المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات الطالب

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب للصف الثاني عشر الأكاديمي / الفصل الدراسي الثاني(طبعة 2025)

الوحدة الخامسة: التكامل

الدرس الأول: تكامل اقترانات خاصة

مسألة اليوم صفحة 8	
$P(t) = \int (200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t})dt = \frac{200}{0.1}e^{0.1t} + \frac{150}{-0.03}e^{-0.03t} + C$ $= 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + C$ $P(0) = 2000 - 5000 + C$ $200000 = -3000 + C \Rightarrow C = 203000$ $P(t) = 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + 203000$ $P(12) = 2000e^{1.2} - 5000e^{-0.36} + 203000 \approx 206152$ إذن، سيكون عدد الخلايا بعد 12 يومًا 206152 خلية تقريبًا.	
أتحقق من فهمي صفحة 10	
a	$\int (5x^2 - 3e^{7x})dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{7}e^{7x} + C$
b	$\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx = \frac{8}{4}e^{4x}\Big\|_0^{\ln 3} = 2\left(e^{4\ln 3} - e^0\right) = 2\left(e^{\ln 3^4} - e^0\right)$ $= 2(81 - 1) = 160$
C	$\int \sqrt{e^{1-x}}dx = \int (e^{1-x})^{1/2}dx = \int e^{(1-x)/2}dx = -2e^{(1-x)/2} + C$
d	$\int (3^x + 2\sqrt{x})dx = \frac{3^x}{\ln 3} + 2(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + C = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 12	
a	$\int \cos(3x - \pi)\, dx = \frac{1}{3}\sin(3x - \pi) + C$
b	$\int (\csc^2(5x) + e^{2x})dx = -\frac{1}{5}\cot 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

c	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x - \cos 4x)\,dx = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}$ $= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)$ $= \left(-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}(\frac{-\sqrt{3}}{2})\right) - \left(-\frac{1}{2} - 0\right)$ $= \frac{6+\sqrt{3}}{8}$
أتحقق من فهمي صفحة 14	
a	$\int \cos^4 x\,dx$ $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$ $= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$ $= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$ $= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$ $\int \cos^4 x\,dx = \int\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$ $= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

b	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos(3x-x) - \cos(3x+x))\, dx$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x)\, dx$ $= \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{6}}$ $= \left(\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{6} - \frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{6}\right) - (0-0) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$
c	$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int (\frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}) dx$ $= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx$ $= \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) dx$ $= -\cot x + \csc x + C$
أتحقق من فهمي صفحة 16	
a	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx = -\cos x - 5\ln\lvert x\rvert + C$
b	$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3}\int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{5}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert + C$
c	$\int \frac{x^2-7x+2}{x^2} dx = \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right) dx = x - 7\ln\lvert x\rvert - 2x^{-1} + C$
d	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \ln\lvert x^2+3x\rvert + C$
e	$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\lvert 1+\cos 2x\rvert + C$ $= -\frac{1}{2}\ln(1+\cos 2x) + C$

f	$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
g	$\int \frac{e^x}{e^x + 7} dx = \ln\lvert e^x + 7\rvert + C = \ln(e^x + 7) + C$
h	$\int \csc x \, dx = \int \csc x \times \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx$ $= \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx$ $= -1 \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx = -\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert + C$ طريقة ثانية: $\int \csc x \, dx = \int \csc x \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x} dx$ $= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx$ $= \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$

أتحقق من فهمي صفحة 17

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = \int \left(x + \frac{1}{x + 1}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 + \ln\lvert x + 1\rvert + C$$

أتحقق من فهمي صفحة 18

$$R(t) = \int \frac{21}{0.07t + 5} dt$$

$$= \frac{21}{0.07} \int \frac{0.07}{0.07t + 5} dt = 300 \ln\lvert 0.07t + 5\rvert + C$$

$$R(0) = 300 \ln 5 + C$$

$$0 = 300 \ln 5 + C \Rightarrow C = -300 \ln 5$$

$$R(t) = 300 \ln\lvert 0.07t + 5\rvert - 300 \ln 5 = 300 \ln \left\lvert \frac{0.07t + 5}{5} \right\rvert$$

$$= 300 \ln\lvert 0.014t + 1\rvert$$

أتحقق من فهمي صفحة 21	
a	$s(t) = \int v(t)dt = \int 3\cos t\, dt = 3\sin t + C$ $s(0) = 3\sin 0 + C$ $0 = 3\sin 0 + C \Rightarrow C = 0$ $s(t) = 3\sin t$ $s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin(\frac{\pi}{6}) = 1.5$ m
b	$s(2\pi) - s(0) = 3\sin(2\pi) - 3\sin(0) = 0$ m
c	$d = \int_0^{2\pi} \|v(t)\|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3\cos t\ dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t\ dx$ $= 3\sin t\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t\Big\|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3\sin t\Big\|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ $= (3-0) - (-3-3) + (0-(-3)) = 12$ m
أتدرب وأحل المسائل صفحة 24	
1	$\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})dx = \int \left(e^{2x-3} - x^{1/2}\right) dx = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
2	$\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx = \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x})dx = 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$
3	$\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)dx = -\frac{4}{5}\cos 5x - \frac{5}{4}\sin 4x + C$
4	$\int \left(3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx = 3\sec x - \frac{2}{5}\ln\|x\| + C$
5	$\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx = \int \left(e^x - 2 + \frac{1}{e^x}\right) dx$ $= \int (e^x - 2 + e^{-x})dx$ $= e^x - 2x - e^{-x} + C$
6	$\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)dx = \frac{1}{3}\cos(5-3x) + 2x + \frac{4}{3}x^3 + C$

7	$\int (e^x+1)^2 dx = \int (e^{2x}+2e^x+1)dx = \frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$
8	$\int (e^{4-x}+\sin(4-x)+\cos(4-x))dx$ $= -e^{4-x}+\cos(4-x)-\sin(4-x)+C$
9	$\int \frac{x^4-6}{2x}dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{x}\right)dx$ $= \frac{1}{8}x^4-3\ln\|x\|+C$
10	$\int \left(3\csc^2(3x+2)+\frac{5}{x}\right)dx = -\cot(3x+2)+5\ln\|x\|+C$
11	$\int \frac{e^x+1}{e^x}dx = \int (1+e^{-x})dx = x-e^{-x}+C$
12	$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\|e^x+4\|+C = \ln(e^x+4)+C$
13	$\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x+4}dx = \int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x+4}dx$ $= \ln\left\|\frac{1}{2}\sin 2x+4\right\|+C = \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)+C$
14	$\int \frac{dx}{5-\frac{x}{3}} = -3\int \frac{-\frac{1}{3}}{5-\frac{x}{3}}dx$ $= -3\ln\left\|5-\frac{x}{3}\right\|+C$

15	$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = \int \frac{1}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}dx$ $= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx$ $= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$ $= \int (\sec^2 x + \tan x \sec x)dx$ $= \tan x + \sec x + C$
16	$\int \sec^2 x\,(1+e^x\cos^2 x)dx = \int (\sec^2 x + e^x)dx$ $= \tan x + e^x + C$
17	$\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right)dx = 2\ln\|x\| - \frac{2^x}{\ln 2} + C$
18	$\int \sin 3x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)dx$ $= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$
19	$\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+9}{3x^2+9x-1}dx$ $= \frac{1}{3}\ln\|3x^2+9x-1\| + C$
20	$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx$ $= \int \left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$ $= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$
21	$\int \left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} + \sin^2 x \csc x\right)dx = \int (\csc^2 x + \cot x \csc x + \sin x)dx$ $= -\cot x - \csc x - \cos x + C$

22	$\int (\sec x + \tan x)^2 dx = \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x) dx$ $= \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1) dx$ $= \int (2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1) dx$ $= 2\tan x + 2\sec x - x + C$
23	$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$
24	$\int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 - 3} dx = \frac{1}{3} \ln\lvert x^3 - 3\rvert + C$
25	$\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x \cos x) dx$ $= \int (9\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 6\sin x \cos x) dx$ $= \int (10\cos^2 x - 1 - 6\sin x \cos x) dx$ $= \int \left(10\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) - 1 - 3\sin 2x\right) dx$ $= \int (5 + 5\cos 2x - 1 - 3\sin 2x) dx = \int (4 + 5\cos 2x - 3\sin 2x) dx$ $= 4x + \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x + C$
26	$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx$ $= \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$ $= \int \cos 2x \, dx$ $= \frac{1}{2}\sin 2x + C$

27	$\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\ dx = 4\sin\frac{1}{2}x\Big\vert_0^{\pi} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4$
28	$\lvert\sin x\rvert = \begin{cases} \sin x & ,0 \le x \le \pi \\ -\sin x & ,\pi < x \le 2\pi \end{cases}$ $\int_0^{2\pi} \lvert\sin x\rvert\ dx = \int_0^{\pi} \sin x\ dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\ dx$ $= -\cos x\vert_0^{\pi} + \cos x\vert_{\pi}^{2\pi}$ $= -(\cos\pi - \cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi$ $= -(-2) + 1 - (-1) = 4$
29	$\int_1^{e} \frac{8x}{x^2+1}\ dx = 4\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\ dx$ $= 4\ln\lvert x^2+1\rvert\vert_1^{e}$ $= 4\ln(e^2+1) - 4\ln 2$ $= 4\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$
30	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\cos x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 4x + \sin 2x)\ dx$ $= \left(-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{6}}$ $= -\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{6} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{6} - (-\frac{1}{8}\cos 0 - \frac{1}{4}\cos 0)$ $= \frac{5}{16}$

31	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x}\, dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 \csc^2 x}\, dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x(\frac{1}{\sin^2 x})}\, dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\, dx$ $= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2x) dx$ $= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} - (\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{4})$ $= \frac{3\sqrt{3}+\pi-6}{24}$
32	$\int_0^3 (x-5^x)\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5^x}{\ln 5}\right)\Big\vert_0^3$ $= \frac{9}{2} - \frac{125}{\ln 5} - (0 - \frac{1}{\ln 5}) = \frac{9}{2} - \frac{124}{\ln 5}$
33	$A = \int_2^4 (e^{0.5x} - 2)\, dx = (2e^{0.5x} - 2x)\vert_2^4$ $= 2e^2 - 8 - (2e-4)$ $= 2e^2 - 2e - 4$

34	$\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x}\,dx = \int_a^{3a} (2+\frac{1}{x})\,dx$ $= (2x + \ln\|x\|)\|_a^{3a}$ $= 6a + \ln 3a - 2a - \ln a$ $= 4a + \ln 3$ $\Rightarrow 4a + \ln 3 = \ln 12$ $\Rightarrow 4a = \ln 12 - \ln 3$ $4a = \ln\frac{12}{3}$ $\Rightarrow a = \frac{1}{4}\ln 4$
35	$\int_0^{a} \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a} \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx$ $= \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\Big\|_0^a$ $= \frac{1}{2}(\ln(2a^2) - \ln(a^2)) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$
36	$A = \int_1^{a} \frac{4}{x}\,dx = 4\ln\|x\|\|_1^a = 4\ln a - 4\ln 1 = 4\ln a$ $\Rightarrow 4\ln a = 10 \Rightarrow \ln a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = e^{\frac{5}{2}}$

37	$f(x)=\int \cos\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)\,dx = 2\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)+C$ $f(\pi)=2\sin(\frac{1}{2}\pi+\pi)+C$ $3=2\sin\frac{3\pi}{2}+C$ $3=-2+C \quad \Rightarrow C=5$ $\Rightarrow f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\pi)+5$ $\Rightarrow f(0)=2\sin\pi+5=5$
38	$y=\int \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\,dx = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{-2}+C=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+C$ $y\|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})+C$ $1=\frac{1}{2}+C \quad \Rightarrow C=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1+\sin 2x}{2}$
39	$y=\int (e^{2x}-2e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}+C$ $y\|_{x=0}=\frac{1}{2}+2+C$ $1=\frac{5}{2}+C \Rightarrow C=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}-\frac{3}{2}$

40	$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} (9 + \sin 3x)\, dx = \left(9x - \frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big\|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$ $= 9\pi - \frac{1}{3}\cos 3\pi - \pi + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $= 8\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ $= 8\pi + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow 8\pi + \frac{1}{2} = a\pi + b$ ونظرًا لأن a و b نسبيّان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون: $a = 8, b = \frac{1}{2}$
41	$f(x) = \int \tan x\ dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$ $f(3) = -\ln\|\cos 3\| + C$ $5 = -\ln\|\cos 3\| + C \Rightarrow C = 5 + \ln\|\cos 3\|$ $f(x) = -\ln\|\cos x\| + 5 + \ln\|\cos 3\| = \ln\left\|\frac{\cos 3}{\cos x}\right\| + 5$
42	$f(x) = \int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$ $f(0) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) + C$ $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

43	$s(t) = \int e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ $s(0) = -\frac{1}{2} + C$ $3 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{7}{2}$ $s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$
44	$s(100) = -\frac{1}{2}e^{-200} + \frac{7}{2} \approx 3.5 \text{ m}$
45	$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t}\, dt = \frac{-0.51}{-0.03}e^{-0.03t} + C = 17e^{-0.03t} + C$ $P(0) = 17 + C$ $500 = 17 + C \Rightarrow C = 483$ $P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$
46	$P(10) = 17e^{-0.3} + 483 \approx 496$
47	$P(t) = \int (0.15 - 0.9e^{0.006t})\, dt$ $= 0.15t - \frac{0.9}{0.006}e^{0.006t} + C$ $= 0.15t - 150e^{0.006t} + C$ $P(0) = -150 + C$ $30 = -150 + C \Rightarrow C = 180$ $P(t) = 0.15t - 150e^{0.006t} + 180$
48	$P(10) = 1.5 - 150e^{0.06} + 180 \approx 22.2 \text{ cm}^3$

49	$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$ $A = \int_0^{\pi} \sin x \; dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \; dx) = (-\cos x)\vert_0^{\pi} + (\cos x)\vert_{\pi}^{2\pi}$ $= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$ ملحوظة: يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي: $A = 2\int_0^{\pi} \sin x \; dx = 2(-\cos x)\vert_0^{\pi} = 2(-\cos\pi + \cos 0) = 2(2) = 4$
50	$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \; dx + (-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x \; dx) + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x \; dx$ $+ (-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x \; dx)$ والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي: $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \; dx = -2\cos 2x\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(-1-1) = 4$
51	نقسم البسط والمقام على $\cos x$ $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)} dx$ $= \int \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)} dx$ $= \ln\vert\tan x - 1\vert + C$

52	نضرب البسط والمقام في $\csc x$ $\int \frac{\cot x}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{\cot x \csc x}{2\csc x + 1}\,dx$ $= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cot x \csc x}{2\csc x + 1}\,dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\lvert 2\csc x + 1\rvert + C$ $= -\frac{1}{2}\ln\lvert 2\csc x + 1\rvert + C$
53	$\int \frac{1}{x\ln x^3}\,dx = \int \frac{1}{3x\ln x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \frac{1}{3}\ln\lvert\ln x\rvert + C$
54	$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = \left(\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert 2x+3\rvert\right)\Big\rvert_1^a$ $= \left(\ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3)\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 5\right)$ $= \ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3) + \frac{1}{2}\ln 5$ $= \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}\ln 5$ $\Rightarrow \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}\ln 5 = 0.5\ln 5$ $\Rightarrow \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0$ $\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 1$ $\Rightarrow a = \sqrt{2a+3}$ $\Rightarrow a^2 = 2a+3$ $\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$ $\Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$ $\Rightarrow a = 3 \quad , a = -1$ مرفوضة لأن $a > 0$

55	طريقة أولى: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x \; dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 4x + \cos 2x) \; dx$ $= \left(\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}$ $= \left(\frac{1}{8}\sin \pi + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) - (0+0) = \frac{1}{4} \dots\dots\dots\dots (1)$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x \; dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos 4x) \; dx$ $= \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}$ $= \left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin \pi\right) - (0-0) = \frac{1}{4} \dots\dots\dots\dots (2)$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x \; dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x \; dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ طريقة ثانية: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x \; dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x \; dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+3x) \; dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \; dx = \frac{1}{4}\sin 4x \Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin 0) = 0$

56	$\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}}(1-\pi\sin kx)\,dx = \left(x+\frac{\pi}{k}\cos kx\right)\Big\vert_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}}$ $=\frac{\pi}{3k}+\frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4k}-\frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{4}$ $=\frac{\pi}{k}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{12k}(7-6\sqrt{2})$ $\Rightarrow \frac{\pi}{12k}(7-6\sqrt{2})=\pi(7-6\sqrt{2})$ $\Rightarrow k=\frac{1}{12}$
57	$v(t)=\begin{cases} 2t+4\ , & 0\le t\le 6 \\ 16t-t^2-44\ , & 6<t\le 10\end{cases}$ $s(t)=\int v(t)\,dt$ عندما $0\le t\le 6$: $s(t)=\int(2t+4)\,dt=t^2+4t+C_1$ $s(0)=0\Rightarrow C_1=0$ $\Rightarrow s(t)=t^2+4t\ ,0\le t\le 6$ $s(5)=25+20=45\text{ m}$ حل آخر: الإزاحة في الفترة $[0,5]$ تساوي $s(5)-s(0)$ $s(5)-s(0)=\int_0^5 v(t)dt$ $s(5)=s(0)+\int_0^5 v(t)dt=0+\int_0^5(2t+4)dt$ $=t^2+4t\Big\vert_0^5$ $=5^2+4\times 5-0=45$ إذن، موقع الجسيم بعد 5ثوان هو 45 m

	عندما $6 < t \le 10$:
	$s(t) = \int (16t - t^2 - 44)\, dt = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + C_2$
	لإيجاد قيمة C_2 نستعمل موقع الجسم عند $t = 6$ موقعًا ابتدائيًا بالنسبة للفترة $(6, 10]$
	$s(6) = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$
	ونحسب $s(6)$ من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[0, 6]$
	$s(t) = t^2 + 4t \ , 0 \le t \le 6$
	$s(6) = 6^2 + 4(6) = 60$
	$60 = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$
	$60 = -48 + C_2 \Rightarrow C_2 = 108$
	$\Rightarrow s(t) = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + 108 \ , 6 < t \le 10$
58	$s(9) = 117 \text{ m}$
	حلّ آخر:
	$s(9) - s(0) = \int_0^9 v(t)dt$
	$s(9) = s(0) + \int_0^9 v(t)dt$
	$= 0 + \int_0^6 (2t + 4)dt + \int_6^9 (20 - (t - 8)^2)dt$
	$= (t^2 + 4t)\Big\vert_0^6 + (20t - \frac{1}{3}(t - 8)^3)\Big\vert_6^9$
	$= 6^2 + 4 \times 6 - 0 + (20 \times 9 - \frac{(9-8)^3}{3} - 20 \times 6 + \frac{(6-8)^3}{3}$
	$= 36 + 24 + 180 - \frac{1}{3} - 120 - \frac{8}{3} = 117 \text{ m}$

59	$A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3}\, dx = \ln\lvert x+3\rvert \rvert_0^{45}$ $= \ln 48 - \ln 3 = \ln 16$ $\frac{1}{2}A = \int_0^{k} \frac{1}{x+3}\, dx = \ln\lvert x+3\rvert \rvert_0^{k}$ $= \ln(k+3) - \ln 3$ $= \ln\frac{k+3}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\ln 16 = \ln\frac{k+3}{3}$ $\ln 16^{1/2} = \ln\frac{k+3}{3}$ $\Rightarrow 4 = \frac{k+3}{3} \Rightarrow k = 9$

الدرس الثاني: التكامل بالتعويض

مسألة اليوم صفحة 26

$$G(t)=\int \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}dt$$

افرض أنّ: $u=1+5e^{-0.6t}$

$$\frac{du}{dt}=-3e^{-0.6t} \Longrightarrow dt=\frac{du}{-3e^{-0.6t}}$$

$$G(t)=\int \frac{60000e^{-0.6t}}{u^2}\times\frac{du}{-3e^{-0.6t}}$$

$$=\int -20000u^{-2}du$$

$$=20000u^{-1}+C$$

$$G(t)=\frac{20000}{1+5e^{-0.6t}}+C$$

$$G(0)=\frac{20000}{1+5}+C$$

$$25000=\frac{10000}{3}+C \Longrightarrow C=\frac{65000}{3}$$

$$G(t)=\frac{20000}{1+5e^{-0.6t}}+\frac{65000}{3}$$

$$G(20)=\frac{20000}{1+5e^{-12}}+\frac{65000}{3}\approx 41666\text{ kg}$$

أتحقق من فهمي صفحة 30	
a	$u = x^3 - 5 \implies \frac{du}{dx} = 3x^2 \implies dx = \frac{du}{3x^2}$ $\int 4x^2\sqrt{x^3 - 5}dx = \int 4x^2\sqrt{u} \times \frac{du}{3x^2}$ $= \int \frac{4}{3}u^{\frac{1}{2}}du$ $= \frac{8}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{8}{9}\sqrt{(x^3 - 5)^3} + C$
b	$u = \sqrt{x} \implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies dx = 2\sqrt{x}du$ $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^u \times 2\sqrt{x}du$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{\sqrt{x}} + C$
c	$u = \ln x \implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \implies dx = xdu$ $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \int \frac{u^3}{x} \times xdu$ $= \int u^3 du$ $= \frac{1}{4}u^4 + C$ $= \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$

d	$u = \ln x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow dx = x du$ $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\cos u}{x} \times x du$ $\displaystyle = \int \cos u \, du$ $= \sin u + C$ $= \sin(\ln x) + C$
e	$u = \cos 5x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -5 \sin 5x \quad \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-5 \sin 5x}$ $\displaystyle\int \cos^4 5x \ \sin 5x \, dx = \int u^4 \sin 5x \times \frac{du}{-5 \sin 5x}$ $\displaystyle = \int -\frac{1}{5} u^4 du$ $= -\dfrac{1}{25} u^5 + C$ $= -\dfrac{1}{25} \cos^5 5x + C$
f	$u = x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x \ \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$ $\displaystyle\int x 2^{x^2} dx = \int x 2^u \times \frac{du}{2x}$ $\displaystyle = \int \frac{1}{2} 2^u du$ $= \dfrac{1}{2} \dfrac{2^u}{\ln 2} + C$ $= \dfrac{1}{\ln 2} 2^{x^2 - 1} + C$

<table>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 32</th></tr>
<tr><td>a</td><td>

$u = 1 + 2x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2} \quad , x = \dfrac{u-1}{2}$

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{u^{\frac{1}{2}}} \times \frac{du}{2}$

$= \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$

$= \dfrac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x} + C$

</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$u = x^4 - 8 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \dfrac{du}{4x^3} \quad , x^4 = u + 8$

$\displaystyle\int x^7(x^4-8)^3dx = \int x^7u^3 \times \frac{du}{4x^3}$

$= \dfrac{1}{4}\displaystyle\int x^4u^3du$

$= \dfrac{1}{4}\displaystyle\int (u+8)u^3du$

$= \dfrac{1}{4}\displaystyle\int (u^4+8u^3)du$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}u^5 + 2u^4\right) + C$

$= \dfrac{1}{20}(x^4-8)^5 + \dfrac{1}{2}(x^4-8)^4 + C$

</td></tr>
</table>

c	$u = 1 - e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{-e^x} \quad , e^x = 1 - u$ $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} dx = \int \frac{e^{3x}}{u^2} \times \frac{du}{-e^x}$ $= \int -\frac{e^{2x}}{u^2} du$ $= \int \frac{-(1-u)^2}{u^2} du$ $= \int \frac{-1+2u-u^2}{u^2} du$ $= \int \left(-u^{-2} + \frac{2}{u} - 1\right) du$ $= (u^{-1} + 2\ln\|u\| - u) + C$ $= \frac{1}{1-e^x} + 2\ln\|1-e^x\| - 1 + e^x + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 33
a	$u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow dx = 3x^{\frac{2}{3}} du \quad , \quad x = u^3$ $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{3x^{\frac{2}{3}} du}{u^3 + u}$ $= \int \frac{3u^2}{u^3 + u} du$ $= \int \frac{3u}{u^2+1} du$ $= \frac{3}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du$ $= \frac{3}{2} \ln(u^2+1) + C$ $= \frac{3}{2} \ln\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right) + C$

b	$u = 1 - x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -1 \ \Rightarrow dx = -du \ , \qquad x = 1 - u$ $\int x \sqrt[3]{(1-x)^2}\, dx = \int x \sqrt[3]{u^2} \times -du$ $= \int -(1-u) \sqrt[3]{u^2}\, du$ $= \int -(1-u) u^{\frac{2}{3}} du$ $= \int \left(-u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{5}{3}}\right) du$ $= -\frac{3}{5} u^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8} u^{\frac{8}{3}} + C$ $= -\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}(1-x)^{\frac{8}{3}} + C$ $= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-x)^8} + C$

أتحقق من فهمي صفحة 35

$$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

$$u = 9 + x^2 \ \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{-135}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= -135 u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$p(x) = -135\sqrt{9+x^2} + C$$

$$p(4) = -135\sqrt{9+16} + C = -135(5) + C$$

$$30 = -675 + C \Rightarrow C = 705$$

$$p(x) = 705 - 135\sqrt{9+x^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 37	
a	$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \sin^2 x\, dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)dx$ $u = \cos x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \;\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int sin^3 x\, dx = \int \sin x\,(1-u^2)\frac{du}{-\sin x}$ $= \int (u^2-1)du$ $= \frac{1}{3}u^3 - u + C$ $= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
b	$u = \sin x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \;\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \cos^5 x \sin^2 x\, dx = \int \cos^5 x\, u^2\, \frac{du}{\cos x}$ $= \int \cos^4 x\, u^2\, du$ $= \int (1-\sin^2 x)^2\, u^2\, du$ $= \int (1-u^2)^2\, u^2\, du$ $= \int (u^2 - 2u^4 + u^6)\; du$ $= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C$ $= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

أتحقق من فهمي صفحة 39	
a	$\int \tan^4 x \ dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx$ $= \int \tan^2 x \, (\sec^2 x - 1) dx$ $= \int \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x \, dx$ $= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$ $= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$ $u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \ \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\Rightarrow \int \tan^4 x \ dx = \int u^2 \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$ $= \int u^2 du - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$ $= \frac{1}{3} u^3 - \tan x + x + C$ $= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$

b	$\int \cot^5 x \ dx = \int \cot x \cot^4 x \ dx$ $= \int \cot x (\cot^2 x)^2 \ dx$ $= \int \cot x (\csc^2 x - 1)^2 \ dx$ $u = \csc x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc x \cot x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc x \cot x}$ $\Rightarrow \int \cot^5 x \ dx = \int \cot x (u^2 - 1)^2 \times \frac{du}{-\csc x \cot x}$ $= \int (u^2 - 1)^2 \ \frac{du}{-u}$ $= \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{-u} \ du$ $= \int \left(-u^3 + 2u - \frac{1}{u}\right) \ du$ $= -\frac{1}{4} u^4 + u^2 - \ln\lvert u \rvert + C$ $= -\frac{1}{4} \csc^4 x + \csc^2 x - \ln\lvert \csc x \rvert + C$ حلّ ثانٍ: $\int \cot^5 x \ dx = \int \cot^3 x \cot^2 x \ dx$ $= \int \cot^3 x (\csc^2 x - 1) \ dx$ $= \int \cot^3 x \csc^2 x \ dx - \int \cot^3 x \, dx$ $= \int \cot^3 x \csc^2 x \ dx - \int \cot x \cot^2 x \, dx$ $= \int \cot^3 x \csc^2 x \ dx - \int \cot x (\csc^2 x - 1) \ dx$ $= \int (\cot^3 x - \cot x) \csc^2 x \ dx + \int \cot x \ dx$ في التكامل الأول افرض $u = \cot x$

	$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$ $$\int \cot^5 x \ dx = \int (u^3 - u)\csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$ $$= \int (u - u^3) \ du + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$ $$= \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 + \ln\lvert\sin x\rvert + C$$ $$= \frac{1}{2}\cot^2 x - \frac{1}{4}\cot^4 x + \ln\lvert\sin x\rvert + C$$
c	$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$ $$\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx = \int \sec^4 x \, u^6 \times \frac{du}{\sec^2 x}$$ $$= \int \sec^2 x \, u^6 \, du$$ $$= \int (1 + \tan^2 x)\, u^6 \, du$$ $$= \int (1 + u^2)\, u^6 \, du$$ $$= \int (u^6 + u^8) \ du$$ $$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 + C$$ $$= \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + C$$

أتحقق من فهمي صفحة 41	
a	$u = x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du,\ x = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = 2 \Rightarrow u = 3$ $\int_0^2 x(x+1)^3 dx = \int_1^3 (u-1)u^3 du$ $= \int_1^3 (u^4 - u^3) du$ $= \left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{4}u^4\right)\Big\|_1^3$ $= \frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4 - \left(\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{4}(1)^4\right)$ $= \frac{142}{5} = 28.4$
b	$u = \sec x + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 3$ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 4$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}\, dx = \int_3^4 \sec x \tan x \sqrt{u} \frac{du}{\sec x \tan x}$ $= \int_3^4 \sqrt{u}\, du$ $= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big\|_3^4$ $= \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 1.87$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 42	
1	$u = 2x^3 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int x^2(2x^3+5)^4 dx = \int x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int \frac{1}{6} u^4\, du$ $= \frac{1}{30} u^5 + C$ $= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$
2	$u = x + 3 \Rightarrow dx = du \quad , x = u - 3$ $\int x^2 \sqrt{x+3}\, dx = \int x^2 \sqrt{u}\, du$ $= \int (u-3)^2 \sqrt{u}\, du$ $= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5} u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{7}(x+3)^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} + 6(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+3)^5} + 6\sqrt{(x+3)^3} + C$
3	$u = x + 2 \Rightarrow dx = du \quad , x = u - 2$ $\int x(x+2)^3 dx = \int x u^3 du$ $= \int (u-2) u^3\, du$ $= \int (u^4 - 2u^3)\, du$ $= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{2} u^4 + C$ $= \frac{1}{5}(x+2)^5 - \frac{1}{2}(x+2)^4 + C$

4	$u = x + 4 \quad \Rightarrow dx = du \quad , x = u - 4$ $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} du$ $= \int \frac{u-4}{\sqrt{u}} du$ $= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - 4u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$
5	$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^u \cos x \frac{du}{\cos x}$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{\sin x} + C$

6	$u = e^x + 1 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{e^x} \quad , e^x = u - 1$ $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{3x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$ $\displaystyle = \int \frac{e^{2x}}{u} du$ $\displaystyle = \int \frac{(u-1)^2}{u} du$ $\displaystyle = \int \left(u - 2 + \frac{1}{u}\right) du$ $= \dfrac{1}{2}u^2 - 2u + \ln\|u\| + C$ $= \dfrac{1}{2}(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1) + \ln(e^x + 1) + C$
7	$\displaystyle\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \times \sec^2 x\, dx = \int \sec^2 x\,(1 + \tan^2 x) dx$ $u = \tan x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{\sec^2 x}$ $\displaystyle\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x\,(1 + u^2) \times \frac{du}{\sec^2 x}$ $\displaystyle = \int (1 + u^2)\, du$ $= u + \dfrac{1}{3}u^3 + C$ $= \tan x + \dfrac{1}{3}\tan^3 x + C$

8	$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x\, dx$ $u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int u \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x}$ $= \int u\, du$ $= \frac{1}{2} u^2 + C$ $= \frac{1}{2} \tan^2 x + C$
9	$u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\, du$ $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times x\, du$ $= \int \sin u\, du$ $= -\cos u + C$ $= -\cos(\ln x) + C$
10	$u = 4 + \sin^2 x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{\sin 2x}$ $\int \sin 2x (4 + \sin^2 x)^3\, dx = \int \sin 2x \times u^3 \times \frac{du}{\sin 2x}$ $= \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C$ $= \frac{(4 + \sin^2 x)^4}{4} + C$

11	$u = e^x + e^{-x} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = e^x - e^{-x} \Rightarrow dx = \dfrac{du}{e^x - e^{-x}}$ $\int \dfrac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int \dfrac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \times \dfrac{du}{e^x - e^{-x}}$ $= \int 2u^{-2} du$ $= -2u^{-1} + C$ $= -\dfrac{2}{e^x + e^{-x}} + C$
12	$u = x + 1 \Rightarrow dx = du\ ,\ x = u - 1$ $\int \dfrac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx = \int \dfrac{1-u}{u\sqrt{u}} du$ $= \int \dfrac{1-u}{u^{\frac{3}{2}}} du$ $= \int \left(u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= -2u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$ $= -2(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \dfrac{-2}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{x+1} + C$ ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض $u = \sqrt{x+1}$.
13	$u = x + 10 \Rightarrow dx = du\ ,x = u - 10$ $\int x\sqrt[3]{x+10}\, dx = \int (u-10)u^{\frac{1}{3}} du$ $= \int \left(u^{\frac{4}{3}} - 10u^{\frac{1}{3}}\right) du$ $= \dfrac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \dfrac{15}{2}u^{\frac{4}{3}} + C$ $= \dfrac{3}{7}(x+10)^{\frac{7}{3}} - \dfrac{15}{2}(x+10)^{\frac{4}{3}} + C$ $= \dfrac{3}{7}\sqrt[3]{(x+10)^7} - \dfrac{15}{2}\sqrt[3]{(x+10)^4} + C$ ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض $u = \sqrt[3]{x+10}$.

