10

الرعد

في الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الثاني

الوحدة الثانية

الاشتقاق

0775052929

أ. رعد الخراية

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله وصحبة أجمعين .

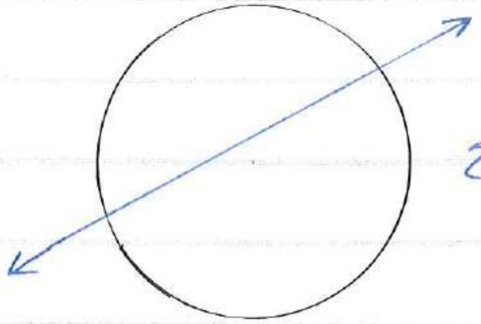
الحمد لله الذي وفقني في اعداد هذا العمل من تلاخيص الرعد في الرياضيات للصف العاشر الأساسي منهاج (كولينز) لنقدمها الى طلابنا الأعزاء لتكون لهم عوناً على الفهم والاستيعاب والتطبيق لنصل بهم الى اعلى مراتب التوفيق والنجاح .

وقد حاولنا في هذه السلسلة الى تبسيط المعلومة مع شرح ما يلزم من معارف ومفاهيم أساسية وقواعد تتعلق بالمادة داعمين ذلك بالأمثلة والرسوم التوضيحية حيث وفقنا بإذن الله إلى تغطية مسافات هذا المنهاج الجديد لوزارة التربية والتعليم

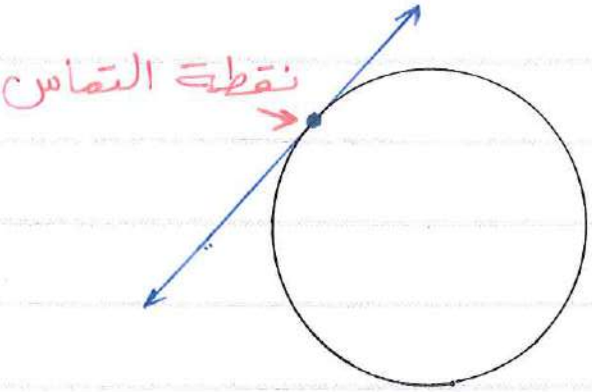
الأستاذ رعد الخمايسة

هاتف 0775052929

تمهيد لدراسة الوحدة (2)



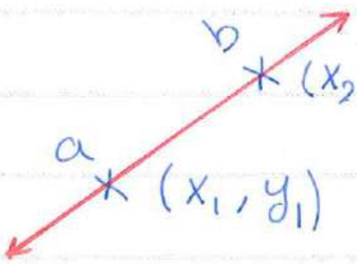
في الشكل المجاور يسمى المستقيم ب المستقيم القاطع حيث أنه يقطع الأقتران بنقطة أو أكثر



أما المستقيم في الشكل الثاني فيسمى بالمستقيم المماس بحيث أنه يشترك مع الأقتران بنقطة واحدة يمسه عندها وتسمى نقطة التماس

ميل المستقيم

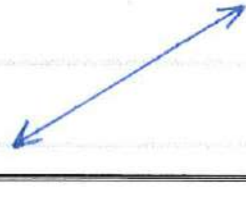
* قانون حساب الميل للمستقيم المار بنقطتين



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

* ميل المستقيم يكون

$\boxed{A}$ موجب : إذا كان الأقتران أو المستقيم متزايد



$\Rightarrow$ m : موجب

لأنه متزايد

B سالب : إذا كان الأقتران أو المستقيم متناقص

m : سالب

لأنه متناقص

C صفر : إذا كان الأقتران أو المستقيم مرسوم بشكل أفقي

m = صفر

لأنه أفقي

D قيمة غير معرّفة : إذا كان الأقتران أو المستقيم مرسوم بشكل عامودي

m : غير معرّف

لأنه عامودي

Rem

ميل المستقيم هو مقدار ثابت لذلك يمكن حساب ميله من خلال أي نقطتين تقعان عليه (يمر بهما)

VIN : إن ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة ؛ لذلك فإن ميل المنحنى يختلف من نقطة إلى أخرى عليه.

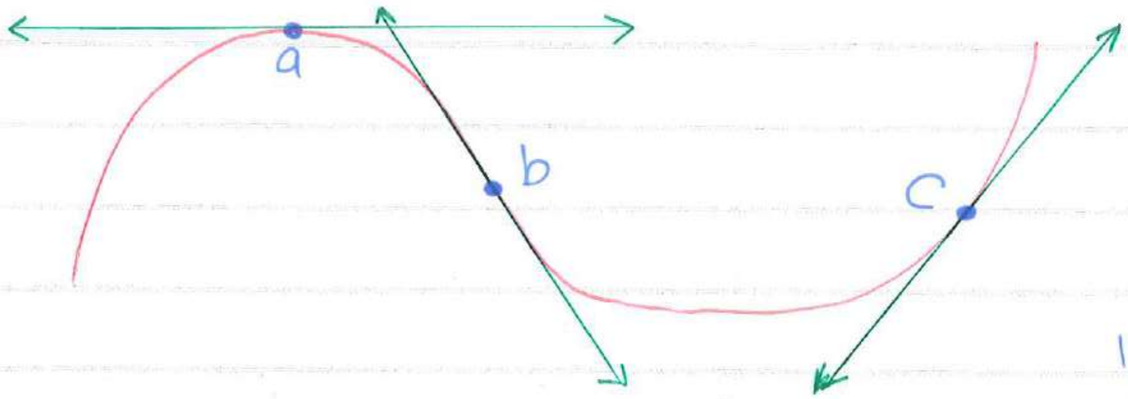
ركز معي هون !!

