

## أدرب وأحل المسائل

### تكامل اقترانات خاصة

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (12ex+3x)dx \quad (1)$$

$$\int (12ex+3x)dx = 12ex+3x^2+C$$

$$\int (x^2+2x+1x^2)dx \quad (2)$$

$$\int (x^2+2x+1x^2)dx = \int (x^2x^2+2xx^2+1x^2)dx = \int (1+2x+x-2)dx = x+2\ln|x-1|+C$$

$$\int (ex+1)^2dx \quad (3)$$

$$\int (ex+1)^2dx = \int (e^2x+2ex+1)dx = 12e^2x+2ex+x+C$$

$$\int (1x(x+2))dx \quad (4)$$

$$\int (1x(x+2))dx = \int (4x-3+5x)dx = -2x-2+5\ln|x+1|+C$$

$$\int (4x^3+5x)dx \quad (5)$$

$$\int (4x^3+5x)dx = \int (4x-3+5x)dx = -2x-2+5\ln|x+1|+C$$

$$\int (x+3e^{6x}-7x)dx \quad (6)$$

$$\int (x+3e^{6x}-7x)dx = \int (x^2+3e^{6x}-7x)dx = \frac{23x^3}{2}+12e^{6x}-7\ln|x+1|+C$$

$$\int (3x+1-5e^{-2x})dx \quad (7)$$

$$\int (3x+1-5e^{-2x})dx = 3\ln|x+1|+52e^{-2x}+C$$

$$\int (12x-3)dx \quad (8)$$

$$\int (12x-3)dx = \int (2x-3)-12dx = (2x-3)^2+12+C$$

$$\int ((2x-3)+e^{6x}-4)dx \quad (9)$$

$$\int (2x-3)e^{6x-4} + C(2x-3) + e^{6x-4} dx = -12 \cos(\sin) \int$$

$$\int ((6x+1)dx (104 \cos f$$

$$\int (6x+1) + C(6x+1) dx = 23 \sin 4 \cos f$$

$$\int (x^4 dx (11x+3 \cos \sin f$$

$$\int x) dx = -14 \cos x + 34 \cos x^4 dx = \int (14 \sin x^4 + 3 \cos x^4 dx = \int (\sin x + 3 \cos \sin f$$

$$x + Cx + 34 \sin$$

$$\int (e^{6x} + (1-2x)^6) dx (12) \int$$

$$\int e^{6x-4} + (1-2x)^6 dx = 16e^{6x-4} - 114(1-2x)^7 + C \int$$

$$\int (x^2+1) dx (13) \int$$

$$\int |x^2+1| + Cx^2+1 dx = \int 12(2x)x^2+1 dx = 12 \int 2xx^2+1 dx = 12 \ln \int$$

$$\int (x^2x^3-3) dx (14) \int$$

$$\int |x^3-3| + Cx^2x^3-3 dx = \int 13(3x^2)x^3-3 dx = 13 \int 3x^2x^3-3 dx = 13 \ln \int$$

$$\int (x^2-x^2x^3-3x^2+12) dx (15) \int$$

$$\int x^2-x^2x^3-3x^2+12 dx = \int 16(6x^2-6x)x^2x^3-3x^2+12 dx = 16 \int 6x^2-6x^2x^3 \int$$

$$|2x^3-3x^2+12| + C3-3x^2+12 dx = 16 \ln$$

$$\int (e^x+7e^x) dx (16) \int$$

$$\int e^x+7e^x dx = \int (e^x e^x+7e^x) dx = \int (1+7e^{-x}) dx = x-7e^{-x} + C \int$$

$$\int (15-14x) dx (17) \int$$

$$\int |5-14x| + C15-14x dx = \int -4(-14)5-14x dx = -4 \ln \int$$

$$\int ((5-3x)) dx (18) 4x^3+2+3 \sin) \int$$

$$\int (5-3x) + C(5-3x)) dx = x^4+2x+\cos 4x^3+2+3 \sin) \int$$

$$\int (e^{2x}e^{2x}+3)dx \quad (19)$$

$$\int |e^{2x}+3|+Ce^{2x}e^{2x}+3dx = \int 12(2e^{2x})e^{2x}+3dx = 12 \ln |$$

$$\int (1-4x)^2 dx \quad (20)$$

$$\int (1-4x)^2 dx = \int 3(1-4x)-2 dx = \frac{3}{4}(1-4x)^2 - 2x + C = \frac{3}{4}(1-4x)^2 + C$$

$$\int (x e^{xx} dx) \quad (21)$$

$$\int |x|+e^x+Cx e^{xx} dx = \int (1x+x e^{xx}) dx = \int (1x+e^x) dx = \ln |x| + 1 + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int (2x+3e^x-4x) dx \quad (22)$$

$$\int |2x+3e^x-4x| dx = \int ((2x)^2+3e^{2x}-4 \ln |2x+3e^x-4x|) dx = (x^2+3e^x-4 \ln |2x+3e^x-4x|) \Big|_2^{-1} = 3+3e^2-4 \ln |3e^1-4| - 2-3e^{-1}+4 \ln |2-3e^{-1}|$$

$$\int (0.5x^2+10) dx \quad (23)$$

$$\int |x^2+10| 0.5x^2+10 dx = \int 0.5(2x)x^2+10 dx = 12 \int 0.5(2x)x^2+10 dx = 12 \ln |x^2+10| \Big|_{11}^{14} = 12 \ln |14^2+10| - 12 \ln |11^2+10| = 12 \ln |206| - 12 \ln |121+10| = 12 \ln \frac{206}{131}$$

$$\int (2x-6)^4 dx \quad (24)$$

$$\int (2x-6)^4 dx = \frac{1}{5} (2x-6)^5 \Big|_{2(4)}^{2(3)} = \frac{1}{5} (2(4)-6)^5 - \frac{1}{5} (2(3)-6)^5 = \frac{1}{5} (2)^5 - \frac{1}{5} (-2)^5 = \frac{32}{5} + \frac{32}{5} = \frac{64}{5}$$

