National Center
for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات   أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة
1

التفاضل
Differentiation

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعَدُّ التفاضل أحد أكثر فروع الرياضيات استخدامًا في التطبيقات العلمية؛ إذ يُمكِن عن طريقه حساب مُعدَّل تغيُّر كمية ما بالنسبة إلى كمية أُخرى، مثل سرعة الجسم المُتحرِّك وتسارعه بالنسبة إلى الزمن. ويُستعمَل التفاضل أيضًا في الحسابات الكيميائية لإيجاد مُعدَّل تغيُّر كتلة المادة المُشِعَّة بالنسبة إلى الزمن، وتحديد مقدار الكتلة في أيِّ زمن.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة.
- ✓ استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
- ✓ حلَّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقات.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إيجاد مشتقات اقترانات مختلفة.
- إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- إيجاد مشتقات اقترانات باستعمال قاعدة السلسلة.
- إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6–8) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

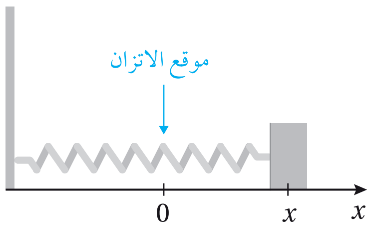
الاشتقاق
Differentiation

فكرة الدرس

- تعرُّف مفهوم قابلية الاشتقاق.
- إيجاد مشتقات الاقترانات الآتية: الأُسِّي الطبيعي، اللوغاريتمي الطبيعي، الجيب، جيب التمام.

المصطلحات قابل للاشتقاق، الموقع، السرعة المتجهة، التسارع، السرعة.

مسألة اليوم يهتزُّ جسم مُثبَّت في زنبرك أفقيًّا على سطح أملس كما في الشكل المجاور. ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = 8 \sin t$ موقع الجسم، حيث t الزمن بالثواني، وx الموقع بالسنتيمترات:



1) أجد موقع الكتلة، وسرعتها المتجهة، وتسارعها عندما $t = \frac{2}{3}$.

2) في أيِّ اتجاه تتحرَّك الكتلة عندما $t = \frac{2}{3}$؟

الاتصال والاشتقاق

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مشتقة الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المنحنى عند هذه النقطة، وأنَّه يُرمَز إليها بالرمز $f'(x)$، ويُمكِن إيجادها باستعمال التعريف العام للمشتقة. ولكنْ، هل يُمكِن إيجاد مشتقة أيِّ اقتران عند أيِّ نقطة تقع على منحناه؟ فمثلًا، هل يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = x^{1/3}$ عندما $x = 0$؟

يكون الاقتران $f(x)$ **قابلًا للاشتقاق** (differentiable) عندما $x = a$ إذا كانت $f'(a)$ موجودة. وفي هذه الحالة، يكون لمنحنى الاقتران $f(x)$ مماس غير رأسي عندما $x = a$، ويكون أيضًا متصلًا.

أُفكِّر

لماذا لا توجد مشتقة للاقتران عند النقطة التي تقع على منحناه إذا كان مماس المنحنى رأسيًّا؟

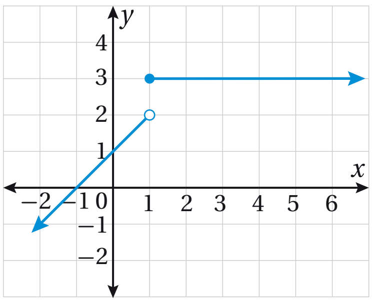
يكون الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) إذا كان قابلًا للاشتقاق عند جميع قِيَم x التي تحويها الفترة، أمّا إذا كان f غير قابل للاشتقاق عند واحدة أو أكثر من هذه القِيَم، فلا يُمكِن القول إنَّه قابل للاشتقاق على (a, b).

وتبين النظرية الآتية العلاقة بين الاتصال والاشتقاق:

نظرية **اتصال الاقتران القابل للاشتقاق عند نقطة ما**

إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، فإنَّه يكون متصلًا عندما $x = a$.

أستنتج من النظرية السابقة أنَّه إذا كان الاقتران $f(x)$ غير متصل عندما $x = a$، فإنَّه لا يكون قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$. ومن ثَمَّ، فإنَّ المشتقة لا تكون موجودة عند نقاط عدم الاتصال. فمثلًا، الاقتران:



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < 1 \\ 3 & , x \geq 1 \end{cases}$$

المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور غير قابل للاشتقاق عندما $x = 1$؛ لأنَّه غير متصل عند هذه النقطة.

مثال 1

أُفكِّر

هل الاقتران: $f(x) = |x|$ متصل عندما $x = 0$؟

1 **أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = |x|$ للاشتقاق عندما $x = 0$.**

أستعمل التعريف العام للمشتقة لبحث قابلية الاشتقاق:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقة

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$ بتعويض $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$ بالتعويض: $f(0) = |0|, f(0+h) = |0+h|$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$ بالتبسيط

أُلاحِظ أنَّ ناتج التعويض المباشر في الكسر هو $\frac{0}{0}$؛ لذا أحتاج إلى إعادة تعريف القيمة المُطلَقة.

عندما يكون $h < 0$، فإنَّ $|h| = -h$، وعندما يكون $h > 0$، فإنَّ $|h| = h$.

ومنه، فإنَّ:

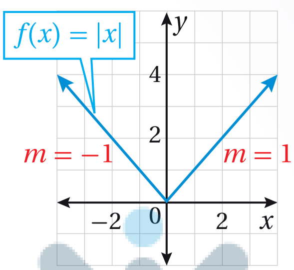
المشتقة من جهة اليسار $$f_-'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1$$

المشتقة من جهة اليمين $$f_+'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h-0}{h} = 1$$

بما أنَّ النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإنَّ $f'(0)$ غير موجودة؛ أيْ إنَّ الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = 0$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x)$ أنَّ المشتقة غير موجودة عندما $x = 0$؛ لأنَّ ميل المماس عندما يكون $x < 0$ هو -1، وميل المماس عندما يكون $x > 0$ هو 1، وهذا يعني أنَّ المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار.



2 أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = x^{1/3}$ للاشتقاق عندما $x = 0$.

أستعمل التعريف العام للمشتقة لبحث قابلية الاشتقاق:

التعريف العام للمشتقة $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بتعويض $x = 0$ $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

بالتعويض: $f(0)=(0)^{1/3}, f(0+h)=(0+h)^{1/3}$ $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^{1/3} - (0)^{1/3}}{h}$$

بالتبسيط $$= \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3}}{h}$$

بالتبسيط $$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}}$$

بما أنَّ ناتج التعويض المباشر في الكسر هو عدد مقسوم على 0، فهذا يعني أنَّ النهاية إمّا ∞، وإمّا $-\infty$، وإمّا أنْ تكون من إحدى الجهتين ∞، ومن الجهة الأُخرى $-\infty$، وأنَّه يُمكِن تحديدها عن طريق دراسة إشارة الكسر $\frac{1}{h^{2/3}}$ حول $h = 0$.

رموز رياضية

يُستعمَل الرمز $f_-'(x)$ للدلالة على المشتقة من جهة اليسار، ويُستعمَل الرمز $f_+'(x)$ للدلالة على المشتقة من جهة اليمين.

أُفكِّر

هل الاقتران: $f(x) = x^{1/3}$ متصل عندما $x = 0$؟

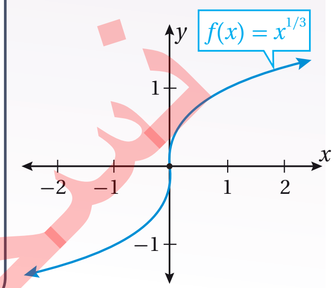
بما أنَّ الكسر $\frac{1}{h^{2/3}}$ موجب عندما تؤول h إلى الصفر من جهة اليمين وجهة اليسار؛ لأنَّه مربع كامل $\left(\frac{1}{h^{1/3}}\right)^2$، فإنَّ:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

وبما أنَّ النهاية تؤول إلى ما لا نهاية، فإنَّ مشتقة الاقتران $f(x)$ غير موجودة عندما $x = 0$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني الآتي لمنحنى الاقتران $f(x)$ أنَّ المحور y هو مماس رأسي للاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.



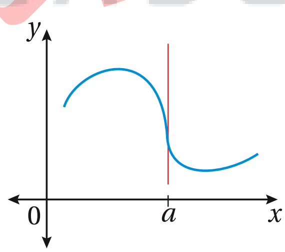
أتحقَّق من فهمي

a) أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = |x-2|$ للاشتقاق عندما $x = 2$.

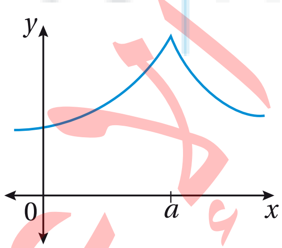
b) أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = (x+1)^{1/5}$ للاشتقاق عندما $x = -1$.

أُلاحِظ من المثال السابق أنَّ الاقتران يُمكِن أنْ يكون متصلًا عند نقطة ما، لكنَّه غير قابل للاشتقاق عندها، وذلك عندما يكون لمنحناه رأس حاد، أو زاوية، أو مماس رأسي عند هذه النقطة.

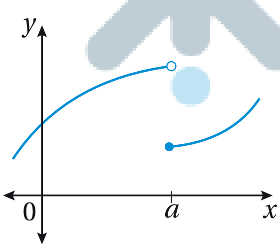
تُوضِّح التمثيلات البيانية الآتية الحالات الثلاث التي تُعَدُّ أكثر شيوعًا لعدم وجود المشتقة:



مماس رأسي عندما $x = a$.



رأس حاد، أو زاوية عندما $x = a$.



عدم اتصال عندما $x = a$.

أتعلَّم

ينتج الرأس الحاد عندما يحدث تغيُّر مفاجئ في اتجاه منحنى الاقتران؛ ما يعني أنَّ مشتقة الاقتران من جهة اليسار لا تساوي مشتقته من جهة اليمين عند هذه النقطة.

يُمكِن تلخيص العلاقة بين الاتصال والاشتقاق على النحو الآتي:

مُلخَّص المفهوم — العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق

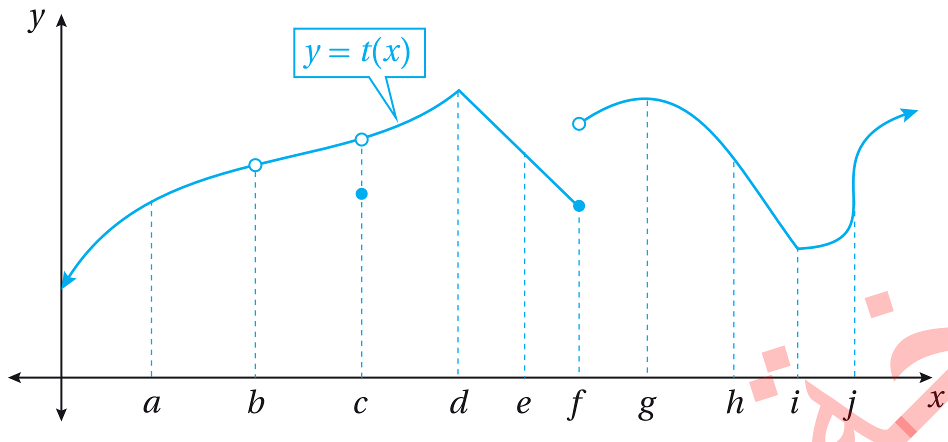
- إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، فإنَّه يكون متصلًا عندما $x = a$؛ لذا، فإنَّ قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال.
- قد يكون الاقتران $f(x)$ متصلًا عندما $x = a$، وغير قابل للاشتقاق عندما $x = a$؛ لذا، فإنَّ الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق.

أتعلَّم

الاتصال شرط ضروري، لكنَّه غير كافٍ، لوجود المشتقة.

مثال 2

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $t(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



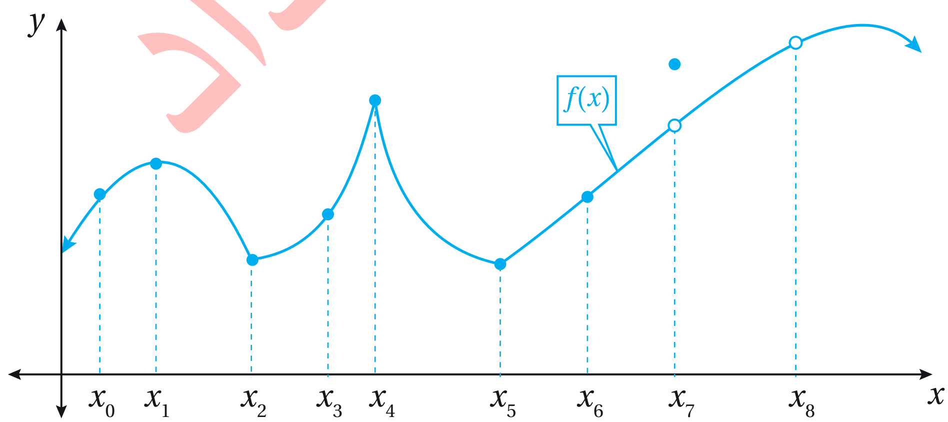
الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = b$، و$x = c$، و$x = f$؛ لأنَّه غير متصل عند هذه النقاط، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = i$، و$x = d$؛ نظرًا إلى وجود رأس حاد عند هاتين النقطتين، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = j$؛ نظرًا إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ الاقتران $t(x)$ متصل وقابل للاشتقاق عندما $x = a$، و$x = g$، و$x = h$؛ لأنَّ منحناه متصل وأملس عند هذه النقاط.

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



مشتقة الاقتران الأسِّي الطبيعي

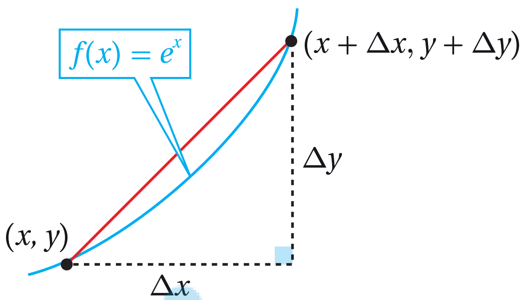
تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الثابت ومشتقة اقتران القوَّة باستعمال قواعد خاصة من دون حاجة إلى استعمال التعريف العام للمشتقة.

سأتعلَّم في هذا الدرس إيجاد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ومشتقات الاقترانات الدائرية؛ وهي اقترانات يقبل كلٌّ منها الاشتقاق على مجاله.

أتذكَّر

يُسمّى العدد e الأساس الطبيعي، أو العدد النيبيري؛ وهو عدد غير نسبي، ويُسمّى الاقتران: $f(x) = e^x$ الاقتران الأُسِّي الطبيعي.

أفترض أنَّ (x, y) و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطتان، كلٌّ منهما قريبة من الأُخرى، وأنَّهما تقعان على منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$.



إذن، الفرق بين الإحداثي y للنقطتين هو: $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$

ومنه، فإنَّ ميل القاطع المارِّ بالنقطتين (x, y) و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

إذن، ميل المماس عند النقطة (x, y) هو:

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

أتذكَّر

ميل المماس عند نقطة ما يساوي مشتقة الاقتران عند هذه النقطة.

ولكنْ، ما قيمة: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ ؟

يُمكِن الاستعانة بجدول القِيَم الآتي لإيجاد قيمة: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

Δx	0.1	0.01	0.001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1.0517	1.0050	1.0005

أفكِّر

هل أحصل على النهاية نفسها إذا عوضت عن Δx بقيم سالبة قريبة من الصفر؟

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$.

إذن، ميل المماس عند النقطة (x, y) هو:

$$m = f'(x) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

وهذا يعني أنَّ ميل المماس عند أيِّ نقطة تقع على منحنى الاقتران الأُسِّي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة.

نظرية

إذا كان: $f(x) = e^x$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ:

$$f'(x) = e^x$$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3e^x$

$f(x) = 3e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3e^x$ قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

2 $f(x) = x^2 + e^x$

$f(x) = x^2 + e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 2x + e^x$ قواعد مشتقات اقتران القوَّة، والمجموع، والاقتران الأُسِّي الطبيعي

3 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على x

$= \dfrac{x^{1/3}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$= x^{-2/3} - 2e^x$ بالتبسيط

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} - 2e^x$ قواعد مشتقات اقتران القوَّة، والاقتران الأُسِّي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران

$= -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$ تعريف الأُسِّ السالب، والصورة الجذرية

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 5e^x + 3$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$

c) $y = 8e^x + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

أتذكَّر

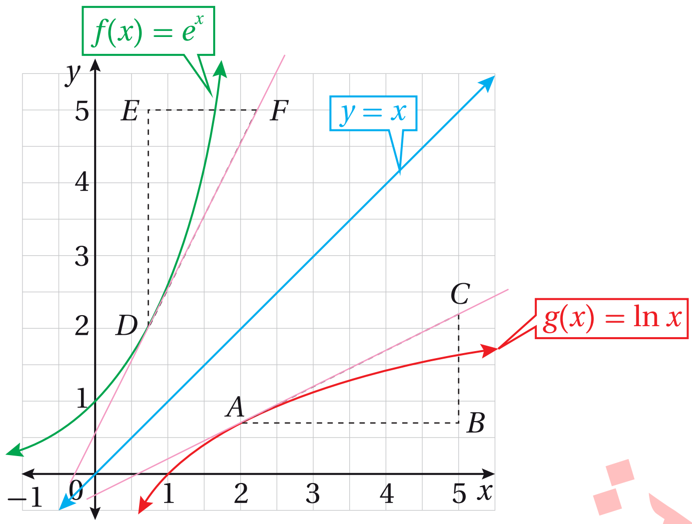
- $(af(x))' = af'(x)$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

أتذكَّر

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

يُبيِّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = \ln x$.



أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ ميل المماس عند النقطة A، الواقعة على منحنى الاقتران: $g(x) = \ln x$، هو: $\frac{CB}{AB}$.

إذن، $\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB}$.

بما أنَّ المثلث DEF هو انعكاس للمثلث ABC حول المستقيم: $y = x$، فإنَّ: $\frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE}$.

وبما أنَّ $\frac{DE}{FE}$ هو ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x$ عند النقطة D، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}}$$

وبما أنَّ ميل المماس عند أيِّ نقطة تقع على منحنى الاقتران الأُسِّي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة، فهذا يعني أنَّ ميل المماس عند النقطة D هو الإحداثي y للنقطة D. وبسبب الانعكاس؛ فإنَّ الإحداثي y للنقطة D هو الإحداثي x للنقطة A. وبذلك، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}} = \frac{1}{x}$$

أتذكَّر

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: $y = \ln x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسِّي الطبيعي: $y = e^x$.

نظرية

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

تعلَّمْتُ سابقًا قوانين الضرب والقسمة والقوَّة للوغاريتمات، ويُمكِنني استعمال هذه القوانين مع النظرية السابقة لإيجاد مشتقة اقتران يحتوي اللوغاريتم الطبيعي.

مراجعة المفهوم **قوانين اللوغاريتمات**

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- **قانون الضرب:** $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- **قانون القسمة:** $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- **قانون القوَّة:** $\log_b x^p = p \log_b x$

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \ln (x^4)$

$f(x) = \ln(x^4)$ الاقتران المعطى

$= 4 \ln (x)$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

$f'(x) = \frac{4}{x}$ قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

2 $f(x) = \ln (xe^x) + \ln 7x$

$f(x) = \ln (xe^x) + \ln 7x$ الاقتران المعطى

$= \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 2 \ln x + x + \ln 7$ بالتبسيط، واستعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$ قواعد اشتقاق الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، واقتران القوَّة، والثابت

أتذكَّر

اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$ هو لوغاريتم أساسه العدد الطبيعي e، ومن المُمكِن كتابته في صورة: $\log_e x$.

أتذكَّر

إذا كان: $b \neq 1$، حيث: $b > 0$، فإنَّ: $\log_b b^x = x$.

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

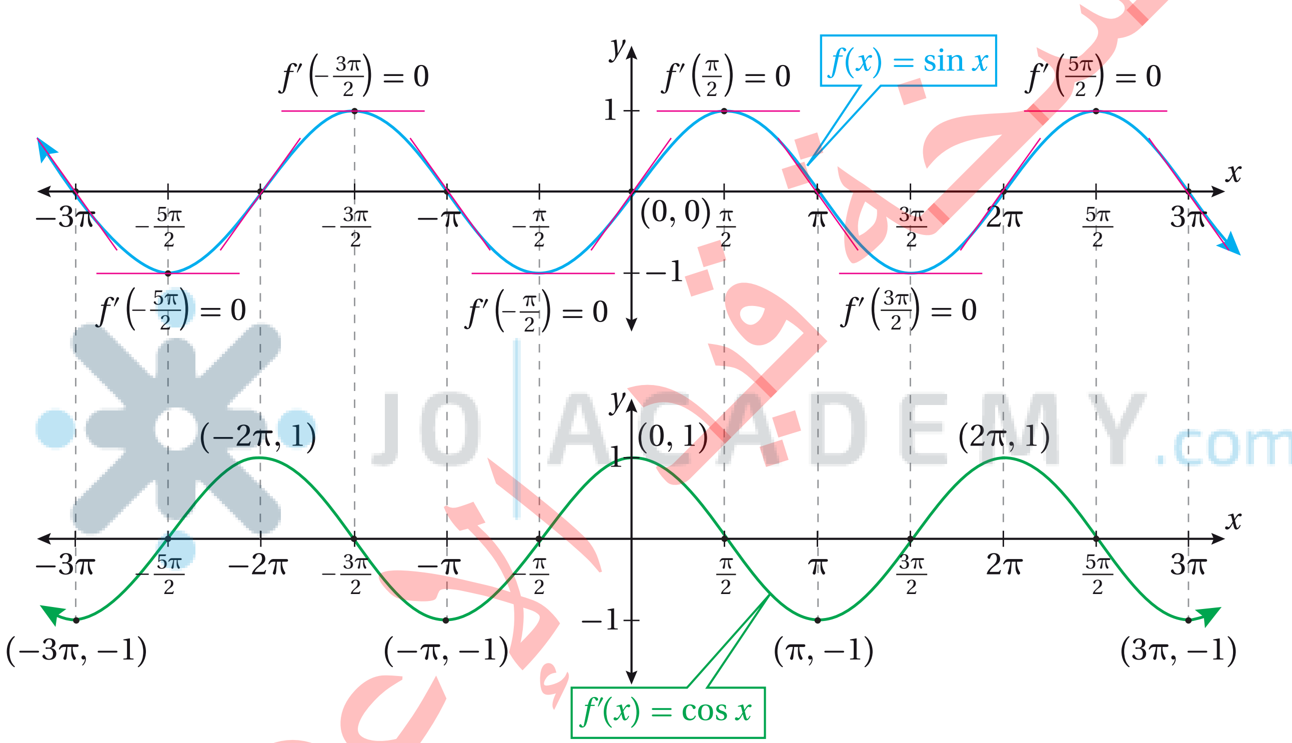
a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln (4x)$

b) $f(x) = \ln (2x^3)$

مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات المثلثية هي قواعد معطاة باستعمال النسب المثلثية. وسأتعلَّم الآن إيجاد مشتقة كلٍّ من اقتران الجيب، واقتران جيب التمام.

يُبيِّن الشكل الآتي كُلًّا من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x$، حيث x قياس الزاوية بالراديان، والتمثيل البياني لمنحنى $f'(x)$ الذي استُعمِل ميل المماس في رسم منحناه.



يظهر من الشكل السابق أنَّ منحنى $f'(x)$ مُطابِق تمامًا لمنحنى جيب التمام؛ ما يعني أنَّ: $f'(x) = \cos x$.

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال التمثيل البياني لاستنتاج أنَّ مشتقة اقتران جيب التمام هي انعكاس اقتران الجيب حول المحور x.

نظرية

مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

- إذا كان: $f(x) = \sin x$، فإنَّ: $f'(x) = \cos x$.
- إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$.

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3 \sin x + 4$

$f(x) = 3 \sin x + 4$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3 \cos x$ قواعد مشتقات اقتران الجيب، ومضاعفات الاقتران، والثابت، والمجموع

2 $y = \frac{1}{2} e^x - 7 \cos x$

$y = \frac{1}{2} e^x - 7 \cos x$ الاقتران المعطى

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} e^x + 7 \sin x$ قواعد مشتقات الاقتران الأُسّي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران، واقتران جيب التمام، والمجموع

أُفكِّر

لماذا يقبل اقترانا الجيب وجيب التمام الاشـتقاق عنـد جميـع الأعـداد الحقيقية؟

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \frac{\sin x}{2} + 3 \cos x$

b) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin \frac{\pi}{2}$

تطبيقات: معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما

يُمكِن استعمال أيٍّ من قواعد الاشـتقاق التي تعلَّمْتُها في هذا الدرس لإيجاد معادلة المماس عند نقطة ما على منحنى الاقتران.

مثال 6

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$.

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ الاقتران المعطى

$= \ln x - \ln e$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \ln x - 1$ الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات

أتذكَّر

إذا كان: $b \neq 1$، حيث: $b > 0$، فإنَّ: $\log_b b = 1$.

قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والثابت، والفرق $f'(x) = \frac{1}{x}$

بتعويض $x = 1$: $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

إذن، ميل المماس هو 1.

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بتعويض: $x_1 = 1, y_1 = -1, m = 1$: $y - (-1) = 1(x - 1)$

بالتبسيط: $y = x - 2$

إذن، معادلة المماس هي: $y = x - 2$.

2 **معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$.**

بما أنَّ ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$ هو 1، فإنَّ ميل العمودي على المماس هو -1.

ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$ هي:

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$

$$y = -x$$

أتذكَّر

إذا تعامد مستقيمان، فإنَّ حاصل ضرب ميليهما هو -1 ؛ أي إنَّ ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln \sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

تطبيقات: الحركة في خط مستقيم

عند دراسة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرَّك على خط أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا، وأنَّ **موقع** (position) هذا الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن t، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$.

أتذكَّر

يأخذ موقع الجسم $s(t)$ قيمًا موجبةً، أو سالبةً، أو صفرًا (عندما يمرُّ بنقطة الأصل).

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر اقتران الموقع $s(t)$ بالنسبة إلى الزمن اسم **السرعة المتجهة** (velocity) للجسم، ويُرمَز إليه بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّي بهذا الاسم لأنَّه يُستعمَل لتحديد كلٍّ من مقدار سرعة الجسم، واتجاه حركته.

فإذا كانت قيمة $v(t) > 0$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب. وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب. وإذا كانت $v(t) = 0$، فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر السرعة المتجهة بالنسبة إلى الزمن اسم **التسارع** (acceleration)، ويُرمَز إليه بالرمز $a(t)$. أمّا القيمة المُطلَقة للسرعة المتجهة فتُسمّى **السرعة** (speed)، وهي قياسية لا تُحدِّد اتجاه الحركة.

أتعلَّم

المسافة كمية قياسية (ليست متجهة)، والموقع كمية متجهة.

مفهوم أساسي الحركة في خط مستقيم

إذا مثَّل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، فإنَّ سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة: $v(t) = s'(t)$، وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

أمّا سرعته فهي $|v(t)|$.

أتعلَّم

من أمثلة الحركة على خط مستقيم: حركة سيّارة على طول جزء مستقيم من الطريق، وسقوط كرة من سطح مبنى، وتذبذب جسم مُعلَّق بزنبرك في مسار مستقيم، وحركة جسم مقذوف رأسيًّا إلى أعلى في مجال الجاذبية الأرضية.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

1 **أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$.**

سرعة الجسم المتجهة:

أجد مشتقة اقتران الموقع، ثم أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$ اقتران السرعة المتجهة

$v(2) = 12(2) - 3(2)^2$ بتعويض $t = 2$

$= 12$ بالتبسيط

تسارع الجسم:

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة، ثم أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$	اقتران التسارع
$= 12 - 6(2)$	بتعويض $t = 2$
$= 0$	بالتبسيط

سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$ هي $12\ \text{m/s}$، وتسارعه $0\ \text{m/s}^2$.

2 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون إذا كانت سرعته المتجهة 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

$12t - 3t^2 = 0$	بمساواة اقتران السرعة المتجهة بالصفر
$3t(4-t) = 0$	بإخراج $2t$ عاملًا مشتركًا
$t = 0$ or $t = 4$	بحلِّ كل معادلة لـ t

إذن، يكون الجسم في حالة سكون عندما $t = 0$، و $t = 4$.

3 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟

$v(t) = 12t - 3t^2$	اقتران السرعة المتجهة
$v(5) = 12(5) - 3(5)^2$	بتعويض $t = 5$
$= -15$	بالتبسيط

بما أنَّ إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإنَّ الجسم يتحرَّك لليسار عندما $t = 5$.

4 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أوَّل مَرَّة عندما $t = 0$. ومنه، فإنَّ: $s(0) = 0$.

لإيجاد الأوقات التي يعود فيها الجسم إلى هذه النقطة، أحُلُّ المعادلة: $s(t) = 0$:

$6t^2 - t^3 = 0$	بمساواة اقتران الموقع بالصفر
$t^2(6-t) = 0$	بإخراج t^2 عاملًا مشتركًا
$t = 0$ or $t = 6$	بحلِّ كل معادلة لـ t

إذن، يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد 6 s.

أُفكِّر

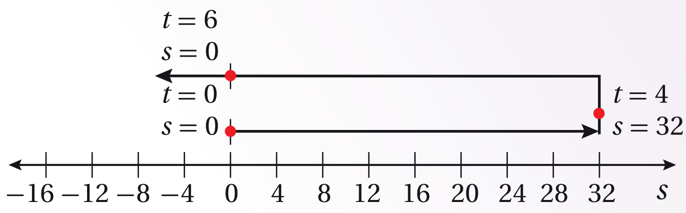
ما معنى أن يكون التسارع مساويًّا للصفر؟

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ السرعة المتجهة للجسم سالبة عندما $t = 5$، وأنَّ موقعه عند اللحظة نفسها موجب ($s(5) = 25$)؛ ما يعني عدم وجود علاقة بين موقع الجسم واتجاه حركته.

الدعم البياني

يُبيِّن المُخطَّط التالي اتجاهات حركة الجسم على طول الخط المستقيم.



أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t)=t^2-7t+8,\ t\geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

a) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t=4$.

b) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t=2$؟

d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

أتذكَّر

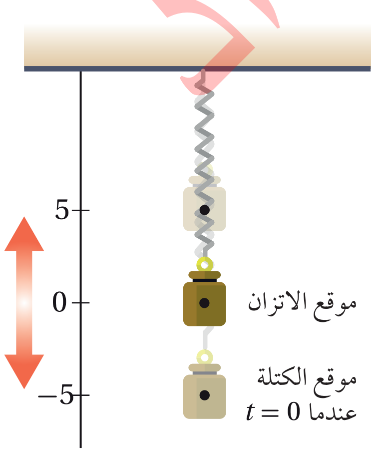
إذا كانت المعادلة التي تَصِف الإزاحة y لجسم مع الزمن t هي: $y=a\sin \omega t$ أو $y=a\cos \omega t$، فإنَّ الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة.

تطبيقات: الحركة التوافقية البسيطة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات الجيبية تُستعمَل لنمذجة السلوك الدوري في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، مثل حركة اهتزاز كتلة مُعلَّقة بزنبرك؛ إذ يُمكِن إيجاد سرعة هذه الكتلة وتسارعها باستعمال المشتقات.

مثال 8 : من الحياة

زنبرك: يُبيِّن الشكل المجاور جسمًا مُعلَّقًا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسفل الاتزان $(s=0)$، ثم تُرِك عند الزمن $t=0$ ليتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل. ويُمثِّل الاقتران: $s(t)=5\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:



1 **أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.**

اقتران السرعة المتجهة $v(t) = s'(t) = -5 \sin t$

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = -5 \cos t$

2 **أَصِف حركة الجسم.**

- اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع، فإنَّ الجسم يتحرَّك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s، والقيمة السالبة تعني أنَّ الجسم أسفل موقع الاتزان.

- أُلاحِظ أنَّ قيمة اقتران السرعة المتجهة تكون أكبر ما يُمكِن في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$. وفي هذه الحالة، فإنَّ $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس). وبالرجوع إلى اقتران الموقع، أُلاحِظ أنَّ قيمته تُصبِح صفرًا (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$؛ ما يعني أنَّ سرعة الجسم تكون أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان.

- اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإنَّ قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ ذلك أنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

- تكون قيمة التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان؛ لأنَّ قوَّة الجاذبية وقوَّة الزنبرك تُلغي إحداهما الأُخرى عند هذه النقطة. ولكنْ، إذا كان الجسم عند أيِّ موقع آخر، فإنَّ هاتين القوَّتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفرًا.

أتذكَّر

متطابقة فيثاغورس:

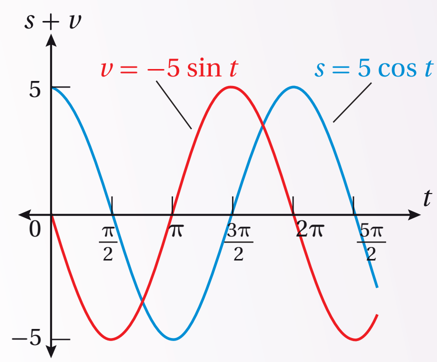
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

الربط بالفيزياء

تسارع الجسم في كل لحظة يرتبط بمُحصِّلة القوى المُؤثِّرة فيه بحسب القانون الثاني لنيوتن: $\sum F = ma$، حيث a تسارع الجسم، وm كتلته، و$\sum F$ مُحصِّلة القوى المُؤثِّرة فيه.

الدعم البياني

أُلاحِظ من التمثيل البياني الآتي لاقتراني الموقع والسرعة المتجهة أنَّ موقع الجسم يتراوح بين القيمتين: $s = 5$ cm، و$s = -5$ cm، وأنَّ سرعته المتجهة تتراوح بين القيمتين: $v = 5$ cm/s، و$v = -5$ cm/s.



أُلاحِظ أيضًا أنَّ اقتران السرعة المتجهة يكون أكبر ما يُمكِن عندما يقطع منحنى اقتران الموقع المحور x (موقع الاتزان). إذن، تكون سرعة الجسم المتجهة أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان.

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخر يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = |x - 5|, x = 5$

2) $f(x) = x^{2/5}, x = 0$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x^2 - 2x & , x > 1 \end{cases} \quad , x = 1$

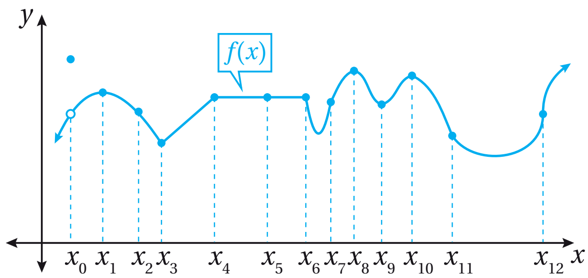
4) $f(x) = \frac{3}{x}, x = 4$

5) $f(x) = (x - 6)^{2/3}, x = 6$

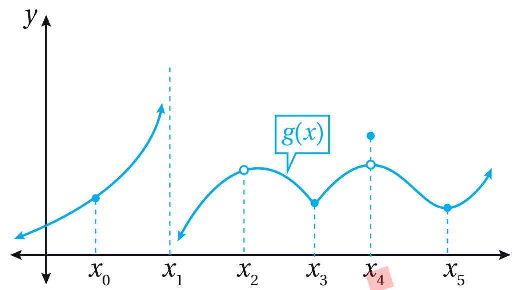
6) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \neq 4 \\ 3 & , x = 4 \end{cases} \quad , x = 4$

أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي:

7



8



أُحدِّد قيمة (قِيَم) x التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق:

9 $f(x) = \dfrac{x-8}{x^2-4x-5}$

10 $f(x) = \sqrt[3]{3x-6} + 5$

11 $f(x) = |x^2 - 9|$

12 إذا كان: $f(x) = x\,|x|$، فأُثبِت أنَّ $f'(0)$ موجودة.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

13 $f(x) = 2\sin x - e^x$

14 $f(x) = \dfrac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

15 $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$

16 $f(x) = e^{x+1} + 1$

17 $f(x) = e^x + x^e$

18 $f(x) = \ln\left(\dfrac{10}{x^n}\right)$

إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

20 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

21 أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

22 اختيار من مُتعدِّد: أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

23 إذا كان: $f(x) = \ln kx$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x > 0$، فأُبين أنَّ $f'(x) = \frac{1}{x}$.

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

24 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

25 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

26 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 5$.

27 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

28 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

29 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

30 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

31 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

زنبرك: يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

32 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

33 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

34 أَصِف حركة الجسم.

مهارات التفكير العليا

35 تبرير: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مُبرِّرًا إجابتي.

36 تبرير: إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ mx + b & , x > 2 \end{cases}$، فأجد قيمة كلٍّ من m و b اللتين تجعلان f قابلًا للاشتقاق عند جميع قِيَم x الحقيقية، مُبرِّرًا إجابتي.

37 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$، حيث: $k > 0$، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

38 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

39 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y = \log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

40 أُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

41 مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = \log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

42 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

43 أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون أوَّل مَرَّة بعد انطلاقه.

44 أجد موقع الجُسَيْم عندما يصل إلى أقصى سرعة متجهة، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 2

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- إيجاد مشتقات الاقترانات الدائرية.
- إيجاد المشتقات العليا.

المصطلحات المشتقة الثالثة، المشتقة (n).

مسألة اليوم كلَّما ازداد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلَّصت مساحة البؤبؤ. يُستعمَل الاقتران: $A(b) = \frac{40 + 24b^{0.4}}{1 + 4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالملّيمترات المربعة، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm). وتُعرَف حساسية العين للضوء بأنَّها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع. أجد اقترانًا يُمثِّل حساسية العين للضوء.

مشتقة ضرب اقترانين

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقات اقترانات مختلفة، مثل: اقترانات القوَّة، والاقتران الأُسِّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام. تعلَّمْتُ أيضًا إيجاد مشتقات مضاعفات هذه الاقترانات والاقترانات الناتجة من جمعها وطرحها. ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقات الاقترانات الناتجة من ضرب الاقترانات؟ فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فكيف يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)g(x)$؟

يُمكِن استعمال التعريف العام للمشتقة لإيجاد قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان: $A(x) = f(x)g(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $A(x)$ على النحو الآتي:

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقة

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$ بتعويض $A(x) = f(x)g(x)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$ بإضافة وطرح $f(x+h)g(x)$

$$= \lim_{h\to 0} \left(f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$$ بفصل العوامل

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \times \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ بتوزيع النهاية

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$ بالتبسيط

إذن، $A'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

أتذكَّر

بما أنَّ f و g قابلان للاشتقاق، فإنَّهما متصلان أيضًا.

إذن:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

مشتقة الضرب

نظرية

بالكلمات: مشتقة ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق هي الاقتران الأوَّل مضروبًا في مشتقة الاقتران الثاني، ثم يضاف إليه الاقتران الثاني مضروبًا في مشتقة الاقتران الأوَّل.

بالرموز: إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، فإنَّ $f(x)g(x)$ قابل للاشتقاق أيضًا. ومنه، فإنَّ:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

أتعلَّم

يُمكِنني حلُّ الفرع 1 من المثال باستعمال خاصية التوزيع أوَّلًا، ثم اشتقاق الاقتران الناتج باستعمال قاعدة مشتقة المجموع، أو قاعدة مشتقة الفرق.

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)}$

$f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = (3x-2x^2)\frac{d}{dx}(5+4x) + (5+4x)\frac{d}{dx}(3x-2x^2)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الطرح

$= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$ باستعمال خاصية التوزيع

$= -24x^2 + 4x + 15$ بالتبسيط

2 $f(x) = xe^x$

$f(x) = xe^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= xe^x + e^x \times 1$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

$= xe^x + e^x$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = \ln x \, \cos x$

أتعلَّم

لا توجد قاعدة مباشرة لحلِّ الفرع 2 من المثال غير قاعدة مشتقة الضرب.

أخطاء شائعة

من الأخطاء الشائعة عند إيجاد مشتقة حاصل ضرب اقترانين، ضرب مشتقة الاقتران الأوَّل في مشتقة الاقتران الثاني.

مشتقة قسمة اقترانين

مشتقة قسمة اقترانين ليست حاصل قسمة مشتقة كلٍّ منهما، مثلما أنَّ مشتقة ضرب اقترانين ليست حاصل ضرب مشتقة كلٍّ منهما.

