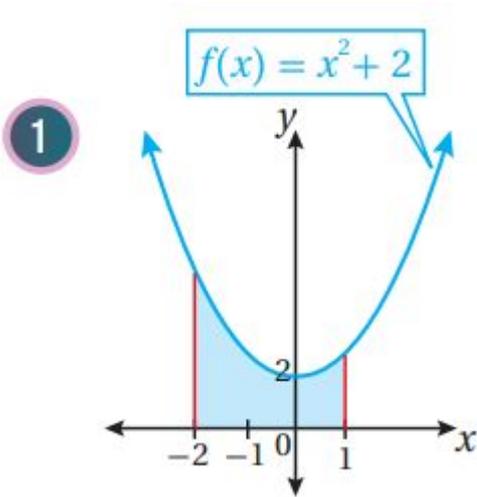


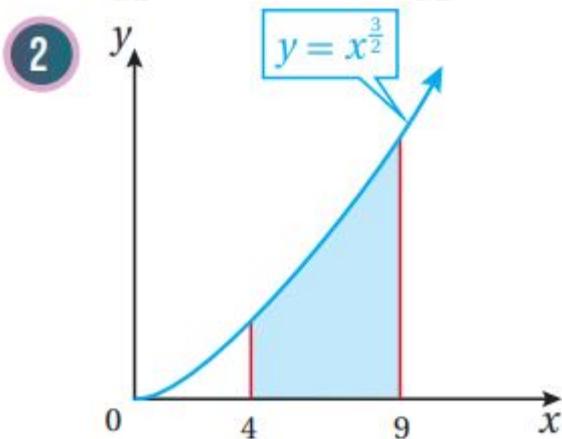
أدرب وأحل المسائل

المساحة

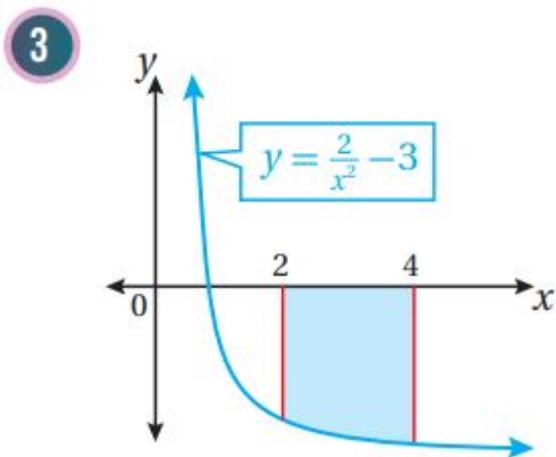
أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:



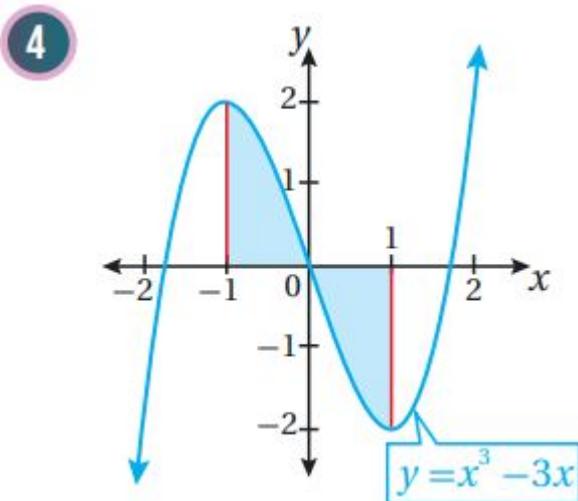
$$A = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1) \right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2) \right) = 9$$



$$A = \int_4^9 3x^{1/2} dx = \left(2x^{3/2} \right) \Big|_4^9 = \left(2(9)^{3/2} \right) - \left(2(4)^{3/2} \right) = 42$$

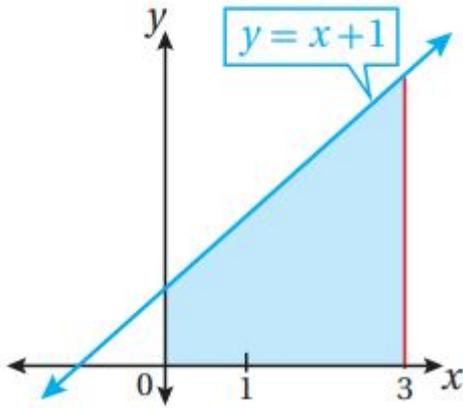


$$A = -\int_2^4 (2x^{-2} - 3) dx = -\int_2^4 (2x^{-2} - 2 - 3) dx = \int_2^4 (-2x^{-2} + 2 + 3) dx = (2x^{-1} + 2x + 3x) \Big|_2^4 = (2(4)^{-1} + 2(4) + 3(4)) - (2(2)^{-1} + 2(2) + 3(2)) = 112$$



