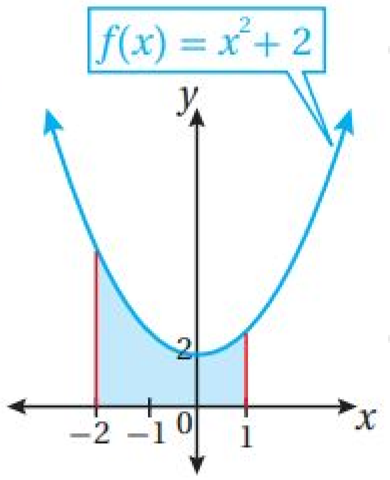
أتدرب وأحل المسائل

المساحة

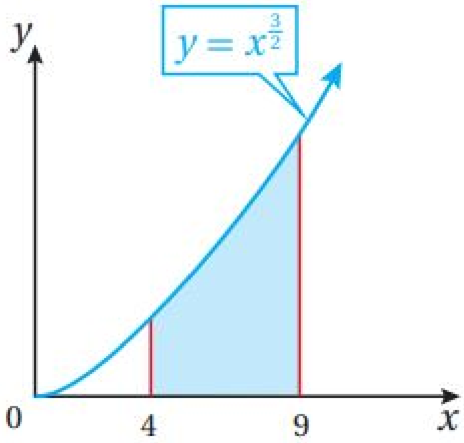
أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

1



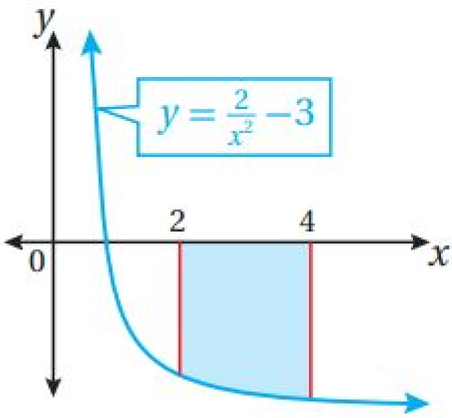
$A=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(\frac{1}{3}(1)^3+2(1)\right)-\left(\frac{1}{3}(-2)^3+2(-2)\right)=9$

2



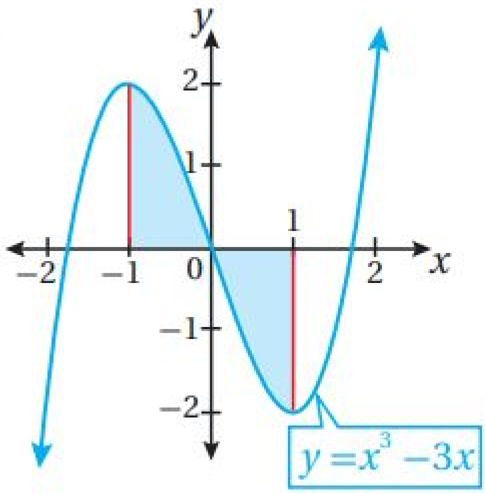
$A=\int_{4}^{9}x^{\frac{3}{2}}dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{4}^{9}=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{4}^{9}=\left(\frac{2}{5}9^{\frac{5}{2}}\right)-\left(\frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}}\right)=\frac{422}{5}$

3



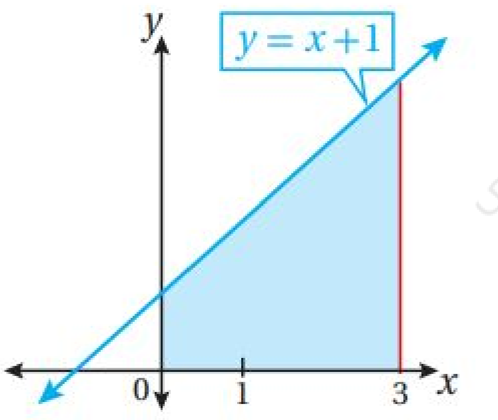
A=−∫24(2x2−3)dx=−∫24(2x−2−3)dx=∫24(−2x−2+3)dx=(2x−1+3x)|24=(2x+3x)|24=(24+3(4))−(22+3(2))=112

