# إجابات تمارين ومسائل الدرس

## النقطة الحرجة

١) جد النقط الحرجة لكلٍّ من الاقترانات الاتية:

أ ) ق(س) = س$^{٤}$ − ٤س + ١ ، س ∈ [−٢، ٢]

ب) ق(س) = جا س + جتا س ، س ∈ [٠، ٢π]

جـ) ق(س) = س$^{٢}$ | س − ١ | ، س ∈ [−٣، ٢]

د ) ق(س) = $\sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ، س ∈ [ ٠ ، π ]

هـ) ق(س) = { س$^{٢}$ + ١ ، −٢ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢س ، ١ ≤ س ≤ ٢ }

**الحل**

أ) قـ(س) = س$^{٤}$ − ٤س + ١ ، س ∈ [−٢، ٢]

قـَ(س) = ٤س$^{٣}$ − ٤

قـَ(س) = ٠ ← ٤س$^{٣}$ − ٤ = ٠ ← س$^{٣}$ = ١

س = ١

النقاط الحرجة :

(−١، −٢) ، (٢، ٩) ، (−٢، −٢٥)

ب) $\text{ه}(س) = \text{جا}س + \text{جتا}س ، س \in [0 ، 2\pi]$

$\text{ه}'(س) = \text{جتا}س - \text{جا}س$

$\text{ه}'(س) = 0 \leftarrow \text{جتا}س - \text{جا}س = 0 \leftarrow \text{جتا}س = \text{جا}س$

$س = \frac{\pi}{4} ، \frac{5\pi}{4}$

النقاط الحرجة :

$(0 ، 1) ، \left(\frac{\pi}{4} ، \frac{2}{\sqrt{2}}\right) ، \left(\frac{5\pi}{4} ، -\frac{2}{\sqrt{2}}\right) ، (2\pi ، 1)$

جـ) $\text{ه}(س) = س^2 |س - 1| ، س \in [-3 ، 2]$

$س - 1 = 0 \leftarrow س = 1$

$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^2 - س^3 & ، -3 \leq س < 1 \\ س^3 - س^2 & ، 1 \leq س \leq 2 \end{cases}$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} 2س - 2س^2 & ، -3 < س < 1 \\ 3س^2 - 2س & ، 1 < س < 2 \end{cases}$

$\text{ه}'_+(1) \neq \text{ه}'_-(1) \leftarrow \text{ه}'(1)$ غير موجودة

$\text{ه}'(س) = 0 \leftarrow س = 0 ، \frac{2}{3}$

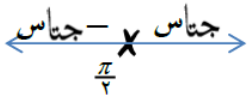
النقاط الحرجة :

$(0 ، 0) ، \left(\frac{2}{3} ، \frac{-4}{27}\right) ، (1 ، 0) ، (2 ، 4) ، (-3 ، 36)$

د) $\text{ه}(س) = \sqrt{\text{جتا}^2 س} ، س \in [0 ، \pi]$

$\text{ه}(س) = |\text{جتا}س|$

$\text{جتا}س = 0 \leftarrow س = \frac{\pi}{2}$




$\text{ه}(س) = \begin{cases} \text{جتا}س & ، 0 \leq س < \frac{\pi}{2} \\ -\text{جتا}س & ، \frac{\pi}{2} \leq س \leq \pi \end{cases}$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} -\text{جا}س & ، 0 < س < \frac{\pi}{2} \\ \text{جا}س & ، \frac{\pi}{2} < س < \pi \end{cases}$

النقاط الحرجة :

$(0 ، 1) ، (\pi ، -1) ، (\frac{\pi}{2} ، 0)$

هـ) $\text{ه}(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، -2 \leq س < 1 \\ 2س & ، 1 \leq س \leq 2 \end{cases}$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} 2س & ، -2 < س < 1 \\ 2 & ، 1 < س < 2 \end{cases}$

$\text{ه}(س)$ متصل عند $س = 1$ و قابل للأشتقاق

النقاط الحرجة : $(0 ، 1) ، (-2 ، 5) ، (2 ، 4)$

٢) جد قيم أ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س نقطتين حرجتين عند س = −١، س = ٣.

**الحل**

ق$'$(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢أس + ب

ق$'$(−١) = ٠ ← ٣ − ٢أ + ب = ٠

← ب − ٢أ = −٣ ..... [١]

ق$'$(٣) = ٠ ← ٢٧ + ٦أ + ب = ٠

٦أ + ب = −٢٧ ..... [٢]

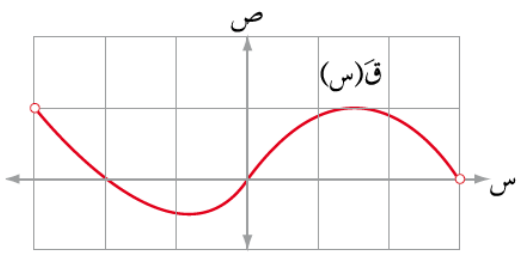
[١] − [٢]

ب − ٢أ = −٣

٦أ + ب = −٢٧ ← أ = −٣ ← ب = −٩

−٨أ = ٢٤

٣) يمثل الشكل (٣−٩) منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق المعرَّف على الفترة [−٣،٣] اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق.




الشكل (٣−٩)

**الحل**

ق$'$(س) = ٠ ← س = ٠، −٢

ق$'$(س) غير موجودة عند س = −٣، ٣

٤) جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٣} + ١}$

الحل

$$ق'(س) = \frac{(س^{٣}+١) \times ٢س^{٢} - (س^{٣}-١) \times ٢س^{٢}}{(س^{٣}+١)^{٢}}$$

$$ق'(س) = \frac{٦س^{٢}}{(س^{٣}+١)^{٢}}$$

$$ق'(س) = ٠ \leftarrow \frac{٦س^{٢}}{(س^{٣}+١)^{٢}} = ٠ \leftarrow س = ٠$$

النقطة الحرجة: (٠، -١)