إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (1 - 2\text{س})(\text{س} - \text{س}^2)^4 \, \text{ءس}$

ب) $\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{(2\text{س}^3 - 2)^2} \, \text{ءس}$

جـ) $\int (2\text{س} - 3\text{س}^2) \, \text{قا}^2(\text{س}^2 - \text{س}^3) \, \text{ءس}$

د) $\int \frac{3\text{س} - 9}{(\text{س}^2 - 6\text{س})^2} \, \text{ءس}$

الحل

أ) $\int (1 - 2\text{س})(\text{س} - \text{س}^2)^4 \, \text{ءس}$.

$\text{ص} = \text{س} - \text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 - 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{1 - 2\text{س}} = \text{ءس}$

$\int (1 - 2\text{س}) \, \text{ص}^4 \, \frac{\text{ءص}}{1 - 2\text{س}} = \int \text{ص}^4 \, \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ} = \frac{(\text{س} - \text{س}^2)^5}{5} + \text{جـ}$

ب) $\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{(2\text{س}^3 - 2)^2} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = 2\text{س}^3 - 2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{6\text{س}^2} = \text{ءس}$

$\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{\text{ص}^2} \, \frac{\text{ءص}}{6\text{س}^2} = \int \text{ص}^{\frac{2}{5}} \, \text{ءص}$

$$\frac{\text{ص}^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + \text{جـ} = \frac{\text{ص}^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{\text{ص}^{7}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{(2\text{س}^{3} - 2)^{7}} + \text{جـ}$$

جـ) $\int (2\text{س} - 3\text{س}^{2})\ \text{قا}^{2}(\text{س}^{3} - \text{س}^{2})\ \text{دس}$

$$\text{ص} = \text{س}^{3} - \text{س}^{2} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^{2} - 2\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{3\text{س}^{2} - 2\text{س}} = \text{دس}\ .$$

$$\int \overset{(-1)}{\cancel{(2\text{س} - 3\text{س}^{2})}}\ \text{قا}^{2}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^{2} - 2\text{س}}}$$

$$\int -\text{قا}^{2}\text{ص} \cdot \text{دص} = -\text{ظا ص} + \text{جـ}$$

$$= -\text{ظا}(\text{س}^{3} - \text{س}^{2}) + \text{جـ}$$

د) $\int \frac{3\text{س} - 9}{(\text{س}^{2} - 6\text{س})^{2}}\ \text{دس}$

$$\text{ص} = \text{س}^{2} - 6\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 6 \Leftarrow$$

$$\frac{\text{دص}}{2\text{س} - 6} = \text{دس}\ .$$

$$\int \frac{3\text{س} - 9}{\text{ص}^{2}} \times \frac{\text{دص}}{2\text{س} - 6} =$$

$$\int 3\cancel{(\text{س} - 3)} \times \text{ص}^{-2} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س} - 3)}} =$$

$$\frac{3}{2}\ \frac{\text{ص}^{-2+1}}{-2+1} + \text{جـ} = \frac{3}{2}\ \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$$

$$\frac{-3}{2\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{-3}{2(\text{س}^{2} - 6\text{س})} + \text{جـ}$$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س} - ٢)^{٢}}\ \text{ؤس}$

ب) $\int (\text{س} - ١)(\text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١)^{٥}\ \text{ؤس}$

جـ) $\int ٢\ \text{قا}^{٢}(٢ - \text{س})\ \text{ؤس}$

د) $\int \text{٢س}^{٣}\ \text{جا}(\text{س}^{٤} + ١)\ \text{ؤس}$

الحل

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س}-٢)^{٢}}\ \text{ؤس} = \int (\text{٣س}-٢)^{\frac{٢}{٣}}\ \text{ؤس} = \dfrac{(\text{٣س}-٢)^{\frac{٢}{٣}+١}}{(\frac{٢}{٣}+١)\times ٣} + \text{جـ}$

$= \dfrac{(\text{٣س}-٢)^{\frac{٥}{٣}}}{٣ \times \frac{٥}{٣}} + \text{جـ} = \dfrac{١}{٥}\sqrt[3]{(\text{٣س}-٢)^{٥}} + \text{جـ}$

ب) $\int (\text{س}-١)(\text{٢س}^{٢}-\text{٤س}+١)^{٥}\ \text{ؤس}$

$\text{ص} = \text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١ \Leftarrow \dfrac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = \text{٤س} - ٤$

$\dfrac{\text{ؤص}}{\text{٤س}-٤} = \text{ؤس} \Leftarrow \dfrac{\text{ؤص}}{٤(\text{س}-١)} = \text{ؤس}$

$\int (\text{س}-١)\ \text{ص}^{٥} \times \dfrac{\text{ؤص}}{٤(\text{س}-١)} = \dfrac{١}{٤}\int \text{ص}^{٥}\ \text{ؤص}$

$= \dfrac{\text{ص}^{٦}}{٦\times ٤} + \text{جـ} = \dfrac{(\text{٢س}^{٢}-\text{٤س}+١)^{٦}}{٢٤} + \text{جـ}$

جـ) $\int ٢\ \text{قا}^{٢}(٢-\text{س})\ \text{ؤس} =$

$\dfrac{٢\ \text{ظا}(٢-\text{س})}{-١} + \text{جـ}$

$-٢\ \text{ظا}(٢-\text{س}) + \text{جـ}$

د) $\int \text{٢س}^{٣}\ \text{جا}(\text{س}^{٤}+١)\ \text{ؤس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٤} + ١ \Leftarrow \dfrac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = \text{٤س}^{٣} \Leftarrow$