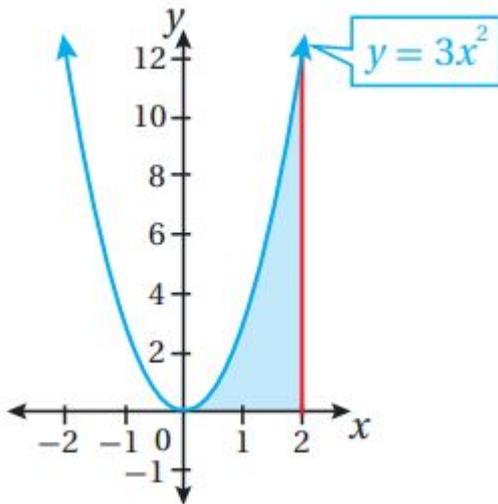
$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx - \int_0^1 (x^3 - 3x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (-x^3 + 3x) dx = (14x^4 - 32x^2) \Big|_{-1}^0 + (-14x^4 + 32x^2) \Big|_0^1 = (0) - (14(-1)^4 - 32(-1)^2) + (-14(1)^4 + 32(1)^2) - (0) = 52$$

5



$$A = \int_0^3 (x+1) dx = (12x^2 + x) \Big|_0^3 = (12(3)^2 + 3) - (12(0)^2 + 0) = 152$$

6



$$A = \int_0^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^2 = (2^3) - (0^3) = 8$$

(7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ والمحور x ، والمستقيمين: $x=0, x=2$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

نحسب المميز:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و

2 نختار عدداً ضمن الفترة $[0,2]$ ، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1)=3(1)^2-2(1)=1>0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[2,0]$

$$A=\int_0^2(3x^2-2x+2)dx=(13x^3-x^2+2x)|_0^2=(13(2)^3-(2)^2+2(2))-(13(0)^3-(0)^2+2(0))=83$$

إذن، المساحة هي: 83 وحدة مربعة.

(8) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=9-x^2$ ، والمحور x

$$f(x)=9-x^2$$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x)=0\Rightarrow 9-x^2=0\Rightarrow(3+x)(3-x)=0\Rightarrow x=-3, x=3$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة $[-3,3]$ ، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0)=9-(0)^2=9>0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3,3]$

$$A=\int_{-3}^3(9-x^2)dx=(9x-13x^3)|_{-3}^3=(9(3)-13(3)^3)-(9(-3)-13(-3)^3)=36$$

إذن، المساحة هي: 36 وحدة مربعة.

(9) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=x^3+4x$ ، والمحور x والمستقيمين: $x=-1, x=2$

$$f(x)=x^3+4x$$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x)=0\Rightarrow x^3+4x=0\Rightarrow x(x^2+4)=0\Rightarrow x=0$$

مميز العبارة التربيعية (x^2+4) سالب، لذا لا أصفار لها.

نختار عدداً ضمن الفترة $[-1,0]$ ، وليكن -12 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-12)=(-12)^3+4(-12)=-172<0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,0]$

نختار عدداً ضمن الفترة $[0,2]$ ، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1)=(1)^3+4(1)=5>0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,2]$

$$A=-\int_{-1}^0 (-10(x^3+4x))dx+\int_0^2 (10(x^3+4x))dx=\int_{-1}^0 (-10(-x^3-4x))dx+\int_0^2 (10(x^3+4x))dx=(-14x^4-2x^2)|_{-1}^0-10+(14x^4+2x^2)|_0^2=((0)-(-14(-1)^4-2(-1)^2))+((-14(2)^4+2(2)^2)-(0))=254$$

إذن، المساحة هي: 254 وحدة مربعة.

(10) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=-7+2x-x^2$ والمحور x ، والمستقيمين: $x=1, x=4$

$$f(x)=-7+2x-x^2$$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x)=0\Rightarrow -7+2x-x^2=0$$

نحسب المميز:

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(-1)(-7)=-24$$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عدداً ضمن الفترة $[1,4]$ ، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(2)=-7+2(2)-(2)^2=-6<0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[1,4]$

$$A=-\int_1^4 (-7+2x-x^2)dx=\int_1^4 (7-2x+x^2)dx=(7x-x^2+\frac{1}{3}x^3)|_1^4=(7(4)-(4)^2+\frac{1}{3}(4)^3)-(7(1)-(1)^2+\frac{1}{3}(1)^3)=27$$

إذن، المساحة هي: 27 وحدة مربعة.