14	$u=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} \Rightarrow dx=\frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$ $\int \sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2}\,dx=\int \sec^2\frac{x}{2}\,u^7\times\frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$ $=2\int u^7\,du$ $=\frac{1}{4}u^8+C$ $=\frac{1}{4}\tan^8\frac{x}{2}+C$
15	$\int\frac{\sec^3 x+e^{\sin x}}{\sec x}dx=\int\left(\sec^2 x+\cos x\,e^{\sin x}\right)dx$ $=\int \sec^2 x\,dx+\int \cos x\,e^{\sin x}dx$ $u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$ $\int\frac{\sec^3 x+e^{\sin x}}{\sec x}dx=\int \sec^2 x\,dx+\int \cos x\,e^u\times\frac{du}{\cos x}$ $=\tan x+\int e^u du$ $=\tan x+e^u+C$ $=\tan x+e^{\sin x}+C$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

16	$u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$ $\int (1+\sqrt[3]{\sin x})\cos^3 x\ dx=\int \left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)\cos^3 x\ \frac{du}{\cos x}$ $=\int \left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)\cos^2 x\ du$ $=\int \left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)(1-\sin^2 x)\ du$ $=\int \left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)(1-u^2)\ du$ $=\int \left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)(1-u^2)\ du$ $=\int \left(1-u^2+u^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{7}{3}}\right)\ du$ $=u-\frac{1}{3}u^3+\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}}+C$ $=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x-\frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}} x+C$
17	$\int \sin x\ \sec^5 x\ dx=\int \sin x\ \cos^{-5} x\ dx$ $u=\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$ $\int \sin x\ \sec^5 x\ dx=\int \sin x\ u^{-5}\times\frac{du}{-\sin x}$ $=-\int u^{-5}\ du$ $=\frac{1}{4}u^{-4}+C$ $=\frac{1}{4}\cos^{-4} x+C$ $=\frac{1}{4}\sec^4 x+C$

18	$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\, dx = \int (\tan x \sec^2 x + \tan x \sec^3 x)\, dx$ $= \int \tan x \sec x\, (\sec x + \sec^2 x)\, dx$ $u = \sec x \;\Rightarrow \frac{du}{dx} = \tan x \sec x \;\Rightarrow dx = \frac{du}{\tan x \sec x}$ $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan x \sec x\, (u + u^2)\, \frac{du}{\tan x \sec x}$ $= \int (u + u^2)\, du$ $= \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + C$ $= \frac{1}{2}\sec^2 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$
19	$u = \pi \ln x \;\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow dx = \frac{x\, du}{\pi}$ $x = 1 \;\Rightarrow u = \pi \ln 1 = 0$ $x = \sqrt{e} \;\Rightarrow u = \pi \ln \sqrt{e} = \pi \times \frac{1}{2} \ln e = \frac{\pi}{2}$ $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x} \times \frac{x\, du}{\pi}$ $= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du$ $= \frac{-1}{\pi} \cos u \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{-1}{\pi} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0)$ $= \frac{-1}{\pi} (0 - 1) = \frac{1}{\pi}$

20	$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi^2}{4}$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x^2 \, dx = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x \sin u \frac{du}{2x}$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin u \, du$ $= -\frac{1}{2} \cos u \Big\vert_0^{\frac{\pi^2}{4}}$ $= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \approx 0.891$
21	$u = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad , \quad x^2 = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$ $= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)\Big\vert_1^2$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}} - (\frac{2}{3}(1) - 2(1))\right)$ $= \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

22	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \sqrt{3}$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan^5 x \, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \sec^2 x \, u^5 \frac{du}{\sec^2 x}$ $= \int_0^{\sqrt{3}} u^5 \, du$ $= \frac{1}{6} u^6 \Big\|_0^{\sqrt{3}}$ $= \frac{9}{2}$
23	$u = (x-1)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2(x-1) \Rightarrow dx = \frac{du}{2(x-1)}$ $x = 1 \Rightarrow u = 0$ $x = 3 \Rightarrow u = 4$ $\int_0^2 (x-1) e^{(x-1)^2} dx = \int_0^4 (x-1) e^u \frac{du}{2(x-1)}$ $= \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big\|_0^4$ $= \frac{e^4 - 1}{2}$
24	$u = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, du$ $x = 1 \Rightarrow u = 3$ $x = 4 \Rightarrow u = 4$ $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}\, du = \int_3^4 2\sqrt{u}\, du = \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big\|_3^4 = \frac{4(8 - 3\sqrt{3})}{3}$

25	$u = 1 + x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{2}{3}\frac{du}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2du}{3\sqrt{x}}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x^3}\right)^2} dx = \int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2} \times \frac{2du}{3\sqrt{x}}$ $= \frac{20}{3}\int_1^2 u^{-2}\, du = -\frac{20}{3}u^{-1}\Big\|_1^2 = \frac{10}{3}$
26	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x} \sin x\, dx = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u \sin x \frac{du}{-\sin x}$ $= -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u\, du$ $= -\frac{2^u}{\ln 2}\Big\|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $= -\frac{1}{\ln 2}\left(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2\right) \approx 0.256$

27	$u = \cot x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\csc^2 x}$ $x = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow u = 0$ $x = \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow u = 1$ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \; \cot^5 x \; dx = \int_1^0 \csc^2 x \; u^5 \; \frac{du}{-\csc^2 x}$ $\displaystyle = \int_1^0 -u^5 \; du$ $\displaystyle = -\frac{1}{6}u^6\Big\|_1^0$ $= \dfrac{1}{6}$
28	$\displaystyle A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)^3 dx + \int_0^1 6x(x^2+1)^3 dx$ $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$ $x = -1 \quad \Rightarrow u = 2$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 1$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = 2$ $\displaystyle A = -\int_2^1 6xu^3 \frac{du}{2x} + \int_1^2 6xu^3 \frac{du}{2x}$ $\displaystyle = \int_1^2 3u^3 du + \int_1^2 3u^3 du = \int_1^2 6u^3 du$ $\displaystyle = \frac{6}{4}u^4\Big\|_1^2$ $= \dfrac{45}{2}$

29	$A=\int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}dx$ $u=x-1 \Rightarrow dx=du \quad , \quad x=u+1$ $x=2 \Rightarrow u=1$ $x=4 \Rightarrow u=3$ $A=\int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}dx=\int_1^3 \frac{u+1}{u^3}du$ $=\int_1^3 (u^{-2}+u^{-3})du=\left(-u^{-1}-\frac{1}{2}u^{-2}\right)\Big\|_1^3$ $=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)+1+\frac{1}{2}$ $=\frac{10}{9}$
30	$u=x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $x=-1 \Rightarrow u=1$ $x=0 \Rightarrow u=0$ $x=2 \Rightarrow u=4$ $A=-\int_{-1}^0 xe^{x^2}dx+\int_0^2 xe^{x^2}dx=-\int_1^0 xe^u\frac{du}{2x}+\int_0^4 xe^u\frac{du}{2x}$ $=-\int_1^0 \frac{1}{2}e^u du+\int_0^4 \frac{1}{2}e^u du$ $=-\frac{1}{2}e^u\Big\|_1^0+\frac{1}{2}e^u\Big\|_0^4$ $=-\frac{1}{2}e^0+\frac{1}{2}e^1+\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^0$ $=\frac{1}{2}(e^4+e)-1 \approx 27.658$

31	$u = x^2 + \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$ $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$ $A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 2x \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{6}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2x \cos u \frac{du}{2x}$ $= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u \, du$ $= \sin u \Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$
32	$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int 2x(4x^2 - 10)^2\, dx$ $u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x}$ $f(x) = \int 2xu^2 \frac{du}{8x} = \int u^2 \frac{du}{4}$ $= \frac{1}{4}\int u^2\, du$ $= \frac{1}{12}u^3 + C$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 + C$ $f(2) = \frac{1}{12}(216) + C$ $10 = 18 + C \quad \Rightarrow C = -8$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 - 8$

33	$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x^2\,e^{-0.2x^3}dx$ $u=-0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-0.6x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{-0.6x^2}$ $f(x)=\int x^2\,e^u\,\frac{du}{-0.6x^2}=-\frac{10}{6}\int e^u\,du$ $=-\frac{5}{3}e^u+C$ $\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+C$ $f(0)=-\frac{5}{3}+C$ $\frac{3}{2}=-\frac{5}{3}+C \quad \Rightarrow C=\frac{19}{6}$ $\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+\frac{19}{6}$
34	نجد أصفار الاقتران بحل المعادلة $f(x)=0$ $x(x-2)^4=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad ,x=2$ نقطة التقاطع $(0,0)$ ، فتكون نقطة التماس $(2,0)$ ويمكن التحقق بحساب $f'(2)$: $f'(x)=(x-2)^4+4x(x-2)^3$ $f'(2)=(2-2)^4+4(2)(2-2)^3=0$

35	$A=\int_0^2 x(x-2)^4\,dx$ $u=x-2 \Rightarrow dx=du \quad , \quad x=u+2$ $x=0 \Rightarrow u=-2$ $x=2 \Rightarrow u=0$ $A=\int_0^2 x(x-2)^4\,dx=\int_{-2}^0 (u+2)u^4\,du$ $=\int_{-2}^0 (u^5+2u^4)\,du=\left(\frac{1}{6}u^6+\frac{2}{5}u^5\right)\Big\|_{-2}^0$ $=0-\left(\frac{1}{6}(-2)^6+\frac{2}{5}(-2)^5\right)=\frac{32}{15}$
36	$s(t)=\int \sin\omega t\,\cos^2\omega t\,dt$ $u=\cos\omega t \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\omega\sin\omega t \Rightarrow dt=\frac{du}{-\omega\sin\omega t}$ $s(t)=\int \sin\omega t\; u^2\frac{du}{-\omega\sin\omega t}$ $=\frac{-1}{\omega}\int u^2\,du=\frac{-1}{3\omega}u^3+C$ $\Rightarrow s(t)=-\frac{1}{3\omega}\cos^3\omega t+C$ لكن $s(0)=0$ لأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل. $s(0)=-\frac{1}{3\omega}+C$ $0=-\frac{1}{3\omega}+C \Rightarrow C=\frac{1}{3\omega}$ $\Rightarrow s(t)=-\frac{1}{3\omega}\cos^3\omega t+\frac{1}{3\omega}$

37	$C(t)=\int C'(t)dt=\int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}dt$ $u=1+e^{-0.01t}\Rightarrow \frac{du}{dt}=-0.01e^{-0.01t}\Rightarrow dt=\frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$ $C(t)=\int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{u^2}\times\frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}=\int u^{-2}\ du$ $=-u^{-1}+K$ (استعمل الرمز K لثابت التكامل بدل C المعتاد لتمييز ثابت التكامل عن رمز الاقتران C). $C(t)=-(1+e^{-0.01t})^{-1}+K$ $C(0)=-(2)^{-1}+K$ $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+K\Rightarrow K=1$ $\Rightarrow C(t)=-(1+e^{-0.01t})^{-1}+1$ $C(t)=\frac{-1}{1+e^{-0.01t}}+1$

38	$u = e^x - 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$ $e^x = u + 2$ $x = \ln 3 \Rightarrow u = e^{\ln 3} - 2 = 3 - 2 = 1$ $x = \ln 4 \Rightarrow u = e^{\ln 4} - 2 = 4 - 2 = 2$ $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\, dx = \int_1^2 \frac{e^{4x}}{u} \frac{du}{e^x} = \int_1^2 \frac{e^{3x}}{u}\, du$ $= \int_1^2 \frac{(u+2)^3}{u}\, du$ $= \int_1^2 \frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u}\, du$ $= \int_1^2 \left(u^2 + 6u + 12 + \frac{8}{u}\right) du$ $= \left(\frac{1}{3}u^3 + 3u^2 + 12u + 8\ln\lvert u\rvert\right)\Big\rvert_1^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 + 12(2) + 8\ln 2\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 3(1)^2 + 12(1) + 8\ln 1\right)$ $= \frac{70}{3} + 8\ln 2$

39	$f(x) = 0 \quad \Rightarrow 3\cos x\sqrt{1+\sin x} = 0$ $\cos x = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\,, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\,, n \in \mathbb{Z}$ $\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\,, n \in \mathbb{Z}$ يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، ونريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي x للنقطتين C,B) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A) أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ بوضع n = 0 $\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad , \qquad C\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ أكبر حل سالب هو: $x = -\frac{\pi}{2}$، بوضع n = -1 $\Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ أما النقطة D فإحداثياها هما: $D\big(0, f(0)\big) = (0,3)$
40	$A = A_1 + A_2 = A(R_1) + A(R_2)$ $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)\,dx + (-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)\,dx)$ $u = 1 + \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$ $x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow u = 2$ $x = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow u = 0$ $A = 3\int_0^2 \cos x\sqrt{u}\,\frac{du}{\cos x} + (-3\int_2^0 \cos x\sqrt{u}\,\frac{du}{\cos x})$ $= 3\int_0^2 \sqrt{u}\,du + 3\int_0^2 \sqrt{u}\,du$ $= 6\int_0^2 \sqrt{u}\,du = 4\,u^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^2 = 4\big(2\sqrt{2} - 0\big) = 8\sqrt{2}$

41	من حل السؤال السابق نجد أن: $A(R_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)\,dx = \int_0^2 3\sqrt{u}\,du = 4\sqrt{2}$ $A(R_2) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,\right)dx = -\int_2^0 3\sqrt{u}\,du = 4\sqrt{2}$ $\Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$
42	$u = 1 + x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow dx = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du, \quad x^{\frac{3}{4}} = u - 1$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $x = 16 \Rightarrow u = 9$ $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int_2^9 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{u} \times \frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du$ $= \frac{4}{3}\int_2^9 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{u}\,du = \frac{4}{3}\int_2^9 \frac{u-1}{u}\,du = \frac{4}{3}\int_2^9 \left(1 - \frac{1}{u}\right)du$ $= \frac{4}{3}(u - \ln\|u\|)\Big\|_2^9 = \frac{4}{3}\left(7 - \ln\frac{9}{2}\right)$ ويمكن حله بطريقة أخرى بتحويل $\sqrt{x}$ إلى $\sqrt[4]{x^2}$ وافتراض أن $u = \sqrt[4]{x}$، ويتحول عندها التكامل المطلوب إلى $\int_1^2 \frac{4u^5}{1+u^3}dx$، وبالقسمة الطويلة يتحول هذا إلى: $\int_1^2 \left(4u^2 - \frac{4u^2}{1+u^3}\right)du = (\frac{4}{3}u^3 - \frac{4}{3}\ln\|1+u^3\|)\Big\|_1^2 = \frac{4}{3}\left(7 - \ln\frac{9}{2}\right)$

43	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\,dx$ $u=\frac{\pi}{2}-x \quad \Rightarrow dx=-du$ $x=0 \ \Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow u=0$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f(\sin u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$
44	$u=1-x \quad \Rightarrow dx=-du \quad ,x=1-u$ $x=0 \ \Rightarrow u=1$ $x=1 \ \Rightarrow u=0$ $\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_1^0 -(1-u)^a u^b\,du$ $= \int_0^1 u^b(1-u)^a\,du = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$
45	$u=\ln(\ln x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} \Rightarrow dx = x\ln x\,du$ $\int \frac{dx}{x\ln x\,(\ln(\ln x))} = \int \frac{x\ln x\,du}{ux\ln x} = \ln\|u\| + C = \ln\|\ln(\ln x)\| + C$
46	$u=1+\sin x \ \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \ \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \quad , \ \sin x = u-1$ $\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3 dx = \int 2\sin x\cos x\,u^3\,\frac{du}{\cos x}$ $= \int 2(u-1)u^3 du$ $= \int (2u^4-2u^3)du$ $= \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C$ $= \frac{2}{5}(1+\sin x)^5 - \frac{1}{2}(1+\sin x)^4 + C$

47	المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين هو 6 ، ولذلك نوحّد دليلي الجذرين إلى 6 $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}}\,dx = \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3-(\sqrt[6]{x})^2}\,dx$ $\sqrt[6]{x} = u \Rightarrow \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{1}{6}x^{\frac{-5}{6}} \Rightarrow dx = 6x^{\frac{5}{6}}du = 6(\sqrt[6]{x})^5 du = 6u^5 du$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3-(\sqrt[6]{x})^2}\,dx = \int \frac{6u^5}{u^3-u^2}\,du$ $= \int \frac{6u^5}{u^2(u-1)}\,du = \int \frac{6u^3}{u-1}\,du$ $= \int \left(6u^2+6u+6+\frac{6}{u-1}\right) du$ $= 2u^3+3u^2+6u+6\ln\lvert u-1\rvert + C$ $= 2(\sqrt[6]{x})^3+3(\sqrt[6]{x})^2+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left\lvert\sqrt[6]{x}-1\right\rvert + C$ $= 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left\lvert\sqrt[6]{x}-1\right\rvert + C$

الدرس الثالث: التكامل بالكسور الجزئية

مسألة اليوم صفحة 45

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x}\, dx$$

لإيجاد قيمة هذا التكامل نجزئ المقدار $\frac{1}{x^3+x}$ إلى كسور جزئية يمكن إيجاد تكاملاتها بسهولة كما يأتي:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x)$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 2A + B + C \Rightarrow 1 = 2 + B + C$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = 2A + B - C \Rightarrow 1 = 2 + B - C$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أنّ: $C = 0$ ، و $B = -1$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1|\Big|_1^2$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 1 + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 \quad = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$$

أتحقق من فهمي صفحة 47	
a	$$\frac{x-7}{x^2-x-6}=\frac{x-7}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$ $$\Rightarrow x-7=A(x+2)+B(x-3)$$ $$x=3\Rightarrow A=-\frac{4}{5}$$ $$x=-2\Rightarrow B=\frac{9}{5}$$ $$\int\frac{x-7}{x^2-x-6}dx=\int\left(\frac{-\frac{4}{5}}{x-3}+\frac{\frac{9}{5}}{x+2}\right)dx$$ $$=-\frac{4}{5}\ln\|x-3\|+\frac{9}{5}\ln\|x+2\|+C$$
b	$$\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$ $$\Rightarrow 3x-1=A(x+1)+B(x-1)$$ $$x=1\Rightarrow A=1$$ $$x=-1\Rightarrow B=2$$ $$\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx$$ $$=\ln\|x-1\|+2\ln\|x+1\|+C$$

<table>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 49</th></tr>
<tr><td>a</td><td>

$$\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow x+4=A(x-1)^2+B(2x-1)(x-1)+C(2x-1)$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow A=18$$

$$x=1\Rightarrow C=5$$

$$x=0\Rightarrow 4=A+B-C\Rightarrow B=-9$$

$$\int\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{18}{2x-1}+\frac{-9}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{18}{2}\ln|2x-1|-9\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$$

$$=9\ln|2x-1|-9\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$$

$$=9\ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|-\frac{5}{x-1}+C$$

</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$$\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x^2-2x-4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow x^2-2x-4=Ax(x-2)+Bx+C(x-2)^2$$

$$x=2\Rightarrow B=-2$$

$$x=0\Rightarrow C=-1$$

$$x=1\Rightarrow -5=-A+B+C\Rightarrow A=2$$

$$\int\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{(x-2)^2}+\frac{-1}{x}\right)dx$$

$$=2\ln|x-2|+\frac{2}{x-2}-\ln|x|+C$$

</td></tr>
</table>

أتحقق من فهمي صفحة 50	
a	$\dfrac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$ $\Rightarrow 3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$ $x = 3 \Rightarrow A = 1$ $x = 0 \Rightarrow 4 = 4A - 3C \Rightarrow C = 0$ $x = 1 \Rightarrow 7 = 5A - 2B - 2C \Rightarrow B = -1$ $\displaystyle\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2+4}\right) dx$ $\displaystyle = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4}\right) dx$ $= \ln\lvert x-3\rvert - \dfrac{1}{2}\ln\lvert x^2+4\rvert + C$
b	$\dfrac{7x^2-x+1}{x^3+1} = \dfrac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ $\Rightarrow 7x^2-x+1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$ $x = -1 \Rightarrow A = 3$ $x = 0 \Rightarrow 1 = A + C \Rightarrow C = -2$ $x = 1 \Rightarrow 7 = A + 2B + 2C \Rightarrow B = 4$ $\displaystyle\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-x+1}\right) dx$ $\displaystyle = \int \left(\frac{3}{x+1} + 2 \times \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) dx$ $= 3\ln\lvert x+1\rvert + 2\ln\lvert x^2-x+1\rvert + C$

أتحقق من فهمي صفحة 51	
a	$\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}dx = \int \left(2x+1+\frac{3x-4}{2x^2-x-1}\right)dx$ $\frac{3x-4}{2x^2-x-1} = \frac{3x-4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$ $\Rightarrow 3x-4 = A(x-1)+B(2x+1)$ $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{11}{3}$ $x=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$ $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}dx = \int \left(2x+1+\frac{\frac{11}{3}}{2x+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\right)dx$ $= x^2+x+\frac{11}{6}\ln\|2x+1\|-\frac{1}{3}\ln\|x-1\|+C$
b	$\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}dx = \int \left(1+\frac{2x-1}{x^2-x}\right)dx$ $= x+\ln\|x^2-x\|+C$
أتحقق من فهمي صفحة 52	
a	$\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}dx = \int_3^4 \left(2x+1+\frac{6x}{x^2-4}\right)dx$ $= (x^2+x+3\ln\|x^2-4\|)\|_3^4$ $= (20+3\ln 12)-(12+3\ln 5)$ $= 8+3\ln\frac{12}{5}$

b	$\dfrac{3x-10}{x^2-7x+12}=\dfrac{3x-10}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-4}$ $\Rightarrow 3x-10=A(x-4)+B(x-3)$ $x=3\Rightarrow A=1$ $x=4\Rightarrow B=2$ $\displaystyle\int_5^6\frac{3x-10}{x^2-7x+12}dx=\int_5^6\left(\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}\right)dx$ $=(\ln\lvert x-3\rvert+2\ln\lvert x-4\rvert)\rvert_5^6$ $=\ln 3+2\ln 2-(\ln 2+2\ln 1)$ $=\ln 3+\ln 2=\ln 6$
أتحقق من فهمي صفحة 55	
a	$u=\tan x \quad\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=\sec^2x\Rightarrow dx=\dfrac{du}{\sec^2x}$ $\displaystyle\int\frac{\sec^2x}{\tan^2x-1}\,dx=\int\frac{\sec^2x}{u^2-1}\,\frac{du}{\sec^2x}=\int\frac{1}{u^2-1}\,du$ $\dfrac{1}{u^2-1}=\dfrac{1}{(u-1)(u+1)}=\dfrac{A}{u-1}+\dfrac{B}{u+1}$ $\Rightarrow 1=A(u+1)+B(u-1)$ $u=1\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$ $u=-1\Rightarrow B=-\dfrac{1}{2}$ $\displaystyle\int\frac{1}{u^2-1}\,du=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{u+1}\right)du$ $=\dfrac{1}{2}\ln\lvert u-1\rvert-\dfrac{1}{2}\ln\lvert u+1\rvert+C=\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{u-1}{u+1}\right\rvert+C$ $\displaystyle\Rightarrow\int\frac{\sec^2x}{\tan^2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right\rvert+C$

b	$u = e^x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{e^x}$ $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx = \int \frac{e^x}{(u-1)(u+4)}\,\frac{du}{e^x}$ $\displaystyle = \int \frac{1}{(u-1)(u+4)}\,du$ $\dfrac{1}{(u-1)(u+4)} = \dfrac{A}{u-1} + \dfrac{B}{u+4}$ $\Rightarrow 1 = A(u+4) + B(u-1)$ $u = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{5}$ $u = -4 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{5}$ $\displaystyle\int \frac{1}{(u-1)(u+4)}\,du = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{5}}{u+4} \right) du$ $= \dfrac{1}{5}\ln\|u-1\| - \dfrac{1}{5}\ln\|u+4\| + C = \dfrac{1}{5}\ln\left\|\dfrac{u-1}{u+4}\right\| + C$ $\displaystyle\Rightarrow \int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left\|\frac{e^x-1}{e^x+4}\right\| + C$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 55
1	$\dfrac{x-10}{x(x+5)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+5}$ $\Rightarrow x - 10 = A(x+5) + Bx$ $x = 0 \Rightarrow A = -2$ $x = -5 \Rightarrow B = 3$ $\displaystyle\int \frac{x-10}{x(x+5)}dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+5} \right) dx$ $= -2\ln\|x\| + 3\ln\|x+5\| + C$

2	$\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}$ $\Rightarrow 2=A(1+x)+B(1-x)$ $x=1\Rightarrow A=1$ $x=-1\Rightarrow B=1$ $\int\frac{2}{1-x^2}dx=\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$ $=-\ln\lvert 1-x\rvert+\ln\lvert 1+x\rvert+C$ $=\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+C$
3	$\frac{4}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}$ $\Rightarrow 4=A(x-4)+B(x-2)$ $x=2\Rightarrow A=-2$ $x=4\Rightarrow B=2$ $\int\frac{4}{(x-2)(x-4)}dx=\int\left(\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{x-4}\right)dx$ $=-2\ln\lvert x-2\rvert+2\ln\lvert x-4\rvert+C$ $=2\ln\left\lvert\frac{x-4}{x-2}\right\rvert+C$
4	$\frac{3x+4}{x^2+x}=\frac{3x+4}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 3x+4=A(x+1)+Bx$ $x=0\Rightarrow A=4$ $x=-1\Rightarrow B=-1$ $\int\frac{3x+4}{x^2+x}dx=\int\left(\frac{4}{x}+\frac{-1}{x+1}\right)dx$ $=4\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x+1\rvert+C$

5	$\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$ $\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$ $\Rightarrow 4 = A(x+2)+B(x-2)$ $x=2 \Rightarrow A=1$ $x=-2 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$ $= x+\ln\|x-2\|-\ln\|x+2\|+C$ $= x+\ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\|+C$
6	$\frac{3x-6}{x^2+x-2} = \frac{3x-6}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ $\Rightarrow 3x-6 = A(x-1)+B(x+2)$ $x=-2 \Rightarrow A=4$ $x=1 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{3x-6}{x^2+x-2}dx = \int\left(\frac{4}{x+2}+\frac{-1}{x-1}\right)dx$ $= 4\ln\|x+2\|-\ln\|x-1\|+C$
7	$\frac{4x+10}{4x^2-4x-3} = \frac{4x+10}{(2x-3)(2x+1)} = \frac{A}{2x-3}+\frac{B}{2x+1}$ $\Rightarrow 4x+10 = A(2x+1)+B(2x-3)$ $x=\frac{3}{2} \Rightarrow A=4$ $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow B=-2$ $\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3}dx = \int\left(\frac{4}{2x-3}+\frac{-2}{2x+1}\right)dx$ $= 2\ln\|2x-3\|-\ln\|2x+1\|+C$

8	$\frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{2x^2+9x-11}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$ $\Rightarrow 2x^2+9x-11 = A(x+1)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x+1)$ $x = 2 \Rightarrow A = 1$ $x = -1 \Rightarrow B = 3$ $x = -3 \Rightarrow C = -2$ $\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x+3}\right) dx$ $= \ln\|x-2\| + 3\ln\|x+1\| - 2\ln\|x+3\| + C$
9	$\frac{4x}{x^2-2x-3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 4x = A(x+1) + B(x-3)$ $x = 3 \Rightarrow A = 3$ $x = -1 \Rightarrow B = 1$ $\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right) dx$ $= 3\ln\|x-3\| + \ln\|x+1\| + C$
10	$\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ $\Rightarrow 8x^2-19x+1 = A(x-2)^2 + B(2x+1)(x-2) + C(2x+1)$ $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$ $x = 2 \Rightarrow C = -1$ $x = 0 \Rightarrow 1 = 4A - 2B + C \Rightarrow B = 3$ $\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2}\right) dx$ $= \ln\|2x+1\| + 3\ln\|x-2\| + \frac{1}{x-2} + C$

11	$\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx = \int\left(1+\frac{6-3x}{9x^2-4}\right)dx$ $\frac{6-3x}{9x^2-4} = \frac{6-3x}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{A}{3x-2}+\frac{B}{3x+2}$ $\Rightarrow 6-3x = A(3x+2)+B(3x-2)$ $x=\frac{2}{3} \Rightarrow A=1$ $x=-\frac{2}{3} \Rightarrow B=-2$ $\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx = \int\left(1+\frac{1}{3x-2}+\frac{-2}{3x+2}\right)dx$ $= x+\frac{1}{3}\ln\lvert 3x-2\rvert - \frac{2}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert + C$
12	$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx = \int\left(x+1+\frac{2-x}{x^2+x}\right)dx$ $\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 2-x = A(x+1)+Bx$ $x=0 \Rightarrow A=2$ $x=-1 \Rightarrow B=-3$ $\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx = \int\left(x+1+\frac{2}{x}+\frac{-3}{x+1}\right)dx$ $= \frac{1}{2}x^2+x+2\ln\lvert x\rvert - 3\ln\lvert x+1\rvert + C$

13	$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx = \int \left(-1+\frac{5-x}{-x^2-2x+3}\right)dx$ $\frac{5-x}{-x^2-2x+3} = \frac{x-5}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$ $\Rightarrow x-5 = A(x-1)+B(x+3)$ $x=-3 \Rightarrow A=2$ $x=1 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx = \int \left(-1+\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-1}\right)dx$ $= -x+2\ln\lvert x+3\rvert - \ln\lvert x-1\rvert + C$
14	$\frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} = \frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$ $\Rightarrow 2x-4 = A(x^2+4)+(Bx+C)(x+2)$ $x=-2 \Rightarrow A=-1$ $x=0 \Rightarrow -4 = 4A+2C \Rightarrow C=0$ $x=1 \Rightarrow -2 = 5A+3B+3C \Rightarrow B=1$ $\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}dx = \int \left(\frac{-1}{x+2}+\frac{x}{x^2+4}\right)dx$ $= -\ln\lvert x+2\rvert + \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+4\rvert + C$

15	$\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx = \int\left(1+\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2}\right)dx$ $\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2} = \frac{-5x^2-2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ $\Rightarrow -5x^2-2 = Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$ $x=0 \Rightarrow B=-2$ $x=-1 \Rightarrow C=-7$ $x=1 \Rightarrow -7 = 2A+2B+C \Rightarrow A=2$ $\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx = \int\left(1+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{-7}{x+1}\right)dx$ $= x+2\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{x}-7\ln\lvert x+1\rvert+C$
16	$\frac{3-x}{2-5x-12x^2} = \frac{x-3}{12x^2+5x-2} = \frac{x-3}{(4x-1)(3x+2)} = \frac{A}{4x-1}+\frac{B}{3x+2}$ $\Rightarrow x-3 = A(3x+2)+B(4x-1)$ $x=\frac{1}{4} \Rightarrow A=-1$ $x=-\frac{2}{3} \Rightarrow B=1$ $\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2}dx = \int\left(\frac{-1}{4x-1}+\frac{1}{3x+2}\right)dx$ $= -\frac{1}{4}\ln\lvert 4x-1\rvert+\frac{1}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert+C$

17	$\frac{3x^3+2x^2+12}{x^4+6x^2}=\frac{3x^3+2x^2+12}{x^2(x^2+6)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+6}$ $\Rightarrow 3x^3+2x^2+12=Ax(x^2+6)+B(x^2+6)+(Cx+D)(x^2)$ $x=0\Rightarrow 12=6B\Rightarrow B=2$ $x=1\Rightarrow 17=7A+7B+C+D$..................(1) $x=-1\Rightarrow 11=-7A+7B-C+D$.......(2) $x=2\Rightarrow 44=20A+10B+8C+4D$...... (3) بجمع(1) ، و (2) ينتج أنّ: $14B+2D=28$ ، وبتعويض $B=2$، نجد أن $D=0$ وبتعويض قيمتي B, D في المعادلتين 2، و3 نحصل على المعادلتين الآتيتين: $11=-7A+14-C\Rightarrow 7A+C=3$ ... (4) $44=20A+20+8C \Rightarrow 5A+2C=6$ ..... (5) وبطرح المعادلة (5) من مثلي المعادلة (4) نجد أنّ : $9A=0\Rightarrow A=0$ وبتعويض قيمة A في المعادلة (4) نجد أنّ: $C=3$ $\int\frac{3x^3+2x^2+12}{x^4+6x^2}dx=\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3x}{x^2+6}\right)dx$ $=-\frac{2}{x}+\frac{3}{2}\ln\|x^2+6\|+C$

18	$$\frac{5x-2}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$$ $$\Rightarrow 5x-2=A(x-2)+B$$ $$x=2\Rightarrow B=8$$ $$x=0\Rightarrow -2=-2A+B\Rightarrow A=5$$ $$\int\frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx=\int\left(\frac{5}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}\right)\,dx$$ $$=5\ln\|x-2\|-\frac{8}{x-2}+C$$ ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالتعويض $u=x-2$، كما يمكن حله بالأجزاء حيث: $u=5x-2, dv=(x-2)^{-2}$
19	$$\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}=\frac{6+3x-x^2}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}$$ $$\Rightarrow 6+3x-x^2=Ax(x+2)+B(x+2)+C(x^2)$$ $$x=0\Rightarrow B=3$$ $$x=-2\Rightarrow C=-1$$ $$x=1\Rightarrow 8=3A+3B+C\Rightarrow A=0$$ $$\int_2^4\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx=\int_2^4\left(\frac{3}{x^2}+\frac{-1}{x+2}\right)\,dx$$ $$=\left(-\frac{3}{x}-\ln\|x+2\|\right)\Big\|_2^4$$ $$=-\frac{3}{4}-\ln 6+\frac{3}{2}+\ln 4=\frac{3}{4}+\ln\frac{2}{3}$$

20	$\frac{9x^2+4}{9x^2-4} = 1 + \frac{8}{9x^2-4}$ $\frac{8}{9x^2-4} = \frac{8}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+2}$ $\Rightarrow 8 = A(3x+2) + B(3x-2)$ $x = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 2$ $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow B = -2$ $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{9x^2+4}{9x^2-4}\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{2}{3x-2} + \frac{-2}{3x+2}\right) dx$ $= \left(x + \frac{2}{3}\ln\|3x-2\| - \frac{2}{3}\ln\|3x+2\|\right)\Big\|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$ $= \left(x + \frac{2}{3}\ln\left\|\frac{3x-2}{3x+2}\right\|\right)\Big\|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\ln 3 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\ln 3$

21	$\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{2-x}+\frac{C}{(2-x)^2}$ $\Rightarrow 17-5x=A(2-x)^2+B(2-x)(2x+3)+C(2x+3)$ $x=-\frac{3}{2}\Rightarrow A=2$ $x=2\Rightarrow C=1$ $x=0\Rightarrow 17=4A+6B+3C\Rightarrow B=1$ $\int_0^1\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx=\int_0^1\left(\frac{2}{2x+3}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{(2-x)^2}\right)dx$ $=\left(\ln\lvert 2x+3\rvert-\ln\lvert 2-x\rvert+\frac{1}{2-x}\right)\Big\|_0^1$ $=\ln 5+1-\ln 3+\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\ln\frac{10}{3}$
22	$\frac{4}{16x^2+8x-3}=\frac{4}{(4x-1)(4x+3)}=\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{4x+3}$ $\Rightarrow 4=A(4x+3)+B(4x-1)$ $x=\frac{1}{4}\Rightarrow A=1$ $x=-\frac{3}{4}\Rightarrow B=-1$ $\int_1^4\frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx=\int_1^4\left(\frac{1}{4x-1}+\frac{-1}{4x+3}\right)dx$ $=\left(\frac{1}{4}\ln\lvert 4x-1\rvert-\frac{1}{4}\ln\lvert 4x+3\rvert\right)\Big\|_1^4$ $=\left(\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{4x-1}{4x+3}\right\rvert\right)\Big\|_1^4$ $=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{15}{19}-\ln\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{35}{19}$

23	$\frac{5x+5}{x^2+x-6} = \frac{5x+5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ $\Rightarrow 5x+5 = A(x+3) + B(x-2)$ $x = 2 \Rightarrow A = 3$ $x = -3 \Rightarrow B = 2$ $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3}\right) dx$ $= (3\ln\|x-2\| + 2\ln\|x+3\|)\|_3^4$ $= 3\ln 2 + 2\ln 7 - 2\ln 6 = \ln\frac{98}{9}$
24	$\frac{4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ $\Rightarrow 4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$ $x = 0 \Rightarrow A = 1$ $x = 2 \Rightarrow C = 2$ $x = 1 \Rightarrow 4 = A - B + C \Rightarrow B = -1$ $A = \int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right) dx$ $= \left(\ln\|x\| - \ln\|x-2\| - \frac{2}{x-2}\right)\Big\|_3^4$ $= \left(\ln\left\|\frac{x}{x-2}\right\| - \frac{2}{x-2}\right)\Big\|_3^4$ $= \ln 2 - 1 - \ln 3 + 2 = 1 + \ln\frac{2}{3}$

25	$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$ $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$ $\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x-3)$ $x = 3 \Rightarrow A = 1$ $x = 2 \Rightarrow B = -1$ $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2}\right) dx$ $= (\ln\|x-3\| - \ln\|x-2\|)\|_0^1$ $= \ln\left\|\frac{x-3}{x-2}\right\|\Big\|_0^1$ $= \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$
26	$A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{3x - x^2}\, dx$ $\frac{x^2+1}{3x-x^2} = -1 + \frac{3x+1}{3x-x^2}$ $\frac{3x+1}{3x-x^2} = \frac{3x+1}{x(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-x}$ $\Rightarrow 3x + 1 = A(3-x) + Bx$ $x = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ $x = 3 \Rightarrow B = \frac{10}{3}$ $A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\, dx = \int_1^2 \left(-1 + \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{10}{3}}{3-x}\right) dx$ $= \left(-x + \frac{1}{3}\ln\|x\| - \frac{10}{3}\ln\|3-x\|\right)\Big\|_1^2$ $= -2 + \frac{1}{3}\ln 2 + 1 + \frac{10}{3}\ln 2$ $= -1 + \frac{11}{3}\ln 2$

27	$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow 2x - 5 = 0 \quad \Longrightarrow x = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow A(2.5, 0)$
28	$A = \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{2x-5}{x^2-2x-3}\,dx$ $\frac{2x-5}{x^2-2x-3} = \frac{2x-5}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 2x - 5 = A(x+1) + B(x-3)$ $x = 3 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ $x = -1 \Rightarrow -7 = -4B \Rightarrow B = \frac{7}{4}$ $A = \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{2x-5}{x^2-2x-3}\,dx = \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{4(x-3)} + \frac{7}{4(x+1)}\right) dx$ $= \frac{1}{4}\ln\lvert x-3\rvert + \frac{7}{4}\ln\lvert x+1\rvert \Big\rvert_0^{\frac{5}{2}}$ $= \frac{1}{4}(\ln\frac{1}{2} - \ln 3) + \frac{7}{4}(\ln\frac{7}{2} - \ln 1)$ $= \frac{1}{4}\ln\frac{1}{6} + \frac{7}{4}\ln\frac{7}{2} \approx 1.74$ إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي 1.74 وحدة مربعة تقريبًا.

