِ XP، أَجِدُ المسافةَ بينَ مركزِ الدائرةِ $X\,(-5,4)$ والنقطةِ $P\ (6,-6)$ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$$(XP)^2=(6-(-5))^2+(-6-4)^2=(11)^2+(-10)^2=221.$$

وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس على المثلثِ XTP :

$$(PT)^2=(XP)^2-(XT)^2 \quad \text{نظريةُ فيثاغورس}$$

أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن مركز الدائرة $(x+6)^2+(y-2)^2=17$ هو $(6\ ,-2)$؛ لذا نبِّههم إلى أن 6 تساوي $-a$، وأن -2 تساوي $-b$ في الصورة القياسية.

وبذلك، فإن: $a=-6, b=2$، أو تحويلها إلى:

$(x-(-6))^2+(y-2)^2=17$، ومقارنتها بـ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

حيث يسهل استنتاج قيمة كلٍّ من a، و b، و r

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

$(-1,5);\ r=6$

بالتعويضِ $= 221 - 25$

بالتبسيطِ $= 196$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $PT = \sqrt{196} = 14$

إذنْ، طولُ المماسِّ 14 وحدةً.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P\ (7, 4)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$. 7 وحدات.

مثال 5

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 2x + 3$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$.

أَحُلُّ النظامَ المُكوَّنُ منَ المعادلتيْنِ: $y = 2x + 3$، وَ $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$؛ لإيجادِ عددِ نقاطِ تقاطعِ المستقيمِ والدائرةِ. فإذا كانَ عددُ نقاطِ التقاطعِ واحدًا فقطْ، فإنَّ المستقيمَ يكونُ مماسًّا للدائرةِ.

بتعويضِ $y = 2x + 3$ في معادلةِ الدائرةِ $(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45$

بالتبسيطِ $(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45$

بفكِّ الأقواسِ $x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، وجعلِ الطرفِ الأيمنِ صفرًا $5x^2 - 40x + 80 = 0$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 5 $x^2 - 8x + 16 = 0$

بالتحليلِ $(x - 4)^2 = 0$

$x = 4$

بتعويضِ قيمةِ x في إحدى المعادلتيْنِ لإيجادِ قيمةِ y $y = 2(4) + 3 = 11$

بما أنَّ هذا المستقيمَ يقطعُ الدائرةَ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ هيَ $(4, 11)$، فإنَّهُ مماسٌّ للدائرةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 4x - 5$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$. انظر الهامش.

62

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 5):

بتعويض $y = 4x - 5$ في المعادلة: $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$، تنتج المعادلة: $17x^2 - 102x + 153 = 0$ وبقسمة هذه المعادلة على 17، تنتج المعادلة:

$x^2 - 6x + 9 = 0$ التي لها حل واحد، هو: $x = 3$ وبتعويض القيمة $x = 3$ في المعادلة $y = 4x - 5$، فإن: $y = 7$ إذن: هذا المستقيم هو مماس للدائرة؛ لأنه يتقاطع معها في نقطة واحدة فقط، هي: $(3, 7)$.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة تحديد الشكل الذي تمثله المعادلات الآتية:
  - » $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 10 = 0$ دائرة
  - » $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$ نقطة
  - » $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$ لا شيء
- اطلب إليهم ذكر الشرط الذي يجعل المعادلة: $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ تمثل دائرة.
  $f^2 + g^2 - c > 0$

مثال 4

- ذكِّر الطلبة بخصائص مماس الدائرة، ثم ناقِشهم في حل المثال 4 الذي يبين كيفية حساب طول القطعة المماسية إذا عُلِمت معادلة الدائرة والنقطة التي رُسِم منها المماس.

مثال إضافي

- أجد طول القطعة المماسية المرسومة من النقطة $(1, 16)$ إلى نقطة التماس على دائرة معادلتها: $x^2 + y^2 - 16x + 2y = 39$ 15.3 وحدة تقريبًا.

مثال 5

- ناقِش الطلبة في حل المثال 5 الذي يبين طريقة الحكم على أن مستقيمًا معلومًا هو مماس لدائرة أم لا.

مثال إضافي

- هل المستقيم $x - 7y + 12 = 0$ مماس للدائرة التي معادلتها: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$؟ أبرِّر إجابتي.
  هذا المستقيم ليس مماسًّا لهذه الدائرة؛ لأنه يتقاطع معها في نقطتين، هما: $(-5, 1)$، و $(9, 3)$

أتدرب وأحل المسائل

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 7 وحداتٍ. $x^2 + y^2 = 49$

2 المركزُ هوَ النقطةُ $(-1, 3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 5 وحداتٍ. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$

3 المركزُ هوَ النقطةُ $(-3, -2)$، وطولُ قُطْرِها 10 وحداتٍ. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركزُها وإحداثيّا نقطةٍ تمرُّ بها في كلٍّ ممّا يأتي:

4 المركزُ $(-1, 2)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(3, 5)$. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

5 المركزُ نقطةُ الأصلِ، وتمرُّ بالنقطةِ $(-9, -4)$. $x^2 + y^2 = 97$

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

6 $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$ $r = 6 , (-5, 8)$

7 $(x - 19)^2 + (y - 33)^2 = 400$ $r = 20 , (19, 33)$

8 $x^2 + (y + 4)^2 = 45$ $r = 3\sqrt{5} , (0, -4)$

9 $(x - 3)^2 + (y + 10)^2 = 28$ $r = 2\sqrt{7} , (3, -10)$

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

10 $x^2 + y^2 - 18x + 14y = 14$ $r = 12 , (9, -7)$

11 $x^2 + y^2 + 8x = 9$ $r = 5 , (-4, 0)$

12 $2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$ $r = 3\sqrt{3} , (-5, -9)$

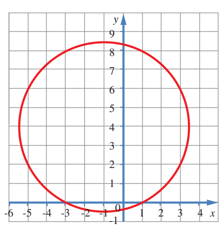
13 $4x^2 + 4y^2 + 120x + 855 = 24y$ $r \approx 13 , (-15, 3)$

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ بالصورتيْنِ: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$، حيثُ: f، وَ g، وَ c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

14 المركزُ $(-1, -11)$، وطولُ القُطْرِ 26 وحدةً. انظر الهامش.

15 المركزُ $(3, 0)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ. انظر الهامش.

16 المركزُ $(-4, 7)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(1, 3)$. انظر الهامش.



17 أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنَةِ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ. انظر الهامش.

18 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة من 1 إلى 7 في الصف بعد حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3)، وتابعهم في هذه الأثناء.
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة ذوات الأرقام الفردية من 8 إلى 17، وتابِعهم في هذه الأثناء، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأسئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثامنة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إجابات:

14) $(x + 11)^2 + (y + 1)^2 = 169$

$x^2 + y^2 + 22x + 2y - 47 = 0$

15) $(x - 3)^2 + y^2 = 48$

$x^2 + y^2 - 6x - 39 = 0$

16) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 41$

$x^2 + y^2 + 8x - 14y + 24 = 0$

17) مركز هذه الدائرة هو $(-1, 4)$، ومن المُلاحَظ أنها تمر بالنقطة $(1, 0)$؛ لذا، فإن مربع طول نصف قطرها: $2^2 + 4^2 = 20$

إذن: معادلتها هي: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$

أو: $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$

19 أجدُ إحداثيَّي المركزِ وطولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي معادلتُها: $(2x-4)^2 + (2y+6)^2 = 100$. انظر ملحق الإجابات.

20 دائــرةٌ معادلتُها $x^2 + y^2 + px + 6y = 96$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 11 وحــدةً، وَ p عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أَجِدُ بُعْدَ مركزِ الدائرةِ عنْ نقطةِ الأصلِ. انظر ملحق الإجابات.

21 **ممــرٌّ:** ممرٌّ دائريٌّ محصورٌ بينَ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُــهُ، وهــوَ النقطةُ (3 ,7). إذا كانَــتِ الدائرةُ الكبرى تمسُّ المحــورَ y، والصغرى تمسُّ المحورَ x، فأَكتبُ معادلتَيِ الدائرتيْنِ اللتيْنِ تُشــكِّلانِ المحيــطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثمَّ أَجِدُ مساحةَ الممرِّ بالوحداتِ المربَّعةِ. انظر ملحق الإجابات.

تُمثِّلُ النقطتانِ $D\ (2, 9)$، وَ $E\ (14, -7)$ نهايتَيْ قُطْرٍ لدائرةٍ مركزُها C:

22 أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ C. $C\,(8, 1)$

23 أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ. $r = 10$

24 أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ. $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 100$

25 أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 3x - 2$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$. انظر ملحق الإجابات.

26 رُسِمَ مماسٌّ منَ النقطةِ $P\ (8, 5)$ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$. أَجِدُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ النقطةَ P بنقطةِ التَّماسِّ. $4\sqrt{3}$

مهارات التفكير العليا

27 **تبريرٌ:** قالَ عبدُ الرحمنِ إنَّ $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 59 = 0$ ليسَتْ معادلةَ دائرةٍ. هلْ قولُ عبدِ الرحمنِ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. قوله صحيح لأن $r^2 = a^2 + b^2 - c = 49 + 9 - 59 = -1$ وهي عدد غير حقيقي.

28 **تحدٍّ:** رُسِمَ منَ النقطةِ $A\ (8, 21)$ مماسّانِ للدائرةِ التي مركزُها C، فمسّاها عندَ النقطتيْنِ D، وَ B. إذا كانَتْ معادلةُ الدائرةِ هيَ $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 49$، فما مساحةُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟ انظر ملحق الإجابات.

29 **تحدٍّ:** أَكتبُ الصورةَ القياسيةَ لمعادلةِ الدائرةِ $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 24 = 0$ منْ دونِ استعمالِ طريقةِ إكمالِ المربَّعِ. انظر ملحق الإجابات.

64

مسابقة (التحديات الثلاثة):

- أحضِر ثلاثة صناديق، ثم اكتب علــى الأول عبارة: (التحدي 1)، واكتب على الثاني عبارة: (التحدي 2)، واكتب على الثالث عبارة: (التحدي 3).
- ضع مجموعة من الأوراق في كل صندوق، كُتِب في كلٍّ منها ســؤال مناســب حسب الآتي:
  - **التحدي 1:** أسئلة مشابهة للمثال (1).
  - **التحدي 2:** أسئلة مشابهة للمثال (2).
  - **التحدي 3:** أسئلة مشابهة للمثال (3).
- ارمِ على أحد الطلبة كرة إسفنجية، ثم اطلب إليه سحب ورقة من أحد الصناديق الثلاثة، والإجابة عن السؤال، ويمكنك استعمال استراتيجية الرؤوس المرقمة لاختيار الطلبة.
- كرِّر الخطوة السابقة لأكثر من طالب.
- يمكن تشجيع الطلبة على المشــاركة بتقديم جوائز رمزية، أو وضع ملصقات جذابة على ورقة الإجابة، والطلب إليهم الاحتفاظ بها في ملف أعمالهم.

5 الإثراء

- جد مركز الدائرة التي تمر بالنقاط: $A(4, 0), B(-6, 0), C(0, 4)$، ثم اكتب معادلتها.
  المركز هو $(-1, -1)$، ومعادلة الدائرة هي: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 26$
- اطلب إلــى الطلبة اســتعمال برمجيــة جيوجبرا في المنزل لتحديــد أي المعادلات الآتيــة تمثل معادلة دائرة، ثم اطلب إلى الطلبة ذوي المســتوى المتوسط وفوق المتوسط بيان ذلك جبريًّا:
  - $x^2 + y^2 - 10x + 6y = -18$
  - $x^2 + y^2 - 18x + 14y + 14 = 0$
  - $3x^2 + 4y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$
  - $2x^2 + 2y^2 - 4x + 10y - 20 = 0$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة الذين تناول نموذجهم معادلة الدائرة تنفيذ الخطوة الثالثة من المشروع، واستعمال برمجية جيوجبرا لرسم النموذج في جهاز الحاسوب، وإيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة إكمالهم التقرير الذي بدؤوا إعداده، وتضمينه تفسيرًا للخصيصة التي يتمتع بها نموذجهم.

