إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

١) إذا كان ق(س) = س^{٢} – س – ٦ ، ل(س) = س^{٢} – ٢ س – ٣ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ١} \left(ق(س) + ل(س) \right)$

ب) $\lim_{س \to ١} ق(س) \times ل(س)$

جـ) $\lim_{س \to ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

د) $\lim_{س \to ٢} (ل(س))^{٤}$

هـ) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

الحل:

أ) $\lim_{س \to ١} \left(ق(س) + ل(س) \right) = (١ - ١ - ٦) + (١ - ٢ - ٣) = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} ق(س) \times ل(س) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

جـ) $\lim_{س \to ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٢}{٣}$

د) $\lim_{س \to ٢} (ل(س))^{٤} = (٢^{٢} - ٢ \times ٢ - ٣)^{٤} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)} = \sqrt[٣]{١ - -٣} = \sqrt[٣]{٤}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{١ + ٢ - ٣}{١ + ١ - ٦} = \frac{\text{صفر}}{-٤} = \text{صفر}$

٢)إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ٢ ع(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٢} ٣ل(س) + ١ = ٧$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٢} \left(٢ ع(س) + ل(س) \right)$

ب) $\lim_{س \to ٢} \left(ع^{٣}(س) - ل^{٢}(س) \right)$

جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)}$

د) $\lim_{س \to ٢} \left(ع^{٢}(س) - ل^{٢}(س) \right)$

الحل:

نهـــا ٢ ع(س) = ١٠
س←٢

$\frac{٢}{٢}$ نهـــا (ع(س)) = $\frac{١٠}{٢}$
س←٢

نهـــا ع(س) = ٥
س←٢

نهـــا ٣ل(س) + ١ = ٧
س←٢

٣ نهـــا ل(س) + ١ = ٧
س←٢

٣ نهـــا ل(س) = ٦
س←٢

نهـــا ل(س) = ٢
س←٢

أ) نهـــا (٢ ع(س) + ل(س)) = ٢ × ٥ + ٢ = ١٢
س←٢

ب) نهـــا (ع^{٣} (س) – ل^{٢} (س)) = ٥^{٣} – ٢^{٢} = ١٢٥ – ٤ = ١٢١
س←٢

جـ) نهـــا $\sqrt{\frac{\text{ل (س)}}{\text{ع (س)}}}$ = $\sqrt{\frac{٢}{٥}}$
س←٢

د) نهـــا (ع^{٢} (س) – ل^{٢} (س)) = ٥^{٢} – ٢^{٢} = ٢٥ – ٤ = ٢١
س←٢

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ) نهـــا | س^{٢} – ٢٥ |
س←٥$^{+}$

ب) نهـــا | س^{٢} – ٢٥ |
س←٥$^{-}$

جـ) نهـــا | س – ٢ |
س←٢$^{-}$

د) نهـــا | س^{٢} – ٦٤ |
س←٨

هـ) نهـــا [س – ٢]
س←٤$^{-}$

و) نهـــا (س [س] + | س |)
س←١

ز) نهـــا $\sqrt{٥ - س}$
س←٥$^{-}$

ح) نهـــا $\sqrt{١ - س^{٢}}$
س←١

ط) نهـــا $\sqrt{س^{٢} + ٤س + ٤}$
س← ٢$^{-}$

الحل:

أ) $\lim_{س \to ٥^+} |س^٢ - ٢٥|$

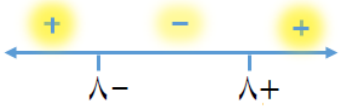
$س^٢ - ٢٥ = صفر \Leftarrow س = \pm ٥$

$\lim_{س \to ٥^+} |س^٢ - ٢٥| = \lim_{س \to ٥^+} (س^٢ - ٢٥) = صفر$

ب) $\lim_{س \to ٥^-} |س^٢ - ٢٥| = \lim_{س \to ٥^-} (٢٥ - س^٢) = صفر$

جـ) $\lim_{س \to ٢^-} |س - ٢| = \lim_{س \to ٢^-} (٢ - س) = صفر$

د) $\lim_{س \to ٨} |س^٢ - ٦٤|$

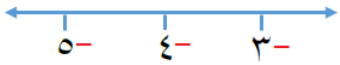


$\lim_{س \to ٨^+} س^٢ - ٦٤ = صفر$

$\lim_{س \to ٨^-} ٦٤ - س^٢ = صفر$

$\lim_{س \to ٨} |س^٢ - ٦٤| = صفر$

هـ) $\lim_{س \to -٤} [س - ٢]$ $\quad ل = ١$



$$[س - ٢] = \begin{cases} -٧ & ، \quad -٥ \geq س > -٤ \\ -٦ & ، \quad -٤ \geq س > -٣ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \lim_{س \to -٤^+} [س - ٢] = -٦ \\ \lim_{س \to -٤^-} [س - ٢] = -٧ \end{cases}$$