29	$u = \cos x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$ $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{u + u^2} \times \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{-1}{u + u^2}\, du$ $\dfrac{-1}{u + u^2} = \dfrac{-1}{u(1 + u)} = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{1 + u}$ $\Rightarrow -1 = A(1 + u) + Bu$ $u = 0 \quad \Rightarrow A = -1$ $u = -1 \quad \Rightarrow B = 1$ $\displaystyle\int \frac{-1}{u + u^2}\, du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{1 + u}\right) du$ $= -\ln\lvert u\rvert + \ln\lvert 1 + u\rvert + C$ $\displaystyle\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x + cos^2 x}\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + \ln\lvert 1 + \cos x\rvert + C$ $= \ln\left\lvert\dfrac{1 + \cos x}{\cos x}\right\rvert + C = \ln\lvert 1 + \sec x\rvert + C$

30	$u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2udu$ $\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{u^4 + u^3}\, 2udu = \int \frac{2}{u^3 + u^2}\, du$ $\frac{2}{u^3 + u^2} = \frac{2}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1}$ $\Rightarrow 2 = Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2$ $u = 0 \quad \Rightarrow B = 2$ $u = -1 \quad \Rightarrow C = 2$ $u = 1 \quad \Rightarrow 2 = 2A + 2B + C \Rightarrow A = -2$ $\int \frac{2}{u^3 + u^2}\, du = \int \left(\frac{-2}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u+1}\right) du$ $= -2\ln\lvert u\rvert - \frac{2}{u} + 2\ln\lvert u+1\rvert + C$ $= 2\ln\left\lvert\frac{u+1}{u}\right\rvert - \frac{2}{u} + C$ $\Rightarrow \int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx = 2\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

31	$u = e^x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u}$ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx = \int \frac{u^2}{u^2 + 3u + 2} \times \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u^2 + 3u + 2}\,du$ $\dfrac{u}{u^2 + 3u + 2} = \dfrac{u}{(u+1)(u+2)} = \dfrac{A}{u+1} + \dfrac{B}{u+2}$ $\Rightarrow u = A(u+2) + B(u+1)$ $u = -1 \Rightarrow A = -1$ $u = -2 \Rightarrow B = 2$ $\displaystyle\int \frac{u}{u^2 + 3u + 2}\,du = \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{2}{u+2}\right) du$ $= -\ln\lvert u+1\rvert + 2\ln\lvert u+2\rvert + C$ $\displaystyle\Rightarrow \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx = -\ln(e^x + 1) + 2\ln(e^x + 2) + C$

32	$u = \sin x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{\cos x}$ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x - 4)}\,dx = \int \frac{\cos x}{u(u^2-4)} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u(u^2-4)}\,du$ $\dfrac{1}{u(u^2-4)} = \dfrac{1}{u(u-2)(u+2)} = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{u-2} + \dfrac{C}{u+2}$ $\Rightarrow 1 = A(u-2)(u+2) + Bu(u+2) + Cu(u-2)$ $u = 0 \ \Rightarrow A = -\dfrac{1}{4}$ $u = 2 \ \Rightarrow B = \dfrac{1}{8}$ $u = -2 \ \Rightarrow C = \dfrac{1}{8}$ $\displaystyle\int \frac{1}{u(u^2-4)}\,du = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{u} + \frac{\frac{1}{8}}{u-2} + \frac{\frac{1}{8}}{u+2} \right) du$ $= -\dfrac{1}{4}\ln\|u\| + \dfrac{1}{8}\ln\|u-2\| + \dfrac{1}{8}\ln\|u+2\| + C$ $\displaystyle\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x\,(sin^2 x - 4)}\,dx$ $= -\dfrac{1}{4}\ln\|\sin x\| + \dfrac{1}{8}\ln\|\sin x - 2\| + \dfrac{1}{8}\ln\|\sin x + 2\| + C$

33	الحل الأول بضرب كل من البسط والمقام بـ e^{-x} $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln(e^{-x}+1)+C$ الحل الثاني بالتعويض: $u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$ $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+u} \times \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u(1+u)}\,du$ $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$ $\Rightarrow 1 = A(1+u) + Bu$ $u = 0 \Rightarrow A = 1$ $u = -1 \Rightarrow B = -1$ $\int \frac{1}{u(1+u)}\,du = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1}\right) du = \ln\|u\| - \ln\|u+1\| + C$ $\Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x}dx = \ln e^x - \ln(e^x+1) + C$ $= -(\ln(e^x+1) - \ln e^x) + C$ $= -\ln(\frac{e^x+1}{e^x}) + C$ $= -\ln(1+e^{-x}) + C$
34	$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}dx = \ln e^x - \ln(e^x+1)\|_0^{\ln 2}$ $= \ln e^{\ln 2} - \ln\left(e^{\ln 2}+1\right) - (\ln e^0 - \ln(e^0+1))$ $= \ln 2 - \ln 3 - 0 + \ln 2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$

35	$\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}=\frac{A}{2x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$ $\Rightarrow 5x^2-8x+1=A(x-1)^2+B(2x)(x-1)+C(2x)$ $x=0\Rightarrow A=1$ $x=1\Rightarrow C=-1$ $x=-1\Rightarrow 14=4A+4B-2C\Rightarrow B=2$ $\int_4^9\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}\,dx=\int_4^9\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}\right)dx$ $=\left(\frac{1}{2}\ln\lvert x\rvert+2\ln\lvert x-1\rvert+\frac{1}{x-1}\right)\Big\rvert_4^9$ $=\frac{1}{2}\ln 9+2\ln 8+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ln 4-2\ln 3-\frac{1}{3}$ $=\ln 3+\ln 64+\frac{1}{8}-\ln 2-\ln 9-\frac{1}{3}$ $=\ln\frac{3(64)}{2(9)}-\frac{5}{24}=\ln\frac{32}{3}-\frac{5}{24}$

36	$u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2udu$ $x = 9 \quad \Rightarrow u = 3$ $x = 16 \quad \Rightarrow u = 4$ $\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\, dx = \int_3^4 \frac{2u}{u^2-4}\, 2udu = \int_3^4 \frac{4u^2}{u^2-4}\, du$ $= \int_3^4 \left(4 + \frac{16}{u^2-4}\right) du$ $\frac{16}{u^2-4} = \frac{16}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$ $\Rightarrow 16 = A(u+2) + B(u-2)$ $u = 2 \Rightarrow A = 4$ $u = -2 \quad \Rightarrow B = -4$ $\int_3^4 \left(4 + \frac{16}{u^2-4}\right) du = \int_3^4 \left(4 + \frac{4}{u-2} + \frac{-4}{u+2}\right) du$ $= (4u + 4\ln\lvert u-2\rvert - 4\ln\lvert u+2\rvert)\rvert_3^4$ $= 16 + 4\ln 2 - 4\ln 6 - 12 - 4\ln 1 + 4\ln 5$ $= 4 + 4\ln\frac{5}{3} = 4(1 + \ln\frac{5}{3})$ $\Rightarrow \int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\, dx = 4\left(1 + \ln\frac{5}{3}\right)$

37	$\frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3} = 2 + \frac{-x-2}{2x^2+5x+3}$ $\frac{-x-2}{2x^2+5x+3} = \frac{-x-2}{(x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+3}$ $\Rightarrow -x-2 = A(2x+3) + B(x+1)$ $x = -1 \Rightarrow A = -1$ $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow B = 1$ $\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\,dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2x+3}\right) dx$ $= \left(2x - \ln\lvert x+1\rvert + \frac{1}{2}\ln\lvert 2x+3\rvert\right)\Big\rvert_0^1$ $= 2 - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 - 0 + \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 3$ $= 2 - \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3$ $= 2 + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 4 - \ln 3) = 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$

38

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$$

$$u=\sqrt{1+\sqrt{x}} \;\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}},\quad 1+\sqrt{x}=u^2 \Rightarrow \sqrt{x}=u^2-1$$

$$\Rightarrow dx=4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}du\;=4u(u^2-1)du$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx=\int \frac{u}{(u^2-1)^2}\,4u(u^2-1)du=\int \frac{4u^2}{u^2-1}\,du$$

$$\frac{4u^2}{u^2-1}=4+\frac{4}{u^2-1}$$

$$\frac{4}{u^2-1}=\frac{4}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

$$\Rightarrow 4=A(u+1)+B(u-1)$$

$$u=1\Rightarrow A=2$$

$$u=-1\Rightarrow B=-2$$

$$\int \frac{4u^2}{u^2-1}\,du=\int\left(4+\frac{2}{u-1}+\frac{-2}{u+1}\right)du$$

$$=4u+2\ln|u-1|-2\ln|u+1|+C$$

$$=4u+2\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+2\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}\right|+C$$

39	$\frac{x}{16x^4-1}=\frac{x}{(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)}=\frac{Ax+B}{4x^2+1}+\frac{C}{2x-1}+\frac{D}{2x+1}$ $\Rightarrow x=(Ax+B)(2x-1)(2x+1)+C(4x^2+1)(2x+1)$ $+D(4x^2+1)(2x-1)$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{1}{8}$ $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow D=\frac{1}{8}$ $x=0\Rightarrow 0=-B+C-D\Rightarrow B=0$ $x=1\Rightarrow 1=3A+3B+15C+5D\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$ $\int\frac{x}{16x^4-1}\,dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}x}{4x^2+1}+\frac{\frac{1}{8}}{2x-1}+\frac{\frac{1}{8}}{2x+1}\right)dx$ $=-\frac{1}{16}\ln(4x^2+1)+\frac{1}{16}\ln\|2x-1\|+\frac{1}{16}\ln\|2x+1\|+C$ $=\frac{1}{16}\ln\left\|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right\|+C$

40	$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}\,dx$ $u = x^2 \implies du = 2x\,dx \implies dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{(u+1)(u+2)^2}\,du$ $\frac{1}{(u+1)(u+2)^2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2} + \frac{C}{(u+2)^2}$ $A(u+2)^2 + B(u+2)(u+1) + C(u+1) = 1$ $u = -2 \implies -C = 1 \implies C = -1$ $u = -1 \implies A = 1$ $u = 0 \implies 4 + 2B - 1 = 1 \implies B = -1$ $\int \frac{1}{(u+1)(u+2)^2}\,du = \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2} - \frac{1}{(u+2)^2}\right) du$ $= \ln\|u+1\| - \ln\|u+2\| + \frac{1}{u+2} + C$ $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}\,dx = \ln(x^2+1) - \ln(x^2+2) + \frac{1}{x^2+2} + C$ $= \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right) + \frac{1}{x^2+2} + C$

الدرس الرابع: التكامل بالأجزاء

مسألة اليوم صفحة 58
$S(t)=\int 350\ln(t+1)\,dt$ $u=\ln(t+1) \qquad dv=350\,dt$ $du=\frac{1}{t+1}dt \qquad v=350\,t$ $\int udv=uv-\int vdu$ $\int 350\ln(1+t)dt = 350t\ln(t+1)-\int\frac{350t}{t+1}dt$ $=350t\ln(t+1)-\int(350-\frac{350}{t+1})dt$ $=350t\ln(t+1)-350t+350\ln(t+1)+C$ $S(t)=0-0+0+C=0 \quad \Rightarrow C=0$ $S(t)=350t\ln(t+1)-350t+350\ln(t+1)$ $=700t\ln(t+1)-350t$

أتحقق من فهمي صفحة 61	
a	$u=x \qquad dv=\sin x\ dx$ $du=dx \qquad v=-\cos x$ $\int x\sin x dx = -x\cos x-\int -\cos x\ dx$ $=-x\cos x+\sin x+C$

b	$u = \ln x \qquad dv = x^2\,dx$ $du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$ $\int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2\,dx$ $= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$
c	ملاحظة: يمكن حل هذه المسألة بطريقة التعويض $u = \sqrt{7-3x}$ أو $u = 7-3x$ وتاليًا حلّها بالأجزاء: $u = 2x \qquad dv = (7-3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ $du = 2dx \qquad v = -\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}$ $\int 2x\sqrt{7-3x}\,dx = -\frac{4}{9}x(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{4}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}\,dx$ $= -\frac{4}{9}x(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{135}(7-3x)^{\frac{5}{2}} + C$
d	$u = 3x \qquad dv = e^{4x}\,dx$ $du = 3dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int 3xe^{4x}\,dx = \frac{3}{4}xe^{4x} - \int \frac{3}{4}e^{4x}\,dx$ $= \frac{3}{4}xe^{4x} - \frac{3}{16}e^{4x} + C$

أتحقق من فهمي صفحة 62	
a	$u = x^2 \qquad dv = \sin x \ dx$ $du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$ $\int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x \ dx$ $\int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \ dx$ $u = 2x \qquad dv = \cos x \ dx$ $du = 2\,dx \qquad v = \sin x$ $\int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x \ dx$ $= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$
b	$u = x^3 \qquad dv = e^{4x}\,dx$ $du = 3x^2 dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \int \frac{3}{4}x^2 e^{4x}\,dx$ $u = \frac{3}{4}x^2 \qquad dv = e^{4x}\,dx$ $du = \frac{3}{2}x\,dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \int \frac{3}{8} x e^{4x}\,dx$ $u = \frac{3}{8}x \qquad dv = e^{4x}\,dx$ $du = \frac{3}{8}\,dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \frac{3}{32}x e^{4x} - \int \frac{3}{32} e^{4x}\,dx$ $= \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \frac{3}{32}x e^{4x} - \frac{3}{128}e^{4x} + C$

أتحقق من فهمي صفحة 64	
a	$\int \frac{\sin x}{e^x} dx = \int \sin x\, e^{-x}\, dx$ $u = \sin x \qquad dv = e^{-x}\, dx$ $du = \cos x\, dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int \sin x\, e^{-x}\, dx = -\sin x\, e^{-x} - \int -e^{-x} \cos x\, dx$ $\int \sin x\, e^{-x}\, dx = -\sin x\, e^{-x} + \int e^{-x} \cos x\, dx$ $u = \cos x \qquad dv = e^{-x}\, dx$ $du = -\sin x\, dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int \sin x\, e^{-x}\, dx = -\sin x\, e^{-x} + e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x\, dx$ $\Rightarrow 2\int \sin x\, e^{-x}\, dx = e^{-x}(-\sin x + \cos x) + C$ $\int \sin x\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} e^{-x}(-\sin x + \cos x) + C$
b	$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$ $du = \sec x \tan x\, dx \qquad v = \tan x$ $\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$ $= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$ $= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$ $2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$ $= \sec x \tan x + \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$ $= \sec x \tan x + \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ $= \sec x \tan x + \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$ $\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert) + C$

أتحقق من فهمي صفحة 65

a

افرض أن: $f(x) = x^4, \quad g(x) = \cos 4x$ ، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^4	+	$\cos 4x$
$4x^3$	-	$\frac{1}{4}\sin 4x$
$12x^2$	+	$-\frac{1}{16}\cos 4x$
$24x$	-	$-\frac{1}{64}\sin 4x$
24	+	$\frac{1}{256}\cos 4x$
0		$\frac{1}{1024}\sin 4x$

$$\int x^4 \cos 4x \, dx =$$

$$\frac{1}{4}x^4 \sin 4x + \frac{1}{4}x^3 \cos 4x - \frac{3}{16}x^2 \sin 4x - \frac{3}{32}x \cos 4x + \frac{3}{128}\sin 4x + C$$

b

افرض أن: $g(x) = e^x$، $f(x) = x^5,$ ، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^5	+	e^x
$5x^4$	-	e^x
$20x^3$	+	e^x
$60x^2$	-	e^x
$120x$	+	e^x
120	-	e^x
0		e^x

$$\int x^5 e^x \, dx = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

أتحقق من فهمي صفحة 67		
$C(x) = \int (0.1x+1)e^{0.03x}\,dx$ $u = 0.1x+1 \qquad dv = e^{0.03x}\,dx$ $du = 0.1dx \qquad v = \frac{1}{0.03}e^{0.03x}$ $\int (0.1x+1)e^{0.03x}\,dx = (0.1x+1)\left(\frac{1}{0.03}e^{0.03x}\right) - \int \frac{0.1}{0.03}e^{0.03x}\,dx$ $= \frac{10}{3}(x+10)e^{0.03x} - \frac{1000}{9}e^{0.03x} + C$ $C(10) = \frac{200}{3}e^{0.3} - \frac{1000}{9}e^{0.3} + C = 200 \Rightarrow C \approx 260$ $\Rightarrow C(x) = \frac{10}{3}e^{0.03x}\left(x - \frac{70}{3}\right) + 260$		
أتحقق من فهمي صفحة 68		
a	$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}\,dx$ $du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = -\frac{1}{x}$ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x}\Big\vert_1^e + \int_1^e x^{-2}\,dx$ $= -\frac{\ln x}{x}\Big\vert_1^e + (-\frac{1}{x})\Big\vert_1^e$ $= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$	
b	$u = x \qquad dv = e^{-2x}\,dx$ $du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big\vert_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx$ $= -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big\vert_0^1 + (-\frac{1}{4}e^{-2x})\Big\vert_0^1$ $= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$	

أتحقق من فهمي صفحة 69

a

$$\int (x^3 + x^5)\sin x^2\, dx$$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int (x^3 + x^5)\sin x^2\, dx = \int (x^3 + x^5)\sin y \frac{dy}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2 + x^4)\sin y\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int (y + y^2)\sin y\, dy$$

$u = y + y^2 \qquad dv = \sin y\, dy$

$du = (1 + 2y)dy \qquad v = -\cos y$

$$\int (y + y^2)\sin y\, dy = -(y + y^2)\cos y - \int -(1 + 2y)\cos y\, dy$$

$$= -(y + y^2)\cos y + \int (1 + 2y)\cos y\, dy$$

بالأجزاء مرة ثانية:

$u = 1 + 2y \qquad dv = \cos y\, dy$

$du = 2dy \qquad v = \sin y$

$$\int (1 + 2y)\cos y\, dy = (1 + 2y)\sin y - \int 2\sin y\, dy$$

$$= (1 + 2y)\sin y + 2\cos y$$

$$\int (x^3 + x^5)\sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\int (y + y^2)\sin y\, dy$$

$$= \frac{1}{2}(-(y + y^2)\cos y + (1 + 2y)\sin y + 2\cos y) + C$$

$$= \frac{1}{2}(-(x^2 + x^4)\cos x^2 + (1 + 2\, x^2)\sin\, x^2 + 2\cos\, x^2) + C$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 - \frac{1}{2}x^4\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2 + x^2\sin x^2 + \cos x^2 + C$$

b	$y = x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{2x}$ $\int x^5 e^{x^2}\, dx = \int x^5 e^y \dfrac{dy}{2x} = \int \dfrac{1}{2} x^4 e^y\, dy = \dfrac{1}{2}\int y^2 e^y\, dy$ $u = y^2 \qquad dv = e^y\, dy$ $du = 2ydy \qquad v = e^y$ $\int y^2 e^y\, dy = y^2 e^y - \int 2y e^y\, dy$ $= y^2 e^y - 2ye^y + \int 2e^y\, dy$ $= y^2 e^y - 2ye^y + 2e^y = (y^2 - 2y + 2)e^y$ $\int x^5 e^{x^2}\, dx = (\frac{1}{2} x^4 - x^2 + 1)e^{x^2} + C$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 69	
1	$u = x + 1 \qquad dv = \cos x\, dx$ $du = dx \qquad v = \sin x$ $\int (x+1)\cos x\, dx = (x+1)\sin x - \int \sin x\, dx$ $= (x+1)\sin x + \cos x + C$
2	$u = x \qquad dv = e^{\frac{1}{2}x}\, dx$ $du = dx \qquad v = 2e^{\frac{1}{2}x}$ $\int x e^{\frac{1}{2}x}\, dx = 2xe^{\frac{1}{2}x} - \int 2e^{\frac{1}{2}x}\, dx$ $= 2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + C$

3	$u = 2x^2 - 1 \qquad dv = e^{-x}\,dx$ $du = 4x\,dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int (2x^2-1)e^{-x}\,dx = -(2x^2-1)e^{-x} + \int 4xe^{-x}\,dx$ بالأجزاء مرة أخرى: $u = 4x \qquad dv = e^{-x}\,dx$ $du = 4\,dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int (2x^2-1)e^{-x}\,dx = -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} + \int 4e^{-x}\,dx$ $= -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} - 4e^{-x} + C$ $= -e^{-x}(2x^2+4x+3) + C$
4	$\int x\ln(1+x)\,dx$ $u = \ln(1+x) \qquad dv = x\,dx$ $du = \frac{1}{1+x}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$ $\int x\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$ $= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx$ $= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right) + C$ $= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$

5	$\int x\sin x\cos x\ dx = \int \frac{1}{2}x\sin 2x\ dx$ $u = \frac{1}{2}x \qquad dv = \sin 2x\ dx$ $du = \frac{1}{2}\ dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $\int x\sin x\cos x\ dx = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \int \frac{1}{4}\cos 2x\ dx$ $= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$
6	$u = x \qquad dv = \sec x\tan x\ dx$ $du = dx \qquad v = \sec x$ $\int x\sec x\tan x\ dx = x\sec x - \int \sec x\ dx$ $= x\sec x - \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\ dx$ $= x\sec x - \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}\ dx$ $= x\sec x - \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
7	$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x\csc^2 x\ dx$ $u = x \qquad dv = \csc^2 x\ dx$ $du = dx \qquad v = -\cot x$ $\int x\csc^2 x\ dx = -x\cot x + \int \cot x\ dx$ $= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx$ $= -x\cot x + \ln\lvert\sin x\rvert + C$

8	$u = \ln x \qquad dv = x^{-3}\,dx$ $du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = -\frac{1}{2}x^{-2}$ $\int x^{-3}\ln x\;dx = -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \int -\frac{1}{2}x^{-2}\frac{1}{x}\,dx$ $= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \int \frac{1}{2}x^{-3}\,dx$ $= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \frac{1}{4}x^{-2} + C$ $= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$
9	$u = 2x^2 \qquad dv = \sec^2 x\,\tan x\,dx$ $du = 4x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}\tan^2 x$ ملاحظة: لإيجاد v استخدمنا طريقة التعويض، حيث: $y = \tan x\,, dx = \frac{dy}{\sec^2 x}$ ومنه: $v = \int \sec^2 x\;\tan x\,dx = \int \sec^2 x\,y\frac{dy}{\sec^2 x} = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\tan^2 x$ $\int 2x^2\sec^2 x\;\tan x\,dx = 2x^2\left(\frac{1}{2}\tan^2 x\right) - \int 2x\tan^2 x\,dx$ بالأجزاء مرة أخرى: $u = 2x \qquad dv = \tan^2 x\,dx = (\sec^2 x - 1)dx$ $du = 2\,dx \qquad v = \tan x - x$ $\int 2x^2\sec^2 x\;\tan x\,dx$ $= x^2\tan^2 x - \left(2x(\tan x - x) - \int 2\,(\tan x - x)dx\right)$ $= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + 2x^2 + 2\int \left(\frac{\sin x}{\cos x} - x\right)dx$ $= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + 2x^2 - 2\ln\lvert\cos x\rvert - x^2 + C$ $= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + x^2 - 2\ln\lvert\cos x\rvert + C$

10

هذه المسألة يمكن حلها بالتعويض ($u = 8 - x$ أو $u = \sqrt{8 - x}$)

وحلها بالأجزاء كالآتي:

$$u = x - 2 \qquad dv = (8 - x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{2}{3}(8 - x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int (x - 2)\sqrt{8 - x}\, dx = (x - 2) \times -\frac{2}{3}(8 - x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3}(8 - x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{3}(x - 2)(8 - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(8 - x)^{\frac{5}{2}} + C$$

11

بالأجزاء 3 مرات، نستخدم طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^3	+	$\cos 2x$
$3x^2$	-	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$6x$	+	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
6	-	$-\frac{1}{8}\sin 2x$
0		$\frac{1}{16}\cos 2x$

$$\int x^3 \cos 2x \; dx = \frac{1}{2}x^3 \sin 2x + \frac{3}{4}x^2 \cos 2x - \frac{3}{4}x \sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C$$

12

$$\int \frac{x}{6^x} dx = \int x 6^{-x} dx$$

$$u = x \qquad dv = 6^{-x}\, dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{6^{-x}}{\ln 6}$$

$$\int x 6^{-x} dx = -x\frac{6^{-x}}{\ln 6} + \int \frac{6^{-x}}{\ln 6} dx$$

$$= -x\frac{6^{-x}}{\ln 6} - \frac{6^{-x}}{(\ln 6)^2} + C$$

13	$u = e^{3x} \qquad dv = \cos x \; dx$ $du = 3e^{3x}\, dx \qquad v = \sin x$ $\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - \int 3e^{3x} \sin x \, dx$ بالأجزاء مرة أخرى: $u = 3e^{3x} \qquad dv = \sin x \; dx$ $du = 9e^{3x}\, dx \qquad v = -\cos x$ $\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - 3e^{3x}(-\cos x) - 9\int e^{3x} \cos x \, dx$ $10\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x$ $\int e^{3x} \cos x \, dx = \frac{1}{10} e^{3x}(\sin x + 3\cos x) + C$
14	$u = \ln \sin x \qquad dv = \cos x \; dx$ $du = \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \qquad v = \sin x$ $\int \cos x \ln \sin x \, dx = \sin x \ln \sin x - \int \cos x \, dx$ $= \sin x \ln \sin x - \sin x + C$
15	$u = \ln(1+e^x) \qquad dv = e^x \, dx$ $du = \frac{e^x}{1+e^x}\, dx \qquad v = e^x$ $\int e^x \ln(1+e^x)\, dx = e^x \ln(1+e^x) - \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \qquad , u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$ $= e^x \ln(1+e^x) - \int \frac{u}{1+u} du$ $= e^x \ln(1+e^x) - \int \left(1 + \frac{-1}{1+u}\right) du$ $= e^x \ln(1+e^x) - e^x + \ln(1+e^x) + C$ $= (1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x + C$

16	وجدنا في المثال 3 أنّ: $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$
17	$\int_1^e \ln x^2\, dx = \int_1^e 2\ln x\, dx$ $u = 2\ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{2}{x}\, dx \qquad v = x$ $\int_1^e 2\ln x\, dx = 2x\ln x\vert_1^e - \int_1^e 2dx$ $= 2x\ln x\vert_1^e - 2x\vert_1^e$ $= 2e\ln e - 2\ln 1 - 2e + 2 = 2e - 0 - 2e + 2 = 2$
18	$\int_1^2 \ln(xe^x)\, dx = \int_1^2 (\ln x + \ln e^x)dx$ $= \int_1^2 (\ln x + x)dx = \int_1^2 \ln x\, dx + \int_1^2 xdx$ نجد $\int_1^2 \ln x\, dx$ بطريقة الأجزاء: $u = \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$ $\int_1^2 \ln x\, dx = x\ln x\vert_1^2 - \int_1^2 dx = x\ln x\vert_1^2 - x\vert_1^2 = 2\ln 2 - \ln 1 - 2 + 1$ $= 2\ln 2 - 1$ $\int_1^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big\vert_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow \int_1^2 \ln(xe^x)\, dx = 2\ln 2 - 1 + \frac{3}{2} = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$

19	$u = x \qquad dv = \sec^2 3x\, dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\tan 3x$ $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x\sec^2 3x\, dx = \frac{1}{3}x\tan 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\tan 3x\, dx$ $= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\, dx$ $= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{9}\ln\cos 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$ $= \frac{\pi}{27}\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{4}$ $= \frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$
20	$u = \ln x \qquad dv = x^4\, dx$ $du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{1}{5}x^5$ $\int_1^e x^4 \ln x\, dx = \frac{1}{5}x^5\ln x\Big\|_1^e - \int_1^e \frac{1}{5}x^4\, dx$ $= \frac{1}{5}x^5\ln x\Big\|_1^e - \frac{1}{25}x^5\Big\|_1^e$ $= \frac{1}{5}e^5 - 0 - \frac{1}{25}e^5 + \frac{1}{25} = \frac{4e^5+1}{25}$

21

نجد $\int x^2 \sin x \, dx$ باستخدام طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^2	$+$	$\sin x$
$2x$	$-$	$-\cos x$
2	$+$	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 2$$

22

$u = x \qquad dv = (e^{-2x} + e^{-x})\, dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x})\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4} + 1$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{5}{4}$$

23

$u = xe^x \qquad dv = (1+x)^{-2}\, dx$

$du = (xe^x + e^x)\, dx = e^x(x+1)\, dx \qquad v = -(1+x)^{-1}$

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx = -xe^x(1+x)^{-1}\big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x(x+1)}{(1+x)}\, dx$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x}\Big|_0^1 + e^x\big|_0^1$$

$$= -\frac{e}{2} + e - 1 = \frac{1}{2}e - 1$$

24	$u = x \qquad dv = 3^x\,dx$ $du = dx \qquad v = \dfrac{3^x}{\ln 3}$ $\int_0^1 x3^x\,dx = x\dfrac{3^x}{\ln 3}\Big\vert_0^1 - \int_0^1 \dfrac{3^x}{\ln 3}\,dx$ $= x\dfrac{3^x}{\ln 3}\Big\vert_0^1 - \dfrac{3^x}{(\ln 3)^2}\Big\vert_0^1$ $= \dfrac{3}{\ln 3} - \dfrac{3}{(\ln 3)^2} + \dfrac{1}{(\ln 3)^2} = \dfrac{3\ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$
25	$y = x^2 \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{2x}$ $\int x^3 e^{x^2}dx = \int x^3 e^y \dfrac{dy}{2x} = \int \dfrac{1}{2}x^2 e^y dy = \int \dfrac{1}{2} y e^y dy$ $u = \dfrac{1}{2}y \qquad dv = e^y dy$ $du = \dfrac{1}{2}\,dy \qquad v = e^y$ $\int \dfrac{1}{2} y e^y dy = \dfrac{1}{2} y e^y - \int \dfrac{1}{2} e^y dy$ $= \dfrac{1}{2} y e^y - \dfrac{1}{2} e^y + C$ $\int x^3 e^{x^2} dx = \dfrac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \dfrac{1}{2} e^{x^2} + C$

26	$y=\ln x \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x} \Longrightarrow dx = x dy \quad , \quad x=e^y$ $\int \cos(\ln x)\,dx = \int x\cos y\ dy = \int e^y \cos y\, dy$ من المثال محلول الصفحات 55و56 في كتاب الطالب نجد أنّ: $\int e^y \cos y\, dy = \frac{1}{2}e^y(\sin y+\cos y)+C$ $\Longrightarrow \int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}e^{\ln x}(\sin \ln x + \cos \ln x)+C$ $= \frac{1}{2}x(\sin \ln x + \cos \ln x)+C$
27	$y=x^2 \Longrightarrow dx = \frac{dy}{2x}$ $\int x^3 \sin x^2\, dx = \int x^3 \sin y \frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2}x^2 \sin y\, dy = \int \frac{1}{2} y \sin y\, dy$ $u=\frac{1}{2}y \qquad dv = \sin y\, dy$ $du = \frac{1}{2}\,dy \qquad v = -\cos y$ $\int \frac{1}{2} y\sin y\, dy = -\frac{1}{2}y\cos y + \int \frac{1}{2}\cos y\, dy$ $= -\frac{1}{2}y\cos y + \frac{1}{2}\sin y + C$ $\int x^3 \sin x^2\, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

28	$y = \cos x \Longrightarrow dx = \dfrac{dy}{-\sin x}$ $\int e^{\cos x} \sin 2x \, dx = \int e^{y}(2\sin x \cos x)\dfrac{dy}{-\sin x} = \int -2ye^{y} dy$ $u = -2y \qquad dv = e^{y} dy$ $du = -2\, dy \qquad v = e^{y}$ $\int -2ye^{y} dy = -2ye^{y} + \int 2e^{y} dy$ $= -2ye^{y} + 2e^{y} + C$ $\Longrightarrow \int e^{\cos x} \sin 2x \, dx = -2\cos x \, e^{\cos x} + 2e^{\cos x} + C$
29	$y = \sqrt{x} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2y} \Longrightarrow dx = 2y dy$ $\int \sin\sqrt{x} \, dx = \int 2y \sin y \, dy$ $u = 2y \qquad dv = \sin y \, dy$ $du = 2\, dy \qquad v = -\cos y$ $\int 2y \sin y \, dy = -2y\cos y + \int 2\cos y \, dy$ $= -2y\cos y + 2\sin y + C$ $\Longrightarrow \int \sin\sqrt{x} \, dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$

30	$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$ $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^3 e^y}{(y+1)^2} \frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2} x^2 \frac{e^y}{(y+1)^2} dy = \int \frac{\frac{1}{2} y e^y}{(y+1)^2} dy$ $u = \frac{1}{2} y e^y \qquad dv = \frac{1}{(y+1)^2} dy$ $du = \frac{1}{2}(ye^y + e^y)\, dy = \frac{1}{2} e^y (y+1)\, dy \qquad v = \frac{-1}{y+1}$ $\int \frac{\frac{1}{2} y e^y}{(y+1)^2} dy = \frac{-ye^y}{2(y+1)} + \int \frac{1}{y+1} \times \frac{1}{2} e^y (y+1) dy$ $= \frac{-ye^y}{2(y+1)} + \frac{1}{2} \int e^y dy$ $= \frac{-ye^y}{2(y+1)} + \frac{1}{2} e^y + C$ $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx = \frac{-x^2 e^{x^2}}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} e^{x^2} + C = \frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)} + C$
31	$\int \ln(9-x^2)\, dx$ $u = \ln(9-x^2) \qquad dv = dx$ $du = \frac{2x^2}{x^2-9} dx \qquad v = x$ $\int \ln(9-x^2)\, dx = x \ln(9-x^2) - \int \frac{2x^2}{x^2-9} dx$ $= x\ln(9-x^2) - \int 2 + \frac{18}{(x-3)(x+3)} dx$ $= x\ln(9-x^2) - \int \left(2 + \frac{3}{x-3} + \frac{-3}{x+3}\right) dx$ $= x\ln(9-x^2) - 2x - 3\ln\lvert x-3\rvert + 3\ln\lvert x+3\rvert + C$ $= x\ln(9-x^2) - 2x + 3\ln\left\lvert\frac{x+3}{x-3}\right\rvert + C$

32	$\int \frac{4\ln x}{(x-1)^3}dx$ $u = 4\ln x \qquad dv = (x-1)^{-3}dx$ $du = \frac{4}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2}$ $\int \frac{4\ln x}{(x-1)^3}dx = -\frac{2\ln x}{(x-1)^2} + \int \frac{2}{x(x-1)^2}dx$ أجد $\int \frac{2}{x(x-1)^2}dx$ بالكسور الجزئية: $\frac{2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$ $2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$ $x = 0 \Rightarrow A = 2$ $x = 1 \Rightarrow C = 2$ $x = 2 \Rightarrow 2 = A + 2B + 2C \Rightarrow 2 = 2 + 2B + 4 \Rightarrow B = -2$ $\int \frac{2}{x(x-1)^2}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right)dx$ $= 2\ln\|x\| - 2\ln\|x-1\| - \frac{2}{x-1} + C$ $\int \frac{4\ln x}{(x-1)^3}dx = -\frac{2\ln x}{(x-1)^2} + 2\ln\left\|\frac{x}{x-1}\right\| - \frac{2}{x-1} + C$
33	الإحداثيان x للنقطتين A و B هما أصغر حلين موجبين للمعادلة: $f(x) = e^{-x}\sin 2x = 0$ $\Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi, 2\pi, \ldots$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$ $\Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), B(\pi, 0)$

34

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x \ dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x}\sin 2x \ dx\right)$$

للتبسيط سنجد أولًا: $\int e^{-x}\sin 2x \ dx$ (التكامل غير المحدود)

$$u = e^{-x} \qquad dv = \sin 2x\, dx$$

$$du = -e^{-x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int e^{-x}\sin 2x \ dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \int \frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x \ dx$$

بالأجزاء مرة أخرى:

$$u = \frac{1}{2}e^{-x} \qquad dv = \cos 2x\, dx$$

$$du = -\frac{1}{2}e^{-x}dx \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int e^{-x}\sin 2x \ dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x \ dx$$

$$\int e^{-x}\sin 2x \ dx + \frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x \ dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x \ dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x + C$$

$$\int e^{-x}\sin 2x \ dx = -\frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x) + C$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{-\pi} + \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{5}\left(1 + e^{-\pi} + 2e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

35	$s(t) = \int te^{-\frac{t}{2}}dt$ $u = t \qquad dv = e^{-\frac{t}{2}}dt$ $du = dt \qquad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$ $s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - \int -2e^{-\frac{t}{2}}dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C$ $s(0) = 0 - 4 + C$ $0 = 0 - 4 + C \Rightarrow C = 4$ $\Rightarrow s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4$
36	$f(x) = \int (x+2)\sin x\ dx$ $u = x + 2 \qquad dv = \sin x\ dx$ $du = dx \qquad v = -\cos x$ $f(x) = -(x+2)\cos x + \int \cos x\ dx$ $= -(x+2)\cos x + \sin x + C$ $f(0) = -2 + 0 + C$ $2 = -2 + 0 + C \quad \Rightarrow C = 4$ $f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + 4$

37	$f(x)=\int 2xe^{-x}\,dx$ $u=2x \qquad dv=e^{-x}\,dx$ $du=2dx \qquad v=-e^{-x}$ $f(x)=-2xe^{-x}+\int 2e^{-x}\,dx$ $=-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$ $f(0)=0-2+C$ $3=-2+C \Rightarrow C=5$ $f(x)=-2xe^{-x}-2e^{-x}+5$
38	$N(t)=\int (t+6)e^{-0.25t}\,dt$ $u=t+6 \qquad dv=e^{-0.25t}dt$ $du=dt \qquad v=-4e^{-0.25t}$ $N(t)=-4(t+6)e^{-0.25t}+\int 4e^{-0.25t}dt=-4(t+6)e^{-0.25t}-16e^{-0.25t}+C$ $N(0)=-24-16+C$ $40=-24-16+C \Rightarrow C=80$ $\Rightarrow N(t)=-4(t+6)e^{-0.25t}-16e^{-0.25t}+80$
39	$u=\ln 2x \qquad dv=x^2dx$ $du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\frac{1}{3}x^3$ $\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^2\ln 2x\;dx=\frac{1}{3}x^3\ln 2x\Big\|_{\frac{1}{2}}^{3}-\int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{1}{3}x^2\;dx$ $=\frac{1}{3}x^3\ln 2x\Big\|_{\frac{1}{2}}^{3}-\frac{1}{9}x^3\Big\|_{\frac{1}{2}}^{3}$ $=9\ln 6-3+\frac{1}{72}=9\ln 6-\frac{215}{72}$

40	$u = x \qquad dv = \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x \ dx$ $= x\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right) dx$ $= x\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(-\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{128}\cos 8x\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}$ $= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + 0 - \frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{1}{128} = \frac{\pi - 2}{16}$
41	$u = x \qquad dv = e^{\frac{1}{2}x} dx$ $du = dx \qquad v = 2e^{\frac{1}{2}x}$ $\int_0^a xe^{\frac{1}{2}x} \, dx = 2xe^{\frac{1}{2}x}\Big\vert_0^a - \int_0^a 2e^{\frac{1}{2}x} \, dx$ $= 2xe^{\frac{1}{2}x}\Big\vert_0^a - 4e^{\frac{1}{2}x}\Big\vert_0^a$ $= 2ae^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4$ $\Rightarrow 2ae^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4 = 6$ $2ae^{\frac{1}{2}a} = 4e^{\frac{1}{2}a} + 2$ بقسمة طرفي المعادلة على $2e^{\frac{1}{2}a}$ نحصل على: $a = 2 + e^{-\frac{1}{2}a}$ لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-\frac{x}{2}}$

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du \quad , \quad x=e^{u}$$

$$\int (\ln x)^2 dx = \int u^2 x du = \int u^2 e^u du$$

بالأجزاء مرتين، نستخدم الجدول:

$f(u)$ ومشتقاته المتكررة		$g(u)$ وتكاملاته المتكررة
u^2	+	e^u
$2u$	-	e^u
2	+	e^u
0		e^u

$$\int u^2 e^u du = e^u(u^2-2u+2)+C$$

42

$$\int (\ln x)^2 dx = e^{\ln x}((\ln x)^2 - 2\ln x + 2) + C$$
$$= x((\ln x)^2 - 2\ln x + 2) + C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة:

$$u=(\ln x)^2 \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{2\ln x}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\, dx$$

بالأجزاء مرة أخرى:

$$u = 2\ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{2}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + \int 2dx$$
$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

43	$A_1=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x}\,dx \quad , \qquad A_2=\int_{0}^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx$ نجد التكامل غير المحدود $\int xe^{2x}\,dx$ بالأجزاء: $u=x \qquad dv=e^{2x}dx$ $du=dx \qquad v=\frac{1}{2}e^{2x}$ $\int xe^{2x}\,dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ $=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$ $=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C$ $\Rightarrow A(R_1)=-\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)\Big\|_{-\frac{1}{2}}^{0}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2e}=\frac{e-2}{4e}$ $A(R_2)=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)\Big\|_{0}^{\frac{1}{2}}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
44	$\frac{A(R_1)}{A(R_2)}=\frac{\frac{e-2}{4e}}{1/4}=\frac{e-2}{e}$ $A(R_1):A(R_{12})=(e-2):e$
45	$u=\ln x \qquad dv=x^n dx$ $du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $\int x^n \ln x\,dx=\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}-\int\frac{1}{n+1}x^n dx$ $=\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+C$ $=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1+(n+1)\ln x)+C$
46	$u=x^n \qquad dv=e^{ax}dx$ $du=nx^{n-1}dx \qquad v=\frac{1}{a}e^{ax}$ $\int x^n e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

الدرس الخامس: المساحات والحجوم

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 72</td></tr>
<tr><td>1</td><td>

$f(x) = h(x)$

$-2\cos x + 4 = 2\cos x + 2 \quad \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

الإحداثي x للنقطة A هو أكبر حل سالب لهذه المعادلة وهو $x = -\frac{\pi}{3}$:

$\Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{3}, f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{3}, 3\right)$

إحداثيا x للنقطتين B, C هما أصغر حلين موجبين للمعادلة، وهما: $x = \frac{\pi}{3}$ ، و $x = \frac{5\pi}{3}$

$\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, 3\right) \quad , \quad C\left(\frac{5\pi}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{5\pi}{3}, 3\right)$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

$A(R_1) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \big(h(x) - f(x)\big)dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \big(2\cos x + 2 - (-2\cos x + 4)\big)dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos x - 2)dx$

$= 4\sin x - 2x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} - \left(-2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$

$A(R_2) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \big(f(x) - h(x)\big)dx$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \big(-2\cos x + 4 - (2\cos x + 2)\big)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (2 - 4\cos x)dx$

$= 2x - 4\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$

$= \frac{10\pi}{3} + 2\sqrt{3} - \left(\frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)$

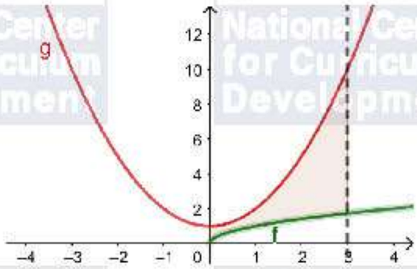
$= 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 75</td></tr>
<tr><td>a</td><td>

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 1 = \sqrt{x}$

هذه المعادلة ليس لها حلول إذ أن المنحنيين لا يتقاطعان كما في الشكل أدناه.