يُمكِن استعمال التعريف العام للمشتقة لإيجاد قاعدة مشتقة حاصل قسمة اقترانين. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان: $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $A(x)$ على النحو الآتي:

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$ بتعويض $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)\,g(x)}$$ بتوحيد المقامات

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$ بإضافة وطرح $g(x)f(x)$

بفصل العوامل

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

بتوزيع النهاية

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} g(x) \times \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} f(x) \times \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) \times \lim\limits_{h\to 0} g(x)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

إذن، $A'(x) = \dfrac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$.

أتذكَّر

جميع النهايات موجودة؛ لأنَّ f و g قابلان للاشتقاق.

نظرية **مشتقة القسمة**

بالكلمات: مشتقة قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق هي المقام في مشتقة البسط مطروحًا منه البسط في مشتقة المقام، ثم قسمة الجميع على مربع المقام.

بالرموز: إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، وكان $g(x) \neq 0$، فإنَّ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ قابل للاشتقاق أيضًا. ومنه، فإنَّ:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\,\frac{d}{dx}(1-x^2) - (1-x^2)\,\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$ قواعد مشتقات اقتران القوَّة، والطرح، والجمع

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$ بالتبسيط

2 $\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln x}{x+1}}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{(x+1)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{(x+1)^2}$$ قواعد مشتقات اقتران القوَّة، والطرح، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$= \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{x + 1 - x\ln x}{x(x+1)^2}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمية بالنسبة إلى كمية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلًا، إيجاد $\frac{dy}{dx}$ يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x.

تتغيَّر القِيَم في كثير من المواقف الحياتية بالنسبة إلى الزمن. فمثلًا، إذا كان r كمية مُعيَّنة؛ فإنَّ مُعدَّل تغيُّرها بالنسبة إلى الزمن t هو $\frac{dr}{dt}$.

مثال 3 : من الحياة

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران: $T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$، حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت:

1 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

أجد $T'(t)$:

$$T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$$ الاقتران المعطى

$$T'(t) = \frac{(1+t^2)\frac{d}{dt}(4t) - (4t)\frac{d}{dt}(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$$ قاعدتا مشتقة القسمة، ومشتقة الثابت

$$= \frac{(1+t^2)(4) - (4t)(2t)}{(1+t^2)^2}$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة المجموع

$$= \frac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$ بالتبسيط

إذن، مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو: $T'(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$.

2 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض عندما $t = 2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أجد $T'(2)$:

$$T'(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$ مشتقة $T(t)$

$$T'(2) = \frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2}$$ بتعويض $t = 2$

$$= -0.48$$ بالتبسيط

إذن، عندما يكون الزمن 2 h، فإنَّ درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة.

أتحقَّق من فهمي

سكّان: يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$، حيث t الزمن بالسنوات، وP عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة المقلوب

يُمكِن إيجاد قاعدة عامة لمشــتقة مقلوب أيِّ اقتران باســتعمال قاعدة القسمة. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، حيث $f(x) \neq 0$، وكان: $A(x) = \frac{1}{f(x)}$، فإنَّ:

$$A'(x) = \frac{f(x) \times 0 - 1 \times f'(x)}{(f(x))^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$ بالتبسيط

إذن، $A'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

نظرية

مشتقة المقلوب

بالكلمات: مشــتقة مقلوب اقتران قابل للاشــتقاق هي سالب مشــتقة الاقتران مقسومًا على مربـع الاقتران.

بالرموز: إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشــتقاق، حيــث: $f(x) \neq 0$، فإنَّ $\frac{1}{f(x)}$ قابل للاشــتقاق أيضًــا. ومنـه، فـإنَّ:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ الاقتران المعطى

$= \dfrac{-\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$ قاعدة مشتقة المقلوب

$= \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الجمع

2 $f(t) = \dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

$f(t) = \dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$ الاقتران المعطى

$= \dfrac{-\frac{d}{dt}(t+\frac{1}{t})}{(t+\frac{1}{t})^2}$ قاعدة مشتقة المقلوب

$= \dfrac{-1+\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2}$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة المقلوب

$= \dfrac{1-t^2}{t^2(t+\frac{1}{t})^2}$ بالتبسيط

أُفكِّر

هل توجد طريقة أخرى لإيجاد مشتقة الاقتران في الفرع 2 من المثال؟

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{1}{5x-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

مشتقات الاقترانات الدائرية

تعلَّمْتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام. وسأتعلَّم الآن كيف أجد مشتقات الاقترانات الدائرية باستعمال مشتقة القسمة. فمثلًا، لإيجاد مشتقة اقتران الظلِّ، أفترض أنَّ $f(x) = \tan x$. وباستعمال مشتقة القسمة، فإنَّ:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ المتطابقات النسبية

$$f'(x) = \frac{(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x) - (\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$ قاعدتا مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \sec^2 x$$ متطابقات المقلوب

نظرية

مشتقات الاقترانات الدائرية

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

* إثبات الحالات الثلاث المتبقية من النظرية ترك كتدريب في المسائل (22 – 20)

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 \sec x$

$$f(x) = x^2 \sec x$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sec x) + \sec x \frac{d}{dx}(x^2)$$ قاعدة مشتقة الضرب

$$= x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$$ قاعدتا مشتقة اقتران القاطع، ومشتقة اقتران القوَّة

أتذكَّر

القاطع $(\sec x)$ هو مقلوب جيب التمام، وقاطع التمام $(\csc x)$ هو مقلوب الجيب.

2 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\csc x}{1 + \tan x}}$

$$f(x) = \frac{\csc x}{1 + \tan x}$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(\csc x) - (\csc x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{(1+\tan x)(-\csc x \cot x) - (\csc x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$ قواعد مشتقات اقتران الظلّ، والمجموع، وقاطع التمام

$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x \cot x$

b) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \sin x}$

المشتقات العليا

تعلمت سابقًا أنه إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، فإنَّ المشتقة $f'(x)$ هي اقتران أيضًا، ومن المُمكِن إيجاد مشتقته، التي يُرمَز إليها بالرمز $f''(x)$. وفي هذه الحالة، يُطلَق على الاقتران الجديد $f''(x)$ اسم **المشتقة الثانية** للاقتران $f(x)$.

إذا كان الاقتران $f''(x)$ قابلًا للاشتقاق، فإنَّه يُرمَز إلى مشتقته بالرمز $f'''(x)$، وتُسمّى **المشتقة الثالثة** (third derivative) للاقتران $f(x)$. ويستمر إيجاد المشتقات وتسمياتها على النحو نفسه، ويُستعمَل الرمز $f^{(n)}(x)$ للدلالة على **المشتقة (n)** (n^{th} derivative).

رموز رياضية

تُستعمَل الرموز:

$\frac{d^2y}{dx^2}, y'', \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$

للتعبير عن المشتقة الثانية، وتُستعمَل الرموز:

$\frac{d^ny}{dx^n}, y^{(n)}, \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$

للتعبير عن المشتقة (n).

مثال 6

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

المشتقة الأولى: $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

المشتقة الثانية: $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

المشتقة الثالثة: $f'''(x) = \frac{6}{x^4}$

المشتقة الرابعة: $f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^5}$

أتحقَّق من فهمي

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

2) $f(x) = x^3 \sec x$

3) $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

4) $f(x) = e^x (\tan x - x)$

5) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x} (\sqrt{x} + 3)$

8) $f(x) = \frac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

9) $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3}$

10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$، وكان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12) $(fg)'(0)$

13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14) $(7f - 2fg)'(0)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x = -2$

16) $f(x) = \frac{1 + x}{1 + \sqrt[3]{x}}, x = 8$

17) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}, x = 4$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$

18 $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}, (0, \frac{1}{2})$

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي معتمدًا أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ، $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

21 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

20 $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

22 $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

25 $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

24 $f'''(x) = 2\sqrt{x}\ , f^{(4)}(x)$

23 $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

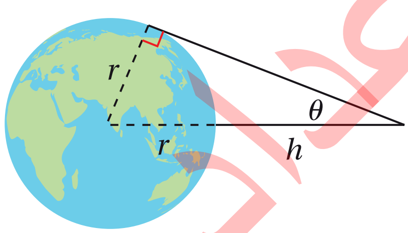
26 نباتات هجينة: وجد باحثون زراعيون أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28 أُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.

أقمار صناعية: عندمـا ترصدُ الأقمارُ الصناعيـةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسـح جزء فقط من سـطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.



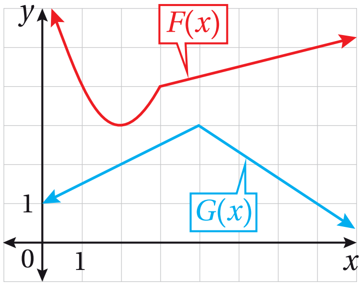
إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29 أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

30 أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ (أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

31 إذا كان: $f(x) = 9 \ln x + \frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.



إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $y = \frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x \neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.

37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

تبرير: إذا كان: $y = x^2 e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أجد المشتقات الخمس الأولى للاقتران $f(x)$.

40 أجد قاعدة عامة لـ $f^{(n)}(x)$، مُبرِّرًا إجابتي.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

41 أُثبِت أنَّ $f''(x) = \frac{6 \ln x - 5}{x^4}$، مُبرِّرًا إجابتي.

42 أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

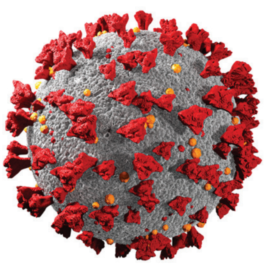
الدرس 3

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

فكرة الدرس
- إيجاد مشتقات اقترانات باستعمال قاعدة السلسلة.
- إيجاد مشتقات المعادلات الوسيطية.

المصطلحات قاعدة السلسلة، قاعدة سلسلة القوَّة، المعادلة الوسيطية، المُتغيِّر الوسيط، مجال الوسيط.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران: $P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$، حيث $P(t)$ العدد التقريبي الكلي للطلبة المصابين بعد t يومًا من ملاحظة الإنفلونزا أوَّل مَرَّة في المدرسة. أجد سرعة انتشار الإنفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام.



قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقتراني قوَّة، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران الخارجي وقيمته عند الاقتران الداخلي، ثم ضربه في مشتقة الاقتران الداخلي. وتُعَدُّ هذه الطريقة إحدى أهم قواعد الاشتقاق، وتُسمّى **قاعدة السلسلة** (the chain rule). فمثلًا، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$، الذي فيه $u = 5x^3 - 2x$ اقتران داخلي، و $y = u^4$ اقتران خارجي، على النحو الآتي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ قاعدة السلسلة

$$= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$$ بتعويض $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2, \frac{dy}{dx} = 4u^3$

$$= 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$$ بتعويض $u = 5x^3 - 2x$

أتذكَّر

$$h(x) = (\overbrace{5x^3 - 2x}^{\text{الداخلي}})^4$$
الخارجي

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب أيِّ اقترانين قابلين للاشتقاق كما يأتي:

نظرية — **قاعدة السلسلة**

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانيــن قابليــن للاشــتقاق، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشــتقة الاقتران المُركَّب: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)\ .\ g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$، حيث تُحسَب قيمة $\frac{dy}{du}$ عندما $u = g(x)$.

أتذكَّر

يُعبِّــر الرمز $\frac{dy}{du}$ عن مُعدَّل تغيُّــر y بالنســبة إلى u، ويُعبِّر الرمز $\frac{du}{dx}$ عن مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى x.

وبكلمــات أُخرى، مشــتقة الاقتران المُركَّــب $f(g(x))$ هي حاصل ضرب مشــتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$، في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$.

يُمكِن التوصُّل إلى النتائج الآتية عند تطبيق قاعدة السلســلة لإيجاد مشتقة اقترانات ناتجة من تركيب اقترانين، أحدهما اقتران مثلثي، أو اقتران أُسِّي طبيعي، أو اقتران لوغاريتمي طبيعي:

نتائج — **قاعدة السلسلة والاقترانات المشهورة**

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\big(\csc g(x)\big) = -\csc\big(g(x)\big)\cot\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\sin g(x)\big) = \cos\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\sec g(x)\big) = \sec\big(g(x)\big)\tan\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\cos g(x)\big) = -\sin\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\cot g(x)\big) = -\csc^2\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\tan g(x)\big) = \sec^2\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\ln g(x)\big) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\big(e^{(g(x))}\big) = e^{g(x)} \times g'(x)$$

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = \cos 2x}$

$f(x) = \cos 2x$ — الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x) = -\sin 2x \times 2$ — مشتقة $\cos g(x)$، حيث: $g(x) = 2x$

$= -2\sin 2x$ — بالتبسيط

2 $f(x) = e^{(x+x^2)}$

$f(x) = e^{(x+x^2)}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{(x+x^2)}) = e^{(x+x^2)} \times (1+2x)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x+x^2$

3 $f(x) = \ln(\sin x)$

$f(x) = \ln(\sin x)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln(\sin x)\right) = \frac{\cos x}{\sin x}$ مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = \sin x$

$= \cot x$ المتطابقات النسبية

أتذكَّر

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

أتذكَّر

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$ b) $f(x) = e^{\ln x}$ c) $f(x) = \ln(\cot x)$

قاعدة سلسلة القوَّة

يُعَدُّ الاقتران المُركَّب الذي يكون في صورة $f(x) = (g(x))^n$ أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا، وتُمثِّل مشتقته حالة خاصة من قاعدة السلسلة، وتُسمّى **قاعدة سلسلة القوَّة** (power chain rule)، حيث الاقتران الخارجي هو اقتران قوَّة.

مفهوم أساسي **قاعدة سلسلة القوَّة**

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n\left(g(x)\right)^{n-1} \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية: $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$

قاعدة سلسلة القوَّة: $f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$

باشتقاق x^2-1: $= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x$

الصورة الجذرية: $= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

2 $f(x) = \tan^4 x$

بإعادة كتابة الاقتران المعطى: $f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$

قاعدة سلسلة القوَّة: $f'(x) = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$

باشتقاق $\tan x$: $= 4\tan^3 x \times \sec^2 x$

3 $f(x) = \sqrt{\ln x}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية: $f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$

قاعدة سلسلة القوَّة: $f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$

باشتقاق $\ln x$: $= \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{1}{x}$

الصورة الجذرية: $= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

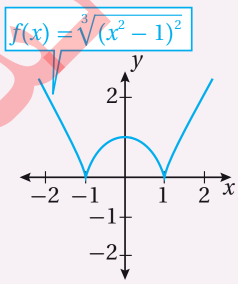
أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$ b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ c) $f(x) = (\ln x)^5$

أُفكِّر

مستعينًا بالتمثيل البياني الآتي لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ هل يُعَدُّ الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عند جميع قِيَم مجاله؟



أُفكِّر

ما وجه الاختلاف بين الاقتران: $f(x) = \tan^4 x$ والاقتران: $h(x) = \tan x^4$؟

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ: $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

الاستعمال المُتكرِّر لقاعدة السلسلة

أحتاج أحيانًا إلى اســـتعمال قاعدة السلسلة أكثر من مَرَّة لإيجاد المشـــتقة. فمثلًا، إذا كان $y = f(u), u = g(x), x = h(t)$، حيث f و g و h اقترانات، كلٌّ منها قابل للاشـــتقاق في مجاله، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة y بالنسبة إلى t باستعمال قاعدة السلسلة مرَّتين كالآتي:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = e^{\csc 4x}$

$f(x) = e^{\csc 4x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = \csc 4x$

$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$ مشتقة $\csc g(x)$، حيث: $g(x) = 4x$

$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$ بالتبسيط

2 $f(x) = \sin(\tan\sqrt{3x^2 + 4})$

$f(x) = \sin(\tan\sqrt{3x^2 + 4})$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \cos(\tan\sqrt{3x^2 + 4}) \times \frac{d}{dx}(\tan\sqrt{3x^2 + 4})$ مشتقة $\sin g(x)$، حيث: $g(x) = \tan\sqrt{3x^2 + 4}$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2 + 4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{3x^2 + 4})$ مشتقة $\tan g(x)$، حيث: $g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2 + 4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \times \frac{d}{dx}(3x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ بكتابة $\sqrt{3x^2 + 4}$ في صورة أُسِّية

$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)$$ قاعدة سلسلة القوّة

$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times 6x$$ باشتقاق $3x^2+4$

$$= \frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$$ الصورة الجذرية، والتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$

b) $f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$

قواعد الاشتقاق الأساسية، وقاعدة السلسلة

لإيجاد مشـــتقة اقتران في بعض الحالات، أحتاج إلى تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية، مثل: مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق، ومشتقة الضرب، ومشـــتقة القسمة، ومضاعفات الاقتران، إضافةً إلى تطبيق قاعدة السلسلة.

مثال 4

1 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$.

$$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x\frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$$ قاعدة مشتقة الضرب

$$= e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2e^{-0.2x}$$ قاعدة السلسلة

$$= 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$$ بإعادة كتابة الاقتران

$$f'(\frac{\pi}{8}) = 4e^{-0.2(\pi/8)}\cos 4(\frac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\pi/8)}\sin 4(\frac{\pi}{8})$$ بتعويض $x = \frac{\pi}{8}$

$$= -0.2e^{-0.025\pi}$$ بالتبسيط

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد مشـــتقة الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ بطريقة أُخرى؟

2 أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x=0$.

الاقتران المعطى $f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$

قاعدة سلسلة القوَّة $f'(x)=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)$

قاعدة مشتقة القسمة $=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\left(\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right)$

بالتبسيط $=\frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}$

بتعويض $x=0$ $f'(0)=\frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{(x^2+3)^3}$

بالتبسيط $=\frac{-18}{27}=\frac{-2}{3}$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=0$ هو: $\frac{-2}{3}$. ومنه، فإنَّ ميل العمودي على المماس عندما $x=0$ هو $\frac{3}{2}$.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x=1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$

مثال 5 : من الحياة

أعمال: طرحت إحدى الشـركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه.

إذا مثَّـل الاقتـران: $N(t)=\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2},\ t>0$ عـدد القطع المَبيعة منذ طرحه، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 **أجد مُعدَّل تغيُّر عدد القطع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن.**

أجد $N'(t)$:

الاقتران المعطى $$N(t) = \frac{250000\, t^2}{(2t+1)^2}$$

قاعدة مشتقة القسمة $$N'(t) = \frac{(2t+1)^2 \frac{d}{dt}(250000\, t^2) - (250000\, t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة $$= \frac{(2t+1)^2 (500000\, t) - (250000\, t^2)\, 2(2t+1) \times 2}{(2t+1)^4}$$

بالتبسيط $$= \frac{(2t+1)^2 (500000\, t) - (1000000\, t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

بإخراج العامل المشترك $$= \frac{(2t+1)(500000\, t)\,((2t+1) - 2t)}{(2t+1)^4}$$

بقسمة البسط والمقام على $(2t+1)$ $$= \frac{500000\, t}{(2t+1)^3}$$

2 **أجد $N'(52)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.**

أجد $N'(52)$:

مشتقة الاقتران $N(t)$ $$N'(t) = \frac{500000\, t}{(2t+1)^3}$$

بتعويض $t = 52$ $$N'(52) = \frac{500000\,(52)}{(2(52)+1)^3}$$

باستعمال الآلة الحاسبة $$\approx 22$$

إذن، $N'(52) = 22$، وهــذا يعني أنَّ إجمالــي عدد القطع المَبيعة مــن المُنتَج يزداد بمُعدَّل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعًا على طرح المُنتَج في الأسواق.

أتحقَّق من فهمي

قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات تُحسَب بالدينار، باستعمال الاقتران:

$U(x) = 80\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

b) أجد $U'(20)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة $a^{(g(x))}$

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أجد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي: $f(x) = e^x$. ولكنْ، كيف يُمكِنني إيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = a^x$؟

يُمكِن استعمال خصائص اللوغاريتمات لكتابة a^x بدلالة e^x، حيث a عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، كما يأتي:

$a^x = e^{\ln a^x}$ الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات

$a^x = e^{x \ln a}$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

يُمكِن إيجاد مشتقة a^x باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي:

$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a})$ مشتقة a^x

$= e^{x \ln a} \times \ln a$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x \ln a$

$= a^x \times \ln a$ $e^{x \ln a} = a^x$

إذن، $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$.

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $a^{g(x)}$، حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق عند x، كما يأتي:

نظرية — **مشتقة $a^{g(x)}$**

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x) \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

أُفكِّر

لماذا يُشترَط أنَّ $a \neq 1$، وأنَّ $a > 0$ دائمًا؟

مثال 6

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 8^{5x}$

$f(x) = 8^{5x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = (\ln 8)8^{5x}(5) = (5 \ln 8)8^{5x}$ مشتقة $a^{g(x)}$

2 $f(x) = 6^{x^2}$

$f(x) = 6^{x^2}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = (\ln 6)6^{x^2}(2x) = (2x \ln 6)\, 6^{x^2}$ مشتقة $a^{g(x)}$

3 $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3e^{3x} + (3 \ln 2)2^{3x}$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 3x$، ومشتقة $a^{g(x)}$، وقاعدة مشتقة المجموع

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$ b) $f(x) = 6^{1-x^3}$ c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

مشتقة $\log_a g(x)$

لإيجاد مشتقة $\log_a x$، حيث a عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، أستعمل صيغة تغيير الأساس في اللوغاريتمات لكتابة $\log_a x$ بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، ثم أجد المشتقة كما يأتي:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$ صيغة تغيير الأساس

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$ بإيجاد المشتقة

$$= \frac{1}{\ln a} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$$ بإخراج الثابت $\frac{1}{\ln a}$

$$= \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$ مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$= \frac{1}{x \ln a}$$ بالتبسيط

إذن، $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$.

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $\log_a g(x)$، حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق، كما يأتي:

نظرية **مشتقة $\log_a g(x)$**

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \log \cos x$

$f(x) = \log \cos x$ — الاقتران المعطى

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$ — مشتقة $\log_a g(x)$

$= -\dfrac{\tan x}{\ln 10}$ — المتطابقات النسبية

2 $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

$f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = \log_2 x^2 - \log_2 (x-1)$ — قانون القسمة في اللوغاريتمات

$f'(x) = \dfrac{2x}{(\ln 2)\, x^2} - \dfrac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$ — مشتقة $\log_a g(x)$، وقاعدة مشتقة الطرح

$= \dfrac{2}{(\ln 2)\, x} - \dfrac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$ — بالتبسيط

أتذكَّر

يُكتَب اللوغاريتم الاعتيادي عادة من دون أساس، حيث إنَّ أساسه 10

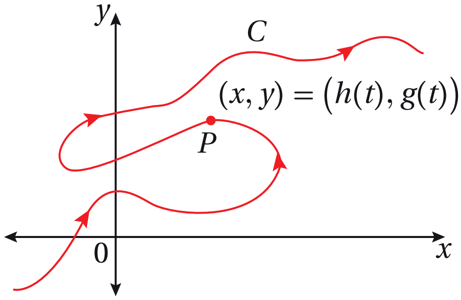
أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

مشتقة المعادلات الوسيطية



يُبيِّن الشكل المجاور الجُسَيْم P الذي يتحرَّك على المنحنى C لحظة مروره بالنقطة (x, y).

أُلاحِظ أنَّ المنحنى C لا يُحقِّق اختبار الخط الرأسي؛ لذا لا يُمكِن إيجاد علاقة واحدة فقط في صورة $y = f(x)$ تربط جميع قِيَم x بقِيَم y المُناظِرة لها على المنحنى. ولكنْ، يُمكِن كتابة كلٍّ من الإحداثي x والإحداثي y في صورة اقتران بالنسبة إلى الزمن t كما يأتي:

$$x = h(t), \qquad y = g(t)$$

أتعلَّم

ليس شرطًا أنْ يُمثِّلَ المُتغيِّر t الزمنَ.

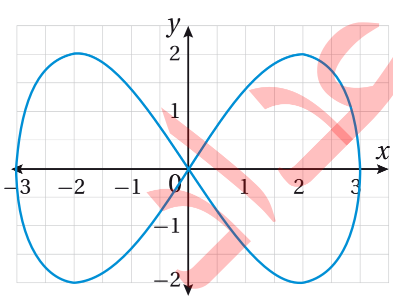
يُشكِّل هذان الاقترانان معًا **معادلة وسيطية** (parametric equation) للمنحنى C، ويُسمّى t **المُتغيِّر الوسيط** (parameter)؛ لأنَّ كل قيمة له تُحدِّد قيمةً للمُتغيِّر x، وقيمةً أُخرى للمُتغيِّر y. وعند تمثيل الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، يَنتج المنحنى C.

يُمكِن تحديد قِيَم المُتغيِّر t عن طريق فترة تُسمّى **مجال الوسيط** (parametric domain)؛ لأنَّ النقاط على المنحنى قد تتكرَّر بعد هذه الفترة.

$$\underbrace{x = h(t) \quad , \quad y = g(t)}_{\text{معادلة وسيطية}} \qquad \underbrace{t_0 \leq t \leq t_1}_{\text{مجال الوسيط}}$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 3 \cos t, y = 2 \sin 2t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$



يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لهذه المعادلة الوسيطية، بإيجاد مشتقة كلٍّ من x وy بالنسبة إلى الوسيط t أوَّلًا، ثم استعمال قاعدة السلسلة على النحو الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = -3 \sin t \qquad \text{بإيجاد مشتقة } x \text{ بالنسبة إلى المُتغيِّر } t$$

$$\frac{dy}{dt} = 4 \cos t \qquad \text{بإيجاد مشتقة } y \text{ بالنسبة إلى المُتغيِّر } t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \qquad \text{باستعمال قاعدة السلسلة}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ بقسمة طرفي المعادلة على $\frac{dx}{dt}$، حيث: $\frac{dx}{dt}\neq 0$

$$=\frac{4\cos t}{-3\sin t}$$ بتعويض $\frac{dy}{dt}=4\cos t, \frac{dx}{dt}=-3\sin t$

$$=-\frac{4}{3}\cot t$$ المتطابقات النسبية

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة أيِّ معادلة وسيطية كما يأتي:

مفهوم أساسي **مشتقة المعادلة الوسيطية**

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t، وكان $x=h(t)$، و $y=g(t)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ ,\ \frac{dx}{dt}\neq 0$$

مثال 8

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية، عندما: $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=2\sin t,\qquad y=3\cos t,\qquad 0\leq t\leq 2\pi$$

الخطوة 1: أجد ميل المماس عندما: $t=\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{dx}{dt}=2\cos t$$ بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{dy}{dt}=-3\sin t$$ بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ مشتقة المعادلة الوسيطية

$$=\frac{-3\sin t}{2\cos t}$$ بتعويض $\frac{dy}{dt}=-3\sin t, \frac{dx}{dt}=2\cos t$

$$=-\frac{3}{2}\tan t$$ المتطابقات النسبية

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}$$ بتعويض $t=\frac{\pi}{4}$

$$=-\frac{3}{2}$$ بإيجاد الناتج

أتذكَّر

يُستعمل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x=a$.

الخطوة 2: أجد x و y، عندما: $t = \frac{\pi}{4}$.

بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$
$$x = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$
$$y = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

إذن، $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ، $x = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

الخطوة 3: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

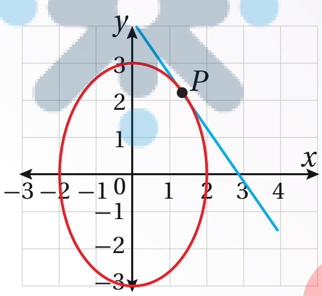
بتعويض $x_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}, y_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, m = -\frac{3}{2}$
$$y - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

بإعادة كتابة المعادلة
$$2y + 3x = 6\sqrt{2}$$

أتذكَّر

أستعمل الحقيقة الآتية:
$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

الدعم البياني



يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى المعادلة الوسيطة: $x = 2\sin t, y = 3\cos t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$، ومماس المنحنى عند النقطة $P\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

يُمكِن تمثيل المعادلة الوسيطية باستعمال برمجية جيوجبرا، عن طريق كتابة الصيغة الآتية في شريط الإدخال، ثم النقر على ↵ :

curve (2 sin t, 3 cos t, t, 0, 2π)

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطة الآتية، عندما: $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \sec t, \quad y = \tan t \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = e^{4x+2}$

2 $f(x) = 50e^{2x-10}$

3 $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$

4 $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

5 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

6 $f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$

7 $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

8 $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

9 $f(x) = (\ln x)^4$

10 $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

11 $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$

12 $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

13 $f(x) = 2^{-x}\cos \pi x$

14 $f(x) = \frac{10\log_4 x}{x}$

15 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

16 $f(x) = \log_3(1 + x\ln x)$

17 $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

18 $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19 $f(x) = 4e^{-0.5x^2}, x = -2$

20 $f(x) = x + \cos 2x, x = 0$

21 $f(x) = 2^x, x = 0$

22 $f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}, x = 3$

23 إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان: $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2, g'(5) = 6$، فأجد $A'(5)$.

24 إذا كان: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

26 إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = \sin \pi x\,, f'''(x)$

28 $f(x) = \cos(2x+1), f^{(5)}(x)$

29 $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

31 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$، موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها المتجهة صفرًا.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

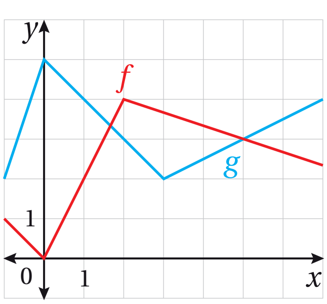
36 $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

37 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t\,, t = \frac{\pi}{3}$

38 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t\,, t = -\frac{\pi}{4}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما $1 + \sqrt{2}$، و$1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



40 $h'(1)$

41 $p'(1)$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2 , y = 2t$:

44 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

45 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2 , 2t)$.

46 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|(2 + t^2)^2$.

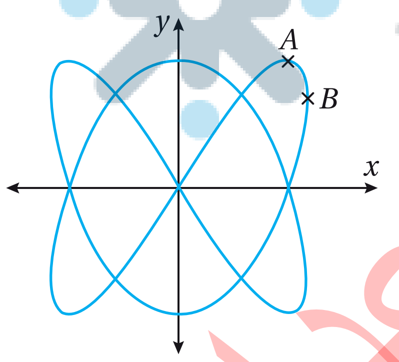
تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

48 $y = e^x \sin^2 x \cos x$

47 $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



49 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

50 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

51 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

52 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

53 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

54 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

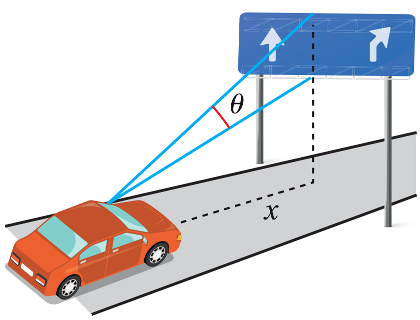
الدرس 4

الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

فكرة الدرس • إيجاد مشتقات العلاقات الضمنية.

المصطلحات العلاقة الضمنية، الاشتقاق الضمني، الاشتقاق اللوغاريتمي.

مسألة اليوم يقود سائق سيّارته في اتجاه لافتة على طريق سريع كما في الشكل المجاور. إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافتة، و x المسافة بينه وبين اللافتة بالأمتار، وكانت العلاقة التي تربط θ بـ x هي: $\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$، فما مُعدَّل تغيُّر θ بالنسبة إلى x؟

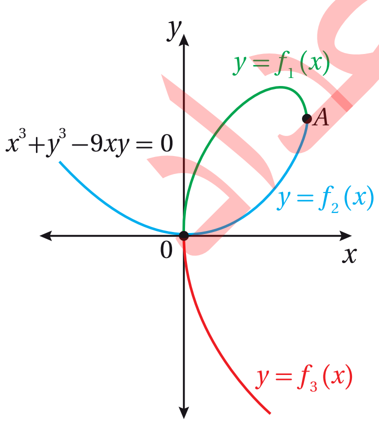


العلاقة الضمنية ومشتقاتها

جميع الاقترانات التي درسْتُ مشتقاتها حتى الآن هي اقترانات تُكتَب في صورة $y = f(x)$ بوجه عام؛ أيْ إنَّه يُمكِن فيها التعبير عن مُتغيِّرٍ صراحةً بدلالةِ مُتغيِّر آخر مثل الاقترانات الآتية:

$y = x^3 - 8x$ $\qquad y = \frac{7x}{x^2+9}$ $\qquad y = \sqrt[3]{x-1}$

أُلاحِظ أنَّه توجد معادلات، مثل $x^3 + y^3 - 9xy = 0$، لا يُمكِن كتابتها بصورة صريحة كما يأتي: $y = f(x)$، ولكنَّها حقيقةً تحـوي داخلها أكثر من اقتران. فمثلًا، تتكـوَّن المعادلة السـابقة من ثلاثـة اقترانات، هي: f_1, f_2, f_3 كما في الشـكل المجاور. ولكنْ، لا يُمكِن كتابة هذه الاقترانات بصورة صريحة؛ لذا تُسمّى هذه العلاقات **علاقات ضمنية** (implicit relations).



ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية، ولا يُمكِن – في الوقت نفسه – كتابتها في صورة اقتران بصورة صريحة كما يأتي: $y = f(x)$؟

يُطلَق على عملية إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية اسم **الاشتقاق الضمني** (implicit differentiation)، ويُمكِن تلخيص خطوات إجرائها كما يأتي:

مفهوم أساسي **الاشتقاق الضمني**

بافتراض أنَّ معادلةً تُعرِّف y ضمنيًّا بوصفه اقترانًا قابلًا للاشتقاق بالنسبة إلى x، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ باتِّباع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، مراعيًا استعمال قاعدة السلسلة عند اشتقاق حدود تتضمَّن المُتغيِّر y.
- **الخطوة 2:** أنقل جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ إلى طرف المعادلة الأيسر، ثم أنقل الحدود الأُخرى إلى طرف المعادلة الأيمن.
- **الخطوة 3:** أُخرِج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا من حدود طرف المعادلة الأيسر.
- **الخطوة 4:** أحُلُّ المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

مثال 1

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$ قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos y) = \frac{d}{dx}(2x - 3y)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3y)$$ قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق

$$\cos x - \sin y \frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$
قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y \frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$
بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$
بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$
بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 13$

b) $2x + 5y^2 = \sin y$

أحتاج في بعض المســائل إلى استعمال قاعدتي مشــتقة الضرب ومشتقة القسمة، إضافةً إلى قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقة علاقة ضمنية.

مثال 2

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $2xy - y^3 = 1$

$$\frac{d}{dx}(2xy - y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$
باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$
قاعدتا مشتقة الفرق، ومشتقة الثابت

$$2x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$
قاعدة مشتقة الضرب

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$
قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y$$
بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y^2) = -2y$$
بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x - 3y^2}$$
بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

2 $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = \frac{d}{dx}(y^2 \cos x)$$

قاعدة مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = y^2 \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(y^2)$$

قاعدة السلسلة

$$\cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = -y^2 \sin x + \cos x \left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x + 2y\cos x \frac{dy}{dx}$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y) - 2y\cos x) = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 \sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$$

أخطاء شائعة

يُخطِئ بعض الطلبة عند إيجاد مشــتقة: $(\sin(x+y))$، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران الدائري من دون إيجاد مشتقة الزاوية، باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي: $\cancel{\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = \cos(x+y)\frac{dy}{dx}}$

3 $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

قاعدتا مشتقة القسمة، ومشتقة السلسلة

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1) - (x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

قاعدة مشتقة اقتران القوَّة

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

بالتبسيط

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y(x+1)^2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{y(x+1)^2}$$

أفكِّر

هــل يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ في الفرع الثالــث من المثال بطريقة أُخرى؟

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $3xy^2 + y^3 = 8$ b) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$ c) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجاد ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية عند أيِّ نقطة تُحقِّق المعادلة، وذلك بإيجاد $\frac{dy}{dx}$ أوَّلًا، ثم تعويض قيمتي x وy للنقطة المطلوب إيجاد قيمة الميل عندها.

مثال 3

1 أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $e^{2x}\ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\ln y) = \frac{d}{dx}(x + y - 2)$$
باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln y) + \ln y\frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(2)$$
قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والضرب

$$e^{2x} \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} + \ln y \times 2e^{2x} = 1 + \frac{dy}{dx}$$
قواعد مشتقات الاقتران الأُسّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والقوَّة، والسلسلة

$$\frac{e^{2x}}{y} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x}\ln y$$
بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y} - 1\right) = 1 - 2e^{2x}\ln y$$
بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y} - 1}$$
بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, 1)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1 - 2e^{2(1)}\ln(1)}{\frac{e^{2(1)}}{1} - 1}$$
بتعويض $x = 1, y = 1$

$$= \frac{1}{e^2 - 1}$$
بالتبسيط

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, 1)$ هو: $\frac{1}{e^2 - 1}$.

> **أتعلَّم**
> يمكن إيجاد الميل عند النقطة المطلوبة، بالتعويض في المعادلة الناتجة بعد إيجاد مشتقة الطرفين مباشرة، ثم حلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$.

2 أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = x$ عندما $x = 4$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$2y\,\frac{dy}{dx} = 1$$ مشتقة اقتران القوة وقاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$.

أُعوِّض قيمة x في العلاقة الأصلية لإيجاد قيمة y المقابلة لها:

$$y^2 = x$$ العلاقة الأصلية

$$y^2 = 4$$ بتعويض $x = 4$

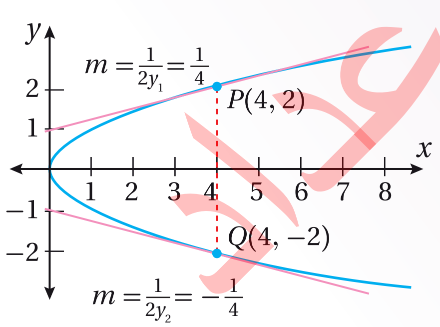
$$y = \pm 2$$ بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

إذن، أجد الميل عند النقطتين: $(1, 2)$، و $(1, -2)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2)} = -\frac{1}{4} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2)} = \frac{1}{4}$$

الدعم البياني

أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور لمنحنى العلاقة: $y^2 = x$ وجود نقطتين على منحنى العلاقة، والإحداثي x لكلٍّ منهما 4؛ ما يعني أنَّ لكل نقطةٍ مماسًّا خاصًّا بها، وهذا يُؤكِّد منطقية الحلِّ الجبري.



أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

b) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$.

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجاد معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية بإيجاد ميله، ثم التعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

مثال 4

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$ قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والثابت

$$2x - (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ قواعد مشتقات القوَّة، والضرب، والسلسلة

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2x$$ بإعادة ترتيب المعادلة

$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$ بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(-1, 2)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1, 2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)}$$ بتعويض $x = -1, y = 2$

$$= \frac{4}{5}$$ بالتبسيط

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(-1, 2)$ هو: $\frac{4}{5}$

الخطوة 3: أجد معادلة المماس عند النقطة $(-1, 2)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$$y - (2) = \frac{4}{5}(x - (-1))$$ بتعويض $x_1 = -1, y_1 = 2, m = \frac{4}{5}$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة استعمال الاشتقاق الضمني لإيجاد $\frac{dy}{dx}$. وسأتعلَّم الآن كيف أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ باستعمال الاشتقاق الضمني، وذلك باشتقاق $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى المُتغيِّر x، علمًا بأنَّه إذا احتوت المشتقة الأولى على y، فإنَّ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ستحتوي على الرمز $\frac{dy}{dx}$، الذي يُمكِن حذفه بتعويض قيمته.

مثال 5

إذا كان: $2x^3 - 3y^2 = 8$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) = 0$$ قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والثابت

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$ قواعد مشتقات القوَّة، والسلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)\frac{d}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{d}{dx}(y)}{(y)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{2xy - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$ قاعدتا مشتقة القوَّة، والسلسلة

$$= \frac{2xy - x^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^2}$$ بتعويض $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

تعلَّمْتُ في الدرس الســـابق كيفية إيجاد مشتقة المعادلات الوسيطية. وسأتعلَّم الآن كيف أجد المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية باستعمال الاشتقاق الضمني.

أتعلَّم

بما أنَّ $\frac{dy}{dx}$ فـي المعادلة الوســيطية هــي اقتــران بالنســبة إلــى المُتغيِّر t، فإنَّ إيجاد المشتقة الثانية يكون ضمنيًّا بالنسبة إلى المُتغيِّر x.

مفهوم أساسي — المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشــتقاق عند t، وكان كلٌّ من: $x = h(t)$، و $y = g(t)$، و $\frac{dy}{dx}$ قابلًا للاشتقاق عند t، فإنَّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال 6

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 1$:

$$x = t^3 + 3t^2, y = t^4 - 8t^2$$

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$ — بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$ — بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ — مشتقة المعادلة الوسيطية

$= \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t}$ — بتعويض $\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$

$= \frac{4t(t^2 - 4)}{3t(t + 2)}$ — بإخراج العامل المشترك من البسط والمقام

$= \frac{4(t + 2)(t - 2)}{3(t + 2)}$ — بتحليل الفرق بين المربعين

$= \frac{4}{3}(t - 2)$ — بالتبسيط

أتعلَّم

تبسيط المشــتقة الأولى يُســهِّل عملية إيجــاد المشتقة الثانية.