6 الختام

- اطلــب إلــى الطلبــة شــرح طريقة إيجاد معادلة دائرة عُلِمــت إحداثيــات طرفــي قطــر فيهــا، ثــم اتبــاع تلك الطريقــة لإيجــاد معادلــة دائــرة تكــون النقطتــان: $A(5, -6)$، و $B(13, 10)$ طرفــي قطــر فيهــا.
  $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 80$

إرشادات للمعلم

لتشــجيع الطلبة من ذوي المســتوى دون المتوسط علــى المشــاركة، يمكن اختيــار طلبة مــن ذوي المستوى المتوســط، وفوق المتوسط للمشاركة في بداية المسابقة.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

نتاجات الدرس

- يستعمل برمجية جيوجبرا لاستكشاف العلاقة بين نصفي قطري الدائرتين، وموقع كلٍّ منهما بالنسبة إلى الأخرى.

التعلم القبلي:

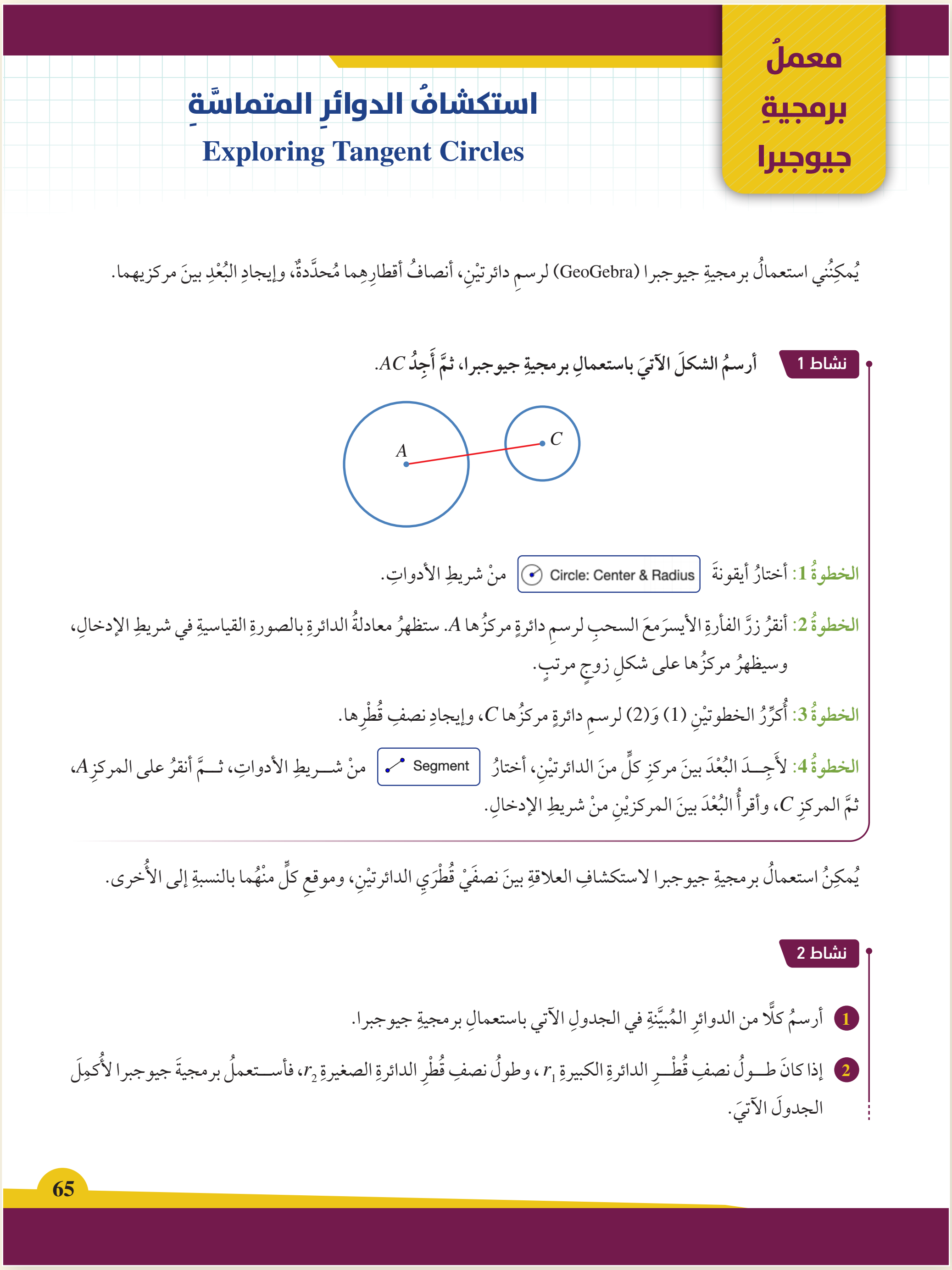
- استعمال نظريات مماس الدائرة ومعادلتها.
- إيجاد الأطوال والقياسات لزوايا في أشكال رُسِمت باستعمال برمجية جيوجبرا.

1 التهيئة

- رافِق الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثلاثية على الأكثر، وغير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة فتح برمجية جيوجبرا من الموقع: https://www.geogebra.org/geometry في أجهزة الحاسوب.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة رسم دائرة طول نصف قطرها 3 وحدات، ثم رسم دائرة مركزها معلوم، وتمر بنقطة معلومة، ثم إيجاد طول نصف قطرها.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا.

2 الاستكشاف

- وجه كل طالب إلى رسم دائرتين متباعدتين ودائرتين متماستين في دفتره.
- اطلب إلى أحد الطلبة رسم إجابته على اللوح، ثم اسأل زملاءه:
  » من لديه إجابة أخرى؟
  » ارسمها (يرسم أكثر من طالب إجابته على اللوح).
- وضِّح للطلبة الحالات الممكنة لدائرتين في مستوى.



معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ الدوائرِ المتماسَّةِ
Exploring Tangent Circles

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لرسمِ دائرتَيْنِ، أنصافُ أقطارِهِما مُحدَّدةٌ، وإيجادِ البُعْدِ بينَ مركزيهِما.

نشاط 1 أرسمُ الشكلَ الآتيَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أجِدُ AC.

A C

الخطوةُ 1: أختارُ أيقونةَ Circle: Center & Radius منْ شريطِ الأدواتِ.

الخطوةُ 2: أنقرُ زرَّ الفأرةِ الأيسرَ معَ السحبِ لرسمِ دائرةٍ مركزُها A. ستظهرُ معادلةُ الدائرةِ بالصورةِ القياسيةِ في شريطِ الإدخالِ، وسيظهرُ مركزُها على شكلِ زوجٍ مرتبٍ.

الخطوةُ 3: أُكرِّرُ الخطوتَيْنِ (1) وَ(2) لرسمِ دائرةٍ مركزُها C، وإيجادِ نصفِ قُطْرِها.

الخطوةُ 4: لأجِدَ البُعْدَ بينَ مركزِ كلٍّ منَ الدائرتَيْنِ، أختارُ Segment منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على المركزِ A، ثمَّ المركزِ C، وأقرأُ البُعْدَ بينَ المركزَيْنِ منْ شريطِ الإدخالِ.

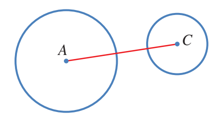
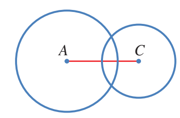
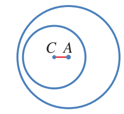
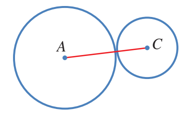
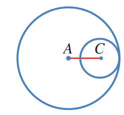
يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ العلاقةِ بينَ نصفَيْ قُطرَيِ الدائرتَيْنِ، وموقعِ كلٍّ منْهُما بالنسبةِ إلى الأُخرى.

نشاط 2

1. أرسمُ كلًّا منَ الدوائرِ المُبيَّنةِ في الجدولِ الآتي باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
2. إذا كانَ طولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ الكبيرةِ r_1، وطولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ الصغيرةِ r_2، فأستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لأُكمِلَ الجدولَ الآتيَ.

65

3 أُقارِنُ بينَ قيمِ $r_1 + r_2$، وَ $r_1 - r_2$ وَ AC، ثمَّ أستنتجُ العلاقةَ بينَها وبينَ وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

وضعُ الدائرتيْنِ	r_1	r_2	AC	$r_1 - r_2$	$r_1 + r_2$	الاستنتاجُ
						
						
						
						
						

أتدرب

أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ دونَ رسمِهِما:

1. $r_1 = 9,\ r_2 = 5\ , AC = 3$ واحدة داخل الأخرى.
2. $r_1 = 11,\ r_2 = 5\ , AC = 6$ متماستان من الداخل.
3. $r_1 = 6,\ r_2 = 3\ , AC = 17$ متباعدتان.
4. $r_1 = 8,\ r_2 = 5\ , AC = 3$ متماستان من الداخل.

66

3 التدريس

- وضِّح للطلبة كيف يُنفِّذ النشاط 1، ثم اطلب إليهم تنفيذه ضمن مجموعات، وتأكَّد أن أفراد كل مجموعة يمكنهم تنفيذ النشاط.
- اسأل الطلبة:
  - » بماذا توصَف هاتان الدائرتان؟ متباعدتان.
  - » ما علاقة المسافة بين مركزيهما وطول نصفي قطريهما؟ المسافة بين مركزيهما أكبر من مجموع طولي نصفي قطريهما.
  - » إذا كان طولا نصفي قطري دائرتين 5 cm, 9 cm، وكانت الدائرتان متماستين من الخارج، فما المسافة بين مركزيهما؟ 14 cm
  - » إذا كان طولا نصفي قطري دائرتين 8 cm, 13 cm، وكانتا الدائرتان متماستين من الداخل، فما المسافة بين مركزيهما؟ 5 cm
  - » إذا كان طولا نصفي قطري دائرتين 7 cm, 15 cm، وكانتا الدائرتان متقاطعتين، فما المسافة بين مركزيهما؟ أي عدد أكبر من 8، وأقل من 22
- وزِّع على الطلبة **ورقة المصادر 2**، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط 2، وملء الجدول باستعمال برمجية جيوجبرا.
- اسأل الطلبة عن علاقة المسافة بين المركزين وطولي نصفي القطرين في كل حالة.
- اطلب إلى الطلبة وصف أوضاع الدوائر في الحالات الخمس.

4 التدريب

- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة من 1 إلى 4 في بند (أتدرب)، وتابِعهم في هذه الأثناء، والفت انتباههم إلى أنه يمكنهم التحقُّق من إجاباتهم باستعمال برمجية جيوجبرا.

5 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة كتابة تقرير عن استعمالات برمجية جيوجبرا في الهندسة، وتوثيقها بالصور (استعمل خاصية طباعة الشاشة).

6 الختام

- اسأل الطلبة:
  - » كيف يمكن تحديد وضع دائرتين في المستوى الإحداثي بالنسبة إلى بعضهما من دون رسمهما؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكرها.

الدرس 5

نتاجات الدرس

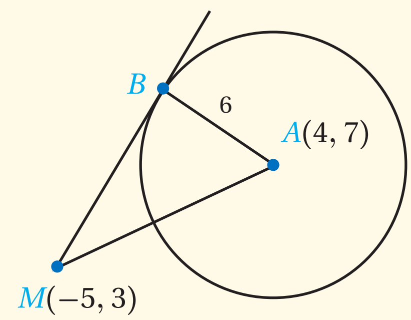
- يستنتج العلاقة بين دائرتين.
- يوظف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القطرين لدائرتين، وطول المماس المشترك لإيجاد أطوال مجهولة.

التعلم القبلي:

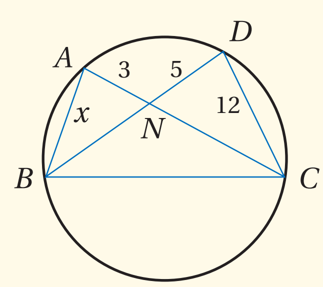
- معرفة مفهوم مماس الدائرة، وخصائص المماسات.
- حساب طول القطعة المماسية.
- توظيف تشابه المثلثات في حل مسائل رياضية.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بمماس الدائرة، وخصائص المماس والمماسين المرسومين من نقطة خارج الدائرة، ثم ارسم الشكل المجاور الذي يبين المماس $\overleftrightarrow{MB}$ لدائرة مركزها A، ثم اطلب إليهم إيجاد طول القطعة المماسية $\overline{MB}$، وتبرير خطوات الحل.