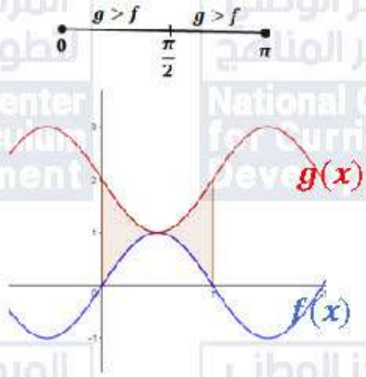
$$A = \int_0^3 \left(x^2 + 1 - \sqrt{x}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$

$$= 9 + 3 - 2\sqrt{3} - 0 = 12 - 2\sqrt{3}$$

</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - \sin x = \sin x$

$$\Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$



نلاحظ أن $g \geq f$ لكل قيم x، إذن:

$$A = \int_0^{\pi} \left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_0^{\pi} \left((2 - \sin x) - \sin x\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi} (2 - 2\sin x)dx$$

$$= 2x + 2\cos x\,|_0^{\pi} = 2\pi - 4$$

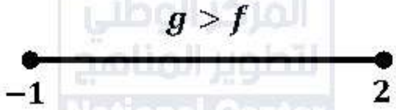
</td></tr>
</table>

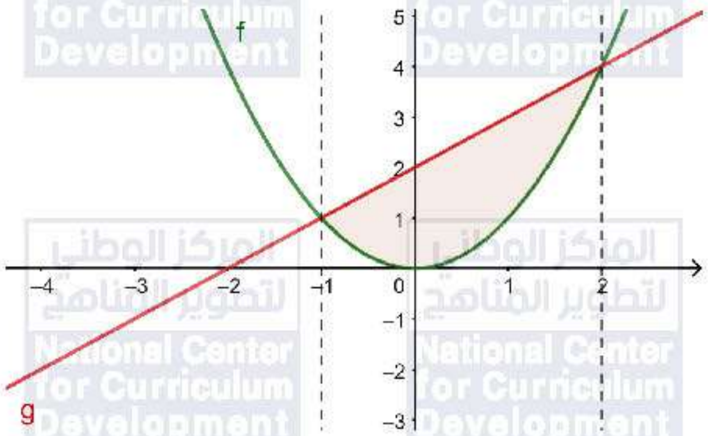
أتحقق من فهمي صفحة 77

$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 = x + 2$

$$\Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 2, x = -1$$





نلاحظ أن $g > f$ لكل قيم x في الفترة $(-1,\infty)$، إذن:

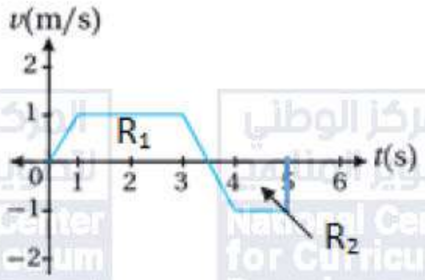
$$A = \int_{-1}^{2} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) - \frac{1}{3}(2)^3 - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 79

a



حساب الإزاحة:

$$s(5) - s(0) = \int_0^5 v(t)\, dt$$

$$= A(R_1) - A(R_2)$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 3.5)(1) - \frac{1}{2}(1 + 1.5)(1)$$

$$= 1.5 \text{ m}$$

b

المسافة التي قطعها الجسيم هي: $\int_0^5 |v(t)|\, dt$

$$d = \int_0^5 |v(t)|\, dt \quad = A(R_1) + A(R_2)$$

$$= \frac{1}{2}(5.5) + \frac{1}{2}(2.5)$$

$$= 4 \text{ m}$$

c

في الفرع a وجدنا أن:

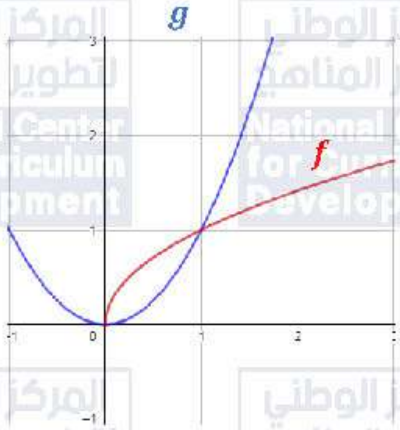
$$s(5) - s(0) = 1.5$$

وبتعويض $s(0) = 3$ نجد أنّ:

$$s(5) - 3 = 1.5 \implies s(5) = 4.5 \text{ m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 81

$$V = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 = \int_1^4 \frac{\pi}{x^2} dx = -\frac{\pi}{x}\Big|_1^4 = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

أتحقق من فهمي صفحة 83
$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x - x^4 = 0 \Rightarrow x(1 - x^3) = 0$ $\Rightarrow x = 0, \qquad x = 1$  نلاحظ أن منحنى f يقع فوق منحنى g في الفترة $(0, 1)$ $V = \int_0^1 \pi\left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right) dx$ $= \int_0^1 \pi(x - x^4)dx$ $= \pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big\|_0^1 = \pi\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0\right) = 0.3\pi$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 84	
1	$A = \int_{-1}^{1}(x^2 - (-2x^4))dx = \int_{-1}^{1}(x^2 + 2x^4)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5\right)\Big\|_{-1}^{1}$ $= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)$ $= \frac{22}{15}$

2	$A=\int_{-2}^{0}(x^3-3x-x)dx+\int_{0}^{2}\big(x-(x^3-3x)\big)dx$ $=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big\|_{-2}^{0}+\left(2x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_{0}^{2}$ $=(0)-(4-8)+(8-4)-(0)$ $=8$
3	$A=\int_{0}^{3}(e^{0.5x}-e^{-0.5x})dx=(2e^{0.5x}+2e^{-0.5x})\|_0^3$ $=(2e^{1.5}+2e^{-1.5})-(2+2)$ $=2e^{1.5}+2e^{-1.5}-4$
4	$A=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-\sin x)dx$ $=(\tan x+\cos x)\|_0^{\frac{\pi}{4}}$ $=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(0+1)$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}$
5	$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{1}{2}x^2+6=2x^2\Rightarrow\frac{3}{2}x^2=6\Rightarrow x^2=4$ $\Rightarrow x=2,\quad x=-2$ $A=\int_{-2}^{2}(f(x)-g(x))dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2+6-2x^2\right)dx$ $=\int_{-2}^{2}\left(6-\frac{3}{2}x^2\right)dx=\left(6x-\frac{1}{2}x^3\right)\Big\|_{-2}^{2}$ $=(12-4)-(-12+4)$ $=16$

6	$f(x) = g(x) \Rightarrow 3^x = 4^x \Rightarrow x = 0$ $A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (4^x - 3^x)dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{3^x}{\ln 3}\right)\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3}\right) - \left(\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 3}\right)$ $= \frac{3}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 3} \approx 0.344$
7	$f(x) = g(x) \Rightarrow e^x = \cos x$ نعلم من حلول هذه المعادلة الحل غير السالب: $x = 0$ في الربع الأول: يكون $\cos x \leq 1$ بينما $e^x \geq 1$ ، إذن: $e^x \geq \cos x$ $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - \cos x)dx = (e^x - \sin x)\|_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) - (1 - 0)$ $= e^{\frac{\pi}{2}} - 2$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 3x^3-x^2-10x=-x^2+2x$$

$$\Rightarrow 3x^3-12x=0 \Rightarrow 3x(x^2-4)=0$$

$$\Rightarrow x=0, x=-2, x=2$$

بحساب قيمة كلٍّ من الاقترانين عند عدد بين 2-، و0 مثل 1- نجد أنّ:

$$f(-1)=-3-1+10=6, g(-1)=-1-2=-3$$

إذن، $f(x)>g(x)$ في الفترة (-2, 0)

بحساب قيمة كلٍّ من الاقترانين عند عدد بين 0 و2 مثل 1 نجد أنّ:

$$f(1)=3-1-10=-8, g(1)=-1+2=1$$

إذن، $f(x)<g(x)$ في الفترة (0, 2)

8 $$A=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(3x^3-x^2-10x-(-x^2+2x)\right)dx$$

$$+\int_{0}^{2}\left(-x^2+2x-(3x^3-x^2-10x)\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(3x^3-12x)dx+\int_{0}^{2}(12x-3x^3)dx$$

$$=\left(\frac{3}{4}x^4-6x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(6x^2-\frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=(0)-(12-24)+(24-12)-(0)$$

$$=24$$

9	$f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - x^2 = 4x + 12 \Rightarrow x^2 + 4x + 8 = 0$ مميز هذه المعادلة هو: $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 8 = -16$ إذن، ليس لهذه المعادلة حل حقيقي، أي أن المنحنيين لا يتقاطعان أبدًا. لتحديد المنحنى الأعلى نحسب قيمة كل من $f(x)$ و $g(x)$ لأي عدد وليكن 0، $f(0) = 4, g(0) = 12$ إذن: $g(x) > f(x)$ ، وتحسب المساحة بينهما في الفترة [-1, 2] كما يأتي: $A = \int_{-1}^{2} ((4x+12) - (4 - x^2))dx = \int_{-1}^{2} (x^2 + 4x + 8)dx$ $= \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 8x\right)\Big\|_{-1}^{2}$ $= \frac{8-(-1)}{3} + 2(4-1) + 8(2-(-1)) = 33$
10	$f(x) = h(x) \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 = 16x \Rightarrow x^4 - 64x = 0$ $\Rightarrow x(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$ $h(x) > f(x)$ في الفترة $(0, 4)$ لأن $h(1) = 4, f(1) = \frac{1}{2}$ $A = \int_{0}^{4} (h(x) - f(x))dx = \int_{0}^{4} \left(4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx$ $= \left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^3\right)\Big\|_{0}^{4} = \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{3}\right) - (0) = \frac{32}{3}$
11	من التماثل فإن $B(-a, a^2)$ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ هي: $\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = \left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-a}^{a}$ $= \left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) - \left(-a^3 + \frac{1}{3}a^3\right)$ $= 2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$ مساحة المستطيل $ABCD$ هي: $2a \times a^2 = 2a^3$ إذن، المساحة بين المنحنى والقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تساوي $\frac{2}{3}$ مساحة المستطيل $ABCD$.

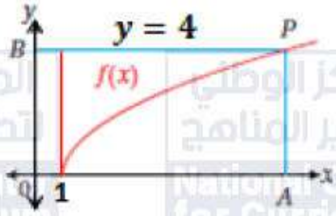
12	$A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right)$ $B(2, f(2)) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$ ميل AB: $\frac{\frac{17}{2}-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}-2} = -4$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $y - \frac{5}{2} = -4(x-2)$ $\Rightarrow y = \frac{21}{2} - 4x$ المساحة المطلوبة هي: $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{21}{2} - 4x - (2x^{-2} + x)\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{21}{2} - 5x - 2x^{-2}\right) dx$ $= \left(\frac{21}{2}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{x}\right)\Big\|_{\frac{1}{2}}^{2} = 21 - 10 + 1 - \left(\frac{21}{4} - \frac{5}{8} + 4\right) = \frac{27}{8}$
13	حساب الإزاحة: $s(8) - s(0) = \int_0^8 v(t)\,dt = \int_0^1 v(t)\,dt + \int_1^4 v(t)\,dt + \int_4^8 v(t)\,dt$ $\int_0^1 v(t)\,dt$ يساوي مساحة المثلث الأيسر في الرسم البياني وهي: $\frac{1}{2}(1)(2) = 1$ $\int_1^4 v(t)\,dt$ يساوي معكوس مساحة شبه المنحرف في الرسم البياني فهو يساوي: $-\frac{1}{2}(1+3)(2) = -4$ $\int_4^8 v(t)\,dt$ يساوي مساحة المثلث الأيمن في الرسم البياني وهي: $\frac{1}{2}(4)(4) = 8$ إذن، إزاحة الجسيم هي: $s(8) - s(0) = 1 + (-4) + 8 = 5\text{ m}$

14	المسافة التي قطعها الجسيم هي : $d = \int_0^8 \lvert v(t)\rvert dt\, d$ $d = \int_0^8 \lvert v(t)\rvert dt = \int_0^1 \lvert v(t)\rvert dt + \int_1^4 \lvert v(t)\rvert dt + \int_4^8 \lvert v(t)\rvert dt$ $= 1 + 4 + 8 = 13 \text{ m}$
15	$s(8) - s(0) = 5$ وبتعويض $s(0) = 5$ نجد أنّ: $s(8) - 5 = 5 \Rightarrow s(8) = 10 \text{ m}$
16	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 5 + 4x - x^2$ $\Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ $\Rightarrow (x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 2$ $\Rightarrow A(2,9), B(5,0)$
17	$V = \int_2^5 \pi((5 + 4x - x^2)^2 - (x^2 - 10x + 25)^2)dx$ $V = \int_2^5 \pi(12x^3 - 144x^2 + 540x - 600)dx$ $= 12\pi \int_2^5 (x^3 - 12x^2 + 45x - 50)dx$ $= 12\pi\left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 50x\right)\Big\|_2^5$ $= 12\pi\left(\frac{1}{4}(5)^4 - 4(5)^3 + \frac{45}{2}(5)^2 - 50(5)\right) - \left(\frac{1}{4}(2)^4 - 4(2)^3 + \frac{45}{2}(2)^2 - 50(2)\right)$ $= 81\pi$
18	$V = \int_0^\pi \pi\big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin x\, dx = -\pi \cos x \|_0^\pi$ $= -\pi(\cos\pi - \cos 0) = 2\pi$

19	$x^3=\sqrt{x}\Rightarrow x^6=x\Rightarrow x^6-x=0\Rightarrow x(x^5-1)=0\Rightarrow x=0,x=1$ لكل $x\in(0,1)$ يكون $\sqrt{x}>x^3$ $V=\int_0^1\pi\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx=\pi\int_0^1(x-x^6)dx$ $=\pi\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{7}x^7\right)\Big\|_0^1$ $=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-0\right)=\frac{5\pi}{14}$
20	$1+\sec x=3\Rightarrow\sec x=2\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{3},x=\frac{\pi}{3}$ نلاحظ أن المنحنيين يقعان فوق المحور x في الفترة $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ ولأن $f(0)=1+\sec 0=1+1=2,g(0)=3$ ، فإن $g(x)>f(x)$ في الفترة $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ $V=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\pi(9-(1+\sec x)^2)dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(9-(1+2\sec x+\sec^2x))dx$ $=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(8-2\sec x-\sec^2x)dx$ نجد $\int\sec x\ dx$ كي نجد الحجم: $\int\sec x\ dx=\int\sec x\times\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\ dx$ $=\int\frac{\sec^2x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\ dx=\ln\|\sec x+\tan x\|+C$ $\Rightarrow V=\pi(8x-2\ln\|\sec x+\tan x\|-\tan x)\|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$ $=\pi\left(\left(\frac{8\pi}{3}-2\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}\right)-\left(\frac{-8\pi}{3}-2\ln(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}\right)\right)$ $=\pi\left(\frac{16\pi}{3}+2\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)-2\sqrt{3}\right)$

<table>
<tr><td>21</td><td>

$\sqrt{2x-2}=0 \Rightarrow x=1$



نقسم المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى قسمين برسم المستقيم $x = 1$، ونجد المساحة كما يأتي:

$$A=\int_0^1 4\,dx+\int_1^9\left(4-\sqrt{2x-2}\right)dx$$

$$=(4x)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^9$$

$$=4-0+36-\frac{1}{3}(16)^{\frac{3}{2}}-(4-0)=\frac{44}{3}$$

</td></tr>
<tr><td>22</td><td>

$$A=\int_1^9\sqrt{2x-2}\,dx=\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=\frac{1}{3}\left((16)^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{64}{3}$$

</td></tr>
<tr><td>23</td><td>

$2\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2$

نقسم المنطقة إلى قسمين برسم المستقيم $x = 2$، ونجد الحجم كما يأتي:

$$V=\pi\int_0^2 5^2\,dx+\pi\int_2^6\left(5^2-\left(2\sqrt{x-2}\right)^2\right)dx$$

$$=\pi\int_0^2 25\,dx+\pi\int_2^6(25-(4x-8)\,dx$$

$$=50\pi+\pi\int_2^6(33-4x)\,dx=50\pi+\pi(33x-2x^2)|_2^6$$

$$=50\pi+\pi(33(6)-72-66+8)|$$

$$=118\pi$$

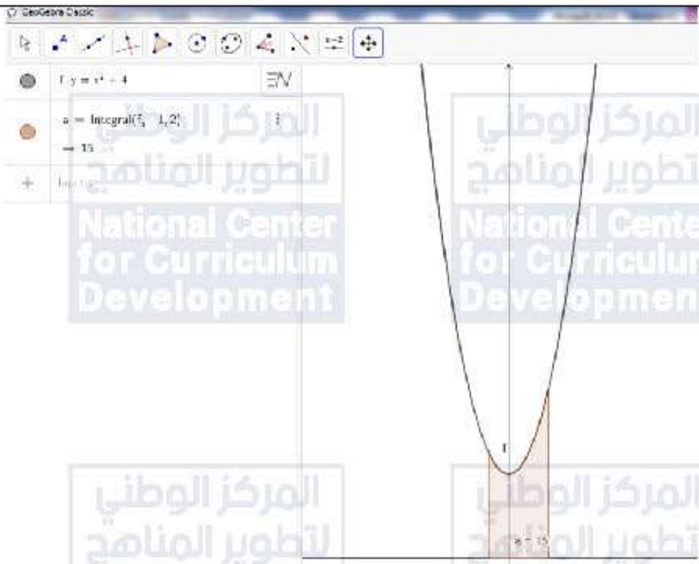
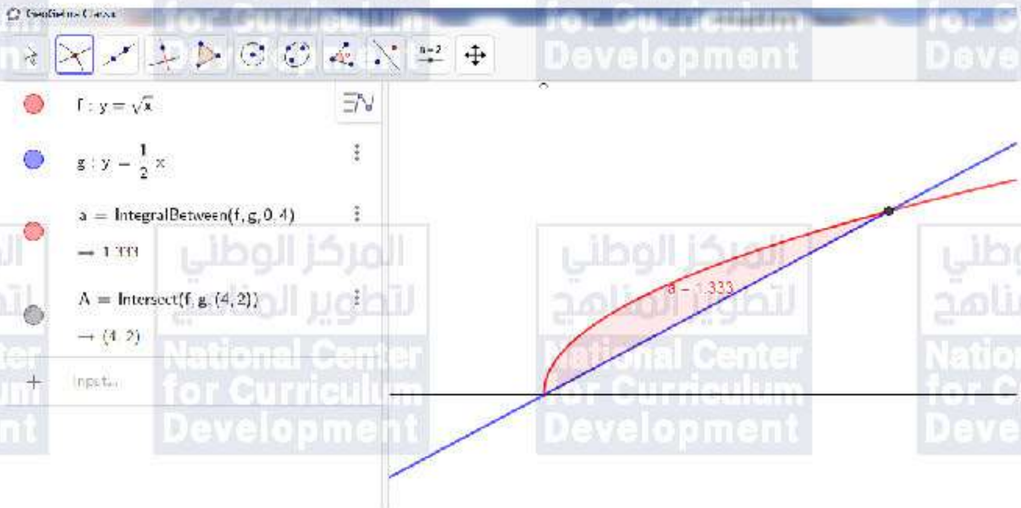
</td></tr>
</table>

24	$f(x) = g(x) \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ or $x = \frac{5\pi}{4}$ نلاحظ من الرسم المعطى أن x تقع في الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$. إذن، إحداثيا النقطة A هما: $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
25	$A(R_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$ $= (\sin x + \cos x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1$ $A(R_2) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \; dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx$ $= -\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$ $A(R_3) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \; dx$ $= (-\cos x - \sin x)\Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos x)\Big\vert_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ $= -0 - 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-(-1) + 0) = \sqrt{2}$
26	$\frac{A(R_1)}{A(R_2)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن، $A(R_1) : A(R_2) = \sqrt{2} : 2$

27	$f'(x) = 2x - 4$ ميل المماس عند النقطة $(1,3)$ هو: $f'(1) = -2$ ميل العمودي على المماس عند النقطة $(1,3)$ هو: $\frac{1}{2}$ معادلة العمودي: $y - 3 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ نجد نقاط تقاطع المنحنى والعمودي على المماس: $x^2 - 4x + 6 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 9x + 7 = 0$ $\Rightarrow (2x-7)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}, x = 1$ $\Rightarrow P\left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{17}{4}\right)$
28	$A = \int_1^{\frac{7}{2}} \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - (x^2 - 4x + 6)\right) dx$ $= \int_1^{\frac{7}{2}} \left(\frac{9}{2}x - \frac{7}{2} - x^2\right) dx = \left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^{\frac{7}{2}}$ $= \left(\frac{9}{4}\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^3\right) - \left(\frac{9}{4} - \frac{7}{2} - \frac{1}{3}\right)$ $= \frac{125}{48} \approx 2.604$

	$\int_{-1}^{1}\left(k(1-x^2)-2k(x^2-1)\right)dx=8$
	$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\left(k(1-x^2)+2k(1-x^2)\right)dx=8$
	$\Rightarrow 3k\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=8$
29	$3k\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-1}^{1}=8$
	$3k\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)=8$
	$3k\left(2-\frac{2}{3}\right)=8$
	$3k\left(\frac{4}{3}\right)=8$
	$\Rightarrow k=2$

معمل جيوجبرا صفحة 90

1	
2	

الدرس السادس: المعادلات التفاضلية

	مسألة اليوم صفحة 89
1	$\frac{dA}{dt} = 2(20 - A)$ $\int \frac{dA}{20 - A} = \int 2\, dt$ $-\ln\|20 - A\| = 2t + K$ (K هو ثابت التكامل) $-\ln 15 = 0 + K \Rightarrow K = -\ln 15$ (بتعويض الزمن 0 ودرجة الحرارة 5) $\Rightarrow -\ln\|20 - A\| = 2t - \ln 15$ $\Rightarrow \ln\|\frac{15}{20 - A}\| = 2t$ إذن، يمكن نمذجة درجة الحرارة C بعد t ساعة بالعلاقة الآتية: $\ln\|\frac{15}{20 - A}\| = 2t$
2	نعوض $A = 18$ في العلاقة: $\ln\|\frac{15}{20-A}\| = 2t$ فينتج: $\ln\|\frac{15}{20 - 18}\| = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}\ln\frac{15}{2} = \frac{\ln 15 - \ln 2}{2} \approx 1$ إذن، تصبح درجة حرارة السائل 18°C بعد مرور ساعة واحدة تقريبًا بعد وضعه في الغرفة.
	أتحقق من فهمي صفحة 90
a	$y' = 4e^x + 15e^{3x}$ $y'' = 4e^x + 45e^{3x}$ $y'' - 4y' + 3y = 0$ $4e^x + 45e^{3x} - 4(4e^x + 15e^{3x}) + 3(4e^x + 5e^{3x}) \stackrel{?}{=} 0$ $0 = 0$ ✓ إذن، $y = 4e^x + 5e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$
b	$y' = \cos x$ $y'' = -\sin x$ $y'' - 4y' + 3y = 0$ $-\sin x - 4\cos x + 3\sin x \stackrel{?}{=} 0$ $2\sin x - 4\cos x \neq 0$ ✗ إذن، $y = \sin x$ ليس حلًا للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$

أتحقق من فهمي صفحة 92
$\frac{dy}{dx} = 5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow dy = \left(5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)dx$
$\int dy = \int \left(5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx$
الحل العام لهذه المعادلة هو: $y = 5\tan x - x^{\frac{3}{2}} + C$
لإيجاد الحل الخاص نعوض النقطة $(0, 7)$ في الحل العام:
$7 = 0 - 0 + C \Rightarrow C = 7$
الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق النقطة $(0, 7)$هو:
$y = 5\tan x - x^{\frac{3}{2}} + +7$

أتحقق من فهمي صفحة 94	
a	$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4} \Rightarrow y^4\, dy = 2x\, dx$ $\Rightarrow \int y^4\, dy = \int 2x\, dx \Rightarrow \frac{1}{5}y^5 = x^2 + C$
b	$\frac{dy}{dx} = 2x - xe^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(2 - e^y)$ $\Rightarrow \frac{dy}{2 - e^y} = x\, dx$ $\Rightarrow \int \frac{1}{2 - e^y} \times \frac{e^{-y}}{e^{-y}}\, dy = \int x\, dx$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2e^{-y}}{2e^{-y} - 1}\, dy = \int x\, dx$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\lvert 2e^{-y} - 1\rvert = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow -\ln\lvert 2e^{-y} - 1\rvert = x^2 + C$

c	$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sin x}{y}\Longrightarrow ydy=x\sin x\,dx$ $\Longrightarrow\int y\,dy=\int x\sin x\,dx$ نجد $\int x\sin x\,dx$ بالأجزاء: $u=x \qquad dv=\sin x\,dx$ $du=dx \qquad v=-\cos x$ $\Longrightarrow\int y\,dy=\int x\sin x\,dx$ $\Longrightarrow\frac{1}{2}y^2=-x\cos x-\int-\cos x\,dx$ $\Longrightarrow\frac{1}{2}y^2=-x\cos x+\sin x+C$
d	$\sin^2x\frac{dy}{dx}=y^2\cos^2x$ $\sin^2xdy=y^2\cos^2x\,dx$ $\frac{dy}{y^2}=\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx\Longrightarrow\int y^{-2}\,dy=\int\cot^2x\,dx$ $\int y^{-2}\,dy=\int(\csc^2x-1)\,dx$ $\Longrightarrow\frac{-1}{y}=-\cot x-x+C\quad\Longrightarrow\frac{1}{y}=x+\cot x+C$
أتحقق من فهمي صفحة 96	
a	$dy=xy^2e^{2x}\,dx$ $\int\frac{dy}{y^2}=\int xe^{2x}\,dx$ نجد $\int xe^{2x}\,dx$ بالأجزاء: $u=x \qquad dv=e^{2x}dx$ $du=dx \qquad v=\frac{1}{2}e^{2x}$ $\Longrightarrow\int\frac{dy}{y^2}=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ الحل العام هو: $\Longrightarrow-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$ بتعويض (0,1): $-1=-\frac{1}{4}+C\Longrightarrow C=-\frac{3}{4}$ الحل الخاص هو: $-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{3}{4}$

b	$\frac{dy}{y} = \cos x \ dx$ $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x \ dx \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \sin x + C$:الحل العام هو بتعويض $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ $0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$ الحل الخاص: $\ln\lvert y\rvert = \sin x - 1$
	أتحقق من فهمي صفحة 98
a	$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000} P(1000 - P)$ $\int \frac{dP}{P(1000 - P)} = \int \frac{1}{20000} dt$ بتجزئة الكسر داخل التكامل في الطرف الأيسر: $\int \left(\frac{\frac{1}{1000}}{P} + \frac{\frac{1}{1000}}{1000 - P} \right) dP = \int \frac{1}{20000} dt$ حل عام: $\frac{1}{1000} \ln\lvert P\rvert - \frac{1}{1000} \ln\lvert 1000 - P\rvert = \frac{1}{20000} t + C$ $20 \ln\lvert P\rvert - 20 \ln\lvert 1000 - P\rvert = t + C$ $20 \ln\left\lvert \frac{P}{1000 - P} \right\rvert = t + C$ بتعويض $P = 2500$ عند $t = 0$ ينتج: $C = 20 \ln \frac{2500}{1500} = 20 \ln \frac{5}{3}$ $\Rightarrow 20 \ln\left\lvert \frac{P}{1000 - P} \right\rvert = t + 20 \ln \frac{5}{3}$
b	نعوض $P = 1800$ في المعادلة الأخيرة: $\Rightarrow 20 \ln\left(\frac{9}{4}\right) = t + 20 \ln \frac{5}{3} \Rightarrow t = 20 \ln \frac{27}{20} \approx 6$ إذن، يصبح عدد الغزلان 1800 غزال بعد 6 سنوات تقريبًا من بدء الدراسة.

أتحقق من فهمي صفحة 100

$\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1} \Rightarrow \frac{ds}{s} = t\sqrt{t+1}dt$

$$\int \frac{ds}{s} = \int t\sqrt{t+1}dt$$

$u = t+1 \Rightarrow du = dt \quad , \quad t = u-1$

$$\int t\sqrt{t+1}dt = \int (u-1)\sqrt{u}du = \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{ds}{s} = \int t\sqrt{t+1}dt$$

$$\Rightarrow \ln|s| = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

الموقع $s(t)$ لا يمكن أن يكون 0 لأن $\ln 0$ غير معرف ولا يمكن أن يكون سالبًا لأن $s(0) = 1$ واقتران الموقع متصل، ولذا يمكننا أن نحذف رمز القيمة المطلقة ونعتبر $\ln|s| = \ln s$

بتعويض $s=1$ عندما $t=0$ ينتج:

$$0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \ln s = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}$$

نعوض $t=3$ لنجد s الموقع المطلوب:

$$\ln s(3) = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} + \frac{4}{15} = \frac{116}{15} \Rightarrow s(3) = e^{\frac{116}{15}}$$

<table>
<tr><td colspan="2">أتدرب وأحل المسائل صفحة 100</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$xy' - y = 0$
$x\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \stackrel{?}{=} 0$
$\frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x} \stackrel{?}{=} 0$
$-\frac{1}{2}\sqrt{x} \neq 0$
إذن، $y = \sqrt{x}$ ليس حلًا للمعادلة التفاضلية $xy' - y = 0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x - 5 = \ln x - 4$
$y'' = \frac{1}{x}$
$y'' - \frac{1}{x} = 0$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ ✓
إذن، $y = x\ln x - 5x + 7$ هو حلّ للمعادلة التفاضلية $y'' - \frac{1}{x} = 0$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$y' = \sec^2 x$
$y' + y^2 = 1$
$\sec^2 x + \tan^2 x \stackrel{?}{=} 1$
$1 + 2\tan^2 x \neq 1$
إذن، $y = \tan x$ ليس حلًّا للمعادلة التفاضلية $y' + y^2 = 1$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$y' = e^x + 3xe^x + 3e^x = 4e^x + 3xe^x$
$y'' = 4e^x + 3xe^x + 3e^x = 7e^x + 3xe^x$
$y'' - 2y' + y = 0$
$7e^x + 3xe^x - 8e^x - 6xe^x + e^x + 3xe^x \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ ✓
إذن $y = e^x + 3xe^x$ هو حلّ للمعادلة التفاضلية $y'' - 2y' + y = 0$</td></tr>
</table>

5	$\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$ $\frac{dy}{\sqrt{y}} = 3x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 3x\,dx$ $\Rightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^2 + C$
6	$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = -3x\,dx$ $\int y^2 dy = \int -3x\,dx$ $\Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = -\frac{3}{2}x^2 + C$
7	$\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y\ dx$ $\frac{dy}{\sin y} = \cos x\ dx$ $\Rightarrow \int \csc y\,dy = \int \cos x\ dx$ نجد $\int \csc y\,dy$ على النحو الآتي: $\int \csc y\,dy = \int \csc y \times \frac{\csc y + \cot y}{\csc y + \cot y} dy$ $= \int \frac{\csc^2 y + \csc y \cot y}{\csc y + \cot y} dy$ $= -\int \frac{-(\csc^2 y + \csc y\,cot\,y)}{\csc y + \cot y} dy = -\ln\lvert\csc y + \cot y\rvert$ إذن، حل هذه المعادلة هو: $\Rightarrow -\ln\lvert\csc y + \cot y\rvert = \sin x + C$

8	$dy = \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ $\int dy = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ بالتعويض: $u = x^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\Rightarrow \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x}{u^2}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du$ $= -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$ $\Rightarrow \int dy = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$
9	$\frac{dy}{dx} = xe^x e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = xe^x dx$ $\int \frac{dy}{e^y} = \int xe^x dx$ $\Rightarrow \int e^{-y}dy = \int xe^x dx$ $\Rightarrow -e^{-y} = \int xe^x dx$ لإيجاد $\int xe^x dx$ نستخدم الأجزاء: $u = x \qquad dv = e^x dx$ $du = dx \qquad v = e^x$ $\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$ $\Rightarrow -e^{-y} = xe^x - e^x + C$

10	$\frac{dy}{y^2} = \frac{x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}}dx = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $\int y^{-2}dy = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $\Rightarrow -y^{-1} = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ لإيجاد $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ نستخدم التعويض: $u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2\,du$ $\Rightarrow \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int \frac{e^u}{x^2} \times -x^2\,du = \int -e^u\,du = -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$ $-y^{-1} = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx \Rightarrow \frac{1}{y} = e^{\frac{1}{x}} + C$
11	$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x-3}dx$ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x-3}dx$ $\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{3}{x-3}\right)dx$ $\ln\|y\| = x + 3\ln\|x-3\| + C$
12	$\frac{dy}{\sin^2 y} = \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$ $\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$ $\int \csc^2 y\,dy = \int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$ $-\cot y = \ln\|x^3+2\| + C$

13	$\frac{dy}{y^3} = \ln x\, dx$ $\int \frac{dy}{y^3} = \int \ln x\, dx$ لإيجاد $\int \ln x\, dx$ نستخدم الأجزاء: $u = \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$ $\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$ $\Rightarrow \int y^{-3} dy = \int \ln x\, dx \Rightarrow -\frac{1}{2} y^{-2} = x \ln x - x + C$

14

$$\frac{dy}{y^2-1} = 2x^3dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int 2x^3dx$$

لإيجاد $\int \frac{dy}{y^2-1}$ نستخدم الكسور الجزئية:

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$$

$$A(y+1) + B(y-1) = 1$$

$$y = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{y-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-1} = \int 2x^3dx \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{y-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y+1} \right) dy = \int 2x^3dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1| = \frac{1}{2}x^4 + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^4 + C$$

15	$y\,dy = \sin^3 x \cos^2 x\,dx$ $\int y\,dy = \int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$ لإيجاد $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$ نستخدم التعويض: $u = \cos x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$ $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^3 x\, u^2 \dfrac{du}{-\sin x}$ $= \int -\sin^2 x\, u^2\,du = \int (-1 + \cos^2 x)\, u^2\,du$ $= \int (-1 + u^2)\, u^2\,du = \int (u^4 - u^2)\,du$ $= \dfrac{1}{5}u^5 - \dfrac{1}{3}u^3 + C = \dfrac{1}{5}\cos^5 x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x + C$ $\Rightarrow \int y\,dy = \int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$ $\Rightarrow \dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{1}{5}\cos^5 x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x + C$
16	$\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}\;dx$ $\int \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{x}\,dx$ $\int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ $2y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

	$\frac{dy}{y} = \ln x^{\frac{1}{2}}\ dx$
	$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x^{\frac{1}{2}}\ dx$
	$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \ln x\ dx$
	لإيجاد $\int \ln x\, dx$ نستخدم الأجزاء:
17	$u = \ln x \qquad dv = dx$
	$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$
	$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$
	$\Rightarrow \int \frac{1}{2} \ln x\ dx = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$
	$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \ln x\ dx \ \Rightarrow \ln\lvert y \rvert = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$

18	$(2x+1)(x+2)dy = -3(y-2)dx$ $\int -\frac{1}{3}\frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ لإيجاد $\int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(2x+1) = 1$ $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$ $x = -2 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{(2x+1)(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}$ $\Rightarrow \int -\frac{1}{3}\frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ $\Rightarrow -\frac{1}{3}\ln\|y-2\| = \frac{1}{3}\ln\|2x+1\| - \frac{1}{3}\ln\|x+2\| + C$ $\Rightarrow -\ln\|y-2\| = \ln\|2x+1\| - \ln\|x+2\| + C$ $\Rightarrow -\ln\|y-2\| = \ln\left\|\frac{2x+1}{x+2}\right\| + C$

19	$\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x}$ $\frac{dy}{y^2} = \sqrt{4-x}dx$ $\int \frac{dy}{y^2} = \int \sqrt{4-x}\,dx$ $\int y^{-2}dy = \int (4-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ الحل العام : $-\frac{1}{y} = -\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} + C$ نجد الحل الخاص بتعويض (1,2): $-\frac{1}{2} = -2\sqrt{3} + C \Rightarrow C = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ الحل الخاص هو: $-\frac{1}{y} = -\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$
20	$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x}{y}$ $ydy = 2\sin^2 x\,dx$ $\int ydy = \int 2\sin^2 x\,dx$ $\int ydy = \int (1-\cos 2x)dx$ الحل العام : $\frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$ نجد الحل الخاص بتعويض (0,1): $\frac{1}{2} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$ الحل الخاص : $\frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}$

21	$\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 x\cos^2 y$ $\frac{dy}{\cos^2 y} = 2\cos^2 x dx$ $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int 2\cos^2 x dx$ $\int \sec^2 y dy = \int (1+\cos 2x) dx$ $\tan y = x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$ الحل العام : $1 = 0 + 0 + C$ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ نجد الحل الخاص بتعويض $C = 1$ $\tan y = x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$ الحل الخاص :
22	$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^y}$ $\int e^y dy = \int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ لإيجاد $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ نستخدم التعويض: $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx = \int \cos x\, e^u \times \frac{du}{\cos x} = \int e^u\, du = e^u + C = e^{\sin x} + C$ $\Rightarrow \int e^y dy = \int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ $e^y = e^{\sin x} + C$ الحل العام : $e^0 = e^0 + C$: $(\pi, 0)$ نجد الحل الخاص بتعويض $\Rightarrow C = 0$ $e^y = e^{\sin x}$ الحل الخاص :

23	$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}$ $\int dy=\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx$ لإيجاد $\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}=\frac{A}{3x-8}+\frac{B}{x-2}$ $A(x-2)+B(3x-8)=8x-18$ $x=2\Rightarrow B=1$ $x=\frac{8}{3}\Rightarrow A=5$ $\Rightarrow\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}=\frac{5}{3x-8}+\frac{1}{x-2}$ $\Rightarrow\int dy=\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx\Rightarrow y=\int\left(\frac{5}{3x-8}+\frac{1}{x-2}\right)dx$ $\Rightarrow y=\frac{5}{3}\ln\lvert 3x-8\rvert+\ln\lvert x-2\rvert+C$ الحل العام: نجد الحل الخاص بتعويض $(3,8)$: $8=0+0+C\quad\Rightarrow C=8$ $y=\frac{5}{3}\ln\lvert 3x-8\rvert+\ln\lvert x-2\rvert+8$ الحل الخاص:

24	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$ $\int y\,dy = \int \frac{dx}{x}$ الحل العام: $\frac{1}{2}y^2 = \ln\lvert x\rvert + C$ نجد الحل الخاص بتعويض (e, 1): $\frac{1}{2} = 1 + C$ $\Rightarrow C = -\frac{1}{2}$ الحل الخاص هو: $\frac{1}{2}y^2 = \ln\lvert x\rvert - \frac{1}{2}$
25	$\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$ $\frac{dv}{10 - 0.5v} = dt$ $\int \frac{dv}{10 - 0.5v} = \int dt$ $-2\ln\lvert 10 - 0.5v\rvert = t + C \Rightarrow \ln\lvert 10 - 0.5v\rvert = -\frac{t}{2} + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $v = 0$، و $t = 0$ في الحل العام $\ln 10 = 0 + C \Rightarrow C = \ln 10$ $\Rightarrow \ln\lvert 10 - 0.5v\rvert = -\frac{t}{2} + \ln 10 \Rightarrow \ln\left\lvert\frac{10 - 0.5v}{10}\right\rvert = -\frac{t}{2}$ إذن، يمكن نمذجة السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها بالعلاقة الآتية: $\ln\left\lvert\frac{10 - 0.5v}{10}\right\rvert = -\frac{t}{2}$

26	$\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N = 0.4(650 - N)$ $\frac{dN}{650 - N} = 0.4dt$ $\int \frac{dN}{650 - N} = \int 0.4\, dt$ $-\ln\lvert 650 - N\rvert = 0.4t + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $N = 300$، و $t = 0$ في الحل العام $-\ln 350 = 0 + C \Rightarrow C = -\ln 350$ $\Rightarrow -\ln\lvert 650 - N\rvert = 0.4t - \ln 350$ $\Rightarrow \ln\left\lvert\frac{350}{650 - N}\right\rvert = 0.4t$ وبما أنّ $N < 650$، فيكون المقدار $\frac{350}{650-N}$ موجبًا وتتحول هذه المعادلة إلى $\ln\left(\frac{350}{650 - N}\right) = 0.4t \Rightarrow e^{0.4t} = \frac{350}{650 - N}$ $\Rightarrow 650 - N = \frac{350}{e^{0.4t}} \Rightarrow N = 650 - 350e^{-0.4t}$ ولإيجاد عدد الذئاب بعد 3 سنوات نعوض $t = 3$ في المعادلة السابقة: $N = 650 - 350e^{-1.2} \approx 545$ إذن، بعد ثلاث سنوات يكون عدد الذئاب في تلك الغابة 545 ذئبًا تقريبًا.