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 1$.

بإيجاد مشتقة $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t-2)\right) = \frac{4}{3}$$

المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

بتعويض $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4}{3}$ ، $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{3t^2 + 6t} = \frac{4}{3(3t^2 + 6t)}$$

بتعويض $t = 1$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{3(3(1)^2 + 6(1))}$$

بالتبسيط

$$= \frac{4}{27}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 2$:

$$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

أحتاج أحيانًا إلى إيجاد مشـــتقات اقترانات غير لوغاريتمية مُعقَّدة، تتضمَّن ضربًا، أو قسمةً، أو قوًى. وفي هذه الحالة، يُفضَّل أنْ أستعمل اللوغاريتمات؛ لتبسيط هذه الاقترانات أوَّلًا، ثم إيجاد مشتقاتها، وتُسمّى هذه الطريقة **الاشتقاق اللوغاريتمي** (logarithmic differentiation).

مفهوم أساسي — **الاشتقاق اللوغاريتمي**

يُمكِن استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي لإيجاد مشتقة بعض الاقترانات، باتِّباع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** أخـــذ اللوغاريتم الطبيعـــي لطرفي المعادلة: $y = f(x)$، ثم اســـتعمال قوانين اللوغاريتمات لكتابة المقادير بالصورة المُطوَّلة.
- **الخطوة 2:** اشتقاق المعادلة ضمنيًّا بالنسبة إلى x.
- **الخطوة 3:** حلُّ المعادلة الناتجة لـ $\frac{dy}{dx}$، ثم وضع $f(x)$ بدلًا من y .

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

1 $y = x^x$

الاقتران المعطى	$y = x^x$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة	$\ln y = \ln x^x$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$\ln y = x \ln x$
باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x	$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x)$
قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والسلسلة، والضرب	$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$
بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$
$y = x^x$	$= x^x (\ln x + 1)$

2 $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

الاقتران المعطى	$y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة	$\ln y = \ln \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$
قانونا القسمة والقوَّة في اللوغاريتمات	$\ln y = 2 \ln (x-1) - \frac{1}{2} \ln (x^2+9)$
باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x	$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(2 \ln (x-1) - \frac{1}{2} \ln (x^2+9)\right)$
قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والسلسلة، والطرح	$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+9}$
بتوحيد المقامات	$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)}$

أتعلَّم

بما أنَّ الأُسَّ والأساس مُتغيِّران في الاقتران: $y = x^x$، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد المشتقة إلّا باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي.

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

بتعويض $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$$= \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}\left(\frac{x^2 + x + 18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+18)}{(x^2+9)^{3/2}}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

a) $y = x^{\sqrt{x}}$

b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

4) $e^x y = xe^y$

5) $3^x = y - 2xy$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

7) $x = \sec \frac{1}{y}$

8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

10) $x + y = \cos(xy)$

11) $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

14) $y^3 + 2x^2 = 11y, \ y = 1$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

15) $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

16) $x^2 y = 4(2-y), (2, 1)$

17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

20 $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), (1, 0)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

21 $x + y = \sin y$

22 $4y^3 = 6x^2 + 1$

23 $xy + e^y = e$

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x-6)(y+4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

25 أُثبِت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

26 أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x + 2y = 0$.

27 أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًّا على المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$.

28 إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$، حيث: $x \neq y \neq 0$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

29 أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y = x^{1/x}, x > 0$، التي يكون عندها ميل المماس صفرًا.

30 أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

31 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه.

32 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

33 $y = (x^2 + 3)^x$

34 $y = \frac{(x^4 + 1)\sqrt{x + 2}}{2x^2 + 2x + 1}$

35 $y = \sqrt{x^2(x + 1)(x + 2)}$

36 $y = x^{\sin x}$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

37 $x = \sin t, y = \cos t, \ t = \frac{\pi}{4}$

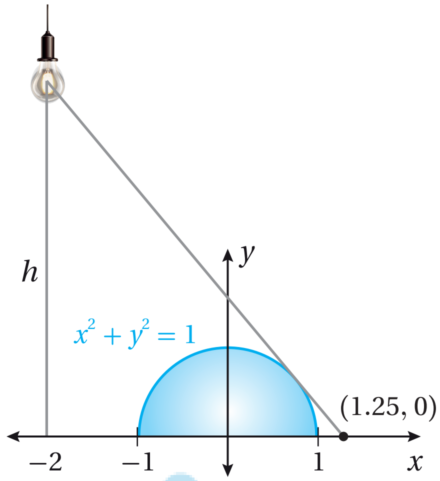
38 $x = e^{-t}, \ y = t^3 + t + 1, t = 0$

إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأوَّل.

40 أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأوَّل، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيًّا.

41 **مصباح:** يُبيِّن الشكل المجاور مصباحًا على ارتفاع h وحدة من المحور x. إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمسُّ منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$، فأجد ارتفاع المصباح h.



مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

42 أجد $\frac{dy}{dx}$.

43 يُمكِن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t, y = \tan t$، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$.
أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

44 أُثبِت أنَّ المقدارين الجبريين اللذين يُمثِّلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مُبرِّرًا إجابتي.

45 أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2.

46 **تبرير:** إذا مثَّل l أيَّ مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$، حيث k ثابت موجب، فأُثبِت أنَّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، مُبرِّرًا إجابتي.

47 **تحدٍّ:** إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = x^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4, 16)$ يقطع المحور x في النقطة B، والمحور y في النقطة C، فأجد مساحة ΔOBC، حيث O نقطة الأصل.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجُسَــيْم. إحدى الآتية تُمثِّل الزمـــن الذي تكون عنده سرعة الجُسَيْم المتجهة صفرًا:

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$

c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

2 إذا كان: $y = uv$، وكان:

$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$،

فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هو:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

4 إذا كان: $y = \tan 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4 \sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$

c) $\sec^2 (4t)$ d) $4 \sec^2 (4t)$

5 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فـإنَّ ميـل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

6 إذا كان: $f(x) = \log (2x - 3)$، فإنَّ $f'(x)$ هو:

a) $\frac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$

c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7 إذا كان: $y = 2^{1-x}$، فـإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = e^x (x + x\sqrt{x})$

9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

10 $f(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$

11 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

12 $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

13 $f(x) = 5^{2-x}$

14 $f(x) = 10 \sin 0.5x$

15 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

16 $f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$، وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17 $(fg)'(2)$

18 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

19 $(3f - 4fg)'(2)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

20 $f(x) = x^7 \ln x$

21 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

22 $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

23 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

24 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}, x = 1$

25 $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}, x = \dfrac{\pi}{4}$

26 $f(x) = \ln(x+5), x = 0$

27 $f(x) = \sin x + \sin 3x, x = \dfrac{\pi}{4}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

28 $x = t^2, y = t + 2, t = 4$

29 $x = 4\cos t, y = 3\sin t, t = \dfrac{\pi}{4}$

إذا كان: $y = x\ln x$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

30 أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

31 أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2.

أجد $\dfrac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

32 $x(x+y) = 2y^2$

33 $x = \dfrac{2y}{x^2 - y}$

34 $y\cos x = x^2 + y^2$

35 $2xe^y + ye^x = 3$

36 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \dfrac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37 $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

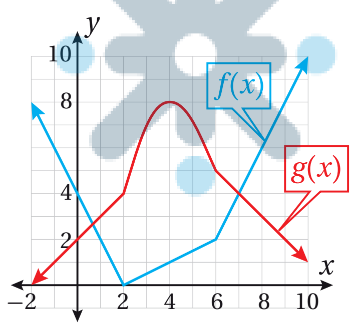
38 $y = x^{\ln x}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

39 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

40 $x^2 e^y = 1, (1, 0)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و$g(x)$. إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$، وكان: $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



41 $p'(1)$

42 $p'(4)$

43 $q'(7)$

44 **مواد مُشِعَّة:** يُمكِن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها 200 g من عنصر مُشِعٍّ بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\dfrac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

45 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 10 + \dfrac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالسنتيمترات، وt الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

الوحدة 2

تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiation

ما أهمية هذه الوحدة؟

تعلَّمْتُ في الصف السابق استعمال الاشتقاق لحلِّ مسائل عن القِيَم القصوى والمُعدَّلات المرتبطة بالزمن التي يُمكِن نمذجتها باقترانات القوَّة، وتعلَّمْتُ في الوحدة السابقة طرائق اشتقاق اقترانات أُخرى غير اقترانات القوَّة، وسأستعمل في هذه الوحدة تلك الطرائق لحلِّ مسائل عن القِيَم القصوى والمُعدَّلات المرتبطة بالزمن التي يُمكِن نمذجتها بأيِّ اقتران، كما في حساب السرعة المتجهة والتسارع للأجسام المُتحرِّكة، مثل القطارات في لحظة ما من رحلاتها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- إيجاد مشتقات اقترانات مختلفة.
- إيجاد مشــتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- إيجاد مشــتقات اقترانات باســتعمال قاعدة السلسلة.
- إيجاد مشتقات العلاقات الضمنية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- حلَّ مسائل وتطبيقات حياتية على المُعدَّلات المرتبطة بالزمن.
- إيجــاد القِيَم القصــوى المحليــة والمُطلَقة وفترات التقعُّر لاقترانات مختلفة.
- حلَّ مســائل وتطبيقــات حياتية علــى القِيَم القصوى.

أستعمل تدريبات (أســتعد لدراســة الوحدة) في الصفحتين (14 و 15) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

المُعدَّلات المرتبطة
Related Rates

فكرة الدرس حلُّ مسائل وتطبيقات حياتية على المُعدَّلات المرتبطة بالزمن.

مسألة اليوم تُستعمَل المعادلة: $S = \frac{\sqrt{hw}}{60}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان، حيث h طوله بالسنتيمتر، وw كتلته بالكيلوغرام.

يتَّبِع خالد حِمْية غذائية تجعله يخسر من كتلته 2 kg شهريًّا. ما مُعدَّل النقصان في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته 70 km، علمًا بأنَّ طوله 170 cm

عند استعمال معادلة ما للربط بين كميات تتغيَّر كلٌّ منها بالنسبة إلى الزمن، فإنَّه يُمكِن استعمال قاعدة السلسلة لاشتقاق هذه المعادلة بالنسبة إلى الزمن، فتنتج معادلة جديدة تربط بين مُعدَّلات تغيُّر هذه الكميات بالنسبة إلى الزمن، وتُحدِّد قيمة مُعدَّل التغيُّر لأيٍّ من هذه الكميات في لحظة ما إذا عُلِمت مُعدَّلات تغيُّر الكميات الأُخرى، وقِيَم الكميات جميعها في هذه اللحظة.

مفهوم أساسي **استراتيجية حلِّ مسائل المُعدَّلات المرتبطة**

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة.

2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، مثل: الكميات الثابتة، والكميات المُتغيِّرة بمرور الزمن.

3) **أكتب معادلة:** أكتب معادلة تربط بين المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي علمْتُ مُعدَّل تغيُّرها.

4) **أشتق بالنسبة إلى الزمن:** أستعمل قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر الوسيط t.

5) **أعوِّض، ثم أجد مُعدَّل التغيُّر المطلوب:** أُعوِّض في المعادلة الناتجة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات ومُعدَّلات تغيُّرها، ثم أحُلُّ المعادلة تبعًا لمُعدَّل التغيُّر المطلوب إيجاده.

مُعدَّل تغيُّر المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن

يتطلَّب حلُّ بعض المسائل الحياتية إيجاد مُعدَّل تغيُّر المساحة أو الحجم بالنسبة إلى الزمن، مثل تغيُّر مساحة موجات الماء الدائرية المُتكوِّنة على سطح ما عند هَطْلِ المطر.

مثال 1

عند سقوط قطرة ماء على مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر إحدى الدوائر يزداد بمُعدَّل 3 cm/s، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 مُعدَّل تغيُّر محيط الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 5 cm.

الخطوة 1: أكتب معادلة، مُحدِّدًا المعطيات والمطلوب.

المعادلة: أفترض أنَّ r هو نصف قُطْر الدائرة، وأنَّ C هو محيطها. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين المُتغيِّرين باستعمال المعادلة الآتية:

$$C = 2\pi r$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$.

المطلوب: $\left.\frac{dC}{dt}\right|_{r=5}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

$$C = 2\pi r$$ المعادلة

$$\frac{d}{dt}(C) = \frac{d}{dt}(2\pi r)$$ بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t

$$\frac{dC}{dt} = 2\pi \times \frac{dr}{dt}$$ قاعدة السلسلة

$$= 2\pi(3)$$ بتعويض $\frac{dr}{dt} = 3$

$$= 6\pi$$ بالتبسيط

إذن، يزداد محيط الدائرة بمُعدَّل 6π cm/s عندما يكون نصف قُطْرها 5 cm.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ مُعدَّل تغيُّر محيط الدائرة لا يتأثَّر بطول نصف القُطْر، وهذا يعني أنَّ للمحيط مُعدَّل تغيُّر ثابتًا.

2 مُعدَّل تغيُّر مساحة الدائرة عندما يكون نصف قُطْرِها **9 cm**.

الخطوة 1: أكتب معادلة، مُحدِّدًا المعطيات والمطلوب.

المعادلة: أفترض أنَّ A هو مساحة الدائرة. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين A و r باستعمال المعادلة الآتية:

$$A = \pi r^2$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$.

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=9}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

المعادلة	$A = \pi r^2$
بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t	$\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$
قاعدة السلسلة	$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$
بتعويض $r = 9, \frac{dr}{dt} = 3$	$= 2\pi(9)(3)$
بالتبسيط	$= 54\pi$

إذن، تزداد مساحة الدائرة بمُعدَّل $54\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ عندما يكون نصف قُطْرِها 9 cm.

أتحقَّق من فهمي

تنفخ ماجدة بالونًا على شكل كرة، فيزداد حجمه بمُعدَّل $80 \text{ cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر 6 cm

مُعدَّل تغيُّر المسافة بالنسبة إلى الزمن

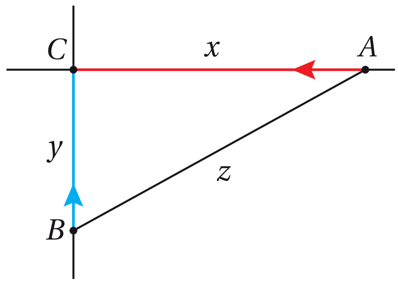
يُعَدُّ إيجاد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين جسمين مُتحرِّكين أحد التطبيقات الحياتية المُهِمَّة لعلم التفاضل، ومن ذلك إيجاد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين سيّارتين في أثناء حركتهما.

مثال 2

تسير السيّارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80 km/h، وتسير السيّارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100 km/h، وهما تتَّجِهان نحو تقاطع مروري. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين عندما تكون السيّارة A والسيّارة B على بُعْد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثم أكتب معادلة، مُحدِّدًا المطلوب.

أرسم المُخطَّط، مُحدِّدًا عليه المعطيات الواردة في المسألة، ثم أُسمّي نقطة التقاطع المروري C.



المعادلة: أفترض أنَّ x هو المسافة بين A و C، وأنَّ y هو المسافة بين B و C، وأنَّ z هو المسافة بين A و B. ومن ثَمَّ، يُمكِن الاستعانة بنظرية فيثاغورس للربط بين x و y و z باستعمال المعادلة الآتية:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dx}{dt} = -80, \frac{dy}{dt} = -100$.

المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\substack{x=0.3\\y=0.4}}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$ المعادلة

$$\frac{d}{dt}(z) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$ بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$ قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني

$$= \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$ بتعويض $\frac{dx}{dt} = -80, x = 0.3$، $y = 0.4, \frac{dy}{dt} = -100$

$$= -128$$ بالتبسيط

إذن، تقترب السيّارتان إحداهما من الأُخرى بمُعدَّل 128 km/h عندما تكون السيّارة A والسيّارة B على بُعْد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ طول كلٍّ من x و y مُتناقِص؛ لذا، فإنَّ مُعدَّل تغيُّر كلٍّ منهما سالب.

أتحقَّق من فهمي

تحرَّكت السيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجَهت السيّارة A نحو الشمال بسرعة $45\ km/h$، واتَّجَهت السيّارة B نحو الشرق بسرعة $40\ km/h$. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

مُعدَّل تغيُّر الزاوية بالنسبة إلى الزمن

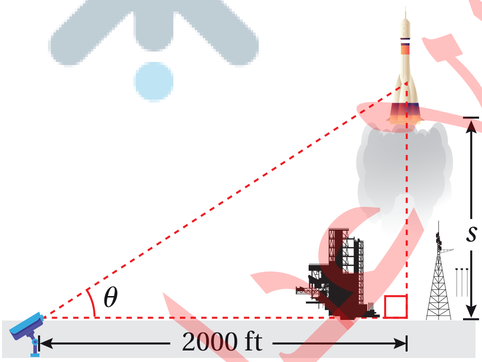
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ زاوية الارتفاع هي الزاوية المحصورة بين خط النظر إلى الأعلى والخط الأفقي، وأنَّ زاوية الانخفاض هي الزاوية المحصورة بين خط النظر إلى الأسفل والخط الأفقي. والآن سأتعلَّم حساب مُعدَّل تغيُّر زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض بالنسبة إلى الزمن.

مثال 3 : من الحياة

رصدت كاميرا مُثبَّتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسيًّا إلى الأعلى، وَفق اقتران الموقع: $s(t) = 50t^2$، حيث s الموقع بالأقدام، وt الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $2000\ ft$ عن مِنَصَّة الإطلاق، فأجد مُعدَّل تغيُّر زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوانٍ من انطلاقه.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثم أكتب معادلة، مُحدِّدًا المطلوب.

أرسم المُخطَّط، ثم أُحدِّد عليه المعطيات الواردة في المسألة.



المعادلة: أفترض أنَّ θ هي زاوية ارتفاع الصاروخ، وأنَّ s موقع الصاروخ. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين s وθ باستعمال المعادلة الآتية:

$$\tan \theta = \frac{s}{2000}$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: بما أنَّ موقع الصاروخ هو $s(t) = 50t^2$، فإنَّ سرعته هي $v(t) = \frac{ds}{dt} = 100t$.

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=10}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

المعادلة
$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t
$$\frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{2000}\right)$$

قاعدة السلسلة
$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{d\theta}{dt}$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

لإيجاد $\cos^2\theta$، أستعمل النسب المثلثية:

جيب تمام الزاوية
$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{s^2 + (2000)^2}}$$

بتعويض $s = 50t^2$
$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{(50t^2)^2 + (2000)^2}}$$

بتعويض $t = 10$
$$= \frac{2000}{\sqrt{(50(10)^2)^2 + (2000)^2}}$$

بالتبسيط
$$= \frac{2}{\sqrt{29}}$$

إذن، $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$.

المعادلة الناتجة من الاشتقاق
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

بتعويض $\cos^2\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{ds}{dt} = 100t$
$$= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2}{2000} \times 100t$$

بتعويض $t = 10$
$$= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2}{2000} \times 100(10)$$

بالتبسيط
$$= \frac{2}{29}$$

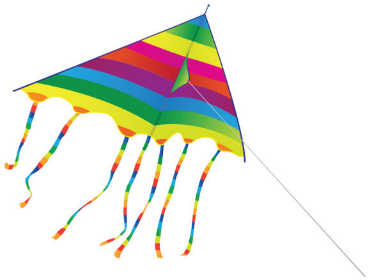
إذن، مُعدَّل تغيُّر زاوية ارتفاع الصاروخ عندما $t = 10$ هو: $\frac{2}{29}$ rad/s

أُفكِّر

هل توجد طريقة أُخرى لحلِّ المسألة؟

أتحقَّق من فهمي

حلَّقت طائرة ورقية خيطها مُثبَّت بنقطة على سطح الأرض على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، ثم أخذت تتحرَّك أفقيًّا بسرعة 2 m/s. أجد مُعدَّل تغيُّر الزاوية بين الخيط وسطح الأرض عندما يكون طول الخيط 100 m.



مُعدَّل التغيُّر بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية

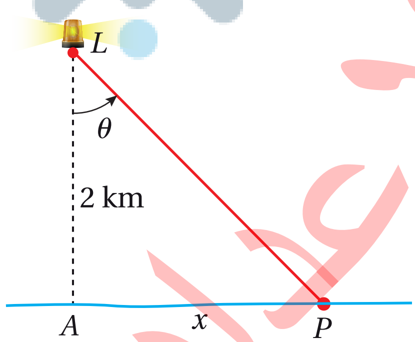
تعلَّمْتُ سابقًا الحركة الدائرية. والآن سأتعلَّم حساب مُعدَّلات تغيُّر زمنية مرتبطة بهذا النوع من الحركة.

مثال 4

أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، وتم تثبيتها في مستوى سطح البحر، وكانت تبعد مسافة 2 km عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل 3 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة 4 km عن أقرب نقطة إلى المنارة.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثم أكتب معادلة، مُحدِّدًا المطلوب.

أرسم المُخطَّط، ثم أُحدِّد عليه موقع المنارة L، وأقرب نقطة إليها على خط الساحل، وهي النقطة A التي تبعد عنها مسافة 2 km.



المعادلة: أفترض أنَّ بقعة الضوء P تبعد مسافة x عن A، وأنَّ θ هي الزاوية ALP. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين x و θ باستعمال المعادلة الآتية:

$$x = 2 \tan \theta$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: مُعدَّل تغيُّر الزاوية θ بالنسبة إلى الزمن يُمثِّل السرعة الزاويَّة.

أستعمل معطيات السؤال لإيجاد السرعة الزاويَّة كالآتي:

قيـاس الدورة الكاملـة 2π، وهذا يعنـي أنَّ كل 3 دورات تُقابِل زاوية الدوران التي قياسـها $2\pi \times 3$، أو 6π راديان:

السرعة الزاويَّة $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = w = \dfrac{\theta}{t}$

بتعويض $\theta = 6\pi,\ t = 1\text{ min}$ $\quad = \dfrac{6\pi}{1\text{ min}}$

إذن، السرعة الزاويَّة لبقعة الضوء: $\dfrac{d\theta}{dt} = 6\pi \text{ rad/ min}$، وهي تُمثِّل مُعدَّل التغيُّر المعطى.

المطلوب: $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=4}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

المعادلة $\quad x = 2\tan\theta$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t $\quad \dfrac{d}{dt}(x) = \dfrac{d}{dt}(2\tan\theta)$

قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني $\quad \dfrac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta \times \dfrac{d\theta}{dt}$

أستعمل متطابقات فيثاغورس لإيجاد $\sec^2\theta$ عندما $x = 4$:

المعادلة الأصلية $\quad x = 2\tan\theta$

بتعويض $x = 4$ $\quad 4 = 2\tan\theta$

بحلِّ المعادلة لـ $\tan\theta$ $\quad \tan\theta = 2$

متطابقات فيثاغورس $\quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

بتعويض $\tan\theta = 2$ $\quad = 1 + 2^2$

بالتبسيط $\quad = 5$

إذن، $\sec^2\theta = 5$.

المعادلة الناتجة من الاشتقاق $\quad \dfrac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta \times \dfrac{d\theta}{dt}$

بتعويض $\sec^2\theta = 5,\ \dfrac{d\theta}{dt} = 6\pi$ $\quad = 2(5) \times 6\pi$

بالتبسيط $\quad = 60\pi$

إذن، تتحرَّك بقعة الضوء بمُعدَّل $60\ \pi$ km/min عندما تبعد مسافة 4 km عن A.

أتذكَّر

السـرعة الزاويَّة هي قيمة التغيُّر في قيـاس الزاوية بالراديان مقسـومة على الزمـن المنقضي، ويُرمَز إليها بالرمز ω.

أتحقَّق من فهمي

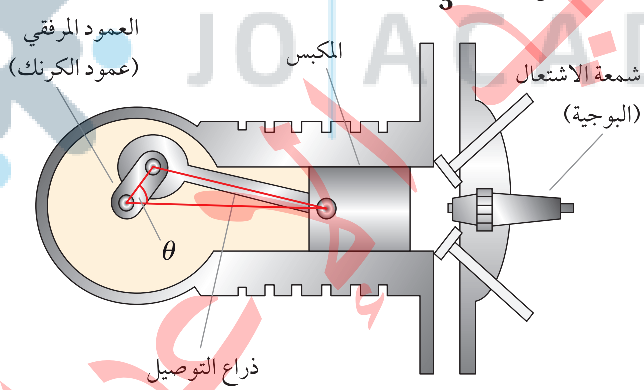
أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، وكانت تبعد مسافة **3 km** عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل **4** دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة **1 km** عن أقرب نقطة إلى المنارة.

مُعدَّل التغيُّر بالنسبة إلى الزمن وميكانيكا الحركة

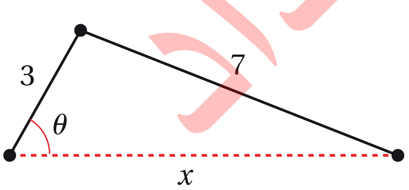
يستعمل المهندسون الميكانيكيون الاشتقاق بالنسبة إلى الزمن لحساب سرعة أجزاء مُتحرِّكة داخل الآلات.

مثال 5

يُبيِّن الشكل الآتي مُحرِّك سيّارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7 in، وهي مُثبَّتة بعمود مرفقي طوله 3 in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$؟



الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثم أكتب معادلة، مُحدِّدًا المطلوب.



أرسم مثلثًا، ثم أُحدِّد عليه المعطيات الواردة في المسألة.

المعادلة: أفترض أنَّ x هو المسافة بين المكبس ورأس العمود المرفقي. ومن ثَمَّ، يُمكِن الاستعانة بقانون جيوب التمام للربط بين x وθ باستعمال المعادلة الآتية:

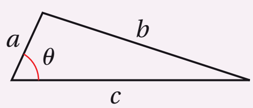
$$7^2 = 3^2 + x^2 - 6(x) \cos \theta$$

أتعلَّم

ترتبط سرعة المكبس بزاوية العمود المرفقي.

أتذكَّر

قانون جيوب التمام هو علاقة تربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياس إحدى زواياه، ويستفاد من هذه العلاقة في حلِّ المثلث في كثير من الحالات.



قانون جيوب التمام:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$$

مُعـدَّل التغيُّر المعطى: بما أنَّ مُعدَّل تغيُّر الزاوية θ بالنسبة إلى الزمن يُمثِّل السرعة الزاويَّة، فإنَّه يُمكِن إيجاد السرعة الزاويَّة من معطيات السؤال كالآتي:

قياس الـدورة الكاملة 2π، وهذا يعنـي أنَّ كل 200 دورة تُقابِل زاوية الدوران التي قياسـها $200 \times 2\pi$ أو 400π راديان:

السرعة الزاويَّة $\qquad \dfrac{d\theta}{dt} = w = \dfrac{\theta}{t}$

بتعويض $\theta = 6\pi, t = 1$ min $\qquad = \dfrac{400\pi}{1 \text{ min}}$

إذن، مُعدَّل التغيُّر المعطى هو: $\dfrac{d\theta}{dt} = 400\pi$ rad/min.

المطلوب: $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

المعادلة $\qquad 49 = 9 + x^2 - 6(x)\cos\theta$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t $\qquad \dfrac{d}{dt}(49) = \dfrac{d}{dt}(9 + x^2 - 6(x)\cos\theta)$

قاعدة السلسلة، وقاعدة مشتقة الضرب $\qquad 0 = 2x\dfrac{dx}{dt} + 6x\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} - 6\cos\theta\dfrac{dx}{dt}$

بإعادة ترتيب المعادلة، وإخراج $\dfrac{dx}{dt}$ عاملًا مشتركًا $\qquad (6\cos\theta - 2x)\dfrac{dx}{dt} = 6x\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

بحلِّ المعادلة لـ $\dfrac{dx}{dt}$ $\qquad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{6x\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{6\cos\theta - 2x}$

أُعوِّض $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ في المعادلة الأصلية لإيجاد قيمة x:

المعادلة $\qquad 49 = 9 + x^2 - 6(x)\cos\theta$

بتعويض $\theta = \frac{\pi}{3}$ $\qquad 49 = 9 + x^2 - 6x\cos\dfrac{\pi}{3}$

بالتبسيط $\qquad 49 = 9 + x^2 - 6x\left(\dfrac{1}{2}\right)$

بإعادة ترتيب المعادلة $\qquad x^2 - 3x - 40 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $\qquad (x - 8)(x + 5) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\qquad x - 8 = 0 \quad$ or $\quad x + 5 = 0$

بحلِّ كل معادلة لـ x $\qquad x = 8 \quad$ or $\quad x = -5$

بما أنَّ x يُعبِّر عن مسافة، فإنَّني أختار الحلَّ الموجب، وهو $x = 8$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{6 \cos \theta - 2x}$$ المعادلة الناتجة من الاشتقاق

$$= \frac{6(8) \sin \frac{\pi}{3} (400\pi)}{6 \cos \frac{\pi}{3} - 2(8)}$$ بتعويض $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{d\theta}{dt} = 400\pi, x = 8$

$$= \frac{9600\pi\sqrt{3}}{-13}$$ بالتبسيط

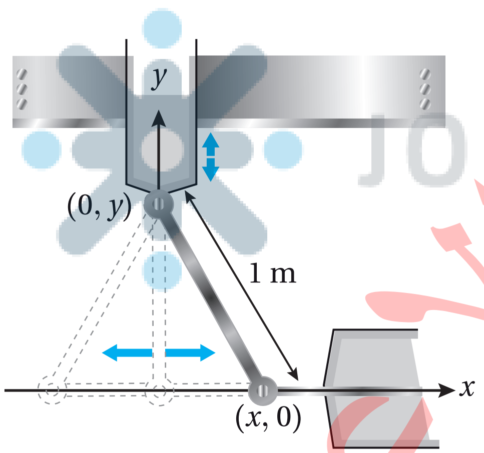
$$\approx -4018$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ هي: 4018 in/m في اتجاه اليسار.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ سرعة المكبس سالبة، وهذا يعني أنَّ x يُمثِّل مسافة مُتناقِصة.

أتحقَّق من فهمي



هندسة ميكانيكية: يُبيِّن الشكل المجاور ذراعًا معدنيةً مُتحرِّكةً طولها **1 m**، وإحداثيات نهايتيها **(x, 0)** و **(0, y)**. ويُمثِّل الاقتران $x(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور x، حيث t الزمن بالثواني:

a) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع.

b) أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الآخر عند النقطة $(\frac{1}{4}, 0)$.

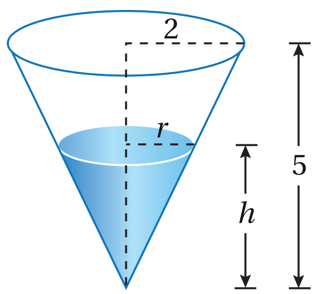
مُعدَّل تغيُّر حجم السائل بالنسبة إلى الزمن

من المعلوم أنَّ السوائل تَتَّخِذ شكل الوعاء الذي توضَع فيه؛ لذا يُمكِن حساب مُعدَّل تغيُّر حجم السائل بالنسبة إلى الزمن اعتمادًا على شكل الوعاء وأبعاده.

مثال 6

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم، ارتفاعه 5 m، ونصف قُطْر قاعدته 2 m، ورأسه إلى الأسفل.

تسرَّب الماء من الخزّان بمُعدَّل $\frac{1}{12}\,m^3/min$. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 4 m؟



الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثم أكتب معادلة، مُحدِّدًا المطلوب.

أرسم المُخطَّط، ثم أُحدِّد عليه المعطيات الواردة في المسألة.

المعادلة: أفترض أنَّ r هو نصف قُطْر سطح الماء في الخزّان، وh ارتفاع الماء في الخزّان، و V حجم الماء في الخزّان. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين r و h وV باستعمال المعادلة الآتية:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{12}$.

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}$.

الخطوة 2: أكتب المعادلة بدلالة مُتغيِّر واحد.

يُمكِنني كتابة V بدلالة المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، وهو h، باستعمال تشابه المثلثات:

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2h}{5}$$

وبذلك، يُمكِن كتابة المعادلة على النحو الآتي:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{4\pi}{75}h^3$$

الخطوة 3: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

$$V = \frac{4\pi}{75}h^3 \qquad \text{المعادلة}$$

$$\frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{75}h^3\right) \qquad \text{بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى } t$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{75} \times 3h^2 \times \frac{dh}{dt} \qquad \text{قاعدة السلسلة، والاشتقاق الضمني}$$

أتعلَّم

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، كان المثلثان مُتشابِهين، وكانت أطوال أضلاعهما المُتناظِرة مُتناسِبة.

بتعويض $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{12}, h = 4$

$$-\frac{1}{12} = \frac{4\pi}{75} \times 3(4)^2 \times \frac{dh}{dt}$$

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{25}{768\pi}$$

إذن، يتناقص ارتفاع الماء في الخزّان بمُعدَّل $\frac{25}{768\pi}$ m /min عندما يكون ارتفاع الماء 4 m.

أتحقَّق من فهمي

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، وارتفاعه 10 m، ونصف قُطْر قاعدته 5 m. صُبَّ الماء في الخزّان بمُعدَّل π m^3/min. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 8 m؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدَّل 2 cm/s، ويقل طول ضلع آخر له بمُعدَّل 3 cm/s بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل 20 cm، وطول الضلع الثاني 50 cm:

1. ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟
2. ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟
3. ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطْر المستطيل في تلك اللحظة؟
4. أيُّ الكمِّيات في المسألة مُتزايِدة؟ أيُّها مُتناقِصة؟ أُبرِّر إجابتي.

مُكعَّب طول ضلعه 10 cm. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل 6 cm/s، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

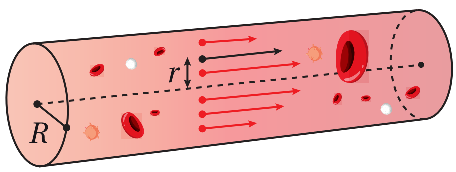
5. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بَدْء تمدُّده.
6. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعَّب بعد 6s من بَدْء تمدُّده.

وقود: خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15 m، وقُطْر قاعدته 2 m. مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل 500 L/min:

7. أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزّان عند أي لحظة.
8. أجد مُعدَّل تغيُّر المساحة الجانبية للوقود لحظة امتلاء الخزّان، علمًا بأنَّه كان فارغًا قبل ذلك.

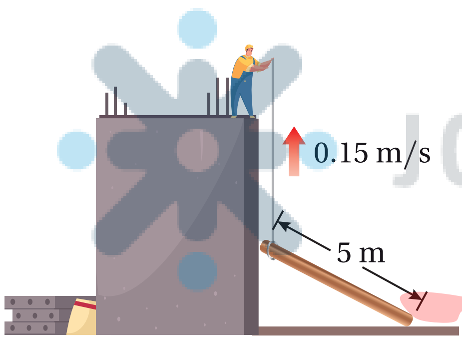
معلومة

يكون تدفُّق الدم في الأوعية الدموية أســرع قرب محور الوعــاء الدموي، وأبطأ قرب جدار الوعاء.



9 طب: تُمثِّل المعادلة: $V = \frac{3125}{6}(R^2 - r^2)$ سـرعة الـدم في أحد الأوعية الدموية بالملّيمتر لكل ثانية، حيـث R طول نصف قُطْر الوعــاء بالملّيمتر، وذلك على بُعْـد r ملّيمترًا من محور هذا الوعــاء. إذا كان الوعاء ينقبض بمُعدَّل $0.0002\ \text{mm/s}$، فأجد مُعدَّل تغيُّر سـرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قُطْره $0.075\ \text{mm}$، علمًا بأنَّ r ثابت، ومقداره $0.0005\ \text{mm}$

10 علوم: يُمثِّل الاقتران $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسـيوس) التي يشـعر بها شخص على بُعْد x مترًا من النار. إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمُعدَّل $2\ \text{m/s}$، فأجد سرعة تغيُّر درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بُعْد $5\ \text{m}$ من النار.



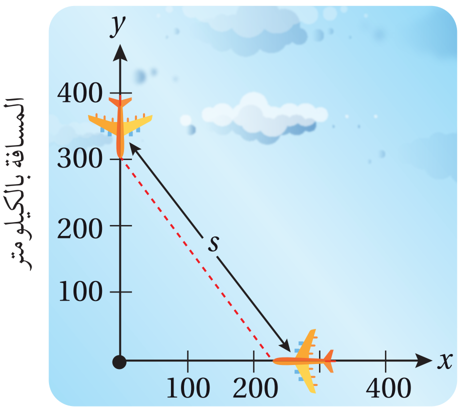
11 بناء: يسـحب عامل بناء لوحًا خشبيًّا طوله $5\ \text{m}$ إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشــاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبـل رُبِط به أحد طرفـي اللوح كما في الشـكل المجـاور. إذا افترضْتُ أنَّ الطرف الآخر من لوح الخشـب يتبع مسـارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسـحب الحبل بمُعدَّل $0.15\ \text{m/s}$، بحيـث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًـا للجدار. فما سـرعة انزلاق طرف اللوح على الأرض عندمـا يكون على بُعْد $3\ \text{m}$ من جدار المبنى؟

آلات: يسـقط الرمل من حزام ناقل بمُعدَّل $10\ \text{m}^3/\text{min}$ على قِمَّة كَوْمة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكَوْمة يساوي دائمًا ثلاثة أثمان طول قُطْر قاعدتها، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 سرعة تغير ارتفاع الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ \text{m}$.

13 سرعة تغيُّر طول نصف قُطْر قاعدة الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ \text{m}$.

طيران: رصــد مُراقِب الحركة الجوية في أحــد المطارات طائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشــكل المجاور. كانــت إحدى الطائرتين تبعد مســافة 225 km عن النقطة، وتسير بسرعة 450 km/h، في حين كانت الطائرة الأُخرى تبعد مسافة 300 km عن النقطة، وتسير بسرعة 600 km/h :



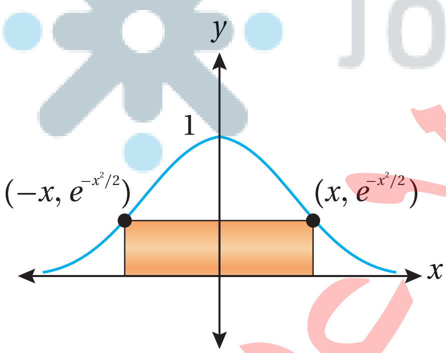
المسافة بالكيلومتر

14 أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

15 هل يجب على مُراقِب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتِّخاذ مسار مختلف؟ أُبرِّر إجابتي.

16 **درّاجات نارية:** تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$. إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدرّاجة الثانية 20 km/h، فأجد سرعة ابتعاد كلٍّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

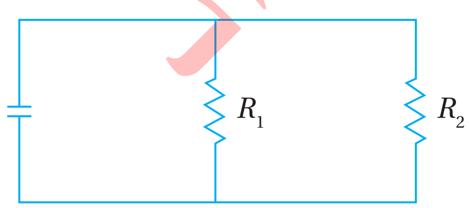
يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرســومًا داخل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-x^2/2}$، إذا كانت x تتغير مع الزمن ليتغير معها موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



17 أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

18 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4$، و $\frac{dx}{dt} = 4 \text{ cm/min}$.

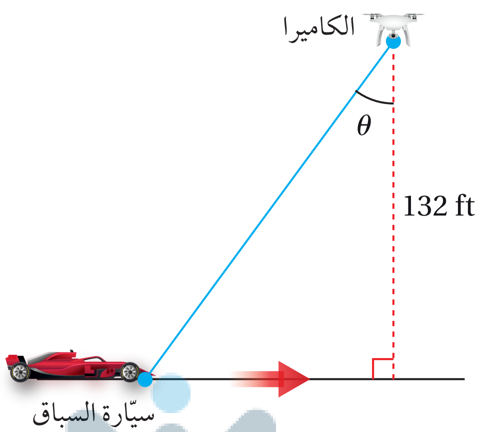
19 **كهرباء:** تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتيــن علــى التــوازي، كما في الشــكل المجاور، بالعلاقة الآتية:



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

إذا كانــت R_1 و R_2 تــزدادان بمُعــدَّل $0.3\ \Omega/s$ و $0.2\ \Omega/s$ علــى الترتيــب، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندمــا $R_1 = 80\ \Omega$، و $R_2 = 100\ \Omega$.

