إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

$u=x^2+4 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x}=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$
$=u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x^2+4}+C$

(2) $\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}\, dx$

$u=1-\cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow dx=\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du$
$\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2\sin\frac{x}{2}dx=\int u^2\sin\frac{x}{2}\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du=\int 2u^2du=\frac{2}{3}u^3+C=\frac{2}{3}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^3+C$

(3) $\int \csc^5 x\cos^3 x\, dx$

$\int \csc^5x\cos^3xdx=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx=\int \cot^3x\csc^2xdx$
$u=\cot x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\csc^2x \Rightarrow dx=\frac{du}{-\csc^2x}$
$\int \csc^5x\cos^3xdx=\int \cot^3x\csc^2xdx=\int u^3\csc^2x\frac{du}{-\csc^2x}=\int -u^3du=-\frac{1}{4}u^4+C=-\frac{1}{4}\cot^4x+C$

(4) $\int x\sin x^2\, dx$

$u=x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$
$\int x\sin x^2dx=\int \frac{1}{2}\sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos x^2+C$

(5) $\int x^3(x+2)^7\, dx$

$u=x+2 \Rightarrow dx=du, x=u-2$
$\int x^3(x+2)^7dx=\int (u-2)^3u^7du=\int (u^{10}-6u^9+12u^8-8u^7)du=\frac{1}{11}u^{11}-\frac{3}{5}u^{10}+\frac{4}{3}u^9-u^8+C=\frac{1}{11}(x+2)^{11}-\frac{3}{5}(x+2)^{10}+\frac{4}{3}(x+2)^9-(x+2)^8+C$

(6) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\, dx$

$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx=\int \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}dx$
$u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,du$
$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx=\int \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}dx=\int \frac{1}{2}u\,du=\frac{1}{4}u^2+C=\frac{1}{4}(\ln x)^2+C$

(7) ∫exx dx

u=x⇒dudx=12x⇒dx=2xdu∫exxdx=∫eux×2xdu=2∫eudu=2eu+C=2ex+C

(8) ∫sin (ln 4x2)x dx

∫sin(ln4x2)xdx=∫sin(2ln2x)xdxu=2ln2x⇒dudx=2x⇒dx=x2du∫sin(ln4x2)xdx=∫sinux×x2du=12∫sinudu=−12cosu+C=−12cos(2ln2x)+C=−12cos(ln4x2)+C

(9) ∫sec2 x cos3 (tan x) dx

u=tanx⇒dudx=sec2x⇒sec2xdx=du∫sec2xcos3(tanx)dx=∫cos3udu=∫cosucos2udu=∫cosu(1−sin2u)duv=sinu⇒dvdx=cosu⇒cosudx=dv∫cosu(1−sin2u)du=∫(1−v2)dv=v−13v3+C=sinu−13sin3u+C=sin(tanx)−13sin3(tanx)+C

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

∫sec2 xcos (tan x)(1−sin2 (tan x)) dx

وبتعويض واحد فقط هو $u = \sin(\tan x)$.

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(6208x4x+1dx (10∫

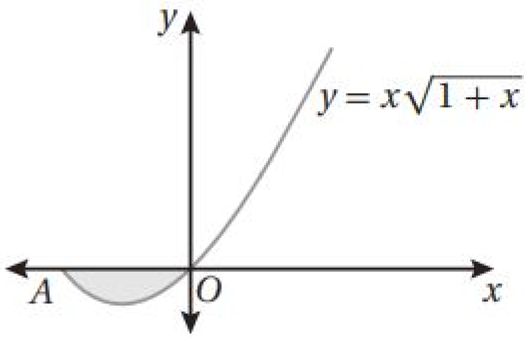
(x−1dx (11+2511∫

(xdx (122x1+cos0π/2sin∫

(x)3xdx (13+1)14∫

(xdx (14xcos20π/4etan∫

(xdx (15xsin30π/3cos2∫



(16) يـــبين الشكـــل المجـــاور جـــزءاً مـــن منحنى الاقتران: f(x)=xx+1.

أجد مساحة المنطقة المظللة في هذا الشكل.

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران f(x)، ونقطة يمر بها منحنى y=f(x) أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران f(x):

(x;(π4,0) (17xcos3f′(x)=16sin

(f′(x)=xx2+5;(2,1) (18

(19) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:v(t)=−2t(1+t2)3/2، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 4 m، فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية.