

## مهارات التفكير العليا

### المساحات والحجوم

تبرير: أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(22) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين:  $y=x^{1/2}, y=x^2$ .

$$x^2=x^{1/2} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$$

$$A = \int_0^1 (x^{1/2}-x^2) dx = \left( \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

(23) أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين:  $y=x^{1/3}, y=x^3$ .

$$x^3=x^{1/3} \Rightarrow x^9=x \Rightarrow x^9-x=0 \Rightarrow x(x^8-1)=0 \Rightarrow x(x^4-1)(x^4+1)=0 \Rightarrow x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-1, x=1$$

$$(18) \quad 13=12, (18)^3=1512 \Rightarrow x^{13} > x^3, 0 < x < 1$$

$$(-18) \quad 13=-12, (-18)^3=-1512 \Rightarrow x^3 > x^{13}, -1 < x < 0$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^3-x^{13}) dx + \int_0^1 (x^{13}-x^3) dx = \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{14}x^{14} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{14}x^{14} - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = 0 - (-\frac{1}{4} + \frac{1}{14}) + (\frac{1}{14} - \frac{1}{4}) = 0$$

$$-(-\frac{1}{4} + \frac{1}{14}) + \frac{1}{14} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{4} = 0$$

(24) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين  $y=x^{1/n}, y=x^n$ : حيث  $n$  عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مبرراً إجابتى.

أولاً إذا كان  $n$  زوجياً

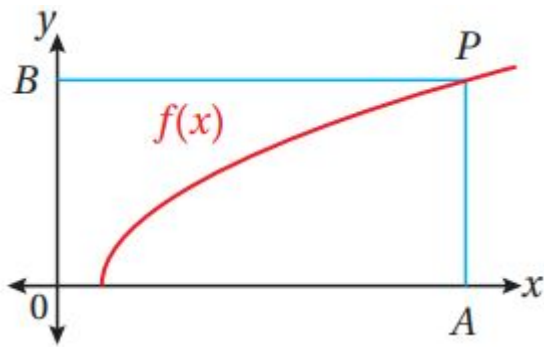
يتقاطع المنحنيان عند  $x=0, x=1$

$$A = \int_0^1 (x^{1/n} - x^n) dx = \left( \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}x^{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - 0 = 0$$

ثانياً إذا كان  $n$  فردياً

يتقاطع المنحنيان عند  $x=0, x=1, x=-1$

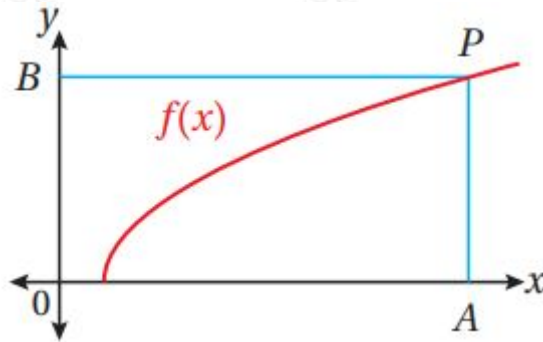
$$A = \int_{-1}^0 (x^n - x^{1/n}) dx + \int_0^1 (x^{1/n} - x^n) dx = \left( \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}x^{n+1} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}x^{n+1} \right) \Big|_0^1 = 0 - (-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - 0 = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى  
الاقتران:  $f(x)=2x-2$ ، حيث:  $x \geq 1$ . إذا كانت  
النقطة  $P(9,4)$  تقع على منحنى الاقتران  $f(x)$ ،  
حيث  $PA$  يوازي المحور  $y$ ، و  $PB$  يوازي المحور  
 $x$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(25) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $f(x)$ ، والمستقيم  
 $y=4$  والمحورين الإحداثيين.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

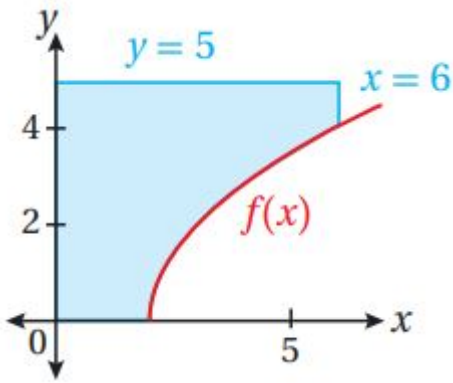


نقسم المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى قسمين برسم المستقيم  $x=1$ ، ونجد  
المساحة كما يأتي:

$$A = \int_0^1 4 dx + \int_1^9 (4 - 2x - 2) dx = (4x) \Big|_0^1 + (4x - 13(2x-2)) \Big|_1^9 = 4 - 0 + 36 - 13(16) - (4 - 0) = 443$$