20 **قوارب:** يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع 1 m عن مُقدِّمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة 1 m/s، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8 m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟



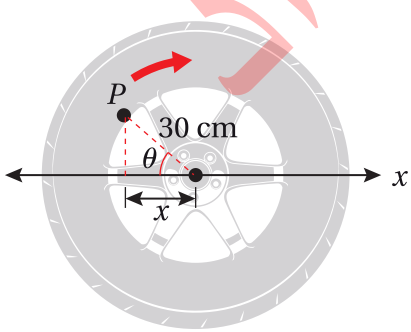
سباقات سيّارات: ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132 ft، وترصد سيّارة تتحرَّك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها 264 ft/s كما في الشكل المجاور:

21 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

22 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا.

23 **فيزياء:** يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$. وعند مروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$، فإنَّ الإحداثي x لموقعه يزداد بمُعدَّل $\sqrt{10}$ cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الجُسَيْم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

24 **ضوء:** مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة 12 m. إذا سار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّه على الجدار عندما يكون على بُعْد 4 m من الجدار.

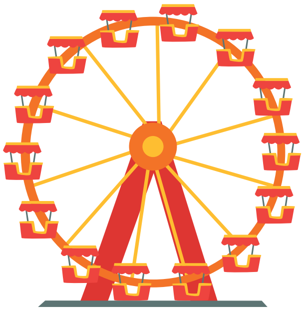


سيّارات: عجلة سيّارة طول نصف قُطْرها 30 cm، وهي تدور بمُعدَّل 10 دورات في الثانية. رُسِمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:

25 أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.

26 أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45°$.

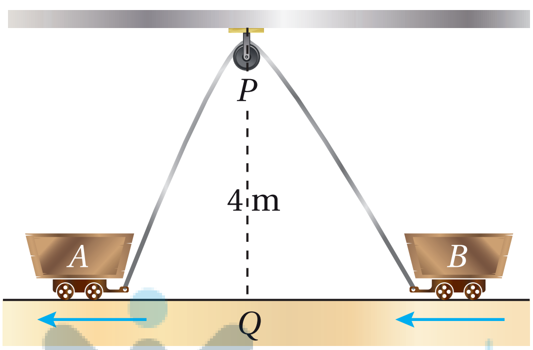
27 **مدينــة ألعاب:** عجلة دوّارة في مدينة الألعاب، طول نصف قُطْرها 10 m، وهي تدور بمُعدَّل دورة واحدة كل دقيقتين. أجد سرعة تغيُّر ارتفاع راكب فيها عندما يكون على ارتفاع 16 m فوق سطح الأرض.



تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة

مهارات التفكير العليا

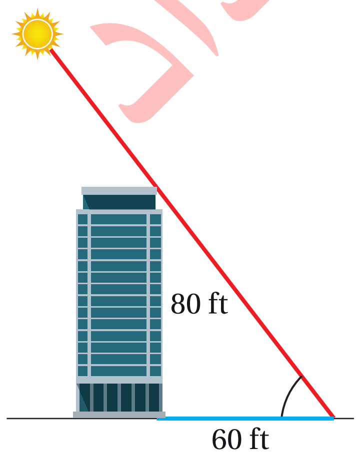
28 **تبرير:** رُبِطَـت العربتان A و B بحبـل طوله 12 m، وهو يمـرُّ بالبكرة P كمـا في الشـكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسـفل P مباشـرة، وتبعد عنها مسافة 4 m، وكانت العربة A تتحرَّك بعيدًا عن النقطة Q بسـرعة 0.5 m/s، فأجد سـرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعْد 3 m من النقطة Q، مُبرِّرًا إجابتي.



29 **تبرير:** يركض عَدّاء في مضمار دائري، طول نصف قُطْره 100 m، بسـرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف عَدّاء آخر علـى بُعْد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد مُعدَّل تغيُّر المسـافة بين العَدّاءين عندما تكون المسـافة بينهما 200 m.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة

30 **تحدٍّ:** سـطعت الشـمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 ft، فكان طـول ظلِّ المبنى في هـذه اللحظة 60 ft كما في الشـكل المجاور. أجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّ المبنى في هذه اللحظة بوحدة in/min، مُقرِّبًا إجابتي إلـى أقرب جزء من عشـرة، علمًا بأنَّ الشمس في هذا اليوم ستمرُّ فوق المبنى تمامًا.



إرشاد: 1 ft = 12 in

الدرس 2

القِيَم القصوى والتقعُّر
Extreme Values and Concavity

فكرة الدرس

- إيجاد القِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة باستعمال التمثيل البياني للاقتران.
- استعمال اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القِيَم القصوى المحلية لاقتران معطى.
- تحديد فترات التقعُّر لاقتران معطى.

المصطلحات

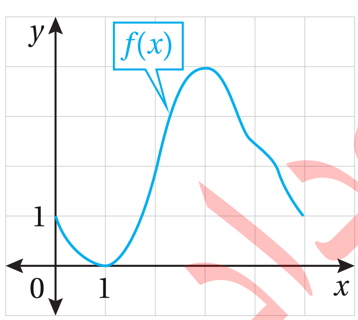
القيمة العظمى المُطلَقة، القيمة العظمى المحلية، القيمة الصغرى المُطلَقة، القيمة الصغرى المحلية، القِيَم القصوى المُطلَقة، القِيَم القصوى المحلية، النقاط الحرجة، القيمة الحرجة، اختبار المشتقة الأولى، اختبار المشتقة الثانية، مُقعَّر للأعلى، مُقعَّر للأسفل، نقطة الانعطاف.

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $C(t) = 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث C مَقيسة بوحدة µg/ mL. أُحدِّد الزمن الذي يكون فيه تركيز الدواء أكبر ما يُمكِن خلال أوَّل 12 ساعة من تناوله.

القِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة

أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x)$ المُعرَّف على الفترة $[0, 5]$ أنَّ النقطة $(3, 4)$ هي أعلى نقطة على منحنى $f(x)$، وهذا يعني أنَّ أكبر قيمة للاقتران f هي $f(3) = 4$. أُلاحِظ أيضًا أنَّ النقطة $(1, 0)$ هي أدنى نقطة على منحنى $f(x)$؛ ما يعني أنَّ أصغر قيمة للاقتران f هي $f(1) = 0$. ولذلك يُمكِن القول إنَّ $f(3) = 4$ هي **قيمة عظمى مُطلَقة** (absolute maximum value) للاقتران f، وإنَّ $f(1) = 0$ هي **قيمة صغرى مُطلَقة** (absolute minimum value) للاقتران f.



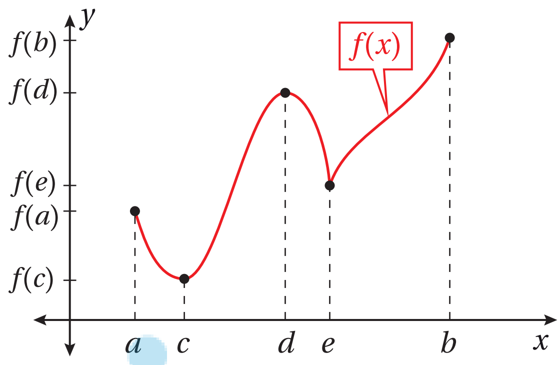
يُطلَق على القِيَم الصغرى المُطلَقة والقِيَم العظمى المُطلَقة للاقتران اسم **القِيَم القصوى المُطلَقة** (absolute extreme values) للاقتران، ويُمكِن تعريفها كما يأتي:

مفهوم أساسي

القِيَم القصوى المُطلَقة

إذا كان f اقترانًا مجاله D، وكان c عددًا ينتمي إلى مجال الاقتران f، فإنَّ $f(c)$ هي:

- قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f في D إذا كان $f(c) > f(x)$ لجميع قِيَم x في D.
- قيمة صغرى مُطلَقة للاقتران f في D إذا كان $f(c) < f(x)$ لجميع قِيَم x في D.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ الذي له قيمة عظمى مُطلَقة عند b، وقيمة صغرى مُطلَقة عند c. ولكنْ، إذا أخذنا قِيَم x القريبة فقط من d (مثل الفترة (c, e)) في الاعتبار، فإنَّ $f(d)$ تكون أكبر قِيَم $f(x)$ في هذه الفترة؛ لذا تُسمّى **قيمة عظمى محلية** (local maximum value) للاقتران f. أمّا إذا أخذنا قِيَم x القريبة فقط من e (مثل الفترة (d, b)) في الاعتبار، فإنَّ $f(e)$ تكون أصغر قِيَم $f(x)$ في هذه الفترة؛ لذا تُسمّى **قيمة صغرى محلية** (local minimum value) للاقتران f.

يُطلَق على القِيَم الصغرى المحلية والقِيَم العظمى المحلية للاقتران اسم **القِيَم القصوى المحلية** (local extreme values) للاقتران، ويُمكِن تعريفها كما يأتي:

مفهوم أساسي

القِيَم القصوى المحلية

إذا كان c نقطة داخلية في مجال الاقتران f، فإنَّ $f(c)$ هي:

- قيمة عظمى محلية للاقتران f إذا كان $f(c) > f(x)$ لجميع قِيَم x في فترة مفتوحة تحوي c.
- قيمة صغرى محلية للاقتران f إذا كان $f(c) < f(x)$ لجميع قِيَم x في فترة مفتوحة تحوي c.

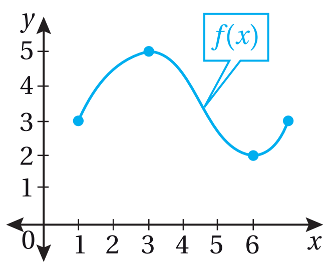
أتعلَّم

كلمة (داخلية) في التعريف تعني وجود فترة مفتوحة تقع في مجال f، وتحوي النقطة c.

مثال 1

أجد القِيَم القصــوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِــدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كلٍّ ممّا يأتي:

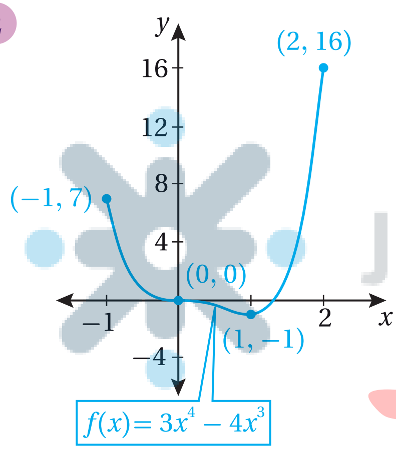
1



أُلاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود:

- قيمة عظمى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(3) = 5$.
- قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(6) = 2$.

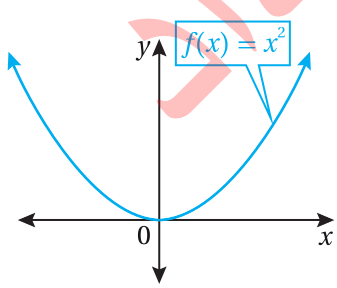
2



أُلاحِــظ من التمثيــل البيانــي لمنحنى $f(x)$ وجود:

- قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(1) = -1$.
- قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f، هي: $f(2) = 16$ (ليست قيمة عظمى محلية؛ لأنَّها ليست داخلية، فهي طرف فترة).

3



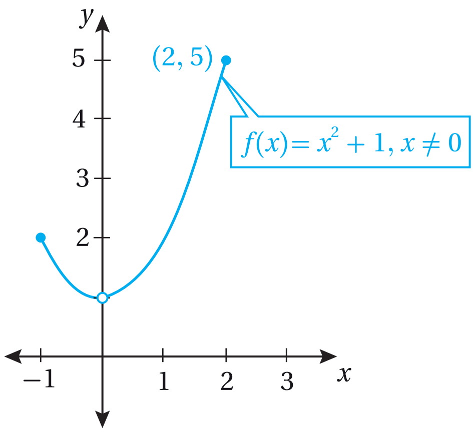
أُلاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ أنَّه:

- توجد قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(0) = 0$.
- لا توجد قيمة عظمى (محلية، أو مُطلَقة) للاقتران f.

أُفكِّر

هل توجد قيمــة قصوى للاقتــران $f(x)$ عندمــا $x = 0$؟ أُبرِّر إجابتي.

4



أُلاحِـظ من التمثيـل البياني لمنحنى $f(x)$ أنَّه:

- توجد قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f، هي: $f(2) = 5$.
- لا توجد قيمة صغرى (محلية، أو مُطلَقة) للاقتران f؛ لأنَّ الاقتران f غير مُعرَّف عندما $x = 0$.

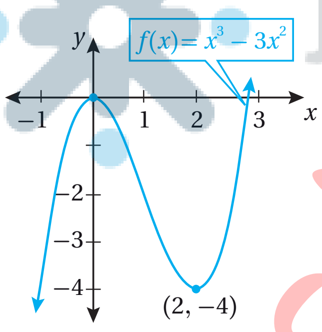
أُفكِّر

هل يُعَدُّ 1 قيمة صغرى مُطلَقة للاقتران f؟ أُبرِّر إجابتي.

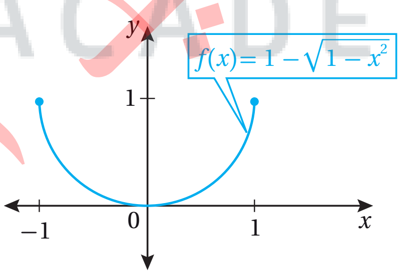
أتحقَّق من فهمي

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كلٍّ ممّا يأتي:

a)



b)

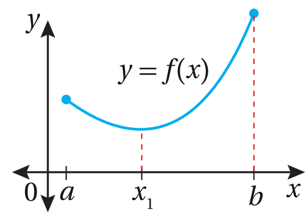


أُلاحِظ من المثال السابق عدم وجود قيمة صغرى أو قيمة عظمى لبعض الاقترانات، لكنَّ ذلك لا يشمل الاقترانات المتصلة على فترة مغلقة.

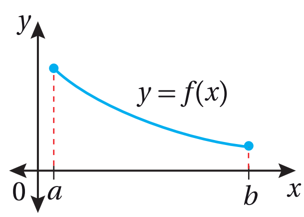
نظرية — **القِيَم القصوى**

إذا كان f اقترانًا متصلًا على الفترة المغلقة $[a, b]$، فإنَّه توجد للاقتران f قيمة عظمى مُطلَقة وقيمة صغرى مُطلَقة في هذه الفترة.

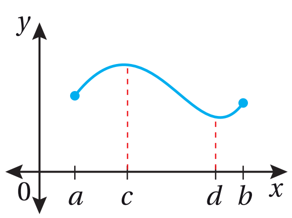
تُوضِّح الأشكال الآتية المقصود بنظرية القِيَم القصوى؛ إذ تظهر فيها منحنيات اقترانات متصلة على فترة مغلقة، وهذا يعني وجود قيمة عظمى مُطلَقة وقيمة صغرى مُطلَقة:



القيمة الصغرى المُطلَقة عند نقطة داخلية، والقيمة العظمى المُطلَقة عند طرف فترة.



القيمة الصغرى المُطلَقة والقيمة العظمى المُطلَقة عند طرفي فترة.



القيمة الصغرى المُطلَقة والقيمة العظمى المُطلَقة عند نقطتين داخليتين.

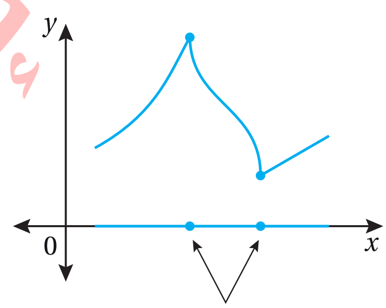
أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ القِيَم الصغرى المُطلَقة والقِيَم العظمى المُطلَقة لأيِّ اقتران متصل على فترة مغلقة توجد عند النقاط الداخلية، أو عند أطراف الفترة.

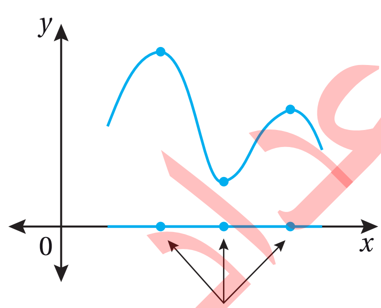
تُؤكِّد نظرية القِيَم القصوى وجود قيمة صغرى مُطلَقة وقيمة عظمى مُطلَقة لأيِّ اقتران متصل على فترة مغلقة، لكنَّها لا تتضمَّن طريقة لإيجاد هذه القِيَم، وهذا ما سأتعلَّمه في هذا الدرس.

إيجاد القِيَم القصوى المُطلَقة على الفترة المغلقة

يتبيَّن من الأشكال السابقة أنَّ القِيَم القصوى المحلية موجودة عند نقاط داخل مجال الاقتران، حيث تكون المشتقة صفرًا، أو غير موجودة كما في الشكلين الآتيين:



قيم x التي عندها قِيَم قصوى محلية، حيث المشتقة غير موجودة.



قيم x التي عندها قِيَم قصوى محلية، حيث المشتقة صفر.

أتذكَّر

إذا كان لمنحنى الاقتران رأس حاد أو زاوية، فهذا يعني عدم وجود مشتقة.

أستنتج ممّا سبق أنَّه يُمكِن إيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران $f(x)$، بدراسة نقاط محدودة داخل مجال الاقتران تُسمّى **النقاط الحرجة** (critical points)، وهي النقاط التي يكون عندها $f' = 0$، أو تكون f' غير موجودة، ويُسمّى الإحداثي x لهذه النقاط **القِيَم الحرجة** (critical values).

نظرية

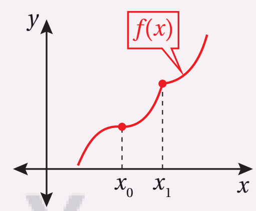
القِيَم القصوى المحلية والقِيَم الحرجة

إذا كان للاقتران f قيمة قصوى محلية عندما $x = c$، فإنَّ c قيمة حرجة للاقتران f.

بما أنَّ القِيَم القصوى المُطلَقة للاقتران المتصل على فترة مغلقة هي نقاط قصوى محلية أو أطراف فترات، فإنَّه يُمكِن إيجادها باتِّباع الخطوات المُبيَّنة فيما يأتي:

أتعلَّم

عكس النظرية غير صحيح؛ إذ لا يوجد عند كل قيمة حرجة قيمة قصوى محلية. فمثلًا، يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$، حيث x_0, x_1 قيمتان حرجتان، ولكنْ لا توجد عند أيٍّ منهما قيمة قصوى محلية.



مفهوم أساسي

إيجاد القِيَم القصوى المُطلَقة للاقتران المتصل على فترة مغلقة

لإيجاد القِيَم القصوى المُطلَقة للاقتران f المتصل على الفترة المغلقة $[a, b]$، أتَّبع الخطوات الثلاث الآتية:

الخطوة 1: أجد قيم الاقتران f عند القِيَم الحرجة للاقتران f في الفترة المفتوحة (a, b).

الخطوة 2: أجد قيمتي f عند طرفي الفترة.

الخطوة 3: أجد أنَّ أكبر القِيَم الناتجة من الخطوتين (1) و(2) هي القيمة العظمى المُطلَقة، وأنَّ أصغرها هي القيمة الصغرى المُطلَقة.

مثال 2

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

1 $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, [-2, 2]}$

بما أنَّ الاقتران f متصل على الفترة $[-2, 2]$؛ لأنَّه كثير حدود، فإنَّه يُمكِنني إيجاد القِيَم القصوى المُطلَقة باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أجد القِيَم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(-2, 2)$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \quad \text{الاقتران المعطى}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \quad \text{بإيجاد المشتقة}$$

أتعلَّم

القيم الحرجة للاقتران هي قيم داخلية؛ لذا لا يعتبر طرفي فترة مجال الاقتران قيم حرجة.

بمساواة المشتقة بالصفر	$3x^2 - 6x - 9 = 0$
بإخراج 3 عاملًا مشتركًا	$3(x^2 - 2x - 3) = 0$
بالتحليل	$3(x+1)(x-3) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0$
بحلِّ كل معادلة لـ x	$x = -1 \quad \text{or} \quad x = 3$

بما أنَّ $x = 3$ ليست ضمن مجال f، فإنَّها تُهمَل. وبما أنَّه لا توجد قِيَم تكون عندها f' غير موجودة، فإنَّه توجد قيمة حرجة واحدة للاقتران f هي: $x = -1$، وقيمة الاقتران عندها هي:

$$f(-1) = 7$$

الخطوة 2: أجد قيمتي الاقتران f عند طرفي الفترة.

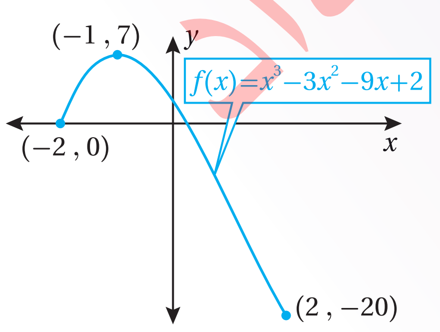
$$f(-2) = 0 \quad , \quad f(2) = -20$$

الخطوة 3: أُقارِن بين القِيَم.

القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران f في الفترة $[-2, 2]$ هي: $f(-1) = 7$، والقيمة الصغرى المُطلَقة له هي: $f(2) = -20$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ في الفترة $[-2, 2]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي 7، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي -20.



أتعلَّم

بما أن الاقتران f' مُعرَّف عند جميع قِيَم x، إذن لا توجد قيم تكون عندها f' غير موجودة.

2 $f(x)=x^{2/3}, [-1, 2]$

بما أنَّ الاقتران f متصل على الفترة $[-1, 2]$، فإنَّه يُمكِنني إيجاد القِيَم القصوى المُطلَقة باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أجد القِيَم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(-1, 2)$.

الاقتران المعطى $\quad f(x) = x^{2/3}$

بإيجاد المشتقة $\quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

الصورة الجذرية $\quad = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

أُلاحِظ أنَّه لا توجد أصفار للمشتقة، وأنَّ المشتقة غير موجودة عندما $x = 0$؛ لأنَّها غير مُعرَّفة في هذه الحالة؛ لذا توجد قيمة حرجة واحدة للاقتران f هي: $x = 0$، وقيمة الاقتران عندها هي:

$$f(0) = 0$$

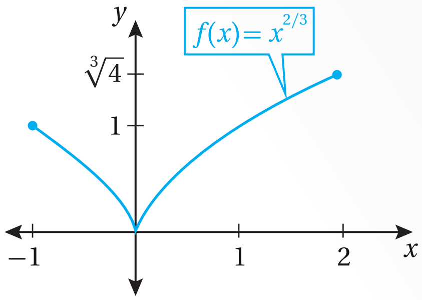
الخطوة 2: أجد قيمتي الاقتران f عند طرفي الفترة.

$$f(-1) = 1 \quad , \quad f(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

الخطوة 3: أُقارِن بين القِيَم.

القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران f في الفترة $[-1, 2]$ هي: $f(2) = \sqrt[3]{4}$، والقيمة الصغرى المُطلَقة له هي: $f(0) = 0$.

الدعم البياني



يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x) = x^{2/3}$ في الفترة $[-1, 2]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي $\sqrt[3]{4}$، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي 0.

أتعلَّم

الاقتران f' غير مُعرَّف عندما $x = 0$؛ لأنَّه صفر مقام، وهذا يعني أنَّ f' غير موجودة عندما $x = 0$.

3 $f(x) = 2 \sin x - \cos 2x, [0, 2\pi]$

بمــا أنَّ الاقتران f متصل على الفترة $[0, 2\pi]$، فإنَّه يُمكِنني إيجاد القِيَم القصوى المُطلَقة باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أجد القِيَم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(0, 2\pi)$.

الاقتران المعطى	$f(x) = 2 \sin x - \cos 2x$
بإيجاد المشتقة	$f'(x) = 2 \cos x + 2 \sin 2x$
بمساواة المشتقة بالصفر	$2 \cos x + 2 \sin 2x = 0$
متطابقات ضعف الزاوية	$2 \cos x + 4 \sin x \cos x = 0$
بإخراج $2 \cos x$ عاملًا مشتركًا	$2 \cos x\,(1 + 2 \sin x) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$2 \cos x = 0 \quad \text{or} \quad 1 + 2 \sin x = 0$
بحلِّ المعادلة الأولى لـ $\cos x$، وحلِّ المعادلة الثانية لـ $\sin x$	$\cos x = 0 \quad \text{or} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$
بحلِّ كل معادلة لـ x	$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

بما أنَّه لا توجد قِيَم تكون عندها f' غير موجودة، فإنَّ قِيَم الاقتران f عند القيم الحرجة هي:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3, f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$$

الخطوة 2: أجد قيمتي الاقتران f عند طرفي الفترة.

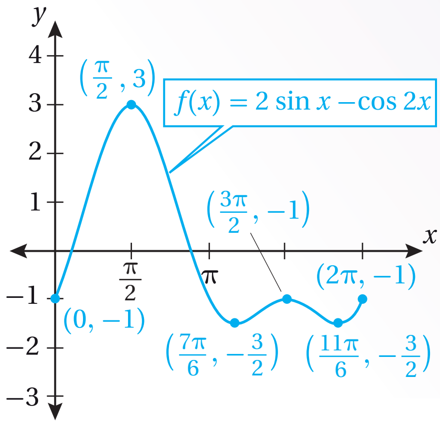
$$f(0) = -1 \qquad , \; f(2\pi) = -1$$

الخطوة 3: أُقارِن بين القِيَم.

القيمــة العظمى المُطلَقــة للاقتران f في الفترة $[0, 2\pi]$ هــي: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$، والقيمة الصغرى المُطلَقة له هي: $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ في الفترة $[0, 2\pi]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي 3، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي $-\frac{3}{2}$



أتحقَّق من فهمي

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

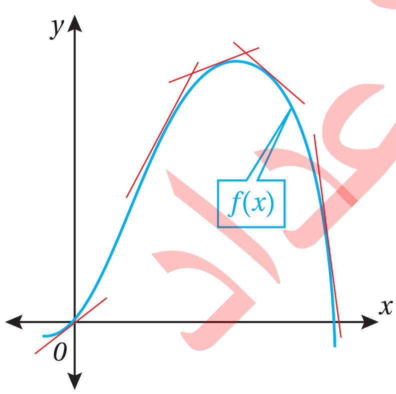
a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, [-3, 5]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [-8, 8]$

c) $f(x) = \sin^2 x + \cos x, [0, 2\pi]$

إيجاد القيَم القصوى المحلية

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أُحدِّد تزايد الاقتران وتناقصه اعتمادًا على إشارة المشتقة، حيث ترتبط المماسات ذات الميل الموجب بالجزء المُتزايِد من منحنى الاقتران، وترتبط المماسات ذات الميل السالب بالجزء المُتناقِص من منحنى الاقتران.



أتذكَّر

ميل المماس لمنحنى f عند نقطة هو f' عند تلك النقطة

مفهوم أساسي — اختبار تزايد الاقترانات وتناقصها

- إذا كان: $f'(x) > 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة I، فإنَّ f يكون مُتزايِدًا على الفترة I.
- إذا كان: $f'(x) < 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة I، فإنَّ f يكون مُتناقِصًا على الفترة I.

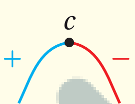
ولكنْ، كيف يُمكِن توظيف تزايد الاقتران وتناقصه في تحديد القِيَم القصوى المحلية للاقتران؟

تنصُّ نظرية القِيَم القصوى المحلية والقِيَم الحرجة على أنَّه إذا كان للاقتران f قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى محلية عندما $x = c$، فإنَّ c يكون قيمة حرجة للاقتران f. وبما أنَّ كل قيمة حرجة ليست بالضرورة قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى محلية، فإنَّه يَلزم إيجاد اختبار لتحديد إذا كان للاقتران f قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى محلية عند النقطة الحرجة أم لا، ويُسمّى هذا الاختبار **اختبار المشتقة الأولى** (the first derivative test).

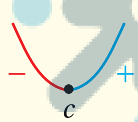
نظرية **اختبار المشتقة الأولى**

إذا كان للاقتران المتصل f قيمة حرجة عند c، فإنَّه يُمكِن تصنيف $f(c)$ على النحو الآتي:

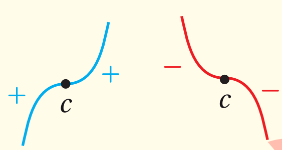
- إذا تغيَّر $f'(x)$ من الموجب إلى السالب عند c، فإنَّ $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية للاقتران f.



- إذا تغيَّر $f'(x)$ من السالب إلى الموجب عند c، فإنَّ $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للاقتران f.



- إذا كان $f'(x)$ موجبًا جهة اليمين وجهة اليسار من c، أو سالبًا جهة اليمين وجهة اليسار من c، فإنَّ $f(c)$ لا تكون قيمة قصوى محلية للاقتران f.



يُمكِن توضيح اختبار المشتقة الأولى على النحو الآتي:

- إذا تغيَّرت إشارة $f'(x)$ من الموجب إلى السالب عند c، فإنَّ f يكون مُتزايِدًا يسار c، ومُتناقِصًا يمين c.

- إذا تغيَّرت إشارة $f'(x)$ من السالب إلى الموجب عند c، فإنَّ f يكون مُتناقِصًا يسار c، ومُتزايِدًا يمين c.

مثال 3

أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x^2 - 3)\, e^x$.

بما أنَّ الاقتـــران f متصل عند جميع الأعداد الحقيقية، فإنَّه يُمكِنني إيجاد القِيَم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي:

الخطوة 1: أجد القِيَم الحرجة للاقتران f.

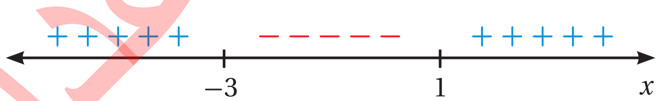
الاقتران المعطى	$f(x) = (x^2 - 3)\, e^x$
قاعدة مشتقة الضرب	$f'(x) = (x^2 - 3)\, e^x + 2xe^x$
بإخراج e^x عاملًا مشتركًا	$= (x^2 + 2x - 3)\, e^x$
بمساواة المشتقة بالصفر	$(x^2 + 2x - 3)\, e^x = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad or \quad e^x = 0$
بالتحليل	$(x - 1)(x + 3) = 0$
بحلِّ المعادلة لـ x	$x = 1, -3$

بمــا أنَّ $f' = 0$ عندما $x = 1, -3$، وعدم وجــود قِيَم تكون عندها f' غير موجودة، فإنَّ القِيَم الحرجة للاقتران f هي:

$$x = 1, x = -3$$

الخطوة 2: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القِيَم التي هي أصغر من قِيَم x الحرجة وأكبر منها، ثم أُحدِّد إشــارة المشتقة عند كلٍّ منها:



	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$x > 1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتزايِد	مُتناقِص	مُتزايِد

الخطوة 3: أجد القِيَم القصوى المحلية.

- توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ وهي: $f(-3) = 6e^{-3}$.
- توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$، وهي: $f(1) = -2e$.

أتذكَّر

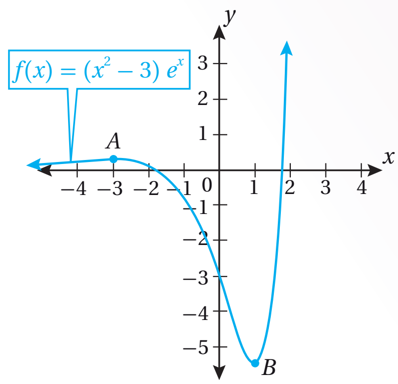
$e^x \neq 0$ لجميع قيم x.

أتذكَّر

القِيَم الحرجة هــي قِيَم مُرشَّــحة ليكــون عندها نقــاط قصــوى، ويَلــزم التحقُّــق مــن أنَّ f يُغيِّر ســلوكه حول هذه القِيَم (من التزايد إلى التناقص، أو العكس).

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البيانـــي المجاور لمنحنى الاقتران $f(x) = (x^2 - 3)\ e^x$ وجود قيمة عظمى محلية عندمـــا $x = -3$، وقيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $x = 1$.



أتحقَّق من فهمي

أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x - 1)e^x$

مثال 4

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

بمـــا أنَّ الاقتران f متصل على جميع الأعداد الحقيقية، فإنَّه يُمكِنني إيجاد القِيَم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي:

الخطوة 1: أجد القِيَم الحرجة للاقتران f.

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}\ (2x)$$ قاعدة سلسلة القوَّة

$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 4}}$$ الصورة الجذرية

$$\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 4}} = 0$$ بمساواة المشتقة بالصفر

$$4x = 0$$ بمساواة البسط بالصفر

$$x = 0$$ بحلِّ المعادلة لـ x

بما أنَّ $f' = 0$ عندما $x = 0$، و f' غير موجودة عندما $x = \pm 2$، فإنَّ القِيَم الحرجة للاقتران f هي:

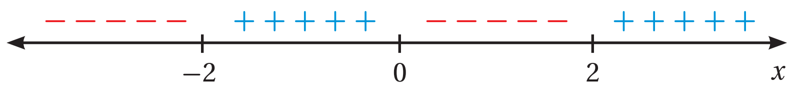
$$x = -2, x = 0, x = 2$$

أتعلَّم

ألاحظ أنَّ f' غير موجودة عنـد صفـري المقـام $(x = \pm 2)$

الخطوة 2: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القِيَم التي هي أصغر من قِيَم x الحرجة وأكبر منها، ثم أُحدِّد إشارة المشتقة عند كلٍّ منها:



	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

الخطوة 3: أجد القِيَم القصوى المحلية.

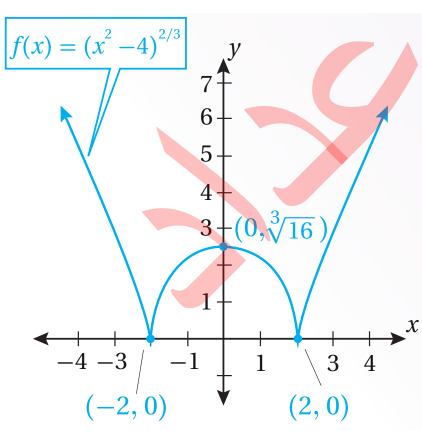
- توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$، وهي: $f(0) = \sqrt[3]{16}$.
- توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 0$.
- توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$، وهي: $f(2) = 0$.

الخطوة 4: أجد القِيَم القصوى المُطلَقة.

توجد قيمة صغرى مُطلَقة عندما $x = 2$، و$x = -2$، وهي 0، ولا توجد قيمة عظمى مُطلَقة.

الدعم البياني

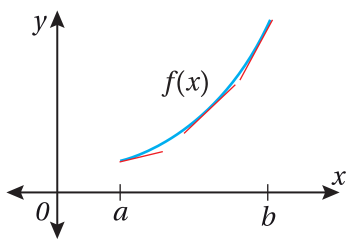
يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$، وقيمة صغرى محلية وقيمة مُطلَقة عندما $x = \pm 2$، وعدم وجود قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران.



أتحقَّق من فهمي

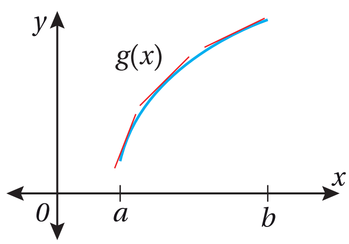
أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{x - 3}$

التقعُّر



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ المُتزايِدين على الفترة (a, b).

صحيحٌ أنَّ الاقترانين مُتزايِدان على الفترة نفسها، غير أنَّ كُلًّا منهما ينحني في اتجاه مختلف. ومن ثَمَّ، كيف يُمكِن التمييز بينهما؟



أُلاحِظ أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ يقع فوق مماساته، وأنَّ ميل مماساته يزداد؛ ما يعني أنَّ f **مُقعَّر للأعلى** (concave upward) على الفترة (a, b).

أمّا منحنى الاقتران $g(x)$ فيقع أسفل مماساته، وميل مماساته يتناقص؛ ما يعني أنَّ g **مُقعَّر للأسفل** (concave downward) على الفترة (a, b).

مفهوم أساسي

التقعُّر

إذا كان f اقترانًا قابلًا للاشتقاق على الفترة المفتوحة I، فإنَّ:

- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأعلى على الفترة I إذا كان f' مُتزايِدًا عليها.
- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأسفل على الفترة I إذا كان f' مُتناقِصًا عليها.

يتبيَّن من التعريف السابق أنَّه إذا كان اقتران المشتقة f' مُتزايِدًا، فإنَّ إشارة مشتقته f'' تكون موجبة، وأنَّه إذا كان f' مُتناقِصًا، فإنَّ إشارة مشتقته f'' تكون سالبة؛ ما يعني أنَّه يُمكِن تحديد فترات التقعُّر للاقتران f بالرجوع إلى مشتقته الثانية، وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية عن اختبار تقعُّر الاقتران:

نظرية

اختبار التقعُّر

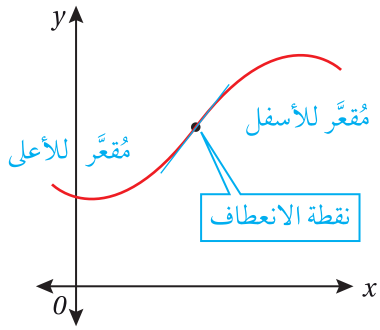
إذا كانت المشتقة الثانية للاقتران f موجودة على الفترة المفتوحة I، فإنَّ:

- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأعلى على الفترة I إذا كان: $f''(x) > 0$ لجميع قِيَم x فيها.
- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأسفل على الفترة I إذا كان: $f''(x) < 0$ لجميع قِيَم x فيها.

أتعلَّم

- يكون منحنى f مُقعَّرًا للأعلى (إشارة المشتقة الثانية موجبة) على فترة ما إذا كان f' مُتزايِدًا على هذه الفترة.
- يكون منحنى f مُقعَّرًا للأسفل (إشارة المشتقة الثانية سالبة) على فترة ما إذا كان f' مُتناقِصًا على هذه الفترة.

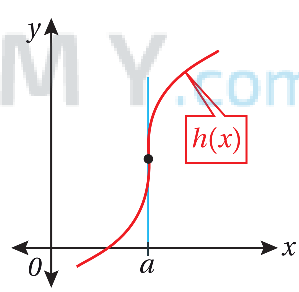
مـــن المُهِمِّ معرفة فتـــرات تقعُّر الاقتـــران للأعلى وللأســـفل، ومن المُهِـــمِّ أيضًا معرفـــة النقطة التي يُغيِّر عندها الاقتـــران اتجاه تقعُّره، وتُســـمّى **نقطة الانعطاف** (inflection point).



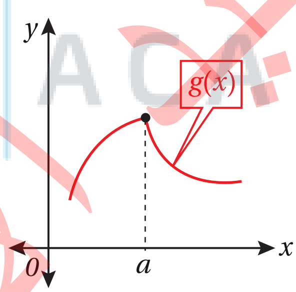
مفهوم أساسي | **تعريف نقطة الانعطاف**

إذا كان الاقتـــران f متصلًا على فترة مفتوحة تحوي c، وكان لمنحنى f مماس عند النقطة $(c, f(c))$، وكان منحنى f قد غيَّـــر اتجاه تقعُّره عند c، فإنَّ النقطة $(c, f(c))$ تكون نقطة انعطاف لمنحنى f.

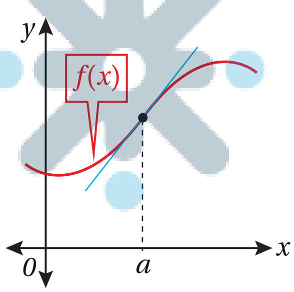
تُوضِّح الأشكال الآتية التعريف الخاص بنقطة الانعطاف:



وجود نقطـــة انعطاف لمنحنى الاقتران h عندما $x = a$؛ نظرًا إلى وجود مماس عند هذه النقطة، وتغيُّر اتجـــاه تقعُّر الاقتران عندها (بالرغم من أنَّ مشـــتقة الاقتران f غير موجودة عندما $x = a$).



عدم وجود نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران g عندما $x = a$؛ نظرًا إلـــى عدم وجود مماس عند هذه النقطـــة (بالرغم من تغيُّر اتجاه تقعُّر الاقتران عندها).



وجود نقطة انعطـــاف لمنحنى الاقتران f عندما $x = a$؛ نظرًا إلى وجود مماس عند هـــذه النقطة، وتغيُّر اتجـــاه تقعُّر الاقتران عندها.

يمكن التوصل إلى النظرية الآتية من خلال ملاحظة الأشكال السابقة:

نظرية | **نقطة الانعطاف**

إذا كانـــت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران f، فإنَّ $f''(c) = 0$، أو تكون f'' غير موجودة عندما $x = c$.

مثال 5

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = e^{-x^2/2}$

أجد فترات التقعُّر للاقتران f باستعمال المشتقة الثانية كما يأتي، علمًا بأنَّ الاقتران متصل على جميع الأعداد الحقيقية:

الخطوة 1: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2}$$ قاعدة السلسلة

$$f''(x) = (-x)(-x)\, e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2}\,(-1)$$ قاعدة مشتقة الضرب

$$= (x^2 - 1)\, e^{-x^2/2}$$ بالتبسيط

الخطوة 2: أجد قِيَم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفرًا، أو غير موجودة.