ميل المستقيم ⇐ $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ميل المنحنى ⇐ هو ميل المستقيم الذي يمس

المنحنى عند نقطة معينة ف لهيك ركز بين منحنى و مستقيم الله يرضى عليك

Ex



في هذا الشكل يوجد عندي ثلاثة نقاط، متى اوجد الميل عند كل نقطة يجب أن أرسم مماس يمس المنحنى عند كل نقطة لاحظ الآن كيف أن يوجد لكل نقطة على المنحنى قيمة ميل مختلفة عن الأخرى

← لاحظ أن المماس المرسوم عند النقطة C هو مستقيم متزايد ولذلك فإن الميل عند النقطة C هو موجب

← لاحظ أن المماس المرسوم عند النقطة B هو مستقيم متناقص ولذلك فإن الميل عند النقطة B هو سالب

← لاحظ أن المماس المرسوم عند النقطة A هو أفقي ولذلك فإن الميل عند A هو صفر

Rem

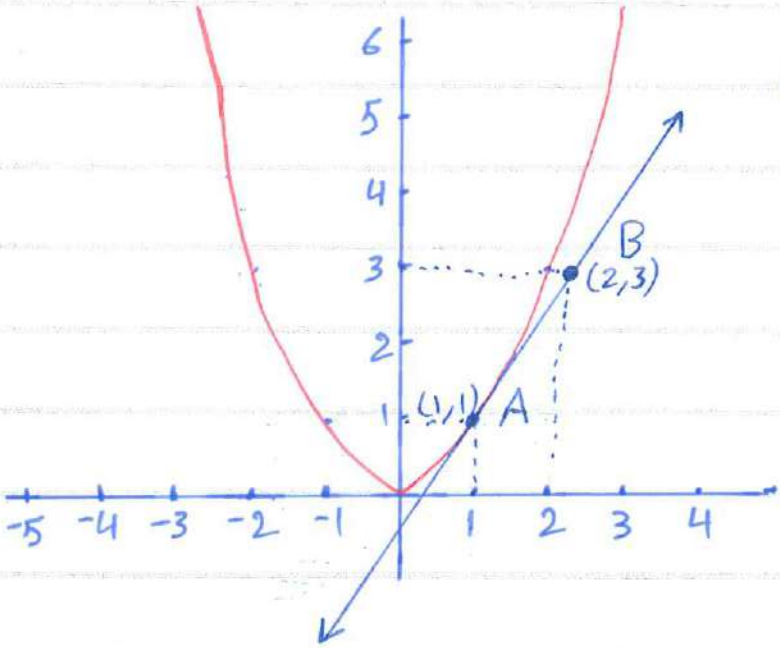
إحداثيات أي نقطة تقع على المستوى الأحداثي تتمثل بالزوج المرتب (x,y)

مفردات مهمة

Tangent : مماس

slope : ميل

Line : مستقيم



Ex : يمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى الأقتران $y=x^2$ عند النقطة $A(1,1)$ أجد ميل منحنى الأقتران عند النقطة A

الحل :

ميل المنحنى عند النقطة $A(1,1)$ = ميل المماس المرسوم عند هذه النقطة

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

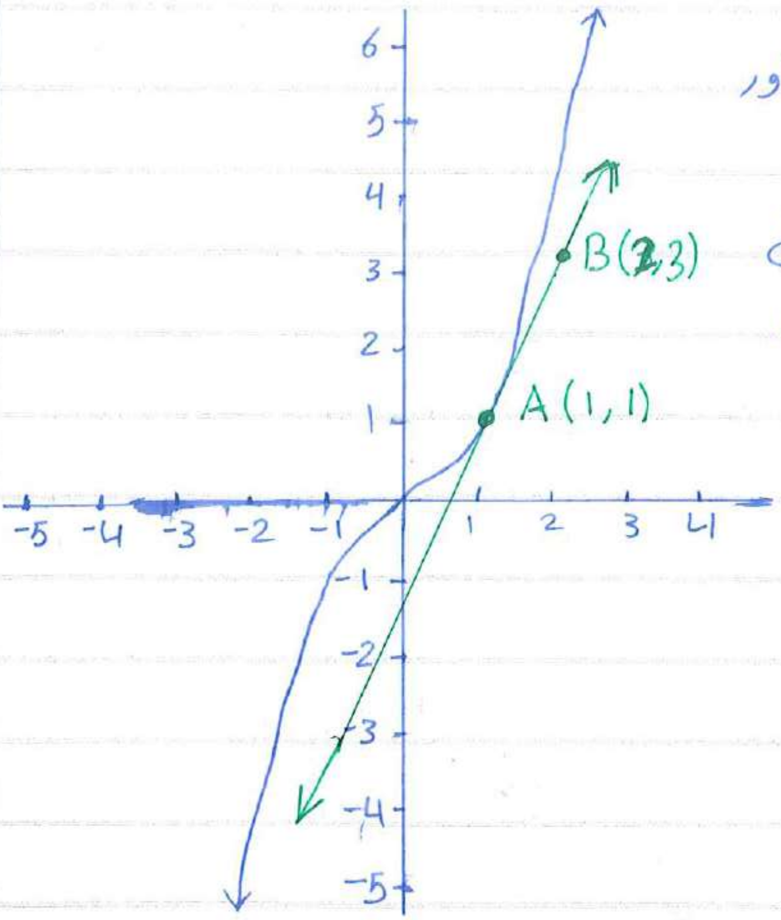
$$= \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Rem

يرمز للفرق بين الأحداثي y لنقطتين ب Δy

يرمز للفرق بين الأحداثي x لنقطتين ب Δx .