(26) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $f(x)$ ، والمستقيم  $x=9$ ،  
والمحور  $x$ .

$$A = \int_9^{19} 2x - 2 dx = 13(2x - 2) \Big|_9^{19} = 13((16)32 - 0) = 643$$

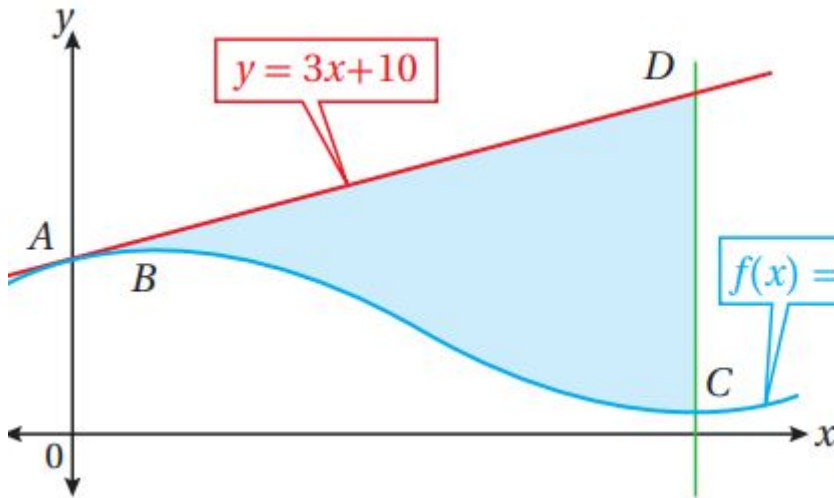


(27) تبرير: بين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأول، ومنحنى الاقتران:  $f(x)=2x-2$ ، والمستقيمين:  $x=6, y=5$ . أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة حول المحور  $bb$ ، مبرراً إجابتي.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=2$$

نقسم المنطقة إلى قسمين برسم المستقيم  $x=2$ ، ونجد الحجم كما يأتي:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 5^2 dx + \pi \int_2^6 (5^2 - (2x-2)^2) dx = \pi \int_0^2 25 dx + \pi \int_2^6 (25 - (4x-8)) dx \\ &= 50\pi + \pi \int_2^6 (33 - 4x) dx = 50\pi + \pi (33x - 2x^2) \Big|_2^6 = 50\pi + \pi (33(6) - 72 - 66 + 8) = 118\pi \end{aligned}$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى كل من الاقتران:  $f(x)=x^3-5x^2+3x+10$  والمستقيم:  $y=3x+10$ ، و

دا مر المستقيم ومنحنى الاقتران بالنقطة A الواقعة على المحور  $y$ ، وكان للاقتران قيمة عظمى محلية عند النقطة B، وقيمة صغرى محلية عند النقطة C، وقطع الخط الموازي للمحور  $y$  والمار بالنقطة C المستقيم:  $y=3x+10$  في النقطة D؛ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(28) أجد إحداثيات كل من النقطة B، والنقطة C.

$$y=x^3-5x^2+3x+10 \quad f'(x)=3x^2-10x+3=0 \Rightarrow (3x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1/3, x=3$$

نقطة القيمة العظمى هي:

$$(B(13, f(13)) = (13, 28327)$$

نقطة القيمة الصغرى هي:

$$(C(3, f(3)) = (3, 1)$$

(29) أثبت أن  $AD \perp$  مماس لمنحنى الاقتران  $f(x)$  عند النقطة  $A$ ، مبرراً إيجابتي.

النقطة  $A$  تقع على محور  $y$  إذن أحداثياها هما:

$$(A(0, f(0)) = (0, 10)$$

ميل المنحنى عند  $A$  هو:

$$dy/dx|_{x=0} = 0 - 0 + 3 = 3$$

معادلة مماس المنحنى  $f(x)$  عند النقطة  $A$  هي (حيث  $f'(0) = 3$ ):