- اسأل الطلبة عن مفهوم تشابه مثلثين، وشروط ذلك.
- ارسم الشكل المجاور، ثم اسأل الطلبة:
  - » لماذا يكون المثلثان NCD، و NBA متشابهين؟
  - » ما قيمة x؟ 7.2



الدرس 5

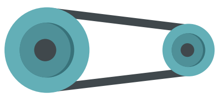
الدوائرُ المتماسَّةُ

Tangent Circles

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ العلاقةِ بينَ دائرتيْنِ، وتعرُّفُ المماسّاتِ المشتركةِ، وتوظيفُ ذلكَ في حَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحاتُ الدائرتانِ المتماسَّتانِ، المماسُّ المشتركُ الخارجيُّ، المماسُّ المشتركُ الداخليُّ.

مسألةُ اليومِ يدورُ حزامٌ مطّاطيٌّ حولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالـي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَي التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

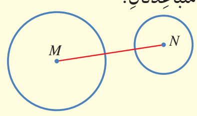


يُمكِنُ أنْ تتقاطعَ الدائرتانِ المرسومتانِ في مستوًى واحدٍ في نقطةٍ واحدةٍ، أوْ نقطتيْنِ، وقدْ لا تتقاطعانِ أبدًا. وتُسمّى الدائرتانِ المُتقاطِعتانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ **دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ** (tangent circles).

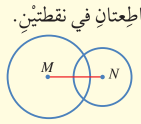
مفهومٌ أساسيٌّ

إذا رُسِمَتْ دائرتانِ في مستوًى واحدٍ، فإنَّ وضعَهُما بالنسبةِ إلى بعضِهِما ينحصرُ في الحالاتِ الآتيةِ:

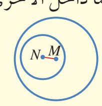
1. مُتباعِدتانِ.



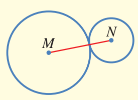
2. مُتقاطِعتانِ في نقطتيْنِ.



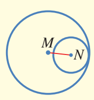
3. إحداهُما داخلَ الأُخرى.



4. مُشتركتانِ في نقطةٍ واحدةٍ؛ أيْ إنَّهما متماسَّتانِ. ولهذا الوضعِ صورتانِ:



متماسَّتانِ منَ الخارجِ.



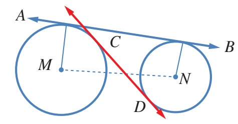
متماسَّتانِ منَ الداخلِ.

67

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » أين يمكن أن تصادف مثل هذا الوضع؟ ستتنوع إجابات الطلبة.
  - » ما وضع الدائرتين اللتين تمثلان البكرتين؟ متباعدتان.
  - » ماذا يمثل جزء الحزام الممتد بين نقطتي التقائه مع البكرتين؟ يمثل مماسًّا لكلتا الدائرتين.
  - » كيف يمكن حساب المسافة بين مركزي البكرتين؟ باستعمال نظرية فيثاغورس؛ لوجود مثلثات قائمة.
- استمع إلى إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

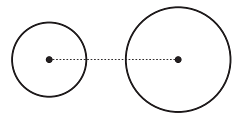
إذا كانَ المســتقيمُ مماسًّا لكلٍّ منْ دائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **مماسًّا مشتركًا** (common tangent). وإذا قطعَ المماسُّ المشــتركُ القطعةَ المســتقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، فإنَّهُ يُســمّى **المماسَّ المشــتركَ الداخلــيَّ** (common internal tangent)، وإلّا فإنَّهُ يُســمّى **المماسَّ المشــتركَ الخارجيَّ** (common external tangent). ففي الشــكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ مشتركٌ خارجيٌّ، وَ $\overleftrightarrow{CD}$ مماسٌّ مشتركٌ داخليٌّ.



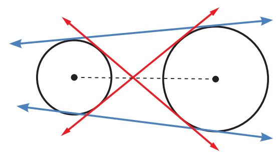
يُمكِنُ رســمُ مماسٍّ واحدٍ فقطْ للدائرةِ عندَ نقطةٍ عليْها، ويُمكِنُ أيضًا رسمُ مماسَّيْنِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، فما عددُ المماسّاتِ المشــتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها للدائرتيْنِ؟ تعتمدُ إجابةُ هذا السؤالِ على وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهما.

مثال 1

كــمْ مماسًّــا مُشــتَرَكًا يُمكِــنُ رســمُهُ للدائرتيْــنِ فــي الشــكلِ الآتــي؟ أرســمُ المماسّــاتِ، ثــمَّ أُصنِّفُهــا إلــى خارجيــةٍ وداخليــةٍ.



أرسمُ القطعــةَ المســتقيمةَ الواصلةَ بيــنَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، ثمَّ أرســمُ المماسّــاتِ التي تقطعُها بلونٍ أحمرَ، والمماسّاتِ التي لا تقطعُها بلونٍ أزرقَ.

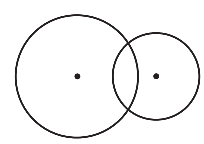


ألاحِظُ أنَّهُ يوجدُ للدائرتيْنِ مماسّانِ داخليانِ، وآخرانِ خارجيانِ.

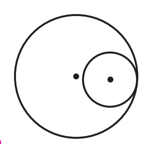
أتحقق من فهمي

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

a)



b)



انظر الهامش.

3 التدريس

- ذكِّر الطلبة بالأوضاع المختلفة لدائرتين في المستوى، وعلاقة المسافة بين مركزيهما وطولي نصفي قطريهما، ثم اذكر أمثلة على ذلك.
- وضِّح للطلبة مفهــوم المماس المشــترك لدائرتين، ثم أَدِرْ حوارًا يقودهم إلى اســتنتاج نوعيه: الداخلي، والخارجي.
- ارســم دوائر في أوضاع مختلفة، ثم اطلب إلى الطلبة تحديد عدد المماســات المشتركة التي يمكن رسمها لهذه الدوائر.

مثال 1

- ناقِش الطلبــة في حل المثال 1 الذي يبين مماســات مشتركة لدائرتين وعددها.

مثال إضافي

- ما عدد المماســات المشــتركة التي يمكن رســمها لدائرتين غيــر متقاطعتين؟ إذا كانتــا متباعدتين فإنه يمكن رسم 4 مماسات مشتركة، وإذا كانت إحداهما داخل الأخرى فلا يوجد لهما مماسات مشتركة.

تعزيز اللغة ودعمها:

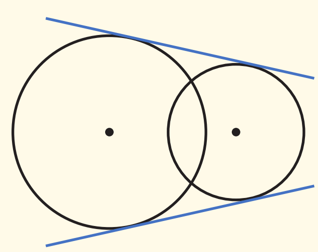
كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

- وجِّــه الطلبة إلى حــل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

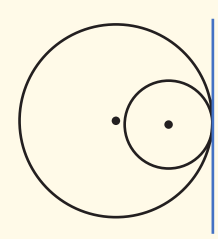
إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 1):

a)



مماسان خارجيان.

b)



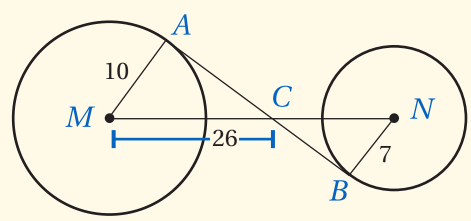
مماس واحد خارجي.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يبين كيفية حساب طول مماس مشترك داخلي لدائرتين متباعدتين.
- ناقِش الطلبة في الخطوات المتبعة، ثم اسألهم:
  » هل توجد طريقة بديلة لإيجاد طول $\overline{AB}$ ؟

مثال إضافي

- جد طول $\overline{AB}$ في الشكل المجاور. 40.8 وحدة.



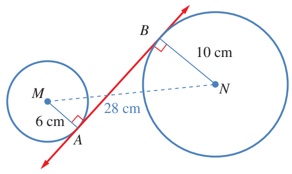
أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في تطبيق نظرية فيثاغورس، وبخاصة عندما يكـون الطول مجهولًا لأحد ضلعي الزاويــة القائمـــة، وذلك بجمـــع مربعـــي الطولين المعلومين بدلًا من طرحهما؛ لــذا أكِّد لهم أن مربع طول الضلع الأطول (أي الوتــر) في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة، وأن مربع طول أحد ضلعي القائمة يساوي مربع طول الوتر ناقص مربع طول ضلع القائمة الثاني، ثم درِّبهم على الاســتعانة برسم مبســط للمثلث توضع عليه عناصره المعلومة.

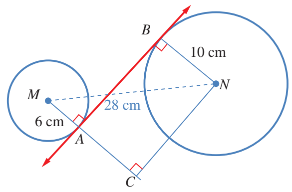
يُمكِنُ حســابُ طولِ المماسِّ المشتركِ (المســافةُ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ على الدائرتَيْنِ) بطريقةٍ مُماثِلةٍ لحسابِ طولِ المماسِّ المرسومِ منْ نقطةٍ خارجَ الدائرةِ إلى نقطةٍ عليْها.

مثال 2

أجِدُ طولَ $\overline{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.



أمدُّ $\overline{MA}$ على اســتقامتِهِ، ثمَّ أرسمُ منْ N عمودًا على امتدادِ $\overline{MA}$، ثمَّ أُســمّي نقطةَ تقاطعِ العمودِ معَها C.



$m\angle NBA = m\angle BAC = 90^\circ$ المماسُّ عموديٌّ على نصفِ القُطرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ

$m\angle ACN = 90^\circ$ $\overline{NC}$ عموديٌّ على $\overline{MA}$

$m\angle BNC = 90^\circ$ مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ 360°

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $ACNB$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

$AB = NC$ ضلعانِ مُتقابِلانِ في المستطيلِ

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MCN لأجِدَ CN:

$(CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$= 28^2 - (6 + 10)^2$ بالتعويضِ

$(CN)^2 = 784 - 256 = 528$ بالتبسيطِ

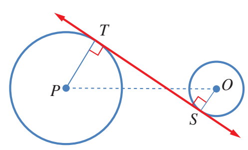
$CN = \sqrt{528} \approx 23$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ

$AB = CN \approx 23\, cm$

أتحقق من فهمي

أجِدُ طولَ المماسِّ المشتركِ $\overline{ST}$ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ:

$PT = 12$ cm, $OS = 4$ cm, $PO = 34$ cm انظر الهامش.



إرشادات للمعلم

بيِّن للطلبة في تدريب بند (**أتحقق من فهمي**) في المثال 2 أنه يمكنهم مد $\overline{PT}$، ورسم عمود من O إلى امتداد $\overline{PT}$، ثم إكمال الحل بالطريقة نفسها.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

$(PO)^2 = (PR)^2 + (OR)^2$

$34^2 = (PR)^2 + 16^2 \Rightarrow (PR)^2 = 900$

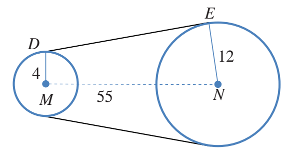
$PR = 30$

إذن: طول $\overline{ST}$ هو 30 وحدة.

مثال 3: من الحياة

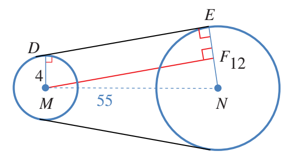
لركوبِ الدرّاجةِ الهوائيةِ فوائدُ صحيةٌ وبيئيةٌ كثيرةٌ، منها: تقويةُ عضلاتِ الجسمِ، والتقليلُ منَ التلوُّثِ الناجمِ عنِ استعمالِ وسائلِ النقلِ التقليديةِ.

درّاجاتٌ: تلتفُّ في درّاجةٍ هوائيةٍ سلسلةٌ معدنيةٌ على عجلتيْنِ مُسنّنتيْنِ دائريتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغرى 4 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبرى 12 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 55 cm. أجدُ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنّنتيْنِ.



المطلوبُ هوَ حسابُ طولِ $\overline{DE}$.