27	$\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$ $\int -\frac{dr}{r^2} = \int 0.0075\, dt$ $\frac{1}{r} = 0.0075t + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $r = 20$، و $t = 0$ في الحل العام $\frac{1}{20} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{r} = 0.0075t + \frac{1}{20} \Rightarrow r = \frac{20}{1 + 0.15t}$
28	نضع $r = 10$ في المعادلة الناتجة من السؤال السابق: $10 = \frac{20}{1 + 0.15t} \Rightarrow 0.1 = \frac{1 + 0.15t}{20} \Rightarrow 2 = 1 + 0.15t$ $\Rightarrow t = \frac{1}{0.15} \approx 6.67\text{ s}$ إذن، يكون طول نصف قطر الكرة 10 cm بعد 6.67 ثانية تقريبًا بعد بدء انكماشها.
29	$\int \frac{dn}{n} = \int 0.2(0.2 - \cos t)dt$ $\ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $n = 400$، و $t = 0$ في الحل العام $\ln 400 = 0 + C \Rightarrow C = \ln 400$ $\ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + \ln 400$ $\Rightarrow \ln \frac{n}{400} = 0.2(0.2t - \sin t) \Rightarrow n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t)}$
30	نعوض $t = 3$ في المعادلة الأخيرة $n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t)}$ $= 400e^{0.2(0.6 - \sin 3)}$ $\approx 400e^{0.12 - 0.028} \approx 400e^{0.092} \approx 439$ إذن، بعد 3 أسابيع يكون عدد الحشرات 439 حشرة تقريبًا.

31	$\frac{dy}{dx} = y \cos x$ $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x \; dx$ $\Rightarrow \ln\|y\| = \sin x + C$ لإيجاد قيمة C نضع x=0، وy =1 في الحل العام $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow \ln\|y\| = \sin x$ $\Rightarrow y = e^{\sin x}$ ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -e^{\sin x}$ لا يمر بالنقطة (0,1).

32	$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)}$ لإيجاد $\int \frac{dx}{x(x+1)}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(x) = 1$ $x = 0 \Longrightarrow A = 1$ $x = -1 \Longrightarrow B = -1$ $\Longrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$ $\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)} \Longrightarrow \ln\|y\| = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) dx$ $\Longrightarrow \ln\|y\| = \ln\|x\| - \ln\|x+1\| + C$ لإيجاد قيمة C نضع x=1، وy =3 في الحل العام $\ln 3 = 0 - \ln 2 + C \Longrightarrow C = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$ $\Longrightarrow \ln\|y\| = \ln\|x\| - \ln\|x+1\| + \ln 6$ $\Longrightarrow \ln\|y\| = \ln\left\|\frac{6x}{x+1}\right\|$ $\Longrightarrow \|y\| = \left\|\frac{6x}{x+1}\right\| \Longrightarrow y = \frac{6x}{x+1}$ ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -\frac{6x}{x+1}$ لا يمر بالنقطة (1,3)

33	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y^2}+y-xy$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2}(x-1)-y(x-1)=(x-1)\left(\frac{1}{y^2}-y\right)$ $\Rightarrow\frac{dy}{\frac{1}{y^2}-y}=(x-1)dx$ $\int\frac{dy}{\frac{1}{y^2}-y}=\int(x-1)dx$ $\int\frac{y^2}{1-y^3}dy=\int(x-1)dx$ $\frac{-1}{3}\int\frac{-3y^2}{1-y^3}dy=\int(x-1)dx$ $\frac{-1}{3}\ln\lvert 1-y^3\rvert=\frac{1}{2}x^2-x+C$
34	$\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{1}{2y-1}-\frac{2}{3y-2}\right)=x\left(\frac{3y-2-4y+2}{6y^2-7y+2}\right)=x\left(\frac{-y}{6y^2-7y+2}\right)$ $\Rightarrow\frac{6y^2-7y+2}{-y}dy=x\,dx$ $\int\frac{6y^2-7y+2}{-y}dy=\int x\,dx$ $\int\left(-6y+7-\frac{2}{y}\right)dy=\int x\,dx$ $-3y^2+7y-2\ln\lvert y\rvert=\frac{1}{2}x^2+C$

35	$\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$ $= \sec^2 x + \tan^2 y(1 + \tan^2 x)$ $= \sec^2 x + \tan^2 y \sec^2 x$ $= \sec^2 x(1 + \tan^2 y)$ $= \sec^2 x \sec^2 y$ $\frac{dy}{\sec^2 y} = \sec^2 x\, dx$ $\int \frac{dy}{\sec^2 y} = \int \sec^2 x\, dx$ $\int \cos^2 y\ dy = \int \sec^2 x\, dx$ $\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2y)\ dy = \int \sec^2 x\, dx$ $\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{2}\sin 2y\right) = \tan x + C$
36	$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ $\int \frac{dx}{x} = \int -\lambda\, dt$ $\ln\lvert x \rvert = -\lambda t + C$ لكن الكمية x لا تكون سالبة ، فنحذف رمز القيمة المطلقة. $\Rightarrow \ln\ x = -\lambda t + C$ $x = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} \times e^{C}$,a ليكن ثابت e^{C} $\Rightarrow x = ae^{-\lambda t}$

37	$x(0)=a$ الكمية الابتدائية المطلوب: حساب الزمن الذي تكون عنده $x=\frac{1}{2}a$ ، نعوض: $\frac{1}{2}a=ae^{-\lambda t}\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{-\lambda t}\Rightarrow 2=e^{\lambda t}\Rightarrow\lambda t=\ln 2\Rightarrow t=\frac{\ln 2}{\lambda}$
38	$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3y}$ لكي تكون العلاقة $x^2+ny^2=a$ حلًّا للمعادلة التفاضلية المعطاة، يجب أن تحققها. نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير x $2x+2ny\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{ny}$ نعوض المشتقة في المعادلة التفاضلية: $-\frac{x}{ny}=-\frac{2x}{3y}\Rightarrow 2nxy=3xy$ $\Rightarrow n=\frac{3xy}{2xy}=\frac{3}{2}$
39	النقطة $(5,4)$تحقق العلاقة: $\Rightarrow\quad 25+\frac{3}{2}(16)=a\quad\Rightarrow a=49$ $\Rightarrow x^2+\frac{3}{2}y^2=49$ لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x نضع $y=0$ في معادلتها $\Rightarrow\quad x^2=0+49=49\quad\Rightarrow x=\pm 7$ إحداثيات نقطتي تقاطع العلاقة $x^2+\frac{3}{2}y^2=49$ مع المحور x هما $(-7,0)$و$(7,0)$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 103	
1	$\int_0^2 e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\|_0^2 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots (d)$
2	$A = \int_{-1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 + 4 - (x^2 - x - 2)\right) dx$ $= \int_{-1}^{2} (x^3 - 4x^2 + x + 6)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$
3	$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\, dx \;\Rightarrow \ln\|y\| = x^2 + C$ $(0,1) \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow \ln\|y\| = x^2 \Rightarrow \|y\| = e^{x^2}$ ولكن $y = -e^{x^2}$ لا يحقق النقطة $(0,1)$، إذن، الحل هو $y = e^{x^2}$ ....(a)
4	$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$
5	$\int \left(\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(-\frac{1}{2} \times \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x}\right) dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\|\cos 2x\| + \frac{1}{3}e^{3x} - \ln\|x\| + C$
6	$\int \csc^2 x\,(1 + \tan^2 x) dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx$ $= \int (\csc^2 x + \sec^2 x) dx$ $= -\cot x + \tan x + C$
7	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5} dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+5) + C$

8	$\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}dx = \int \left(2x+11+\frac{19}{x-2}\right)dx$ $= x^2+11x+19\ln\lvert x-2\rvert + C$
9	$\int \sec^2(2x-1)dx = \frac{1}{2}\tan(2x-1)+C$
10	$\int \cot(5x+1)dx = \frac{1}{5}\int \frac{5\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)}dx = \frac{1}{5}\ln\lvert\sin(5x+1)\rvert + C$
11	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$
12	$\int_0^{\pi} \cos^2\frac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx$ $= \frac{1}{2}(x+\sin x)\rvert_0^{\pi} = \frac{1}{2}\big((\pi)+(0)\big)-0 = \frac{\pi}{2}$
13	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x+\cos 4x)\ dx = \left(\tan x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{4}} = (1)-(0) = 1$
14	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1+\cos 2x\right)\ dx$ $= \left(-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)$ $= \frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$
15	$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 2x\cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 4x\ dx = -\frac{1}{8}\cos 4x\rvert_0^{\frac{\pi}{8}} = 0-\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$

16	$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{4}{(x-2)(x+2)}dx$ $\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(x-2) = 4$ $x = 2 \Rightarrow A = 1$ $x = -2 \Rightarrow B = -1$ $\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2}$ $\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{4}{(x-2)(x+2)}dx$ $= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2}\right)dx$ $= \ln\lvert x-2\rvert - \ln\lvert x+2\rvert + C$ $= \ln\left\lvert\frac{x-2}{x+2}\right\rvert + C$

17	$\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx = \int \frac{x+7}{(x-3)(x+2)}dx$ $\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2)+B(x-3)=x+7$ $x=-2 \Rightarrow B=-1$ $x=3 \Rightarrow A=2$ $\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}$ $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx = \int \frac{x+7}{(x-3)(x+2)}dx$ $= \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}\right)dx$ $= 2\ln\lvert x-3\rvert - \ln\lvert x+2\rvert + C$
18	$\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2-2x-8}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2-2x-8\rvert + C$

19	$\int \frac{x^2+3}{x^3+x}dx = \int \frac{x^2+3}{x(x^2+1)}dx$ $\frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ $A(x^2+1) + (Bx+C)(x) = x^2+3$ $x = 0 \Rightarrow A = 3$ $x = 1 \Rightarrow 2A + B + C = 4 \Rightarrow B + C = -2$ $x = -1 \Rightarrow 2A + B - C = 4 \Rightarrow B - C = -2$ $\Rightarrow B = -2\ , C = 0$ $\frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}$ $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}dx = \int \frac{x^2+3}{x(x^2+1)}dx$ $= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}\right)dx$ $= 3\ln\|x\| - \ln\|x^2+1\| + C = \ln\left\|\frac{x^3}{x^2+1}\right\| + C$
20	$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$ $Ax(1-x) + B(1-x) + C(x^2) = 1$ $x = 0 \Rightarrow B = 1$ $x = 1 \Rightarrow C = 1$ $x = -1 \Rightarrow -2A + 2B + C = 1 \Rightarrow A = 1$ $\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}$ $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}\right)dx$ $= \ln\|x\| - \frac{1}{x} - \ln\|1-x\| + C$ $= \ln\left\|\frac{x}{1-x}\right\| - \frac{1}{x} + C$

21	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x} = \int \frac{\sin x}{u^2 - 3u} \times \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{1}{3u - u^2} du$ $\frac{1}{3u - u^2} = \frac{1}{u(3-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{3-u}$ $\Rightarrow A(3-u) + Bu = 1$ $u = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ $u = 3 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$ $\int \frac{1}{3u - u^2} du = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{u} + \frac{\frac{1}{3}}{3-u} \right) du$ $= \frac{1}{3}\ln\|u\| - \frac{1}{3}\ln\|3-u\| + C$ $= \frac{1}{3}\ln\left\| \frac{\cos x}{3 - \cos x} \right\| + C$
22	$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x, \quad dx = 2u\, du$ $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} = \int \frac{u}{u^2-4} \times 2u\, du = \int \frac{2u^2}{u^2-4} du = \int \left(2 + \frac{8}{u^2-4}\right) du$ $\frac{8}{u^2-4} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$ $\Rightarrow A(u+2) + B(u-2) = 8$ $u = 2 \Rightarrow A = 2$ $u = -2 \Rightarrow B = -2$ $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} = \int \left(2 + \frac{2}{u-2} + \frac{-2}{u+2}\right) du$ $= 2u + 2\ln\|u-2\| - 2\ln\|u+2\| + C$ $= 2\sqrt{x} + 2\ln\left\| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right\| + C$

23	$u = 1 + \tan x \implies dx = \dfrac{du}{\sec^2 x}$ $\displaystyle\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1+\tan x}\, dx = \int \sec^2 x (u-1)\sqrt{u}\, \frac{du}{\sec^2 x}$ $\displaystyle = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$ $\displaystyle = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$ $\displaystyle = \frac{2}{5}(1+\tan x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+\tan x)^{\frac{3}{2}} + C$
24	$u = 4 - 3x \implies dx = \dfrac{du}{-3}\ , x = \dfrac{4-u}{3}$ $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}} dx = \int \frac{\frac{1}{3}(4-u)}{u^{\frac{1}{3}}} \times \frac{du}{-3} = -\frac{1}{9}\int \left(4u^{-\frac{1}{3}} - u^{\frac{2}{3}}\right) du$ $\displaystyle = -\frac{1}{9}\left(6u^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}\right) + C = -\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}u^{\frac{5}{3}} + C$ $\displaystyle = -\frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}(4-3x)^{\frac{5}{3}} + C$ ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالأجزاء أيضًا
25	$u = \ln x \implies \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}\ , dx = x\, du$ $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^6}{x} dx = \int \frac{xu^6}{x} du = \int u^6 du = \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{7}(\ln x)^7 + C$

26	$u = x - 2 \Rightarrow x = u + 2\ , dx = du$ $\int (x+1)^2\sqrt{x-2}\,dx = \int (u+3)^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$ $= \int (u^2 + 6u + 9)u^{\frac{1}{2}}\,du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{7}(x-2)^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + 6(x-2)^{\frac{3}{2}} + C$ ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالأجزاء مرتين
27	$\int x \csc^2 x\,dx$ $u = x \qquad dv = \csc^2 x\,dx$ $du = dx \qquad v = -\cot x$ $\int x\csc^2 x\,dx = -x\cot x + \int \cot x\,dx = -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ $= -x\cot x + \ln\lvert\sin x\rvert + C$
28	$u = x^2 - 5x \qquad dv = e^x\,dx$ $du = (2x-5)dx \qquad v = e^x$ $\int (x^2-5x)e^x\,dx = (x^2-5x)e^x - \int (2x-5)e^x\,dx$ $u = 2x - 5 \qquad dv = e^x\,dx$ $du = 2dx \qquad v = e^x$ $\int (2x-5)e^x\,dx = (2x-5)e^x - \int 2e^x\,dx$ $= (2x-5)e^x - 2e^x$ $\int (x^2-5x)e^x\,dx = (x^2-5x)e^x - (2x-5)e^x + 2e^x + C$ $= e^x(x^2 - 7x + 7) + C$

29	$u = x \qquad dv = \sin 2x \; dx$ $du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $\int x \sin 2x \; dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \; dx$ $= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
30	$u = t^2 \Longrightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $t = 0 \Longrightarrow u = 0$ $t = 1 \Longrightarrow u = 1$ $\int_0^1 t\, 3^{t^2}\, dt = \int_0^1 t 3^u \frac{du}{2t} = \frac{1}{2}\int_0^1 3^u du = \frac{3^u}{2\ln 3}\Big\|_0^1$ $= \frac{3}{2\ln 3} - \frac{1}{2\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}$

31	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\,(\csc^2 x - 1)\,dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \csc^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\ dx$ $u = \cot x \implies dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $x = \frac{\pi}{4} \implies u = 1$ $x = \frac{\pi}{3} \implies u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\implies \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \csc^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\ dx$ $= \int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} u \csc^2 x \times \frac{du}{-\csc^2 x} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\ dx$ $= \int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -u\,du - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ $= -\frac{1}{2}u^2 \Big\vert_{1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \ln\lvert\sin x\rvert \Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 1\right) - (\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2})$ $= \frac{1}{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

32	$u = 4 + 3\sin x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{3\cos x}$ $x = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ $x = \pi \Rightarrow u = 4$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4 + 3\sin x}}\, dx = \int_1^4 \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{3\cos x}$ $\displaystyle = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}}$ $= \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}}\Big\vert_1^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}$
33	$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}\, dx$ $\displaystyle = \int_{-1}^{0} \frac{x}{x+2}\, dx = \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$ $= (x - 2\ln\vert x + 2\vert)\vert_{-1}^{0} = 0 - 2\ln 2 - (-1 - 2\ln 1) = 1 - 2\ln 2$

	$\dfrac{32x^2+4}{16x^2-1}=2+\dfrac{6}{16x^2-1}=2+\dfrac{A}{4x-1}+\dfrac{B}{4x+1}$ $\Rightarrow A(4x+1)+B(4x-1)=6$ $x=\dfrac{1}{4}\Rightarrow A=3$ $x=-\dfrac{1}{4}\quad\Rightarrow B=-3$
34	$\displaystyle\int_1^2\frac{32x^2+4}{16x^2-1}dx=\int_1^2\left(2+\frac{3}{4x-1}+\frac{-3}{4x+1}\right)dx$ $\displaystyle=\left(2x+\frac{3}{4}\ln\lvert 4x-1\rvert-\frac{3}{4}\ln\lvert 4x+1\rvert\right)\Big\vert_1^2$ $\displaystyle=\left(4+\frac{3}{4}\ln 7-\frac{3}{4}\ln 9\right)-\left(2+\frac{3}{4}\ln 3-\frac{3}{4}\ln 5\right)$ $\displaystyle=2+\frac{3}{4}\ln\frac{35}{27}$
35	$u=\ln 2x \qquad dv=x\,dx$ $du=\dfrac{1}{x}dx \qquad v=\dfrac{x^2}{2}$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}x\ln 2x\ dx=\frac{x^2}{2}\ln 2x\Big\vert_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\frac{x}{2}\ dx$ $\displaystyle=\frac{x^2}{2}\ln 2x\Big\vert_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}-\frac{1}{4}x^2\Big\vert_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$ $\displaystyle=\frac{1}{16}(e^2+1)$
36	$\displaystyle s(10)-s(0)=\int_0^{10}v(t)dt=R_1-R_2+R_3$ $=\dfrac{1}{2}(2)(4)-\dfrac{1}{2}(2)(4)+\dfrac{1}{2}(3+6)(4)=18\text{ m}$

37	$d=\int_0^{10}\lvert v(t)\rvert dt=R_1+R_2+R_3=4+4+18=26\text{ m}$
38	$s(10)-s(0)=18 \Rightarrow s(10)-0=18 \Rightarrow s(10)=18\text{ m}$
39	$x^2=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x^4-x=0$ $\Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0, \quad x=1$ $A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-(0)=\frac{1}{3}$
40	$x=x^3 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, \quad x=1, \quad x=-1$ $A=\int_{-1}^0(x^3-x)dx+\int_0^1(x-x^3)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^0+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}$
41	$x^2+2=-x \Rightarrow x^2+x+2=0$ هذه المعادلة التربيعية لا حلول لها، لأن المميز سالب، إذن، منحنيا الاقترانين لا يتقاطعان. و $g(x)>f(x)$ لأن $g(x)-f(x)>0$ لأن $x^2+x+2>0$ دائمًا. $A=\int_{-2}^2(g(x)-f(x))dx$ $=\int_{-2}^2(x^2+2+x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+2x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-2}^2=\frac{40}{3}$

42	$\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1}=1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow A(x+1)+B(x-1)=1$ $x=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$ $x=-1 \quad \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$ $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1}dx=\int_2^5\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$ $=\left(x+\frac{1}{2}\ln\|x-1\|-\frac{1}{2}\ln\|x+1\|\right)\Big\|_2^5$ $=5+\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 6-(2+\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln 3)$ $=5+\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 6-2+\frac{1}{2}\ln 3$ $=3+\frac{1}{2}\ln(\frac{4\times 3}{6})=3+\frac{1}{2}\ln 2$
43	$\int_1^{10} v(t)dt=\int_1^{10}(t^2-4t)dt$ $=\left(\frac{t^3}{3}-2t^2\right)\Big\|_1^{10}$ $=\left(\frac{1000-1}{3}-2(100-1)\right)=135\text{ m}$

<table>
<tr><td>44</td><td>

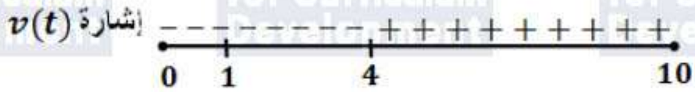
$v(t) = t^2 - 4t$

لتكن d المسافة المقطوعة وهي تمثل المساحة بين منحنى $|v(t)|$ والمحور t بين المستقيمين

$t = 1, \quad t = 10$

$$d = \int_1^{10} |v(t)|dt = \int_1^{10} |t^2 - 4t|dt$$

$t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t(t-4) = 0 \Rightarrow t = 0, \quad \text{OR} \quad t = 4$



$$\Rightarrow d = -\int_1^4 (t^2 - 4t)dt + \int_4^{10} (t^2 - 4t)dt$$

$$= \left(2t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 + \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2\right)\Bigg|_4^{10} = 153 \text{ m}$$

</td></tr>
<tr><td>45</td><td>

$(1 + \sin 2x)^2 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -1$

هذا هو أول حل موجب للمعادلة $\quad 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow A\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$$

</td></tr>
<tr><td>46</td><td>

$$A(R) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin 2x)^2 dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(1 + 2\sin 2x + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \left(\frac{3}{2}x - \cos 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{9\pi}{8} + 1$$

</td></tr>
</table>

47	$x^2 \ln 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ يهمل لأنه خارج مجال اقتران اللوغاريتم $or \quad \ln 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln 2x \, dx$ $u = \ln 2x \qquad dv = x^2\, dx$ $du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$ $\int x^2 \ln 2x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln 2x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x} dx$ $= \frac{1}{3}x^3 \ln 2x - \frac{1}{9}x^3 + C$ $A = (\frac{1}{3}x^3 \ln 2x - \frac{1}{9}x^3)\Big\|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{7}{72}$
48	$\frac{1}{16}x^3 = 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{256}x^6 - 4x = 0$ $\Rightarrow x\left(\frac{1}{256}x^5 - 4\right) = 0 \Rightarrow x = 0,$ $or \quad x = \sqrt[5]{4(256)} = \sqrt[5]{2^{10}} = 4$ $A = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{16}x^3\right) dx = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{64}x^4\right)\Big\|_0^4 = \frac{20}{3}$
49	$x^2 + 14 = x^4 + 2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$ $\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ $\Rightarrow A(-2, f(-2)) = (-2,18)$ $B(2, f(2)) = (2,18)$

50	نلاحظ أن منحنيي f و g واقعان فوق المحور x ، وأن منحنى f فوق منحنى g في الفترة (2,2-) $\Rightarrow V=\pi\int_0^2\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$ $=\pi\int_0^2\left((x^2+14)^2-(x^4+2)^2\right)dx$ $=\pi\int_0^2(-x^8-3x^4+28x^2+192)dx$ $=\pi\left(-\frac{1}{9}x^9-\frac{3}{5}x^5+\frac{28}{3}x^3+192x\right)\Big\|_0^2=\frac{17216\pi}{45}$
51	$V=\pi\int_1^2\left(f(x)\right)^2dx=\pi\int_1^2 xe^{-x}dx$ $u=x \qquad dv=e^{-x}\,dx$ $du=dx \qquad v=-e^{-x}$ $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C$ $V=\pi\int_1^2 xe^{-x}dx=\pi\left((-xe^{-x}-e^{-x})\ \|_1^2\right)=\frac{2e-3}{e^2}\pi$
52	$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow 2\sqrt{y}=\ln\|x\|+C$
53	$\frac{dy}{\sec y}=xe^xdx\Rightarrow\int\cos y\ dy=\int xe^xdx$ $u=x \qquad dv=e^x\,dx$ $du=dx \qquad v=e^x$ $\Rightarrow\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x$ $\Rightarrow\int\cos y\ dy=\int xe^xdx$ $\Rightarrow\sin y=xe^x-e^x+C$

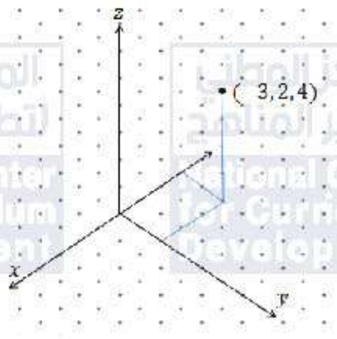
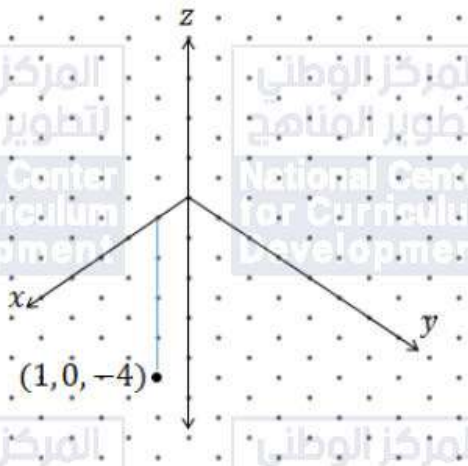
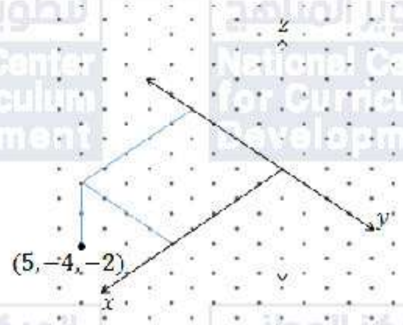
54	$3y^2dy = 8xdx$ $\int 3y^2dy = \int 8xdx \Rightarrow y^3 = 4x^2 + C$
55	$xdy = \sqrt{y}(3x+4)dx$ $\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3x+4}{x}dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int \left(3 + \frac{4}{x}\right)dx$ $\Rightarrow 2\sqrt{y} = 3x + 4\ln\lvert x\rvert + C$
56	$\frac{dy}{dx} = 8 - 4y = 4(2-y)$ $\frac{dy}{2-y} = 4dx \Rightarrow \int \frac{dy}{2-y} = \int 4dx$ $-\ln\lvert 2-y\rvert = 4x + C$ الحل العام : لإيجاد الحل الخاص نعوض $x = 0, y = 3$ في الحل العام: $-\ln 1 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ $-\ln\lvert 2-y\rvert = 4x$ الحل الخاص:

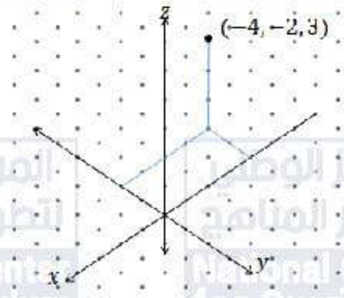
57	$\frac{dy}{5e^{y}} = \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}$ $\frac{1}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$ $\Rightarrow A(x-2) + B(2x+1) = 1$ $x = 2 \;\Rightarrow B = \frac{1}{5}$ $x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow A = -\frac{2}{5}$ $\int \frac{dy}{5e^{y}} = \int \left(\frac{-\frac{2}{5}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2} \right) dx$ $\frac{-e^{-y}}{5} = -\frac{1}{5}\ln\lvert 2x+1\rvert + \frac{1}{5}\ln\lvert x-2\rvert + C$ الحل العام لإيجاد الحل الخاص نعوض $x = -3, y = 0$ في الحل العام: $\frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}\ln 5 + \frac{1}{5}\ln 5 + C \Rightarrow C = \frac{-1}{5}$ $\frac{-e^{-y}}{5} = -\frac{1}{5}\ln\lvert 2x+1\rvert + \frac{1}{5}\ln\lvert x-2\rvert - \frac{1}{5}$ الحل الخاص: $\Rightarrow \frac{1-e^{-y}}{5} = \frac{1}{5}\ln\left\lvert\frac{x-2}{2x+1}\right\rvert \;\Rightarrow 1 - e^{-y} = \ln\left\lvert\frac{x-2}{2x+1}\right\rvert$
58	$\frac{dN}{N} = 0.2\,dt \;\Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int 0.2\,dt$ $\Rightarrow \ln\lvert N\rvert = 0.2t + C$ وبملاحظة أن عدد الأسماك N أكبر من صفر (فيكون $\lvert N\rvert = N$) $\Rightarrow \ln N = 0.2t + C \Rightarrow N = e^{0.2t+C} = e^{C}(e^{0.2t}) = Ke^{0.2t}$ حيث K ثابت يساوي e^{C}. $N(0) = 300 \;\Rightarrow 300 = Ke^{0.2(0)} \Rightarrow K = 300$ الحل الخاص: $N(t) = 300e^{0.2t}$

59	$N(5) = 300\, e^{0.2(5)} = 300e \approx 815$ إذن، عدد الأسماك في البحيرة بعد خمس سنوات هو 815 سمكة تقريبًا.
60	$p(x) = \int \frac{-300x}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ $u = 9 + x^2 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{-300x}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int \frac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{2x} = \int -150u^{\frac{-3}{2}}\, du = \frac{300}{\sqrt{u}} + C$ $\Rightarrow p(x) = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + C$ $p(4) = \frac{300}{5} + C \Rightarrow 75 = 60 + C \ \Rightarrow C = 15$ $\Rightarrow p(x) = 15 + \frac{300}{\sqrt{9+x^2}}$

الوحدة السادسة: المتجهات

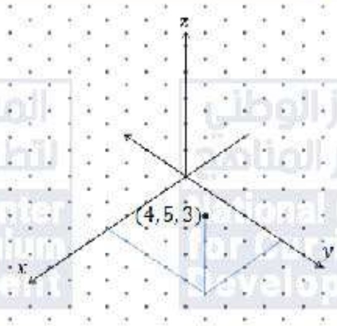
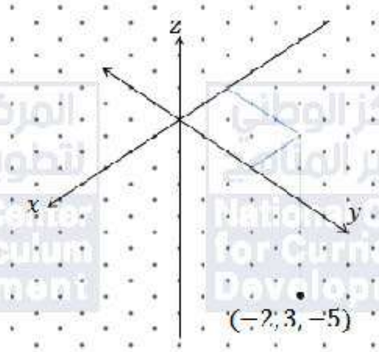
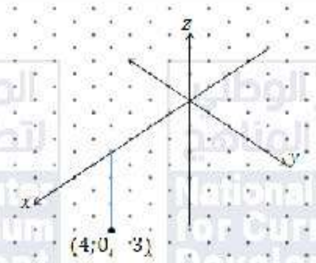
الدرس الأول: المتجهات في الفضاء

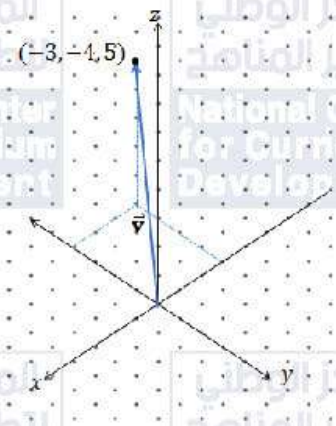
	مسألة اليوم صفحة 108
	$A(5,5,0)$ $B(0,5,5)$
	أتحقق من فهمي صفحة 109
a	
b	
c	

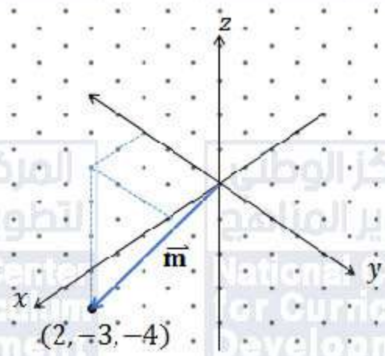
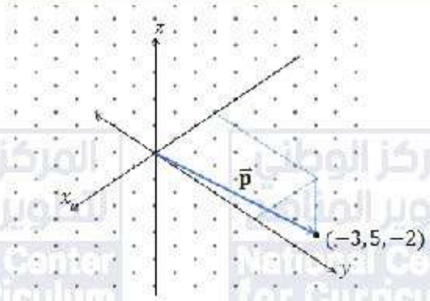
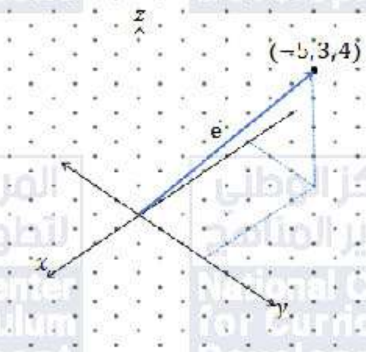
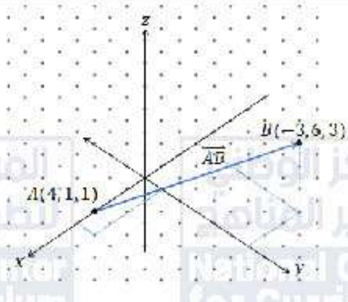
d	
أتحقق من فهمي صفحة 111	
a	$NM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ $= \sqrt{(5-2)^2 + (-3-1)^2 + (6-(-6))^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$
b	لتكن K نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{MN}$ ، فتكون: $K = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-6+6}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -1, 0\right)$
أتحقق من فهمي صفحة 112	
	$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle = \langle -5-(-1), 3-5, -2-3\rangle = \langle -4, -2, -5\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2} = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
أتحقق من فهمي صفحة 114	
a	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ $= \vec{b} + (-\vec{a})$ $= \vec{b} - \vec{a}$
b	$AB = AE + EB = 3EB + EB = 4EB \Rightarrow EB = \frac{1}{4}AB$ $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$

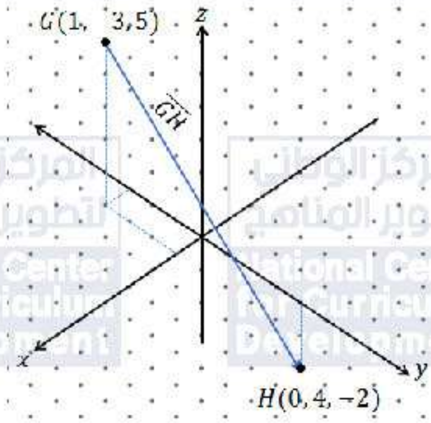
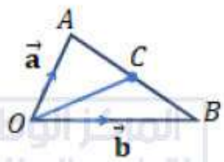
c	$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $= \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ وذلك لأن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ كون الشكل متوازي أضلاع $= \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ $= \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$
أتحقق من فهمي صفحة 115 مثال 5	
a	$3\vec{v} - 4\vec{u} = 3\langle 3,0,-5\rangle - 4\langle 4,5,-3\rangle$ $= \langle 9,0,-15\rangle - \langle 16,20,-12\rangle = \langle -7,-20,-3\rangle$
b	$3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w} = 3\langle 4,5,-3\rangle + 5\langle 3,0,-5\rangle - 2\langle 9,-2,-5\rangle$ $= \langle 12,15,-9\rangle + \langle 15,0,-25\rangle + \langle -18,4,10\rangle = \langle 9,19,-24\rangle$
أتحقق من فهمي صفحة 115 مثال 6	
$\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow 20 = 3q + 8$ و $2p - 5 = 0$ و $-12 = 3r$ $\Rightarrow q = 4\,, p = \frac{5}{2}, r = -4$	
أتحقق من فهمي صفحة 117	
a	$\overrightarrow{OA} = \langle -2,8,13\rangle, \overrightarrow{OB} = \langle 5,-7,-9\rangle, \overrightarrow{OC} = \langle 0,1,-14\rangle$
b	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \langle -5,8,-5\rangle$
c	$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ $= \sqrt{(0-(-2))^2 + (1-8)^2 + (-14-13)^2} = \sqrt{4 + 49 + 729} = \sqrt{782}$
أتحقق من فهمي صفحة 119	
a	$\vec{g} = 9\hat{i} - 4\hat{k}$
b	$\overrightarrow{AB} = \langle 7-2, 6-(-1), -2-4\rangle = \langle 5,7,-6\rangle = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$

c	$4\vec{m} - 5\vec{f} = 4(-2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}) - 5(3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 6\hat{k})$ $= (-8 - 15)\hat{\imath} + (12 + 25)\hat{\jmath} + (-16 - 30)\hat{k}$ $= -23\hat{\imath} + 37\hat{\jmath} - 46\hat{k}$
	أتحقق من فهمي صفحة 120
a	$\|\vec{u}\| = \sqrt{16 + 9 + 25}$ $= \sqrt{50}$ $= 5\sqrt{2}$ $\hat{u} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{u} = \langle\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}\rangle$ $= \langle\frac{2}{5}\sqrt{2}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ وهذا متجه وحدة في اتجاه $\vec{u}$
b	$\|\vec{v}\| = \sqrt{64 + 225 + 289}$ $= \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$ $\hat{v} = \frac{1}{17\sqrt{2}}\vec{v} = \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{\jmath} - \frac{17}{17\sqrt{2}}\hat{k}$ $= \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$ وهذا متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$
c	$\overrightarrow{AB} = \langle 3 - (-1), 3 - 4, 8 - 6\rangle = \langle 4, -1, 2\rangle$ $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$ ليكن $\hat{u}$ متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ ، فيكون: $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{21}}\overrightarrow{AB} = \langle\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\rangle$

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 120
1	
2	
3	
4	$A(3,-2,8), B(5,4,2)$ $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $= \sqrt{2^2+6^2+(-6)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4,1,5)$

5	$A(-2,7,0), B(2,-5,3)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $=\sqrt{16+144+9}=\sqrt{169}=13$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)=\left(\frac{-2+2}{2},\frac{7-5}{2},\frac{0+3}{2}\right)=\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$
6	$A(12,8,-5), B(-3,6,7)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $=\sqrt{225+4+144}=\sqrt{373}$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)=\left(\frac{12-3}{2},\frac{8+6}{2},\frac{-5+7}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},7,1\right)$
7	$A(-5,-8,4), B(3,2,-6)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $=\sqrt{64+100+100}=\sqrt{264}=2\sqrt{66}$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)=\left(\frac{-5+3}{2},\frac{-8+2}{2},\frac{4-6}{2}\right)$ $=(-1,-3,-1)$
8	