لا توجد قِيَم تكون عندها المشتقة الثانية غير موجودة؛ لذا أجد قِيَم x التي تكون عندها المشتقة الثانية صفرًا:

$$(x^2 - 1)\, e^{-x^2/2} = 0$$ بمساواة المشتقة الثانية بالصفر

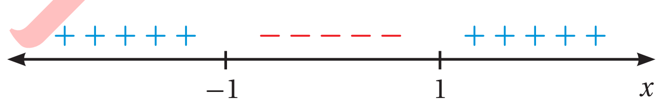
$$(x^2 - 1) = 0 \quad \text{or} \quad e^{-x^2/2} = 0$$ خاصية الضرب الصفري

$$x = \pm 1$$ بحلِّ المعادلة الأولى لـ x

لا يوجد حل للمعادلة الثانية لأنّ $e^{-x^2/2} \neq 0$.

إذن، قِيَم x المطلوبة هي: $x = \pm 1$.

الخطوة 3: أبحث في إشارة المشتقة الثانية.



	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
تقعُّر الاقتران	مُقعَّر للأعلى $\cup$	مُقعَّر للأسفل $\cap$	مُقعَّر للأعلى $\cup$

أتعلَّم

عكس النظرية السابقة غير صحيح؛ إذ يُمكِن أنْ تكون $f''(c)$ صفرًا، أو لا تكون $f''(c)$ موجودة، ولا يكون للاقتران f نقطة انعطاف عندما $x = c$.

أتعلَّم

أتحقَّق من أنَّ قِيَم x التي أجدها هي ضمن مجال الاقتران.

الخطوة 4: أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل.

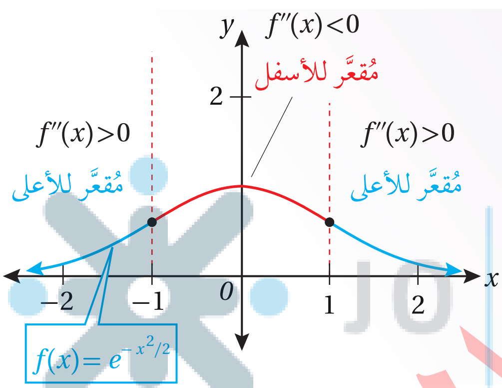
- منحنى الاقتران f مُقعَّر للأعلى على الفترة $(-\infty, -1)$، والفترة $(1, \infty)$.
- منحنى الاقتران f مُقعَّر للأسفل على الفترة $(-1, 1)$.

الخطوة 5: أجد نقاط الانعطاف.

توجد نقطتا انعطاف عندما $x = 1$، وعندما $x = -1$، وهما: $(-1, e^{-1/2})$، و $(1, e^{-1/2})$؛ لأنَّ الاقتران f متصل عند كلتا النقطتين، وغيَّر اتجاه تقعُّره عندهما.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x) = e^{-x^2/2}$ وجود فترتي تقعُّر للأعلى، وفترة تقعُّر للأسفل، ونقطتي انعطاف.



2 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

أجد فترات التقعُّر للاقتران f، وأنتبه أنَّ f غير مُعرَّف عندما $x = 0$.

الخطوة 1: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$ الاقتران المعطى

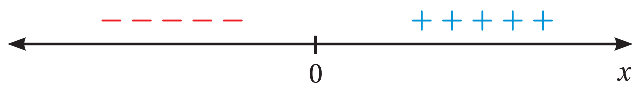
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$ قاعدة مشتقة اقتران القوَّة، وقاعدة مشتقة المقلوب

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$ قاعدة مشتقة المقلوب

الخطوة 2: أجد قِيَم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفرًا، أو غير موجودة.

لا توجد قِيَم تكون عندها المشتقة الثانية صفرًا، والمشتقة غير موجودة أيضًا عندما $x = 0$؛ لأنَّ f غير مُعرَّف عندها.

الخطوة 3: أبحث في إشارة المشتقة الثانية.



	$x < 0$	$x > 0$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -1$	$x = 1$
إشارة $f''(x)$	$f''(-1) < 0$	$f''(1) > 0$
تقعُّر الاقتران	مُقعَّر للأسفل	مُقعَّر للأعلى

الخطوة 4: أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل.

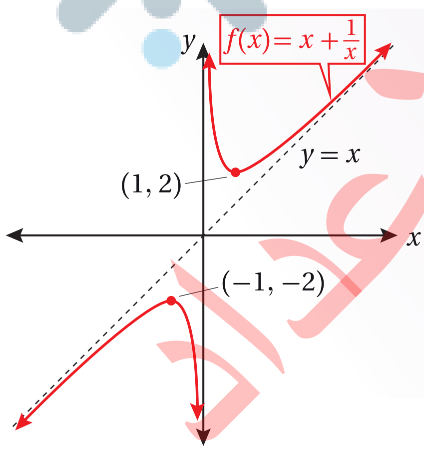
- منحنى الاقتران f مُقعَّر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$.
- منحنى الاقتران f مُقعَّر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$.

الخطوة 5: أجد نقاط الانعطاف.

لا توجد نقاط انعطاف لمنحنى الاقتران.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x) = x + \frac{1}{x}$ وجود فترة تقعُّر للأسفل هي $(-\infty, 0)$، وفترة تقعُّر للأعلى هي $(0, \infty)$، ووجود خط تقارب رأسي عندما $x = 0$.



أتذكَّر

لا توجد نقطة انعطاف عندما $x = 0$، بالرغم من تغيير اتجاه تقعُّر الاقتران حولها؛ لأنَّها لا تنتمي إلى مجال الاقتران.

أُفكِّر

ما القِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة للاقتران: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (إنْ وُجِدت)؟

أتحقَّق من فهمي

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x-2)^3 (x-1)$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

اختبار المشتقة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا استعمال اختبار المشـــتقة لاختبار القِيَم القصوى المحلية. والآن سأتعلَّم كيف أُحدِّد إذا كانت النقطة هي قيمة عظمى محلية أم قيمة صغرى محلية باستعمال **اختبار المشتقة الثانية** (second derivative test).

نظرية اختبار المشتقة الثانية

بافتراض أنَّ f' و f'' موجودة لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ $f'(c) = 0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كان: $f''(c) < 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) > 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية لـلاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) = 0$، فإنَّ الاختبار يفشل. وفي هذه الحالة، يجب استعمال اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع النقطة $(c, f(c))$.

أتعلَّم

لا يُمكِنني استعمال اختبار المشتقة الثانية لتصنيف القِيَم القصوى المحلية إذا كانت $f''(c)$ غير موجودة.

مثال 6

إذا كان: $f(x) = (x^2 - 4)^2$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

الخطوة 1: أجد المشتقة الأولى والقِيَم الحرجة للاقتران.

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = 4x(x^2 - 4)$$ قاعدة سلسلة القوَّة

$$4x(x^2 - 4) = 0$$ بمساواة المشتقة بالصفر

$$4x = 0 \quad \text{or} \quad x^2 - 4 = 0$$ خاصية الضرب الصفري

$$x = 0 \qquad x = \pm 2$$ بحلِّ كل معادلة لـ x

إذن، القِيَم الحرجة للاقتران f هي:

$$x = 0, x = 2, x = -2$$

الخطوة 2: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

باستعمال خاصية التوزيع $f'(x) = 4x^3 - 16x$

قاعدة مشتقة اقتران القوَّة $f''(x) = 12x^2 - 16$

الخطوة 3: أُعوِّض القِيَم الحرجة في المشتقة الثانية؛ لتصنيفها.

بتعويض $x = -2$ $f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$

بتعويض $x = 0$ $f''(0) = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$

بتعويض $x = 2$ $f''(2) = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$

أُلاحِظ أنَّ:

- $f'(-2) = 0$، و $f''(-2) > 0$.

  إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 0$.

- $f'(0) = 0$، و $f''(0) < 0$.

  إذن، توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$، وهي: $f(0) = 16$.

- $f'(2) = 0$، و $f''(2) > 0$.

  إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$، وهي: $f(2) = 0$.

أُفكِّر

هل يُمكِن تصنيف أيِّ قيمة حرجة باستعمال اختبار المشتقة الثانية؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = xe^x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

تطبيقات: السرعة المتجهة والتسارع

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد اقتراني السرعة المتجهة والتسارع لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال مشتقة اقتران الموقع. والآن سأتعلَّم كيف أُحدِّد الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب، إضافةً إلى تحديد الفترات الزمنية التي تكون فيها سرعته مُتزايِدة أو مُتناقِصة.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران $s(t) = 3t^2 - 2t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1 **ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟**

يُمكِن تحديد الفترات الزمنية لاتجاه حركة الجسم بدراسة إشارة السرعة المتجهة كما يأتي:

الخطوة 1: أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون (سرعة الجسم تساوي صفرًا).

$v(t) = s'(t) = 6t - 6t^2$ اقتران السرعة المتجهة

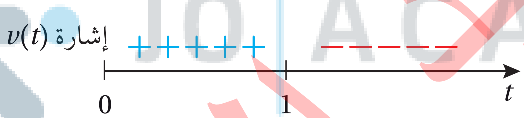
$6t - 6t^2 = 0$ بمساواة اقتران السرعة المتجهة بالصفر

$6t(1 - t) = 0$ بإخراج $6t$ عاملًا مشتركًا

$6t = 0 \quad \text{or} \quad 1 - t = 0$ خاصية الضرب الصفري

$t = 0 \qquad t = 1$ بحلِّ كل معادلة لـ t

الخطوة 2: أدرس إشارة السرعة المتجهة.



الخطوة 3: أُحدِّد فترات اتجاه الحركة.

- يتحرَّك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$؛ أيْ في الفترة $(0, 1)$.
- يتحرَّك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$؛ أيْ في الفترة $(1, \infty)$.

2 **ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟**

يُمكِن وصف سرعة الجسم المتجهة بدراسة إشارة التسارع كما يأتي:

الخطوة 1: أجد قِيَم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفرًا.

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6 - 12t$ اقتران التسارع

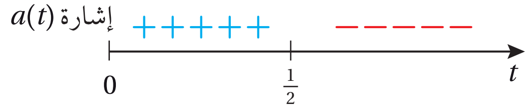
$6 - 12t = 0$ بمساواة اقتران التسارع بالصفر

$t = \frac{1}{2}$ بحلِّ المعادلة لـ t

أتذكَّر

إذا كان التسارع موجبًا؛ فإن السرعة المتجهة تزداد، أما إذا كان التسارع سالبًا فإن السرعة المتجهة تتناقص.

الخطوة 2: أدرس إشارة التسارع.



الخطوة 3: أُحدِّد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.

- تكون سرعة الجسم المتجهة مُتزايِدة عندما $a(t) > 0$؛ أيْ في الفترة $(0, \frac{1}{2})$.
- تكون سرعة الجسم المتجهة مُتناقِصة عندما $a(t) < 0$؛ أيْ في الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$.

أتحقَّق من فهمي

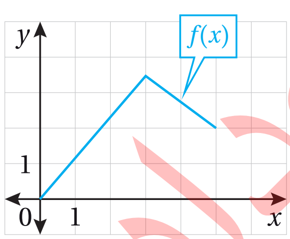
يُمثِّل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

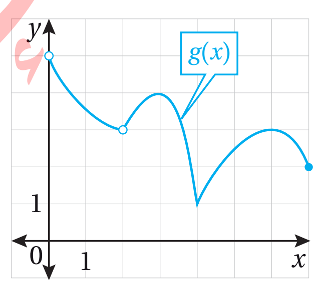
a) ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

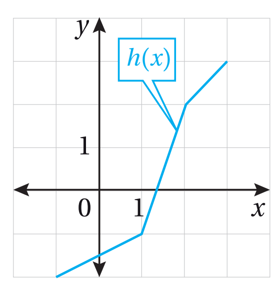
b) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

1


2


3


أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

4) $f(x) = 1 + 6x - 3x^2, [0, 4]$

5) $f(x) = (x+3)^{2/3} - 5, [-3, 3]$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, [-2, 2]$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [8, 64]$

8) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x, [0, \frac{\pi}{2}]$

9) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}, [0, 3]$

10) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, [\frac{1}{2}, 4]$

11) $f(x) = \sec x, [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

12) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

أجـــد فترات التزايد وفترات التناقـــص لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أجد القِيَم القصوى المحليـــة والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

13 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

14 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$

15 $f(x) = x^2 \ln x$

16 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

17 $f(x) = x^{2/3}\,(x-3)$

18 $f(x) = \sin^2 x + \sin x,\ [0, 2\pi]$

19 $f(x) = x + \sin x\ ,\ [0, 2\pi]$

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

20 $f(x) = x^3 - 12x + 1$

21 $f(x) = \sqrt{\sin x}\ ,\ [0, \pi]$

22 $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

23 $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

24 $f(x) = \sqrt{x}\,(x + 3)$

25 $f(x) = xe^x$

أجد القِيَم القصوى المحلية لكل اقتران ممّا يأتي، مُستعمِلًا اختبار المشتقة الثانية (إنْ أمكن):

26 $f(x) = 6x - x^2$

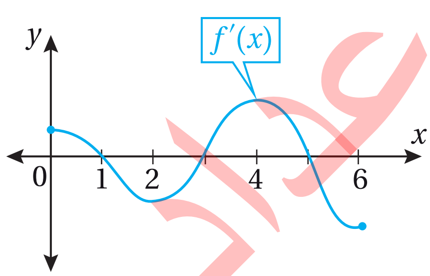
27 $f(x) = \cos x - x,\ [0, 4\pi]$

28 $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

29 $f(x) = x \ln x$

30 $f(x) = \frac{x}{2^x}$

31 $f(x) = x^{2/3} - 3$



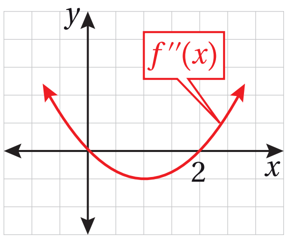
أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

32 قِيَـم x التي يكـون عندها للاقتران f قِيَم قصـوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

33 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

34 إذا كان للاقتـران: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمـة عظمى محلية عند النقطة $(-3, 18)$، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(1, -14)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc.

35 إذا كان للاقتران: $f(x) = \sqrt{x + 1} + \frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x = 3$، فأجد قيمة الثابت b.

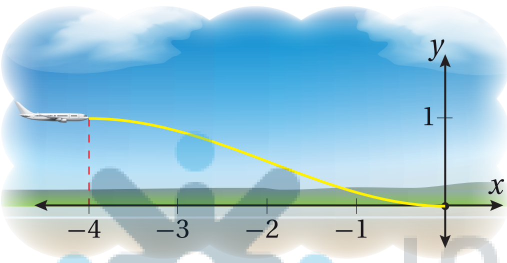


أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

36 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

37 الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

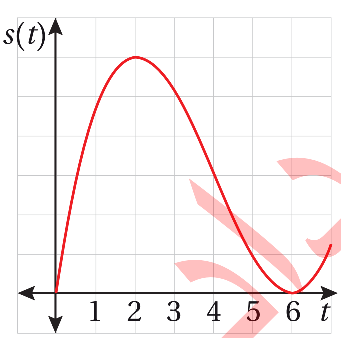
38 ضغط دم: يُمثِّل الاقتران $B(x) = 305x^2 - 1830x^3, 0 \leq x \leq 0.16$ ضغط الدم الناتج من تناول جرعة دواء مقدارها $x \text{ cm}^3$. أجد الحدَّ الأقصى لضغط الدم الناتج من هذا الدواء، مُحدِّدًا جرعة الدواء التي يحدث عندها.



يُبيِّن الشكل المجاور طائرة صغيرة بدأت تهبط من ارتفاع **1 km**، وتبعد مسافة **4 km** غرب المدرج:

39 أجد الاقتران التكعيبي $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ الذي يُمثِّل مسار هبوط الطائرة في الفترة $[-4, 0]$.

40 إذا كان الاقتران في الفرع السابق يُمثِّل مسار هبوط الطائرة، فمتى يكون مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الطائرة أكبر ما يُمكِن؟



يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

41 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

42 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

43 إذا كان تسارع الجسم صفرًا عندما $t = 4$، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

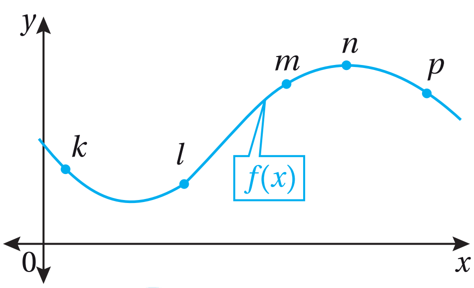
44 مُكبِّرات صوت: يُمثِّل الاقتران $f(x) = \dfrac{1500}{x^2 - 6x + 10}$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه حيث x عدد مكبرات الصوت المبيعة. أجد عدد مُكبِّرات الصوت الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

يُمثِّل الاقتران $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

45 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

46 ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

مهارات التفكير العليا

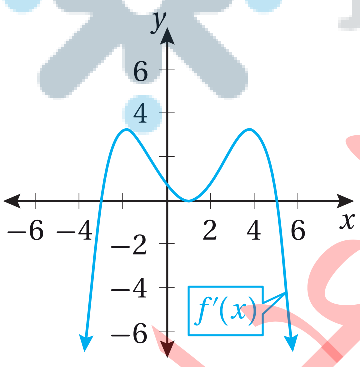


تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تُحقِّق كُلًّا من الشروط الآتية، مُبرِّرًا إجابتي:

47 أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة.

48 أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة.

49 أنْ تكون إشارة $f'(x)$ سالبة، وإشارة $f''(x)$ موجبة.



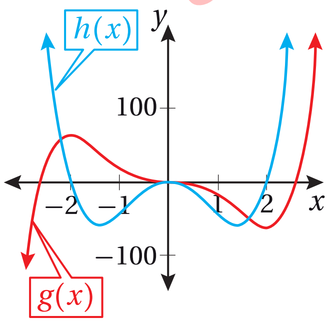
تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

50 قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

51 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

52 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

53 الإحداثي x لنقاط الانعطاف.



54 تحدٍّ: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ و $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يُمثِّل مشتقة للآخر، مُبرِّرًا إجابتي.

55 تحدٍّ: إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأجد القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران: $f(x) = x^a (1-x)^b$ في الفترة $[0, 1]$.

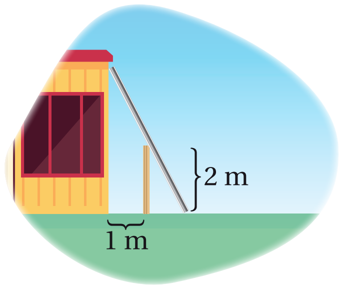
الدرس 3

تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

فكرة الدرس حلُّ مسائل وتطبيقات حياتية على القِيَم القصوى.

المصطلحات اقتران التكلفة، التكلفة الحدِّية، اقتران الإيراد، الإيراد الحدِّي، اقتران الربح، الربح الحدِّي.

مسألة اليوم يحيط سياج ارتفاعه 2 m بمبنى، ويبعد عنه مسافة 1 m كما في الشكل المجاور. أجد طول أقصر سُلَّم قد يصل من الأرض إلى المبنى، ويمرُّ فوق السياج.



يُعَدُّ تحديد القيمة الصغرى والقيمة العظمى المُطلَقة من أكثر موضوعات التفاضل الفرعية استعمالًا في التطبيقات الحياتية والعلمية، مثل: تحديد أكبر ربح مُمكِن أو أقل تكلفة مُمكِنة، وإيجاد أقل جهد، وأكبر مسافة.

يُمكِن اتِّباع الخطوات الآتية لحلِّ العديد من مسائل تطبيقات القِيَم القصوى:

مفهوم أساسي **استراتيجية حلِّ مسائل القِيَم القصوى**

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحلِّ المسألة.
2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، وأختار رمزًا يُمثِّل الكمية التي أُريد أنْ أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة ورموزًا للكميات المتغيرة الأخرى في المسألة، ثم أستعمل المُتغيِّرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.
3) **أُحدِّد مجال الاقتران:** أجد مجال الاقتران (إنْ أمكن) للحكم على منطقية قِيَم المُتغيِّر الناتجة ضمن معطيات المسألة.
4) **أجد قِيَم الاقتران الحرجة وقيمتيه عند طرفي الفترة:** أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفرًا أو غير موجودة، وقيمتي الاقتران عند طرفي الفترة.
5) **أجد القيمة القصوى المطلوبة:** أجد القيمة الصغرى المُطلَقة أو القيمة العظمى المُطلَقة المطلوبة باستعمال إحدى الطرائق التي تعلَّمْتُها في الدرس السابق.

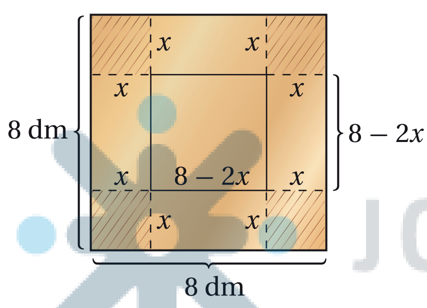
إيجاد أكبر حجم مُمكِن

يُعَدُّ إيجاد أكبر حجم مُمكِن لصناديق التخزين أحد التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى؛ فهو يساعد المصانع والمتاجر على الاستفادة من المساحات المتوافرة في تخزين البضائع بصورة جيدة؛ ما يُقلِّل من مقدار التكلفة.

مثال 1

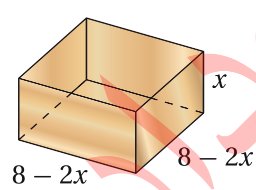
صندوق على شكل متوازي مستطيلات، صُنِع من قطعة كرتون رقيقة، مربعة الشكل، طولها 8 dm، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها، وطَيِّ الجوانب إلى الأعلى. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ x هو طول كل مربع قُطِع من زوايا قطعة الكرتون الأصلية. وبما أنَّ طول القطعة هو 8 dm، فإنَّ طول كل جانب من جوانبها بعد قطع المربعات الصغيرة منها هو $(8-2x)$ dm كما يظهر في المُخطَّط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد أنْ أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد، ثم أُحدِّد مجاله.



يُبيِّن الشكل المجاور أبعاد الصندوق الناتج بعد إزالة المربعات الأربعة الصغيرة وطَيِّ الجوانب.

أجد حجم هذا الصندوق:

$V = l \times w \times h$ صيغة حجم متوازي المستطيلات

$V(x) = (8-2x) \times (8-2x) \times x$ بتعويض $l = 8-2x,\ w = 8-2x,\ h = x$

$= 4x^3 - 32x^2 + 64x$ باستعمال خاصية التوزيع

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل حجم الصندوق هو: $V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$، ومجاله هو: $0 \le x \le 4$.

أتذكَّر

الديسيمتر هو وحدة لقياس الطول، يُرمَز إليها بالرمز dm، وترتبط بوحدة السنتيمتر عن طريق العلاقة: $1\ \text{dm} = 10\ \text{cm}$.

أُفكِّر

لماذا يكون مجال $V(x)$ في هذه المسألة هو $0 \le x \le 4$؟

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران وقيمتيه عند طرفي الفترة.

بإيجاد مشتقة الاقتران $V'(x) = 12x^2 - 64x + 64$

بمساواة المشتقة بالصفر $12x^2 - 64x + 64 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $3x^2 - 16x + 16 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(3x - 4)(x - 4) = 0$

خاصية الضرب الصفري $3x - 4 = 0 \quad \text{or} \quad x - 4 = 0$

بحلِّ كل معادلة لـ x $\quad x = \frac{4}{3} \quad\quad x = 4$

توجد قيمة حرجة واحدة في الفترة $(0, 4)$، هي: $x = \frac{4}{3}$، وهذا يعني وجود 3 قِيَم يُمكِن المقارنة بينها بحسب نظرية القِيَم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة.

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 32\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 64\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1024}{27}, \quad V(4) = 0$$

إذن، أكبر حجم للصندوق هو عند قطع 4 مربعات متطابقة من زواياه، طول كلٍّ منها $\frac{4}{3}$ dm.

ومن ثَمَّ، فإنَّ أبعاد الصندوق هي:

$$l = 8-2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} dm, \quad w = 8-2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{dm}, \quad h = \frac{4}{3} \text{dm}$$

طريقة بديلة:

يُمكِنني استعمال اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \frac{4}{3}$:

بإيجاد المشتقة الثانية $V''(x) = 24x - 64$

بتعويض $x = \frac{4}{3}$ $\quad V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24\left(\frac{4}{3}\right) - 64 = -32 < 0$

أتذكَّر

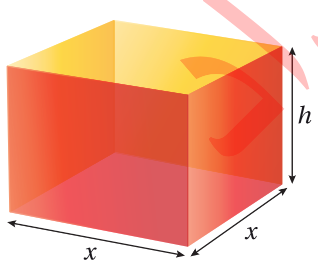
أجد القِيَم الحرجة في فترة مفتوحة.

أتعلَّم

قد لا يكون سهلًا إيجاد المشتقة الثانية لبعض الاقترانات؛ لذا أختار الطريقة المناسبة لتحديد نوع القيمة القصوى بحسب الاقتران.

أتحقَّق من فهمي

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية 1080 cm^2 كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

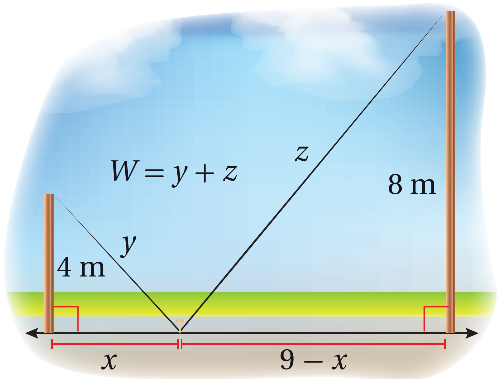


إيجاد أقل طول مُمكِن

من التطبيقات الحياتية المُهِمَّة أيضًا على القِيَم القصوى، إيجاد أقل طول يُمكِن استعماله لإحاطة حديقة، أو تثبيت أعمدة.

مثال 2

عمودان طول أحدهما 8 m، وطول الآخر 4 m، والمسافة بينهما 9 m، وهما مُثبَّتان بسلكين يصلان قِمَّة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور. أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المُستعمَل أقل ما يُمكِن.



الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.

أرسم مُخطَّطًا للعمودين، والسلكين، والوتد، مُفترِضًا أنَّ W هو طول السلك الذي يصل العمودين بالوتد.

بناءً على الشكل المجاور، فإنَّ:

$$W = y + z$$

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد أنْ أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد، ثم أُحدِّد مجاله.

بما أنَّ المسافة بين العمودين هي 9 m، فإنَّ بُعْد الوتد عن أحدهما (الأصغر مثلًا) هو x، وبُعْده عن العمود الآخر هو $9 - x$.

أكتب الاقتران W بدلالة مُتغيِّر واحد:

$$y^2 = x^2 + 4^2$$ نظرية فيثاغورس

$$y = \sqrt{x^2 + 16}$$ بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$z^2 = (9 - x)^2 + 8^2$$ نظرية فيثاغورس

$$z = \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$$ بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$W = y + z$$ الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى

$$W(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$$ بكتابة الاقتران بدلالة x

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل طول السلك هو: $W(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$، ومجاله هو: $0 \leq x \leq 9$.

أتعلَّم

يُفضَّل في هذه المسألة أنْ أكتب الاقتران بدلالة x، بدلًا من كتابته بدلالة y أو z؛ لأنَّ x هو المُتغيِّر الذي يُحدِّد موقع الوتد.

أُفكِّر

لماذا حُدِّدت الفترة $0 \leq x \leq 9$ مجالًا للاقتران؟ أستعين بالشكل المعطى لتبرير إجابتي.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران وقيمتيه عند طرفي الفترة.

بإيجاد مشتقة الاقتران

$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}}$$

بمساواة المشتقة بالصفر

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}} = 0$$

بإعادة كتابة المعادلة

$$x\sqrt{(9-x)^2+64} = (9-x)\sqrt{x^2+16}$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$x^2((9-x)^2+64) = (9-x)^2(x^2+16)$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$x^2(9-x)^2 + 64x^2 = x^2(9-x)^2 + 16(9-x)^2$$

بالاختصار

$$4x^2 = (9-x)^2$$

بإيجاد المفكوك للطرف الثاني

$$4x^2 = 81 - 18x + x^2$$

بإعادة كتابة المعادلة

$$3x^2 + 18x - 81 = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

بتحليل العبارة التربيعية

$$(x-3)(x+9) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x - 3 = 0 \quad \text{or} \quad x + 9 = 0$$

بحلِّ كل معادلة لـ x

$$x = 3 \qquad x = -9$$

بما أنَّ $x = -9$ خارج المجال، فإنَّها تُهمَل.

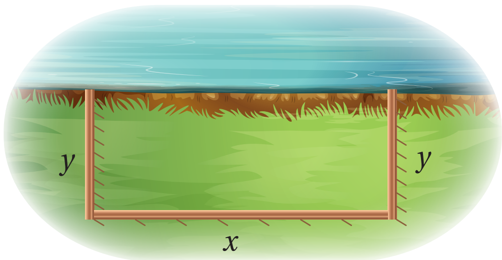
بناءً على ذلك، توجد 3 قِيَم يُمكِن المقارنة بينها بحسب نظرية القِيَم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة.

$$W(0) \approx 16, \qquad W(3) = 15, \qquad W(9) \approx 17.8$$

إذن، يجب تثبيت الوتد على بُعْد 3 m من العمود الأقصر؛ ليكون طول السلك المُستعمَل لتثبيت العمودين أقل ما يُمكِن، وهو 15 m.

أتحقَّق من فهمي

خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.



أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

إيجاد أقرب مسافة

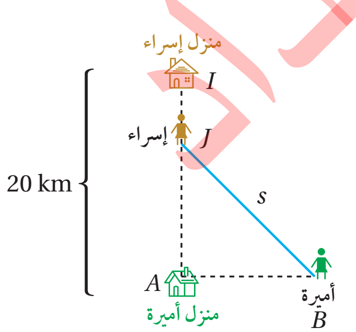
سأتعرَّف في المثال الآتي كيف أجد أقرب مسافة بين شخصين بتطبيق مفهوم السرعة، والمسافة، والزمن.

مثال 3 : من الحياة

تتدرَّب إسراء وأميرة يوميًّا استعدادًا لسباق العَدْوِ (المارثون). في أحد الأيام، انطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بُعْد **20 km** شمال منزل أميرة الساعة **9:00 am**، واتَّجهت جنوبًا بسرعة **8 km/h**. وفي الوقت نفسه، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة **6 km/h**.

في أيِّ ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما، علمًا بأنَّ كُلًّا منهما ركضت مدَّة **2.5 h**؟

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ إسراء بدأت الركض من النقطة I، ووصلت إلى النقطة J بعد t ساعة، وأنَّ أميرة انطلقت –في الوقت نفسه– من النقطة A، ووصلت إلى النقطة B بعد t ساعة. وبذلك، فإنَّ بُعْد إسراء عن أميرة بعد t ساعة هو: $s = JB$.

باستعمال نظرية فيثاغورس، فإنَّ:

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + AB^2}$$

الخطـوة 2: أكتب الاقتــران الذي أُريد أنْ أجد قيمته القصوى بدلالــة مُتغيِّر واحد، ثم أُحدِّد مجاله.

أكتب اقتران المسافة بين إسراء وأميرة بدلالة الزمن t:

$JA = 20 - 8t$	المسافة JA
$AB = 6t$	المسافة AB
$s = JB = \sqrt{JA^2 + AB^2}$	الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى
$s(t) = \sqrt{(20-8t)^2 + (6t)^2}$	بكتابة الاقتران بدلالة t
$= \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$	بالتبسيط

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل المســافة بين إسراء وأميرة هو: $s(t) = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$، ومجاله هو: $0 \leq t \leq 2.5$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران وقيمتيه عند طرفي الفترة.

$s'(t) = \dfrac{100t-160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}}$	بإيجاد مشتقة الاقتران
$\dfrac{100t-160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}} = 0$	بمساواة المشتقة بالصفر
$100t - 160 = 0$	بمساواة البسط بالصفر
$t = 1.6$	بحلِّ المعادلة لـ t

توجد 3 قِيَم يُمكِن المقارنة بينها بحســب نظرية القِيَم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة.

$$s(0) = 20, \qquad s(1.6) = 12, \qquad s(2.5) = 15$$

إذن، تكون إسراء وأميرة أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما بعد 1.6 ساعة من بَدْء كلٍّ منهما الركض؛ أيِ الساعة 10: 36 am.

أتذكَّر

لإيجاد المسافة، أضرب السرعة في الزمن:

$d = v \times t$

أتحقَّق من فهمي

انطلــق قطار مــن إحــدى المحطّات الساعة 10:00 am، وتحرَّك في اتجاه الجنوب بســرعة 60 km/h، حيث المحطَّــة التالية. وفي الوقت نفســه، انطلق قطار آخر نحو الغرب بســرعة 45 km/h، ثم وصل إلى المحطة نفسها الســاعة 11:00 am. في أيِّ ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما؟

تطبيقات اقتصادية

يُعَــدُّ إيجاد أعلى ربــح، أو أعلى إيراد، أو أقل تكلفة لمُنتَج مُعيَّــن أحد التطبيقات الاقتصادية المُهِمَّة على القِيَم القصوى.

يُطلَــق على الاقتــران الذي يُمثِّل تكلفــة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن اســم **اقتــران التكلفة** (cost function)، ويُرمَز إليه بالرمز $C(x)$. ويُطلَق على مُعدَّل تغيُّر C بالنســبة إلى x اســم التكلفة الحدِّية (marginal cost)؛ ما يعني أنَّ اقتران التكلفة الحدِّية هو مشتقة اقتران التكلفة $C'(x)$.

أمّــا الاقتــران الــذي يُمثِّل إيــراد بيــع x وحدة مــن مُنتَــج مُعيَّن فيُســمّى **اقتــران الإيراد** (revenue function)، ويُرمَز إليه بالرمز $R(x)$. وأمّا مشــتقة اقتران الإيراد $R'(x)$ فتُسمّى **الإيراد الحدِّي** (marginal revenue)، وهو يُمثِّل مُعدَّل تغيُّر الإيراد بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة.

بناءً على ما سبق، فإنَّ ربح بيع x قطعة من مُنتَج مُعيَّن يعطى بالاقتران الآتي:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

حيث $P(x)$ هو **اقتران الربح** (profit function)، **والربح الحدِّي** (marginal profit) هو مشتقة اقتران الربح $P'(x)$.

مثال 4 : من الحياة

لاحظت إدارة أحد المسارح أنَّ مُتوسِّط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة 26 JD ، وأنَّ عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصًا مُقابِل كل دينار يُخصَم من سعر التذكرة. إذا كان مُتوسِّط ما يُنفِقه كل شخص 4 JD على الخدمات داخل المسرح، فما سعر بيع التذكرة الذي يُحقِّق للمسرح أعلى إيراد؟

الخطوة 1: أجد اقتران الإيراد.

أفترض أوَّلًا أنَّ x هو المبلغ الذي خصمته إدارة المسرح من سعر التذكرة الأصلي. وبما أنَّ عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصًا مُقابِل كل دينار يُخصَم، فإنَّ عدد الحضور يزيد بمقدار $50x$ مقابل كل x دينار:

$$R(x) = (\text{الإيراد من التذاكر}) + (\text{الإيراد من إنفاق كل شخص})$$ اقتران الإيراد

$$= (\text{عدد الأشخاص} \times \text{سعر التذكرة}) + (4 \times \text{عدد الأشخاص})$$ بالتعويض

$$= (1000 + 50x)(26 - x) + (1000 + 50x) \times 4$$ بالتعويض

$$= -50x^2 + 500x + 30000$$ بالتبسيط

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل الإيراد هو: $R(x) = -50x^2 + 500x + 30000$.

الخطوة 2: أجد قيمة x التي يكون عندها الإيراد أعلى ما يُمكِن.

أجد الإيراد الحدِّي $R'(x)$، ثم أجد القيمة الحرجة للاقتران $R(x)$ عندما $R'(x) = 0$:

$$R'(x) = -100x + 500$$ الإيراد الحدِّي

$$-100x + 500 = 0$$ بمساواة الإيراد الحدِّي بالصفر

$$x = 5$$ بحلِّ المعادلة لـ x

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 5$:

$$R''(x) = -100$$ بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران الإيراد

$$R''(5) = -100 < 0$$ بتعويض $x = 5$

أُلاحِظ أنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 5$.

إذن، يُحقِّق المسرح أعلى إيراد إذا خُفِّض سعر التذكرة بمقدار 5 JD؛ أيْ إذا أصبح سعرها 21 JD.

أتعلَّم

من الأسهل في هذه المسألة تحديد نوع القيمة الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الأولى، أو اختبار المشتقة الثانية.

أتحقَّق من فهمي

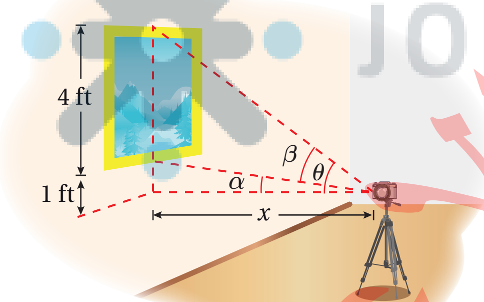
يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريًّا بسعر JD 350 للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أَعَدَّهُ خبير التسويق في المتجر إلى أنَّ عدد الشاشات المَبيعة شهريًّا يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD 10 من سعر الشاشة الواحدة. أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يُحقِّق للمتجر أعلى إيراد مُمكِن.

إيجاد أكبر زاوية

يحرص محترفو التصوير على تحديد الموقع الأمثل لكاميرا التصوير، الذي تكون فيه زاوية تصوير العدسة أكبر ما يُمكِن؛ لالتقاط أفضل صورة. ويستطيع هؤلاء المحترفون استعمال القِيَم القصوى لتحديد قياس هذه الزاوية.

مثال 5 : من الحياة

يريد مُصوِّر التقاط صورة للوحة ارتفاعها 4 ft، وهي مُعلَّقة في معرض فني. إذا كانت عدسة الكاميرا تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار 1 ft كما يظهر في الشكل المجاور، فأجد بُعْد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها (β) أكبر ما يُمكِن.



الخطوة 1: أكتب الاقتران الذي أُريد أنْ أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

يظهر من الشكل أنَّ ظلَّ الزاوية β التي يراد إيجاد أكبر قيمة لها يعطى بالمعادلة الآتية:

$$\tan \beta = \tan (\theta - \alpha)$$

أكتب ظلَّ الزاوية β بدلالة المُتغيِّر x الذي يُمثِّل بُعْد العدسة عن اللوحة:

$$\tan \beta = \tan (\theta - \alpha)$$ الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى

$$= \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha}$$ متطابقة ظلِّ الفرق بين زاويتين

بتعويض $\tan\theta = \frac{5}{x}$, $\tan\alpha = \frac{1}{x}$

$$= \frac{\frac{5}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x} \times \frac{1}{x}}$$

بتوحيد المقامات

$$= \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2+5}{x^2}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{4x}{x^2+5}$$

إذن: $\tan\beta = \frac{4x}{x^2+5}$.

الخطوة 2: أجد القِيَم الحرجة، مُحدِّدًا نوعها.

بإيجاد مشتقة الاقتران

$$\sec^2\beta \times \frac{d\beta}{dx} = \frac{(x^2+5)(4) - (4x)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

بالتبسيط

$$\sec^2\beta \times \frac{d\beta}{dx} = \frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2}$$

بمساواة المشتقة بالصفر

$$\frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2} = 0$$

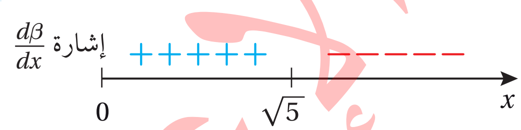
بمساواة البسط بالصفر

$$20 - 4x^2 = 0$$

بحلِّ المعادلة لـ x وإهمال قيم x السالبة

$$x = \sqrt{5}$$

أستعمل اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع القيمة الحرجة:



ألاحِظ من اختبار المشتقة الأولى وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{5}$.

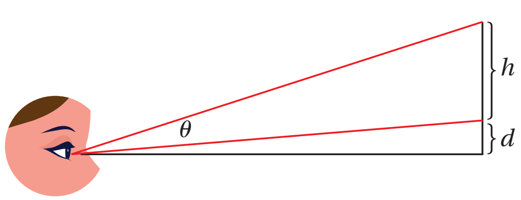
إذن، يجب أنْ يكون بُعْد الكاميرا عن اللوحة $\sqrt{5}$ ft؛ لكي تكون زاوية تصوير عدستها أكبر ما يُمكِن.

أُفكِّر

أيُّهما أفضل لتحديد نوع القيمة الحرجة في هذه المسألة: استعمال اختبار المشتقة الأولى أم استعمال اختبار المشتقة الثانية؟

أتحقَّق من فهمي

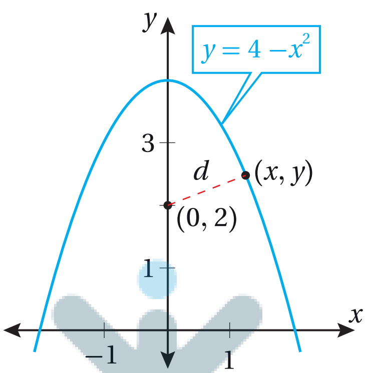
نظرت سارة إلى لوحة مُعلَّقة على حائط في منزلها، ارتفاعها h مترًا، وارتفاع حافتها السفلية d مترًا فوق عينها كما في الشكل المجاور. كم مترًا يجب أنْ تبتعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يُمكِن؟



يوجد كثير من تطبيقات القِيَم القصوى في المســتوى الإحداثي، مثل: إيجاد أقرب نقطة على منحنى اقتران من نقطة معلومة، وإيجاد أكبر مساحة مُمكِنة لشكل مرسوم داخل منحنى اقتران.

مثال 6

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = 4 - x^2$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(0, 2)$.



الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.

أفترض أنَّ النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$ هي (x, y)، وأنَّ d هي المسافة بينها وبين النقطة $(0, 2)$.

باستعمال قانون المسافة بين نقطتين، فإنَّ الاقتران الذي يُمثِّل المسافة d يُكتَب كما يأتي:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد أنْ أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

بما أنَّ النقطة (x, y) تقع على منحنى الاقتران $f(x)$، فإنَّ: $y = f(x) = 4 - x^2$.

أكتب الاقتران d بدلالة مُتغيِّر واحد:

$$d = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \quad \text{الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى}$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2} \quad \text{بكتابة الاقتران بدلالة } x$$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل المسافة بين النقطتين هو: $d(x) = \sqrt{(x)^2 + (2-x^2)^2}$.

الخطوة 2: أجد القِيَم الحرجة، مُحدِّدًا نوعها.

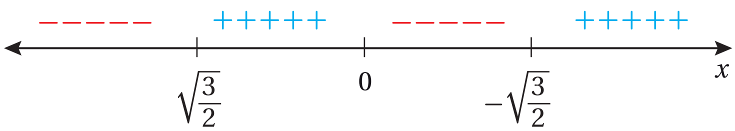
$$d'(x) = \frac{x - 2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}} \quad \text{بإيجاد مشتقة الاقتران}$$

$$\frac{x - 2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}} = 0 \quad \text{بمساواة المشتقة بالصفر}$$

$$x - 2x(2-x^2) = 0 \quad \text{بمساواة البسط بالصفر}$$

باستعمال خاصية التوزيع	$x - 4x + 2x^3 = 0$
بالتبسيط	$-3x + 2x^3 = 0$
بإخراج x عاملًا مشتركًا	$x(-3 + 2x^2) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x = 0 \quad \text{or} \quad -3 + 2x^2 = 0$
بحلّ كل المعادلة لـ x	$x = 0 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

أستعمل اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل قيمة حرجة:

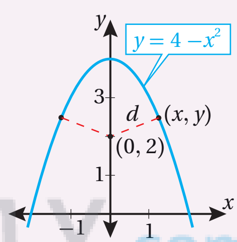


توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$، وتوجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$، و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

إذن، أقرب نقطتين إلى النقطة $(0, 2)$ هما: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$، و $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$.

أتعلَّم

منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$ مُتماثِل حول المحور y، وهذا يُفسِّر وجود نقطتين على منحناه، تبعدان المسافة نفسها عن النقطة $(0, 2)$.

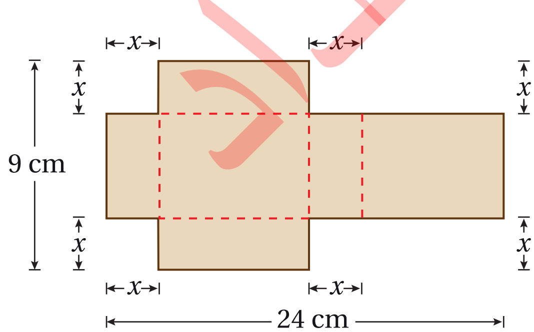


أتحقَّق من فهمي

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{8x}$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(4, 2)$.

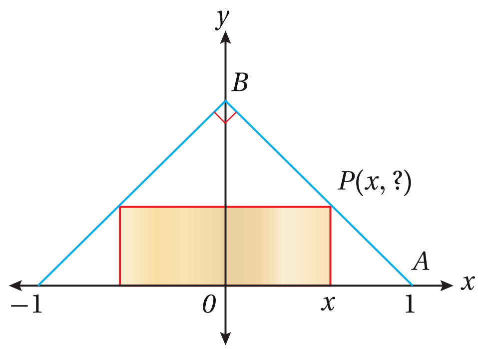
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

قطعة كرتون طولها **24 cm**، وعرضها **9 cm**، أُزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيُّها، وتكوين صندوق له غطاء منها:



1. أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثِّل حجم الصندوق.
2. أُحدِّد مجال الاقتران V.
3. أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكِن.
4. أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $4x^2 + y^2 = 4$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(0, 1)$.

يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل مثلث قائم الزاوية. وهو متطابق الضلعين، وطول قاعدته 2 وحدة طول:



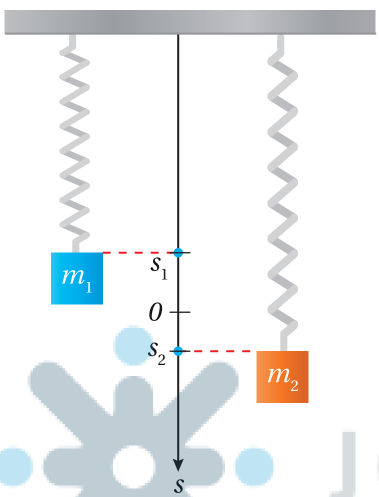
5 أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x.

6 أكتب مساحة المستطيل بدلالة x.

7 أجد أكبر مساحة مُمكِنة للمستطيل.

8 أجد أبعاد المستطيل.

يُبيِّن الشكل المجاور كتلتين مُعلَّقتين جنبًا إلى جنب في زنبركين. ويُمثِّل الاقتران $s_1 = 2 \sin t$ والاقتران $s_2 = \sin 2t$ موقعي الكتلتين على الترتيب، حيث s_1 و s_2 الموقعان بالأمتار، و t الزمن بالثواني:



9 أجد قيمة (قِيَم) t التي تكون عندها الكتلتان في الموقع نفسه، حيث: $t > 0$.

10 أجد قيمة (قِيَم) t التي تكون عندها المسافة الرأسية بين الكتلتين أكبر ما يُمكِن، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$.

يُمثِّل الاقتران $p = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته إحدى الشركات، حيث x عدد البدلات المَبيعة. ويُمثِّل الاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

11 أجد اقتران الإيراد.

12 أجد اقتران الربح.

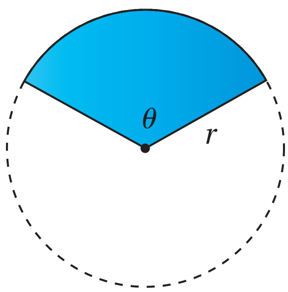
13 أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

14 أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أعلى ربح مُمكِن.

15 تُنتِج مزرعة للتفّاح 30 صندوقًا من الشجرة الواحدة تقريبًا عند زراعة 20 شجرة في كل فَدّان من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فَدّان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فَدّان لتحقيق أكبر إنتاج مُمكِن؟

أتعلّم

الفَدّان هو وحدة مساحة تساوي 4200 متر مربع تقريبًا، وتُستعمَل عادةً لتحديد مساحات الأراضي الزراعية الشاسعة.

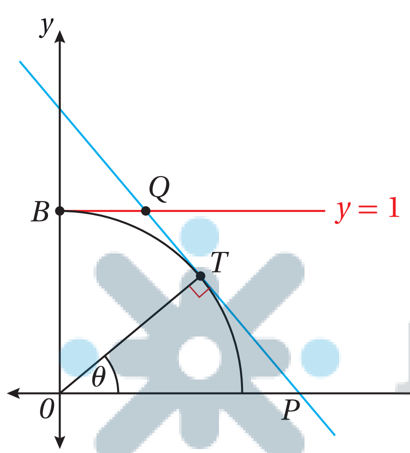


لدى مُزارِعٍ P مترًا طوليًّا من سياج، يرغب في استعماله كاملًا لتسييج حقل رَعْيٍ على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قُطْرها r مترًا كما في الشكل المجاور:

16 أُثبِت أنَّ طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P = r(\theta + 2)$.

17 أُثبِت أنَّ مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

18 أجد نصف قُطْر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يُمكِن.



تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$، عند الزاوية θ من المحور x الموجب، حيث: $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:

19 أُثبِت أنَّ معادلة المستقيم PT هي:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

20 أُثبِت أنَّ مساحة شبه المُنحرِف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي:

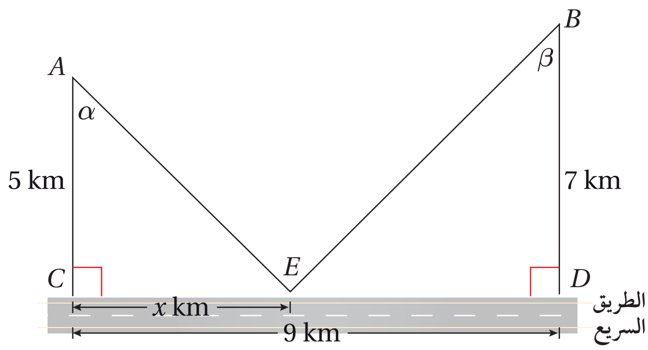
$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

21 أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المُنحرِف أقل ما يُمكِن.

22 يُبيِّن الشكل المجاور نافذة مُكوَّنة من جزأين؛ أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قُطْرها x m، والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه x m وارتفاعه y m.

صُنِع الجزء العلوي من زجاج مُلوَّن يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع، وصُنِع الجزء السفلي من زجاج شفّاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع. أجد قيمة كلٍّ من x و y التي تجعل كمية الضوء المارِّ خلال النافذة أكبر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ 10 m من المعدن الرقيق استُعمِل في تشكيل إطار النافذة كاملًا، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.

يُمارِس يوسف هواية ركوب الدرّاجات. وفي أحد الأيام، انطلق على درّاجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B، مارًّا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

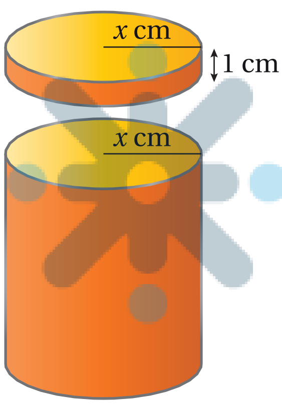


23 إذا كان الاقتران L يُمثِّل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة، فأكتب L بدلالة x.

24 أُثبِت أنَّه إذا كان: $\frac{dL}{dx} = 0$، فإنَّ: $\sin \alpha = \sin \beta$.

25 أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكِن.

علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء مُحكَم يتداخل مع العلبة بمقدار **1 cm** كما في الشكل المجاور. إذا كان نصف قُطْر العلبة والغطاء **x cm**، وصُنِعت العلبة والغطاء من صفيحة رقيقة مُلائِمة للأغذية، مساحتها $80\pi \text{ cm}^2$ من دون أيِّ هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع:

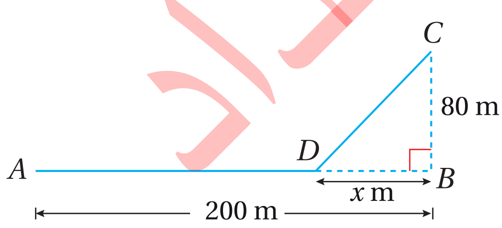


26 أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكِن.

27 أجد أكبر حجم مُمكِن للعلبة.

28 أجد النسبة المئوية للجزء الذي استُعمِل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يُمكِن.

يمتدُّ مسار للركض شرقًا من النقطة A إلى النقطة B مسافة **200 m**، وتقع النقطة C على بُعْد **80 m** شمال النقطة B.

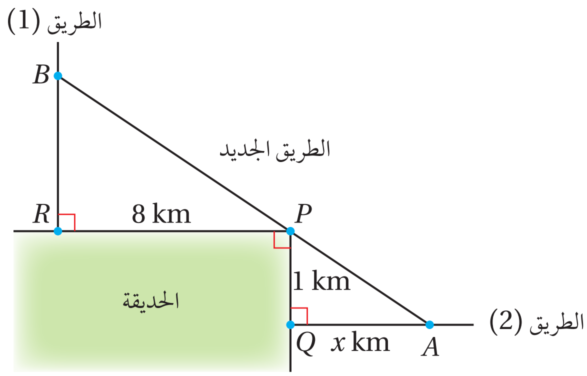


انطلق راكب على درّاجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة **10 m/s**، حيث تقع النقطة D على بُعْد x مترًا غرب النقطة B، ثم سار في طريق مستقيم وَعِر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة **6 m/s**:

29 أجد اقترانًا بدلالة x يُمثِّل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدرّاجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C.

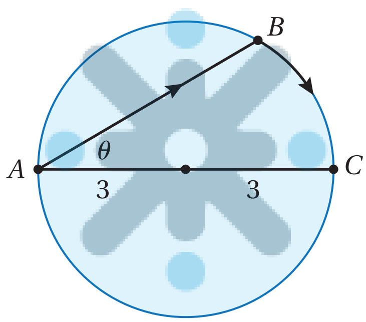
30 بافتراض أنَّ x قيمة مُتغيِّرة، أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يُمكِن.

31 يُبيِّن الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويُمكِن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمرُّ بالنقطة P التي تُمثِّل زاوية الحديقة، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ النقطة A تقع على بُعْد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن.

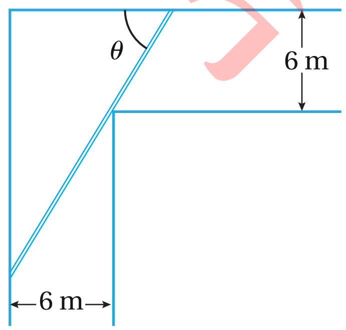


مهارات التفكير العليا

32 تبرير: يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قُطْرها 3 km، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تمامًا للنقطة A، على الجانب الآخر من البحيرة، في أقصر وقت مُمكِن كما في الشكل المجاور. يُمكِن للرجل أنْ يَجدِف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 3 km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6 km/h. أُحدِّد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت مُمكِن؟ أُبرِّر إجابتي.



33 تحدٍّ: يراد نقل أنبوب فولاذي غير قابل للثني عن طريق ممرٍّ يبلغ عرضه 6 m، وينعطف بزاوية قائمة. أجد طول أطول أنبوب يُمكِن نقله خلال هذا الممرِّ؛ شرط أنْ يظلَّ الأنبوب مُوازيًا للأرض في أثناء عملية نقله.



إرشاد: أصغر قيمة للزاوية θ تُمثِّل أكبر قيمة لطول الأنبوب الذي يُمكِن نقله خلال الممرِّ.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 مثلث قائم الزاوية، ساقاه x وy، ووتره z. إذا كان: $\frac{dz}{dt} = 1$، وكان: $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$، فإنَّ $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 4$، و$y = 3$ هي:

a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) 2 d) 5

2 القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران $f(x) = 4x - x^2 + 6$ في الفترة $[0, 4]$ هي:

a) 6 b) 2 c) 10 d) 12

3 الإحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x + 7$ هو:

a) 0 b) 1 c) 3 d) -1

4 قيمة x التي تكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هي:

a) 3 b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

5 إذا كانت الفترة $[1, 25]$ هي مجال الاقتران المتصل f، الذي مداه $[3, 30]$، وكان: $f'(x) < 0$ لجميع قِيَم x بين 1 و25، فإنَّ $f(25)$ تساوي:

a) 1 b) 3 c) 25 d) 30

6 القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية، طول وتره 10 وحدات، هي:

a) 24 b) 25 c) 48 d) 50

7 إذا زاد حجم مُكعَّب بمُعدَّل $24\ \text{cm}^3/\text{min}$، وزادت مساحة سطحه بمُعدَّل $12\ \text{cm}^2/\text{min}$، فإنَّ طول ضلعه في تلك اللحظة هو:

a) 2 cm b) $2\sqrt{2}$ cm
c) 4 cm d) 8 cm

8 عدد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = (x-2)^5(x+3)^4$ هو:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

9 $f(x) = 3x^2 - 2x^3,\ [-5, 1]$

10 $f(x) = \frac{x}{x+3},[-1, 6]$

11 $f(x) = xe^{x/2},\ [-3, 1]$

12 $f(x) = 3\cos x,\ [0, 2\pi]$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أجد القِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران:

13 $f(x) = x^5 + x^3$

14 $f(x) = x^4 e^{-x}$

15 $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$

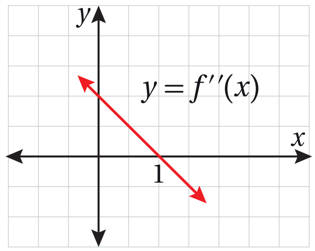
أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

16 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

17 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

18 $f(x) = (3 - x^2)^2$

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:



19 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

20 الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

يُمثِّل الاقتران $p(x) = 5.00 - 0.002x$ سعر مُنتَج في إحدى الشـركات، حيث x عدد القطـع من المُنتَـج. ويُمثِّل الاقتران $C(x) = 3.00 + 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة من المُنتَج:

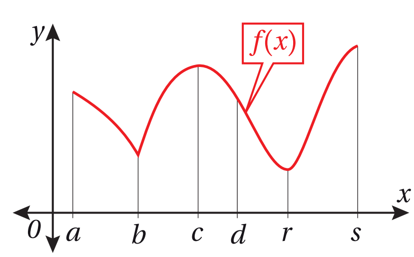
21 أجد اقتران الإيراد.

22 أجد اقتران الربح.

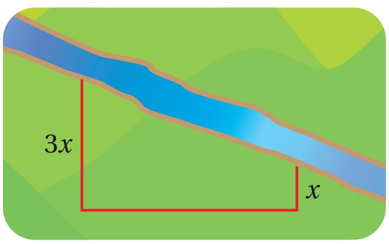
23 أجد عدد القطع اللازم بيعها مـن المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

24 أجد سعر المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

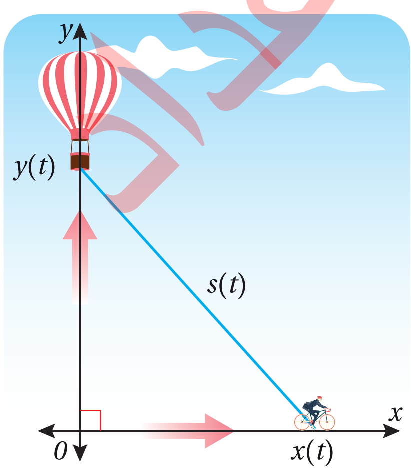
25 يُبيِّن الشـكل التالي منحنى الاقتـران $f(x)$. أيُّ النقاط الواقعة على المنحنى تُمثِّل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيُّها تُمثِّل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مُطلَقة؟



26 لدى مُزارِع 400 m من السياج، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه مُنحرِف، ويوجد على حافة النهر كما في الشـكل التالي. إذا كان طـول أحد الضلعين المتوازيين يسـاوي 3 أمثال طول الضلع الآخر، فأجد أكبر مسـاحة يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بهذا السياج، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



27 يرتفع بالون رأسـيًّا فوق مستوى طريق مستقيم بمُعدَّل 1 ft/s. وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65 ft فوق سـطح الأرض، مَرَّت أسفله درّاجة تتحرَّك بسـرعة 17 ft/s كما في الشـكل التالي. أجد سرعة تغيُّر المسافة بين البالون والدرّاجة بعد 3 ثوانٍ من هذه اللحظة.



الوحدة
3

الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers

ما أهمية هذه الوحدة؟

قدَّمت الأعـداد المُركَّبة حـلًّا لأيِّ معادلـة كثير حدود بصـرف النظر عن نوعها؛ ما جعلها أحـد أكثر الموضوعات الرياضية اسـتعمالًا فـي العلـوم التطبيقية، مثـل: تصميم الكاميـرات الرقميـة، وأجنحة الطائرات، وإشـارات الهواتـف المحمولـة، وحسـابات الدارات الكهربائية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- حلَّ المعــادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل، واستعمال القانون العام.
- حلَّ معادلات كثيرات الحدود باستعمال نظرية الباقي، ونظرية العوامل.
- تمثيــل المتجهــات فــي المســتوى الإحداثي، والعمليات الحسابية عليها.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- مفهوم العدد المُركَّب، وتمثيله في المســتوى المُركَّب، وإيجاد سعته الرئيسة ومقياسه.
- إجــراء العمليات الحســابية علــى الأعداد المُركَّبة.
- تمثيل المحل الهندسي لمعادلات ومتباينات تتضمَّن أعدادًا مُركَّبةً في المستوى المُركَّب.

أســتعمل تدريبات (أستعد لدراســة الوحدة)، في الصفحات (22–20) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers

فكرة الدرس تعرُّف العدد المُركَّب، وإيجاد سعته ومقياسه، وتمثيله بيانيًّا في المستوى المُركَّب.

المصطلحات الوحدة التخيُّلية، العدد التخيُّلي، العدد المُركَّب، الجزء الحقيقي، الجزء التخيُّلي، مُرافِق العدد المُركَّب، مقياس العدد المُركَّب، سعة العدد المُركَّب، السعة الرئيسة للعدد المُركَّب، الصورة المثلثية للعدد المُركَّب.

مسألة اليوم افترض عالِم الرياضيات الإيطالي جيرولامو كاردانو قديمًا أنَّ القيمة: $\sqrt{-1}$ تُمثِّل حلًّا للمعادلة: $x^2 + 1 = 0$. هل يبدو ذلك منطقيًّا؟

الوحدة التخيُّلية والعدد التخيُّلي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه لا يوجد حلٌّ حقيقي للمعادلة التربيعية: $x^2 = -1$؛ لأننا إذا أردنا حلها فإننا نحصل على:

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

وهذا غير مُمكِن؛ لأنَّ مربع أيِّ عدد حقيقي لا يكون سالبًا.

لكنَّ علماء الرياضيات تمكَّنوا من حلِّ هذه المعادلة بابتكار توسعة للنظام العددي، تمثَّلت في إضافة **وحدة تخيُّلية** (imaginary unit) رُمِز إليها بالرمز i، حيث: $i^2 = -1$

بناءً على تعريف i، فإنَّ كُلًّا من i و $-i$ يُعَدُّ جذرًا تربيعيًّا للعدد -1، إلّا أنَّ i يُسمى **الجذر الرئيس** للعدد -1

يُطلَق على العدد الذي في صورة: $\sqrt{-k}$، حيث k عدد حقيقي موجب، اسم **العدد التخيُّلي** (imaginary number)، ويُمكِن إيجاد الجذر الرئيس للعدد الحقيقي السالب $(-k)$ على النحو الآتي:

$$\sqrt{-k} = \sqrt{-1 \times k} = \sqrt{-1} \times \sqrt{k} = i\sqrt{k}$$

معلومة

تُمثِّل الأعداد التخيُّلية ركيزة أساسية في علم الهندسة الكهربائية.

مثال 1

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-16}$

$\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \times 16}$ بالتحليل

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{16}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= i \times 4 = 4i$ تعريف الجذر الرئيس للعدد -1

2) $\sqrt{-72}$

$\sqrt{-72} = \sqrt{-1 \times 36 \times 2}$ بالتحليل

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{36} \times \sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= i \times 6 \times \sqrt{2} = 6i\sqrt{2}$ تعريف الجذر الرئيس للعدد -1

أتعلَّم

يُكتَب الرمز i على يمين العدد المضروب فيه. أمّا إذا كان مضروبًا في متغير أو جذر، فإنَّه يُكتَب على يسار المتغير أو الجذر. ومن الأمثلة على ذلك: $5i, ix, 2i\sqrt{14}$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

a) $\sqrt{-75}$

b) $\sqrt{-49}$

ضرب الأعداد التخيُّلية

يتطلَّب ضرب الأعداد التخيُّلية أوَّلًا كتابة هذه الأعداد بدلالة i، ثم استعمال خاصيتي التبديل والتجميع لكتابة الناتج في أبسط صورة، كما هو الحال في ما يأتي بالنسبة إلى الجذرين الرئيسين للعددين: -9 و -4 (بافتراض أنَّ $i = \sqrt{-1}$):

خطأ

$\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} = \sqrt{-9(-4)}$

$= \sqrt{36}$

$= 6$

صحيح

$\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} = i\sqrt{9} \times i\sqrt{4}$

$= 3i \times 2i$

$= 6i^2 = 6(-1) = -6$

أتعلَّم

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فإنَّ: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$، لكنَّ ذلك غير صحيح للأعداد السالبة، والأعداد التخيُّلية.

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $\sqrt{-1} = i$:

1 $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$

$\sqrt{-8} \times \sqrt{-18} = \sqrt{-1 \times 8} \times \sqrt{-1 \times 18}$ بالتحليل

$= (\sqrt{-1} \times \sqrt{8}) \times (\sqrt{-1} \times \sqrt{18})$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= (i \times \sqrt{8}) \times (i \times \sqrt{18})$ بافتراض أنَّ $\sqrt{-1} = i$

$= (i \times i) \times (\sqrt{8} \times \sqrt{18})$ خاصيتا التبديل والتجميع للضرب

$= i^2 \times \sqrt{144}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= -1 \times 12 = -12$ بالتبسيط: $i^2 = -1$

2 $5i \times \sqrt{-4}$

$5i \times \sqrt{-4} = 5i \times \sqrt{-1 \times 4}$ بالتحليل

$= 5i \times \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= 5i \times i \times 2$ بافتراض أنَّ $\sqrt{-1} = i$

$= (2 \times 5) \times i \times i$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= 10i^2$ بالضرب

$= 10 \times -1 = -10$ بالتبسيط: $i^2 = -1$

3 i^{15}

$i^{15} = (i^2)^7 \times i$ خاصية قوّة القوّة

$= (-1)^7 \times i$ بالتبسيط: $i^2 = -1$

$= -i$ بالتبسيط: $(-1)^7 = -1$

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $\sqrt{-1} = i$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$ b) $\sqrt{-50} \times -4i$ c) i^{2021}

أتذكَّر

- خاصية التبديل للضرب: إذا كان a, b عددين حقيقيين، فإنَّ: $a \times b = b \times a$
- خاصية التجميع للضرب: إذا كانت a, b, c أعدادًا حقيقيةً، فإنَّ: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- إذا كان a عددًا حقيقيًّا، وكان n و m عددين صحيحين، فإنَّ: $(a^n)^m = a^{nm}$
- تبقى الخصائص الثلاث السابقة صحيحة إذا كانت a و b و c أعدادًا تخيُّلية.

أتذكَّر

العدد (-1) مرفوعًا إلى أُسٍّ زوجي يساوي (1)، ومرفوعًا إلى أُسٍّ فردي يساوي (-1).

الأعداد المُركَّبة

أتعلَّم

الجـزء التخيُّلـي هو b، وليس ib.

العـدد المُركَّـب (complex number) هو عدد يُمكِن كتابته في صورة: $a + ib$، حيث a، و b عددان حقيقيان. يتكوَّن العدد المُركَّب من **جزء حقيقي** (real part) هو العدد a، **وجزء تخيُّلي** (imaginary part) هو العدد b.

عند كتابة العدد المُركَّب في صورة $(a + ib)$، فإنَّه يكون مكتوبًا بالصورة القياسية.

أُلاحِظ من الصورة القياسية للعدد المُركَّب أنَّ الأعداد الحقيقية هي أيضًا أعداد مُركَّبة؛ لأنَّه يُمكِن كتابة أيِّ عدد حقيقي a في صورة: $a + 0i$؛ وهو عدد مُركَّب، فيه $b = 0$.

أُلاحِظ أيضًا أنَّ الأعداد التخيُّلية هي أعداد مُركَّبة؛ لأنَّه يُمكِن كتابة أيِّ عدد تخيُّلي ib في صورة: $0 + ib$؛ وهو عدد مُركَّب، فيه $a = 0$.

$$z = \underbrace{x}_{\text{الجزء الحقيقي}} + \underbrace{i}_{\text{عدد تخيلي}}\,\underbrace{y}_{\text{الجزء التخيلي}}$$

أستنتج ممّا سبق أنَّ الأعداد الحقيقية والأعداد التخيُّلية تُمثِّل مجموعتين جزئيتين من النظام العددي، وأنَّ اتحادهما يساوي مجموعة الأعداد المُركَّبة.

يُبيِّن المُخطَّط الآتي العلاقات بين مجموعات الأعداد التي تعلَّمْتُها سابقًا.

الأعداد المُركَّبة (C): الأعداد الحقيقية والأعداد التخيُّلية معًا، إضافةً إلى حاصل جمع هذه الأعداد.

الأعداد التخيُّلية (i)

$\sqrt{-7}, \sqrt{-9}$

$\sqrt{-0.25}$

$i\sqrt{3}, -5i, \frac{3}{4}i$

الأعداد غير النسبية (I):

أعداد لا يُمكِن كتابتها في صورة نسبة بين عددين صحيحين.

$\sqrt{2}, \sqrt{7}, -\sqrt{10},$

$0.070070007...$

الأعداد النسبية (Q):

$\{\frac{p}{q}, p, q \in Z; q \neq 0\}$

الأعداد الصحيحة (Z):

$\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

الأعداد الكلية (W):

$\{0, 1, 2, 3, ...\}$

الأعداد الحقيقية (R): الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية معًا.

خاصية المساواة للأعداد المُركَّبة

يتساوى العددان المُركَّبان إذا تساوى جُزآهما الحقيقيان، وتساوى جُزآهما التخيُّليان.

مفهوم أساسي **تساوي الأعداد المُركَّبة**

يتســاوى العددان المُركَّبان: $a + ib, c + id$ إذا وفقط إذا كان: $a = c, b = d$، حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

مثال 3

أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$ صحيحة.

أُساوي الجزأين الحقيقيين، وأُساوي الجزأين التخيُّليين، ثم أحُلُّ المعادلتين الناتجتين:

بمساواة الجزأين التخيُّليين	$3y + 2 = 8$	بمساواة الجزأين الحقيقيين	$2x - 6 = 4x$
بحلِّ المعادلة	$y = 2$	بحلِّ المعادلة	$x = -3$

إذن، $x = -3, y = 2$.

أتحقَّق من فهمي

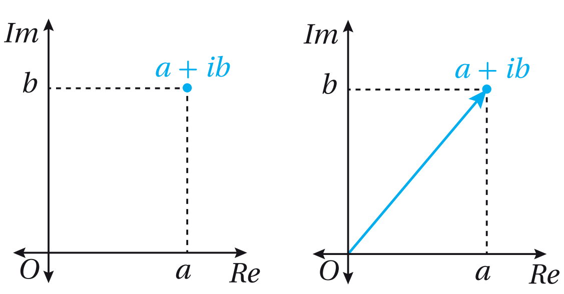
أجـد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحة.

معلومة

يُسمّى المستوى المُركَّب أيضًا مستوى آرجاند؛ نسبةً إلى عالِم الرياضيات جون آرجاند الذي ابتكره عام 1806م.

تمثيل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا

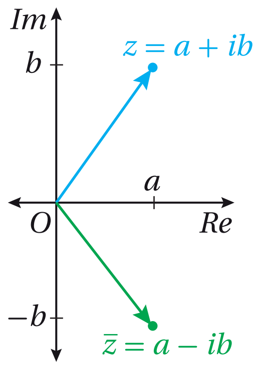
يُمكِن تمثيل العـدد المُركَّب $a + ib$ في المسـتوى الإحداثي في صورة الزوج المُرتَّب (a, b)، أو صورة المتجه $\langle a, b\rangle$، عندئذٍ يُسمّى المحور الأفقي **المحور الحقيقي**، ويُرمَز إليه بالرمز (Re)، ويُسمّى المحور الرأسي **المحور التخيُّلي**، ويُرمَز إليه بالرمز (Im)، في حين يُسمّى المستوى الإحداثي في هذه الحالة **المستوى المُركَّب**.



أتعلَّم

يُستعمَل الحرف z رمزًا للعدد المُركَّب بوجه عام.

أمّا **مُرافِق العدد المُركَّب** (conjugate) المكتوب في الصورة القياسية: $z = a + ib$ فهو العدد المُركَّب: $\bar{z} = a - ib$. وعند تمثيل z ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، أُلاحِظ أنَّ كُلًّا منهما هو انعكاس للآخر في المحور الحقيقي (Re) كما في الشكل المجاور.



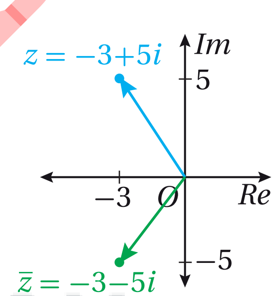
مثال 4

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $z = -3 + 5i$

مُرافِق العدد: $z = -3+5i$ هو: $\bar{z} = -3 - 5i$.

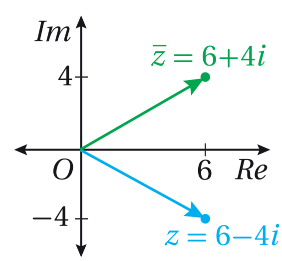
يمثل الزوج المرتب $(-3, 5)$ العدد المركب z ويمثل الزوج المُرتَّب $(-3, -5)$ مُرافِقه $\bar{z}$.



2 $z = 6 - 4i$

مُرافِق العدد: $z = 6 - 4i$ هو: $\bar{z} = 6 + 4i$.

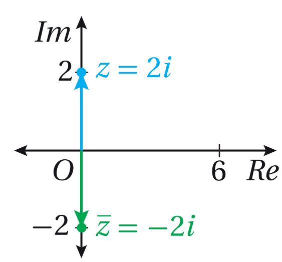
يمثل الزوج المرتب $(6, -4)$ العدد المركب z ويمثل الزوج المُرتَّب $(6, 4)$ مُرافِقه $\bar{z}$.



3 $z = 2i$

مُرافِق العدد المُركَّب: $z = 2i$ هو: $\bar{z} = -2i$.

يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(0, 2)$ العدد z، في حين يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(0, -2)$ مُرافِقه $\bar{z}$.



أتحقَّق من فهمي

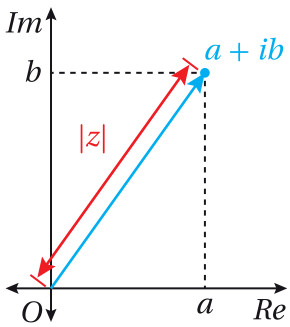
أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $z = 2 + 7i$ b) $z = -3 - 2i$ c) $z = -3i$

مقياس العدد المُركَّب

مقياس العدد المُركَّب (modulus) المكتوب في الصورة القياسية: $z = a + ib$ هو المسافة بين نقطة الأصل $(0, 0)$ والنقطة (a, b)، ويُرمَز إليه عادة بالرمز $|z|$ أو الرمز r.

يُستعمَل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد مقياس العدد المُركَّب.



مفهوم أساسي

مقياس العدد المُركَّب

مقياس العدد المُركَّب: $z = a + ib$ هو: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، حيث a, b عددان حقيقيان.

مثال 5

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

1 $z = 3 - 4i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة مقياس العدد المُركَّب

$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$ بالتعويض: $a = 3, b = -4$

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيط

2 $z = 12i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة مقياس العدد المُركَّب

$= \sqrt{0^2 + (12)^2}$ بالتعويض: $a = 0, b = 12$

$= \sqrt{144} = 12$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

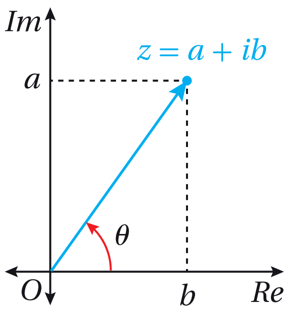
a) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$

b) $z = -2i$

c) $z = 4 + \sqrt{-20}$

سعة العدد المُركَّب

سـعة العدد المُركَّب (argument) هي الزاوية θ المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تُمثِّل العدد المُركَّب مَقيسةً بالراديان. ويرمز إلى سعة العدد المركب z بالرمز $\arg(z)$.



وبما أنَّه يوجد عدد لانهائي من الزوايا المرسومة في الوضع القياسي التي لها ضلع الانتهاء نفسه، فقد عُرِّفت **السعة الرئيسة** (principle argument) للعدد المُركَّب بأنَّها السعة التي تقع في الفترة: $-\pi < \theta \leq \pi$، ويُرمَز إليها بالرمز $\text{Arg}(z)$، حيث:

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi n = \theta + 2\pi n, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

ويُمكِن استعمال النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية لإيجاد سعة العدد المُركَّب: $z = a + ib$ الذي يقع في الربع الأوَّل.

أتعلَّم

تشير كلمة (السعة) إلى السعة الرئيسة أينما ورد ذكرها في الكتاب.

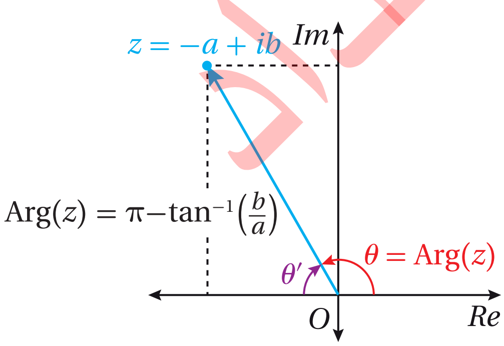
مفهوم أساسي

السعة في الربع الأوَّل

إذا كان: $z = a + ib$ عددًا مُركَّبًا يقع في الربع الأوَّل، فإنَّ سعته تعطى بالصيغة الآتية:

$$\theta = \text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

إذا وقع العدد المُركَّب z في الربع الثاني، فإنَّ سعته تكون زاوية مُنفرِجة؛ لذا تُستعمَل مُكمِّلتها لإيجادها. إذا كانت سعة z هي الزاوية المُنفرِجة θ، فإنَّ مُكمِّلتها θ' هي زاوية حادَّة؛ لذا يُرسَم في الربع الثاني مثلث قائمٌ، أحد رؤوسه z، وإحدى زواياه θ' كما في الشكل المجاور، وتُستعمَل النسب المثلثية لإيجاد قياس θ'.

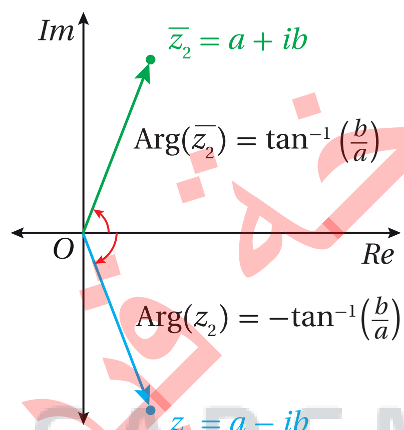


عدد مُركَّب في الربع الثاني

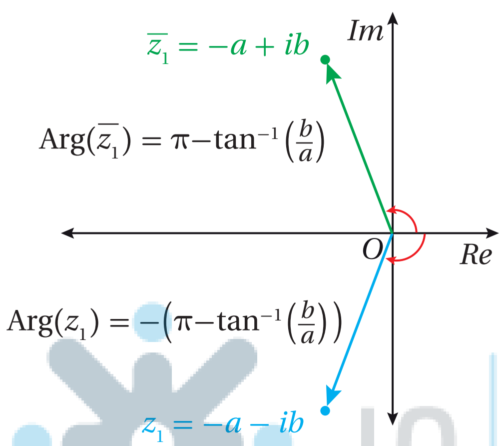
أتذكَّر

يكون قياس الزاوية موجبًا عن دوران ضلع انتهائها عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وسالبًا عند دورانه في اتجاه دوران عقارب الساعة.

أمّا إذا وقع العدد المُركَّب في الربع الثالث أو الربع الرابع، فإنَّ سعته تساوي معكوس سعة مُرافِقه الذي يقع في الربع الأوَّل أو الربع الثاني؛ لأنَّ قياس الزاوية بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تُمثِّل العدد المُركَّب يساوي قياس الزاوية بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تُمثِّل مُرافِق العدد المُركَّب، لكنَّ اتجاه كلٍّ من هاتين الزاويتين مختلف (إحداهما في اتجاه دوران عقارب الساعة، والأُخرى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة).