أرسمُ منْ M عمودًا على $\overline{NE}$، ثمَّ أُسمّي نقطةَ تقاطعِهِ معَها F كما في الشكلِ المجاورِ.



$m\angle NED = m\angle MDE = 90°$ المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التّماسِّ

$m\angle MFE = 90°$ $\overline{MF}$ عموديٌّ على $\overline{NE}$

$m\angle DMF = 90°$ مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ $360°$

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $MDEF$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MFN لأجدَ طولَ $\overline{MF}$:

$$(MF)^2 = (MN)^2 - (FN)^2 \quad \text{نظريةُ فيثاغورس}$$

$$= 55^2 - (12-4)^2 \quad \text{بالتعويضِ}$$

$$(MF)^2 = 3025 - 64 = 2961 \quad \text{بالتبسيطِ}$$

$$MF = \sqrt{2961} = 54.4 \quad \text{بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ}$$

$$DE = MF = 54.4 \text{ cm}$$

أتحقق من فهمي

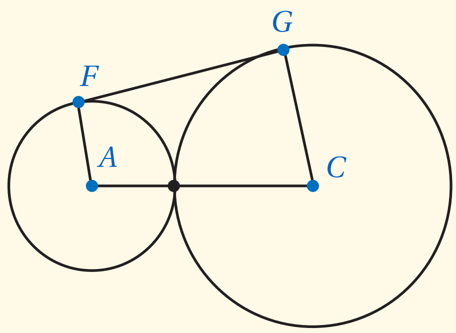
أجدُ طولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنّنةِ الكبرى في درّاجةٍ، علمًا بأنَّ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنّنتيْنِ 40 cm، وطولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنّنةِ الصغرى 5 cm، والمسافةَ بينَ مركزَيِ العجلتيْنِ المُسنّنتيْنِ 41 cm. انظر الهامش.

مثال 3: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين طريقة إيجاد طول مماس خارجي لدائرتين متباعدتين.
- ناقِش الطلبة في الخطوات المتبعة.

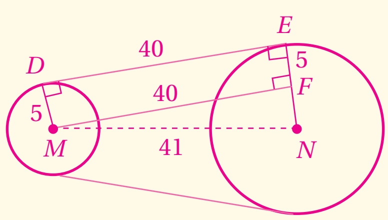
مثال إضافي

- في الشكل المجاور، $\overline{FG}$ مماس مشترك لدائرتين متماستين من الخارج. إذا كان $FG = 60$ cm، و $AC = 65$ cm، فما طول $\overline{GC}$ ؟ 45 cm



إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

افترض أن $NE = x$ cm، فيكون $FN = (x-5)$ cm



بتطبيق نظرية فيثاغورس، فإن:

$$(x-5)^2 = 41^2 - 40^2 = 81$$

$$x - 5 = 9$$

$$x = 14$$

إذن: طول نصف قطر العجلة الكبرى هو 14 cm .

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند **(أتدرب وأحل المسائل)**، ثم اطلب إليهم حل المسائل فيها.
- إذا واجــه بعض الطلبــة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّــر أنه ليس شــرطًا أن يتمكَّن الطلبــة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلــب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأســئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

الواجب المنزلي:

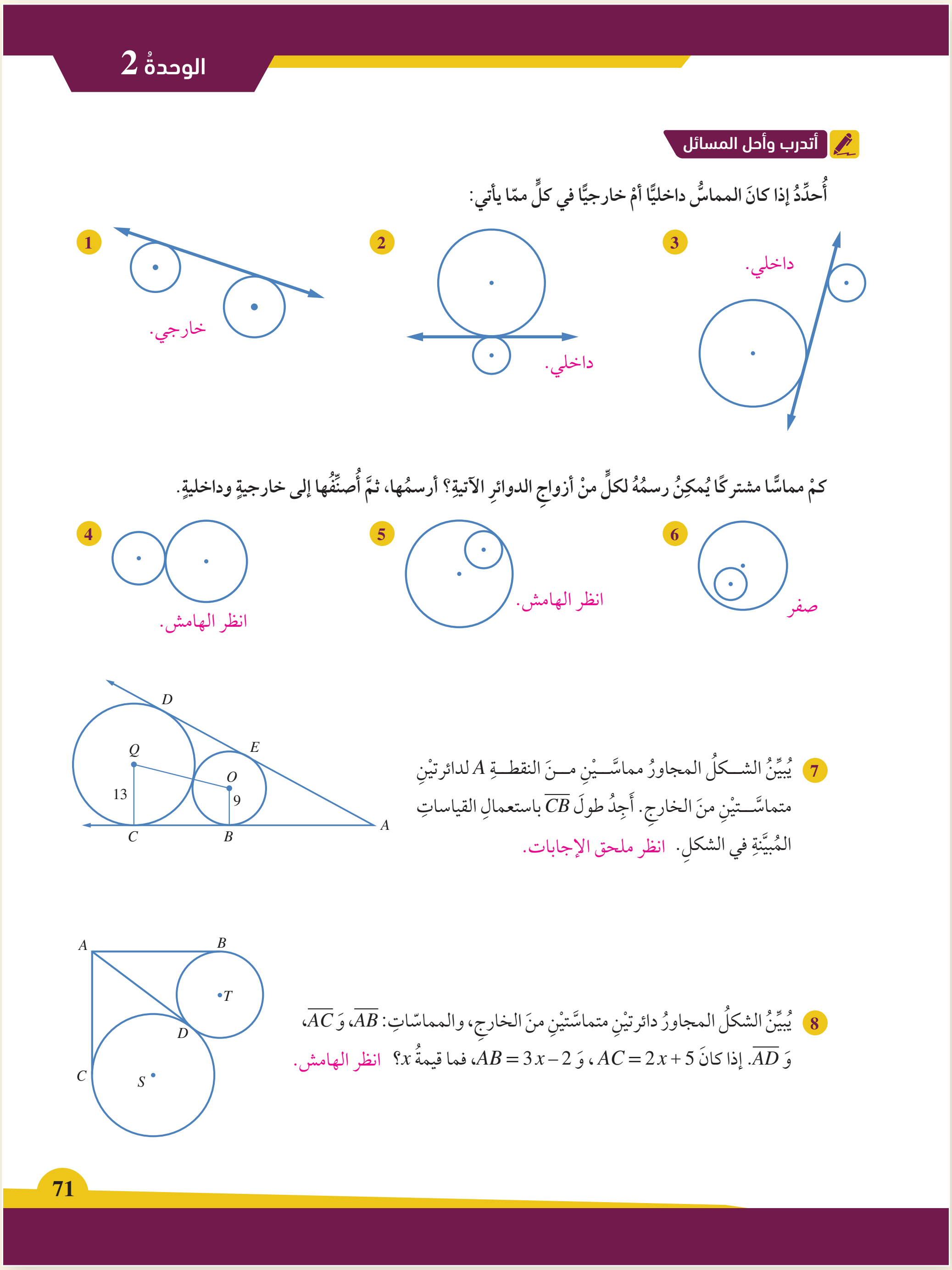
- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة من 9 إلى 12، إضافــةً إلى الأســئلة ذوات الأرقــام الفردية في الصفحة السادسة عشرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل، ثم اطلب إليهم حل مســائل مهارات التفكير العليا ضمن مجموعات غير متجانسة.

تنويع التعليم:

للتوسع في السؤال 7، اطلب إلى الطلبة إيجاد طول $\overline{AB}$.

ســيبحث الطلبة عن مثلثين متشابهين، ثم يكتبون التناسب بيــن أطوال الأضــلاع المتناظرة، ثم يجــدون طول $\overline{AB}$.

$AB = 48.6$



أتدرب وأحل المسائل

أُحَدِّدُ إذا كانَ المماسُّ داخليًّا أمْ خارجيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

1 خارجي.
2 داخلي.
3 داخلي.

كمْ مماسًّا مشتركًا يُمكِنُ رسمُهُ لكلٍّ منْ أزواجِ الدوائرِ الآتيةِ؟ أرسمُها، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

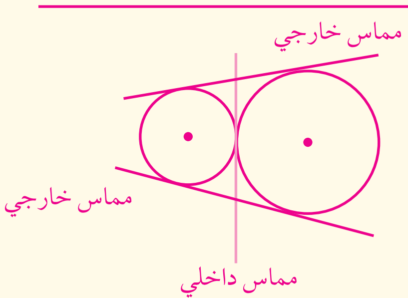
4 انظر الهامش.
5 انظر الهامش.
6 صفر

7 يُبيِّنُ الشــكلُ المجاورُ مماسَّــيْنِ مــنَ النقطــةِ A لدائرتيْنِ متماسَّــتيْنِ منَ الخارجِ. أَجِدُ طولَ $\overline{CB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ. انظر ملحق الإجابات.

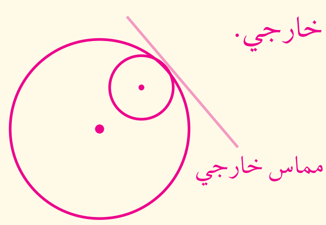
8 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، والمماسّاتِ: $\overline{AB}$، وَ $\overline{AC}$، وَ $\overline{AD}$. إذا كانَ $AC = 2x + 5$، وَ $AB = 3x - 2$، فما قيمةُ x؟ انظر الهامش.

إجابات:

4) مماسان خارجيان، ومماس داخلي.



5) مماس خارجي.



8)

مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها T

مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها S

$AB = AD$

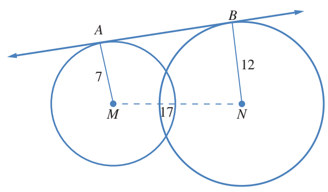
$AC = AD$

$AB = AC$

$3x - 2 = 2x + 5$

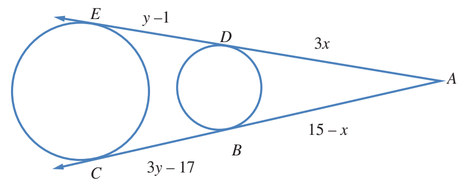
$x = 7$

9 أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ.
انظر ملحق الإجابات.



10 **حــزامٌ ناقلٌ:** يمرُّ حزامٌ حولَ دولابيْنِ دائريْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغيرِ منْهُما 15 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبيرِ 25 cm. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ الدولابيْنِ 2 m، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدولابيْنِ؟ انظر ملحق الإجابات.

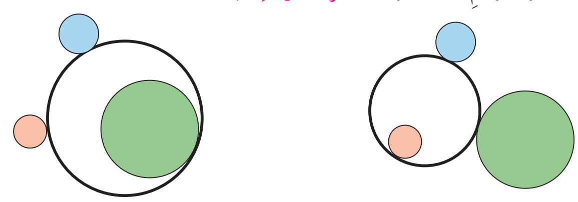
11 أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما إذا كانَتْ معادلتاهُما: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0, x^2 + y^2 = 25$.
انظر ملحق الإجابات.



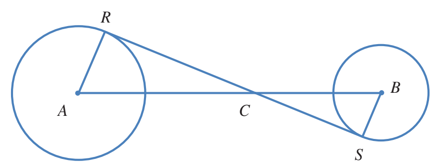
12 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.
انظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

13 **تحــدٍّ:** يُمثِّلُ الشــكلانِ الآتيانِ طريقتيْنِ لرســمِ دائرةٍ تُلامِــسُ كلًّا منَ الدائــرةِ الزرقاءِ، والخضــراءِ، والحمراءِ. أَجِدُ 6 طرائقَ أُخرى لرسمِ هذهِ الدائرةِ. انظر ملحق الإجابات.



14 **برهــانٌ:** تُمثِّلُ $\overline{RS}$ في الشــكلِ المجاورِ مماسًّــا داخليًّا مشــتركًا لدائرتيْنِ مركزاهُما A، وَ B على التوالي. أُثبِتُ أنَّ: $\frac{AC}{BC} = \frac{RC}{SC}$.
انظر ملحق الإجابات.