أتحقق من فهمي



يمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى الاقتران $y = x^3$ عند النقطة $A(1,1)$ أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A

الحل :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1}$$

$$= 2$$

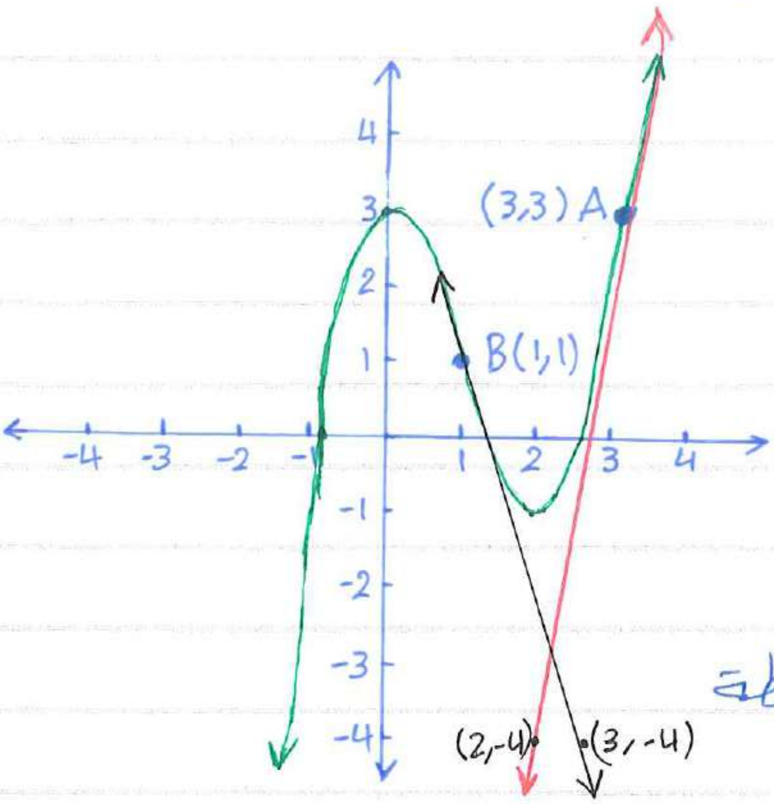
⚠ الإجابة الدقيقة هي 3 ولكن بناءً على هذا الرسم تم قبول الإجابة 2 وسيتم التوضيح في الدرس القادم

Note

إذا لم يكن المماس مرسوم عند النقطة التي يراد إيجاد ميل المنحنى عندها فإنه يرسم باستعمال المسطرة

وبما أن الرسم اليدوي ليس دقيقاً فإن ميل المماس المرسوم قد يختلف قليلاً عن القيمة الدقيقة لميل المنحنى عندئذٍ يكون الناتج قيمة تقريبية لميل المنحنى

Ex : أقدر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عند كل نقطة مما يأتي



① النقطة $A(3,3)$

② النقطة $B(1,1)$

③ أكتب معادلة المماس المار بالنقطة $B(1,1)$

نقوم برسم مماسين عند النقاط A , B ونجد الميل عند كل نقطة

الحل :

$\boxed{1}$ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-4-3}{2-3} = \dfrac{-7}{-1} \simeq 7$

$\boxed{2}$ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-4-1}{3-1} = \dfrac{-5}{2} \simeq -2.5$

$\boxed{\text{Rem}}$: معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) وميله يساوي (m) هي :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بحيث أن هذه المعادلة تمثل العلاقة بين الأحداثي x والأحداثي y لأي نقطة تقع على المستقيم .

$\boxed{3}$ $m = -2.5$ $\quad B(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{1})$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 1 = -2.5(x-1) \Rightarrow y = -2.5x + 3.5$

1 - 2 تقدير ميل المنحنى

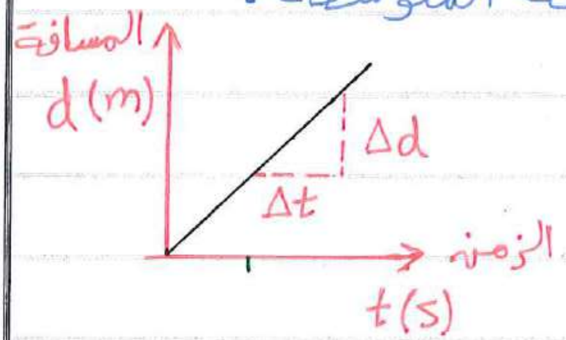
* مراجعة *

+ السرعة المتوسطة : هي سرعة الجسم خلال فترة زمنية $[t_1, t_2]$ ويرمز لها بالرمز $(\bar{V})$ أو (V_{avg})

+ السرعة اللحظية : هي سرعة الجسم عند لحظة زمنية محددة (عند $t = t_1$)

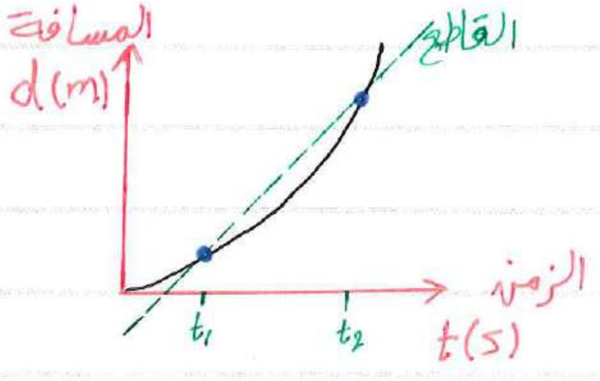
* من خلال منحنى (المسافة - الزمن)

إذا كان المنحنى عبارة عن مستقيم فإن ميله يساوي السرعة المتوسطة ؛ بما أن ميل المستقيم هو مقدار ثابت فإن السرعة اللحظية هنا تساوي السرعة المتوسطة.



$$\Rightarrow V = \bar{V} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

* لكن : إذا كان المنحنى ميله متغير من نقطة إلى أخرى فإن السرعة المتوسطة تساوي ميل القاطع المار بحدود الفترة الزمنية المطلوبة.