$\lim_{س \to -٤} [س - ٢]$ **غير موجودة**

و) $\lim_{س \to ١} (س [س] + |س|)$

$$[س] = \begin{cases} صفر & ، \quad ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، \quad ١ \leq س < ٢ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \lim_{س \to ١^-} (س \times ٠ + س) = ٠ + ١ = ١ \\ \lim_{س \to ١^+} (س \times ١ + س) = ١ + ١ = ٢ \end{cases}$$

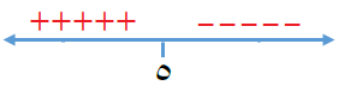
$\lim_{س \to ١} (س [س] + |س|)$ **غير موجودة**

ز) $\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{٥ - س}$

$\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{٥ - س}$ = صفر

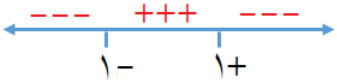
٥ − س = صفر

س = ٥



ح) $\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢}$

١ − س^٢ = صفر ⟸ س^٢ = ±١



$\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢}$ = غير موجودة ⟸

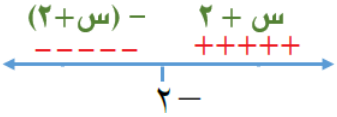
- $\lim_{س \to ١^+} \sqrt{١ - س^٢}$ = غير موجودة
- $\lim_{س \to ١^-} \sqrt{١ - س^٢}$ = صفر

ط) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$

$\lim_{س \to -٢} \sqrt{(س^٢ + ٢)^٢}$ = $\lim_{س \to -٢}$ |س + ٢|

س + ٢ = صفر

س = −٢



$\lim_{س \to -٢} |س + ٢|$ = صفر ⟸

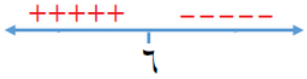
- $\lim_{س \to -٢^+} |س + ٢|$ = صفر
- $\lim_{س \to -٢^-} |س + ٢|$ = صفر

٤) جد قيم جـ التي تجعل $\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة.

الحل:

$\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$

٦ − س = صفر ⟸ س = ٦



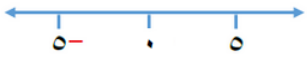
$\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة على [٦ ، ∞)

٥) إذا كان ق(س)= [٢ ، ٠ س]، فجد قيم جـ التي تجعل $\lim_{س \to جـ}$ [٢ ، ٠ س] = −١

الحل:

ق(س) = [٢, ٠ س] = [$\frac{٢}{١٠}$ س]

ل = $\frac{١}{\frac{٢}{١٠}}$ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥



ق(س) = $\left\{ \begin{array}{ll} -١ & ، \quad -٥ \leq س < ٠ \end{array} \right.$

نهـــا [٢, ٠ س] = −١ **قيم جـ هي** (−٥ ، ٠)
س←جـ

٦) إذا كان ق(س) = $\left\{ \begin{array}{ll} س^{٢} - ٤ أ & ، \quad س \leq ٣ \\ [٦ - س] & ، \quad س > ٣ \end{array} \right.$

وكانت نهـــا ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.
س←٣

الحل:

[٦ − س] = ٣ ، ٢ < س ≤ ٣

نهـــا س^{٢} − ٤ أ = نهـــا ٣
س←٣+ س←٣−

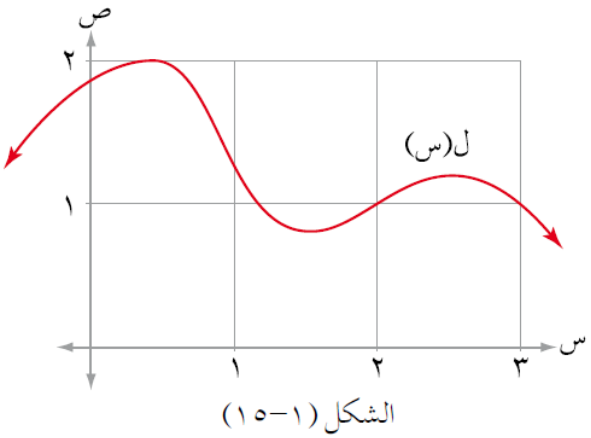
٩ − ٤ أ = ٣ ⟸ $\frac{٤ أ}{٤}$ = $\frac{٦}{٤}$