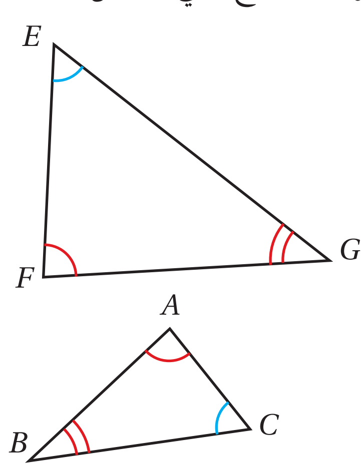


72

إرشاد:

لحل سؤال 14، وجِّه الطلبة إلى ترتيب رؤوس المثلثين المتشابهين بصورة صحيحة؛ لأهمية ذلك عند كتابة تناسب أطوال الأضلاع. ففي المثلثين المتشابهين المجاورين نكتب الجملة الآتية:

- المثلث ABC يشابه المثلث FGE؛ لأن الزاويــة A تطابــق الزاوية F، والزاويــة B تطابــق الزاويــة G، والزاوية C تطابق الزاوية E.
- ونكتب تناسب أطوال الأضلاع وفق الترتيب الصحيح: $\frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FE} = \frac{BC}{GE}$.



5 الإثراء

- إذا كان طــول مماس مشــترك داخلــي لدائرتين هو 45 وحدة، والمسافة بين مركزيهما 51 وحدة، وطول قطر إحدى الدائرتين 18 وحدة، فما طول قطر الدائرة الأخرى؟ 30 وحدة.

تعليمات المشروع:

- ذكِّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمســات النهائية على المشروع، والتأكُّد أن عناصر المشــروع جميعهــا موجودة يوم العرض.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة رسم دائرتين متماستين من الخارج، طولا نصفي قطريهما 4 cm، و 2 cm، وهما تمســان دائرة ثالثة من الداخل، طول قطرها 12 وحدة.

التقويم الختامي:

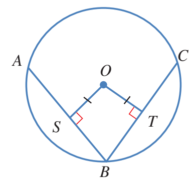
- راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجابتهم أمام أفراد المجموعات الأخرى.
- اختر جزءًا من الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، وناقِشهم فيها في اليوم التالي.

ملحوظة: تُخصَّص حصتان (90 دقيقة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

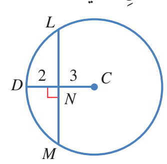
أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ في الشكلِ الآتي وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $AS = 4$ cm، وَ $OT = 3$ cm، فإنَّ طولَ $\overline{BC}$ بالسنتيمتراتِ هوَ:



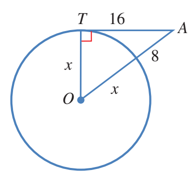
a) 6 b) 7
c) 8 d) 10

2 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ $\overline{LM}$ هوَ:



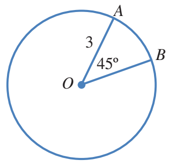
a) 5 b) 8
c) 10 d) 13

3 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ نصفِ قُطرِ الدائرةِ هوَ:



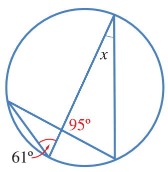
a) 5.75 b) 12
c) 4 d) 8

4 طولُ القوسِ الأصغرِ $\widehat{AB}$ بدلالةِ π في الشكلِ الآتي هوَ:



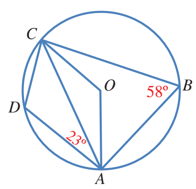
a) $\frac{9\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

5 قيمةُ x في الشكلِ الآتي هيَ:



a) 61° b) 24°
c) 34° d) 95°

6 قياسُ الزاويةِ DCA في الشكلِ الآتي هوَ:



a) 55° a) 41°
b) 35° c) 45°

اختبارُ نهايةِ الوحدة

7 النقطــةُ التي لا تقــعُ علــى الدائــرةِ التــي معادلتُها $(x+2)^2+(y-4)^2=25$ هيَ:

a) $(-2,-1)$ b) $(1,8)$

c) $(3,4)$ d) $(0,5)$

8 عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ هوَ:

a) 3 b) 2

c) 1 d) 0

9 أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التــي تُمثِّلُ النقطتانِ $A(4,-3)$، وَ $B(6,9)$ طرفا قُطْرٍ فيها.

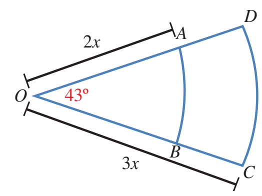
$(x-5)^2+(y-3)^2=37$

يُمثِّلُ الشــكلُ التالي قطاعيْنِ دائريّيْنِ منْ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُــهُ O. إذا كانَ نصفُ قُطْرِ الدائــرةِ الصغرى $2x$، ونصفُ قُطْــرِ الدائرةِ الكبــرى $3x$، وقياسُ الزاويــةِ AOB هوَ $43°$، ومساحةُ المنطقةِ $ABCD$ هيَ $30\ cm^2$، فأجِدْ:

10 قيمةَ x. انظر الهامش.

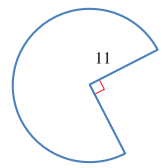
11 الفرقَ بينَ طولَيِ القوسيْنِ CD، وَAB.

انظر الهامش.



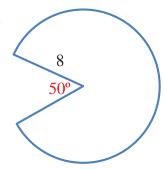
أَجِدُ المساحةَ والمحيطَ لكلٍّ منَ القطاعيْنِ الآتييْنِ:

12



$A=285.1\ ;\ L=73.8$

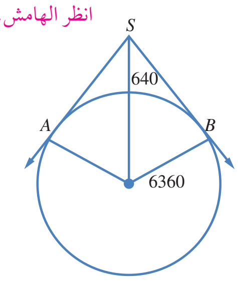
13



$A=173.1\ ;\ L=59.3$

14 **أقمارٌ صناعيــةٌ:** يرتفعُ قمرٌ صناعيٌّ مســافةَ 640 km عنْ ســطحِ الأرضِ التــي نصفُ قُطْرِهــا 6360 km، ويُمكِنُ منْهُ مشاهدةُ المنطقةِ الواقعةِ بينَ المماسَّيْنِ $\overrightarrow{SB}$ وَ $\overrightarrow{SA}$ منْ سطحِ الأرضِ. ما المسافةُ بينَ القمرِ الصناعيِّ وأبعدِ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدتُها منْهُ على سطحِ الأرضِ؟

انظر الهامش.



15 **حــزامٌ مطّاطيٌّ:** يــدورُ حــزامٌ مطّاطيٌّ حــولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَــيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالــي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بيــنَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

انظر ملحق الإجابات.

ملاحظات المعلم

....

إجابات:

10) $A=\frac{43}{360}\times 9x^2\times\pi-\frac{43}{360}\times 4x^2\times\pi=30$

$$\frac{43}{360}\times x^2\times\pi(9-4)=30$$

$$x^2=\frac{30\times 360}{43\times 5\pi}$$

$$x^2\approx 16\Rightarrow x\approx 4\ cm$$

11) الفرق بين طولي القوسين CD ، و AB هو:

$$\frac{43}{360}\times 6x\times\pi-\frac{43}{360}\times 4x\times\pi=\frac{43}{360}\times 2x\times\pi$$

$$\approx\frac{43}{360}\times 2\times 4\times\pi\approx 3\ cm$$

14) المســافة بين القمر الصناعي وأبعد نقطة يمكن مشــاهدتها منه على ســطح الأرض هي SA :

$$(SA)^2=(640+6360)^2-6360^2$$
$$=7000^2-6360^2$$
$$=8550400$$
$$SA\approx 2924\ km$$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

هي أسئلة قُدِّمت في اختبارات وطنية، أو تُحاكيها.

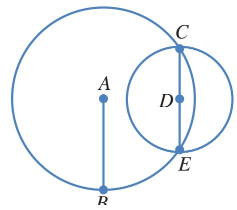
في السؤال 18، ذكِّر الطلبة بحالات تشابه المثلثات، وعلاقة أضلاع كلٍّ من المثلثين الناتجة من حالة التشابه.

مشروع الوحدة:

اطلب إلى الطلبة عرض نتائج مشروعهم، ثم ناقِشهم فيها.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

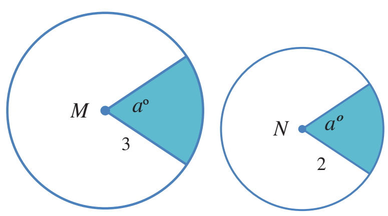
16 تتقاطعُ دائرتانِ مركزاهُما A, D في النقطتيْنِ E وَ C. إذا كانَ $AB = EC = 10\,\text{cm}$، فما طولُ $\overline{AD}$ بالسنتيمتراتِ؟



a) $5\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

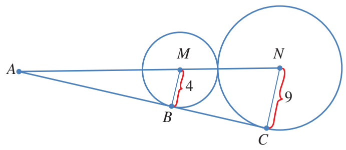
17 النقطتانِ N وَ M هما مركزا الدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي. إذا كانَتْ مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الكبرى 9 وحداتٍ مربَّعةٍ، فما مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الصغرى بالوحداتِ المربَّعةِ؟



a) 3 b) 4

c) 5 d) 7

18 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، رُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ منَ النقطةِ A الواقعةِ على المستقيمِ المارِّ بالمركزيْنِ N وَ M. إذا كانَ نصفا قُطرَيِ الدائرتيْنِ 4 وحداتٍ وَ 9 وحداتٍ، فأيُّ العباراتِ التاليةِ صحيحةٌ:



a) طولُ $\overline{AN}$ يساوي طولَ $\overline{AC}$.

b) طولُ $\overline{BC}$ يساوي 13 وحدةً.

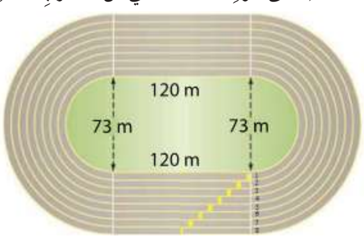
c) $AC = \frac{9}{4} AB$.

d) $AC = \frac{4}{9} AB$.

19 أجِدُ طولَ $\overline{AM}$ في السؤالِ السابقِ مُبيِّنًا خطواتِ الحَلِّ.

انظر ملحق الإجابات.

20 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي مضمارًا للجري منْ ثمانيةِ مساربَ، كلٌّ منْها يتكوَّنُ منْ جزأيْنِ مستقيميْنِ متوازييْنِ، ونصفَيْ دائرتيْنِ متصلتيْنِ بهما. إذا كانَ عرضُ كلِّ مسربٍ 1 m، فبكمْ يزيدُ طولُ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الثالثِ على طولِ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الأولِ؟



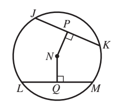
انظر ملحق الإجابات.