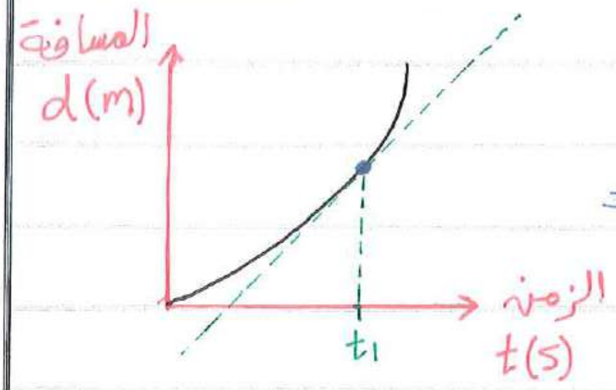
$$\Rightarrow \bar{V} = V_{avg} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

* أما السرعة اللحظية فيمكن إيجادها من خلال حساب ميل المماس المرسوم عند اللحظة الزمنية المطلوبة

الاستاذ : رعد الخمايسة

1-2 تقدير ميل المنحنى

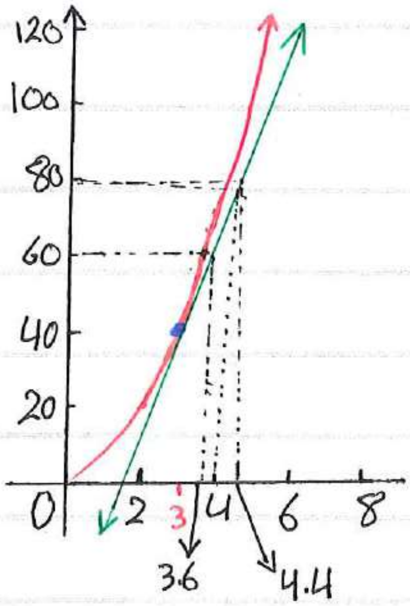
الهاتف : ٠٧٧٥٠٥٢٩٢٩



السرعة عند t_1 = ميل المماس عند t_1 ⇐

* تذكر ايضاً : يمكن حساب التسارع المتوسط والتسارع اللحظي من منحنى (السرعة - الزمن)
حيث : التسارع المتوسط يساوي ميل القاطع
التسارع اللحظي يساوي ميل المماس

Ex : يمثل الأقتران $d(t) = 4.9t^2$ العلاقة بين المسافة المقطوعة d بالمتر والزمن t بالثانية (منحنى المسافة - الزمن) لكرة تسقط سقوطاً "حرّاً" من وضع السكون . أجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من سقوطها .



السرعة عند $t=3$ تساوي ميل المماس عند هذه اللحظة الزمنية

$(\overset{x_1}{3.6}, \overset{y_1}{60})$

$(\overset{x_2}{4.4}, \overset{y_2}{80})$

$$V = \text{slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{80-60}{4.4-3.6} = \frac{20}{0.8}$$

$$= \frac{200}{8} = \frac{100}{4} = \frac{50}{2} = 25$$

$\therefore V = 25\ m/s$

الأستاذ : رعد الخمايسة

2-2 الاشتقاق

الهاتف : ٠٧٧٥٠٥٢٩٢٩

* الفرق بين الاقتران & مشتقة الاقتران

← قاعدة الاقتران $(f(x))$ تعطي قيمة الاقتران عند أي نقطة تقع على منحناه .

← مشتقة الاقتران $(f'(x))$ هي قاعدة تعطي ميل المماس عند أي نقطة تقع على منحناه . أي ميل المنحنى عند تلك النقطة

$f(x) \longrightarrow$ صورة (قيمة الاقتران)

$f'(x) \longrightarrow$ ميل المماس

* قواعد الاشتقاق *

قاعدة (1)

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$$

* مشتقة x مرفوع لقوة ⇐ نزّل القوة واطرح منها واحد

Ex : جد مشتقة كل من الاقترانات التالية

1) $f(x) = x^8$

Sol : $\rightarrow f'(x) = 8x^{8-1} = 8x^7$

2) $f(x) = x^5$

Sol : $\rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

3 $f(x) = x^7$

Sol :→ $f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$

4 $f(x) = x^{11}$

Sol :→ $f'(x) = 11x^{11-1} = 11x^{10}$

5 $f(x) = x$

Sol :→ $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$

6 $f(x) = x^{100}$

Sol :→ $f'(x) = 100x^{100-1} = 100x^{99}$

قاعدة (٢)

$$f(x) = ax^n \longrightarrow f'(x) = an\,x^{n-1}$$

حيث (a) ثابت " أي حافظ على الثابت واشتق " x^n "

Ex : جد مشتقة كل من الأقترانات التالية :

1 $f(x) = 2x^4 \longrightarrow f'(x) = 2(4)x^{4-1} = 8x^3$

2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(3)x^2 = \frac{3}{4}x^2$

3 $f(x) = 5x^{12} \longrightarrow f'(x) = 5(12)x^{11} = 60x^{11}$

4. $f(x) = -7x^8 \longrightarrow f'(x) = -7(8)x^7 = -56x^7$

5. $f(x) = 0.5x^6 \longrightarrow f'(x) = 0.5(6)x^5 = 3x^5$

6. $f(x) = -2x \longrightarrow f'(x) = -2(1)x^0 = -2$

7. $f(x) = 3x \longrightarrow f'(x) = 3$

8. $f(x) = 9x \longrightarrow f'(x) = 9$

9. $f(x) = \sqrt{3}x \longrightarrow f'(x) = \sqrt{3}$

قاعدة (3)

$$f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$$

حيث (c) عدد حقيقي ثابت "مشتقة الحد الثابت = صفر"

Ex : جد مشتقة كل من الأقترانات التالية :

1. $f(x) = -3 \longrightarrow f'(x) = 0$

2. $f(x) = 7 \longrightarrow f'(x) = 0$

3. $f(x) = \pi \longrightarrow f'(x) = 0$

4. $f(x) = \pi^2 \longrightarrow f'(x) = 0$

$\boxed{5}$ $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{0.7} \longrightarrow g'(x) = 0$

$\boxed{\text{قاعدة (4)}}$

$f(x) = g(x) \pm h(x) \longrightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

أي أن المشتقة تتوزع على الجمع والطرح

Ex : جد مشتقة كل من الاقترانات التالية

$\boxed{1}$ $f(x) = x^2 - 6x$

Sol: $f'(x) = 2x - 6$

$\boxed{2}$ $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

Sol: $f'(x) = 5(7)x^6 + 3(4)x^3 - \frac{3}{\cancel{2}}(\cancel{2})(x) + 0$

$\therefore f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$

Sol: $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(x) + 4 \longrightarrow f'(x) = x + 4$