عدد مُركَّب في الربع الرابع



عدد مُركَّب في الربع الثالث

مُلخَّص المفهوم

سعة العدد المُركَّب

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فإنَّ:

العدد المُركَّب z	الربع الذي يقع فيه z	$\text{Arg}(z)$
$z = a + ib$	الأوَّل	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a + ib$	الثاني	$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a - ib$	الثالث	$-\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$
$z = a - ib$	الرابع	$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

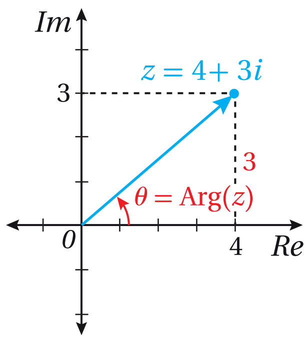
أُفكِّر

كيف أجد السعة عندما $a = 0$؟

مثال 6

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

1 $z = 4 + 3i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركب $z = 4 + 3i$ في الشكل المجاور، أُلاحِظ أنه يقع في الربع الأوَّل.

أستعمل النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية لإيجاد السعة على النحو الآتي:

$$\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$ صيغة مقياس العدد المُركَّب

$$\text{Arg}(4 + 3i) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$ بالتعويض: $a = 4, b = 3$

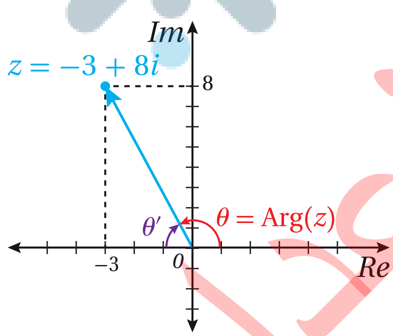
$$\approx 0.64$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $\text{Arg}(z) \approx 0.64$.

أتذكَّر

يجب ضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.

2 $z = -3 + 8i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المُركَّب $z = -3 + 8i$ في الشكل المجاور ألاحظ أنه يقع في الربع الثاني.

أفترض أنَّ $\theta = \text{Arg}(z)$، وأنَّ مُكمِّلة θ هي: θ'.

أُلاحِظ أنَّ θ' هي زاوية حادَّة في المثلث القائم المرسوم في الربع الثاني. أستعمل النسب المثلثية لإيجاد قياس θ'، ثم أستعمله لإيجاد θ:

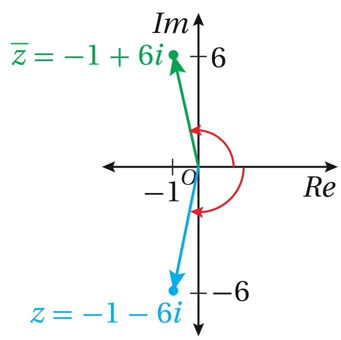
$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$$ تعريف ظلّ الزاوية

$$\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$$ $\theta + \theta' = \pi$

$$\approx 1.93$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $\text{Arg}(z) \approx 1.93$.

3 $\boldsymbol{z = -1 - 6i}$



بالنظـر إلـى التمثيل البيانـي للعـدد المُركَّب $-1 -6i$ في الشكل المجاور ألاحظ أنه يقع في الربع الثالث، وأنَّ سـعته تساوي معكوس سعة مُرافِقه $\overline{z}$ الذي يقع في الربع الثاني:

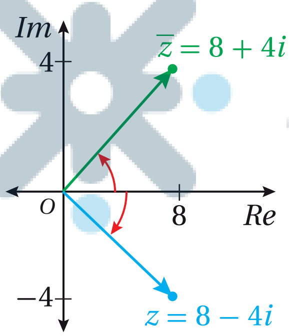
$\text{Arg}(z) = -(\text{Arg}(\overline{z}))$ سعة z تساوي معكوس سعة $\overline{z}$

$= -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right)\right)$ باستعمال المُكمِّلة لإيجاد سعة $\overline{z}$

≈ -1.74 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $\text{Arg}(z) \approx -1.74$.

4 $\boldsymbol{z = 8 - 4i}$



بالنظـر إلـى التمثيـل البيانـي للعـدد المُركَّـب $z = 8 - 4i$ في الشـكل المجـاور ألاحظ أنه يقع في الربع الرابع، وأنَّ سـعته تسـاوي معكوس سعة مُرافِقه $\overline{z}$ الذي يقع في الربع الأوَّل:

$\text{Arg}(z) = -(\text{Arg}(\overline{z}))$ سعة z تساوي معكوس سعة $\overline{z}$

$= -\left(\tan^{-1}\left(\frac{4}{8}\right)\right)$ $\overline{z}$ يقع في الربع الأوَّل: $\text{Arg}(\overline{z}) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{8}\right)$

≈ -0.46 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $\text{Arg}(z) \approx -0.46$.

أتحقَّق من فهمي

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

a) $z = 8 + 2i$

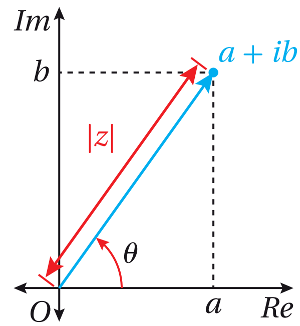
b) $z = -5 + 12i$

c) $z = -2 - 3i$

d) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

أتعلَّم

تشـترك الأعداد المُركَّبة مـع المتجهات في بعض الخصائـص، مثل وجود مقـدار واتجـاه لكلٍّ من العدد المُركَّب والمتجه، لكنَّهـا تختلف من حيث التسمية.



الصورة المثلثية للعدد المُركَّب

يُبيِّن الشـكل المجاور النقطة (a , b) التي تُمثِّل العدد المُركَّب: $z = a + ib$، الذي مقياسه: $r = |z|$، وسعته: θ.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

تعريف جيب التمام	$\cos\theta = \frac{a}{r}$
بالضرب التبادلي	$a = r\cos\theta$
تعريف الجيب	$\sin\theta = \frac{b}{r}$
بالضرب التبادلي	$b = r\sin\theta$

بتعويض قيمة كلٍّ من a، و b في الصورة القياسية للعدد المُركَّب: $(a + ib)$، فإنَّ:

$$z = a + ib = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تُسمّى $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ **الصورة المثلثية** (trignometric form) للعدد المُركَّب.

أتعلَّم

إذا لم أستعمل السعة الرئيسة في هذه الصيغة، فإنَّ العدد المُركَّب لا يُعَدُّ مكتوبًا بالصورة المثلثية، عندئذٍ يتعيَّن عليَّ إضافة أو طرح $2\pi n$ لإيجاد السعة الرئيسة في الفترة $-\pi < \theta \leq \pi$.

مفهوم أساسي

الصورة المثلثية للعدد المُركَّب

إذا كان: $z = a + ib$، فإنَّ سعة العدد المُركَّب: θ، ومقياسه: $r = |z|$ يُستعمَلان لكتابته بالصورة المثلثية كما يأتي:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

أتعلَّم

عندما أكتب العدد المُركَّب بالصورة المثلثيـة، فإنَّني أتـرك الإجابة في صورة: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، من دون حساب قيمة $\sin\theta$ وقيمة $\cos\theta$.

مثال 7

أكتب العدد المُركَّب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1 $|z| = 4, \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$

الصورة المثلثية للعدد المُركَّب	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
بالتعويض: $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

إذن، الصورة المثلثية للعدد z هي: $z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

أتعلَّم

يُمكِن اسـتعمال الصورة المثلثية في تحديد سـعة ومقياس العـدد المُركَّب بسهولة.

2 $z = -2 - 5i$

الخطوة 1: أجد مقياس العدد z.

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

الخطوة 2: أجد سعة العدد z.

بما أنَّ العدد z يقع في الربع الثالث، فإنَّ سعته تساوي معكوس سعة مُرافِقه الذي يقع في الربع الثاني:

$\text{Arg}(z) = -(\text{Arg}(\bar{z}))$ سعة z تساوي معكوس سعة $\bar{z}$

$= -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ باستعمال المُتمِّمة لإيجاد سعة $\bar{z}$ الذي يقع في الربع الثاني

≈ -1.95 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $\text{Arg}(z) \approx -1.95$.

الخطوة 3: أكتب z بالصورة المثلثية.

$$z \approx \sqrt{29}\,(\cos(-1.95) + i \sin(-1.95))$$

أفكِّر

كيف يُمكِن تحديد الربع الذي يقع فيه العدد المُركَّب من دون تمثيله بيانيًّا في المستوى المُركَّب؟

أتحقَّق من فهمي

أكتب العدد المُركَّب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

a) $|z| = 4\sqrt{2}$, $\text{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$

b) $z = -4 - 4i$

c) $z = 2i$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1 $\sqrt{-19}$

2 $\sqrt{\frac{-12}{25}}$

3 $\sqrt{\frac{-9}{32}}$

4 $\sqrt{-53}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

5 i^{26}

6 i^{39}

7 $(i)(2i)(-7i)$

8 $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$

9 $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$

10 $2i \times \sqrt{-9}$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z بالصورة القياسية:

11 $\frac{2+\sqrt{-4}}{2}$

12 $\frac{8+\sqrt{-16}}{2}$

13 $\frac{10-\sqrt{-50}}{5}$

أُحدِّد الجزء الحقيقي والجزء التخيُّلي لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثم أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

14 $z=2+15i$

15 $z=10i$

16 $z=-16-2i$

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

17 $z=-15+3i$

18 $z=8-7i$

19 $z=12+17i$

20 $z=-3-25i$

21 $3i$

22 15

أجد $|z|$، و $\bar{z}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

23 $z=-5+5i$

24 $z=3+3i\sqrt{3}$

25 $z=6-8i$

أجد قِيَم كلٍّ من x، و y الحقيقية التي تجعل كُلًّا من المعادلات الآتية صحيحة:

26 $x^2-1+i(2y-5)=8+9i$

27 $2x+3y+i(x-2y)=8-3i$

28 $y-3+i(3x+2)=9+i(y-4)$

29 $i(2x-5y)+3x+5y=7+3i$

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

30 1

31 $3i$

32 $-5-5i$

33 $1-i\sqrt{3}$

34 $6\sqrt{3}+6i$

35 $3-4i$

36 $-12+5i$

37 $-58-93i$

38 $2i-4$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z في صورة مثلثية:

39) $|z| = 2, \text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$

40) $|z| = 3, \text{Arg } z = \frac{\pi}{3}$

41) $|z| = 7, \text{Arg } z = \frac{5\pi}{6}$

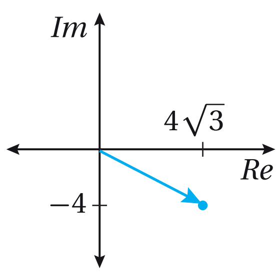
42) $|z| = 1, \text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$

43) $z = 6$

44) $z = 1 + i$

45) يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المُركَّب z_1 في المستوى المُركَّب. أجد العدد المُركَّب z_2 الذي يُحقِّق ما يأتي:

$$|z_2| = 40 \quad \text{and} \quad \text{Arg } z_2 = \text{Arg } \overline{z_1}$$



بافتراض أنَّ: $z = a + ib$، حيث: $|z| = 10\sqrt{2}$، وأنَّ: $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$:

46) أكتب العدد المُركَّب z بالصورة القياسية.

47) أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\overline{z}$.

إذا كان: $z = -8 + 8i$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

48) $|z|$

49) $\text{Arg}(z)$

50) $|\overline{z}|$

51) $\text{Arg}(\overline{z})$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $\text{Arg}(5 + 2i) = \alpha$، فأجد سعة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة α، مُبرِّرًا إجابتي:

52) $-5 - 2i$

53) $5 - 2i$

54) $-5 + 2i$

55) $2 + 5i$

56) $-2 + 5i$

57) تحدٍّ: إذا كان: $z = 5 + im$، حيث: $|z| = 6$، و $0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$، فأجد قيمة العدد الحقيقي m.

58) تبرير: إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$، فأجد جميع قِيَم k الحقيقية المُمكِنة، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: بافتراض أنَّ z_1 عدد مُركَّب، مقياسه: $4\sqrt{5}$، وسعته: $\theta = \tan^{-1}(2)$:

59) أكتب z_1 في الصورة القياسية.

60) إذا كان: $z_2 = 7 - 3i, z_3 = -5 + i$، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: z_1, z_2, z_3 في المستوى المُركَّب.

الدرس 2

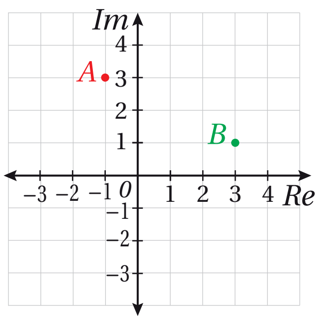
العمليات على الأعداد المُركَّبة
Operations with Complex Numbers

فكرة الدرس

- إجراء العمليات الحسابية الأربع (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة) على الأعداد المُركَّبة.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد مُركَّب، وإيجاد الجذور المُركَّبة لمعادلات كثيرات الحدود.

مسألة اليوم

مُعتمِدًا المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين A و B، أجد سعة ومقياس العدد المُركَّب AB.



جمع الأعداد المُركَّبة وطرحها

تُشبِه عمليتا جمع الأعداد المُركَّبة وطرحها عمليتي جمع كثيرات الحدود وطرحها، حيث تُجمَع الحدود المُتشابِهة بعضها مع بعض.

لجمع عددين مُركَّبين أو طرحهما، يتعيَّن جمع جُزأيهما الحقيقيين أو طرحهما، وجمع جُزأيهما التخيُّليين أو طرحهما.

مفهوم أساسي — **جمع الأعداد المُركَّبة وطرحها**

إذا كان: $z_1 = a + ib, z_2 = x + iy$ عددين مُركَّبين، فإنَّه يُمكِن إيجاد ناتج جمعهما أو طرحهما على النحو الآتي:

$$z_1 + z_2 = (a + x) + i\,(b + y)$$

$$z_1 - z_2 = (a - x) + i\,(b - y)$$

مثال 1

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

1 $(5 + 7i) + (-9 - 4i)$

$(5 + 7i)+(-9 - 4i) = 5 + 7i - 9 - 4i$ خاصية التوزيع

$= (5 - 9) + (7 - 4)i$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= -4 + 3i$ بالتبسيط

أتعلَّم

يُحقِّق جمع الأعداد المُركَّبة خاصية التبديل. فإذا كان z و w عددين مُركَّبين، فإنَّ:

$z + w = w + z$

2 $(8-5i)-(2-11i)$

$(8-5i)-(2-11i) = 8-5i-2+11i$ خاصية التوزيع

$= (8-2)+(-5+11)i$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= 6+6i$ بالتبسيط

أتعلَّم

النظير الجمعي للعدد المُركَّب: $z = a + bi$ هو: $-z = -a - bi$

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(7+8i)+(-9+14i)$

b) $(11+9i)-(4i-6i)$

ضرب الأعداد المُركَّبة

يُمكِن ضرب الأعداد المُركَّبة بطريقة مُشابِهة لعملية ضرب كثيرات الحدود، وذلك باستعمال خاصية التوزيع. وبعد إتمام عملية الضرب، يوضَع العدد -1 بدل i^2 أينما ظهرت.

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1 $5i(3-7i)$

$5i(3-7i) = 5i(3)+(5i)(-7i)$ خاصية التوزيع

$= 15i+(-35)i^2$ بالضرب

$= 15i+(-35)(-1)$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$= 35+15i$ بكتابة الناتج بالصورة القياسية

2 $(6+2i)(7-3i)$

$(6+2i)(7-3i) = 6(7)+6(-3i)+2i(7)+2i(-3i)$ خاصية التوزيع

$= 42-18i+14i-6i^2$ بالضرب

$= 42-18i+14i-6(-1)$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$= (42+6)+(-18+14)i$ بتجميع الحدود المُتشابِهة

$= 48-4i$ بالتبسيط

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ أحد العددين المُركَّبين المضروبين مُرافِق للآخر، وأنَّ ناتج الضرب عدد حقيقي.

3 $(5+4i)(5-4i)$

$(5+4i)(5-4i) = 5(5) + 5(-4i)+4i(5)+4i(-4i)$ خاصية التوزيع

$= 25 - 20i + 20i - 16i^2$ بالضرب

$= 25 - 20i + 20i + 16$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$= 41$ بتجميع الحدود المُتشابِهة

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

a) $-3i(4-5i)$

b) $(5+4i)(7-4i)$

c) $(3+6i)^2$

قسمة الأعداد المُركَّبة

لاحظْتُ في الفرع الأخير من المثال السابق أنَّ ناتج ضرب العدد المُركَّب: $5+4i$ في مُرافِقه يساوي عددًا حقيقيًّا. وهذا صحيح دائمًا لأيِّ عدد مُركَّب: $z=a+ib$، وناتج الضرب يكون دائمًا في صورة: a^2+b^2 أيْ إنَّ $z\bar{z}=|z|^2$.

يُمكِن استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مُركَّبين، وذلك بضرب كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه في مُرافِق المقسوم عليه، فيصبح المقسوم عليه عددًا حقيقيًّا.

أتذكَّر

مُرافِق العدد المُركَّب $z=a+ib$ هو العدد المُركَّب: $\bar{z}=a-ib$.

مثال 3

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1 $\dfrac{8-5i}{3-2i}$

$\dfrac{8-5i}{3-2i} = \dfrac{8-5i}{3-2i} \times \dfrac{3+2i}{3+2i}$ بالضرب في $\dfrac{3+2i}{3+2i}$

$= \dfrac{24+16i-15i-10i^2}{9+4}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \dfrac{24+16i-15i+10}{13}$ $i^2=-1$

$= \dfrac{34+i}{13}$ بجمع الحدود المُتشابِهة

$= \dfrac{34}{13} + \dfrac{1}{13}i$ بكتابة الناتج في صورة قياسية

2 $\dfrac{3+5i}{2i}$

$$\frac{3+5i}{2i} = \frac{3+5i}{2i} \times \frac{i}{i}$$ بالضرب في $\frac{i}{i}$

$$= \frac{3i+5i^2}{2i^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{3i-5}{-2}$$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$ بكتابة الناتج في صورة قياسية

أتعلَّم

يُمكِن أيضًا ضرب كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه في $\frac{-2i}{-2i}$، لكنَّ الأسهل هو الضرب في $\frac{i}{i}$.

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

a) $\dfrac{-4+3i}{1+i}$ b) $\dfrac{2-6i}{-3i}$ c) $\dfrac{7i}{4-4i}$

ضرب الأعداد المُركَّبة المكتوبة في صورة مثلثية وقسمتها

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، فإنَّ:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\big)$$

$$= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

مفهوم أساسي ضرب الأعداد المُركَّبة المكتوبة في صورة مثلثية

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، فإنَّ:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه إذا كان: $-\pi < \theta_1 + \theta_2 \le \pi$، فإنَّ:

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$

يُمكِن بطريقة مُشابِهة إثبات أنَّه إذا كان: $z_2 \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه إذا كان: $-\pi < \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$، فإنَّ:

$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$

مفهوم أساسي

قسمة الأعداد المُركَّبة المكتوبة في صورة مثلثية

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$، فإنَّ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

مثال 4

إذا كان: $z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$، وكان: $z_2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i \sin\frac{6\pi}{7}\right)$، فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

1 $z_1 z_2$

$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$ صيغة ضرب عددين مركبين

$= 2 \times 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right)\right)$ بالتعويض

$= 20\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i \sin\frac{4\pi}{7}\right)$ بالتبسيط

2 $\frac{z_1}{z_2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$ صيغة قسمة عددين مركبين

$= \frac{10}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right)\right)$ بالتعويض

$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) + i \sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$ بالتبسيط

$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7} + 2\pi\right) + i \sin\left(-\frac{8\pi}{7} + 2\pi\right)\right)$ بحساب السعة الرئيسة

$= 5\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i \sin\frac{6\pi}{7}\right)$ بالتبسيط

أتذكَّر

تقع السعة الرئيسة في الفترة $-\pi < \theta \leq \pi$، ويُمكِن تحديدها بطرح $2\pi n$، أو إضافته إلى الزاوية الناتجة من الجمع أو الطرح.

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

a) $6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أتذكَّر

θ	$0°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	0	-1

الجذر التربيعي للعدد المُركَّب

خلافًا للأعداد الحقيقية، يوجد لكل عدد مُركَّب جذران تربيعيان، وهما عددان مُركَّبان أيضًا. فإذا كان: $\sqrt{z}=x+iy$، فإنَّ: $z=(x+iy)^2$. ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد قيمة كلٍّ من x، و y الحقيقيتين بتربيع الطرفين، ثم المقارنة بين الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيُّلية في طرفي المعادلة.

مثال 5

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z=21-20i$.

أفترض أنَّ: $\sqrt{z}=x+iy$، حيث x، و y عددان حقيقيان:

$\sqrt{z}=x+iy$ بالفرض

$z=(x+iy)^2$ بتربيع الطرفين

$21-20i=(x+iy)^2$ بتعويض قيمة z

$21-20i=x^2+2ixy+i^2y^2$ بفكِّ القوسين

$21-20i=x^2-y^2+2ixy$ بتعويض $i^2=-1$

$21=x^2-y^2$ بمساواة الجزأين الحقيقيين

$-20=2xy$ بمساواة الجزأين التخيُّليين

إذن، ينتج النظام الآتي الذي يحوي معادلتين بمُتغيِّرين، ويُمكِن حلُّه بطريقة التعويض:

أتذكَّر

يتساوى العددان المُركَّبان: $a+bi$, $c+di$ إذا وفقط إذا كان: $a=c$, $b=d$.

المعادلة الأولى	$x^2 - y^2 = 21$
المعادلة الثانية	$2xy = -20$
بحلِّ المعادلة الثانية لـ y	$y = -\frac{10}{x}$
بتعويض $y = -\frac{10}{x}$ في المعادلة الأولى	$x^2 - \left(-\frac{10}{x}\right)^2 = 21$
بضرب طرفي المعادلة الناتجة في x^2	$x^4 - 100 = 21x^2$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x^4 - 21x^2 - 100 = 0$
بالتحليل	$(x^2 - 25)(x^2 + 4) = 0$
بحلِّ المعادلتين	$x^2 = 25 \quad \text{or} \quad x^2 = -4$

بما أنَّ x عدد حقيقي، فإنَّ: $x = \pm 5$.

وبتعويض قيمتي x في المعادلة: $y = -\frac{10}{x}$، فإنَّ الناتج:

$$x = 5 \quad \rightarrow \quad y = -2$$

$$x = -5 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

إذن، الجذران التربيعيان للعدد المُركَّب: $21 - 20i$ هما: $5 - 2i$، و $-5 + 2i$.

أتعلَّم

يُمكِن أيضًا حلُّ المعادلة الثانية لـ x.

أتعلَّم

يُمكِن التحقُّق من صحة الحلِّ بتربيع كلٍّ من الجذرين التربيعيين الناتجين، ثم مقارنة الناتجين بالعدد المُركَّب الأصلي.

أتحقَّق من فهمي

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

a) $-5 - 12i$ b) $-9i$ c) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

الجذور المُركَّبة لمعادلات كثيرات الحدود

تعلَّمْتُ سابقًا حلَّ بعض المعادلات التربيعية في صورة: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث: a, b, c أعداد حقيقية، باستعمال القانون العام الذي صيغته:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

استعملْتُ أيضًا المُميِّز ($\triangle = b^2 - 4ac$) لتحديد إذا كان للمعادلة التربيعية جذران حقيقيان أم لا، وإذا كان الجذران متساويين أم لا كما يبين الجدول الآتي:

جذرا المعادلة التربيعية	$\triangle = b^2 - 4ac$
حقيقيان مختلفان	$\triangle > 0$
حقيقيان متساويان	$\triangle = 0$
لا توجد جذور حقيقية	$\triangle < 0$

أُلاحِظ أنَّه إذا كان المُميِّز سالبًا، فإنَّه ينتج عددان مُركَّبان مُترافِقان من تعويض القِيَم: a, b, c في القانون العام.

ولكنْ، وبعد تعرُّف الأعداد المُركَّبة في هذه الوحدة، يُمكِن القول إنَّه إذا كان المُميِّز سالبًا، فإنَّ للمعادلة التربيعية جذرين مُركَّبين. ومن ثَمَّ، يُمكِن تعديل الجدول السابق على النحو الآتي:

جذرا المعادلة التربيعية	$\triangle = b^2 - 4ac$
حقيقيان مختلفان	$\triangle > 0$
حقيقيان متساويان	$\triangle = 0$
مُركَّبان مُترافِقان في صورة: $x \pm iy, y \neq 0$	$\triangle < 0$

يتبيَّن ممّا سبق أنَّه إذا كان: $x + iy$ جذرًا لمعادلة تربيعية ذات عوامل حقيقية، فإنَّ مُرافِقه: $x - iy$ هو أيضًا جذر للمعادلة نفسها. ويُمكِن تعميم هذا الاستنتاج ليشمل أيًّا من معادلات كثيرات الحدود.

إذا كانت درجة معادلة كثير حدود أكبر من الصفر، فقد لا توجد لها جذور حقيقية، وإنَّما توجد لها جذور مُركَّبة.

أتعلَّم

درجة معادلة كثير الحدود هي أعلى أُسٍّ للمُتغيِّر فيها.

بما أنَّ الأعداد الحقيقية والأعداد التخيُّلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المُركَّبة، فإنَّ أي معادلة كثير حدود، درجتها أكبر من الصفر، لها – على الأقل – جذر مُركَّب واحد، في ما يُعرَف باسم **النظرية الأساسية في الجبر**.

نظرية **النظرية الأساسية في الجبر**

يوجد جذر مُركَّب واحد – على الأقل – لأيِّ معادلة كثير حدود، درجتها أكبر من الصفر.

صحيح أنَّ النظرية الأساسية في الجبر تُؤكِّد وجود صفر مُركَّب واحد –على الأقل– لأيِّ معادلة كثير حدود، درجتها أكبر من الصفر، لكنَّها لا تساعد على إيجاد هذا الصفر.

فمثلًا، إذا كانت $p(x) = 0$ معادلة كثير حدود من الدرجة $n \geq 1$، فإنَّ النظرية الأساسية في الجبر تضمن وجود جذر مُركَّب واحد –على الأقل– للمعادلة، وليكن: q_1.

ثم إنَّ **نظرية العوامل** التي تعلمتها سابقًا تضمن إمكانية تحليل $p(x)$ في صورة: $p(x) = (x - z_1)\, q_1(x)$، حيث $q_1(x)$ كثير الحدود درجته $n-1$.

فإذا كانت درجة $q_1(x)$ لا تساوي صفرًا، فإنَّه يُمكِن تطبيق النظرية الأساسية في الجبر عليه لإثبات وجود جذر مُركَّب آخر لكثير الحدود، وهكذا حتى إثبات وجود n من الجذور المُركَّبة لـ $p(x)$.

أتعلَّم

$q_1(x)$ هو ناتج قسمة $p(x)$ على $(x - z_1)$.

نظرية — التحليل المُركَّب

لأيِّ معادلة كثير حدود من الدرجة n، حيث $n \neq 0$، يوجد n من الجذور المُركَّبة، بما في ذلك الجذور المُكرَّرة.

$z^6 + 2z^5 - z + 7 = 0$	$5z^2 - z^3 + z - 19 = 0$	$z^4 - 4z^2 + z^3 = 0$
6 جذور.	3 جذور.	4 جذور.

أتعلَّم

للمعادلة: $x^2 = 0$ جذران، هما: $x = 0, x = 0$؛ أيْ إنَّ لها جذرًا مُكرَّرًا مرَّتين.

تُستعمَل نظرية التحليل المُركَّب، وحقيقة أنَّ الجذور المُركَّبة تأتي في صورة أزواج من الأعداد المُركَّبة المُترافِقة، لتحديد أنواع الجذور المُمكِنة لمعادلة كثير الحدود كما في الجدول الآتي:

أنواع الجذور المُمكِنة	عدد الجذور	درجة معادلة كثير الحدود
جذر حقيقي واحد	1	1
جذران حقيقيان، أو جذران مُركَّبان مُترافِقان	2	2
ثلاثة جذور حقيقية، أو جذر حقيقي واحد وجذران مُركَّبان مُترافِقان	3	3
أربعة جذور حقيقية، أو جذران حقيقيان وجذران مُركَّبان مُترافِقان، أو أربعة جذور مُركَّبة (زوجان من الجذور المُركَّبة المُترافِقة).	4	4
...	...	...

يُمكِن اســتعمال نظريتي الباقي والعوامل لتحليل كثير الحــدود، وحلِّ معادلته كما في المثال الآتي.

مثال 6

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 + 4z^2 + z = 26$.

أجعل الطرف الأيمن صفرًا بطرح 26 من طرفي المعادلة:

$$z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$$

بحسب نظرية الأصفار النسبية، إذا كان لهذه المعادلة جذر نسبي، فإنَّه يكون أحد عوامل الحدِّ الثابت (-26)، وهي: $\pm 1, \pm 2, \pm 13$.

بالتعويض، أجد أنَّ العدد 2 يُحقِّق هذه المعادلة:

$$2^3 + 4(2^2) + 2 - 26 = 0$$

إذن، $z - 2$ هو أحد عوامل كثير الحدود.

أَقسِم $z^3 + 4z^2 + z - 26$ على $z - 2$ لإيجاد العامل التربيعي:

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 + 6z + 13 \\
\hline
z - 2 & z^3 + 4z^2 + z - 26 \\
 & \underline{z^3 - 2z^2} \\
 & 6z^2 + z \\
 & \underline{6z^2 - 12z} \\
 & 13z - 26 \\
 & \underline{13z - 26} \\
 & 0
\end{array}$$

إذن، يُمكِن كتابة المعادلة في صورة حاصل ضرب المعامل الخطي والمعامل التربيعي كما يأتي:

$$z^3 + 4z^2 + z - 26 = (z-2)(z^2 + 6z + 13) = 0$$

باستعمال خاصية الضرب الصفري، فإنَّ:

$$z^2 + 6z + 13 = 0 \quad \text{or} \quad z - 2 = 0$$

باستعمال القانون العام، فإنَّ جذور المعادلة التربيعية هي:

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = -3 \pm 2i$$

إذن، لهذه المعادلة 3 جذور، هي: $2, -3 + 2i, -3 - 2i$.

أتحقَّق من فهمي

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 - 8z^2 + 9z - 72 = 0$.

أتعلَّم

تُستعمَل هذه الطريقة أحيانًا لإيجاد قِيَم معاملات مجهولة في المعادلة.

إذا عُلِم أحد جذور المعادلة، فإنَّه يُمكِن السير بخطوات عكسية (بَدْءًا بالجذر المعلوم) لإيجاد المعادلة الأصلية، أو أحد عواملها.

مثال 7

إذا كان: $3 + 9i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

بما أنَّ: $3 + 9i$ هو أحد جذور المعادلة، فإنَّ مُرافِق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

أتَّبِع خطوات عكسية لإيجاد المعادلة التربيعية:

$x = 3 \pm 9i$ $3 \pm 9i$ هما جذران للمعادلة

$x - 3 = \pm 9i$ بطرح 3 من طرفي المعادلة

$(x-3)^2 = -81$ بتربيع الطرفين

$x^2 - 6x + 90 = 0$ بالتبسيط

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة، أستنتج أنَّ:

$a = -6, b = 90$.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $2 - i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1. $(7+2i) + (3-11i)$
2. $(5-9i) - (-4+7i)$
3. $(4-3i)(1+3i)$
4. $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$
5. $(9-2i)^2$
6. $\dfrac{48+19i}{5-4i}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

7) $6(\cos \pi + i \sin \pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

8) $\left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10}\right) \div \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$

9) $12\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \div 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

10) $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

أجد القِيَم الحقيقية للثابتين a و b في كلٍّ ممّا يأتي:

11) $(a + 6i) + (7 - ib) = -2 + 5i$

12) $(11 - ia) - (b - 9i) = 7 - 6i$

13) $(a + ib)(2 - i) = 5 + 5i$

14) $\frac{a - 6i}{1 - 2i} = b + 4i$

15) أَضرِب العدد المُركَّب $8\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ في مُرافِقه.

إذا كان: $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 21 - i, z_3 = 17(1 - i)$، فأجد المقياس والسعة لكلٍّ ممّا يأتي:

16) $\frac{z_2}{z_1}$

17) $\frac{1}{z_3}$

18) $\frac{z_3}{z_2}$

إذا كان: $z = 8\left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19) أُمثِّل العدد z بيانيًّا في المستوى المُركَّب.

20) أجد الجذرين التربيعيين للعدد z.

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

21) $3 - 4i$

22) $-15 + 8i$

23) $5 - 12i$

24) $-7 - 24i$

25) إذا كان: $(a-3i)$، و $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $55 - 48i$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية: a، و b، و c.

إذا كان: $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right), w = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

26) zw

27) $\frac{z}{w}$

28) $\frac{w}{z}$

29) $\frac{1}{z}$

30) w^2

31) $5iz$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

32 $z^2 + 104 = 20z$

33 $z^2 + 18z + 202 = 0$

34 $9z^2 + 68 = 0$

35 $z^3 - 8z^2 + 9z - 72 = 0$

36 $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

37 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المُركَّبان المعطيان في كلٍّ ممّا يأتي:

38 $2 \pm 5i$

39 $7 \pm 4i$

40 $-8 \pm 20i$

41 $-3 \pm 2i$

أحُلُّ المعادلة المعطى أحد جذورها في كلٍّ ممّا يأتي:

42 $x^3 + x^2 + 15x = 225, 5$

43 $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0, -7$

44 $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37), 6 - i$

45 $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0, -2 + i$

إذا كان: $(4 + 11i)$ هو أحد جذري المعادلة: $z^2 - 8z + k = 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

46 أجد الجذر الآخر للمعادلة.

47 أجد قيمة الثابت k.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا، مُبرِّرًا إجابتي:

48 أجد ناتج: $(p + iq)^2$، حيث p و q عددان حقيقيان.

49 إذا كان: $(p + iq)^2 = 45 + im$ ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان، و $p > q$، فأجد ثلاث قِيَم مُمكِنة للعدد الحقيقي m.

50 أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $45 - 108i$.

51 برهان: أُثبِت أنَّ: $z\bar{z} = |z\bar{z}|$ لأيِّ عدد مُركَّب z.

52 برهان: إذا كان z عددًا مُركَّبًا، حيث: $|z| = 5\sqrt{5}$, $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$، وكان: $\frac{z}{3 + 4i} = p + iq$ ، فأُثبِت أنَّ: $p + q = 1$.

53 تحدٍّ: العدد المُركَّب: $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة: $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$. أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثم أحُلُّ المعادلة الآتية: $x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$.

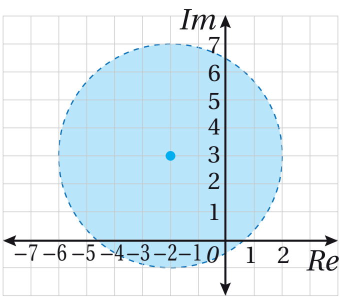
الدرس 3

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب
Locus in the Complex Plane

فكرة الدرس تعرُّف المحل الهندسي في المستوى المُركَّب، ورسمه، وتمثيل منطقة حلِّ متباينات على هذا المستوى.

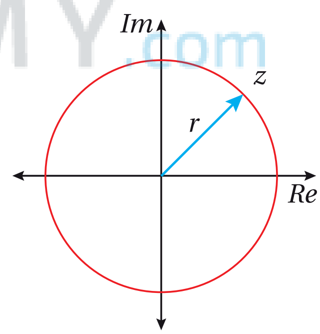
المصطلحات المحل الهندسي، المُنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة، الشعاع.

مسألة اليوم أكتب متباينة بدلالة z، تُحقِّقها جميع الأعداد المُركَّبة التي تقع في المنطقة المُظلَّلة المُبيَّنة في المستوى المُركَّب في الشكل المجاور.



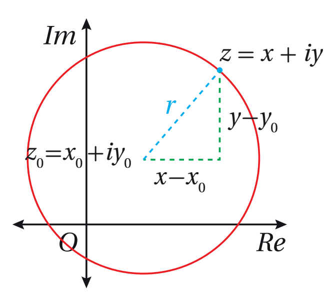
الدائرة

المحل الهندسي (locus) هو مجموعة النقاط في المستوى المُركَّب التي يُمكِن لنقطة مُتحرِّكة ضمن شرط أو شروط (معادلة، أو متباينة) أنْ تكون منها. فمثلًا، الدائرة هي محل هندسي لنقطة تتحرَّك في مسار يبعد مسافة مُحدَّدة عن نقطة ثابتة هي مركز الدائرة.



في المستوى المُركَّب، تبعد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلة: $|z| = r$ مسافة r وحدة عن نقطة الأصل؛ لأنَّ مقياس كلٍّ منها هو r وحدة. ومن ثَمَّ، فإنَّ المحل الهندسي الذي تُمثِّله هذه المعادلة هو دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قُطْرها r كما في الشكل المجاور.

إذا كان مركز دائرة مرسومة في المستوى المُركَّب هو العدد z_0 (ليس نقطة الأصل)، وطول نصف قُطْرها r وحدة كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِن استعمال نظرية فيثاغورس لكتابة معادلة تُمثِّل هذا المحل الهندسي على النحو الآتي:



$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$ نظرية فيثاغورس

أُلاحِظ أنَّ طرف المعادلة الأيسر يساوي $|z - z_0|$، حيث: $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$.

$$|z - z_0| = r$$ بتعويض $|z - z_0|$ في المعادلة

إذن، المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z - z_0| = r$ هو دائرة مركزها z_0، وطول نصف قُطْرها r.

مفهوم أساسي

معادلة الدائرة في المستوى المُركَّب

المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-(a+ib)| = r$ هو دائرة مركزها (a, b)، وطول نصف قُطْرها r وحدة.

مثال 1

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-2+8i| = 3$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الخطوة 1: أجد المحل الهندسي.

عندما أكتب المعادلة في صورة: $|z-(a+ib)| = r$، فإنَّ: $|z-(2-8i)| = 3$، وهذه معادلة دائرة، مركزها $(2, -8)$، وطول نصف قُطْرها 3 وحدات.

الخطوة 2: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أكتب هذه المعادلة بالصيغة الديكارتية على النحو الآتي:

المعادلة المعطاة	$\lvert z-2+8i\rvert = 3$
باستبدال z بالصيغة $x+iy$	$\lvert x+iy-2+8i\rvert = 3$
بتجميع الحدود المُتشابِهة	$\lvert (x-2)+(y+8)i\rvert = 3$
صيغة مقياس العدد المُركَّب	$\sqrt{(x-2)^2+(y+8)^2} = 3$
بتربيع الطرفين	$(x-2)^2+(y+8)^2 = 9$

أُلاحِظ أنَّ المعادلة: $(x-2)^2+(y+8)^2 = 9$ هي أيضًا معادلة دائرة، مركزها $(2, -8)$، وطول نصف قُطْرها 3 وحدات.

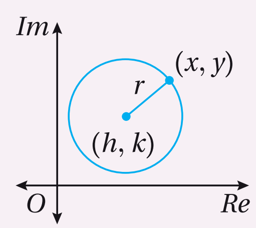
أتحقَّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z+5-4i| = 7$ ، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أتذكَّر

الصيغة القياسية (الديكارتية) لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، ونصف قُطْرها r، هي:

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

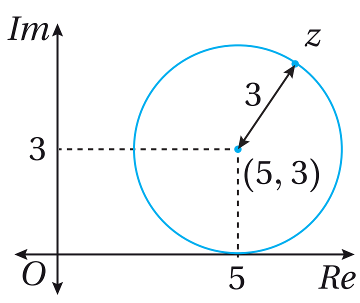


يُمكِن استعمال بعض الخصائص الهندسية للدائرة ومماسّاتها في إيجاد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق معادلة دائرة معطاة.

مثال 2

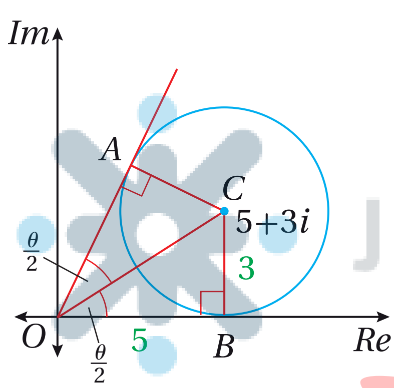
إذا كانت: $|z - 5 - 3i| = 3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.



عندمــا أكتب المعادلة في صورة: $|z-(a+bi)| = r$، فــإنَّ: $|z-(5+3i)| = 3$. وهذه معادلة دائرة، مركزها $(5, 3)$، وطــول نصــف قُطْرها 3 وحــدات، ويُمكِنني تمثيلها في المستوى المُركَّب كما في الشكل المجاور.