9	 z $\vec{m}$ x y (2, −3, −4)
10	 z $\vec{p}$ (−3, 5, −2) y
11	 z (−5, 3, 4) e y
12	 z B(−3, 6, 3) $\overrightarrow{AB}$ A(4, 1, 1) x y

13	
14	$\overrightarrow{AB} = \langle -3-4, 2-6, 5-9 \rangle = \langle -7, -4, -4 \rangle$ $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9$
15	$\overrightarrow{AB} = \langle 6-(-8), 3-5, 2-7 \rangle = \langle 14, -2, -5 \rangle$ $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{196+4+25} = \sqrt{225} = 15$
16	$\overrightarrow{AB} = \langle 4-12, 1-(-5), -1-4 \rangle = \langle -8, 6, -5 \rangle$ $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{64+36+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
17	$\overrightarrow{AB} = \langle 10-24, 6-(-8), 3-10 \rangle = \langle -14, 14, -7 \rangle$ $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{196+196+49} = \sqrt{441} = 21$
18	$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ $= \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 
19	$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$

20	$\frac{NQ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow NQ = \frac{2}{3}SN \Rightarrow SQ = SN + NQ = SN + \frac{2}{3}SN = \frac{5}{3}SN$ $\Rightarrow SQ = \frac{5}{3}SN \Rightarrow SN = \frac{3}{5}SQ \Rightarrow NQ = \frac{2}{5}SQ$ وبما أن الشكل متوازي أضلاع فإنّ: $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \vec{b}$ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{2}{5}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$
21	$3\vec{e} + 4\vec{f} = 3\langle -3,9,-4\rangle + 4\langle 5,-3,7\rangle = \langle -9,27,-12\rangle + \langle 20,-12,28\rangle$ $= \langle 11,15,16\rangle$
22	$\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} = \langle -3,9,-4\rangle + \langle 5,-3,7\rangle - 3\langle -1,8,-5\rangle$ $= \langle 5,-18,18\rangle$
23	$4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} = 4\langle -3,9,-4\rangle - 2\langle 5,-3,7\rangle + 3\langle -1,8,-5\rangle$ $= \langle -25,66,-45\rangle$
24	$2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g} = 2\langle -3,9,-4\rangle + 7\langle 5,-3,7\rangle - 2\langle -1,8,-5\rangle$ $= \langle 31,-19,51\rangle$
25	$\overrightarrow{OA} = \langle -1,6,5\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 0,1,-4\rangle$, $\overrightarrow{OC} = \langle 2,1,1\rangle$
26	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle -1,6,5\rangle - \langle 0,1,-4\rangle = \langle -1,5,9\rangle$
27	$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \langle 0,1,-4\rangle - \langle 2,1,1\rangle = \langle -2,0,-5\rangle$
28	$\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2} = \sqrt{4+0+25} = \sqrt{29}$
29	$\vec{g} = 5\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - \hat{k}$
30	$\overrightarrow{ST} = (2-1)\hat{\imath} + (-2-0)\hat{\jmath} + (0-(-5))\hat{k} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$
31	$-\vec{a} + 3\vec{b} = -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k} + 12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} + 15\hat{k} = 11\hat{\imath} - 11\hat{\jmath} + 19\hat{k}$

32	$\vec{\mathbf{a}} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ $\lvert\vec{\mathbf{a}}\rvert = \sqrt{16+9} = 5$ $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{5}\vec{\mathbf{a}} = \frac{-4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}$ $\hat{\mathbf{a}}$ متجه وحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{a}}$
33	$\vec{\mathbf{b}} = 143\hat{\imath} - 24\hat{\jmath}$ $\lvert\vec{\mathbf{b}}\rvert = \sqrt{20449+576} = \sqrt{21025} = 145$ $\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{145}\vec{\mathbf{b}} = \frac{143}{145}\hat{\imath} - \frac{24}{145}\hat{\jmath}$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{b}}$
34	$\vec{\mathbf{c}} = -72\hat{\imath} + 33\hat{\jmath} + 56\hat{k}$ $\lvert\vec{\mathbf{c}}\rvert = \sqrt{5184+1089+3136} = \sqrt{9409} = 97$ $\hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{97}\vec{\mathbf{c}} = \frac{-72}{97}\hat{\imath} + \frac{33}{97}\hat{\jmath} + \frac{56}{97}\hat{k}$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{c}}$
35	$\vec{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\lvert\vec{\mathbf{d}}\rvert = \sqrt{121+169+64} = \sqrt{354}$ $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{\sqrt{354}}\vec{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{354}} \\ \frac{13}{\sqrt{354}} \\ \frac{8}{\sqrt{354}} \end{pmatrix}$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{d}}$

36	$\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\|\vec{e}\| = \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{e}$
37	$\vec{\mathbf{n}} = \langle -2,0,3 \rangle$ $\|\vec{\mathbf{n}}\| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$ $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\vec{\mathbf{n}} = \langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \rangle$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{n}}$
38	$3\vec{a} + c\vec{b} = 3(-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k}) + c(7\hat{\imath} + 39\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ $= (-9+7c))\hat{\imath} + (12+39c)\hat{\jmath} + (36-2c)\hat{k}$ $\Rightarrow -23\hat{\imath} - 66\hat{\jmath} + 40\hat{k} = (-9+7c))\hat{\imath} + (12+39c)\hat{\jmath} + (36-2c)\hat{k}$ في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية: $-9+7c = -23, \quad 12+39c = -66, \quad 36-2c = 40$ وعند حل هذه المعادلات نجد أن لها الحل نفسه $c = -2$

39	$k\vec{s}-4\vec{t}=k\begin{pmatrix}2\\ w+47\\ -4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3\\ v\\ 2\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}2k-12\\ k(w+47)-4v\\ -4k-8\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix}6\\ 31\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k-12\\ k(w+47)-4v\\ -4k-8\end{pmatrix}$ $\Rightarrow 2k-12=6\Rightarrow k=9$ $-4k-8=w \quad \Rightarrow w=-36-8=-44$ $k(w+47)-4v=31\Rightarrow 9(-44+47)-4v=31\Rightarrow v=-1$
40	$5\vec{m}+2\vec{p}=4\vec{n}$ $5\langle 4,1,-2\rangle+2\langle 2,a,-1\rangle=4\langle 6,2,-3\rangle$ $\langle 24,5+2a,-12\rangle=\langle 24,8,-12\rangle$ في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية: $5+2a=8\Rightarrow a=\frac{3}{2}$
41	$\|\vec{v}\|=\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2}=\sqrt{(u-3)^2+(u+1)^2+(u-2)^2}=17$ نربع الطرفين ونفك الأقواس: $u^2-6u+9+u^2+2u+1+u^2-4u+4=289$ $3u^2-8u-275=0$ $u=\frac{8\pm\sqrt{3364}}{2(3)}=\frac{8\pm 58}{6}$ إذن، $u=\frac{66}{6}=11$ ، أو $u=\frac{-50}{6}=\frac{-25}{3}$

42	$\overrightarrow{GH} = \langle c-1-(-2), -4-(c+1), c+2-(-8)\rangle = \langle c+1, -5-c, c+10\rangle$ $\lvert\overrightarrow{GH}\rvert = \sqrt{(c+1)^2+(-5-c)^2+(c+10)^2} = 19$ نربع الطرفين ونفك الأقواس: $c^2+2c+1+25+10c+c^2+c^2+20c+100 = 361$ $\Rightarrow 3c^2+32c-235 = 0$ $\Rightarrow c = \dfrac{-32 \pm \sqrt{3844}}{6} = \dfrac{-32 \pm 62}{6}$ إذن، $c = \frac{30}{6} = 5$ ، أو $c = \frac{-94}{6} = \frac{-47}{3}$ لكن $c > 0$ إذن، $c = 5$
43	بما أن مركز الكرة هو $O(0,0,0)$ والنقطة $A(7,-3,3)$ تقع عليها فإن طول نصف قطرها R حيث: $R = OA = \sqrt{(7-0)^2+(-3-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{49+9+9} = \sqrt{67}$ $OB = \sqrt{(2-0)^2+(-8-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{4+64+1} = \sqrt{69}$ بما أن $OB > R$ فإن النقطة B تقع خارج الكرة، ويكون قول حنان هو الصواب.
44	مركز الكرة هو النقطة C التي تنصف القطر المعطى طرفاه $C = \left(\dfrac{-4-2}{2}, \dfrac{6+2}{2}, \dfrac{-1+17}{2}\right) = (-3, 4, 8)$ وطول نصف قطر الكرة هو R حيث: $R = CK = \sqrt{(-3-(-2))^2+(4-2)^2+(8-17)^2} = \sqrt{1+4+81} = \sqrt{86}$ الآن نجد كلا من CM, CL ونقارنه مع R لمعرفة موقع كل من النقطتين M, L بالنسبة لهذه الكرة: $CL = \sqrt{(2-(-3))^2+(10-4)^2+(3-8)^2} = \sqrt{25+36+25} = \sqrt{86} = R$ إذن، النقطة L تقع على سطح الكرة. $CM = \sqrt{(4-(-3))^2+(-2-4)^2+(7-8)^2} = \sqrt{49+36+1} = \sqrt{86} = R$ إذن، النقطة M أيضًا تقع على سطح هذه الكرة.

45

تختلف النقطة B عن النقطة A فقط في الإحداثي z، والفرق بين قيمتي z يساوي 6

إذن، AB أحد أحرف المكعب، وطول ضلع المكعب 6 وحدات.

أما النقطة C فيزيد إحداثيها x بمقدار 6 وحدات عن الإحداثي x للنقطة B، كما يقل إحداثيها y بمقدار 6 عن الإحداثي y للنقطة B (مُزاحة عنها 6 وحدات لليسار).

نجد باقي النقاط (الرؤوس) بإحداث إزاحات مقدارها 6 وحدات لإحداثيات الرؤوس الثلاثة المعطاة.

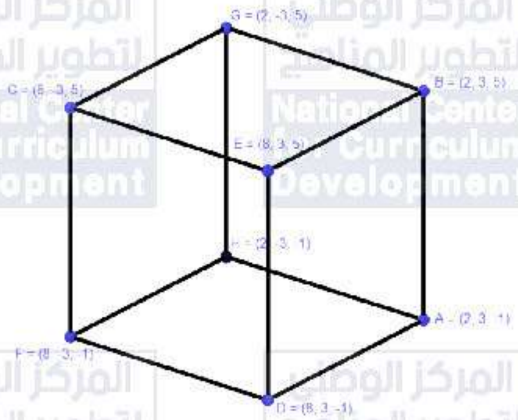
$D(8,3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

$E(8,3,5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

$F(8,-3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة C بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور z السالب.

$G(2,-3,5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.

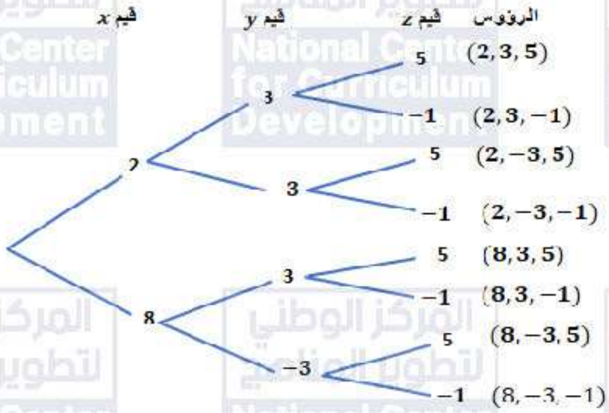
$H(2,-3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.



طريقة ثانية:

يمكن حل هذا السؤال باستعمال شجرة الاحتمال

لأن كل وجهين يوازيان أحد المستويات: xy, xz, yz فلا يوجد لقيم x سوى 2 و8، ولقيم y سوى 3 و-3، ولقيم z سوى 5 و-1 (القيم المعطاة في إحداثيات الرؤوس المعلومة).



46	$\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow XB=2AX\Rightarrow AB=AX+XB=AX+2AX=3AX$ $\Rightarrow AX=\dfrac{1}{3}AB$ $\overrightarrow{AX}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\dfrac{1}{3}(-3\vec{a}+6\vec{b})=-\vec{a}+2\vec{b}$ $\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BY}=6\vec{b}+5\vec{a}-\vec{b}=5(\vec{a}+\vec{b})$ $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AX}=3\vec{a}-\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$ $\dfrac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{CY}}=\dfrac{2(\vec{a}+\vec{b})}{5(\vec{a}+\vec{b})}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\overrightarrow{CX}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CY}$
47	$\overrightarrow{LN}=\langle 1,13,-12\rangle$ $LN=\lvert\overrightarrow{LN}\rvert=\sqrt{1+169+144}=\sqrt{314}$ $\overrightarrow{ML}=\langle 7,-4,2\rangle$ $ML=\lvert\overrightarrow{ML}\rvert=\sqrt{49+16+4}=\sqrt{69}$ $\overrightarrow{NM}=\langle -8,-9,10\rangle$ $NM=\lvert\overrightarrow{NM}\rvert=\sqrt{64+81+100}=\sqrt{245}$ بما أن: $(LN)^2=(ML)^2+(NM)^2$ إذ أن: $314=69+245$ فإن ΔLMN قائم الزاوية في M (بعكس نظرية فيثاغورس)
48	مساحة المثلث هي A حيث: $A=\dfrac{1}{2}(ML)(NM)=\dfrac{1}{2}\sqrt{69}\sqrt{245}=\dfrac{7}{2}\sqrt{345}$

الدرس الثاني: المستقيمات في الفضاء

مسألة اليوم صفحة 124
اتجاه مسار الإشارة الأولى: $\langle -11-(-1), 9-4, 15-5\rangle = \langle -10, 5, 10\rangle$ ويمكن تبسيطه بالقسمة على 5 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{v}_1 = \langle -2, 1, 2\rangle$ معادلة مسار الأولى: $\vec{r} = \langle -1, 4, 5\rangle + t\langle -2, 1, 2\rangle$ اتجاه مسار الإشارة الثانية: $\langle 2-(-5), -5-9, 17-3\rangle = \langle 7, -14, 14\rangle$ ويمكن تبسيطه بالقسمة على 7 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{v}_2 = \langle 1, -2, 2\rangle$ معادلة مسار الثانية: $\vec{r} = \langle -5, 9, 3\rangle + u\langle 1, -2, 2\rangle$ نبحث في التقاطع بمساواة متجهي الموقع $\vec{r}$: $\langle -1-2t, 4+t, 5+2t\rangle = \langle -5+u, 9-2u, 3+2u\rangle$ $-1-2t = -5+u \Rightarrow 2t+u = 4 \ldots\ldots (1)$ $4+t = 9-2u \Rightarrow t+2u = 5 \ldots\ldots (2)$ $5+2t = 3+2u \Rightarrow -2t+2u = 2 \ldots\ldots (3)$ نحل المعادلتين(1)، و(2) لإيجاد قيم t, u $(1)\times 2-(2) \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow u = 2$ نفحص تحقق المعادلة (3) عند هذه القيم t=1, u=2 : $-2(1)+2(2) \overset{?}{=} 2$ $-2+4 = 2$ ✓ إذن، يتقاطع مسارا الإشارتين عندما يكون t=1, u=2 ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض t=1 في معادلة مسار الإشارة الأولى، فتكون نقطة التقاطع $(-3, 5, 7)$

	أتحقق من فهمي صفحة 125
a	$\overrightarrow{GH} = \langle -3, -1, 7\rangle$ $\overrightarrow{KL} = \langle 3, 2, 0\rangle$ نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة $\overrightarrow{GH} = c\left(\overrightarrow{KL}\right)$ صحيحة، ونستنتج أن $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$ غير متوازيين
b	$\overrightarrow{GL} = \langle 0, 2, 14\rangle$ $\overrightarrow{HK} = \langle 0, 1, 7\rangle$ نلاحظ أن $\overrightarrow{GL} = 2\overrightarrow{HK}$ ونستنتج أن $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$
	أتحقق من فهمي صفحة 127
	(إضافة الرسم للحل)  $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV}$ $= \frac{1}{2}(-4\vec{a}) + \frac{1}{2}(6\vec{b}) = 3\vec{b} - 2\vec{a}$ $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT}$ $= -4\vec{a} + 6\vec{b} = 2\left(3\vec{b} - 2\vec{a}\right)$ إذن، $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{UV}$ ومنه المتجهان $\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{UV}$ متوازيان.

أتحقق من فهمي صفحة 128

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \\ &= \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

$$\frac{\overrightarrow{OF}}{\overrightarrow{OE}} = \frac{\frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})}{\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})} = \frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OE}$$

وهذا يعني أن المتجهين $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن، النقاط O, E, F تقع على استقامة واحدة.

أتحقق من فهمي صفحة 130

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 0, -6, 9\rangle + t\langle 1, -4, -5\rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة 131

$$\overrightarrow{NM} = \langle 3 - 2, 7 - (-4), -9 - 3\rangle = \langle 1, 11, -12\rangle$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Longrightarrow \vec{r} = \langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة 132	
a	$\vec{r} = (11 + 7t)\hat{\imath} + (5 - 2t)\hat{\jmath} + (-6 + 5t)\hat{k}$ نبحث عن قيمة لـ t تحقق: $39\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 14\hat{k} = (11 + 7t)\hat{\imath} + (5 - 2t)\hat{\jmath} + (-6 + 5t)\hat{k}$ $39 = 11 + 7t \Rightarrow t = 4$ $-3 = 5 - 2t \Rightarrow t = 4$ $14 = -6 + 5t \Rightarrow t = 4$ بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه ($t = 4$)، فإن النقطة التي متجه موقعها $39\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 14\hat{k}$ وهي النقطة (39, -3, 14) تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض $t = 4$ في معادلته.
b	$t = -3 \Rightarrow \vec{r} = (11 + 7(-3))\hat{\imath} + (5 - 2(-3))\hat{\jmath} + (-6 + 5(-3))\hat{k}$ $= -10\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} - 21\hat{k}$
c	متجه الموقع للنقطة$(v, -3v, 5v - 1)$ هو $v\hat{\imath} - 3v\hat{\jmath} + (5v - 1)\hat{k}$ $v\hat{\imath} - 3v\hat{\jmath} + (5v - 1)\hat{k} = (11 + 7t)\hat{\imath} + (5 - 2t)\hat{\jmath} + (-6 + 5t)\hat{k}$ $v = 11 + 7t \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $-3v = 5 - 2t \ldots\ldots\ldots(2)$ $5v - 1 = -6 + 5t \ldots\ldots(3)$ $(1) \times 3 + (2) \Rightarrow 0 = 38 + 19t$ $\Rightarrow t = -2$ $\Rightarrow v = -3$ نتحقق من أنّ $t = -2$، و$v = -3$ تحققان المعادلة (3) $5(-3) - 1 \overset{?}{=} -6 + 5(-2)$ $-16 = -16$ ✓ إذن، قيمة v التي تجعل النقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ واقعة على المستقيم l هي: $v = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 134

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v}_1 = \langle 1,11,-12 \rangle$

واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{v}_2 = \langle 4,-6,3 \rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين:

$$\langle 3,7,-9 \rangle + t\langle 1,11,-12 \rangle = \langle -30,-6,30 \rangle + u\langle 4,-6,3 \rangle$$

$3 + t = -30 + 4u \Rightarrow t - 4u = -33 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$7 + 11t = -6 - 6u \Rightarrow 11t + 6u = -13 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$-9 - 12t = 30 + 3u \Rightarrow 12t + 3u = -39 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$3 \times (1) + 2 \times (2) \Rightarrow 25t = -125 \Rightarrow t = -5 \ ,u = 7$

نتحقق من أنّ $t = -5$، و$u = 7$ تحققان المعادلة (3)

$12(-5) + 3(7) \stackrel{?}{=} -39$

$-39 = -39$ ✓

بما أن قيمة t، وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان،

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = -5$ في معادلة l_1:

$$\vec{r} = \langle 3,7,-9 \rangle - 5\langle 1,11,-12 \rangle = \langle -2,-48,51 \rangle$$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2,-48,51)$

أتحقق من فهمي صفحة 136

اتجاه الطائرة الأولى هو $\vec{v}_1 = \langle 8-0,15-7,16-0 \rangle = \langle 8,8,16 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح: $\langle 1,1,2 \rangle$

معادلة مسار الأولى: $\vec{r} = \langle 0,7,0 \rangle + t\langle 1,1,2 \rangle$

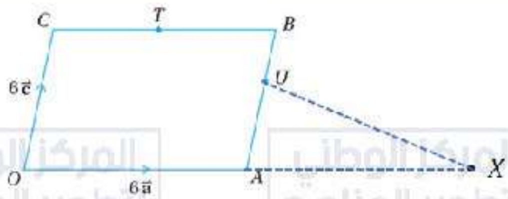
واتجاه الثانية هو $\vec{v}_2 = \langle 22-(-2),24-0,48-0 \rangle = \langle 24,24,48 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح: $\langle 1,1,2 \rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{r} = \langle -2,0,0 \rangle + u\langle 1,1,2 \rangle$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 137
1	نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث $\langle 15,10,-20\rangle = k\langle 8,12,24\rangle$ إذن، المتجهان غير متوازيين.
2	نلاحظ أن $\langle 27,-48,-36\rangle = 3\langle 9,-16,-12\rangle$ إذن، المتجهان متوازيان.
3	نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث $\langle -6,-4,10\rangle = k\langle -3,-1,13\rangle$ إذن، المتجهان غير متوازيين.
4	نلاحظ أن $\langle 12,-8,32\rangle = \frac{4}{7}\langle 21,-14,56\rangle$ إذن، المتجهان متوازيان.
5	$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = -(\vec{b} - 2\vec{a}) - (\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ إذن، الضلعان $\overline{BE}$ ، و$\overline{CD}$ متوازيين ولهما الطول نفسه، وهذا يعني أن الشكل$BEDC$ متوازي أضلاع. ويمكن إثبات المطلوب بطريقة أخرى بإيجاد المتجهين $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}$ وبيان تساويهما.

6	 $\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{XO} + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT})$ $= -12\vec{a} + (6\vec{c} + 3\vec{a}) = 6\vec{c} - 9\vec{a} = 3(2\vec{c} - 3\vec{a})$ $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AU} = \overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ $= -6\vec{a} + \frac{2}{3}(6\vec{c}) = 4\vec{c} - 6\vec{a} = 2(2\vec{c} - 3\vec{a})$ $\frac{\overrightarrow{XU}}{\overrightarrow{XT}} = \frac{2(2\vec{c} - 3\vec{a})}{3(2\vec{c} - 3\vec{a})} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow \overrightarrow{XU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{XT}$ إذن، $\overline{XU}, \overline{XT}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة نفسها X، فإن النقاط T, U, X تقع على استقامة واحدة.
7	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + t(-7\hat{\imath} + \hat{\jmath})$
8	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = -2\hat{\imath} + 8\hat{k} + t(-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$
9	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \langle 9, -2\rangle + t\langle 4,3\rangle$
10	$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \langle 10,3,-6\rangle + t\langle 0,-1,3\rangle$
11	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle 10-0, 3-(-1), -6-3\rangle = \langle 10, 4, -9\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle 0,-1,3\rangle + t\langle 10,4,-9\rangle$
12	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle 11-1, -6-4, 9-29\rangle = \langle 10, -10, -20\rangle$ ويمكن تبسيطه بالقسمة على 10 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{v} = \langle 1, -1, -2\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle 1,4,29\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle$

13	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle -30-(-26), -6-(-12), 30-23\rangle = \langle -4,6,7\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle -26,-12,23\rangle + t\langle -4,6,7\rangle$
14	اتجاه المستقيم: $\vec{v} = \langle -2-10, 9-5, 1-(-7)\rangle = \langle -12,4,8\rangle$ ويمكن تبسيطه بقسمته على 4 إلى $\langle -3,1,2\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{r} = \langle 10,5,-7\rangle + t\langle -3,1,2\rangle$
15	نساوي $\vec{r}$ في معادلتي المستقيمين: $\langle -2,2,-1\rangle + t\langle 1,2,-1\rangle = \langle 4,4,-7\rangle + u\langle -1,3,1\rangle$ $-2+t = 4-u \Rightarrow t+u = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $2+2t = 4+3u \Rightarrow 2t-3u = 2 \ldots\ldots\ldots (2)$ $-1-t = -7+u \Rightarrow t+u = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$ $3\times(1)+(2) \Rightarrow 5t = 20 \Rightarrow t = 4\ , u = 2$ نلاحظ أن المعادلة (3) هي المعادلة (1) نفسها فهي متحققة لقيمتي $t = 4, u = 2$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = 4$ في معادلة المستقيم الأول (أو $u = 2$ في معادلة الثاني): $\vec{r} = \langle -2,2,-1\rangle + 4\langle 1,2,-1\rangle = \langle 2,10,-5\rangle$ إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي: $(2,10,-5)$
16	$\overrightarrow{EF} = \langle -14,14,21\rangle \Rightarrow \vec{v}_1 = \langle -2,2,3\rangle$ $\overrightarrow{GH} = \langle -6,6,9\rangle \Rightarrow \vec{v}_2 = \langle -2,2,3\rangle$ نلاحظ أن $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان متوازيان.

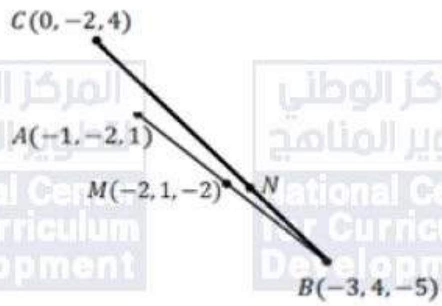
17	$\overrightarrow{EF} = \langle -1,-11,12\rangle = \vec{v}_1$ $\overrightarrow{HG} = \langle 21,35,-49\rangle \Rightarrow \vec{v}_2 = \langle 3,5,-7\rangle$ وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان غير متوازيين. معادلة $\overleftrightarrow{EF}$: $\vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle + t\langle -1,-11,12\rangle$ معادلة $\overleftrightarrow{GH}$: $\vec{r} = \langle 3,-21,20\rangle + u\langle 3,5,-7\rangle$ نساوي $\vec{r}$ في معادلتي المستقيمين ونساوي الإحداثيات المتناظرة: $\langle 3,7,-9\rangle + t\langle -1,-11,12\rangle = \langle 3,-21,20\rangle + u\langle 3,5,-7\rangle$ $3 - t = 3 + 3u \Rightarrow t + 3u = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $7 - 11t = -21 + 5u \Rightarrow 11t + 5u = 28 \ldots\ldots(2)$ $-9 + 12t = 20 - 7u \Rightarrow 12t + 7u = 29 \ldots\ldots(3)$ $-5\times(1) + 3\times(2) \Rightarrow 28t = 84 \Rightarrow t = 3, u = -1$ نفحص تحقق المعادلة (3) عندما $t = 3, u = -1$ $12(3) + 7(-1) \stackrel{?}{=} 29$ $29 = 29$ ✓ فالمستقيمان متقاطعان. نجد نقطة التقاطع بتعويض t=3 في معادلة $\overleftrightarrow{EF}$ (أو u=-1 في معادلة $\overleftrightarrow{GH}$): $\vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle + 3\langle -1,-11,12\rangle = \langle 0,-26,27\rangle$ إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي: (0, -26, 27)
18	$\overrightarrow{AB} = \langle 12,-4,-8\rangle \Rightarrow \vec{v} = \langle 3,-1,-2\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{r} = \langle -2,9,1\rangle + t\langle 3,-1,-2\rangle$

19	متجه الموقع للنقطة (19,2,-13) هو: $\langle 19,2,-13\rangle$ $\Rightarrow \langle 19,2,-13\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $19 = -2+3t \Rightarrow t = 7$ $2 = 9-t \Rightarrow t = 7$ $-13 = 1-2t \Rightarrow t = 7$ بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه ($t = 7$)، فإن النقطة(19,2,-13) تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض $t = 7$ في معادلته.
20	بما أن النقطة$(1, a, -1)$ تقع على المستقيم l، فإنها تحقق معادلته، أي أنّ: $\langle 1, a, -1\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $\Rightarrow 1 = -2+3t \Rightarrow t = 1$ $a = 9-t = 9-1 \Rightarrow a = 8$
21	بما أن النقطة$(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l، فإنها تحقق معادلته، أي أنّ: $\langle -8, b, c\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $\Rightarrow -2+3t = -8 \Rightarrow t = -2$ $b = 9-t = 9-(-2) \Rightarrow b = 11$ $c = 1-2t = 1-2(-2) \Rightarrow c = 5$
22	بما أن النقطة المطلوبة تقع في المستوى xz فإن الإحداثي y لها يساوي صفرًا $\langle x, 0, z\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $9-t = 0 \Rightarrow t = 9$ $x = -2+3t = -2+3(9) \Rightarrow x = 25$ $z = 1-2t = 1-2(9) \Rightarrow z = -17$ إذن، النقطة المطلوبة هي: $(25,0,-17)$

23	$3\vec{n}+b\vec{m}=\langle -15,12,3a\rangle+\langle b,-2b,3b\rangle$ $=\langle -15+b,12-2b,3a+3b\rangle$ وبما أن هذا المتجه يوازي المتجه$\langle 3,-3,5\rangle$، فإن: $\langle -15+b,12-2b,3a+3b\rangle=k\langle 3,-3,5\rangle$ $\Rightarrow -15+b=3k \ldots\ldots(1)$ $12-2b=-3k\ldots\ldots\ldots(2)$ $3a+3b=5k\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $(1)\times 2+(2)\Rightarrow -18=3k\Rightarrow k=-6, \quad b=-3\ , \quad a=-7$
24	اتجاه المحور y الموجب هو $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$، وبما أن اتجاه $\vec{v}$ هو اتجاه المحور y الموجب، فإن: $\vec{v}=k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}, k>0$ $\begin{pmatrix}3a+b\\-5a+4b\\6a+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}$ $\lvert\vec{v}\rvert=\lvert k\rvert=34\Rightarrow k=34$ $3a+b=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $-5a+4b=34\ldots\ldots\ldots(2)$ $6a+bc=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $-4\times(1)+(2)\Rightarrow -17a=34\Rightarrow a=-2, \quad b=6$ بتعويض قيمة a وقيمة b في المعادلة (3) نجد أنّ: $6(-2)+6c=0\Rightarrow c=2$

25	$\overrightarrow{BC} = 18\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 6\hat{k} \Rightarrow \vec{v} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ هي: $\vec{r} = -4\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - \hat{k} + t(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$ متجه موقع النقطة A يحقق هذه المعادلة لأن النقطة A تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ $\Rightarrow 2\hat{\imath} + p\hat{\jmath} + q\hat{k} = -4\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - \hat{k} + t(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$ نساوي المعاملات المتناظرة في طرفي المعادلة: $\Rightarrow 2 = -4 + 3t \Rightarrow t = 2$ $p = 13 - 2t \Rightarrow p = 13 - 2(2) = 9$
26	استكمالاً لما سبق في السؤال 27 بمقارنة معامل $\hat{k}$ في المعادلة $\hat{\imath} + p\hat{\jmath} + q\hat{k} = -4\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - \hat{k} + t(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$ نستنتج أن: $q = -1 + t = -1 + 2 = 1$
27	معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي معادلة $\overleftrightarrow{BC}$ نفسها $\vec{r} = (-4 + 3t)\hat{\imath} + (13 - 2t)\hat{\jmath} + (-1 + t)\hat{k}$ متجه موقع أيّ نقطة في المستوى yz يكون على الصورة $y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ إذن، لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن قيم z, y, t التي تحقق المعادلة: $y\hat{\jmath} + z\hat{k} = (-4 + 3t)\hat{\imath} + (13 - 2t)\hat{\jmath} + (-1 + t)\hat{k}$ $0 = -4 + 3t \Rightarrow t = \frac{4}{3}$ $y = 13 - 2t \Rightarrow y = 13 - \frac{8}{3} = \frac{31}{3}$ $z = -1 + t \Rightarrow z = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ إذن، النقطة المطلوبة هي: $(0, \frac{31}{3}, \frac{1}{3})$
28	$A(2,9,1)\ , C(14,1,5)$ $AC = \sqrt{12^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

29	ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-2}{2-1} = 1$ المعادلة الديكارتية للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $y - 2 = 1(x-1) \Rightarrow y = x + 1$ اتجاه $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{v} = \langle 1,1 \rangle$ المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = \langle 1,2 \rangle + t\langle 1,1 \rangle$ $\vec{v}$ تقابل الميل m، و$\vec{r}_0$ تقابل المقطع y في المعادلة الديكارتية. يمكن الوصول للمعادلة الديكارتية من المعادلة المتجهة وذلك بحذف المتغير الوسيط t من المعادلة المتجهة: $\vec{r} = \langle x, y \rangle = \langle 1+t, 2+t \rangle$ $\Rightarrow x = 1 + t \Rightarrow t = x - 1$ $y = 2 + t \Rightarrow y = 2 + x - 1 \Rightarrow y = x + 1$
30	$\overrightarrow{AB} = \langle 1,1,-1 \rangle$ اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{v}_1 = \langle 1,1,-1 \rangle$ ومعادلته هي: $\vec{r} = \langle -3,-1,12 \rangle + t\langle 1,1,-1 \rangle$
31	بما أن $l_2 \parallel l_1$ فلهما الاتجاه نفسه $\vec{v}_1 = \langle 1,1,-1 \rangle$ أعلاه. إذن، معادلة l_2 : $\vec{r} = \langle 11,9,12 \rangle + u\langle 1,1,-1 \rangle$
32	$M = \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{1-5}{2}\right) = (-2,1,-2)$



$|\overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{BN}| \Rightarrow NC = 2BN \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

33 $= \langle -1,3,-3\rangle + \frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle = \langle 0,1,0\rangle = \vec{v}$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{MN}$ المتجهة هي: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = \langle -2,1,-2\rangle + t\langle 0,1,0\rangle$

حل آخر:

لتكن إحداثيات N هي (x_1, y_1, z_1)

بما أنّ $|\overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{BN}|$، فإنّ $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \langle x_1 + 3, y_1 - 4, z_1 + 5, \rangle = \frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle$

$\Rightarrow x_1 + 3 = 1\,,\ \ y_1 - 4 = -2\,,\ \ z_1 + 5 = 3$

$\Rightarrow x_1 = -2\,,\ \ y_1 = 2\,,\ \ z_1 = -2 \Rightarrow N(-2,2,-2)$

$\overrightarrow{MN} = \langle -2-(-2), 2-1, -2-(-2)\rangle = \langle 0,1,0\rangle$

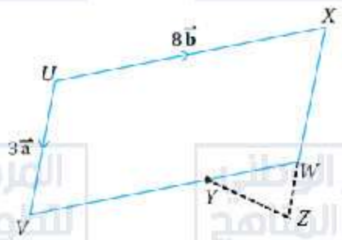
إذن، اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{MN}$ هو: $\langle 0,1,0\rangle$ ومعادلته المتجهة هي: $\vec{r} = \langle -2,1,-2\rangle + t\langle 0,1,0\rangle$

34	اتجاه $\overleftrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{PQ} = \langle 3,-5,-1\rangle = \vec{v}_1$ معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$: $\vec{r} = \langle -2,-3,3\rangle + t\langle 3,-5,-1\rangle$ اتجاه $\overleftrightarrow{RS}$: $\overrightarrow{RS} = \langle 12,-15,a+1\rangle = \vec{v}_2$ معادلة $\overleftrightarrow{RS}$: $\vec{r} = \langle 0,-8,-1\rangle + u\langle 12,-15,a+1\rangle$ نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة: $\langle -2,-3,3\rangle + t\langle 3,-5,-1\rangle = \langle 0,-8,-1\rangle + u\langle 12,-15,a+1\rangle$ $\Rightarrow -2+3t = 12u \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $-3-5t = -8-15u \Rightarrow 1-t = -3u \ldots\ldots (2)$ $3-t = -1+u(a+1) \Rightarrow 4-t = u(a+1) \ldots\ldots (3)$ بحل المعادلتين (1)، و(2)، نجد أنّ: $t = 2 , u = \frac{1}{3}$ وبتعويض القيمتين $t = 2 , u = \frac{1}{3}$ في المعادلة (3) كونهما يحققانها لأن المستقيمين متقاطعين نجد أنّ: $4-2 = \frac{1}{3}(a+1) \Rightarrow 6 = a+1 \Rightarrow a = 5$ نجد نقطة التقاطع بتعويض $t = 2$ في معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$: $\vec{r} = \langle -2,-3,3\rangle + 2\langle 3,-5,-1\rangle = \langle 4,-13,1\rangle$ إذن، نقطة التقاطع هي $(4,-13,1)$

35	$\overrightarrow{AB} = \langle 70,140,130\rangle$ يمكن تبسيط اتجاه $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{v}_1 = \langle 7,14,13\rangle$ وتكون معادلته: $\vec{r} = \langle 30,-75,90\rangle + t\langle 7,14,13\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 140,40,-40\rangle$ يمكن تبسيط اتجاه $\overleftrightarrow{CD}$: $\vec{v}_2 = \langle 7,2,-2\rangle$ وتكون معادلته: $\vec{r} = \langle -20,45,200\rangle + u\langle 7,2,-2\rangle$ المستقيمان ليسا متوازيين لأن اتجاهيهما ليسا متوازيين $(\vec{v}_1 \neq k\vec{v}_2)$ نبحث عن تقاطع المستقيمين بمحاولة إيجاد t,u بحيث: $\langle 30+7t,-75+14t,90+13t\rangle = \langle -20+7u,45+2u,200-2u\rangle$ $30+7t = -20+7u \Rightarrow u = \frac{50}{7} + t \ldots\ldots(1)$ $-75+14t = 45+2u \Rightarrow u = -60+7t \ldots..(2)$ $90+13t = 200-2u \Rightarrow 13t+2u = 110 \ldots..(3)$ بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ: $t = \frac{235}{21}, u = \frac{385}{21}$ لكن هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (3) إذن المستقيمان غير متقاطعين لعدم تحقق المعادلات الثلاث معًا، وهما غير متوازيين كما وضحنا سابقًا، فهما إذن متخالفان.
36	تم حلها في موضعها تحت عنوان "مسألة اليوم"

37	$\overrightarrow{QS} = \langle 2, -8, 16\rangle$ يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{QS}$: $\vec{v}_1 = \langle 1, -4, 8\rangle$ إذن معادلة l_1 هي: $\vec{r} = \langle -6, 14, -19\rangle + t\langle 1, -4, 8\rangle$ معادلة l_2 هي: $\vec{r} = \langle 1, 9, 9\rangle + u\langle 4, 7, 4\rangle$ لإيجاد نقطة تقاطعهما، نجد قيم u,t اللتين تجعلان $\vec{r}$ في المعادلتين متساويين: $\langle -6 + t, 14 - 4t, -19 + 8t\rangle = \langle 1 + 4u, 9 + 7u, 9 + 4u\rangle$ $-6 + t = 1 + 4u \Rightarrow t - 4u = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $14 - 4t = 9 + 7u \Rightarrow 4t + 7u = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $-19 + 8t = 9 + 4u \Rightarrow 4t - 2u = 14 \ldots\ldots\ldots. (3)$ $(3) - (2): 9u = -9 \Rightarrow u = -1, \quad t = 3$ وهاتان القيمتان تحققان أيضًا المعادلة (1) نجد نقطة تقاطع l_1 و l_2 بتعويض $t = 3$ في معادلة l_1 : $\vec{r} = \langle -6, 14, -19\rangle + 3\langle 1, -4, 8\rangle = \langle -3, 2, 5\rangle$ إذن، نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي: $U(-3, 2, 5)$ الآن لدينا أيضًا $T(1,9,9), S(-4,6,-3)$ $TU = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9$ $SU = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9$ بما أن $TU = SU$ إذن، ΔSTU متطابق الضلعين.
38	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}(-12\vec{a} + 8\vec{b})$ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = -12\vec{a} + 8\vec{b}$ $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ وهذا يثبت أن $\overline{MN} \parallel \overline{EF}$ إذن الشكل $FEMN$ رباعي فيه ضلعان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين، فهو شبه منحرف.