(25) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران:  $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $v$  سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم  $m$ ، فأجد موقع الجسيم بعد 4 ثانية من بدء الحركة.

$$v(t) = e^{-2t} \Rightarrow s(t) = \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} + C = -12e^{-2t} + C$$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم  $m$  إذن  $s(0) = 2$

$$s(0) = -12e^0 + C = -12 + C = 2 \Rightarrow C = 14 \Rightarrow s(t) = -12e^{-2t} + 14$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران  $(f(x), g(x))$ ، ونقطة يمر بها منحنى  $y=f(x)$  أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران  $(f(x), g(x))$ :

$$(f'(x)=5e^x; (0,12) \text{ (26)})$$

$$f(x)=\int 5e^x dx=5e^x+C$$

لإثبات ثابت التكامل، نعوض النقطة (0,12):

$$f(x)=5e^x+C \Rightarrow f(0)=5e^0+C \Rightarrow 12=5+C \Rightarrow C=-92 \Rightarrow f(x)=5e^x-92$$

$$(f'(x)=2x-1x^2; (1,-1) \text{ (27)})$$

$$|x|+1x+C \Rightarrow |x|+x-1+C=2 \ln f(x)=\int (2x-1x^2) dx=\int (2x-x-2) dx=2 \ln$$

لإثبات ثابت التكامل، نعوض النقطة (1,-1):

$$|x|+1x-2 \ln |x|+1+C \Rightarrow -1=1+C \Rightarrow C=-2 \Rightarrow f(x)=2 \ln |x|+1x+C \Rightarrow f(1)=2 \ln f(x)=2 \ln$$

$$(f'(x)=e^{-x}+x^2; (0,4) \text{ (28)})$$

$$f(x)=\int (e^{-x}+x^2) dx=-e^{-x}+13x^3+C$$

لإثبات ثابت التكامل، نعوض النقطة (0,4):

$$f(x)=-e^{-x}+13x^3+C \Rightarrow f(0)=-e^0+13(0)^3+C=4=-1+C \Rightarrow C=5 \Rightarrow f(x)=-e^{-x}+13x^3+5$$

(29) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة  $y$  هو:  $\frac{dy}{dx}=2x+3x+e$ ، فأجد قاعدة العلاقة  $y$ ، علماً بأن منحنىها يمرّ بالنقطة  $(e, e^2)$ .

$$|x+e|+Cy=\int (2x+3x+e) dx=x^2+3 \ln$$

لإثبات ثابت التكامل، نعوض النقطة  $(e, e^2)$ :

$$2e|x+e|-3 \ln 2e f(x)=x^2+3 \ln 2e+C \Rightarrow C=-3 \ln |e+e|+C \Rightarrow e^2=e^2+3 \ln |x+e|+C \Rightarrow f(e)=e^2+3 \ln f(x)=x^2+3 \ln$$



بيئة: في دراسة تناولت أسماكاً في بحيرة، تبين أن عدد الأسماك  $P(t)$  يتغير بـمعـدل:  
 $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$   
 حيث  $t$  الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

(30) أجد قاعدة الاقتران  $P(t)$  عند أي زمن  $t$ ، علماً بأن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة.

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t} dt = -0.51 \cdot 0.03e^{-0.03t} + C = -17e^{-0.03t} + C$$

بما أن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة، إذن  $P(0) = 1000$  ومنه:

$$P(0) = -17e^{-0.03(0)} + C = 1000 \Rightarrow -17 + C = 1000 \Rightarrow C = 1017$$

(31) أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة.

$$P(10) = -17e^{-0.03(10)} + 1017 \approx 1004$$

عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة هو 1004 سمكة تقريباً.

طب: يلتئم جرح جلدي بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران:  $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$ ، حيث  $t$  عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و  $A(t)$  مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

(32) أجد قاعدة الاقتران  $A(t)$ ، عند أي زمن  $t$ ، علماً بأن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي 9 cm<sup>2</sup>.

$$A(t) = \int -0.9e^{-0.1t} dt = 0.9 \cdot 10e^{-0.1t} + C = 9e^{-0.1t} + C$$

بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي 9 cm<sup>2</sup>، إذن  $A(0) = 9$  ومنه:

$$A(0) = 9e^{-0.1(0)} + C = 9 + C = 9 \Rightarrow C = 0$$

(33) أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

$$A(5) = 9e^{-0.1(5)} \approx 5.5 \text{ cm}^2$$

مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة هي 5.5 cm<sup>2</sup> تقريباً.