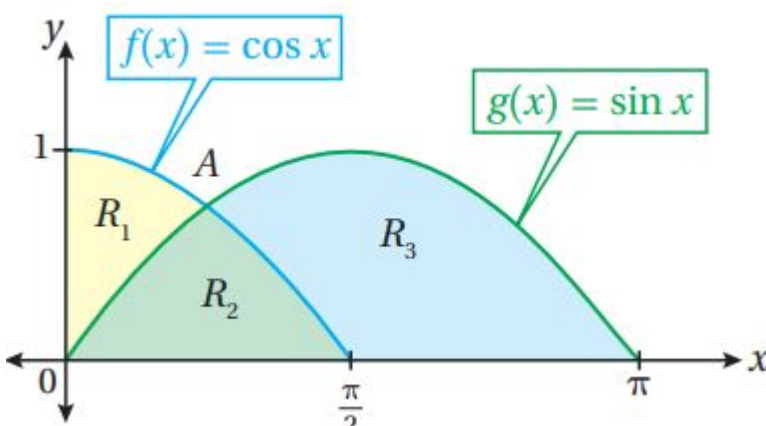
$$y - 10 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 10$$

وهذه المعادلة هي معادلة المستقيم  $AD \Leftrightarrow$  نفسها.

إذن،  $AD \perp$  مماس لمنحنى  $f(x)$  عند النقطة  $A$

(30) أجد مساحة المنطقة المظللة، مبرراً إيجابتي.

$$A = \int_0^{\pi/2} (3x + 10 - (x^3 - 5x^2 + 3x + 10)) dx = \int_0^{\pi/2} (5x^2 - x^3) dx = (5/3 x^3 - 1/4 x^4) \Big|_0^{\pi/2} = 45 - 814 - 0 = 994$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين:  $h(x) = \sin f(x) = \cos x$ , معتمداً هذا الشكل، أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(31) أجد إحداثيي النقطة A.

$$x=1 \Rightarrow x=\pi/4 \text{ or } x=5\pi/4 \Rightarrow \tan x = \sin f(x) = g(x) \Rightarrow \cos$$

نلاحظ من الرسم المعطى  $x$  تقع في الفترة  $(\pi/2, 0)$

إذن، إحداثيا النقطة A هما:  $(\pi/4, f(\pi/4)) = (\pi/4, 1/2)$

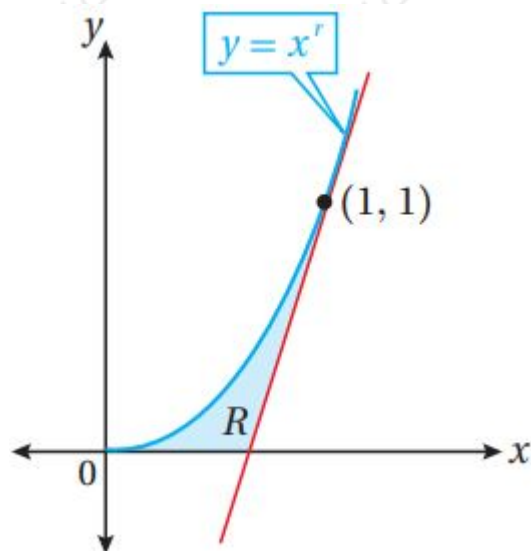
(32) أجد مساحة كل من المناطق:  $R_1, R_2, R_3$ .

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1 \\ A(R_2) &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ A(R_3) &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = (-1 - 1) - (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = -2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

(33) أثبت أن مساحة المنطقة  $R_1$  إلى مساحة المنطقة  $R_2$  تساوي 2:2.

$$A(R_1) : A(R_2) = (\sqrt{2} - 1) : (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 : 2$$

إذن:  $A(R_1) : A(R_2) = 2 : 2$



تحد: يبين الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران:  $y = x^r$  حيث:  $r > 1$ ، والمحور  $x$ ، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة  $(1, 1)$ :

(34) أثبت أن مماس منحنى الاقتران يقطع المحور  $x$  عند النقطة  $(r-1, 0)$ .

$$y = x^r, y' = r x^{r-1}$$

ميل المماس عند  $(1, 1)$  هو:

$$y' \big|_{x=1} = r(1) - 1 = r$$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = r(x - 1) \Rightarrow y = rx + 1 - r$$

لإيجاد المقطع  $x$  لهذا المماس نضع  $y = 0$  في معادلته:

$$rx + 1 - r = 0 \Rightarrow x = r - 1$$

إذن، يقطع هذا المماس المحور  $x$  في النقطة  $(r - 1, 0)$

(35) أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أن مساحة المنطقة  $R$  هي  $r - 12r(r + 1)$  وحدة مربعة.

