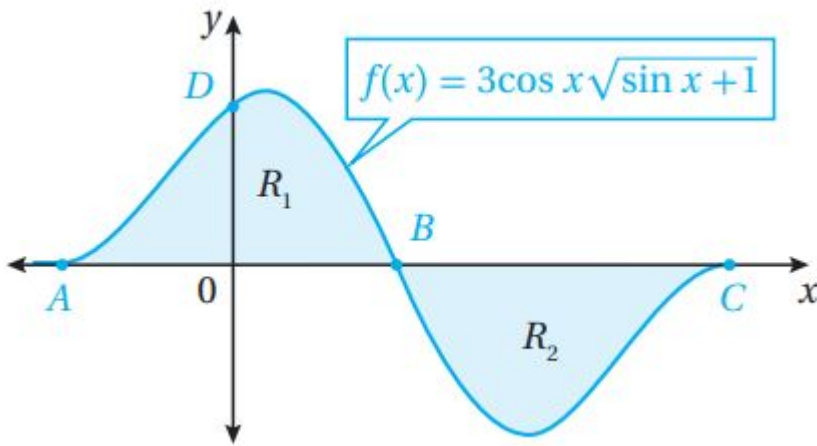


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ ، بوضع $n = 0$

$$(B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi$ ، بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \int 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx = \int 3\sqrt{u} du = 2u^{3/2} + C = 2(1 + \sin x)^{3/2} + C$$

$$A = 2(1 + \sin(\frac{\pi}{2}))^{3/2} - 2(1 + \sin(-\pi))^{3/2} = 2(2)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 2(2\sqrt{2}) - 2 = 4\sqrt{2} - 2$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 2(3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_1^{16} (x^3 + 1) dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}, x^3 = u - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{u-1} \Rightarrow \int_1^{16} (x^3 + 1) dx = \int_1^{16} (u - 1 + 1) \frac{du}{3\sqrt[3]{u-1}} = \frac{1}{3} \int_1^{16} \frac{u}{\sqrt[3]{u-1}} du = \frac{1}{3} \int_1^{16} (u-1 + 1) \frac{du}{\sqrt[3]{u-1}} = \frac{1}{3} \left[\int_1^{16} \sqrt[3]{u-1} du + \int_1^{16} \frac{1}{\sqrt[3]{u-1}} du \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} (u-1)^{4/3} + 3(u-1)^{2/3} \right]_1^{16} = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} (15)^{4/3} + 3(15)^{2/3} - \frac{3}{4} (0)^{4/3} - 3(0)^{2/3} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} (15)^{4/3} + 3(15)^{2/3} \right]$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du, x = \pi - u \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi}^{\pi/2} f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (1+x^2)^3 dx$

bbb