(11) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=5-x$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x=3, x=5$

$$f(x)=5-x$$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x)=0 \Rightarrow 5-x=0 \Rightarrow x=5$$

نختار عدداً ضمن الفترة $[3,5]$ ، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(4)=5-(4)=1>0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[3,5]$

$$A = \int_3^5 (5-x) dx = (5x - 12x^2) \Big|_3^5 = ((5(5) - 12(5)^2) - (5(3) - 12(3)^2)) = 2$$

إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

(12) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=(x+1)(x-4)$ ، والمحور x

$$f(x)=(x+1)(x-4)$$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x+1)(x-4)=0 \Rightarrow x=-1, x=4$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة $[-1,4]$ ، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

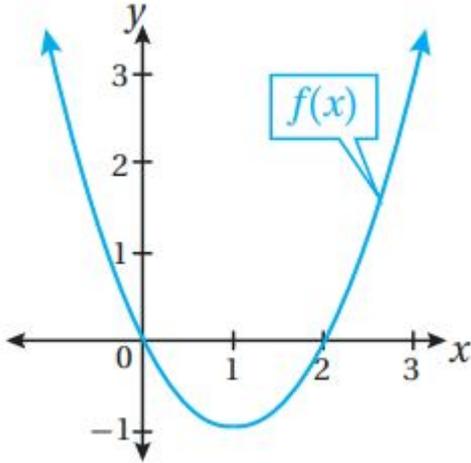
$$f(0)=(0+1)(0-4)=-4<0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,4]$

$$A = - \int_{-1}^4 (x+1)(x-4) dx = - \int_{-1}^4 (x^2+x-4x-4) dx = - \int_{-1}^4 (x^2-3x-4) dx = \int_{-1}^4 (-x^2+3x+4) dx = (-13x^3 + 32x^2+4x) \Big|_{-1}^4 = (-13(4)^3+32(4)^2+4(4)) - (-13(-1)^3+32(-1)^2+4(-1)) = 1256$$

إذن، المساحة هي: 256 وحدة مربعة.

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)=x^2-2x$:



(13) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x

$$f(x)=x^2-2x$$

حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 2]$

$$A = -\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = (-\frac{1}{3}x^3 + x^2) \Big|_0^2 = (-\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2) - (-\frac{1}{3}(0)^3 + (0)^2) = 4/3$$

إذن، المساحة هي: 4/3 وحدة مربعة.

(14) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x ، والمستقيم $x=3$

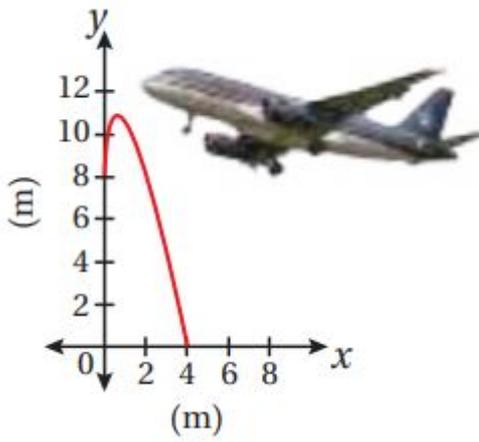
$$A = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = (\frac{1}{3}x^3 - x^2) \Big|_2^3 = ((9 - 9) - (\frac{8}{3} - 4)) = 4/3$$

إذن، المساحة هي: 4/3 وحدة مربعة.

(15) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x ، والمستقيم $x=-1$

$$A = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx = (\frac{1}{3}x^3 - x^2) \Big|_{-1}^0 = (0) - (-\frac{1}{3} - 1) = 4/3$$

إذن، المساحة هي: 4/3 وحدة مربعة.



(16) يبين التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة، ممثلاً بالمعادلة: $y=8+8x-6x^2$ ، حيث: $x \leq 4 \geq 0$. أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.

$$A = \int_0^4 (8 + 8x - 6x^2) dx = \int_0^4 (8 + 8x - 6x^2) dx = (8x + 4x^2 - 2x^3) \Big|_0^4 = (8(4) + 4(4)^2 - 2(4)^3) - (0) = 80$$

إذن، المساحة هي: 80 وحدة مربعة.