$\boxed{4}$ $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}\,x^2$

Sol: $g'(x) = 9 - 7(5)x^4 - 0 + \sqrt{3}(2)x$

$g'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}\,x$

VIN : يمكن التعبير عن المشتقة بالرموز التالية

$$f(x) \longrightarrow f'(x)$$
$$y \longrightarrow y'$$
$$y \longrightarrow \frac{dy}{dx}$$

Ex : جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من التالية

$\boxed{1}$ $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 0.6$

Sol :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{5}}(\cancel{5})x^4 - \frac{1}{\cancel{3}}(\cancel{3})x^2 + \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})x - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 - x^2 + x$$

$\boxed{2}$ $y = 3x^2 - \sqrt{3}\,x + \pi^2$

Sol :

$$\frac{dy}{dx} = y' = 3(2)x - \sqrt{3} + 0$$

$$y' = 6x - \sqrt{3}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

Rem * ميل المنحنى عند نقطة يساوي مشتقة الاقتران عند هذه النقطة

* ميل المماس يساوي مشتقة الاقتران عند نقطة التماس

Ex : إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

1 ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $(1, -10)$

sol: ميل المنحنى عند النقطة $(\underset{x}{1}, \underset{y}{-10})$ يساوي المشتقة عند هذه النقطة

$$f'(x) = 3(2)x - 18 \rightarrow f'(x) = 6x - 18$$

$$f'(1) = 6(1) - 18 \Rightarrow f'(1) = -12$$

2 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً"

sol: الميل يساوي صفر عندما تكون المشتقة تساوي صفر:

$$f'(x) = 6x - 18$$

$$0 = 6x - 18 \rightarrow 6x = 18$$

$$\rightarrow x = \frac{18}{6} = 3$$

$$\therefore x = 3$$

أي أنه يوجد مماس أفقي عند $x = 3$

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل من

1. ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$
2. قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً

Sol:

1. ميل المنحنى عند $x=-2$ يساوي المشتقة عند $x=-2$

$$f'(x) = 10x + 25$$
$$f'(-2) = 10(-2) + 25 = -20 + 25 = 5$$
$$\therefore f'(-2) = 5$$

2. ميل المنحنى يساوي صفر عندما المشتقة تساوي صفر

$$f'(x) = 10x + 25$$
$$0 = 10x + 25 \rightarrow 10x = -25 \rightarrow x = -2.5$$

$\therefore$ أي أنه يوجد مماس أفقي عند $x = -2.5$

Rem: * ميل منحنى ((المسافة) - (الزمن)) عند أي لحظة زمنية يعطي السرعة اللحظية.

* بما أن المشتقة تُعبر عن ميل المماس للمنحنى فإن مشتقة معادلة المسافة تُعطي معادلة السرعة اللحظية

$$d(t) \xrightarrow{\text{أشتق}} V(t)$$
$$\therefore V(t) = d'(t)$$

* للوصول إلى معادلة التسارع اللحظي نشتق معادلة السرعة

$$a(t) = V'(t)$$

مسافة $d(t)$

أشتقه ↓ ↓ أشتقه

سرعة $V(t)$

أشتقه ↓ ↓ أشتقه

تسارع $a(t)$

Ex : يمثل الاقتران $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسم متحرك ، حيث t الزمن بالثانية :

1) أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته .

Sol: مشتقة معادلة المسافة ⟵ معادلة السرعة

$$V(t) = d'(t)$$

$$V(t) = (0.6)(3)t^2 - 1.5$$

$$V(t) = 1.8t^2 - 1.5$$

$$V(3) = 1.8(3)^2 - 1.5 = 9(1.8) - 1.5 = 16.2 - 1.5$$

$$= 14.7 \ m/s \ \#$$

2) أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء حركته

Sol: $V(t) = 1.8t - 1.5$

$$a(t) = V'(t)$$

$$a(t) = 1.8(2)t$$

$$a(t) = 3.6t$$

$$a(5) = 3.6 * (5) = 18.0$$

$$= 18 \ m/s^2$$

أتحقق من فهمي

يمثل الاقتران $d(t)=2.5t^2+0.1t-0.3$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسم متحرك حيث t الزمن بالثانية.
أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t=3$.

Sol: $d(t) \xrightarrow{\text{أشتق}} V(t) \xrightarrow{\text{أشتق}} a(t)$

$V(t) = d'(t)$

$V(t) = 5t + 0.1 \longrightarrow V(3) = 5(3) + 0.1 = 15.1\ m/s$

$a(t) = V'(t)$

$a(t) = 5 \longrightarrow a(3) = 5\ m/s^2$ #

Ex: إذا كان $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$
جد كل من التالية:

$\boxed{1}$ $f'(2)$

Sol: أشتق $f(x)$ ثم عوض 2 في المشتقة

$f'(x) = 6x - 6$

$f'(2) = 6(2) - 6 = 12 - 6 = 6$ #

$\boxed{2}$ $(f(2))'$

Sol: عوض في $f(x) \leftarrow x=2$ ثم أشتق

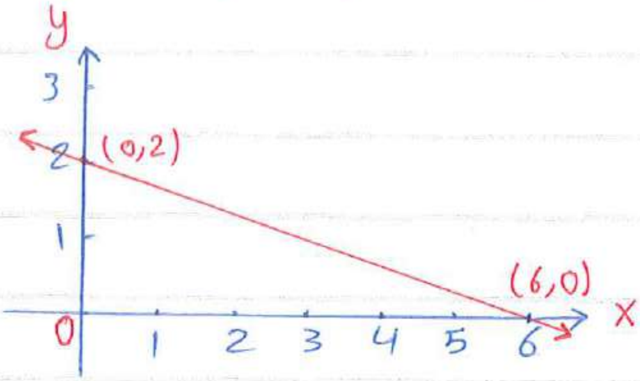
$f(2) = 3*4 - 6*2 + 2$

$f(2) = 2$

$(f(2))' =$ صفر

* الناتج صفر والسبب أننا قمنا باشتقاق ثابت

Ex: إذا كان المستقيم في الشكل المجاور هو منحنى الاقتران $f(x)$ فأجد $f'(x)$



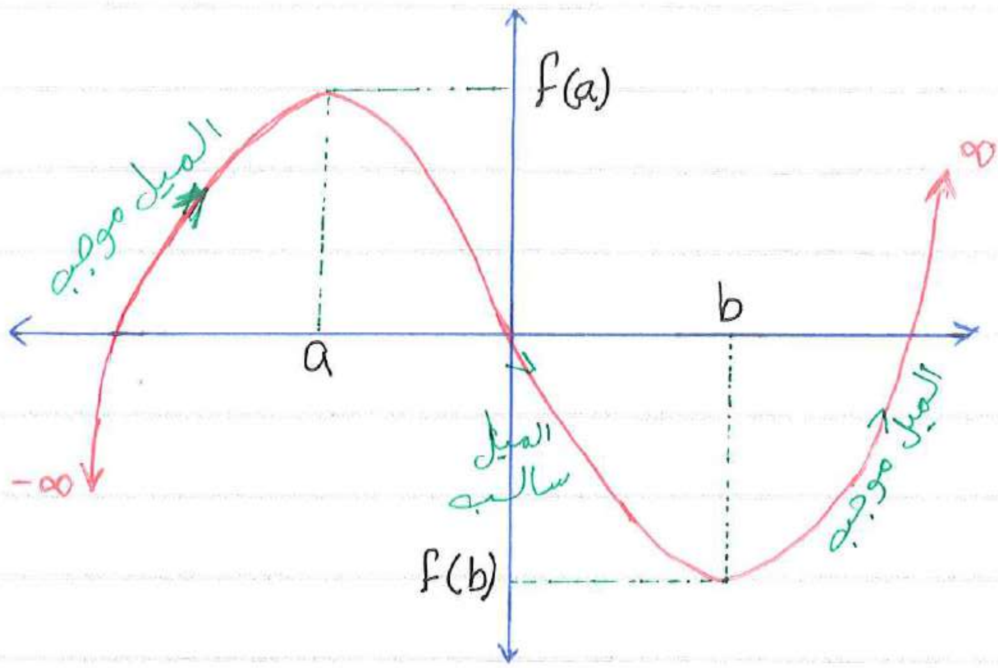
Sol:

المشتقة هي الميل

$$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{6-0} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

مقدمة

* القيم العظمى والصغرى *



* الأقتران متزايد في الفترة $(-\infty, a] , [b, \infty)$
* الأقتران متناقص في الفترة $[a, b]$

* عند $x = a$ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها $f(a)$
* عند $x = b$ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها $f(b)$

* المشتقة تساوي الميل
الأقتران متزايد ← الميل موجب ← المشتقة موجبة
الأقتران متناقص ← الميل سالب ← المشتقة سالبة

* عند القمة و القاع يكون المماس أفقي وبالتالي ميلة صفر وبالتالي المشتقة عند كل منهما تساوي صفر

* يطلق على أصفار المشتقة اسم النقاط الحرجة وهي النقط التي يكون عندها المماس أفقي ، في الرسم السابق النقط الحرجة هي

$(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

Note : النقط الحرجة هي (x, y)

أما القيمة الحرجة فهي الأحداثي y للنقط الحرجة

* كيف يمكن إيجاد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للاقتران من دون رسم ؟؟

بما أن الاقتران له قيمة عظمى محلية عند القمة و المماس عندها أفقي وميل المماس يساوي صفر فإننا نشتق الاقتران و نساويه بالصفر لتحديد هذه النقطة

وكذلك الأمر تماماً" للقيم الصغرى المحلية عند القاع

* الفرق بين قاعدة كل من : $f'(x)$ & $f(x)$ *

قاعدة $f'(x)$	قاعدة $f(x)$
* التعويض فيها يعطي ميل المنحنى (ميل المماس) عند نقطة معينة	* التعويض فيها يعطي قيمة الأقتران عند نقطة معينة
أصفار المشتقة تسمى حرجة	أصفار الأقتران تسمى جذور وعندها $y = 0$

VIN : إذا طلب السؤال تحديد القيم القصوى (العظمى و الصغرى المحلية) للإقتران فإننا :

1. نشتق قاعدة الأقتران ونساويها بالصفر .
2. نجد قيم X الحرجة
3. نعين الحرجة على خط الأعداد وندرس إشارة المشتقة
4. نحدد التزايد والتناقص
5. نحدد العظمى والصغرى ونجد قيمتها من قاعدة الأقتران $f(x)$

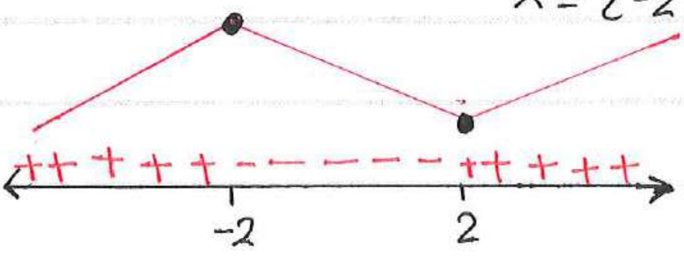
Ex : أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى للأقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وجدت)

Sol : $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$

∴ قيم x الحرجة هي $x = \{-2, 2\}$



إشارة $f'(x)$

* عند $x = -2$ يوجد عظمى محلية وقيمتها $f(-2)$

$f(x) = x^3 - 12x + 4$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 4 = 20$

* عند $x = 2$ يوجد صغرى محلية وقيمتها $f(2)$

$f(2) = (2)^3 - 12(2) + 4 = -12$

∴ القيم العظمى والصغرى هي :

← يوجد عظمى محلية عند $(-2, 20)$ وهي نقطة حرجة

← يوجد صغرى محلية عند $(2, -12)$ وهي نقطة حرجة

أتحقق من فهمي

أجد القيم العظمى والقيم الصغرى للاقترانات (إن وجدت):