كتاب التمارين

الدرسُ 1
أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها

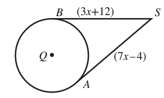
الوحدةُ 2: الدائرةُ

يُمثِّلُ N مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ $JK = LM = 24$ cm، وكانَ $NP = 9$ cm، فأَجِدُ:



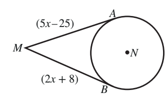
1. طولَ $\overline{NQ}$. (الوتران المتطابقان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة) 9 cm
2. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ. 15 cm

$\overline{SB}$، وَ $\overline{SA}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها Q. إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 10 cm، فأَجِدُ:

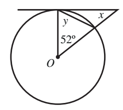


3. قيمةَ x. $x = 4$ cm
4. طولَ $\overline{QS}$. $QS = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$ cm

$\overline{MB}$، وَ $\overline{MA}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها N. إذا كانَ $MN = 34$ cm، فأَجِدُ:

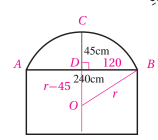


5. قيمةَ x. $x = 11$ cm
6. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ. $r = \sqrt{34^2 - 30^2} = \sqrt{256} = 16$



7. يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسًّا لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ x، وَ y.
$x = 38°;\ y = 64°$

نافذةٌ على شكلِ مستطيلٍ طولُها 240 cm، يعلو المستطيلَ قوسٌ منْ دائرةٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ ارتفاعُ منتصفِ القوسِ عنْ منتصفِ الضلعِ العلويِّ منَ المستطيلِ 45 cm، فأَجِدُ:

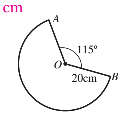


8. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي كانَ القوسُ جزءًا منْها.
العمود $\overline{CD}$ المار بمنتصف الوتر $\overline{AB}$ يمر بالمركز O.
فإذا كان نصف القطر يساوي r فإن بعد المركز عن الوتر $\overline{AB}$ يساوي $r - 45$
من نظرية فيثاغورس ينتج أن:
$r^2 = 120^2 + (r-45)^2$
$90r = 120^2 + 45^2 = 16425$
$\Rightarrow r = 182.5$ cm

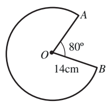
الدرسُ 2
الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ

الوحدةُ 2: الدائرةُ

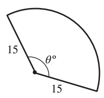
1. أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 120°، وطولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 21 cm.
$\ell = 14\pi \approx 44.0$ cm ; $A = 147\pi \approx 461.8$ cm^2
2. أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 135°، وطولُ قُطْرِ الدائرةِ 14 cm.
$\ell = 5.25\pi \approx 16.5$ cm ; $A = 18.375\pi \approx 57.7$ cm^2
3. إذا كانَتْ مساحةُ قطاعٍ دائريٍّ 35 cm^2، وكانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 72°، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟
$r \approx 7.5$ cm
4. إذا كانَتْ مساحةُ قطاعٍ دائريٍّ 60 cm^2، وكانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 45°، فما طولُ قُطْرِ الدائرةِ؟ $d \approx 24.7$ cm
5. أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ الآتي.
$L \approx 188.3$ cm



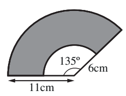
6. أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ الآتي.
$L \approx 96.4$ cm



7. إذا كانَتْ مساحةُ القطاعِ الدائريِّ المجاورِ 200 cm^2، فما قيمةُ θ؟
$\theta \approx 101.9°$



8. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ المجاورِ.
100.1 cm^2



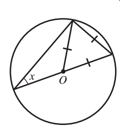
9. **علومٌ:** وُضِعَتْ كرةٌ طولُ قُطْرِها 15cm على بُعْدٍ أفقيٍّ يساوي x منْ عينِ آلاءَ. إذا كانَ طولُ خطِّ البصرِ الواصلِ بينَ مركزِ العينِ وأبعدِ نقطةٍ على الكرةِ يُمكِنُ أنْ تراها آلاءُ هوَ 40cm، فما قيمةُ x؟
انظر ملحق الإجابات

الدرسُ 3
الزوايا في الدائرةِ

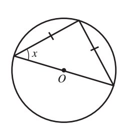
الوحدةُ 2: الدائرةُ

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فما قيمةُ x في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ؟

1. $x = 30°$

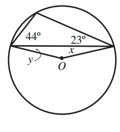


2. $x = 45°$

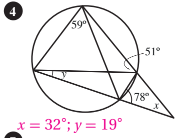


أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في ما يأتي (أفترضُ أنَّ O هيَ مركزُ الدائرةِ):

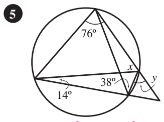
3. $x = 134°;\ y = 23°$



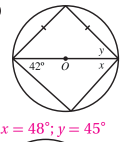
4. $x = 32°;\ y = 19°$



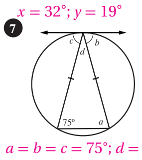
5. $x = 52°;\ y = 52°$



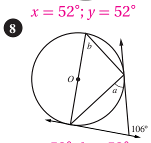
6. $x = 48°;\ y = 45°$



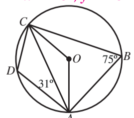
7. $a = b = c = 75°;\ d = 30°$



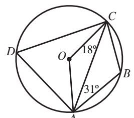
8. $a = 53°;\ b = 53°$



9. تقعُ النقاطُ: A، وَB، وَC، وَ D على دائرةٍ مركزُها O. اعتمادًا على القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ OCA، وَ DCA.
$m\angle OCA = 15°;\ m\angle DCA = 44°$



10. تقعُ النقاطُ: A، وَB، وَC، وَ D على دائرةٍ مركزُها O. اعتمادًا على القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ OAC، وَ BCA.
$m\angle BCA = 41°;\ m\angle OAC = 18°$



كتاب التمارين

الدرس 4

معادلةُ الدائرةِ

أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(2, -4)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 6 وحداتٍ. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$
2. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(-3, -1)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 4 وحداتٍ. $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$
3. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(2, 0)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 10)$. $(x-2)^2 + y^2 = 109$
4. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(7, 3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(3, -1)$. $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 32$
5. دائرةٌ تُمثِّلُ النقطتانِ $A(11, -4), B(5, 6)$ نهايتَيْ قُطْرٍ فيها. $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 34$
6. دائرةٌ تُمثِّلُ النقطتانِ $S(4,12), T(6, -8)$ نهايتَيْ قُطْرٍ فيها. $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 101$

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلِّ دائرةٍ في ما يأتي:

7. $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 169$ $(-6, 3); r = 13$
8. $3x^2 + 3y^2 + 12x - 36y - 72 = 0$ $(-2, 6); r = 8$
9. $x^2 + (y-7)^2 = 225$ $(0, 7); r = 15$
10. $2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 10 = 0$ $(5, 4); r = 6$

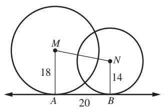
11. أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $T(8,7)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 41$.
انظر ملحق الإجابات

12. تُمثِّلُ النقاطُ: $A(-5, -2)$، وَ $B(7, -8)$، وَ $C(3, -16)$ مواقعَ 3 أبراجِ اتصالاتٍ. أَجِدُ موقعَ البرجِ الرابعِ الذي يبعدُ المسافةَ نفسَها عنِ الأبراجِ الثلاثةِ، ثمَّ أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التي تقعُ عليْها الأبراجُ الثلاثةُ. انظر ملحق الإجابات

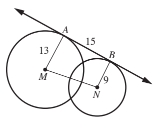
الدرس 5

الدوائرُ المتماسَّةُ

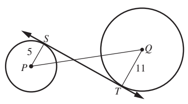
1. كمْ مماسًّا مشتركًا داخليًّا يُمكِنُ أنْ أرسمَ لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ؟ صفر
2. كمْ مماسًّا مشتركًا خارجيًّا يُمكِنُ أنْ أرسمَ لدائرتيْنِ متقاطعتيْنِ؟ 2



3. إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ؟
$(MN)^2 = 20^2 + 4^2 = 416$
$MN \approx 20.4$



4. إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ؟
$(MN)^2 = 15^2 + 4^2 = 241$
$MN \approx 15.5$



5. إذا كانَ $\overleftrightarrow{ST}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، وكانَ $PQ = 34$ cm، فما طولُ $\overleftrightarrow{ST}$؟ $(ST)^2 = 34^2 - 16^2 = 900$
$ST = 30$ cm

6. رُسِمَتْ دائرتانِ، الأولى مركزُها M، وطولُ نصفِ قُطْرِها 25 cm، والثانيةُ مركزُها N، وطولُ نصفِ قُطْرِها 36 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 61 cm، ورُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ، مَسَّ الصغرى في النقطةِ A، ومَسَّ الكبرى في النقطةِ B. ما نوعُ الشكلِ الرباعيِّ $AMNB$؟ ما أطوالُ أضلاعِهِ؟ انظر ملحق الإجابات

7. رُسِمَتْ دائرتانِ، الأولى مركزُها P، وطولُ نصفِ قُطْرِها 12 cm، والثانيةُ مركزُها Q، وطولُ نصفِ قُطْرِها 27 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 39 cm، ورُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ، مَسَّ الصغرى في النقطةِ R، ومَسَّ الكبرى في النقطةِ S. ما نوعُ الشكلِ الرباعيِّ $RPQS$؟ ما أطوالُ أضلاعِهِ؟ انظر ملحق الإجابات

الدرس 1:

13) $OX = OY$ (نصفا قطرين في الدائرة).

$PO = PO$ (ضلع مشترك).

$m\angle PXO = m\angle PYO = 90°$ (المماس يعامد نصف القطر).

يتطابق المثلثان القائمان بضلع ووتر.

16) تُعيَّن نقطتان على حافة الطاولة، ويوصَل بينهما بقطعة مستقيمة، ثم يُستعمَل فرجار ومسطرة لرسم المنصف العمودي لهذه القطعة المستقيمة، ويُمَدُّ هذا العمود من الجهتين حتى يقطع حافة الطاولة في نقطتين تسميان C, D، ثم يُرسَم المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{CD}$، فتكون نقطة تقاطع هذا المنصف مع $\overline{CD}$ هي مركز الطاولة.

21) $\overline{NP}$ يعامد الوتر $\overline{AB}$؛ فهو ينصفه؛ أي إن: $AP = 7$ cm

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم APN، فإن:

$$(PN)^2 = (AN)^2 - (AP)^2$$
$$= 12^2 - 7^2 = 95$$
$$PN = \sqrt{95} \approx 9.75 \text{ cm}$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم APO، فإن:

$$OP \approx 16.58 \text{ cm}$$
$$ON = OP + PN \approx 26.33 \text{ cm}$$

22) وصل O مع A, D، فينتج مثلثان قائمي الزاوية OMA, OND فيهما:

$OA = OD$ (نصفا قطرين في الدائرة).

$m\angle OND = m\angle OMA = 90°$

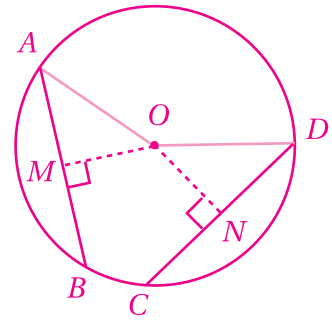
$ND = \frac{1}{2} DC$ (العمود المرسوم من مركز الدائرة إلى وتر فيها ينصفه).

$AM = \frac{1}{2} AB$ (العمود المرسوم من مركز الدائرة إلى وتر فيها ينصفه).

$ND = AM$ (لأن $CD = AB$).

فيتطابق المثلثان القائمان بضلع ووتر، وتكون عناصرهما المتناظرة متطابقة.

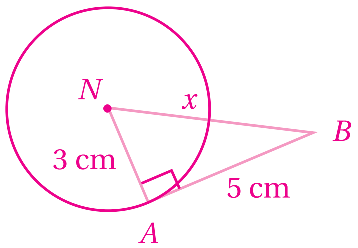
إذن: $ON = OM$؛ أي إن الوترين AB, CD يبعدان المسافة نفسها عن المركز O.



23) رسم شكل، وافتراض أن $BN = x$

قول سارة غير صحيح؛ لأن BN هو وتر في المثلث القائم ABN وعليه، فإن:

$$(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2$$
$$x^2 = 25 + 9 = 34$$
$$x = \sqrt{34} \approx 5.8 \text{ cm}$$



الدرس 2:

23) مساحة الجزء المظلل تساوي مساحة المثلث ABC مطروحًا منها مساحة القطاع الدائري APQ

مساحة المثلث تساوي cm^2: $\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

(لأن قاعدته 6، وارتفاعه $\sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$).

مساحة القطاع الدائري APQ تساوي cm^2: $\frac{60}{360} \times 3^2 \times \pi = 1.5\pi$

(لأن نصف قطر الدائرة 3، وزاوية القطاع 60°).

مساحة الجزء المظلل تساوي cm^2: $9\sqrt{3} - 1.5\pi \approx 10.9$

الدرس 3:

21) بافتراض أن $m\angle AED = x$، فإن $m\angle ABC = x$؛ لأنهما زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع، ولكن $m\angle ADC = 180° - x$؛ لأن ABC و ADC زاويتان متقابلتان في رباعي دائري.

وأيضًا $m\angle ADE + m\angle ADC = 180°$؛ لأنهما تُكوِّنان زاوية مستقيمة.

إذن: $m\angle ADE + 180° - x = 180°$

أي إن: $m\angle ADE = x$

إذن: $m\angle ADE = m\angle AED$

26) $m\angle ACB = m\angle BAY = 64°$

$$m\angle ACX = 180° - m\angle ACB = 180° - 64° = 116°$$
$$m\angle CAX = 180° - (32° + 116°) = 32°$$
$$m\angle AXC = m\angle CAX = 32°$$

إذن: المثلث ACX متطابق الضلعين؛ لأن فيه زاويتين متطابقتين.

