

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 3s^2 + 4s) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 3s^2 + 4s = 2u^3 + 3u^2 + 4u$$

$$\int (2u^3 + 3u^2 + 4u) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{3u^3}{3} + \frac{4u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + u^3 + 2u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(s^4 + 2s^3 + 4s^2) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \sqrt{5x} = -1$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 3 \leftarrow 1 + 3 \times 5 = 16$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 1 \leftarrow 1 + 1 \times 5 = 6$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \frac{1}{5} \int_6^{16} \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{5} \left[\ln|u| \right]_6^{16} = \frac{1}{5} (\ln 16 - \ln 6)$$

$$= \frac{1}{5} \ln \frac{16}{6} = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

الحل

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2 (1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= 1+s^2 \\ du &= 2s ds \\ ds &= \frac{du}{2s} \end{aligned}$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

$= u + \ln|u| + C$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب) \cdot كس ، حيث أ، ب ثابتان، أ ≠ ٠ ، ن ≠ ١$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) كس ، حيث أ، ب ثابتان، أ ≠ ٠$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب) \cdot كس = كس \cdot \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن+١}$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) كس = كس \cdot جتا(أس + ب) + \frac{كس}{أ}$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس^٢ - ١) كس$$

$$(2) \int (أس^٤ - ١) كس$$

الحل

$$(1) \int (أس^٢ - ١) كس = \frac{أس^٣ - ١}{٣} = \frac{أس^٣}{٣} - \frac{١}{٣}$$

$$(2) \int (أس^٤ - ١) كس = \frac{أس^٥ - ١}{٥} = \frac{أس^٥}{٥} - \frac{١}{٥}$$