أ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ ⟸

٧) معتمدًا الشكل (١−١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

أ) نهـــا ل(٣ س − ٣)
س←٢

ب) نهـــا (س + ل (س))
س←٢



الشكل (١−١٥)

الحل:

أ) $\lim_{س \to ٢}$ ل (٣ س – ٣)

ص = ٣ س – ٣

س ← ٢ ⟸ ص ← ٣

$\lim_{س \to ٢}$ ل (٣ س – ٣) = $\lim_{ص \to ٣}$ ل (ص)

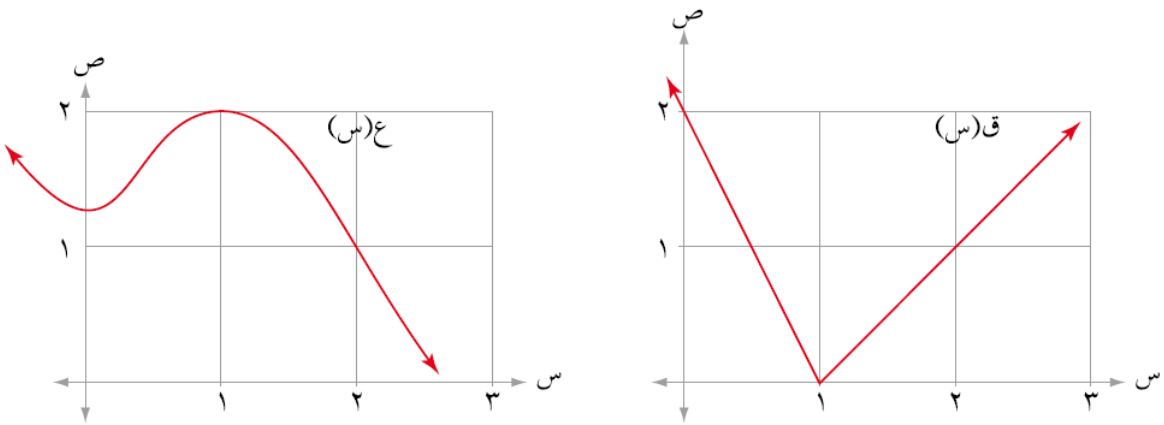
= ١

ب) $\lim_{س \to ٢}$ (س +ل (س))

$\lim_{س \to ٢}$ س + $\lim_{س \to ٢}$ ل (س)

٣ = ١ + ٢

٨) معتمدًا الشكل (١–١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع ،جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–١٦)

أ) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) + ع(س))

ب) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) × ع(س))

جـ) $\lim_{س \to ١}$ (٢ ق(س–١) + ع(س))

الحل:

أ) $\lim_{س \to ١} \left(ق(س) + ع(س) \right)$

$= \lim_{س \to ١} ق(س) + \lim_{س \to ١} ع(س)$

$= ٢ + صفر$

$= ٢$

ب) $\lim_{س \to ٢} \left(ق(س) \times ع(س) \right)$

$= \lim_{س \to ٢} ق(س) \times \lim_{س \to ٢} ع(س)$

$= ١ \times ١$

$= ١$

جـ) $\lim_{س \to ١} \left(٢ ق(س - ١) + ع(س) \right)$

$٢ \lim_{ص \to ٠} ق(ص) + \lim_{س \to ١} ع(س)$ ص = س − ١

س ← ١

ص ← صفر

$= ٢ \times ٢ + ٢$

$= ٦$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣ ، ٤)، وكانت $\lim_{س \to -٣} \left(س - ل(س) \right) = -١٠$

فجد $\lim_{س \to -٣} \left(ق^{٢} (س) - ٢ ل(س) \right)$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣ ، ٤)، فيكون ق (−٣) = ٤ ومنه : $\lim_{س \to -٣} ق (س) = ٤$

$\lim_{س \to -٣} \left(س - ل(س) \right) = -١٠$

$-٣ - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$\lim_{س \to -٣} ل(س) = ٧$

$\lim_{س \to -٣} ق^{٢} (س) - \lim_{س \to -٣} ٢ ل(س) =$

$= ٤^{٢} - ٢ \times ٧ = ١٦ - ١٤ = ٢$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س−٢) يساوي٥ ، فجد $\lim_{س \to ٢} \left(٣ ع(س) + ٤ س^{٢} \right)$

الحل:

لأن ع كثير حدود وباقي قسمته على (س−٢) يساوي ٥ ، فيكون ع(٢) = ٥ ، ومنها:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \; ع(س) = ٥$$

إذاً:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \; (٣ ع(س) + ٤ س^{٢}) =$$

$$٣ \times ٥ + ٤ (٢)^{٢} = ١٥ + ١٦ = ٣١$$