2 أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة في الفترة $(-\pi, \pi)$.



أكبر سعة للعدد المُركَّب z تساوي قياس الزاوية $\angle BOA$ المحصــورة بيــن مماس الدائرة $\overline{OA}$ والمحــور الحقيقــي الموجب كما في الشــكل المجاور.

يُمكِننــي إيجاد $m\angle BOA$ باســتعمال خصائص المثلثات على النحو الآتي:

بمــا أنَّ ΔOBC و ΔOAC متطابقان فــي ثلاثة أضلاع، فإنَّ $\overline{OC}$ يُنصِّــف $\angle BOA$. وبما أنَّ المماس $\overline{OB}$ عمودي على نصف القُطْر $\overline{BC}$، فإنَّ ΔOBC قائم الزاوية في B.

وبذلك، فإنَّ:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{5}$$ تعريف ظلِّ الزاوية $\frac{\theta}{2}$

$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$ معكوس ظلِّ الزاوية $\frac{\theta}{2}$

$$\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$ بضرب طرفي المعادلة في 2

$$\approx 1.08$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، القيمة العظمى لســعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّــق المعادلة في الفترة $(-\pi, \pi)$ هي: 1.08 rad تقريبًا.

أُفكِّر

كيــف يُمكِن إثبــات أنَّ $\Delta OBC \cong \Delta OAC$؟

أتذكَّر

يكــون ممــاس الدائرة عموديًّا على نصف القُطْر من نقطة التماس.

أتحقَّق من فهمي

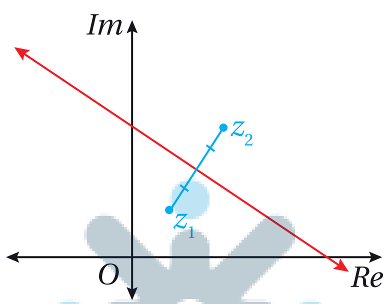
إذا كانت: $|z+4-4\sqrt{3}\,i|=4$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

a) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.

b) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة في الفترة $(-\pi, \pi)$.

المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة

يُطلَق على المحل الهندسي للنقطة z التي تتحرَّك في المستوى المُركَّب، وتظلُّ على بُعْدين متساويين من النقطتين الثابتتين: z_1، وz_2، اسم **المُنصِّف العمودي** (perpendicular bisector) للقطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين الثابتتين كما في الشكل المجاور.



تُمثِّل $|z-z_1|$ المسافة بين z وz_1، وتُمثِّل $|z-z_2|$ المسافة بين z وz_2. وبما أنَّ هاتين المسافتين متساويتان بصرف النظر عن موقع z، فإنَّه يُعبَّر عن ذلك بالمعادلة الآتية:

$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

مفهوم أساسي — **المُنصِّف العمودي**

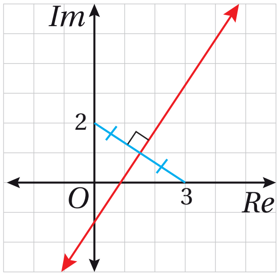
المحل الهندسي في المستوى المُركَّب للنقطة z التي تُحقِّق المعادلة: $|z-(a+ib)|=|z-(c+id)|$ هو المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: (a, b)، و(c, d).

مثال 3

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-3|=|z-2i|$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الخطوة 1: أجد المحل الهندسي.

عندما أكتب المعادلة في صورة: $|z-(a+ib)|=|z-(c+id)|$، فإنَّ: $|z-(3+0i)|=|z-(0+2i)|$. وهذه معادلة المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: $(3, 0)$، و$(0, 2)$، ويظهر باللون الأحمر في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

لكتابة المعادلة بالصيغة الديكارتية، أستبدل z بالصيغة $x + iy$، ثم أجد مقياس العدد المُركَّب، ثم أُبسِّط:

المعادلة المعطاة	$\lvert z-3\rvert = \lvert z-2i\rvert$
باستبدال z بالصيغة $x+iy$	$\lvert x+iy-3\rvert = \lvert x+iy-2i\rvert$
بتجميع الحدود المُتشابِهة	$\lvert (x-3)+iy\rvert = \lvert x+(y-2)i\rvert$
صيغة مقياس العدد المُركَّب	$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$
بتربيع الطرفين، وفكِّ الأقواس	$x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2-4y+4$
بطرح x^2، و y^2 من الطرفين	$-6x+9 = -4y+4$
بكتابة المعادلة في صورة: $Ax+By+C=0$	$6x-4y-5=0$

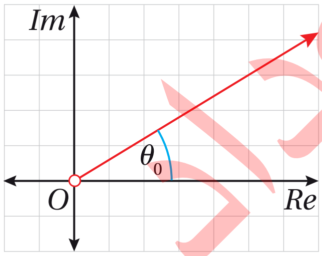
إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x-4y-5=0$

أتحقَّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $\lvert z-5i\rvert = \lvert z+1\rvert$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (0, 0)

إنَّ سعة جميع الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلة: $\text{Arg}(z) = \theta_0$ هي θ_0؛ لذا فإنَّها تقع على **شعاع** (ray) يصنع زاوية قياسها θ_0 راديان مع المحور الحقيقي الموجب، ويبدأ (الشعاع) بنقطة الأصل، ويمتدُّ إلى ما لا نهاية في أحد اتجاهيه كما في الشكل المجاور.



ومن ثَمَّ، فإنَّ المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $\text{Arg}(z) = \theta_0$ هو شعاع يبدأ بنقطة الأصل، وليس له نهاية.

بما أنَّ سعة العدد المُركَّب: $z = 0$ غير مُعرَّفة، فإنَّ الشعاع لا يحوي نقطة الأصل، ويُعبَّر عن ذلك بدائرة مُفرَغة في بداية الشعاع.

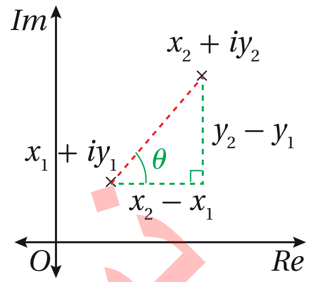
أتعلَّم

تكون سعة الأعداد المُركَّبة الواقعة على الطرف الآخر من المستقيم: $\theta_0 - \pi$؛ لذا استُثنِيت هذه الأعداد من المحل الهندسي للمعادلة: $\text{Arg}(z) = \theta_0$؛ فهي لا تُحقِّق المعادلة.

الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a, b)

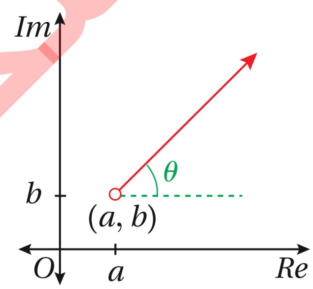
إذا كان: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مُركَّبين، فإنَّ: $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i\,(y_2 - y_1)$.

يُمكِن حساب سعة العدد المُركَّب: $z_2 - z_1$ المُوضَّح في الشكل المجاور على النحو الآتي:



$$\operatorname{Arg}(z_2 - z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \theta$$

أُلاحِظ من الشكل المجاور أنَّ سعة العدد المُركَّب: $(z_2 - z_1)$ يساوي قياس الزاوية θ التي يصنعها المستقيم الواصل بين العددين: z_1، وz_2 مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



ومن ثَمَّ، فإنَّ الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة: $\operatorname{Arg}(z-(a+ib)) = \theta$ تقع جميعها على الشعاع الذي نقطة بدايته (a, b)، وهو يصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور. وبما أنَّ ناتج تعويض نقطة بداية الشعاع في المعادلة هو $\operatorname{Arg}(0)$ (قيمة غير مُعرَّفة)، فإنَّ نقطة بداية الشعاع تُستثنى، ويُعبَّر عنها بدائرة مُفرَغة.

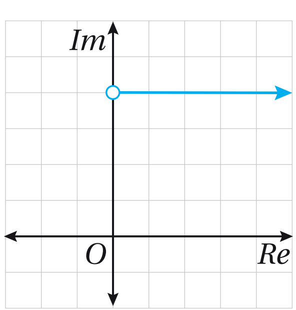
مفهوم أساسي — **الشعاع**

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب الذي تُمثِّله المعادلة: $\operatorname{Arg}(z-(a+ib)) = \theta$ هو شعاع يبدأ بالنقطة (a, b)، ويصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

مثال 4

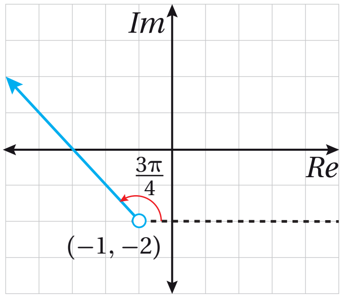
أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أرسمه في المستوى المُركَّب:

1 $\operatorname{Arg}(z - 4i) = 0$



تُمثِّل هذه المعادلة شعاعًا يبدأ بالنقطة $(0, 4)$، ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها 0 مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي؛ أيْ إنَّه يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.

2 $\text{Arg}(z+1+2i)=\dfrac{3\pi}{4}$



عندما أكتب المعادلة في صورة:

$\text{Arg}(z-(a+bi))=\theta$، فإنَّ:

$\text{Arg}(z-(-1-2i))=\dfrac{3\pi}{4}$. وهذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(-1,-2)$، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\dfrac{3\pi}{4}$ مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.

أتحقَّق من فهمي

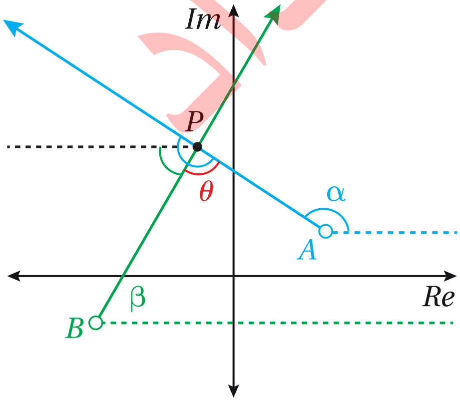
أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أرسمه في المستوى المُركَّب:

a) $\text{Arg}(z)=\dfrac{\pi}{3}$

b) $\text{Arg}(z-5)=-\dfrac{2\pi}{3}$

أقواس الدائرة

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّ كُلًّا من المعادلة: $\text{Arg}(z-A)=\alpha$، والمعادلة: $\text{Arg}(w-B)=\beta$ تُمثِّل شعاعًا في المستوى المُركَّب، يبدأ بنقطة ثابتة (A، أو B) على هذا المستوى، ويصنع زاوية قياسها α أو β مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي.



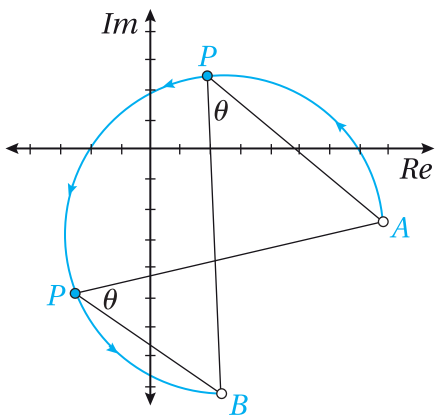
أفترض أنَّ الشعاعين يتقاطعان في النقطة P، وأنَّ زاوية تقاطعهما هي θ كما في الشكل المجاور.

أفترض أيضًا أنَّ النقطة P تتحرَّك، وأنَّ زاوية تقاطع الشعاعين (θ) تظلُّ ثابتة، فماذا يُمثِّل المحل الهندسي الذي تتحرَّك عليه هذه النقطة؟

أتذكَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الزاوية المركزية هي الزاوية التي يكون رأسها في مركز الدائرة، ويُمثِّل ضلعاها نصفي قُطْرين للدائرة. أمّا الزاوية المحيطية فهي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة، ويكون ضلعاها وترين في الدائرة.

بناءً على نظريات الدائرة التي تعلَّمْتُها سابقًا، أستنتج أنَّ رأس الزاوية APB يتحرَّك على قوس دائرة؛ لأنَّ قياسها يظلُّ ثابتًا مهما تغيَّر موقعها. ومن ثَمَّ، فهي زاوية محيطية، رأسها يتحرَّك بين النقطتين: A، و B على الدائرة، فينتج من حركته محل هندسي، هو قوس من دائرة كما في الشكل المجاور. وبما أنَّه ينتج قيمة غير مُعرَّفة من تعويض نقطة بداية القوس ونقطة نهايته، فإنَّ هاتين النقطتين تُستثنيان، ويُعبَّر عنهما بدائرة مُفرَغة.



أُلاحِظ من الشكل في الصفحة السابقة أنَّ $\theta = \alpha - \beta$. إذن، أجد معادلة المحل الهندسي على النحو الآتي:

$$\theta = \text{Arg}(z-A) - \text{Arg}(z-B)$$ بالتعويض: $\text{Arg}(z-A) = \alpha, \text{Arg}(z-B) = \beta$

$$= \text{Arg}\left(\frac{z-A}{z-B}\right)$$ سعة ناتج قسمة عددين مُركَّبين تساوي فرق سعتيهما

أتعلَّم

من الضروري ملاحظة نقطة بداية المنحنى ونقطة نهايته؛ لأنَّ الزاوية θ هي مَقيسة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

أقواس الدائرة

مفهوم أساسي

المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $\text{Arg}\left(\frac{z-(a+ib)}{z-(c+id)}\right) = \theta$ هو قوس من دائرة يبدأ بالنقطة (a, b)، وينتهي بالنقطة (c, d). ويُمكِن تصنيف هذا القوس تبعًا لقياس الزاوية θ إلى ما يأتي:

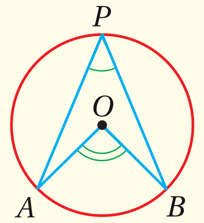
- إذا كانت $\theta < \frac{\pi}{2}$، فإنَّ المحل الهندسي هو القوس الأكبر من الدائرة.
- إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$، فإنَّ المحل الهندسي هو نصف دائرة.
- إذا كانت $\theta > \frac{\pi}{2}$، فإنَّ المحل الهندسي هو القوس الأصغر من الدائرة.

تعلَّمْتُ سابقًا بعض النظريات المُتعلِّقة بالزوايا المحيطية والزوايا المركزية في الدائرة، ويُمكِنني توظيف هذه النظريات في إيجاد المحل الهندسي للمعادلات التي صورتها:

$$\text{Arg}\left(\frac{z-(a+ib)}{z-(c+id)}\right) = \theta$$

مراجعة المفهوم

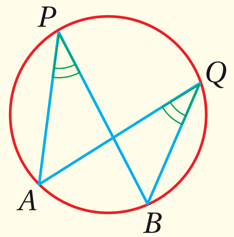
- قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه.



مثال:

$$m\angle AOB = 2m\angle APB$$

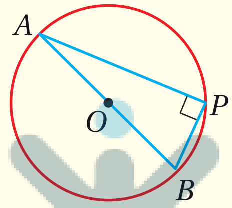
- جميع الزوايا المحيطية المرسومة على قوس واحد في دائرة لها القياس نفسه.



مثال:

$$m\angle APB = m\angle AQB$$

- الزاوية المحيطية المرسومة على قُطْر دائرة هي زاوية قائمة.

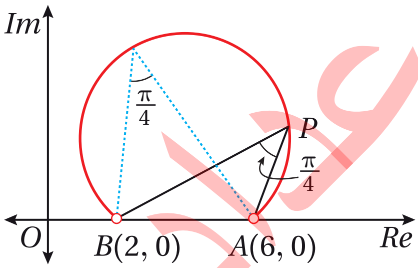


مثال:

$$m\angle APB = \frac{\pi}{2}$$

مثال 5

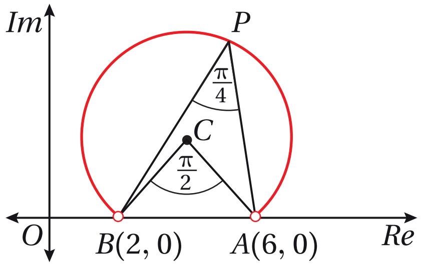
أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $\mathbf{Arg}\left(\frac{z-6}{z-2}\right) = \frac{\pi}{4}$.



تُمثِّل المعادلة قوسًا يبدأ بالنقطة $A(6, 0)$، وينتهي بالنقطة $B(2, 0)$.

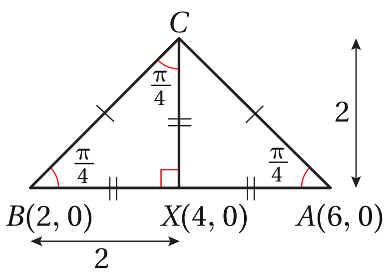
وبما أنَّ $m\angle APB = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$، فإنَّ المحل الهندسي هو القوس الأكبر من الدائرة كما في الشكل المجاور.

لإيجاد مركز الدائرة التي يتبع لها القوس، وطول نصف قُطْرها، أرسم الزاوية المركزية ACB التي تشترك مع الزاوية المحيطة APB في القوس نفسه.



وبحسب نظريات الدائرة، فإنَّ: $m\angle ACB = \frac{\pi}{2}$

بما أنَّ $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ نصفا قُطرين، فإنَّ $AC = BC$. ومن ثَمَّ، فإنَّ ΔABC متطابق الضلعين. وبذلك، فإنَّ العمود $\overline{XC}$ يُنصِّف القاعدة، ويُنصِّف زاوية الرأس كما في الشكل المجاور. وهذا يعني أنَّ إحداثيي النقطة X هما $(4, 0)$. إذن، الإحداثي x للنقطة C (تُمثِّل مركز الدائرة) هو 4



وبما أنَّ $m\angle XCB = \frac{\pi}{4}$، فإنَّ $m\angle XBC = \frac{\pi}{4}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ ΔBXC متطابق الضلعين. وبذلك، فإنَّ $BX = XC = 2$.

إذن، الإحداثي y للنقطة C هو 2

لإيجاد طول نصف قُطْر الدائرة، أستعمل نظرية فيثاغورس على النحو الآتي:

$$r = BC = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8}$$ نظرية فيثاغورس

إذن، المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-6}{z-2}\right) = \frac{\pi}{4}$ هو القوس الأكبر من دائرة مركزها $(4, 2)$، وطول نصف قُطْرها $\sqrt{8}$.

أتحقَّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-2i}{z+6}\right) = \frac{\pi}{2}$.

تمثيل المتباينات في المستوى المُركَّب

يُعَدُّ حلُّ المتباينة في المستوى المُركَّب محلًّا هندسيًّا يُمكِن تمثيله بيانيًّا بصورة مُشابِهة لتمثيل حلِّ المتباينة في المستوى الإحداثي.

بدايةً، يُرسَم منحنى المعادلة المرتبطة بالمتباينة بعد استعمال رمز المساواة $(=)$ بدلًا من رمز المتباينة $(<, >, \leq, \geq)$، حيث تُمثِّل المعادلة الناتجة منحنًى يُسمّى **المنحنى الحدودي**؛ وهو منحنى يُقسِّم المستوى المُركَّب إلى جزأين، أحدهما يحوي جميع الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المتباينة.

قد يكون المنحنى الحدودي جزءًا من المحل الهندسي إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $\geq$، أو الرمز $\leq$؛ فيُرسَم المنحنى الحدودي متصلًا. وقد لا يكون المنحنى الحدودي جزءًا من المحل الهندسي إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $<$، أو الرمز $>$؛ فيُرسَم المنحنى الحدودي مُتقطِّعًا.

أتعلَّم

قد يكون المنحنى الحدودي مستقيمًا، أو شعاعًا، أو دائرةً، أو أيَّ منحنى آخر.

مثال 6

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق كل متباينة ممّا يأتي:

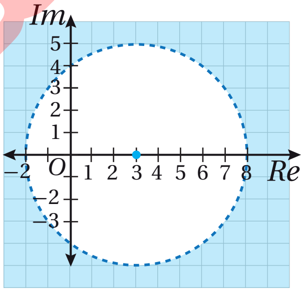
1) $|z-3| > 5$

الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي.

يُمثِّـل منحنى المعادلة: $|z-3| = 5$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z-3| > 5$ ؛ وهو دائرة مركزها $(3, 0)$، وطول نصف قُطْرها 5 وحدات. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي مُتقطِّعًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تبعد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المتباينة: $|z-3| > 5$ مسافةً تزيد على 5 وحدات عن مركز الدائرة. إذن، منطقة الحلول المُمكِنة للمتباينة تقع خارج محيط الدائرة: $|z-3| = 5$ كما في الشكل المجاور.



2) $|z-7| \leq |z+3i|$

الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي.

يُمثِّل منحنى المعادلة: $|z-7| = |z+3i|$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z-7| \leq |z+3i|$؛ وهو المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(7, 0)$ و $(0, -3)$. وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تتحقَّق المتباينة: $|z-7| \leq |z+3i|$ في إحدى جهتي المنحنى الحدودي، ويُمكِن تحديدها باختبار عدد مُركَّب عشوائيًّا في المتباينة.

أختار العدد: $z = 0 + 0i$ الذي تُمثِّله نقطة الأصل:

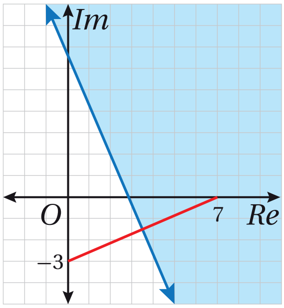
المتباينة الأصلية $\quad |z-7| \leq |z+3i|$

بتعويض $z = 0 + 0i$ $\quad |0-7| \overset{?}{\leq} |0+3i|$

بالتبسيط $\quad \sqrt{49} \overset{?}{\leq} \sqrt{9}$

$7 \overset{?}{\leq} 3$ ✗

بمـا أنَّ العدد: $z = 0 + 0i$ لا يُحقِّق المتباينة، فإنَّ منطقـة الحلول المُمكِنة هي المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.



3 $\frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$

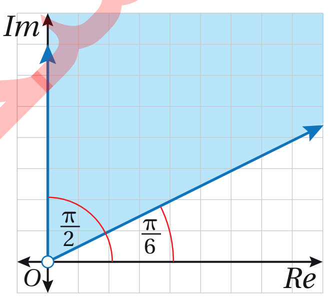
الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي.

يُمثِّل منحنى المعادلة: $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$ شعاعًا يبدأ بنقطة الأصل، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي الموجب. ويُمثِّل منحنى المعادلة: $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ شعاعًا آخر يبدأ بنقطة الأصل، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب.

إذن، يُمثِّل الشعاعان معًا منحنًى حدوديًّا للمتباينة: $\frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$. وبما أنَّه توجد مساواة في رمزي المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

المنطقة التي تُمثِّلها المتباينة: $\frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$ هي جزءٌ من المستوى المُركَّب محدودٌ بشعاعين كما في الشكل المجاور.



أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق كل متباينة ممّا يأتي:

a) $|z + 3 + i| \leq 6$ b) $|z + 3 + i| < |z - 4|$ c) $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z + 5) \leq \frac{\pi}{2}$

يُمكِن أيضًا تمثيل منطقة حلِّ نظام متباينات بيانيًّا في المستوى المُركَّب بصورة مُشابِهة لتمثيل أنظمة المتباينات في المستوى الإحداثي.

مثال 7

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z - 1 - 2i| \leq 5$، والمتباينة: $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z - 1 - 2i) < \frac{2\pi}{3}$.

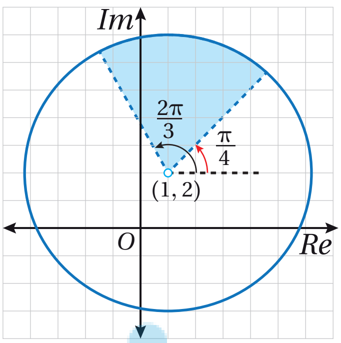
الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي لكل متباينة.

- تُمثِّل المعادلة: $|z - 1 - 2i| = 5$ دائرة مركزها النقطة $(1, 2)$، وطول نصف قُطْرها 5 وحدات، وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.
- تُمثِّل المعادلة: $\text{Arg}(z - 1 - 2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(1, 2)$، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم الشعاع مُتقطِّعًا.

- تُمثِّل المعادلة: $\text{Arg}(z-1-2i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(1, 2)$، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم الشعاع مُتقطِّعًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تُمثِّل المتباينة: $|z-1-2i| \leq 5$ النقاط الواقعة داخل الدائرة، وتُمثِّل المتباينة: $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين.



إذن، المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينتين معًا هو الجزء الواقع داخل القطاع الدائري كما في الشكل المجاور.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z+3-2i| \geq 4$، والمتباينة: $\frac{-\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب، ثم أجد معادلته الديكارتية:

1) $|z| = 10$
2) $|z-9| = 4$
3) $|z+2i| = 8$
4) $|z-5+6i| = 2$
5) $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$
6) $|z+6-i| = 7$
7) $|z-5| = |z-3i|$
8) $|z+3i| = |z-7i|$
9) $|z+5+2i| = |z-7|$
10) $|z-3| = |z-2-i|$
11) $\frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|} = 1$
12) $|z+7+2i| = |z-4-3i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثم أرسمه في المستوى المُركَّب:

13) $\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$

14) $\text{Arg}(z-1+i\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$

15) $\text{Arg}(z-4i)=-\frac{3\pi}{4}$

16) $\text{Arg}\left(\frac{z}{z+3}\right)=\frac{\pi}{4}$

17) $\text{Arg}\, z-\text{Arg}(z-2+3i)=\frac{\pi}{3}$

18) $\text{Arg}\left(\frac{z-4i}{z+4}\right)=\frac{\pi}{2}$

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

19) $|z-2|<|z+2|$

20) $|z-4-2i|\leq 2$

21) $|z-4|>|z-6|$

22) $0<\text{Arg}(z-2-2i)<\frac{\pi}{4}$

23) $-\frac{\pi}{4}\leq \text{Arg}(z-3+4i)\leq\frac{\pi}{4}$

24) $2\leq|z-3-4i|\leq 4$

إذا كانت: $|z-\sqrt{5}-2i|=2$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

25) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.

26) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة في الفترة $(-\pi, \pi)$.

27) أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلة: $|z-3+2i|=5$، والمعادلة: $|z-6i|=|z-7+i|$، ثم أجد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلتين معًا.

28) أجد العدد المُركَّب الذي يُحقِّق كُلًّا من المحل الهندسي: $|z-3|=|z+2i|$، والمحل الهندسي: $|z+3-i|=|z-1+5i|$.

29) أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية:

$$\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4},\ \text{Arg}(z+2-5i)=\frac{-\pi}{2},\ |z+2-5i|=\sqrt{29}$$

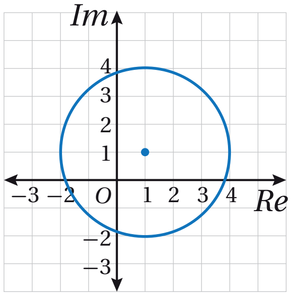
30) أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z-3|>|z+2i|$، والمتباينة: $|z+3-i|<|z-1+5i|$.

31) أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{2}<\text{Arg}(z+2-5i)<\frac{\pi}{4}$ والمتباينة: $|z+2-5i|>\sqrt{29}$.

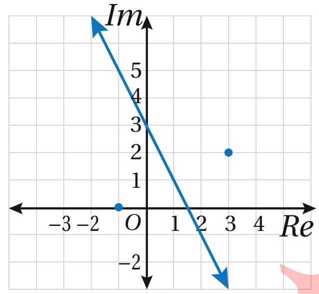
32 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$، والمتباينة: $2 < |z-3+i| \leq 5$

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي المُمثَّل بيانيًا في كلٍّ ممّا يأتي:

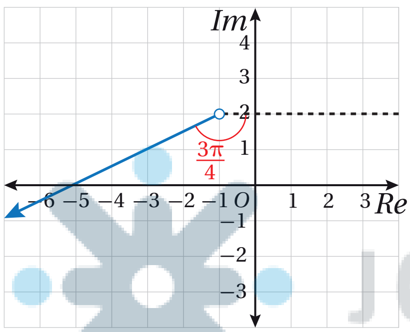
33



34

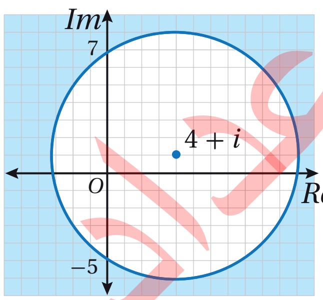


35 أكتب معادلة في صورة: $\text{Arg}(z-a)=\theta$، حيث a عدد مُركَّب، و $-\pi < \theta \leq \pi$ تُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.

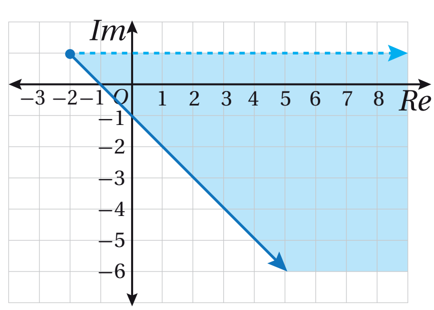


أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

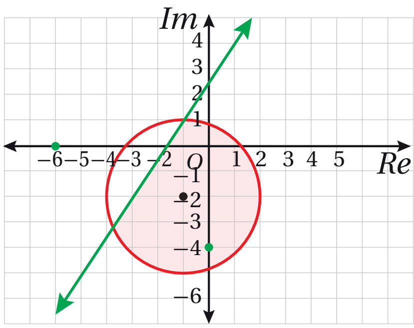
36



37



38 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.



مهارات التفكير العليا

39 تحدٍّ: أجد (بدلالة الثابت a) العددين المُركَّبين اللذين يُحقِّقان المعادلة:

$|z-a| = 2a$، والمعادلة: $|z-a| = |z+a(2+i)|$.

40 تبريــر: إذا كان العدد المُركَّــب z يُحقِّق المعادلة: $|z-3+4i| = 2$، فأجد أكبر قيمة لِـــ $|z|$ وأقل قيمة له، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كانت: $z = 5 + 2i$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

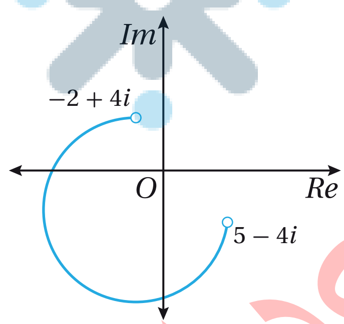
41 أُبيِّن أنَّ: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{29}(21+20i)$.

42 بناءً على البحث في سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة: z، و $\bar{z}$، و $\frac{z}{\bar{z}}$ ، أُبيِّن أنَّ:

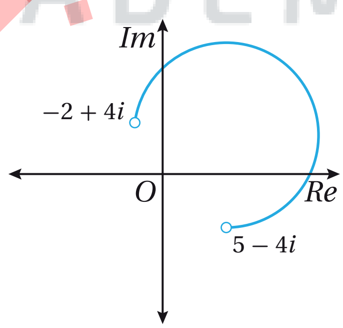
$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

43 تبرير: أيُّ الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته: $\text{Arg}\left(\frac{z-5+4i}{z+2-4i}\right) = \frac{5\pi}{18}$، مُبرِّرًا إجابتي:

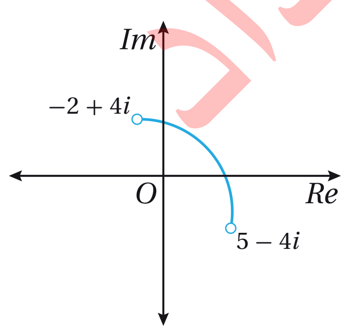
a)



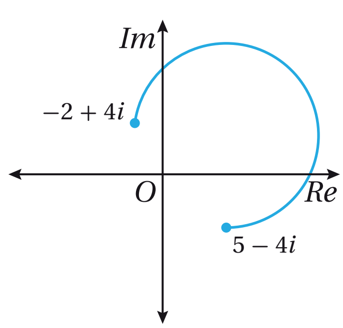
b)



c)



d)



44 تحدٍّ: برهان: أثبت أن المعادلة $|z-6| = 2|z+6-9i|$ تمثل دائرة، وأجد مركزها وطول نصف قطرها.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $i=\sqrt{-1}$، فإنَّ i^{343} تساوي:

a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i

2 ناتج $(1-i)^3$ هو:

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$

c) $2-2i$ d) $2+2i$

3 إذا كان $2i$ هو أحد جذور المعادلة:

$az^3+5z^2+8z+20=0$، فإنَّ قيمة a هي:

a) -8 b) -2 c) 2 d) 8

4 الصــورة المثلثية للعدد المُركَّــب: $z=-1+i\sqrt{3}$ هي:

a) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

b) $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

c) $2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$

d) $2(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3})$

5 الصورة القياسية لناتج:

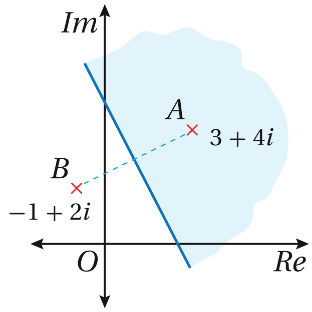
$$8\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\div 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

هي:

a) $4i$ b) -4

c) $-4+4i$ d) $4-4i$

6 إحــدى الآتية تصف المنطقــة المُظلَّلة في الشكل المجاور:



a) $|z-1+2i|<|z+3+4i|$

b) $|z-1+2i|>|z+3+4i|$

c) $|z+1-2i|<|z-3-4i|$

d) $|z+1-2i|>|z-3-4i|$

7 أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z=45-28i$.

8 أجد مقياس العدد المُركَّب: $w=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}i$، وسعته.

9 إذا كان: $z=-8+8i$، وكان: $w=a+2i$، حيث $a<0$، فأجد قيمة a، علمًا بأنَّ: $|z+w|=26$.

إذا كان: $w=\frac{14-31i}{3-2i}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أكتب العدد w في صورة: $x+iy$.

11 إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة: $z^2+cz+d=0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين c، وd.

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

12 $|z-6|\leq 3$

13 $\frac{\pi}{4}\leq \text{Arg}(z-2)\leq\frac{2\pi}{3}$

14 $|z+1+i|>|z-3-3i|$

إذا مثَّلت النقطة M العـــدد: $z_1 = 1 - 8i$، ومثَّلت النقطة N العـــدد: $z_2 = 4 + 7i$، وكانت O هي نقطة الأصل، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

15 أُبيِّن أنَّ المثلث OMN متطابق الضلعين.

16 أُبيِّن أنَّ جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$.

17 أجد مساحة المثلث OMN.

18 أُمثِّل في المســـتوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التـــي تُحقِّق المتباينة: $|z-8| > |z+2i|$، والمتباينة: $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$.

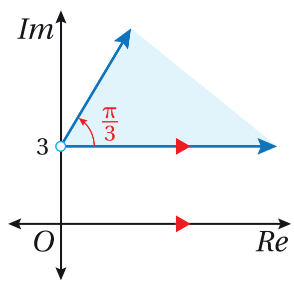
19 تقع رؤوس مثلث متطابق الأضلاع على دائرة مركزها نقطة الأصل في المســـتوى المُركَّب. إذا كان أحد هذه الـــرؤوس يُمثِّل العــــدد المُركَّـــب: $(4 + 2i)$، فأجد العددين المُركَّبين اللذين يُمثِّلهما الرأسان الآخران، ثم أكتب الإجابة في صورة: $x + iy$، حيث x، وy عددان حقيقيان.

تُمثِّل النقاط: A، وB، وC، وD جذور المعادلة: $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$:

20 إذا كان العدد: $(-2 + 4i)$ هو أحد هذه الجذور، فأجد الجذور الثلاثة الأُخرى لهذه المعادلة.

21 أُمثِّل الجذور الأربعة في المســـتوى المُركَّب، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

22 أكتب (بدلالة z) متباينة تُمثِّل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي:



إذا كان: $z^2 + 2z + 10 = 0$، فأُجيب عن الســـؤالين الآتيين تباعًا:

23 أُبيِّن أنَّ لجذري المعادلة المقياس نفسه.

24 أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

إذا كان: $w = \frac{22 + 4i}{(2-i)^2}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أُبيِّن أنَّ الصورة القياسية لهذا العدد هي: $w = 2+4i$.

26 إذا كان: $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(w+p) \leq \frac{3\pi}{4}$ ، فأجد مجموعة القِيَم المُمكِنة للعدد الثابت p.

27 يُحقِّـــق العـــددان المُركَّبـــان u، وv المعادلـــة: $u + 2v = 2i$، والمعادلـــة: $iu + v = 3$. أحُـــلُّ المعادلتين لإيجاد العدد u، والعدد v.

28 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}\, z \leq \frac{2\pi}{3}$، والمتباينة: $|z-2i| \leq 2$.

ملحقات

الجبر

العمليات الحسابية

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad a(b+c)=ab+ac$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

الأسس والجذور

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n} \qquad x^m x^n = x^{m+n}$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n$$

$$x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m \qquad x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$$

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

القانون العام

إذا كان: $ax^2+bx+c=0$، فإنَّ:

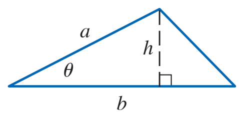
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

الهندسة

صيغ هندسية (المساحة A، والمحيط C، والحجم V)

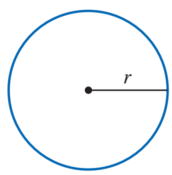
- المثلث:

$$A=\frac{1}{2}bh$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$



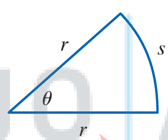
- الدائرة:

$$A=\pi r^2$$
$$C=2\pi r$$



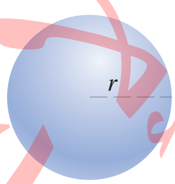
- القطاع الدائري:

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$
$$s=r\theta\ (\theta\ \text{radian})$$



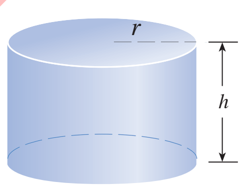
- الكرة:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$A=4\pi r^2$$



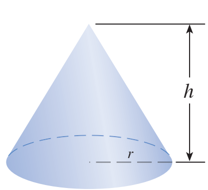
- الأسطوانة:

$$V=\pi r^3 h$$
$$A=2\pi rh+2\pi r^2$$



- المخروط:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$



الهندسة الإحداثية

المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف

- المسافة بين النقطتين $P_1\ (x_1, y_1)$ و $P_2\ (x_2, y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1 P_2}$ هما:

$$M: \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

المستقيم

- ميل المستقيم المارِّ بالنقطتين $P_1\ (x_1, y_1)$ و $P_2\ (x_2, y_2)$ هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- معادلة المستقيم المارِّ بالنقطة $P_1\ (x_1, y_1)$، وميله m هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الدائرة

- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، ونصف قُطْرها r هي:

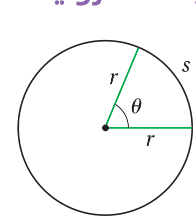
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

المثلثات

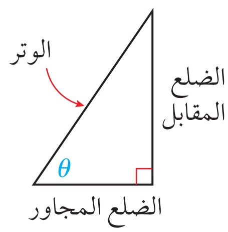
قياسات الزوايا

$\pi = 180°$ $\quad 1° = \frac{\pi}{180}$ rad

1 rad $= \frac{180°}{\pi}$



الاقترانات المثلثية في المثلث قائم الزاوية



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

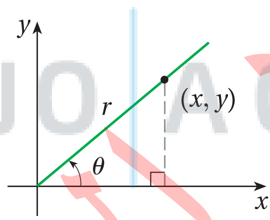
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

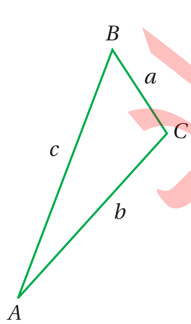
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$



قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



قانون جيوب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات المقلوب:

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

- المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

- متطابقات فيثاغورس:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

- متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$

$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \csc\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$ $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$

- متطابقات الزاوية السالبة:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$

$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

المتطابقات المثلثية لتقليص القوَّة

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

قِيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة

$\theta°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية

العلاقة بين الصورة الأُسّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$ و $b > 0,\ b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية: $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا الصورة الأُسّية: $b^y = x$

الأساس، الأُسّ

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$ و $b > 0,\ b \neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ $\log_b x = \log_b x$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث $b \neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p\log_b x$

قواعد الاشتقاق

القواعد الأساسية

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f'(x)\,g'(x) + g'(x)\,f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مشتقات الاقترانات الأُسِّية والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b \qquad \frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x\ln b}$$

مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$