<table>
<tr><td>39</td><td>
يمكن حل هذا السؤال بتوظيف تشابه المثلثات.
أو باستخدام مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه وجيب الزاوية المحصورة بينهما، كالآتي:
ليكن A_2 مساحة ΔDEF ، A_1 مساحة ΔDMN
$A_2 = \frac{1}{2}(DE)(DF)\sin D$
$A_1 = \frac{1}{2}(DM)(DN)\sin D$
$\frac{A_2}{A_1} = \frac{DN}{DF} \times \frac{DM}{DE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
$\Rightarrow \frac{A_2}{72} = \frac{1}{9} \Rightarrow A_2 = 8$
مساحة شبه المنحرف $FEMN$ تساوي: $A_1 - A_2 = 72 - 8 = 64$
إذن مساحة الشكل $FEMN$ تساوي 64 وحدة مربعة.
</td></tr>
<tr><td>40</td><td>
النقاط الواقعة على المستقيم المعطى تكون إحداثياتها على الصورة:
$P(3+t, -2+2t, -6+3t)$
$OP = \sqrt{(3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (-6+3t)^2} = 29$
نربع الطرفين ونفك الأقواس، فنحصل على:
$14t^2 - 38t - 792 = 0$
$\Rightarrow 7t^2 - 19t - 396 = 0$
$\Rightarrow (t-9)(7t+44) = 0$
$\Rightarrow t = 9 \ , \qquad t = -\frac{44}{7}$
إذن، لدينا نقطتان تحققان المطلوب هما:
$P_1 = (12,16,21) \ , P_2 = \left(-\frac{23}{7}, -\frac{102}{7}, -\frac{174}{7}\right)$
</td></tr>
</table>

41	 $\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW} = \frac{4}{3}\overrightarrow{UV} = \frac{4}{3}(3\vec{a}) = 4\vec{a}$ $\Rightarrow \overrightarrow{XW} + \overrightarrow{WZ} = 4\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{WZ} = 4\vec{a} - 3\vec{a} = \vec{a}$ $\frac{YW}{VY} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{YW}{VW} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{YW} = 2\vec{b}\ ,\ \overrightarrow{VY} = 6\vec{b}$ $\overrightarrow{UY} = \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VY} = 3\vec{a} + 6\vec{b} = 3(\vec{a} + 2\vec{b}) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YW} + \overrightarrow{WZ} = 2\vec{b} + \vec{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{UY} = 3\overrightarrow{YZ} \Rightarrow \overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{UY}$ وبما أنهما ينطلقان من النقطة Y إذن، النقاط U,Z,Y تقع على استقامة واحدة.

الدرس الثالث: الضرب القياسي

مسألة اليوم صفحة 141
اتجاه مسار الصاروخ الأول: $\vec{v} = \langle 8,11,20 \rangle$ اتجاه مسار الصاروخ الثاني: $\vec{u} = \langle 10,4,16 \rangle$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$ $\lvert u\rvert = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8(10)+11(4)+20(16) = 80+44+320 = 444$ لتكن θ قياس الزاوية بين مساري الصاروخين، إذن: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert\lvert\vec{u}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{444}{3\sqrt{65}\times 2\sqrt{93}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{74}{\sqrt{6045}}\right) \approx 17.9°$

أتحقق من فهمي صفحة 142	
a	$\vec{v}\cdot\vec{w} = 4(-3)+8(7)-3(2) = -12+56-6 = 38$
b	$\vec{m}\cdot\vec{n} = -3(-12)+5(6)-1(-8) = 36+30+8 = 74$

أتحقق من فهمي صفحة 144	
a	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$ $\lvert\vec{w}\rvert = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$ $\vec{u}\cdot\vec{w} = -3(4)+5(2)-4(-3) = -12+10+12 = 10$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{w}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{50}\times\sqrt{29}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1450}}\right) \approx 74.8°$

b	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140}$ $\lvert\vec{w}\rvert = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$ $\vec{u}\cdot\vec{w} = 2(-3) - 10(15) + 6(-9) = -6 - 150 - 54 = -210$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{w}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{140}\times\sqrt{315}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{44100}}\right)$ $= \cos^{-1}(-1) = 180°$ ملحوظة: $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{w}$ وبالتالي فإن اتجاهيهما متعاكسان، وقياس الزاوية بينهما $180°$

أتحقق من فهمي صفحة 145

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v} = \langle 2,-5,-1\rangle$ واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{u} = \langle 1,0,-3\rangle$

$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$

$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

$\vec{v}\cdot\vec{u} = 1(2) + 0(-5) - 3(-1) = 2 + 3 = 5$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{30}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{300}}\right) \approx 73°$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1، و l_2 هو $73°$ تقريبًا.

أتحقق من فهمي صفحة 147

$\overrightarrow{GF} = \langle -1,4,6 \rangle$

$|\overrightarrow{GF}| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$

$\overrightarrow{GE} = \langle -4,4,-2 \rangle$

$|\overrightarrow{GE}| = \sqrt{16+16+4} = 6$

$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE} = -1(-4) + 4(4) + 6(-2) = 4 + 16 - 12 = 8$

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ ، إذن:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GE}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{6\sqrt{53}}\right) \approx 79.4°$$

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{GF}| \times |\overrightarrow{GE}| \sin\theta \approx \frac{1}{2} \times 6\sqrt{53} \sin 79.4° \approx 21.5$$

ويمكن إيجاد المساحة بإيجاد $\sin\theta$ من معرفتنا بقيمة $\cos\theta$ من دون إيجاد الزاوية θ كما يأتي:

$$\cos\theta = \frac{4}{3\sqrt{53}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{53}}\right)^2} = \sqrt{\frac{477-16}{477}} = \frac{\sqrt{461}}{3\sqrt{53}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{53} \times \frac{\sqrt{461}}{3\sqrt{53}} = \sqrt{461} \approx 21.5$$

أتحقق من فهمي صفحة 149

a

اتجاه المستقيم المعطى l هو: $\vec{v} = \langle 5,7,-3 \rangle$

افرض أن مسقط النقطة P على l هو النقطة F، فيكون متجه موقعها هو:

$$\overrightarrow{OF} = (16+5t)\hat{\imath} + (11+7t)\hat{\jmath} - (3+3t)\hat{k}$$

ويكون العمود من P على l هو $\overrightarrow{PF}$ حيث

$$\Rightarrow \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = (16+5t)\hat{\imath} + (11+7t)\hat{\jmath} - (3+3t)\hat{k} - (2\hat{\imath} + \frac{10}{3}\hat{k})$$

$$\overrightarrow{PF} = (14+5t)\hat{\imath} + (11+7t)\hat{\jmath} - \left(\frac{19}{3} + 3t\right)\hat{k}$$

ولأن المتجهين $\overrightarrow{PF}$، و $\vec{v}$ متعامدان فإن: $\overrightarrow{PF}.\vec{v} = 0$

$$\Rightarrow 5(14+5t) + 7(11+7t) - 3\left(-\frac{19}{3} - 3t\right) = 0 \Rightarrow t = -2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \left(16+5(-2)\right)\hat{\imath} + \left(11+7(-2)\right)\hat{\jmath} - \left(3+3(-2)\right)\hat{k} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

إذن، مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة F(6, -3, 3)

b

$$PF = \sqrt{(6-2)^2 + (-3-0)^2 + \left(3 - \frac{10}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{226}}{3}$$

أتحقق من فهمي صفحة 152

a

$$\overrightarrow{DE} = \langle 7,8,2 \rangle$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}$$

$$\overrightarrow{DB} = \langle 8,4,-8 \rangle$$

$$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{64+16+64} = 12$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = 7(8) + 8(4) + 2(-8) = 72$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DB}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{117}}\right) \approx 56.3°$$

b	$AB = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72}$ ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM، حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة المربعة: $M = (\frac{1+9}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{-1+3}{2}) = (5, -3, 1)$ $EM = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 9$ حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه. $V = \frac{1}{3}(\sqrt{72})^2(9) = 72(3) = 216$ إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مكعبة.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 152
1	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5(7) - 4(6) + 3(-2) = 5$
2	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4(12) - 8(9) - 3(-8) = 0$
3	$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5(4) + 9(6) + 17(-2) = 0$
4	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(3) - 4(10) + 12(-5) = -97$
5	$\lvert\vec{m}\rvert = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45}$ $\lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$ $\vec{m} \cdot \vec{n} = 4(3) - 2(4) + 5(-2) = -6$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert\lvert\vec{n}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{45} \times \sqrt{29}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{1305}}\right) = 99.6°$
6	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$ $\lvert\vec{w}\rvert = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3(5) - 2(3) + 9(-4) = -27$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert\lvert\vec{w}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94} \times \sqrt{50}}\right) \approx 113.2°$

7	$\overrightarrow{AO} = \langle -3, -5, 4 \rangle$ $\|\overrightarrow{AO}\| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$ $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -1, 1 \rangle$ $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$ $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = -3(4) - 5(-1) + 4(1) = -3$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AO}\|\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{50} \times \sqrt{18}}\right) = \cos^{-1}(-0.1) \approx 96°$
8	اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{v} = \langle -3-2, 5+1, 7-4 \rangle = \langle -5, 6, 3 \rangle$ اتجاه المستقيم l_2 هو: $\vec{w} = \langle 1-6, 2+5, -1-3 \rangle = \langle -5, 7, -4 \rangle$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{25+36+9} = \sqrt{70}$ $\|\vec{w}\| = \sqrt{25+49+16} = \sqrt{90}$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = -5(-5) + 6(7) + 3(-4) = 55$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{6300}}\right) \approx 46.1°$ إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 ، و l_2 هو $46.1°$ تقريبًا.
9	اتجاه المستقيم الأول هو $\vec{v} = \langle -6, q+5, 3 \rangle$ واتجاه المستقيم الثاني هو $\vec{u} = \langle 5, q-6, -4 \rangle$ المستقيمان متعامدان، فاتجاههما متعامدان، أي أنّ: $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ $\Rightarrow -6(5) + (q+5)(q-6) + 3(-4) = 0$ $\Rightarrow q^2 - q - 72 = 0$ $\Rightarrow (q-9)(q+8) = 0$ $\Rightarrow q = 9 \ ,\text{or} \ \ q = -8$

10	لتكن A هي المسقط العمودي للنقطة P على المستقيم l ، فإن متجه موقعها هو: $\overrightarrow{OA} = \langle -t, 2+2t, -3+5t \rangle$ وإذا كان $\overrightarrow{AP}$ هو العمود من Pعلى المستقيم l، فإنّ: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \langle -2+t, 26-(2+2t), 5-(-3+5t) \rangle$ $= \langle -2+t, 24-2t, 8-5t \rangle$ بما أن $\overrightarrow{AP}$ يعامد l إذن: $\overrightarrow{AP} \cdot \langle -1,2,5 \rangle = 0$ $\Rightarrow -1(-2+t) + 2(24-2t) + 5(8-5t) = 0$ $\Rightarrow t = 3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \langle -3,8,12 \rangle$ إذن، مسقط العمود من Pعلى المستقيم l هو $A(-3,8,12)$
11	$AP = \sqrt{(-2+3)^2 + (26-8)^2 + (5-12)^2} = \sqrt{374} \approx 19.34$
12	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{81+1+16} = \sqrt{98}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9(4) + 1(9) + 4(1) = 49$ ليكن θ قياس الزاوية BAC $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98} \times \sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \times \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{98} \times \sqrt{98} \sin 60° = \frac{49\sqrt{3}}{2}$

13	$\overrightarrow{AB} = \langle 1,4,-4\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}$ $\overrightarrow{AC} = \langle 3,-8,1\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{9+64+1} = \sqrt{74}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1(3)+4(-8)-4(1) = -33$ ليكن θ قياس الزاوية BAC $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{-33}{\sqrt{33}\times\sqrt{74}} = -\sqrt{\frac{33}{74}}$ $\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{33}{74}} = \sqrt{\frac{41}{74}}$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\times\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{33}\times\sqrt{74}\sqrt{\frac{41}{74}} = \frac{\sqrt{1353}}{2} \approx 18.4$
14	$\vec{d} = \langle 8,3,6\rangle \ ,\vec{F} = \langle 5,-3,1\rangle$ $W = \vec{F}.\vec{d} = 5(8)-3(3)+1(6) = 37J$
15	$\overrightarrow{RS} = \langle -16,8,12\rangle$ إذن، يمكن تبسيط اتجاه المستقيم l بقسمة $\overrightarrow{RS}$ على 4: $\vec{v} = \langle -4,2,3\rangle$ معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = \langle 11,-9,11\rangle + t\langle -4,2,3\rangle$ النقطة Q هي المسقط العمودي للنقطة O على هذا المستقيم، فيكون متجه موقعها $\overrightarrow{OQ}$ هو: $\overrightarrow{OQ} = \langle 11-4t,-9+2t,11+3t\rangle$ بما أن l و $\overrightarrow{OQ}$ متعامدان، فإن : $\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{v} = 0$ $\Rightarrow -4(11-4t)+2(-9+2t)+3(11+3t) = 0 \Rightarrow t = 1$ $\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \langle 7,-7,14\rangle$

16	$\overrightarrow{OA} = \langle -4,13,22\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 4,17,14\rangle$, $\overrightarrow{OD} = \langle 2,-29,7\rangle$ $\overrightarrow{AD} = \langle 2+4, -29-13, 7-22\rangle = \langle 6,-42,-15\rangle$ $\overrightarrow{AB} = \langle 4+4, 17-13, 14-22\rangle = \langle 8,4,-8\rangle$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6(8) - 42(4) - 15(-8) = 0$ إذن، $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$
17	ارسم شكل مستوي تقريبي يوضح المسألة (المهم ترتيب رؤوس المستطيل ABCD بالتوالي مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة) ، أينما كان موقع O، فإن:  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$ $= \langle 4,17,14\rangle + \langle 6,-42,-15\rangle = \langle 10,-25,-1\rangle$ (ويمكن أيضًا إيجاد $\overrightarrow{OC}$ عبر الراس D من العلاقة: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB}$)
18	$\lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \sqrt{36+1764+225} = \sqrt{2025} = 45$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{64+16+64} = \sqrt{144} = 12$ $Area = (45)(12) = 540$ إذن، مساحة ABCD تساوي 540 وحدة مربعة.
19	مركز المستطيل هو نقطة تقاطع قطريه وهي نقطة منتصف كل من القطرين. نأخذ القطر $\overline{BD}$ ولتكن نقطة منتصفه E، فإن: $E\left(\frac{4+2}{2}, \frac{17-29}{2}, \frac{14+7}{2}\right) = (3,-6,\frac{21}{2})$ $\Rightarrow \overrightarrow{OE} = \langle 3,-6,\frac{21}{2}\rangle$

20	لإيجاد نقطة تقاطع l_1 و l_2 نساوي $\vec{r}$ في معادلتيهما ونساوي الإحداثيات المتناظرة: $\langle -5+3t, 7+t, 1+4t\rangle = \langle 2+2u, 8, -1-3u\rangle$ $-5+3t = 2+2u \Rightarrow 3t-2u = 7 \ldots\ldots\ldots(1)$ $7+t = 8 \Rightarrow t = 1$ $1+4t = -1-3u \Rightarrow 4t+3u = -2 \ldots\ldots\ldots(2)$ بتعويض $t = 1$ في المعادلتين (1)، و(2) نجد أن $u = -2$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = 1$ في معادلة l_1 $\vec{r} = \langle -5+3(1), 7+1, 1+4(1)\rangle = \langle -2,8,5\rangle$ إذن نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي $T(-2,8,5)$ F هو المسقط العمودي للنقطة T على l_3 ، إذن $\overrightarrow{OF} = \langle 3-v, 19+3v, 10+v\rangle$ $\overrightarrow{TF} = \langle 3-v-(-2), 19+3v-8, 10+v-5\rangle$ $= \langle 5-v, 11+3v, v+5\rangle$ اتجاه l_3 هو $\vec{w} = \langle -1,3,1\rangle$ لكن $\overrightarrow{TF}$ يعامد l_3 إذن، $\overrightarrow{TF}\cdot\vec{w} = 0$ $\Rightarrow -1(5-v)+3(11+3v)+1(v+5) = 0 \Rightarrow v = -3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle 3-(-3), 19+3(-3), 10-3\rangle \Rightarrow F(6,10,7)$
21	$\overrightarrow{TF} = \langle 8,2,2\rangle \Longrightarrow \lvert\overrightarrow{TF}\rvert = \sqrt{64+4+4} = 6\sqrt{2}$

22	$\overrightarrow{AB} = \langle 2,5,-1 \rangle$ وهذا هو اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ اتجاه المستقيم l هو: $\vec{v} = \langle -1,3,1 \rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 2(-1) + 5(3) - 1(1) = 12$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{30} \times \sqrt{11}}\right) \approx 48.7°$
23	بما أن A,B,C على استقامة واحدة، و AB=AC إذن، $A(3,-2,1)$ هي نقطة منتصف $\overline{BC}$ حيث : $C(x,y,z), B(5,3,0)$ $\Rightarrow \left(\frac{x+5}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z+0}{2}\right) = (3,-2,1)$ $\Rightarrow \frac{x+5}{2} = 3 \Rightarrow x = 1$ $\frac{y+3}{2} = -2 \Rightarrow y = -7$ $\frac{z+0}{2} = 1 \Rightarrow z = 2$ إذن إحداثيات النقطة C هي: $(1,-7,2)$
24	متجه موقع أي نقطة على l_2 يكون $\vec{r} = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t \rangle$ حتى تقع Bعلى l_2 ينبغي وجود قيمة t تحقق المعادلة: $\langle 6-t, 11+3t, 7+2t \rangle = \langle 8,5,3 \rangle$ $\Rightarrow 6-t = 8 \Rightarrow t = -2$ $11+3t = 5 \Rightarrow t = -2$ $7+2t = 3 \Rightarrow t = -2$ لهذه المعادلات الثلاث الحل نفسه$t = -2$ ، إذن، B تقع على المستقيم l_2 لأنها تنتج من تعويض $t = -2$ في معادلته.

25	اتجاه l_1 هو: $\overrightarrow{AB} = \langle 15,9,-6 \rangle$ ، ويمكن تبسيطه إلى $\vec{u} = \langle 5,3,-2 \rangle$ اتجاه l_2 هو: $\vec{v} = \langle -1,3,2 \rangle$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5(-1) + 3(3) - 2(2) = 0$ إذن، المستقيمان l_1، و l_2 متعامدان.
26	بما أن المستقيمين l_1 و l_2 متعامدان، ونقطة التقائهما هي B (كونها واقعة على كل منهما مما سبق) إذن، $m\angle ABC = 90°$
27	المثلث ABC قائم في B. $AB = \sqrt{15^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{342}$ $BC = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ $Area = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}\sqrt{342} \times 2\sqrt{14} = \sqrt{4788} \approx 69.2$ إذن، مساحة المثلث ABC تساوي 69.2 وحدة مربعة تقريبًا.
28	$\overrightarrow{AB} = \langle -8,2,3 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$ $\overrightarrow{AC} = \langle 2,-4,1 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8(2) + 2(-4) + 3(1) = -21$ ليكن θ قياس الزاوية BAC $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{-21}{\sqrt{77} \times \sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ $\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \times \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{77} \times \sqrt{21} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$

29	$\overrightarrow{EA} = \langle 3,1,-2\rangle,\ \ \overrightarrow{ED} = \langle 9,9,18\rangle$ $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED} = 3(9)+1(9)-2(18) = 0$ إذن، $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{ED}$ وقياس الزاوية AEDهو $90°$
30	$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} \Rightarrow \langle 5-27,36-p,q+10\rangle = \langle -6-16,58-47,-10-12\rangle$ $\Rightarrow \langle -22,36-p,q+10\rangle = \langle -22,11,-22\rangle$ $\Rightarrow 36-p = 11\ \ ,\ \ q+10 = -22$ $\Rightarrow p = 25\ \ \ \ ,\ \ \ \ q = -32$
31	$M\left(\frac{16-17}{2},\frac{47+14}{2},\frac{12-21}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2},\frac{61}{2},\frac{-9}{2}\right)$ $\overrightarrow{OM} = \langle\frac{-1}{2},\frac{61}{2},\frac{-9}{2}\rangle$
32	$V = \left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert^3 = \sqrt{(22)^2+(22)^2+(-11)^2}^{\,3}$ $= \sqrt{484+484+121}^{\,3}$ $= \sqrt{1089}^{\,3}$ $= (33)^3 = 35937$
33	$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ وتكون قيمة n هي 5

34	$\overrightarrow{CA} = \langle -5,5,0 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{CA}\rvert = \sqrt{25+25+0} = 5\sqrt{2}$ $\overrightarrow{CB} = \langle -3,2,6 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{CB}\rvert = \sqrt{9+4+36} = 7$ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -5(-3)+5(2)+0(6) = 25$ ليكن θ قياس الزاوية ACB $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{25}{35\sqrt{2}}\right)$ $= \cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{14}\right)$
35	$\overrightarrow{AC} = \langle 5,-5,0 \rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ بالمتجه $\vec{v} = \langle 1,-1,0 \rangle$ وتكون معادلته: $\vec{r} = \langle 8,-4,-6 \rangle + t\langle 1,-1,0 \rangle$
36	$\overrightarrow{BD} = \langle 1,1,p \rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$ بالمتجه $\vec{v} = \langle 1,1,p \rangle$ معادلة $\overleftrightarrow{BD}$: $\vec{r} = \langle 5,-2,0 \rangle + u\langle 1,1,p \rangle$ يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد u,t بحيث تتساوى لهما $\vec{r}$ في المعادلتين: $\langle 8+t,-4-t,-6 \rangle = \langle 5+u,-2+u,up \rangle$ $8+t = 5+u \Rightarrow t-u = -3 \ldots\ldots\ldots(1)$ $-4-t = -2+u \Rightarrow t+u = -2 \ldots\ldots(2)$ $up = -6 \ldots\ldots\ldots(3)$ بجمع المعادلتين(1)و(2) ، نجد أنّ: $t = -\frac{5}{2}, u = \frac{1}{2}$ ثم بالتعويض في (3) نجد أنّ: $p = -12$ $D(6,-1,-12)$

37	$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \langle 2,-3,6\rangle\\ \overrightarrow{DC} = \langle 2,-3,6\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC} = \langle 3,-2,-6\rangle\\ \overrightarrow{AD} = \langle 3,-2,-6\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ من (1) و (2) ينتج ان الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. والآن نجد طول $\overline{AB}$، و$\overline{AD}$: $AB = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$ $AD = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$ وبما أن$ABCD$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة طول كل واحد منها 7 وحدات.
38	تم حل هذا السؤال في موضعه تحت عنوان "مسألة اليوم"
39	بما أن $\angle CDA$ قائمة، فالنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ ، ويمكن إيجاد إحداثياتها كما يأتي: $\overrightarrow{AB} = \langle -2,-3,5\rangle$ معادلة المستقيم$\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle -2,-3,5\rangle$ بما أنّ النقطة D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ فإن: $\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+5t\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-7, 4+5t+1\rangle = \langle 7-2t, -9-3t, 5+5t\rangle$ $\overrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ $\Rightarrow -2(7-2t) - 3(-9-3t) + 5(5+5t) \Rightarrow t = -1$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3-2(-1), -2-3(-1), 4+5(-1)\rangle = \langle 5,1,-1\rangle$ إذن، إحداثيات D هي: $(5,1,-1)$

40	P هي نقطة تقاطع المستقيمين l_1، وl_2، ونجدها بمساواة $\vec{r}$ في المعادلتين ومساواة الإحداثيات المتناظرة: $\langle -8+7t, 16-3t, 1-6t\rangle = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$ $\Rightarrow -8+7t=-10+3u \Rightarrow 7t-3u=-2 \ldots\ldots\ldots(1)$ $16-3t=31-6u \Rightarrow -3t+6u=15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $1-6t=-26+7u \Rightarrow 7u+6t=27 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ بحل نظام المعادلات نجد أنّ: $t=1, u=3$ ولإيجاد إحداثيات P نعوض $t=1$ في معادلة l_1: $\vec{r} = \langle -8+7, 16-3, 1-6\rangle = \langle -1, 13, -5\rangle$ $\Rightarrow P(-1,13,-5)$ ونجد إحداثيات Q بتعويض $t=3$ في معادلة l_1: $\vec{r} = \langle -8+21, 16-9, 1-18\rangle$ $\Rightarrow Q(13,7,-17)$
41	النقطة R تقع على المستقيم l_2 ، فمتجه موقعها هو: $\langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$ $\overrightarrow{PQ} = \langle 13,7,-17\rangle - \langle -1,13,-5\rangle = \langle 14,-6,-12\rangle$ $\overrightarrow{PR} = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle - \langle -1,13,-5\rangle$ $= \langle -9+3u, 18-6u, -21+7u\rangle$ $PR = PQ \Rightarrow \lvert\overrightarrow{PR}\rvert = \lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ $\Rightarrow (-9+3u)^2 + (18-6u)^2 + (-21+7u)^2 = 14^2 + (-6)^2 + (-12)^2$ $94u^2 - 564u + 470 = 0 \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$ $\Rightarrow u = 1$ أو $u = 5$ لكن $u > 3$ ، فإذن $u=5$، وتكون $R(5,1,9)$

42	الزاوية RPQ هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين l_1، و l_2 وهي الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ حيث $P(-1,13,-5), Q(13,7,-17), R(5,1,9)$ $\overrightarrow{PQ} = \langle 14,-6,-12\rangle \Rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{14^2+(-6)^2+(-12)^2} = \sqrt{376}$ $\overrightarrow{PR} = \langle 6,-12,14\rangle \Rightarrow \|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{6^2+(-12)^2+(-14)^2} = \sqrt{376}$ $m\angle RPQ = \theta \Longrightarrow \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|} = \dfrac{14\times 6+(-6)(-12)+(-12)\times 14}{\sqrt{376}\times\sqrt{376}}$ $= \dfrac{-12}{376} = \dfrac{-3}{94}$
43	مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية بينهما. $Area(\Delta PQR) = \dfrac{1}{2} PQ \times PR \times \sin\theta$ $Area(\Delta PQR) = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\| \times \|\overrightarrow{PR}\| \sin\theta$ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\dfrac{-3}{94})^2} = \dfrac{\sqrt{8827}}{94}$ $Area(\Delta PQR) = \dfrac{1}{2}\sqrt{376}\times\sqrt{376}\times\dfrac{\sqrt{8827}}{94} = \dfrac{1}{2}\times 376\times\dfrac{\sqrt{8827}}{94} = 2\sqrt{8827}$
44	لتكن $H(x,y,z)$ $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \qquad (\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE})$ $\langle x-8, y-3, z+2\rangle = \langle -2,-4,-4\rangle + \langle -10,10,-5\rangle + \langle -6,-3,6\rangle$ $\Rightarrow \langle x-8, y-3, z+2\rangle = \langle -18,3,-3\rangle$ $\Rightarrow x-8 = -18 \Rightarrow x = -10$ $y-3 = 3 \Rightarrow y = 6$ $z+2 = -3 \Rightarrow z = -5$ $\Rightarrow H(-10,6,-5)$ ملحوظة: توجد طرق أخرى للحل، منها التدرج بإيجاد إحداثيات A ثم E ثم H...

45

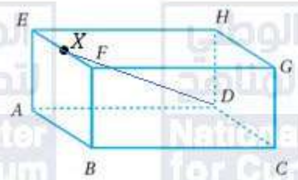
يمكن بالطرق الواردة في حل السؤال السابق إيجاد إحداثيات كل من C, G وإكمال الحل لحساب قياس الزاوية المطلوبة تقليديًا، هنا سنستفيد من حقيقة أن GC و AC متعامدان (أي أن ΔACG قائم في C)

ليكن $m\angle GAC = \theta$

$$\tan\theta = \frac{|\overrightarrow{CG}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|} = \frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle 2,4,4\rangle + \langle -10,10,-5\rangle|} = \frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle -8,14,-1\rangle|}$$

$$= \frac{\sqrt{36+9+36}}{\sqrt{64+196+1}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{261}} = \frac{9}{3\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{29}} \approx 29.1°$$

46



$$\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \langle -1,-2,-2\rangle - \langle -6,-3,6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$$

$$= \langle -5,11,-13\rangle$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{XD}| = \sqrt{25+121+169} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \langle 1,2,2\rangle - \langle -6,-3,6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$$

$$= \langle -3,15,-9\rangle$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{XC}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC} = -5(-3) + 11(15) - 13(-9) = 297$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC}}{|\overrightarrow{XD}||\overrightarrow{XC}|} = \frac{297}{315} = \frac{33}{35}$$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 156	
1	b
2	d
3	c
4	d
5	b
6	c
7	a
8	d
9	$\overrightarrow{BA} = \langle -3,1,-2\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$ $\overrightarrow{BC} = \langle -2,4,3\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -3(-2)+1(4)-2(3) = 4$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{BA}\rvert\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14}\times\sqrt{29}}\right) \approx 78.5°$
10	E,F,G على استقامة واحدة، إذن، $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{FG}$، ومنه: $\langle h-2,5,-3\rangle \parallel \langle 3-h,5,k-1\rangle$ إذن، يوجد عدد حقيقي مثل c بحيث: $\langle h-2,5,-3\rangle = c\langle 3-h,5,k-1\rangle$ $\Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$ $h-2 = (3-h)c \Rightarrow h-2 = 3-h \Rightarrow h = \frac{5}{2}$ $(k-1)c = -3 \Rightarrow k-1 = -3 \Rightarrow k = -2$

11	$\overrightarrow{AB} = \langle -2,-3,2\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle -2,-3,2\rangle$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle - \langle -4,5,-1\rangle = \langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ $\Rightarrow -2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t) = 0$ $\Rightarrow t = -1$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3+2,-2+3,4-2\rangle = \langle 5,1,2\rangle \Rightarrow D(5,1,2)$
12	لإيجاد نقطة التقاطع، نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين μ، وλ: $\langle -2-5\lambda,-5,9+7\lambda\rangle = \langle -3+2\mu,-17+4\mu,5-\mu\rangle$ $-17+4\mu = -5 \Rightarrow \mu = 3$ $-2-5\lambda = -3+2\mu \Rightarrow \lambda = -1$ وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية: $9+7\lambda = 5-\mu$ $9+7(-1) = 5-3$ $2 = 2$ ✓ نجد نقطة تقاطعهما بتعويض $\lambda = -1$ في معادلة l_1 ، وهي النقطة $(3,-5,2)$
13	اتجاه المستقيم l_1 : $\vec{v} = \langle -5,0,7\rangle$ اتجاه المستقيم l_2 : $\vec{u} = \langle 2,4,-1\rangle$ $\vec{v}\cdot\vec{u} = -5(2)+0+7(-1) = -17$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{25+0+49} = \sqrt{74}$ $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ لتكن θ قياس الزاوية بين $\vec{v},\vec{u}$ إذن: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\lvert\vec{v}\rvert\lvert\vec{u}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74}\times\sqrt{21}}\right) \approx 115.5°$ فيكون قياس الزاوية الحادة بين l_1, l_2 هو α حيث: $\alpha = 180° - 115.5° = 64.5°$

14	$\overrightarrow{AB} = \langle 2,-4,7\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{r} = \langle 1,4,-5\rangle + t\langle 2,-4,7\rangle$
15	$\overrightarrow{AC} = \langle -5,-3,8\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ هي: $\vec{r} = \langle 1,4,-5\rangle + u\langle -5,-3,8\rangle$
16	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2(-5)-4(-3)+7(8) = 58$ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{58}{\sqrt{69}\times\sqrt{98}} = \frac{58}{\sqrt{69\times 49\times 2}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$
17	$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}}$ $Area(ABC) = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\times\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\times 7\sqrt{138}\times\frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{3398}}{2}$
18	V نقطة على l إذن يكون متجه موقعها: $\overrightarrow{OV} = \langle 3+4t,-25+5t,13-t\rangle$ اتجاه l هو: $\vec{w} = \langle 4,5,-1\rangle$ وبما أن $\overrightarrow{OV} \perp l$ إذن يكون: $\vec{w}.\overrightarrow{OV} = 0$ ومنه: $4(3+4t)+5(-25+5t)-1(13-t) = 0 \Rightarrow t = 3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OV} = \langle 3+12,-25+15,13-3\rangle \Rightarrow V(15,-10,10)$

19	$\overrightarrow{EF} = \langle -12,3,-18\rangle$ $\overrightarrow{GH} = \langle -14,-35,21\rangle$ نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين. معادلة l_1 هي: $\vec{r} = \langle 17,6,34\rangle + t\langle -12,3,-18\rangle$ معادلة l_2 هي: $\vec{r} = \langle 1,21,-2\rangle + u\langle -14,-35,21\rangle$ نساوي$\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع: $\langle 17-12t, 6+3t, 34-18t\rangle = \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u\rangle$ $17-12t = 1-14u \Rightarrow -12t+14u = -16 \Rightarrow -6t+7u = -8 \ldots\ldots\ldots (1)$ $6+3t = 21-35u \Rightarrow 3t+35u = 15 \ldots\ldots\ldots (2)$ $34-18t = -2+21u \Rightarrow 18t+21u = 36 \Rightarrow 6t+7u = 12 \ldots\ldots\ldots (3)$ $(1)+(3) \Rightarrow u = \frac{2}{7}, \quad t = \frac{5}{3}$ وبتعويض هذه القيم في المعادلة (2) ينتج أنّ: $3\left(\frac{5}{3}\right) + 35\left(\frac{2}{7}\right) = 5+10 = 15$ هذه القيم تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان متقاطعان. ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t = \frac{5}{3}$ في معادلة l_1 $\vec{r} = \langle 17,6,34\rangle + \frac{5}{3}\langle -12,3,-18\rangle = \langle -3,11,4\rangle$ إذن، إحداثيات نقطة التقاطع هي $(-3,11,4)$.

20	$\overrightarrow{EF} = \langle 15,5,-15\rangle$ $\overrightarrow{GH} = \langle -6,-24,12\rangle$ بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{GH}$ وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين. بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{EF}$ بقسمته على 5 تكون معادلته: $\vec{r} = \langle -3,-5,16\rangle + t\langle 3,1,-3\rangle$ بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{GH}$ بقسمته على 6 تكون معادلته: $\vec{r} = \langle 7,2,11\rangle + u\langle -1,-4,2\rangle$ نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t, u لمعرفة نقطة التقاطع: $\langle -3+3t, -5+t, 16-3t\rangle = \langle 7-u, 2-4u, 11+2u\rangle$ $-3+3t = 7-u \Rightarrow 3t+u = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $-5+t = 2-4u \Rightarrow t+4u = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $16-3t = 11+2u \Rightarrow 3t+2u = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $(3)-(1) \Rightarrow u = -5 \quad \Rightarrow t = 5$ لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.
21	$AD = 2DE \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE}$ $\Rightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(-14\vec{b}) = -7\vec{b}$ $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 7\vec{b} + 5\vec{a}$ $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = 21\vec{b} + 15\vec{a} = 3(7\vec{b} + 5\vec{a})$ $\Rightarrow \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EC}$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{EC} \parallel \overrightarrow{EB}$ لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها، إذن النقاط الثلاثة B, C, E تقع على استقامة واحدة.