28) $m\angle AOP = 2x$

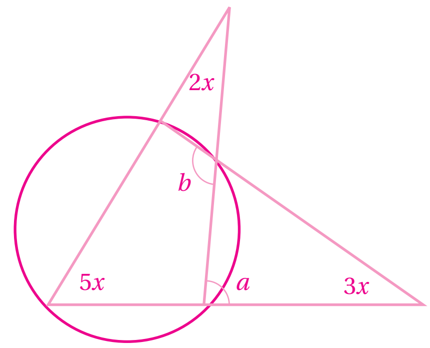
$$m\angle APO = \frac{180° - 2x}{2} = 90° - x$$
$$m\angle APT = 90° - (90° - x) = 90° - 90° + x = x$$
$$m\angle APT = m\angle APB = x$$

29) $a = 5x + 2x = 7x$

(زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث الكبير الأيسر).

$b = a + 3x$ (زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث الأيمن).

$= 7x + 3x = 10x$



الزاويتان اللتـــان قياس كلٍّ منهما $b, 5x$ هما زاويتـــان متقابلتان في مضلع رباعي دائري، إذن: مجموع قياسيهما هو $180°$

وعليه، فإن: $5x + b = 180°$

$$5x + b = 180°$$
$$5x + 10x = 180°$$
$$15x = 180°$$
$$x = 12°$$

الدرس 4:

18) معادلة الدائرة التي تمثل حدود المنطقة التي يصلها البث هي:

$$(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 224^2$$

بتعويض إحداثيات النقطة التي تمثل موقع بيت عمر في المعادلة، ينتج:

$$(-75 - 7)^2 + (95 - 4)^2 = 224^2$$
$$42928704 = 50176$$

وهي عبارة غير صحيحة.

وبما أن الطرف الأيســر أكبر من الطرف الأيمــن، فإن بيت عمر يقع خارج المنطقة التي يصلها البث.

19) $(2(x-2))^2 + (2(y+3))^2 = 100$

$$4(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 100$$

بالقسمة على 4 ينتج: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

المركز هو $(2, -3)$، وطول نصف القطر 5 وحدات.

20) بإكمال المربع ينتج أن:

$$(x + \frac{P}{2})^2 + (y + 3)^2 = 96 + (\frac{P}{2})^2 + 9$$
$$r^2 = 96 + (\frac{P}{2})^2 + 9$$
$$11^2 = 105 + \frac{P^2}{4} \Rightarrow 121 - 105 = \frac{P^2}{4} \Rightarrow p^2 = 64 \Rightarrow p = 8$$

إذن:

مركـــز الدائـــرة: $(-4, -3)$، وبُعْده عـــن نقطة الأصـــل: $\sqrt{16+9}$ ؛ أي 5 وحدات.

21) بمـــا أن الدائرة الصغـــرى تمس المحور x، فإن طـــول نصف قطرها 3 وحدات، ومعادلتها هي:

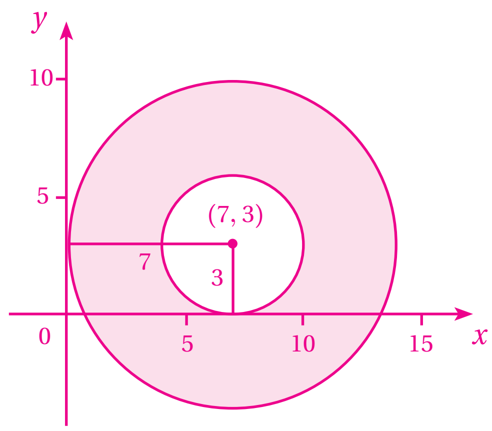
$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

وبما أن الدائرة الكبرى تمس المحور y، فإن طول نصف قطرها 7 وحدات، ومعادلتها هي:

$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$$

مســـاحة الممر يساوي الفرق بين مســـاحة الدائرة الكبرى ومساحة الدائرة الصغرى.

$$A = 7^2 \times \pi - 3^2 \times \pi = 40\pi$$



25) بتعويض $y = 3x - 2$ في معادلة الدائرة، ينتج:

$$x^2 + (3x - 2)^2 + 4x - 24(3x - 2) + 108 = 0$$
$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 + 4x - 72x + 48 + 108 = 0$$
$$10x^2 - 80x + 160 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$$
$$y = 3(4) - 2 = 10$$

إذن: هـــذا المســـتقيم مماس للدائرة؛ لأنـــه يقطعها في نقطـــة واحدة فقط هي: $(4, 10)$.

27) نعم، قولـــه صحيح؛ فإذا حُوِّلت المعادلة إلى الصورة القياســـية فإن طرفها الأيمن يكون سالبًا، ولا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب.

$$(x-7)^2 + (y+3)^2 = -59 + 49 + 9 \Rightarrow (x-7)^2 + (y+3)^2 = -1$$

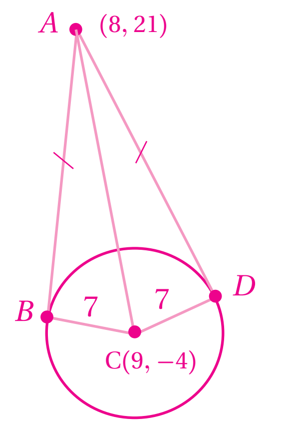
28) $(AB)^2 = (8-9)^2 + (21-(-4))^2 - 49 = 577$

$$AB = \sqrt{577} \approx 24$$

مساحة الشكل $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث القائم ABC:

$$2 \times (\frac{1}{2} \times 24 \times 7) = 168$$

إذن: مساحة الشكل $ABCD$ هي 168 وحدة مربعة تقريبًا.



29) لتكن الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = j^2$

بفك الأقواس، ينتج:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = j^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - j^2 = 0$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعطاة في السؤال، وهي:

$$x^2 + y^2 + 8x \quad -10y \quad + 24 = 0$$

ينتج أن: $8 = -2h\,; \; -10 = -2k\,; \; 24 = h^2 + k^2 - j^2$

أي إن: $24 = (-4)^2 + 5^2 \; - j^2 \Rightarrow j^2 = 17\,; h = -4; \;\; k = 5$

إذن: الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 17$.

الدرس 5:

7) يُرسَم العمود $\overline{OP}$ على $\overline{QC}$، فينتج المستطيل $OPCB$، والمثلث القائم OPQ.

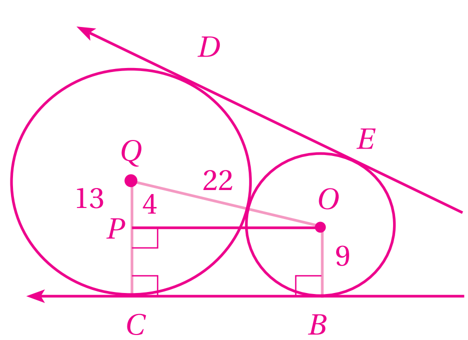
بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث OPQ، فإن:

$$22^2 = 4^2 + (OP)^2$$

$$(OP)^2 = 22^2 - 4^2 = 468$$

$$OP \approx 21.6$$

$$CB = OP \approx 21.6$$



9) يُرسَم العمود $\overline{MC}$ على $\overline{NB}$، فينتج المستطيل $ABCM$، والمثلث القائم MCN.

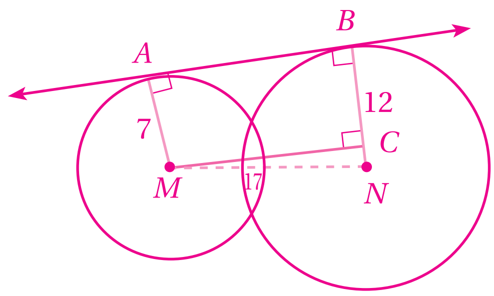
بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث MCN، فإن:

$$17^2 = (MC)^2 + 5^2$$

$$(MC)^2 = 264$$

$$MC \approx 16.2$$

$$AB = MC \approx 16.2$$



10) يُرسَم شكل يُوضِّح المسألة.

لتكن النقطتان S، و T مركزي الدولابين، ولتكن A، و B نقطتي تماس الحزام مع الدولابين.

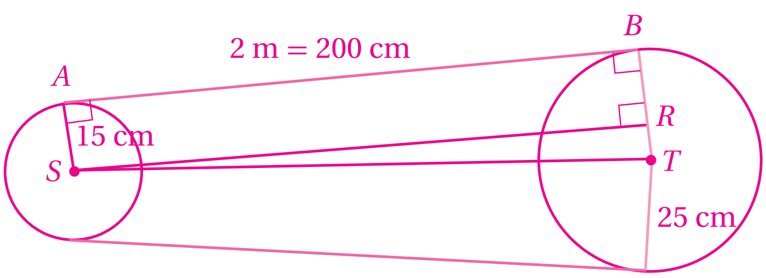
يُرسَم العمود $\overline{SR}$ على $\overline{TB}$، فينتج المستطيل $ABRS$، والمثلث القائم SRT.

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث SRT، فإن:

$$(ST)^2 = (SR)^2 + 10^2$$

$$(ST)^2 = 200^2 + 10^2 = 40100$$

$$ST \approx 200.2 \text{ cm}$$



11) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 11 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$$

مركز هذه الدائرة هو $(3, -4)$، وطول نصف قطرها 6 وحدات،

ومركز الدائرة الثانية هو $(0, 0)$، وطول نصف قطرها 5 وحدات.

المسافة بين مركزيهما هي: $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

مجموع نصفي القطرين هو 11، والفرق بينهما 1

بما أن $1 < 5 < 11$، فإن الدائرتين متقاطعتان في نقطتين.

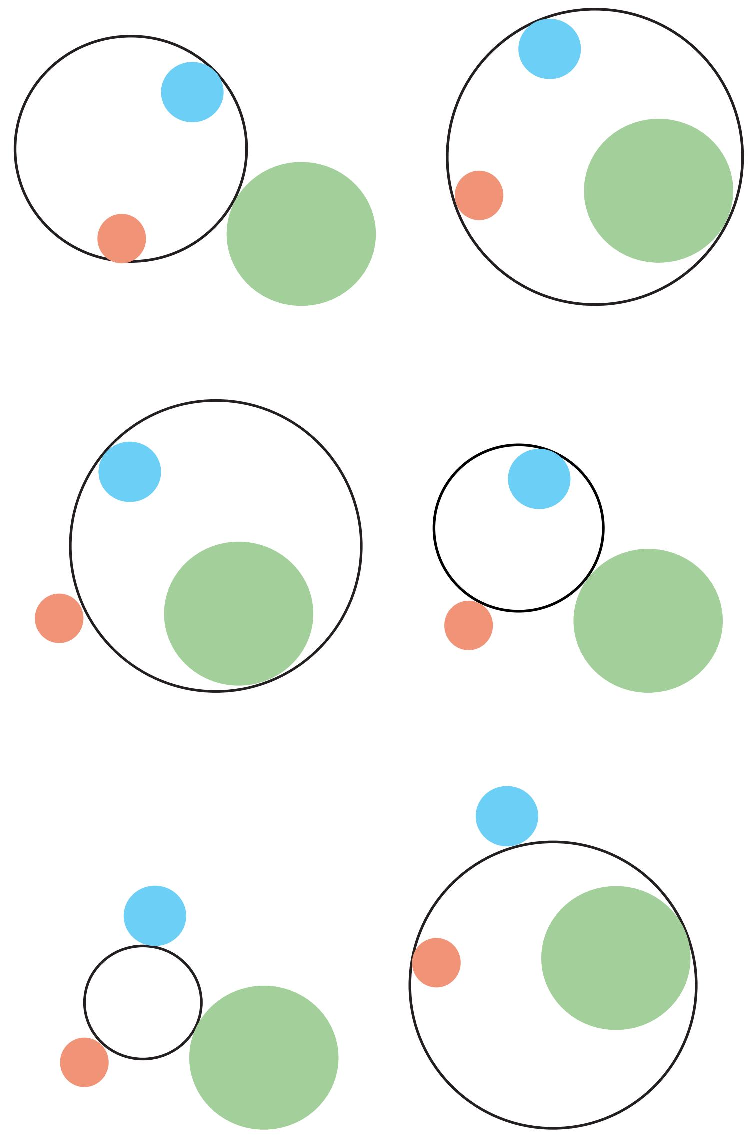
12) $AB = AD$ مماسان للدائرة الصغرى، مرسومان من النقطة A:

$$3x = 15 - x$$
$$4x = 15 \Rightarrow x = 3.75$$

$AE = AC$ مماسان للدائرة الكبرى، مرسومان من النقطة A:

$$3x + y - 1 = 15 - x + 3y - 17$$
$$2y = 4x + 1$$
$$2y = 15 + 1 = 16$$
$$y = 8$$

13) في ما يأتي الطرائق الست الأخرى لرسم دائرة تمس ثلاث دوائر متباعدة معطاة:



14) المثلثان BSC ، و ARC متشابهان؛ لأن:

$m\angle RCA = m\angle SCB$ (زاويتان متقابلتان بالرأس).

