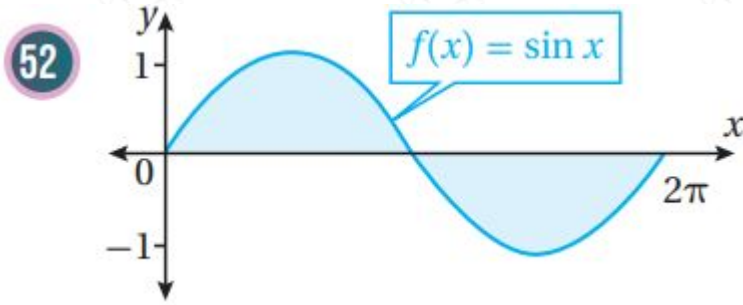


مهارات التفكير العليا

تكامل اقترانات خاصة

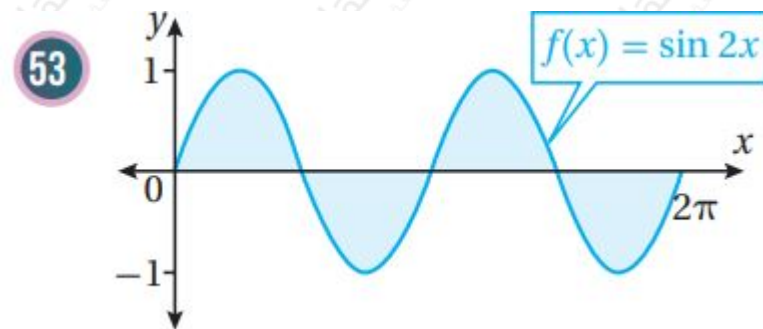
تبرير: أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين، مبرراً إجابتي;



$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

ملحوظة: يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2(-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 2(-\cos \pi + \cos 0) = 2(1 + 1) = 4$$



$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \Big|_0^{2\pi} = \left(-\frac{1}{2} \cos 4\pi\right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 0\right) = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \Big|_0^{\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

تحد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\pi} (\sec x - \cos x) \, dx$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \int \sec^2 x \cos x (\sin x \cos x dx = \int \sec x - \cos x \sin \sec x$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = -12 \int -2 \cot x^2 \csc x \csc x dx = \int \cot x^2 + \csc \cot x$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx + C = \ln|2 \csc x + 1| + C = -12 \ln|2 \csc x - 12 \ln$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

(57) تبرير: إذا كان: $\int_0^1 (1-x-2x^2+3x^3) dx = 0.5 \ln a$, فأجد قيمة الثابت a , حيث: $a > 0$.

$$\int_0^1 (1-x-2x^2+3x^3) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\ln a = 0.5 \ln a \Rightarrow \ln a = 0 \Rightarrow a = 1$$

(58) تبرير: أثبت بطريقتين مختلفتين أن:

$$\int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos x dx = \int_0^{\pi/4} \sin x \cos^3 x dx$$

طريقة أولى:

$$\int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos x dx = \int_0^{\pi/4} (3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) dx = \int_0^{\pi/4} (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) dx$$

$$= \left[\cos^3 x - \frac{\sin^4 x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \left(\cos^3 \frac{\pi}{4} - \frac{\sin^4 \frac{\pi}{4}}{4} \right) - (1 - 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^4}{4} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{4}$$

طريقة ثانية:

$$\int_0^{\pi/4} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin x dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x \sin x - \sin^3 x) dx = \left[\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\sin^4 x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \left(\frac{\cos^3 \frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\sin^4 \frac{\pi}{4}}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{12}$$

(59) تبرير: إذا كان: $\int_0^{\pi/3} (1 - \sin kx) dx = \frac{\pi}{3} (7 - 6k)$, فأجد قيمة الثابت k , مبرراً إجابتي.

$$\int_0^{\pi/4} (3 - 4k - \pi k \cos kx) dx = \pi^3 k + \pi k \cos kx \Big|_0^{\pi/4} = \pi^3 k + \pi k \cos \frac{\pi^4 k}{4} - \pi^3 k = \pi^3 k (1 - \pi \sin \frac{\pi^4 k}{4})$$

$$\pi^4 = \pi k (13 + 12 - 14 - 22) = \pi 12k (7 - 62) \Rightarrow \pi 12k (7 - 62) = \pi (7 - 62) \Rightarrow k = \cos 112$$

تحد: يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t+4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 20 - (t-8)^2, & 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد كلاً مما يأتي:

(60) موقع الجسيم بعد 5 ثوان من بدء الحركة.

$$v(t) = \begin{cases} 2t+4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 16t - t^2 - 44, & 6 < t \leq 10 \end{cases} \quad s(t) = \int v(t) dt = \int (2t+4) dt = t^2 + 4t + C_1$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 4t, \quad 0 \leq t \leq 6$$

$$s(5) = 25 + 20 = 45 \text{ m}$$

(61) موقع الجسيم بعد 9 ثوان من بدء الحركة.

$$s(t) = \int (16t - t^2 - 44) dt = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + C_2, \quad 6 < t \leq 10$$

لإيجاد قيمة C_2 نستعمل موقع الجسم عند $t=6$ موقعاً ابتدائياً بالنسبة للفترة $6, 10$:

$$s(6) = 8(6)^2 - 13(6)^3 - 44(6) + C_2$$

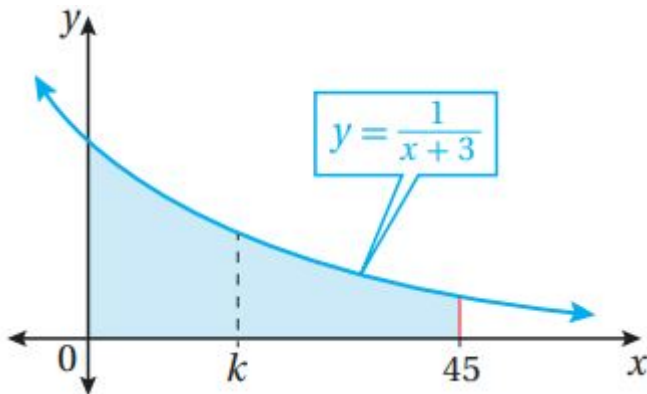
ونحسب $s(6)$ من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[0, 6]$:

$$s(t) = t^2 + 4t, \quad 0 \leq t \leq 6 \quad s(6) = 6^2 + 4(6) = 60$$

$$60 = 8(6)^2 - 13(6)^3 - 44(6) + C_2$$

$$60 = -48 + C_2 \Rightarrow C_2 = 108 \Rightarrow s(t) = 8t^2 - 13t^3 - 44t + 108, \quad 6 < t \leq 10$$

$$s(9) = 117 \text{ m}$$



(62) تحد: يبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y=1x+3$ والمحاور x ، والمسـتـقيم: $x=0$ ، $x=45$ ، أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المطلقة إلى منطقتين متساويتين في الساحة.

$$1612A = \int_0^k \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^k = \ln k + 3 - \ln 3$$

$$1612A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^{45} = \ln 48 - \ln 3$$

$$k+3 \Rightarrow 4 = 161/2 = \ln k + 3 - \ln 3 \Rightarrow \ln k + 3 = 161/2 + \ln 3$$

$$k+3 \Rightarrow k = 9$$