الوحدة السابعة: الإحصاء والاحتمالات

الدرس الأول: التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 160</td></tr>
<tr><td colspan="2">هذه التجربة هي تجربة احتمالية هندسية، لأنها تقوم على تكرار تجربة برنولي حتى التوصل لأول نجاح.
X عدد المحاولات للوصول إلى أول نجاح
$X \sim Geo(0.25)$
$\Rightarrow P(X = 3) = (0.25)(0.75)^{3-1} = \frac{9}{64} \approx 0.14$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 162</td></tr>
<tr><td>a</td><td>- لدينا ست محاولات مستقلة
- وفي كل محاولة، يمكن اعتبار ظهور الصورة نجاحًا $(p = \frac{1}{2})$ وظهور الكتابة فشلًا
- واحتمال النجاح ثابت في كل مرة
- لكن لا يتم التوقف عند أول نجاح، بل إنه يكمل 6 محاولات مهما كانت النتائج
لذلك لا تمثل هذه التجربة تجربة احتمالية هندسية.</td></tr>
<tr><td>b</td><td>- لدينا محاولات مستقلة يتم تكرارها (محاولة إصابة الهدف)
- في كل مرة يمكن اعتبار إصابة الهدف نجاحًا، وعدم إصابته فشلًا
- احتمال النجاح في كل مرة ثابت وهو $p = 0.6$
- يتم التوقف عند أول نجاح
إذن هذه تجربة احتمالية هندسية لتحقق الشروط الأربعة.</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 164</td></tr>
<tr><td>a</td><td>- لدينا محاولات مستقلة يتم تكرارها (تدوير مؤشر القرص وملاحظة أين يقف)
- في كل محاولة يمكن اعتبار توقف المؤشر على اللون الأخضر نجاحًا، توقفه عند أي لون غير الأخضر فشلًا
- احتمال النجاح في كل مرة ثابت وهو $p = \frac{1}{4}$
- يتم التوقف عند أول نجاح
إذن هذه تجربة احتمالية هندسية لتحقق الشروط الأربعة.
X عدد المحاولات للوصول إلى أول نجاح
$X \sim Geo\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-1} = \frac{9}{64}$</td></tr>
</table>

b	$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$ $= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3$ $= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} = \frac{175}{256} \approx 0.684$
c	$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$ $= 1 - \left(P(X = 1) + P(X = 2)\right)$ $= 1 - \left(\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^1\right)$ $= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} = 0.5625$ حلّ آخر: $P(X \geq 3) = P(X > 2) = (1-p)^x = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

أتحقق من فهمي صفحة 166

بما أن الطفل يكرر فتح العلب حتى يصل إلى علبة فيها لعبة، فيمكن اعتبار X عدد المحاولات متغيرًا عشوائيًا هندسيًا، أي:

$$X \sim Geo\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

أتحقق من فهمي صفحة 167

a	- يتم تكرار إلقاء حجر النرد وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي، وهذه المحاولات مستقلة. - في كل محاولة يعدّ (النجاح) ظهور العدد (1) على الوجه العلوي، و (الفشل) ظهور أي عدد غير (1) على الوجه العلوي. - احتمال النجاح في كل مرة ثابت وهو $p = \frac{1}{6}$ - عدد المحاولات محدد سلفًا وهو 20 محاولة. إذن، هذه تجربة احتمالية ذات حدين، لتحقق الشروط الأربعة.

b	محاولات اختيار 7 من طلبة روضة غير مستقلة لأن احتمال اختيار بنت غير ثابت في جميع المحاولات. إذن هذه ليست تجربة احتمالية ذات حدين.
	أتحقق من فهمي صفحة 170
a	لدينا تجربة عشوائية ذات حدين، وعدد مرات ظهور الرقم (1) على الوجه العلوي هو متغير عشوائي X ذو حدين، لأن لدينا محاولات مستقلة متكررة (إلقاء حجر النرد) حيث (النجاح) هو ظهور الرقم (1) على الوجه العلوي (واحتماله ثابت $p = \frac{1}{6}$)، والفشل ظهور رقم غير (1)، وعدد المحاولات محدد سلفًا وهو $n = 10$ $\Rightarrow X \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$ $P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-3} = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$ $= \frac{10 \times 9 \times 8}{6} \times \frac{5^7}{6^{10}} \approx 0.155$
b	التجربة العشوائية المذكورة هي ذات حدين، لأن هناك محاولات مستقلة متكررة (ضغط زر)، والنجاح هو الضغط على أحد أزرار العمليات الحسابية الأساسية ، والفشل هو الضغط على زر من باقي الأزرار، احتمال النجاح كل مرة ثابت وهو $p = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$، وعدد المحاولات محدد سلفًا هو $n = 20$ ليكن X عدد مرات النجاح، $\Rightarrow X \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$ $P(X = 3) = \binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{20-3} = \binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{17} \approx 0.134$
c	التجربة المذكورة هي عشوائية ذات حدين، لأن لدينا محاولات مستقلة متكررة (إجراء العملية) واحتمال النجاح كل مرة ثابت هو $p = 0.8$، وعدد المحاولات محدد سلفًا وهو $n = 10$ ليكن X عدد مرات النجاح، $\Rightarrow X \sim B(10, 0.8)$ $P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$ $= \binom{10}{7}(0.8)^7(0.2)^3 + \binom{10}{8}(0.8)^8(0.2)^2 + \binom{10}{9}(0.8)^9(0.2)^1 + \binom{10}{10}(0.8)^{10}(0.2)^0$ $= 0.201 + 0.302 + 0.268 + 0.107 \approx 0.878$

أتحقق من فهمي صفحة 171	
ليكن X عدد السيارات التي فيها عطل ضمن الألف سيارة، إذن، $X\sim B(1000,0.05)$ $E(X)=np=1000\times\frac{5}{100}=50$ إذن، يتوقع أن تكون في هذه الشحنة من السيارات خمسون سيارة بها هذا العطل الميكانيكي.	
أتحقق من فهمي صفحة 173	
ليكن X عدد العينات التي لا تطابق المواصفات ضمن الـ 200 عينة التي اختارها المراقب أخيرًا.	
a	$\Rightarrow X\sim B\left(200,\frac{1}{50}\right)$ حيث اعتمدنا هنا $p=\frac{10}{500}=\frac{1}{50}$ بالاستناد إلى الاحتمال التجريبي لاختيار عينة غير مطابقة للمواصفات في الـ 500 عينة الأولى. $E(X)=np=200\times\frac{1}{50}=4$ لذا يتوقع وجود 4 عينات لا تطابق المواصفات ضمن هذه العينات الـ200
b	$Var(X)=np(1-p)=200\left(\frac{1}{50}\right)\left(\frac{49}{50}\right)=3.92$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 173	
1	$P(X=2)=p(1-p)^{2-1}=(0.2)(0.8)^1=0.16$
2	$P(X=10)=p(1-p)^{10-1}=(0.2)(0.8)^9\approx 0.027$
3	$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-\big(P(X=1)+P(X=2)\big)$ $=1-\big((0.2)(0.8)^0+(0.2)(0.8)^1\big)$ $=1-0.36=0.64$
4	$P(2<X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$ $=(0.2)(0.8)^2+(0.2)(0.8)^3+(0.2)(0.8)^4$ $=(0.2)(0.8)^2(1+0.8+(0.8)^2)$ $=0.2(0.64)(2.44)\approx 0.312$
5	$P(X<2)=P(X=1)=(0.2)(0.8)^0=0.2$

6	$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$ $= (0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1 + (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^3$ ≈ 0.590 حلّ آخر: $P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 1 - (0.8)^4 \approx 0.590$
7	$P(1 \leq X < 2) = P(X = 1) = (0.2)(0.8)^0 = 0.2$
8	$P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$ $= (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^3 + (0.2)(0.8)^4 + (0.2)(0.8)^5$ ≈ 0.378
9	إذا كان X عدد مرات إلقاء الحجر حتى ظهور 7 لأول مرة، فإن: $X \sim Geo\left(\frac{1}{8}\right)$ $P(X = 6) = \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^5 = 0.064$
10	إذا كان X عدد مرات الإطلاق حتى أول إصابة، فإن: $X \sim Geo(0.7)$ $P(X = 10) = (0.7)(0.3)^9 \approx 0.00001378 = 1.378 \times 10^{-5}$
11	إذا كان X عدد الخنافس التي نجمعها حتى نحصل على أول خنفساء برتقالية، فإن: $X \sim Geo\left(\frac{1}{12}\right)$ $P(X = 20) = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right)^{19} \approx 0.016$
12	إذا كان X عدد المرضى الذين سيُعطون الدواء حتى تظهر أول أعراضٍ جانبية، فإن: $X \sim Geo\left(\frac{1}{4}\right)$ $P(X = 10) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 0.019$

13	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$ $=1-\left(\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$ $=1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)=1-\frac{37}{64}=\frac{27}{64}$ حلّ آخر: $P(X>3)=\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$
14	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ إذن، يتوقع تناول 4 مرضى لهذا الدواء حتى ظهور أول إصابة بأعراض الدواء الجانبية.
15	$P(X=2)=\binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8\approx 0.233$
16	$P(X\ge 9)=P(X=9)+P(X=10)$ $=\binom{10}{9}(0.3)^9(0.7)^1+\binom{10}{10}(0.3)^{10}(0.7)^0\approx 0.000144\approx 0.000$
17	$P(X\le 8)=1-P(X>8)=1-\left(P(X=9)+P(X=10)\right)\approx 0.99985\approx 1$
18	$P(1<X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8+\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7+\binom{10}{4}(0.3)^4(0.7)^6$ $\approx 0.2334+0.2668+0.2001\approx 0.700$
19	$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)$ $=1-\left(\binom{10}{0}(0.3)^0(0.7)^{10}+\binom{10}{1}(0.3)^1(0.7)^9\right)$ $\approx 1-(0.0282+0.1211)\approx 0.851$

20	$P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ $=\binom{10}{0}(0.3)^0(0.7)^{10}+\binom{10}{1}(0.3)^1(0.7)^9+\binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8$ $+\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7$ $\approx 0.0282+0.1211+0.2334+0.2668\approx 0.650$
21	$P(0\le X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{10}{0}(0.3)^0(0.7)^{10}+\binom{10}{1}(0.3)^1(0.7)^9+\binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8$ $\approx 0.0282+0.1211+0.2334\approx 0.383$
22	$P(3\le X\le 6)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$ $=\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7+\binom{10}{4}(0.3)^4(0.7)^6+\binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5$ $+\binom{10}{6}(0.3)^6(0.7)^4$ $\approx 0.0.2668+0.2001+0.1029+0.0368\approx 0.607$
23	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.3}=\frac{10}{3}$
24	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$
25	$E(X)=np=(5)(0.1)=0.5$ $Var(X)=np(1-p)=(5)(0.1)(0.9)=0.45$
26	$E(X)=np=(20)\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{15}{2}=7.5$ $Var(X)=np(1-p)=(20)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{75}{16}$

27	إذا كان X يدل على عدد الأعداد الزوجية التي ستظهر، فإن: $X \sim B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ حيث أن احتمال النجاح كل مرة هو p حيث: $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(X = 5) = \binom{9}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 126\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{126}{512} = \frac{63}{256} \approx 0.246$
28	إذا كان X يدل على عدد المرات التي يواجه الطيار فيها صعوبة في الرؤيا، فإن: $X \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$ $P(X = 3) = \binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{17} \approx 0.134$
29	$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\big)$ $= 1 - \left(\binom{20}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{20} + \binom{20}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{19} + \binom{20}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{18}\right)$ ≈ 0.909
30	$P(X = 20) = \binom{20}{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^{20}$
31	$E(X) = np = (20)\left(\frac{1}{4}\right) = 5$ إذن، يتوقع أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤيا 5 مرات.

32	$E(X) = 1.4 \Rightarrow np = 1.4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $Var(X) = 1.12 \Rightarrow np(1-p) = 1.12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $\Rightarrow \frac{np(1-p)}{np} = \frac{1.12}{1.4} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5 - 5p = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{5}, \quad n = 7$ $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) = \binom{7}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^6\left(\frac{4}{5}\right)^1 + \binom{7}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7\left(\frac{4}{5}\right)^0$ $= 28\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \left(\frac{1}{5}\right)^7 = 29\left(\frac{1}{5}\right)^7 = \frac{29}{78125} \approx 0.0003712$
33	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{4}{3} \Rightarrow p = \frac{3}{4}$
34	$P(X = 10) = P(X = 9)$ $\binom{21}{10}p^{10}(1-p)^{11} = \binom{21}{9}p^9(1-p)^{12}$ بقسمة الطرفين على $p^9(1-p)^{11}$ (بافتراض أنّ $p \neq 0, p \neq 1$) ينتج أن: $\binom{21}{10}p = \binom{21}{9}(1-p)$ $\frac{21!}{11!\,10!}p = \frac{21!}{12!\,9!}(1-p) \Rightarrow 12p = 10(1-p) \Rightarrow 6p = 5 - 5p \Rightarrow p = \frac{5}{11}$
35	إذا كان X يدل على عدد الأشخاص الذين يشترون المنتج، فإن: $X \sim B(10, 0.1)$ $P(X = 10) = \binom{10}{10}(0.1)^{10}(0.9)^0 = (0.1)^{10} = 10^{-10}$
36	ليكن Rعائد المبيعات، إذن: $R = 10X$ $P(R > 80) = P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10)$ $= \binom{10}{9}(0.1)^9(0.9)^1 + \binom{10}{10}(0.1)^{10}(0.9)^0$ $= (0.1)^{10}(10 \times 9 + 1) = 91 \times 10^{-10}$

37	X متغير عشوائي هندسي. $\Rightarrow P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$ $\Rightarrow P(X=3)=\frac{5}{11}\left(1-\frac{5}{11}\right)^2=\frac{180}{1331}$ أخطأت لانا في الأسّ الذي وضعته فوق القوس، فقاعدة حساب احتمال المتغير العشوائي الهندسي تحوي $(x-1)$ في الأسّ وليس x (أي المفروض أقل من قيمة x بواحد، وليس قيمة x المطلوبة ذاتها).
38	إذا كان X يدل على عدد مرات إرسال الرسالة إلى حين الرد عليها لأول مرة، فإن: $X\sim Geo(p)$ $P(X=2)=p(1-p)^1=0.21 \Rightarrow p^2-p+0.21=0$ $\Rightarrow (p-0.3)(p-0.7)=0$ $\Rightarrow p=0.3\ \ ,\text{or}\ \ p=0.7$ لكن احتمال الرد على الاستبانة في المرة الأولى أكبر من0.5 ، إذن $p=0.7$ $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{7}{10}}=\frac{10}{7}$
39	ليكن X عدد الطلبة المولودين في شهر آذار، $X\sim B\left(25,\frac{31}{365}\right)=B(25,0.085)$ وذلك لأن احتمال النجاح في كل مرة هو: $p=\frac{31}{365}\approx 0.085$ $P(X=1)=\binom{25}{1}(0.085)^1(0.915)^{24}\approx 0.252$
40	$P(X=3)=\binom{25}{3}(0.085)^3(0.915)^{22}\approx 0.200$
41	$\mu=E(X)=np=30(0.1)=3$ $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{30(0.1)(0.9)}=\sqrt{2.7}\approx 1.643$ $P(\mu\le X<\mu+\sigma)=P(3\le X<4.693)$ $=P(X=3)+P(X=4)$ $=\binom{30}{3}(0.1)^3(0.9)^{27}+\binom{30}{4}(0.1)^4(0.9)^{26}$ $=0.2361+0.1771\approx 0.413$

الدرس الثاني: التوزيع الطبيعي

مسألة اليوم صفحة 176	
ليكن T الزمن الذي تستغرقه البطارية قبل نفادها $T \sim N(36, 5^2)$ $P(T \geq 27) = P\left(z \geq \frac{27-36}{5}\right) = P(z \geq -1.8) = P(z < 1.8) = 0.9641$	
أتحقق من فهمي صفحة 180	
a	النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي 50% وذلك من خواص منحنى التوزيع الطبيعي (تماثل البيانات حول الوسط الحسابي)
b	النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68% وذلك بالاستناد للقاعدة التجريبية مباشرة.
c	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي $\frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$ ، (أو $34\% + 13.5\% = 47.5\%$)
d	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي: $\frac{1}{2}(99.7\%) + \frac{1}{2}(95\%) = 97.35\%$
أتحقق من فهمي صفحة 182	
a	$P(X > 30) = P(X > \mu) = 0.5$
b	$P(29.6 < X < 30.4) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$
c	$P(29.2 < X < 30) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu) = \frac{1}{2}(95\%) = 47.5\% = 0.475$

d	$P(29.2 < X < 30.4) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ $= \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.68) = 0.815$
	أتحقق من فهمي صفحة 185
a	$P(Z < 1.5) = 0.9332$
b	$P(Z > 0.61) = 1 - P(Z < 0.61) = 1 - 0.7291 = 0.2709$
c	$P(Z < -0.43) = 1 - P(Z < 0.43) = 1 - 0.6664 = 0.3336$
d	$P(Z > -3.23) = P(Z < 3.23) = 0.9994$
e	$P(-1.4 < Z < 2.07) = P(Z < 2.07) - P(Z < -1.4)$ $= P(Z < 2.07) - \left(1 - P(Z < 1.4)\right)$ $= P(Z < 2.07) + P(Z < 1.4) - 1$ $= 0.9808 + 0.9192 - 1 = 0.9000$
	أتحقق من فهمي صفحة 187
a	$P(X < -2) = P\left(Z < \frac{-2-7}{3}\right) = P(Z < -3)$ $= 1 - P(Z < 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$
b	$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-7}{3}\right) = P(Z > 1)$ $= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

c	$P(4 < X < 13) = P\left(\frac{4-7}{3} < Z < \frac{13-7}{3}\right) = P(-1 < Z < 2)$ $= P(Z < 2) - P(Z < -1)$ $= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1))$ $= P(Z < 2) + P(Z < 1) - 1$ $= 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185$
	أتحقق من فهمي صفحة 188
a	$P(X < 162) = P\left(Z < \frac{162-165}{5}\right) = P(Z < -0.6)$ $= 1 - P(Z < 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$
b	$P(X > 171) = P\left(Z > \frac{171-165}{5}\right) = P(Z > 1.2)$ $= 1 - P(Z < 1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$
c	$P(162 < X < 171) = P\left(\frac{162-165}{5} < Z < \frac{171-165}{5}\right)$ $= P(-0.6 < Z < 1.2)$ $= P(Z < 1.2) - P(Z < -0.6)$ $= P(Z < 1.2) - (1 - P(Z < 0.6))$ $= P(Z < 1.2) + P(Z < 0.6) - 1$ $= 0.8849 + 0.7257 - 1 = 0.6106$
	أتحقق من فهمي صفحة 192
a	$P(X < x) = 0.9877 \Rightarrow P(Z < z) = 0.9877$ $\Rightarrow z = 2.24 \Rightarrow \frac{x+3}{4} = 2.24 \Rightarrow x = 5.96$

b	$P(X < x) = 0.31 \Rightarrow P(Z < z) = 0.31$ الاحتمال المعطى (0.31) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة $\Rightarrow P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$ $0.31 = 1 - P(Z < z) \Rightarrow P(Z < z) = 0.69 \Rightarrow z = 0.49$ إذن، قيمة z التي تقابل الاحتمال 0.31 هي -0.49 $\Rightarrow \frac{x+3}{4} = -0.49 \Rightarrow x = -4.96$
c	$P(X > x) = 0.9738 \Rightarrow P(Z > z) = 0.9738$ الاحتمال المعطى (0.9738) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.9738 \Rightarrow P(Z < z) = 0.9738 \Rightarrow z = 1.94$ إذن، قيمة z التي تقابل الاحتمال $P(Z > z) = 0.9738$ هي -1.94 $\Rightarrow \frac{x+3}{4} = -1.94 \Rightarrow x = -10.76$
d	$P(X > x) = 0.2 \Rightarrow P(Z > z) = 0.2$ الاحتمال المعطى (0.2) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2 = 0.8 \Rightarrow z = 0.84$ $\Rightarrow \frac{x+3}{4} = 0.84 \Rightarrow x = 0.36$

أتحقق من فهمي صفحة 194

$P(X > 4.8) = 0.03 \Rightarrow P(Z > z) = 0.03$

الاحتمال المعطى (0.03) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5،

إذن: z موجبة

$\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.03 = 0.97$

$\Rightarrow z = 1.88 \Rightarrow \frac{4.8-4.5}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = \frac{0.3}{1.88} \approx 0.16$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 194

1	النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي هي 50% وذلك من خواص منحنى التوزيع الطبيعي (تماثل البيانات حول الوسط الحسابي)
2	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد هي $\frac{1}{2}(68\%) = 34\%$

3	النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يقل عن انحرافين معياريين هي $50\% - 47.5\% = 2.5\%$
4	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية هي: $\frac{1}{2}(95\%) + \frac{1}{2}(99.7\%) = 97.35\%$
5	$P(X < 50) = 0.5$
6	$P(46 < X < 54) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$
7	$P(42 < X < 62) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 3\sigma)$ $= \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.997) = 0.9735$
8	$\mu = 2.5 \text{ mm}$ $2.7 = \mu + 2\sigma \Rightarrow 2.7 = 2.5 + 2\sigma \Rightarrow \sigma = 0.1 \text{ mm}$
9	النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قطر كل منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين هي $\frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$
10	نعلم أن 68% تقريبًا من البيانات في التوزيع الطبيعي تقع بين $\mu - \sigma$، و $\mu + \sigma$ ، فإذن: $107 = \mu + \sigma \Rightarrow 107 = 100 + \sigma \Rightarrow \sigma = 7 \Rightarrow \sigma^2 = 49$
11	$P(Z < 0.43) = 0.6664$
12	$P(Z > 1.08) = 1 - P(Z < 1.08) = 1 - 0.8599 = 0.1401$
13	$P(Z < -2.03) = 1 - P(Z < 2.03) = 1 - 0.9788 = 0.0212$
14	$P(Z > 2.2) = 1 - P(Z < 2.2) = 1 - 0.9861 = 0.0139$

15	$P(-0.72 < Z < 0.72) = P(Z < 0.72) - P(Z < -0.72)$ $= P(Z < 0.72) - (1 - P(Z < 0.72))$ $= 2P(Z < 0.72) - 1$ $= 2(0.7642) - 1 = 0.5284$
16	$P(1.5 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5)$ $= 0.9938 - 0.9332 = 0.0606$
17	$P(-0.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -0.5)$ $= P(Z < 1.5) - (1 - P(Z < 0.5))$ $= P(Z < 1.5) + P(Z < 0.5) - 1$ $= 0.9332 + 0.6915 - 1 = 0.6247$
18	$P(-2.25 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -2.25)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 2.25))$ $= P(Z < 0) + P(Z < 2.25) - 1$ $= 0.5 + 0.9878 - 1 = 0.4878$
19	$P(Z < z) = 0.7642$ الاحتمال المعطى (0.7642) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow z = 0.72$
20	$P(Z > z) = 0.372$ الاحتمال المعطى (0.372) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.372 = 0.628 \Rightarrow z = 0.32$

21	$P(Z > z) = 0.8531$ الاحتمال المعطى (0.8531) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة $\Rightarrow 0.8531 = P(Z > -z) = P(Z < z) \Rightarrow z = 1.05$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال $P(Z > z) = 0.8531$ هي -1.05
22	$P(X < 2) = P\left(Z < \frac{2+3}{5}\right) = P(Z < 1) = 0.8413$
23	$P(X > 4.5) = P\left(Z > \frac{4.5+3}{5}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$ $= 1 - 0.9332 = 0.0668$
24	$P(-5 < X < -3) = P\left(\frac{-5+3}{5} < Z < \frac{-3+3}{5}\right) = P(-0.4 < Z < 0)$ $= P(Z < 0) - P(Z < -0.4)$ $= P(Z < 0) - \left(1 - P(Z < 0.4)\right)$ $= P(Z < 0) + P(Z < 0.4) - 1$ $= 0.5 + 0.6554 - 1 = 0.1554$
25	$P(X < x) = 0.99 \Rightarrow P(Z < z) = 0.99$ الاحتمال المعطى (0.99) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة $z = 2.32$ $\frac{x - 30}{10} = 2.32 \Rightarrow x = 53.2$

26	$P(X > x) = P(Z > z) = 0.1949$ الاحتمال المعطى (0.1949) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.1949 = 0.8051$ $\Rightarrow z = 0.86$ $\Rightarrow \dfrac{x - 30}{10} = 0.86 \Rightarrow x = 38.6$
27	$P(X < x) = 0.35 \Rightarrow P(Z < z) = 0.35$ الاحتمال المعطى (0.35) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة $\Rightarrow P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 0.35$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.65 \Rightarrow z = 0.38$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال $P(Z < z) = 0.35$ هي-0.38 $\Rightarrow \dfrac{x - 30}{10} = -0.38 \Rightarrow x = 26.2$
28	$P(X > x) = 0.05 \Rightarrow P(Z > z) = 0.05$ الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.05 = 0.95 \Rightarrow z = 1.64$ $\Rightarrow \dfrac{x - 30}{10} = 1.64 \Rightarrow x = 46.4$
29	$P(X > 175) = P\left(Z > \dfrac{175 - 185}{4}\right) = P(Z > -2.5) = P(Z < 2.5)$ $= 0.9938$

30	$P(180 < X < 190) = P\left(\frac{180-185}{4} < Z < \frac{190-185}{4}\right)$ $= P(-1.25 < Z < 1.25)$ $= P(Z < 1.25) - P(Z < -1.25) = P(Z < 1.25) - (1 - P(Z < 1.25))$ $= 2P(Z < 1.25) - 1 = 2(0.8944) - 1 = 0.7888$
31	$P(X > 195) = P\left(Z > \frac{195-185}{4}\right) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z < 2.5)$ $= 1 - 0.9938 = 0.0062$ إذا كان عدد اللاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm هو N، فإنّ: $N = 2000 \times 0.0062 = 12.4 \approx 12$
32	$P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-6}{2}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$ $= 1 - 0.9332 = 0.0668$
33	$P(X < 224) = P\left(Z < \frac{224-232}{5}\right) = P(Z < -1.6) = 1 - P(Z < 1.6)$ $= 1 - 0.9452 = 0.0548$
34	$P(232 < X < x) = P\left(\frac{232-232}{5} < Z < z\right) = P(0 < Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < 0) = 0.2$ $\Rightarrow P(Z < z) - 0.5 = 0.2$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.7$ الاحتمال المعطى (0.7) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow z = 0.52 \Rightarrow \frac{x-232}{5} = 0.52 \Rightarrow x = 234.6$ g

35	$P(X > 47) = 0.11 \Rightarrow P\left(Z > \frac{47-\mu}{1.3}\right) = 0.11$ نفرض أن $z = \frac{47-\mu}{1.3}$ ، فيكون : $P(Z > z) = 0.11$ الاحتمال المعطى (0.11) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.11 = 0.89$ $\Rightarrow z = 1.22 \Rightarrow \frac{47-\mu}{1.3} = 1.22 \Rightarrow \mu = 45.41$ إذن: الوسط الحسابي لأطوال أقطار الإطارات هو: 45.41 cm
36	$P(x > 48) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > \frac{48-43}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5}{\sigma}\right) = 0.2$ نفرض أن $z = \frac{5}{\sigma}$ ، فيكون : $P(Z > z) = 0.2$ الاحتمال المعطى (0.2) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.2 = 0.8$ $\Rightarrow z = 0.84 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 0.84 \Rightarrow \sigma = \frac{5}{0.84} \approx 5.95$
37	بما أن $\sigma^2 = \mu$، فإن: $\sigma = \mu \quad or \quad \sigma = -\mu$ الحالة الأولى: إذا كانت $\sigma = \mu$ $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow 2 = \frac{1-\mu}{\mu} \Rightarrow 2\mu = 1 - \mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}$ الحالة الأولى: إذا كانت $\sigma = -\mu$ $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow 2 = \frac{1-\mu}{-\mu} \Rightarrow -2\mu = 1 - \mu \Rightarrow \mu = -1$ إذن، يوجد قيمتان لـ μ هما: $\frac{1}{3}, -1$

38	$1 = \dfrac{10-\mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 10 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$ $-2 = \dfrac{4-\mu}{\sigma} \Rightarrow -2\sigma = 4 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$ $(1)-(2): 3\sigma = 6 \Rightarrow \sigma = 2 \quad , \quad \mu = 8$
39	$P(X > 100) = P\left(Z > \dfrac{100-90}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228$ إذا كان عدد السيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة هو N، فإنّ: $N = 1000(0.0228) = 22.8 \approx 23$
40	$P(X \leq 55) = P\left(Z \leq \dfrac{55-60}{4}\right) = P(Z \leq -1.25)$ $= 1 - P(Z < 1.25)$ $= 1 - 0.8944 = 0.1056$ إذا كان عدد البيض صغير الحجم من بين 5000 هو N، فإنّ: $N = 5000(0.1056) = 528$
41	تقع 95% من البيانات بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ (حسب القاعدة التجريبية)، وهذا يعني الفترة من 5.8 إلى 7 وليس الفترة التي ذكرتها عبير. الخطأ الذي ارتكبته عبير، هو أنها اعتبرت $\sigma = 0.09$ والصواب هو أن $\sigma = \sqrt{0.09} = 0.3$

42	$P(X < 15) = P\left(Z < \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0.1469$ نفرض أن $z = \frac{15-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z < z) = 0.1469$ الاحتمال المعطى (0.1469) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z < -z) = P(Z > z)$ $0.1469 \quad = 1 - P(Z < z)$ $P(Z < z) = 1 - 0.1469 = 0.8531 \Rightarrow z = 1.05$ إذن قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي -1.05 $\Rightarrow \frac{15-\mu}{\sigma} = -1.05 \Rightarrow 15 - \mu = -1.05\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $P(X > 35) = P\left(Z > \frac{35-\mu}{\sigma}\right) = 0.025$ نفرض أن $z = \frac{35-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.025$ الاحتمال المعطى (0.025) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.025 = 0.975$ $\Rightarrow z = 1.96 \Rightarrow \frac{35-\mu}{\sigma} = 1.96 \Rightarrow 35 - \mu = 1.96\sigma \ldots\ldots\ldots (2)$ $(2) - (1): \quad 20 = 3.01\sigma \Rightarrow \sigma \approx 6.64 \quad , \ \mu \approx 22$

43	$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90-\mu}{\sigma}\right) = \frac{10000}{100000} = 0.1$ نفرض أن $z = \frac{90-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.1$ الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.1 = 0.9$ $\Rightarrow z = 1.28 \Rightarrow \frac{90-\mu}{\sigma} = 1.28 \Rightarrow 90 - \mu = 1.28\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $P(X > 95) = P\left(Z > \frac{95-\mu}{\sigma}\right) = \frac{5000}{100000} = 0.05$ نفرض أن $z = \frac{95-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.05$ الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z)$ $= 1 - 0.05 = 0.95$ $\Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow \frac{95-\mu}{\sigma} = 1.64 \Rightarrow 95 - \mu = 1.64\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $(2) - (1):\ 5 = 0.36\sigma \Rightarrow \sigma \approx 13.89 \quad , \quad \mu \approx 72.22$

44	$P(X > 13) = P\left(Z > \frac{13-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$ نفرض أن $\frac{13-\mu}{\sigma} = z$ فيكون ، $P(Z > z) = 0.05$ الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.05 = 0.95$ $\Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow \frac{13-\mu}{\sigma} = 1.64 \Rightarrow 13 - \mu = 1.64\sigma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$ $P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0.12$ نفرض أن $\frac{10-\mu}{\sigma} = z$ ، فيكون $P(Z < z) = 0.12$ الاحتمال المعطى (0.12) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$ $0.12 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.88 \Rightarrow z = 1.17$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى $P(Z < z) = 0.12$ هي $z = -1.17$ $\Rightarrow \frac{10-\mu}{\sigma} = -1.17 \Rightarrow 10 - \mu = -1.17\sigma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$ $(1) - (2)$: $3 = 2.81\sigma \Rightarrow \sigma \approx 1.07 \quad , \quad \mu \approx 11.25$
45	$P(79 - a \leq X \leq 79 + b) = 0.6463$ (معطى) $\Rightarrow P(X \leq 79 + b) - P(X \leq 79 - a) = 0.6463 \dots\dots\dots\dots (1)$ ونعلم أنّ: $P(X \geq 79 + b) = 2P(X \leq 79 - a)$ $\Rightarrow 1 - P(X < 79 + b) = 2P(X \leq 79 - a)$ $\Rightarrow P(X < 79 + b) + 2P(X \leq 79 - a) = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$ $(2) - (1) \Rightarrow 3P(X \leq 79 - a) = 0.3537$ $\Rightarrow P(X \leq 79 - a) = 0.1179$ إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي: $P(X \leq 79 - a) = 0.1179$

46	وجدنا في السؤال السابق أن: $P(X \leq 79 - a) = 0.1179$ وبذلك فإن المساحة إلى يسار القيمة $(79 + b)$ تساوي $0.7642 = 0.6463 + 0.1179$ $\Rightarrow P\left(Z < \frac{79 + b - 79}{12}\right) = 0.7642$ $\Rightarrow P\left(Z < \frac{b}{12}\right) = 0.7642$ نفرض أن $z = \frac{b}{12}$ ، فيكون: $P(Z < z) = 0.7642$ $\Rightarrow z = 0.72 \Rightarrow \frac{b}{12} = 0.72 \Rightarrow b = 8.64$

اختبار نهاية الوحدة السادسة

1	a
2	b
3	c
4	b
5	c
6	b
7	$P(X=4)=0.3(0.7)^3\approx 0.103$
8	$P(3<X\leq 5)=P(X=4)+P(X=5)=0.3(0.7)^3+0.3(0.7)^4\approx 0.175$
9	$P(X>4)=1-P(X\leq 4)$ $=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\big)$ $=1-(0.3(0.7)^0+0.3(0.7)^1+0.3(0.7)^2+0.3(0.7)^3)$ $\approx 1-(0.3+0.21+0.147+0.1029)=0.2401$ أو حسب القاعدة: $P(X>x)=(1-p)^x$: $P(X>4)=(1-0.3)^4=(0.7)^4=0.2401$
10	$P(5\leq X\leq 7)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$ $=0.3(0.7)^4+0.3(0.7)^5+0.3(0.7)^6$ $=0.3(0.7)^4(1+0.7+0.49)\approx 0.158$
11	$P(X=3)=\binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^7\approx 0.215$
12	$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\big)$ $=1-\left(\binom{10}{0}(0.4)^0(0.6)^{10}+\binom{10}{1}(0.4)^1(0.6)^9+\binom{10}{2}(0.4)^2(0.6)^8\right)$ $\approx 1-(0.0060+0.0403+0.1209)\approx 0.833$

13	$P(7 \leq X < 9) = P(X = 7) + P(X = 8)$ $= \binom{10}{7}(0.4)^7(0.6)^3 + \binom{10}{8}(0.4)^8(0.6)^2$ $\approx 0.0425 + 0.0106 \approx 0.053$
14	$P(X \leq 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10}(0.4)^{10}(0.6)^0$ $= 1 - (0.4)^{10} \approx 0.999895$
15	$P(X > 8.5) = P\left(Z > \frac{8.5 - 4}{3}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$ $= 1 - 0.9332 = 0.0668$
16	$P(-2 < X < 7) = P\left(\frac{-2 - 4}{3} < Z < \frac{7 - 4}{3}\right) = P(-2 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < -2) = P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2))$ $= P(Z < 1) + P(Z < 2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185$
17	$P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10 - 4}{3}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$
18	$P(5.5 < X < 8.5) = P\left(\frac{5.5 - 4}{3} < Z < \frac{8.5 - 4}{3}\right) = P(0.5 < Z < 1.5)$ $= P(Z < 1.5) - P(Z < 0.5) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$
19	$P(X < 1) = P\left(Z < \frac{1 - 4}{3}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1)$ $= 1 - 0.8413 = 0.1587$
20	$P(X > -3) = P\left(Z > \frac{-3 - 4}{3}\right) = P(Z > -2.33) = P(Z < 2.33) = 0.9901$
21	ليكن X عدد المصابيح التالفة ضمن المصابيح المئة. $\Rightarrow X \sim B(100, 0.17)$ $E(X) = np = 100(0.17) = 17$

22	ليكن X عدد المقابلات التي تجرى حتى مصادفة أول طالب يمارس الرياضة. $\Rightarrow X \sim Geo(0.2)$ $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5$ إذن، يتوقع مقابلة 4 طلاب قبل مصادفة أوَّل طالب يمارس التمرينات الصباحية.
23	$P(Z > z) = 0.1$ الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.1 = 0.9 \Rightarrow z = 1.28$
24	$P(Z < z) = 0.9671$ الاحتمال المعطى (0.9671) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 1.84$
25	$P(-z < Z < z) = 0.9464$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.9464$ $\Rightarrow P(Z < z) - \left(1 - P(Z < z)\right) = 0.9464$ $\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.9464$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9732$ الاحتمال المعطى (0.9732) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 1.93$
26	$P(Z > z) = 0.9222$ الاحتمال المعطى (0.9222) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9222 \Rightarrow z = 1.42$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال $P(Z > z) = 0.9222$ هي $z = -1.42$

27	$P(X > 181) = P\left(Z > \frac{181-171}{10}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$ $= 1 - 0.8413 = 0.1587$
28	$P\big(X < 171 - 2(10)\big) = P(X < 151) = P\left(Z < \frac{151-171}{10}\right) = P(Z < -2)$ $= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$ أو نكتب: $P(X < \mu - 2\sigma) = P\left(Z < \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma}\right)$ $= P(Z < -2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
29	$P(X > 171 + 10) = P(X > 181) = P\left(Z > \frac{181-171}{10}\right)$ $= P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ أو نكتب: $P(X > \mu + \sigma) = P\left(Z > \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(Z > 1) = 0.1587$
30	$P(\lvert X - \mu \rvert \le \sigma) = P(-\sigma \le X - \mu \le \sigma) = P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$ $= P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(-1 \le Z \le 1)$ $= P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - \big(1 - P(Z \le 1)\big)$ $= 2P(Z \le 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$ ملحوظة: يمكن حل الأسئلة من 27 إلى 30 باستخدام القاعدة التجريبية بدلًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

31	$P(X > 6) = \frac{1578}{10000} \Rightarrow P\left(Z > \frac{6-5}{\sigma}\right) = 0.1578 \Rightarrow P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) = 0.1578$ نفرض أن $z = \frac{1}{\sigma}$، فيكون $P(Z > z) = 0.1578$ الاحتمال المعطى (0.1578) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.1578 = 0.8422$ $\Rightarrow z = 1 \Rightarrow \sigma = 1$
32	$X \sim B(n, p)$ $E(X) = 2.5 \Rightarrow np = 2.5 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$ $Var(X) = 1.875 \Rightarrow np(1-p) = 1.875 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$ $\frac{(2)}{(1)}: 1 - p = \frac{1.875}{2.5} = 0.75 \Rightarrow p = 0.25 \quad , \quad n = \frac{2.5}{0.25} = 10$ $\Rightarrow P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$ $= \binom{10}{8}(0.25)^8(0.75)^2 + \binom{10}{9}(0.25)^9(0.75)^1 + \binom{10}{10}(0.25)^{10}(0.75)^0$ $\approx 0.00038624 + 0.00002861 + 0.00000095 \approx 0.0004158$
33	ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على علامات الاختبار، ولتكن x هي العلامة المطلوبة. $P(X > x) = 0.10 \Rightarrow P(X < x) = 0.90 \Rightarrow P(Z < z) = 0.90$ بما أن المساحة على يسار z أكبر من 0.5 فإن z موجبة $\Rightarrow z = 1.28 \Rightarrow \frac{x - 75}{8} = 1.28 \Rightarrow x = 85.24$ إذن، أقل علامة تصنف ضمن أعلى 10% من العلامات هي 86 قُرّبت العلامة إلى أعلى لأن المساحة على يسار 85 أقل من 0.9
34	ليكن عدد المتقدمين الذين يمكنهم احراز 93 علامة أو أكثر هو N، فإن N تساوي $P(X \geq 93)$ مضروبًا في عدد جميع المتقدمين للاختبار. $P(X \geq 93) = P\left(Z > \frac{93 - 75}{8}\right) = P(Z > 2.25) = 1 - P(Z < 2.25)$ $= 1 - 0.9878 = 0.0122$ $N = 5000 \times 0.0122 = 61$

35	$P(70 \leq X \leq 85) = P\left(\frac{70-75}{8} < Z < \frac{85-70}{8}\right)$ $= P(-0.63 < Z < 1.88)$ $= P(Z < 1.88) - P(Z < -0.63)$ $= P(Z < 1.88) - (1 - P(Z < 0.63)$ $= P(Z < 1.88) + P(Z < 0.63) - 1$ $= 0.9699 + 0.7357 - 1 = 0.7056$