$\dfrac{\text{ؤص}}{\text{٤س}^{٣}} = \text{ؤس}$

$\int \text{٢س}^{٣}\ \text{جا ص}\ \dfrac{\text{ؤص}}{\text{٤س}^{٣}} =$

$\int \dfrac{١}{٢}\ \text{جا ص ؤص} = -\dfrac{١}{٢}\ \text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -\dfrac{١}{٢}\ \text{جتا}(\text{س}^{٤}+١) + \text{جـ}$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{0}^{2} \sqrt{٤س + ١}\ د س$

ب) $\int_{-١}^{١} ٣س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٣}\ د س$

جـ) $\int_{١}^{٢} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}\ د س$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\ د س$

الحل

٤) $\int_{0}^{٢} \sqrt{٤س + ١}\ د س = \int_{0}^{٢} (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}\ د س$

$= \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢} + ١}}{٤ \times (\frac{١}{٢} + ١)} \right]_{0}^{٢} = \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} \right]_{0}^{٢}$

$= \left[\frac{\sqrt{(٤س + ١)^{٣}}}{٦} \right]_{0}^{٢}$

$= \frac{١}{٦} \left[\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}} - \sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}} \right]$

$= \frac{١}{٦} (\sqrt{٩^{٣}} - \sqrt{١^{٣}})$

$\frac{1}{2}(27-1)$

$\frac{1}{2} \times 26 = \frac{13}{3}$

ب) $\int_{-1}^{1} 3x^2 (x^3-1)^3 \, dx =$ صفر

جـ) $\int_{1}^{0} 2x \sqrt{x^4-1} \, dx =$

$\int_{1}^{0} 2x (x^4-1)^{\frac{1}{2}} \, dx$

$ص = x^4 - 1 \Leftarrow \frac{dص}{dx} = 4x^3 \Leftarrow dx = \frac{dص}{4x^3}$

$\int_{1}^{0} 2x \, ص^{\frac{1}{2}} \frac{dص}{4x^3} = \int_{1}^{0} ص^{\frac{1}{2}} dص$

$\left[\frac{ص^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_{1}^{0} = \left[\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{0}$

$\frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x^4-1)^4} \right]_{1}^{0} = \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{(0^4-1)^4} - \sqrt[3]{(1-1)^4} \right)$

$$\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{١} - \sqrt[٣]{٠}\right)$$

$$\frac{٣}{٤}\left(١ - ٠\right)$$

$$\frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$$

د) $$\int_{١}^{٢} \frac{٢س - ٣}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}} \, دس = \int_{١}^{٢} (٢س - ٣)(س^{٢} - ٣س)^{-٢} \, . \, دس$$

$$ص = س^{٢} - ٣س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س - ٣ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س - ٣}$$

$$\int_{١}^{٢} (٢س - ٣) \, ص^{-٢} \times \frac{دص}{٢س - ٣} = \int_{١}^{٢} ص^{-٢} \, دص =$$

$$\left[\frac{-ص^{-٢+١}}{-٢+١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{-ص^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{١}{ص}\right]_{١}^{٢}$$

$$\left[\frac{١}{س^{٢} - ٣س}\right]_{١}^{٢} = \frac{١}{٢^{٢} - ٣\times٢} - \frac{١}{١^{٢} - ٣\times١} = \frac{١}{-٢} - \frac{١}{-٢}$$

$$= \frac{-١}{٢} + \frac{١}{٢} = صفر$$

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣} ٣س^{٢} \, قَ(س^{٣}) \, دس$

الحل

$$ص = س^{٣} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$$

$$\int_{-٢}^{٣} ٣س^{٢} \, قَ(ص) \, \frac{دص}{٣س^{٢}} = \int_{-٢}^{٣} قَ(ص) \, . \, دص =$$

$$\left[ق(ص)\right]_{-٢}^{٣} = \left[ق(س^{٣})\right]_{-٢}^{٣}$$

$$ق(٣^{٣}) - ق((-٢)^{٣}) = ق(٢٧) - ق(-٨) = -٦ - ٥$$

$$= -١١$$

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢} ق(س)\,ح س = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(س^{٢}+١)\,ح س$

الحل

$ص = س^{٢}+١ \Leftarrow \frac{ح ص}{ح س} = ٢س \Leftarrow ح ص = ٢س\, ح س$

$\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(ص)\,ح ص = \int_{٢}^{٥} ٤\, ق(ص)\,ح ص$

عندما $س = -١ \leftarrow ص = (-١)^{٢}+١ = ٢$

عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٢^{٢}+١ = ٥$

$\int_{٢}^{٥} ٤\, ق(ص)\,ح ص = ٤ \times -٣ = -١٢$

---

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٤} ٢س \sqrt{س^{٢}+٩}\,ح س$

الحل

$\int_{٠}^{٤} ٢س (س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,ح س$

$ص = س^{٢}+٩ \Leftarrow \frac{ح ص}{ح س} = ٢س \Leftarrow ح ص = ٢س\, ح س$

$\frac{ح ص}{ح س} = ٢س$

$\int_{٠}^{٤} ٢س \cdot ص^{\frac{١}{٢}} \frac{ح ص}{ح س} = \int_{٠}^{٤} ص^{\frac{١}{٢}}\,ح ص = \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}\right]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}}$

$\frac{٢}{٣} \left[\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}}\right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(٤^{٢}+٩)^{٣}} - \sqrt{(٠+٩)^{٣}}\right)$

$\frac{٢}{٣}\left(٥^{٣} - ٣^{٣}\right) = \frac{٢}{٣}(١٢٥ - ٢٧)$

$= \frac{٢}{٣} \times ٩٨ = \frac{١٩٦}{٣}$