

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s^2 = 2u^3 + 4u^2$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + \frac{4}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{2}(s^4) + \frac{4}{3}(s^3) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0$$

$$\int_1^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{5} = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \cdot \frac{1}{u} \int_1^3$$

$$\int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5u} = \int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5(1+\sqrt{5x})}$$

$$\frac{2}{5} = 3 - x \cdot \frac{2}{5} = (4-1) \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right)$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{1-x^2} dx$

$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب) \sqrt{أس} ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) \sqrt{أس} ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب) \sqrt{أس} = \int \frac{(أس + ب) \sqrt{أس}}{أس(1+ن)} d(أس)$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) \sqrt{أس} = \int \frac{جتا(أس + ب) \sqrt{أس}}{أس} d(أس)$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}} ، (2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1) \sqrt{أس}}$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}} d(أس) = \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}} d(أس)$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس^4 - 1) \sqrt{أس}} d(أس)$$