$m\angle ARC = m\angle BSC = 90°$ (المماس يعامد نصف القطر المار بنقطة التماس).

إذن: يتشابه المثلثان ARC، و BSC؛ لأن زاويتين في المثلث الأول مطابقتان لزاويتين مناظرتين لهما في المثلث الثاني.

نتيجة لهذا التشابه؛ فإن الأضلاع المتناظرة في المثلثين ARC تكون متناسبة؛ أي إن:

$$\frac{AR}{BS} = \frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$$

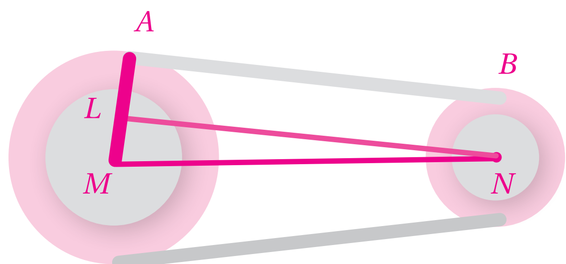
إذن: $\frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$

اختبار نهاية الوحدة

15) بافتراض أن مركزي البكرتين هما: M، و N، وأن نقطتي تماس الحزام مع البكرتين هما: A، و B، يُرسَم عمود من N إلى $\overline{AM}$ كما في الشكل المجاور.

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم MLN ، فإن:

$$(MN)^2 = (NL)^2 + (ML)^2$$
$$= 25^2 + (8-3)^2 = 650$$
$$MN = \sqrt{650} \approx 25.5 \text{ cm}$$



19) المثلثان AMB، و ANC متشابهان؛ لأن:

$m\angle ABN = m\angle ACM = 90°$ (المماس يعامد نصف القطر المار بنقطة التماس).

$m\angle BAM = m\angle CAN$ (زاوية مشتركة في المثلثين).

إذن: يتشابه المثلثان؛ لوجود زاويتين في المثلث الأول مطابقتين لنظيرتيهما في المثلث الثاني.

نتيجة لذلك؛ فإن الأضلاع المتناظرة في المثلثين تكون متناسبة؛ أي إن:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$$

إذن: $\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$

ولكن: $AN = AM + MN = AM + 13$ ،

بافتراض أن $AM = x$

إذن: $\frac{x}{x+13} = \frac{4}{9}$

$$9x = 4x + 4(13)$$
$$5x = 52 \Rightarrow x = 10.4$$

20) طول الحد الداخلي للمسرب الأول يساوي محيط نصفي دائرة قطرها 73 m مضافًا إليه طولي الجزأين المستقيمين من المسرب:

$$L_1 = 2(\frac{73\pi}{2}) + 2(120) = 240 + 73\pi \approx 469.3 \text{ m}$$

طول الحد الداخلي للمسرب الثالث يساوي محيط نصفي دائرة قطرها 77 m مضافًا إليه طولي الجزأين المستقيمين من المسرب:

$$L_3 = 2(\frac{77\pi}{2}) + 2(120) = 240 + 77\pi \approx 481.9 \text{ m}$$

$$L_3 - L_1 = 481.9 - 469.3 = 12.6 \text{ m}$$

إذن: يزيد الحد الداخلي للمسرب الثالث بنحو 12.6 m على الحد الداخلي للمسرب الأول.

كتاب التمارين: الدرس 2:

9) خط بصر آلاء $\overrightarrow{AB}$ يمثل مماسًا للكرة، وتمثل الدائرة مقطعًا من الكرة يمر بمركزها.

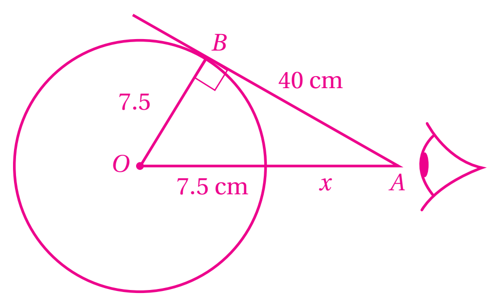
نصف قطر الدائرة يساوي نصف قطر الكرة وهو 7.5 cm

من نظرية فيثاغورس ينتج أن:

$$(x + 7.5)^2 = 40^2 + 7.5^2 = 1656.25$$

$$x + 7.5 \approx 40.7$$

$$x \approx 48.2 \text{ cm}$$

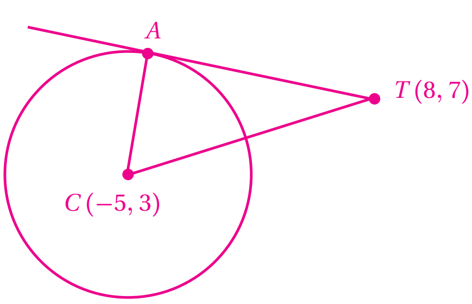


كتاب التمارين: الدرس 4:

11)

$$(TA)^2 = \left((8-(-5))^2 + (7-3)^2\right) - 41 = 144$$

$$\Rightarrow TA = 12$$



12)

أفرض أن موقع البرج الرابع هو (x, y)

إذن، $(x-3)^2 + (y+16)^2 = (x-7)^2 + (y+8)^2$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 32y + 256 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 16y + 64$$

$$8x + 16y = -152 \Rightarrow x + 2y = -19 \;\dots\dots\dots\dots\; (1)$$

وكذلك، وبتبسيطها ينتج أن: $(x-3)^2 + (y+16)^2 = (x+5)^2 + (y+2)^2$

$$-16x + 28y = -236 \Rightarrow -4x + 7y = -59 \;\dots\dots\dots\; (2)$$

وبحل المعادلتين 1 و 2 نجد أن $x = -1; y = -9$ موقع البرج الرابع هو $(-1, -9)$ وهو مركز الدائرة، ومعادلتها هي: $(x+1)^2 + (y+9)^2 = 65$

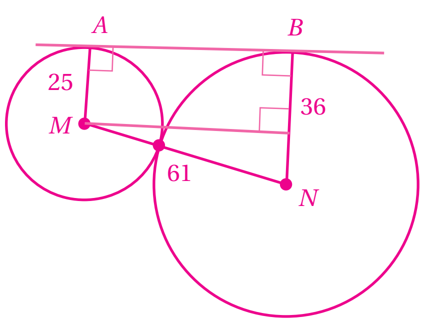
كتاب التمارين: الدرس 5:

6) الدائرتان متماستان من الخارج لأن المسافة بين مركزيهما تساوي مجموع طولي نصفي قطريهما.

الشكل $AMNB$ شبه منحرف فيه: $AM = 25$ cm; $BN = 36$ cm

و $MN = 61$ cm ونحسب طول الضلع الرابع كما يلي:

$$(AB)^2 = 61^2 - 11^2 = 3600 \Rightarrow AB = 60 \text{ cm}$$



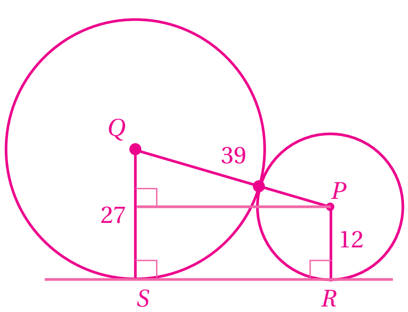
7) الدائرتان متماستان من الخارج لأن المسافة بين مركزيهما تساوي مجموع طولي نصفي قطريهما.

الشكل $RPQS$ شبه منحرف فيه: $RP = 12$cm

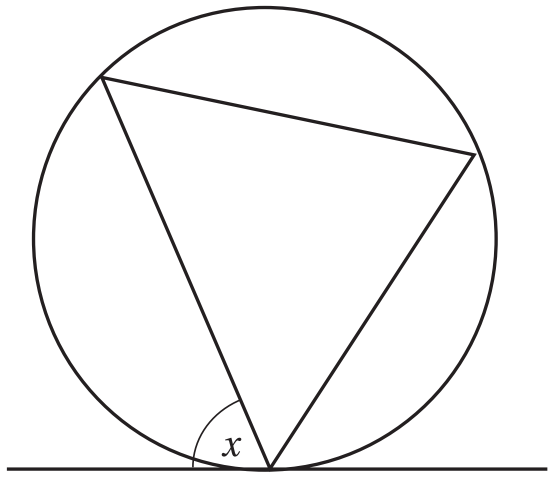
$QS = 27$ cm و $PQ = 39$ cm

ونحسب طول الضلع الرابع كما يلي:

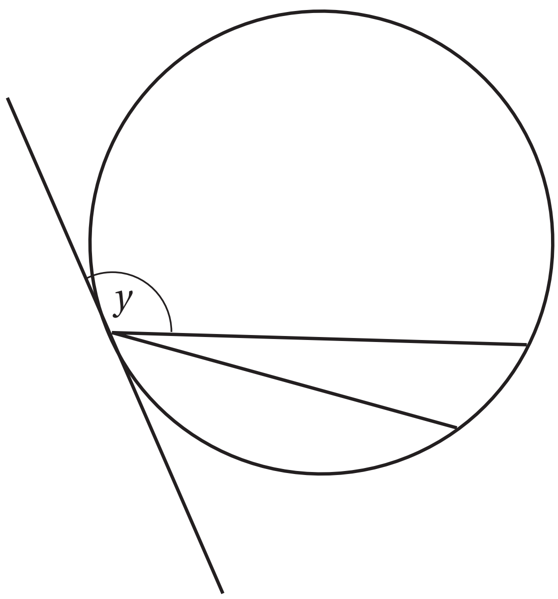
$$(SR)^2 = 39^2 - 15^2 = 1256 \Rightarrow SR = 36 \text{ cm}$$



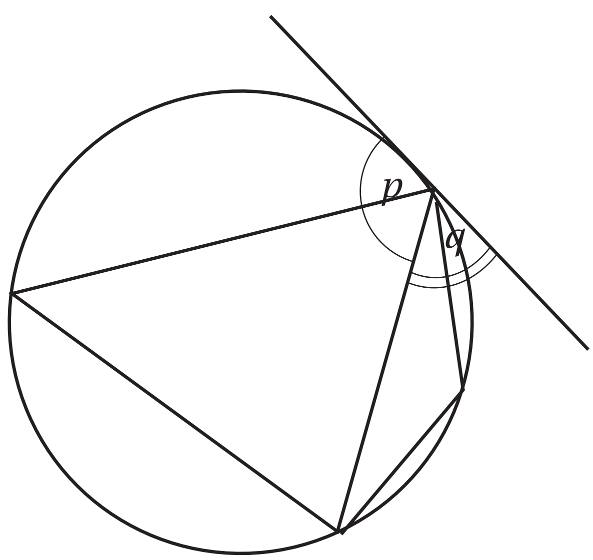
ورقة المصادر 1



الشكل (1).



الشكل (2).



الشكل (3).

ورقة المصادر 2

أُقارِنُ بينَ قيمِ $r_1 + r_2$، وَ $r_1 - r_2$ وَ AC، ثمَّ أستنتجُ العلاقةَ بينَها وبينَ وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

وضعُ الدائرتيْنِ	r_1	r_2	AC	$r_1 - r_2$	$r_1 + r_2$	الاستنتاجُ