مساحة المنطقة  $R$  تساوي المساحة بين المنحنى والمحور  $x$  والمستقيمين  $x = 0, x = 1$  مطروحاً منها مساحة المثلث الذي رؤوسه  $(1, 0), (1, 1), (r - 1, 0)$  أي أن  $A(R)$  هي:

$$A(R) = \int_0^1 x r dx - \frac{1}{2}(1 - r - 1)(1) = \frac{1}{2} r x^2 \big|_0^1 - \frac{1}{2}(1 - 2r) = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2}(1 - 2r) = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} + r = \frac{3}{2} r - \frac{1}{2}$$

(36) أجد قيمة الثابت  $r$  التي تجعل مساحة المنطقة  $R$  أكبر ما يمكن.

$$A(r) = \frac{3}{2} r - \frac{1}{2}, r \geq 1 \quad A'(r) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 > 0$$

ولأن  $r \geq 1$  تكون قيمة الحرجة  $2 + 1$

إذن، قيمة  $r$  التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن هي:  $r = 1 + 2 = 3$

تحذ: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  عند النقطة  $(1, 3)$  يقطع منحنى الاقتران مرة أخرى عند النقطة  $P$ , فأجد كلاً مما يأتي:

(37) إحداثيات النقطة  $P$ .

$$f'(x) = 2x - 4$$

ميل المماس عند النقطة  $(1, 3)$  هو:

$$f'(1) = -2$$

ميل العمودي على المماس عند النقطة (1,3) هو: 12

معادلة العمودي:

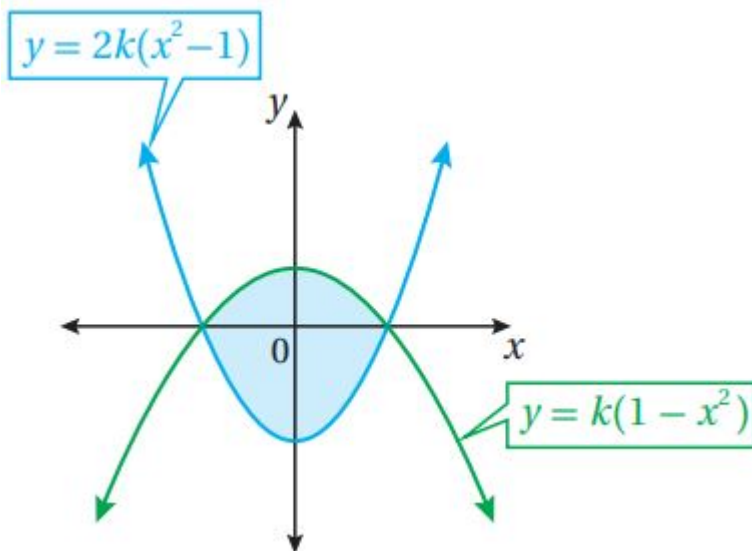
$$y - 3 = 12(x - 1) \Rightarrow y = 12x + 52$$

نجد نقاط تقاطع المنحنى والعمودي على المماس:

$$x^2 - 4x + 6 = 12x + 52 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 7 = 0 \Rightarrow (2x - 7)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 7/2, x = 1 \Rightarrow P(7/2, f(7/2)) = (7/2, 174)$$

(38) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $f(x)$  والعمودي على المماس، مقرباً إيجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

$$A = \int_{1/2}^{7/2} (12x + 52 - (x^2 - 4x + 6)) dx = \int_{1/2}^{7/2} (92x - 72 - x^2) dx = (94x^2 - 72x - 13x^3) \Big|_{1/2}^{7/2} = (94(7/2)^2 - 72(7/2) - 13(7/2)^3) - (94 - 72 - 13) = 12548 \approx 2.604$$



(39) تبرير: المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كل منهما المحور  $x$ ، عندما  $x = -1, x = 1$ . إذا كانت معادلتا القطعين هما:  $y = 2k(x^2 - 1), y = k(1 - x^2)$  وكانت مساحة المنطقة المظللة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت  $k$ .

$$\int_{-1}^1 (k(1 - x^2) - 2k(x^2 - 1)) dx = 8 \Rightarrow \int_{-1}^1 (k(1 - x^2) + 2k(1 - x^2)) dx = 8 \Rightarrow 3k \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 8$$

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 8/3k \Rightarrow (x - 13x^3) \Big|_{-1}^1 = 8/3k \Rightarrow (1 - 13) - (-1 + 13) = 8/3k \Rightarrow -24 = 8/3k \Rightarrow k = -2$$