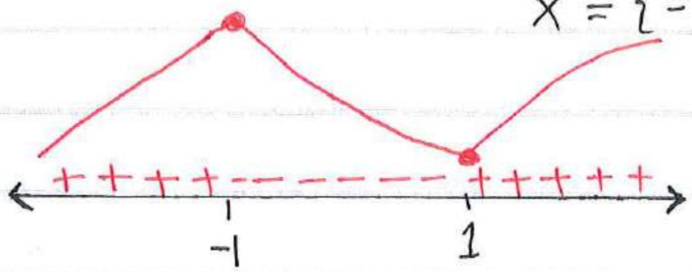
$g(x) = 2x^3 - 6x - 15$

Sol: $g'(x) = 6x^2 - 6$

$g'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow 6x^2 = 6$

$\rightarrow x^2 = 1 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow x = \pm 1$

∴ قيم x الحرجة هي $x = \{-1, 1\}$



إشارة $f'(x)$

* عند $x=-1$ يوجد عظمى محلية وقيمتها $g(-1)$

$g(x) = 2x^3 - 6x - 15$

$g(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) - 15 = -11$

* عند $x=1$ يوجد صغرى محلية وقيمتها $g(1)$

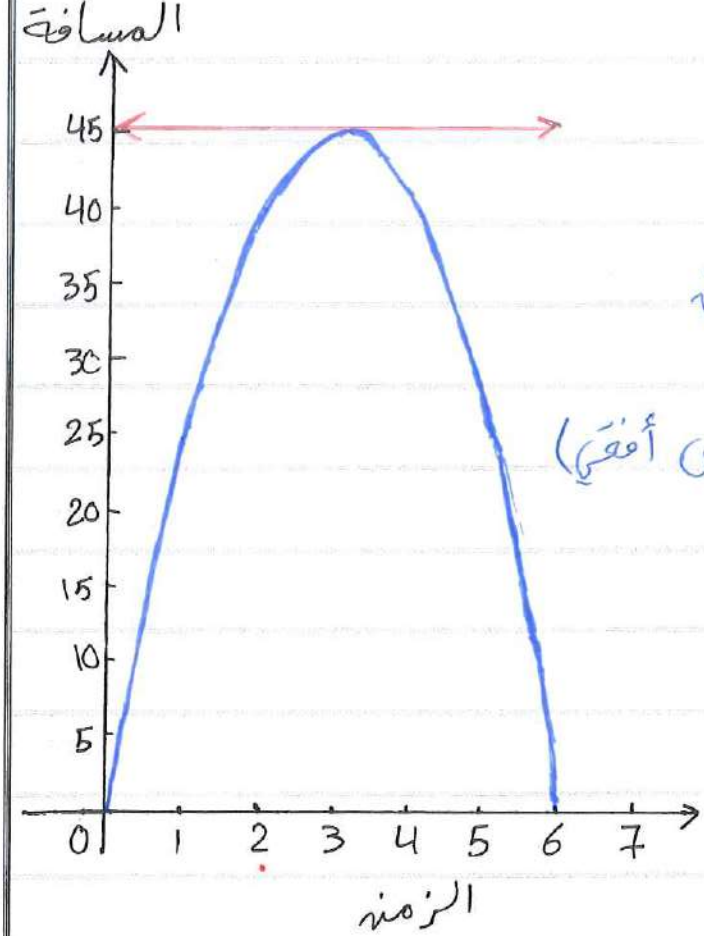
$g(1) = 2(1)^3 - 6(1) - 15 = -19$

∴ يوجد عظمى محلية عند $(-1, -11)$ وهي نقطة حرجة

يوجد صغرى محلية عند $(1, -19)$ وهي نقطة حرجة

الاستاذ : رعد الخمايسة

الهاتف : ٠٧٧٥٠٥٢٩٢٩



يمثل الإحداثي الصادي y للنقطة التي يتغير عندها اتجاه حركة الجسم من الصعود إلى الهبوط قيمة عظمى لمنحنى المسافة - الزمن لأن مشتقة المنحنى عند تلك النقطة يساوي صفراً (المماس أفقي) لذا يمكن استعمال المشتقة لتحديد النقطة التي يبلغ عندها الجسم أقصى ارتفاع.

Ex : يمثل الأقتران $h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ ارتفاع كرة عن سطح الأرض بالمتر بعد t ثانية من ركلها

1 أجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من ركلها

sol: السرعة مشتقة الأرتفاع $V(t) = h'(t)$

$V(t) = 25 - 10t$

$V(3) = 25 - 10(3) = 25 - 30 = -5 \ m/s$

2 أجد اقصى ارتفاع تصله الكرة

sol نشتق معادلة الأرتفاع ونساويها بالصفر

$h'(t) = 25 - 10t$

$\Rightarrow 25 - 10t = 0 \rightarrow 25 = 10t \rightarrow t = \frac{25}{10}$

$\Rightarrow \boxed{t = 2.5}$

الآن نعوض الزمن $t=2.5$ في معادلة الارتفاع لإيجاد أقصى ارتفاع يصله الجسم

$$h(t) = 1 + 25t - 5t^2$$

$$h(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2 = 32.25\ m$$

أقصى ارتفاع

أتحقق من فهمي

يمثل الاقتران $h(t) = 20t - 5t^2$ ارتفاع حجر عن سطح الأرض بعد t ثانية من قذفه إلى الأعلى

a) أجد سرعة الحجر بعد ثانيتين

b) أجد أقصى ارتفاع يصله الحجر

sol:

ⓐ $V(t) = h'(t)$

$= 20 - 10t$

$V(2) = 20 - 10(2) = 0$

أي أن الجسم سيكون في حالة سكون عند $t=2$ وهو أقصى ارتفاع

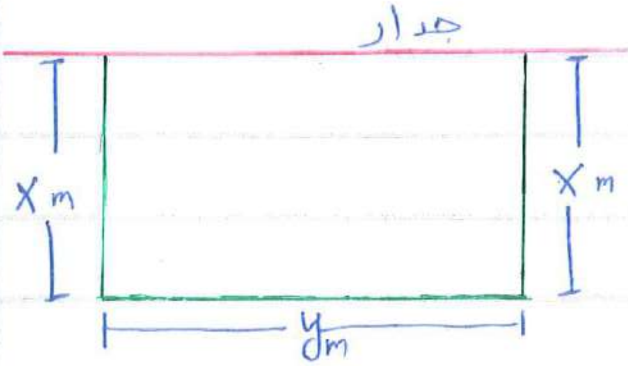
ⓑ $h'(t) = 20 - 10t$

$h'(t) = 0 \Rightarrow 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2\ sec$

زمن اقصى ارتفاع هو $t = 2\ sec$

$h(2) = 20(2) - 5(2)^2$

$= 40 - 20 = 20\ m$ أقصى ارتفاع



Ex: لدى مزارع 32 m من السياج أراد أن يسيج به حظيرة مستطيلة طولها y متراً وعرضها x متراً، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة .

1 أبين أن الاقتران $A(x) = x(32-2x)$ يمثل مساحة الحظيرة ؟

Sol: $x + y + x = 32 \longrightarrow 2x + y = 32$ محيط السياج

$\Rightarrow \boxed{y = 32 - 2x}$

المساحة

$A = xy \Rightarrow A(x) = x(32-2x)$

2 أجد $A'(x)$

Sol: $A(x) = x(32-2x)$

$A(x) = 32x - 2x^2$

$A'(x) = 32 - 4x$

3 أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن .

Sol: $A'(x) = 0$

$32 - 4x = 0 \longrightarrow 4x = 32 \longrightarrow \boxed{x = 8}$ m

$A = x(32-2x)$

$A = 8(32 - 2(8))$

$A = 8(32-16)$

$A = 8(16)$

$A = 128 \ m^2$

أتحقق من فهمي

يبين الشكل المجاور صورة مستطيلة الشكل محيطها 72cm ومساحتها $A\ cm^2$:

a) أبين أن الأقتران $A(x)=36x-x^2$ يمثل مساحة الصورة

b) أجد $A'(x)$

c) أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الصورة أكبر ما يمكن

d) أجد أكبر مساحة ممكنة للصورة

Sol: $\boxed{a}$ $2x+2y=72 \rightarrow x+y=36$ بالقسمة على 2

$\rightarrow y=36-x$

$A=xy \Rightarrow A(x)=x(36-x)=36x-x^2$ #

$\boxed{b}$ $A'(x)=36-2x$

$\boxed{c}$ $A'(x)=0$

$36-2x=0 \Rightarrow 2x=36 \rightarrow x=18\ cm$

$\boxed{d}$ $A(x)=36x-x^2$

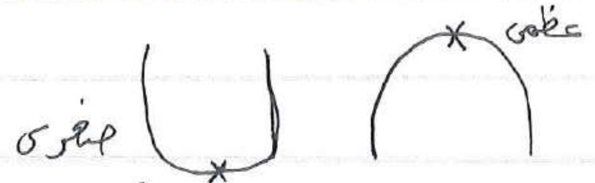
$A(18)=36(18)-(18)^2$

$=18(36-18)$

$=18*18$

$=324\ cm^2$ أكبر مساحة للصورة #

أثبت أن احداثيات رأس منحنى الأقتران التربيعي
$f(x) = ax^2 + bx + c$



هي $\left(\frac{-b}{2a} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Sol : نقطة الرأس للأقتران التربيعي تكون قيمة عظمى أو صغرى له

$f'(x) = a(2x) + b + 0$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 2ax + b = 0$

$\longrightarrow 2ax = -b \longrightarrow x = \frac{-b}{2a}$

$\left(\frac{-b}{2a} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

فكر :

مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر أصغر منه يساوي 45
جد العددين بحيث يكون ناتج ضرب مربع العدد الصغير في
العدد الكبير أكبر ما يمكن

Sol : لنفرض عدد كبير $= x$ $\quad \therefore \; x + 3y = 45$

عدد صغير $= y$

$f = x y^2$ أقتران ناتج ضرب

* من المعادلة $x + 3y = 45$ ينتج أن $x = 45 - 3y$

* عوض قيمة x في الأقتران f فينتج

$f = (45 - 3y)\, y^2$

$f = 45y^2 - 3y^3$

$f' = 45(2)y - 3(3)y^2 = 90y - 9y^2$

$\longrightarrow f' = 0 \Longrightarrow 90y - 9y^2 = 0 \longrightarrow 9y(10 - y) = 0$

$9y = 0$ أو $10 - y = 0$

$\{y = 0\}$ تهمل $\quad \{y = 10\}$

نهمل قيمة $y=0$ لأننا بحاجة إلى عدد أكبر ما يمكن

$X = 45 - 3(10) \Rightarrow X = 15$

∴ العدد الأكبر $= 15$ العدد الأصغر $= 10$

Ex: أوجد كل من القيم العظمى والصغرى للأقتران إن وجدت

$f(x) = 3X - 5$

Sol: $f'(x) = 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3 \neq 0$

∴ لا يوجد أصفار للمشتقة وبالتالي لا يوجد نقطة حرجة وبالتالي لا يوجد قيمة عظمى أو صغرى

Ex: مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج (X) جهازاً سنوياً يبيع كل جهاز بسعر $(200 - 0.01X)$ دينار ، فإذا كان تكلفة إنتاج هذه الأجهزة $(50X + 20)$ دينار ، فكم جهازاً ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنوياً

Sol: الربح = الأيرادات - التكلفة

$P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = X(200 - 0.01X) - (50X + 20)$

$P(x) = 200X - 0.01X^2 - 50X - 20$

$P(x) = -0.01X^2 + 150X - 20$

$P'(x) = -0.02X + 150$

$P'(x) = 0 \rightarrow -0.02X + 150 = 0 \rightarrow X = 7500$ جهاز