4



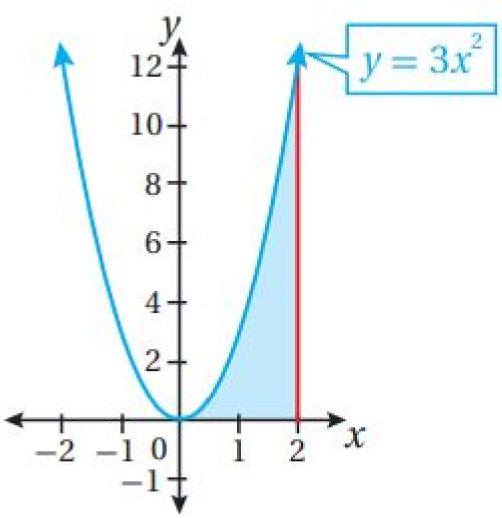
A=∫−10(x3−3x)dx−∫01(x3−3x)dx=∫−10(x3−3x)dx+∫01(−x3+3x)dx=(14x4−32x2)|−10+(−14x4+32x2)|01=(0)−(14(−1)4−32(−1)2)+(−14(1)4+32(1)2)−(0)=52

5



A=∫03(x+1)dx=(12x2+x)|03=(12(3)2+3)−(12(0)2+0)=152

6



A=∫023x2dx=x3|03=(33)−(03)=27

(7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:f(x)=3x2−2x+2، والمحور x، والمستقيمين: x=0,x=2

f(x)=3x2−2x+2

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

f(x)=0⇒3x2−2x+2=0

نحسب المميز:

Δ=b2−4ac=(−2)2−4(3)(2)=−20

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و

2 نختار عدداً ضمن الفترة [0,2]، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

f(1)=3(1)2−2(1)=1>0

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [2,0]

A=∫02(3x2−2x+2)dx=(13x3−x2+2x)|02=(13(2)3−(2)2+2(2))−(13(0)3−(0)2+2(0))=83

إذن، المساحة هي: 83 وحدة مربعة.

(8) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: f(x)=9−x2، والمحور x

f(x)=9−x2

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

f(x)=0⇒9−x2=0⇒(3+x)(3−x)=0⇒x=−3,x=3

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [-3,3]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

f(0)=9−(0)2=9>0

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [3,3-]

A=∫−33(9−x2)dx=(9x−13x3)|−33=(9(3)−13(3)3)−(9(−3)−13(−3)3)=36

إذن، المساحة هي: 36 وحدة مربعة.

(9) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: f(x)=x3+4x، والمحور x، والمستقيمين: x=-1,x=2

f(x)=x3+4x

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

f(x)=0⇒x3+4x=0⇒x(x2+4)=0⇒x=0

مميز العبارة التربيعية (x2+4) سالب، لذا لا أصفار لها.

نختار عدداً ضمن الفترة [-1,0]، وليكن 12- ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(-12)=(-12)3+4(-12)=-172<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [-1,0]

نختار عدداً ضمن الفترة [0,2]، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(1)=(1)3+4(1)=5>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [0,2]

$A=-\int-10(x3+4x)dx+\int02(x3+4x)dx=\int-10(-x3-4x)dx+\int02(x3+4x)dx=(-14x4-2x2)|-10+(14x4+2x2)|02=((0)-(-14(-1)4-2(-1)2))+((-14(2)4+2(2)2)-(0))=254$

إذن، المساحة هي: 254 وحدة مربعة.

(10) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=-7+2x-x2$، والمحور x، والمستقيمين: $x=1,x=4$

$f(x)=-7+2x-x2$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0\Rightarrow-7+2x-x2=0$

نحسب المميز:

$\Delta=b2-4ac=(2)2-4(-1)(-7)=-24$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عدداً ضمن الفترة [1,4]، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(1)=-7+2(1)-(1)2=-6<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [1,4]

$A=-\int14(-7+2x-x2)dx=\int14(7-2x+x2)dx=(7x-x2+13x3)|14=(7(4)-(4)2+13(4)3)-(7(1)-(1)2+13(1)3)=27$

إذن، المساحة هي: 27 وحدة مربعة.

(11) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=5-x$، والمحور x، والمستقيمين: $x=3,x=5$

$f(x)=5-x$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0\Rightarrow 5-x=0\Rightarrow x=5$

نختار عدداً ضمن الفترة [3,5]، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(4)=5-(4)=1>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [3,5]

$A=\int 35(5-x)dx=(5x-12x2)|35=((5(5)-12(5)2)-(5(3)-12(3)2))=2$

إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

(12) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $(f(x)=(x+1)(x-4$، والمحور x

$(f(x)=(x+1)(x-4$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0\Rightarrow (x+1)(x-4)=0\Rightarrow x=-1,x=4$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [-1,4]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

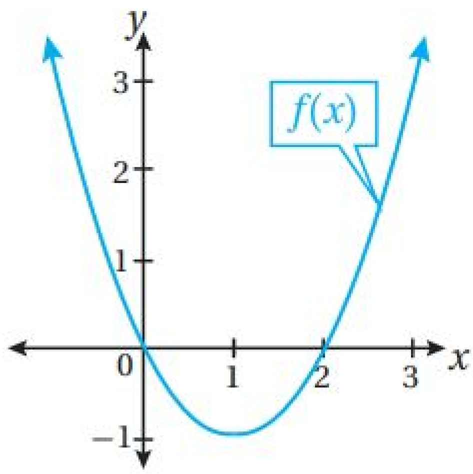
$f(0)=(0+1)(0-4)=-4<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [-1,4]

$A=-\int -14(x+1)(x-4)dx=-\int -14(x2+x-4x-4)dx=-\int -14(x2-3x-4)dx=\int -14(-x2+3x+4)dx=(-13x3+32x2+4x)|-14=(-13(4)3+32(4)2+4(4))-(-13(-1)3+32(-1)2+4(-1))=1256$

إذن، المساحة هي: 256 وحدة مربعة.

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)=x2-2x$:



(13) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x

$f(x)=x2-2x$

حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [0,2]

$A=-\int02(x2-2x)dx=\int02(-x2+2x)dx=(-13x3+x2)|02=(-13(2)3+(2)2)-(-13(0)3+(0)2)=43$

إذن، المساحة هي: 43 وحدة مربعة.

(14) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم x=3

$A=\int23(x2-2x)dx=(13x3-x2)|23=((9-9)-(83-4))=43$

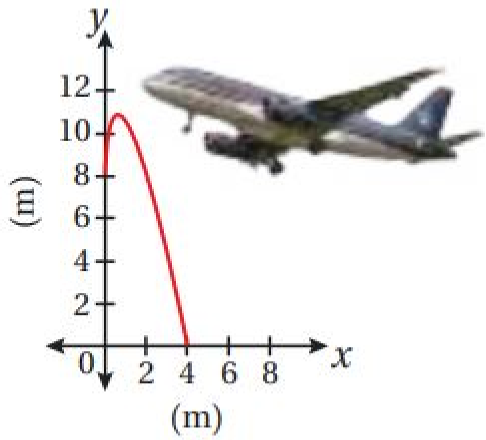
إذن، المساحة هي: 43 وحدة مربعة.

(15) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم x=-1

$A=\int-10(x2-2x)dx=(13x3-x2)|-10=(0)-(-13-1)=43$

إذن، المساحة هي: 43 وحدة مربعة.

(16) يـبين التمثيـل البيـاني المجـاور شكـل السـطح العلوي لجناح طائرة، ممثلاً بالمعادلة: y=8+8x−6x، حيـث: 0≤x≤4. أجـد مساحـة السـطح العلـوي لجنـاح الطائرة.



A=∫04(8+8x−6x)dx=∫04(8+8x12−6x)dx=(8x+163x32−3x2)|04=(8x+163x3−3x2)|04=(8(4)+16343−3(4)2)−(0)=803

إذن، المساحة هي: 803 وحدة مربعة.