



المركز الوطني
لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum
Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات التمارين

منهاجي
متعة التعليم الهادف



الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor @ feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo



إجابات كتاب التمارين- مادة الرياضيات- الصف الثاني عشر الأكاديمي ف2 (طبعة 2025)

الوحدة الخامسة: التكامل

أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد تكاملات غير محدودة لاقتدرات القوة صفحة 6

1	$\int 3x^2 dx = x^3 + C$
2	$\int (2 + x^3 + 5x^{-2}) dx = 2x + \frac{1}{4}x^4 - 5x^{-1} + C = 2x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{x} + C$
3	$\int (2x^7 - 4x^{-4}) dx = \frac{1}{4}x^8 + \frac{4}{3}x^{-3} + C = \frac{1}{4}x^8 + \frac{4}{3x^3} + C$
4	$\int (x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + C$
5	$\int (4x^4 - 4x^2 + x) dx = \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
6	$\int (x^2 + 7 - 2x) dx = \frac{1}{3}x^3 + 7x - x^2 + C$
7	$\int (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$
8	$\int (2x + 5)^5 dx = \frac{1}{12}(2x + 5)^6 + C$
9	$\int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} dx = \int (x-1) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$

إيجاد تكاملات محدودة لاقتدرات القوة صفحة 7

10	$\int_{-2}^3 x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \Big _{-2}^3 = \frac{1}{6}(729 - 64) = \frac{665}{6}$
11	$\int_1^2 (2x^{-3} + 3x) dx = \left(-x^{-2} + \frac{3}{2}x^2\right) \Big _1^2 = \left(-\frac{1}{4} + 6\right) - \left(-1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$
12	$\int_1^4 \frac{2 + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int_1^4 \left(2x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \left(-2x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right) \Big _1^4$ $= \left(-\frac{1}{2} - 1\right) - (-2 - 2) = \frac{5}{2}$



إيجاد قاعدة اقتران عُلِّمت مشتقته ونقطة تحققه (الشرط الأولي) صفحة 7

$$13 \quad f(x) = \int (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

$$f(0) = 0 + 0 + C$$

$$8 = 0 + C \Rightarrow C = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 8$$

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x صفحة 8

$$14 \quad 2x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$f(1) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow f(x) > 0, \quad 0 < x < 2$$

$$Area = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - 0 = \frac{4}{3}$$

$$15 \quad x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 6, x = 2$$

$$f(3) = 9 - 24 + 12 = -3 \Rightarrow f(x) < 0, \quad 2 < x < 6$$

$$Area = - \int_2^6 f(x) dx = \int_2^6 (-x^2 + 8x - 12) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x \right) \Big|_2^6$$

$$= (-72 + 144 - 72) - \left(-\frac{8}{3} + 16 - 24 \right) = \frac{32}{3}$$

$$16 \quad x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2)(x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = -2, x = -5$$

$$f(-3) = -27 + 36 + 33 - 30 = 12 \Rightarrow f(x) > 0, \quad -5 < x < -2$$

$$f(0) = -30 \Rightarrow f(x) < 0, \quad -2 < x < 3$$

$$Area = \int_{-5}^{-2} f(x) dx + \left(- \int_{-2}^3 f(x) dx \right)$$

$$= \int_{-5}^{-2} (x^3 + 4x^2 - 11x - 30) dx + \int_{-2}^3 (-x^3 - 4x^2 + 11x + 30) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 30x \right) \Big|_{-5}^{-2} + \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 30x \right) \Big|_{-2}^3$$

$$= \frac{863}{6}$$



إيجاد حجم المُجسَّم الناتج من دوران منحنى اقتران حول المحور x صفحة 11

$$V = \pi \int_1^8 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^8 x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$= \frac{3\pi}{5} x^{\frac{5}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3\pi}{5} ((8)^{\frac{5}{3}} - (1)^{\frac{5}{3}}) = \frac{93\pi}{5} = 18.6\pi$$

إذن، حجم المجسم يساوي 18.6π وحدة مكعبة.

الدرس الأول: تكامل اقترانات خاصة

$$1 \quad \int 4e^{-5x} dx = -\frac{4}{5}e^{-5x} + C$$

$$2 \quad \int (\sin 2x - \cos 2x) dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$3 \quad \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

$$4 \quad \int \frac{e^x + 4}{e^{2x}} dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x}) dx = -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$$

$$5 \quad \int (\cot x \csc x - 2e^x) dx = -\csc x - 2e^x + C$$

$$6 \quad \int (3 \cos 3x - \tan^2 x) dx = \int (3 \cos 3x - (\sec^2 x - 1)) dx$$

$$= \sin 3x - \tan x + x + C$$

$$7 \quad \int \cos x (1 + \csc^2 x) dx = \int \cos x \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$$

$$= \int \cos x + \cot x \csc x dx = \sin x - \csc x + C$$

$$8 \quad \int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2} dx = \int \left(x - 1 - \frac{2}{x + 2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \ln|x + 2| + C$$

$$9 \quad \int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

$$10 \quad \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (\sec^2 x + x^{-2}) dx = \tan x - \frac{1}{x} + C$$



11	$\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2} dx = \frac{1}{3} \ln x^3 - 3x^2 + C$
12	$\int \ln e^{\cos x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C$
13	$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C$
14	$\int \frac{3}{2x-1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x-1} dx = \frac{3}{2} \ln 2x-1 + C$
15	$\int \frac{3 - 2 \cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} dx = \int \left(3 \csc^2 \frac{1}{2}x - 2 \cot \frac{1}{2}x \csc \frac{1}{2}x \right) dx$ $= -6 \cot \frac{1}{2}x + 4 \csc \frac{1}{2}x + C$
16	$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4} dx = \ln e^x + 4 \Big _0^1 = \ln(e + 4) - \ln 5 = \ln \frac{e + 4}{5}$
17	$\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln 3x-2 \Big _1^2 = \frac{1}{3} \ln 4 - 0 = \frac{1}{3} \ln 4$
18	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big _0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$
19	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3 \sin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + 6 \sin x \cos x + 9 \sin^2 x) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x + 6 \sin x \cos x + 9 \sin^2 x) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 8 \sin^2 x + 3 \sin 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 4(1 - \cos 2x) + 3 \sin 2x) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (5 - 4 \cos 2x + 3 \sin 2x) dx = \left(5x - 2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x \right) \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi - 2}{4}$
20	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{2} \ln 2$

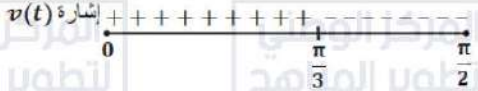


21	$\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4 \sin^2 x \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - (2 \sin x \cos x)^2) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big _0^{\frac{\pi}{16}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$
22	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2 \tan x \sec x + \tan^2 x) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2 \tan x \sec x + \sec^2 x - 1) dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sec^2 x + 2 \tan x \sec x - 1) dx$ $= (2 \tan x + 2 \sec x - x) \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = 2 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2 = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$
23	$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{3x+2} \right) dx = \left(2x - \frac{4}{3} \ln 3x+2 \right) \Big _0^1$ $= 2 - \frac{4}{3} \ln 5 + \frac{4}{3} \ln 2 = 2 + \frac{4}{3} \ln \frac{2}{5}$



24	$\int_1^k \frac{4}{2x-1} dx = 1$ $\Rightarrow 2 \ln 2x-1 \Big _1^k = 1$ $\Rightarrow 2 \ln 2k-1 = 1$ $\Rightarrow 2 \ln(2k-1) = 1$ $\Rightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2}, k > \frac{1}{2} \text{ لأن}$ $\Rightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}} + 1}{2}$		
25	$\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{48}{7}$ $\Rightarrow (e^x - e^{-x}) \Big _0^{\ln a} = \frac{48}{7}$ $\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1 - 1) = \frac{48}{7}$ $\Rightarrow a - \frac{1}{a} - \frac{48}{7} = 0$ $\Rightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0$ $\Rightarrow (7a+1)(a-7) = 0$ $\Rightarrow a = -\frac{1}{7} \text{ (تُرفض) , } a = 7$		
26	$A = \int_0^{\pi} 2\cos^2 \frac{1}{2}x dx = \int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx = (x + \sin x) \Big _0^{\pi} = \pi$		



27	$f(x) = \int (e^{-x} + x^2) dx = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ $f(0) = -1 + C$ $4 = -1 + C \Rightarrow C = 5$ $\Rightarrow f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$
28	$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx = 3 \ln x - 4x + C$ $f(x) = 3 \ln x - 4x + C$ $f(1) = -4 + C$ $0 = -4 + C \Rightarrow C = 4$ $\Rightarrow f(x) = 3 \ln x - 4x + 4$
29	$s(3) - s(0) = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 \frac{-t}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big _0^3 = -\frac{1}{2} \ln 10 \text{ m}$
30	$d = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big _0^3 = \frac{1}{2} \ln 10 \text{ m}$
31	$s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin 3t dt = -2 \cos 3t \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \text{ m}$
32	$6 \sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = 0, \pi \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{3}$  $d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin 3t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6 \sin 3t dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -6 \sin 3t dt$ $= -2 \cos 3t \Big _0^{\frac{\pi}{3}} + 2 \cos 3t \Big _{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + 2 + 0 - 2(-1) = 6 \text{ m}$



عندما $0 \leq t \leq 6$

$$s(t) = \int (8t - t^2) dt = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

$$s(0) = 0 - 0 + C_1$$

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 6$$

عندما $t > 6$

$$s(t) = \int \left(15 - \frac{1}{2}t\right) dt = 15t - \frac{1}{4}t^2 + C_2$$

الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$

$$\text{نحسب } s(6) \text{ من قاعدة الموقع السابقة } 72 = 144 - \frac{216}{3}$$

$$s(6) = 90 - 9 + C_2$$

$$72 = 81 + C_2 \Rightarrow C_2 = -9$$

$$\Rightarrow s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 - 9, t > 6$$

33

$$\Rightarrow s(40) = 15(40) - \frac{1}{4}(1600) - 9 = 191 \text{ m}$$

يُعرض فيما يلي حل لهذا السؤال بطريقة أخرى.

حل آخر:

$$s(40) - s(0) = \int_0^{40} v(t) dt$$

$$\Rightarrow s(40) = s(0) + \int_0^{40} v(t) dt$$

$$= 0 + \int_0^6 (8t - t^2) dt + \int_6^{40} \left(15 - \frac{1}{2}t\right) dt$$

$$= \left(4t^2 - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^6 + \left(15t - \frac{t^2}{4}\right) \Big|_6^{40}$$

$$= \left(4(6^2) - \frac{6^3}{3}\right) - 0 + 15(40) - \frac{40^2}{4} - 15(6) + \frac{6^2}{4}$$

$$= 144 - 72 + 600 - 400 - 90 + 9 = 191 \text{ m}$$



1	$u = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2 + 4} + C$
2	$u = 1 - \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\sin \frac{x}{2}} du$ $\int \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2} dx = \int u^2 \sin \frac{x}{2} \frac{2}{\sin \frac{x}{2}} du = \int 2u^2 du = \frac{2}{3} u^3 + C$ $= \frac{2}{3} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^3 + C$
3	$\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $= \int u^3 \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du = -\frac{1}{4} u^4 + C$ $= -\frac{1}{4} \cot^4 x + C$
4	$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x \sin x^2 dx = \int \frac{1}{2} \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$
5	$u = x + 2 \Rightarrow dx = du, \quad x = u - 2$ $\int x^3 (x + 2)^7 dx = \int (u - 2)^3 u^7 du = \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) du$ $= \frac{1}{11} u^{11} - \frac{3}{5} u^{10} + \frac{4}{3} u^9 - u^8 + C$ $= \frac{1}{11} (x + 2)^{11} - \frac{3}{5} (x + 2)^{10} + \frac{4}{3} (x + 2)^9 - (x + 2)^8 + C$



	$\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x} dx$
6	$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$
	$\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x} dx = \int \frac{1}{2} u du = \frac{1}{4} u^2 + C = \frac{1}{4} (\ln x)^2 + C$
	$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$
7	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} du = 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$
	$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx$
	$u = \ln 4x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{8x}{4x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du$
8	$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2} du$
	$= \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C$
	$= -\frac{1}{2} \cos(\ln 4x^2) + C$



$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du$$

$$\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u du = \int \cos u \cos^2 u du$$

$$= \int \cos u (1 - \sin^2 u) du$$

$$v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{du} = \cos u \Rightarrow \cos u du = dv$$

$$9 \int \cos u (1 - \sin^2 u) du = \int (1 - v^2) dv = v - \frac{1}{3} v^3 + C$$

$$= \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C$$

$$= \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$$

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

$$\int \sec^2 x \cos(\tan x) (1 - \sin^2(\tan x)) dx$$

وبتحويل واحد فقط هو $u = \sin(\tan x)$.

$$u = 4x + 1 \Rightarrow 4dx = du, \quad 4x = u - 1$$

$$x = 20 \Rightarrow u = 81$$

$$x = 6 \Rightarrow u = 25$$

$$10 \int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx = \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du = \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \left(\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{25}^{81} = (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5 \right) = \frac{592}{3}$$

ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض أن $u = \sqrt{4x+1}$

$$u = \sqrt{x-1} \Rightarrow u^2 = x-1 \Rightarrow 2u du = dx$$

$$x = 5 \Rightarrow u = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 1$$

$$11 \int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{2u}{1+u} du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u+1} \right) du$$

$$= (2u - 2 \ln|u+1|) \Big|_1^2 = (4 - 2 \ln 3) - (2 - 2 \ln 2) = 2 + 2 \ln \frac{2}{3}$$

ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض أن $u = 1 + \sqrt{x-1}$



$$u = 1 + \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 2$$

12

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos x} dx &= \int_2^1 \frac{2 \sin x \cos x}{u} \times \frac{du}{-\sin x} = \int_2^1 -\frac{2(u-1)}{u} du \\ &= \int_2^1 \frac{2-2u}{u} du = \int_1^2 \frac{2u-2}{u} du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u}\right) du \\ &= (2u - 2 \ln|u|) \Big|_1^2 = (4 - 2 \ln 2) - (2 - 0) = 2 - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

$$u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$$

$$x = 4 \Rightarrow u = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

13

$$\int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx = \int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} du = \int_2^3 2u^3 du = \frac{1}{2} u^4 \Big|_2^3 = \frac{81}{2} - \frac{16}{2} = \frac{65}{2}$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x du$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

14

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \times \cos^2 x du = \int_0^1 e^u du = e^u \Big|_0^1 = e - 1$$



	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$
	$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$
15	$x = 0 \Rightarrow u = 1$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x} = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 (1 - u^2) \, du$ $= \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^2 - u^4) \, du = \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 \right) \Big _{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{160} \right) = \frac{47}{480}$
	$x\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$ $A = - \int_{-1}^0 f(x) \, dx = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x} \, dx$ $u = 1 + x \Rightarrow dx = du, x = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$
16	$x = -1 \Rightarrow u = 0$ $A = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x} \, dx = \int_0^1 -x\sqrt{u} \, du = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u} \, du$ $= \int_0^1 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right) \, du = \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right) \Big _0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$



$$f(x) = \int 16 \sin x \cos^3 x \, dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$f(x) = \int 16 \sin x \, u^3 \times \frac{du}{-\sin x} = \int -16 u^3 \, du = -4u^4 + C$$
$$= -4\cos^4 x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + C$$

$$0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -4\cos^4 x + 1$$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \, dx$$

$$u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \, du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2 + 5} + C$$

$$f(2) = 3 + C$$

$$1 = 3 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 2$$



$$s(t) = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$19 \quad s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}} du = 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$s(0) = 2 + C$$

$$4 = 2 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$



$$\frac{4}{x^2 + 4x} = \frac{4}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$$

$$A(x+4) + B(x) = 4$$

$$1 \quad x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = -4 \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{4}{x^2 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \ln|x| - \ln|x+4| + C = \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| + C$$

$$\frac{6}{x^2 - 9} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3) + B(x-3) = 6$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 1$$

$$x = -3 \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{6}{x^2 - 9} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x+3| + C = \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

$$\frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 8}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) = x^2 - 3x + 8$$

$$x = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow C = -4$$

$$3 \quad x = 0 \Rightarrow A - 2B - 2C = 8 \Rightarrow \frac{2}{3} - 2B + 8 = 8 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{4}{x+1} + C$$



4

$$\frac{x-10}{x^2-2x-8} = \frac{x-10}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2) + B(x-4) = x-10$$

$$x=4 \Rightarrow A=-1$$

$$x=-2 \Rightarrow B=2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-10}{x^2-2x-8} dx &= \int \left(-\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+2} \right) dx \\ &= -\ln|x-4| + 2\ln|x+2| + C \end{aligned}$$

5

$$\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1} = 1 + \frac{5x-1}{2x^2+x-1} = 1 + \frac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}$$

$$= 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

$$A(2x-1) + B(x+1) = 5x-1$$

$$x=-1 \Rightarrow A=2$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1} dx &= \int \left(1 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2x-1} \right) dx \\ &= x + 2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C \end{aligned}$$

6

$$\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A(x^2+2) + (Bx+C)(x+1) = 2x^2-x+6$$

$$x=-1 \Rightarrow A=3$$

$$x=0 \Rightarrow 2A+C=6 \Rightarrow 6+C=6 \Rightarrow C=0$$

$$x=1 \Rightarrow 3A+2B+2C=7 \Rightarrow 9+2B=7 \Rightarrow B=-1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)} dx &= \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{-x}{x^2+2} \right) dx \\ &= 3\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C \end{aligned}$$



$$\frac{8x + 24}{(x + 1)(x - 3)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

$$A(x - 3)^2 + B(x + 1)(x - 3) + C(x + 1) = 8x + 24$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow C = 12$$

$$7 \quad x = 0 \Rightarrow 9A - 3B + C = 24 \Rightarrow 9 - 3B + 12 = 24 \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{8x + 24}{(x + 1)(x - 3)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{-1}{x - 3} + \frac{12}{(x - 3)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x + 1| - \ln|x - 3| - \frac{12}{x - 3} + C$$

$$= \ln \left| \frac{x + 1}{x - 3} \right| - \frac{12}{x - 3} + C$$

$$\frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{8x}{x^2(x + 1) - (x + 1)} = \frac{8x}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{8x}{(x - 1)(x + 1)^2}$$

$$= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x - 1}$$

$$A(x + 1)(x - 1) + B(x - 1) + C(x + 1)^2 = 8x$$

$$x = -1 \Rightarrow B = 4$$

8

$$x = 1 \Rightarrow C = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow -A - B + C = 0 \Rightarrow -A - 4 + 2 = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$\int \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = \int \left(\frac{-2}{x + 1} + \frac{4}{(x + 1)^2} + \frac{2}{x - 1} \right) dx$$

$$= -2 \ln|x + 1| - \frac{4}{x + 1} + 2 \ln|x - 1| + C = 2 \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| - \frac{4}{x + 1} + C$$



$$\frac{4}{x^3 - 2x^2} = \frac{4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$A(x)(x-2) + B(x-2) + C(x^2) = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow B = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow -A - B + C = 4 \Rightarrow -A + 2 + 1 = 4 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{4}{x^3 - 2x^2} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-2| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{2}{x} + C$$

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x^2) = x-1$$

$$x = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow C = -2$$

$$x = 1 \Rightarrow 2A + 2B + C = 0 \Rightarrow 2A - 2 - 2 = 0 \Rightarrow A = 2$$

$$\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^5 \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x+1} \right) dx$$

$$= \left(2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x+1| \right) \Big|_1^5 = \left(\frac{1}{x} + 2\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right) \Big|_1^5 = 2\ln \frac{5}{3} - \frac{4}{5}$$



$$\frac{4-x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2) + B = 4-x$$

$$x=2 \Rightarrow B=2$$

$$11 \quad x=0 \Rightarrow -2A+B=4 \Rightarrow -2A+2=4 \Rightarrow A=-1$$

$$\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2} dx = \int_7^{12} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= \left(-\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} \right) \Big|_7^{12} = -\ln 10 - \frac{1}{5} + \ln 5 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \ln \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{x^2+8x+15} = \frac{4}{(x+5)(x+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3) + B(x+5) = 4$$

$$x=-5 \Rightarrow A=-2$$

$$x=-3 \Rightarrow B=2$$

$$12 \quad \int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15} dx = \int_1^2 \left(\frac{-2}{x+5} + \frac{2}{x+3} \right) dx$$

$$= (-2 \ln|x+5| + 2 \ln|x+3|) \Big|_1^2 = \left(2 \ln \left| \frac{x+3}{x+5} \right| \right) \Big|_1^2$$

$$= 2 \ln \frac{5}{7} - 2 \ln \frac{2}{3} = 2 \ln \frac{15}{14}$$



$$\frac{10x^2 - 26x + 10}{2x^2 - 5x} = 5 + \frac{-x + 10}{2x^2 - 5x} = 5 + \frac{10 - x}{x(2x - 5)} = 5 + \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 5}$$

$$A(2x - 5) + B(x) = 10 - x$$

$$x = 0 \Rightarrow A = -2$$

13

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow B = 3$$

$$\int_1^2 \frac{10x^2 - 26x + 10}{2x^2 - 5x} dx = \int_1^2 \left(5 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{2x - 5} \right) dx$$

$$= \left(5x - 2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|2x - 5| \right) \Big|_1^2 = 10 - 2 \ln 2 - 5 - \frac{3}{2} \ln 3 = 5 - \ln 12\sqrt{3}$$

$$\frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{(2x-3)^2}$$

$$A(2x-3)^2 + B(x+1)(2x-3) + C(x+1) = 25$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 10$$

14

$$x = 0 \Rightarrow 9A - 3B + C = 25 \Rightarrow 9 - 3B + 10 = 25 \Rightarrow B = -2$$

$$\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} dx = \int_2^5 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2}{2x-3} + \frac{10}{(2x-3)^2} \right) dx$$

$$= \left(\ln|x+1| - \ln|2x-3| - \frac{5}{2x-3} \right) \Big|_2^5 = \left(\ln \left| \frac{x+1}{2x-3} \right| - \frac{5}{2x-3} \right) \Big|_2^5$$

$$= \left(\ln \frac{6}{7} - \frac{5}{7} \right) - \left(\ln 3 - 5 \right) = \frac{30}{7} + \ln \frac{2}{7}$$



$$\frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6} = 1 + \frac{16 - 2x}{x^2 - x - 6} = 1 + \frac{16 - 2x}{(x - 3)(x + 2)} = 1 + \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$$

$$A(x + 2) + B(x - 3) = 16 - 2x$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 2$$

$$15 \quad x = -2 \Rightarrow B = -4$$

$$\int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6} dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{2}{x - 3} + \frac{-4}{x + 2} \right) dx$$

$$= (x + 2 \ln|x - 3| - 4 \ln|x + 2|) \Big|_0^2$$

$$= 2 - 4 \ln 4 - 2 \ln 3 + 4 \ln 2 = 2 - 2 \ln 12$$

$$A = \int_1^2 \frac{4x + 3}{(x + 2)(2x - 1)} dx$$

$$\frac{4x + 3}{(x + 2)(2x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{2x - 1}$$

$$A(2x - 1) + B(x + 2) = 4x + 3$$

$$x = -2 \Rightarrow A = 1$$

$$16 \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2$$

$$A = \int_1^2 \frac{4x + 3}{(x + 2)(2x - 1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{2}{2x - 1} \right) dx$$

$$= (\ln|x + 2| + \ln|2x - 1|) \Big|_1^2$$

$$= (\ln 4 + \ln 3) - (\ln 3 + 0) = \ln 4$$



$$A = \int_2^3 \frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{(x+2)(2x-2)^2} dx$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{(x+2)(2x-2)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{4x^3 - 12x + 8} = \frac{1}{4} + \frac{3x^2 - 4x - 2}{4x^3 - 12x + 8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3x^2 - 4x - 2}{(x+2)(2x-2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-2} + \frac{C}{(2x-2)^2}$$

$$A(2x-2)^2 + B(x+2)(2x-2) + C(x+2) = 3x^2 - 4x - 2$$

$$x = -2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$17 \quad x = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow 4A - 4B + 2C = -2 \Rightarrow 2 - 4B - 2 = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_2^3 \frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{(x+2)(2x-2)^2} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-2} + \frac{-1}{(2x-2)^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|2x-2| + \frac{1}{2(2x-2)} \right) \Big|_2^3$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{4} \ln 4 + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{25}{8}$$



$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx = \int \frac{e^x(u + 1)}{(u^2 + 1)(u - 1)} \times \frac{du}{e^x} = \int \frac{u + 1}{(u^2 + 1)(u - 1)} du$$

$$\frac{u + 1}{(u^2 + 1)(u - 1)} = \frac{Au + B}{u^2 + 1} + \frac{C}{u - 1}$$

$$(Au + B)(u - 1) + C(u^2 + 1) = u + 1$$

18

$$u = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$u = 0 \Rightarrow -B + C = 1 \Rightarrow -B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$$

$$u = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow 2A + 2 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx &= \int \left(\frac{-u}{u^2 + 1} + \frac{1}{u - 1} \right) du \\ &= -\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \ln|u - 1| + C = -\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \ln|e^x - 1| + C \end{aligned}$$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{5 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4} dx = \int \frac{5 \cos x}{u^2 + 3u - 4} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2 + 3u - 4} du$$

$$\frac{5}{u^2 + 3u - 4} = \frac{5}{(u + 4)(u - 1)} = \frac{A}{u + 4} + \frac{B}{u - 1}$$

$$A(u - 1) + B(u + 4) = 5$$

19

$$u = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$u = -4 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{5}{u^2 + 3u - 4} du = \int \left(\frac{-1}{u + 4} + \frac{1}{u - 1} \right) du = -\ln|u + 4| + \ln|u - 1| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{5 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4} dx = -\ln(4 + \sin x) + \ln|-1 + \sin x| + C$$

$$= \ln \left| \frac{-1 + \sin x}{4 + \sin x} \right| + C$$



$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx = \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du$$

$$\frac{1}{u^2 + 5u + 6} = \frac{1}{(u+3)(u+2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2}$$

$$A(u+2) + B(u+3) = 1$$

$$u = -3 \Rightarrow A = -1$$

$$u = -2 \Rightarrow B = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du = \int \left(\frac{-1}{u+3} + \frac{1}{u+2} \right) du = \ln|u+2| - \ln|u+3| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx = \ln \left| \frac{2 + \tan x}{3 + \tan x} \right| + C$$

$$\frac{4x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1) + B(x-3) = 4x$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow B = 1$$

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right) dx = (3 \ln|x-3| + \ln|x+1|) \Big|_0^1$$

$$= (3 \ln 2 + \ln 2) - (3 \ln 3) = \ln 8 + \ln 2 - \ln 27 = \ln \frac{16}{27}$$



$$\frac{1}{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{(2x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

$$A(x + 1) + B(2x - 1) = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$\int_1^p \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx = \int_1^p \left(\frac{\frac{2}{3}}{2x - 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x + 1} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} \ln|2x - 1| - \frac{1}{3} \ln|x + 1| \right) \Big|_1^p = \left(\frac{1}{3} \ln|2p - 1| - \frac{1}{3} \ln|p + 1| \right) - \left(-\frac{1}{3} \ln 2 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2(2p - 1)}{p + 1} \right| = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{4p - 2}{p + 1} \right), p > 1$$



الدرس الرابع: التكامل بالأجزاء

1	$u = x$ $du = dx$ $dv = \cos 4x \, dx$ $v = \frac{1}{4} \sin 4x$ $\int x \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} x \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x \, dx = \frac{1}{4} x \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C$
2	$u = x$ $du = dx$ $dv = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ $v = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}}$ $\int x \sqrt{x+1} \, dx = \frac{2}{3} x (x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$ $= \frac{2}{3} x (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x+1)^{\frac{5}{2}} + C$
3	$u = x$ $du = dx$ $dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$ $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$
4	$u = \ln x$ $du = \frac{1}{x} dx$ $dv = (x^2 + 1) dx$ $v = \frac{1}{3} x^3 + x$ $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \int \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) dx$ $= \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{3} x^2 + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \frac{1}{9} x^3 - x + C$
5	$\int \ln x^3 \, dx = \int 3 \ln x \, dx$ $u = 3 \ln x$ $du = \frac{3}{x} dx$ $dv = dx$ $v = x$ $\int 3 \ln x \, dx = 3x \ln x - \int 3 dx = 3x \ln x - 3x + C$



	$u = e^{2x}$ $du = 2e^{2x} dx$ $dv = \sin x dx$ $v = -\cos x$ $\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cos x dx$	
6	$u = 2e^{2x}$ $du = 4e^{2x} dx$ $dv = \cos x dx$ $v = \sin x$ $\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - \int 4e^{2x} \sin x dx$ $\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx$ $\Rightarrow 5 \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = -\frac{1}{5} e^{2x} \cos x + \frac{2}{5} e^{2x} \sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C$	
7	$u = \ln x$ $du = \frac{1}{x} dx$ $dv = dx$ $v = x$ $\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big _1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big _1^e - x \Big _1^e = e - e + 1 = 1$	
8	$u = \ln x$ $du = \frac{1}{x} dx$ $dv = x^{-2} dx$ $v = \frac{-1}{x}$ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big _1^2 + \int_1^2 x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big _1^2 - \frac{1}{x} \Big _1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$	



$$u = x$$

$$dv = \cos \frac{1}{4} x dx$$

$$du = dx$$

$$v = 4 \sin \frac{1}{4} x$$

$$\begin{aligned} 9 \int_0^{\pi} x \cos \frac{1}{4} x dx &= 4x \sin \frac{1}{4} x \Big|_0^{\pi} - \int_1^2 4 \sin \frac{1}{4} x dx \\ &= 4x \sin \frac{1}{4} x \Big|_0^{\pi} + 16 \cos \frac{1}{4} x \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16 = 2\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2} - 16 \end{aligned}$$

$$u = e^{3x}$$

$$dv = \cos 2x dx$$

$$du = 3e^{3x} dx$$

$$v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \int \frac{3}{2} e^{3x} \sin 2x dx$$

$$u = \frac{3}{2} e^{3x}$$

$$dv = \sin 2x dx$$

$$du = \frac{9}{2} e^{3x} dx$$

$$v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$10 \Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x - \int \frac{9}{4} e^{3x} \cos 2x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x - \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x dx$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4} \int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{13} (2e^{3x} \sin 2x + 3e^{3x} \cos 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{13} (2e^{\frac{3\pi}{4}} - 3)$$



$$u = \ln(x + 1)$$

$$dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x+1} dx$$

$$v = x$$

$$\int_1^e \ln(x+1) dx = x \ln(x+1) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1} dx$$

$$= x \ln(x+1) \Big|_1^e - \int_1^e \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) dx$$

$$= x \ln(x+1) \Big|_1^e - (x - \ln(x+1)) \Big|_1^e$$

$$= e \ln(e+1) - \ln 2 - (e - \ln(e+1)) + (1 - \ln 2)$$

$$= (1+e) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - e + 1$$

$$\int x^2 e^x dx$$

سنستخدم هنا طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة

$g(x)$ وتكاملاته المتكررة

x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) \Big|_0^1 = e - 2$$

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = x$$

$$\int_2^4 \ln x dx = x \ln x \Big|_2^4 - \int_2^4 dx = x \ln x \Big|_2^4 - x \Big|_2^4$$

$$= 4 \ln 4 - 2 \ln 2 - 2 = 8 \ln 2 - 2 \ln 2 - 2 = 6 \ln 2 - 2$$



14	إن الإحداثيين x للنقطتين A, B هما أول حلين موجبين للمعادلة: $x \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi, \dots$ ومنه: $A(\pi, 0), B(2\pi, 0)$
15	$Area = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx\right)$ $u = x \quad dv = \sin x \, dx$ $du = dx \quad v = -\cos x$ $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$ $Area = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx\right)$ $= (-x \cos x + \sin x) \Big _0^{\pi} + (x \cos x - \sin x) \Big _{\pi}^{2\pi}$ $= \pi + 2\pi - (-\pi) = 4\pi$
16	$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$ $\Rightarrow A(1,0)$
17	$Area = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$ $u = \ln x \quad dv = x^2 \, dx$ $du = \frac{1}{x} \, dx \quad v = \frac{1}{3} x^3$ $Area = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big _1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} x^2 \, dx$ $= \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big _1^2 - \frac{1}{9} x^3 \Big _1^2$ $= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$



الدرس الخامس: المساحات والحجوم

1	$A = \int_0^{\pi} (2 - (1 + \cos 2x)) dx = \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big _0^{\pi} = (\pi - 0) - (0 - 0) = \pi$
2	$1 + 10x - 2x^2 = 1 + 5x - x^2 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$ $\Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$ $\Rightarrow A = \int_0^5 (1 + 10x - 2x^2 - (1 + 5x - x^2)) dx$ $= \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left(\frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big _0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{125}{6}$
3	$A = \int_0^2 (3x - x^2 - (x)) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx$ $= \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big _0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$
4	$A = \int_{-1}^2 ((x^2 + 1) - (2x - 2)) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3) dx$ $= \left(\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 3x \right) \Big _{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 3 \right) = 9$
5	$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$ $A = \int_{-2}^1 ((2 - x) - (x^2)) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$ $= \left(2x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big _{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{2}$
6	$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$ لكن $x \neq 0$ لأن الاقترانين غير معرفين عند $x = 0$، إذن يتقاطع المنحنيان عند $x = 1$ فقط. $A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \Big _1^2 = \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) - (1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$



$$1 - \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x > 1 - \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x < 1 - \cos x, \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

$$\begin{aligned} 7 \quad A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - (1 - \cos x)) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - \cos x - (\cos x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos x - 1) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - 2 \cos x) dx \end{aligned}$$

$$= (2 \sin x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + (x - 2 \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4 = 4 - \frac{1}{2}x \Rightarrow 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \left(3 - x + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0, \quad x - \frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \quad 2x - \sqrt{x} - 6 = 0$$

$$8 \quad \sqrt{x} = u \Rightarrow x = u^2, \quad \sqrt{x} > 0 \Rightarrow u > 0$$

$$2x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow 2u^2 - u - 6 = 0$$

$$(2u + 3)(u - 2) = 0 \Rightarrow u = -\frac{3}{2}, u = 2 \Rightarrow x = 4 \quad (\text{الحل السالب مرفوض})$$

$$\Rightarrow x = 0, \quad x = 4$$

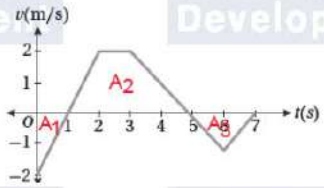
$$\Rightarrow A(4, 2)$$

$$9 \quad A = \int_0^4 \left((3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4) - \left(4 - \frac{1}{2}x \right) \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x \right) dx = \left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}x^2 \right) \Big|_0^4$$

$$= 16 - \frac{64}{5} + 4 = \frac{36}{5} = 7.2$$



10	$s(7) - s(0) = \int_0^7 v(t) dt = -A_1 + A_2 - A_3$ $= -\frac{1}{2}(2)(1) + \frac{1}{2}(2)(4+1) - \frac{1}{2}(2)(1) = -1 + 5 - 1 = 3 \text{ m}$	
11	$d = \int_0^7 v(t) dt = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + 5 + 1 = 7 \text{ m}$	
12	$s(7) - s(0) = 3 \text{ m} \Rightarrow s(7) - 2 = 3 \Rightarrow s(7) = 3 + 2 = 5 \text{ m}$	
13	$\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -2$ $V = \pi \int_0^3 \left((g(x))^2 - (f(x))^2 \right) dx = \pi \int_0^3 \left(\left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right) dx$ $= \pi \left(\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^3 - \frac{1}{20}x^5 \right) \Big _0^3 = \frac{153\pi}{5}$	
14	$V = \pi \int_e^{e^3} (f(x))^2 dx = \pi \int_e^{e^3} \ln x dx$ $u = \ln x \quad dv = dx$ $du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$ $V = \pi \int_e^{e^3} \ln x dx = \pi \left(x \ln x \Big _e^{e^3} - \int_e^{e^3} dx \right) = \pi \left(x \ln x \Big _e^{e^3} - x \Big _e^{e^3} \right)$ $= \pi (3e^3 - e - e^3 + e) = 2\pi e^3$	
15	$x^2 = \sqrt{8x} \Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$ $V = \pi \int_0^2 \left((\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \int_0^2 (8x - x^4) dx$ $= \pi \left(4x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big _0^2 = \pi \left(16 - \frac{32}{5} \right) = \frac{48\pi}{5} = 9.6\pi$	



$$y = 4 \Rightarrow x^2 + 16 = 25 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3, x = 3$$

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2$$

$$16 \quad V = \pi \int_{-3}^3 (y^2 - (4)^2) dx = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2 - 16) dx = \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx$$

$$= \pi \left(9x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-3}^3 = \pi((27 - 9) - (-27 + 9)) = 36\pi$$



1	$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx \Rightarrow \ln y = x^3 + C$
2	$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2 - 4} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 - 4} = \int \frac{dx}{x}$ $\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{(y - 2)(y + 2)} = \frac{A}{y - 2} + \frac{B}{y + 2}$ $\Rightarrow A(y + 2) + B(y - 2) = 1$ $y = -2 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$ $y = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{y^2 - 4} = \frac{\frac{1}{4}}{y - 2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y + 2}$ $\int \frac{dy}{y^2 - 4} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{y - 2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y + 2} \right) dy = \int \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \frac{1}{4} \ln y - 2 - \frac{1}{4} \ln y + 2 = \ln x + C$ $\Rightarrow \frac{1}{4} \ln \left \frac{y - 2}{y + 2} \right = \ln x + C$
3	$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \times e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx$ $\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = e^x + C$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{ye^{x^2}} \Rightarrow \frac{y dy}{\sec y} = \frac{x dx}{e^{x^2}} \Rightarrow \int y \cos y dy = \int x e^{-x^2} dx$$

نجد $\int y \cos y dy$ بالأجزاء (من دون إضافة ثابت التكامل):

$$u = y \quad dv = \cos y dy$$

$$du = dy \quad v = \sin y$$

$$\Rightarrow \int y \cos y dy = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y$$

نجد $\int x e^{-x^2} dx$ بالتعويض (من دون إضافة ثابت التكامل):

$$u = -x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2x}$$

$$\Rightarrow \int x e^{-x^2} dx = \int x e^u \times \frac{du}{-2x} = -\int \frac{1}{2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

نضيف ثابت التكامل في الخطوة الأخيرة:

$$\int y \cos y dy = \int x e^{-x^2} dx$$

$$\Rightarrow y \sin y + \cos y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{y} \Rightarrow \frac{y}{y-3} dy = dx \Rightarrow \int \frac{y}{y-3} dy = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(1 + \frac{3}{y-3}\right) dy = \int dx$$

$$\Rightarrow y + 3 \ln|y-3| = x + C$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \ln x}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = x \ln x dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int x \ln x dx$$

نجد $\int x \ln x dx$ بالأجزاء:

$$u = \ln x$$

$$dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\Rightarrow \int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2$$

$$\int y^2 dy = \int x \ln x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

$$\frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \sin 4x, y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow dy = -30 \cos 4x \sin 4x dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int -15 \sin 8x dx$$

$$\Rightarrow y = \frac{15}{8} \cos 8x + C$$

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{15}{8} \cos 8\left(\frac{\pi}{8}\right) + C$$

$$0 = -\frac{15}{8} + C \Rightarrow C = \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow y = \frac{15}{8} \cos 8x + \frac{15}{8}$$

الحل العام :

الشرط الأولي :

الحل الخاص :



	$\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y}$ $\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x^2 dx$ $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + C$ الشرط الأولي : $y(0) = 2 \Rightarrow 0 + C = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = 2\sqrt{2}$ الحل الخاص : $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{2}$		
8	$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y}, y(0) = 0$ $\Rightarrow \cos y dy = 4\sqrt{x} dx$ $\Rightarrow \int \cos y dy = \int 4\sqrt{x} dx$ $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ الشرط الأولي : $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ الحل الخاص : $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x\sqrt{x}$	الحل العام :	الحل الخاص :
9			





10	$\frac{dy}{dx} = xe^{y-x^2}, y(1) = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^y e^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = xe^{-x^2} dx$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int xe^{-x^2} dx$ نجد $\int xe^{-x^2} dx$ بالتعويض: $u = -x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int xe^{-x^2} dx = \int xe^u \times \frac{du}{-2x} = \int -\frac{1}{2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ $-e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$ $\Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$ الحل العام: الشرط الأولي: $y(1) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2e} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2e}$ الحل الخاص: $\Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + 1 - \frac{1}{2e}$
11	$\frac{dy}{dx} = xe^{-y}, y(4) = \ln 2$ $\Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = x dx$ $\Rightarrow \int e^y dy = \int x dx \Rightarrow e^y = \frac{1}{2} x^2 + C$ الحل العام: الشرط الأولي: $y(4) = \ln 2 \Rightarrow 2 = 8 + C \Rightarrow C = -6$ الحل الخاص: $\Rightarrow e^y = \frac{1}{2} x^2 - 6$
12	$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)y^2, y(2) = -0.1$ $\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = (3x^2 + 4) dx$ $\Rightarrow \int y^{-2} dy = \int (3x^2 + 4) dx$ $\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3 + 4x + C$ الحل العام: الشرط الأولي: $y(2) = -0.1 \Rightarrow 10 = 8 + 8 + C \Rightarrow C = -6$ الحل الخاص: $\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3 + 4x - 6$



$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^{0.8}, y(0) = 100000$$

$$\Rightarrow y^{-0.8}dy = \frac{1}{2}dt$$

$$\Rightarrow \int y^{-0.8}dy = \int \frac{1}{2}dt$$

$$\Rightarrow 5y^{0.2} = \frac{1}{2}t + C$$

$$y(0) = 100000$$

$$\Rightarrow 5\sqrt[5]{100000} = 0 + C \Rightarrow C = 50$$

$$\Rightarrow 5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2}t + 50$$

الحل الخاص :

$$5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2}(7) + 50 \Rightarrow \sqrt[5]{y} = 10.7 \Rightarrow y = (10.7)^5 \approx 140255$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100}, v(0) = 20$$

$$\Rightarrow -v^{-2}dv = \frac{1}{100}dt$$

$$\Rightarrow -\int v^{-2}dv = \int \frac{1}{100}dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{100}t + C$$

$$v(0) = 20 \Rightarrow \frac{1}{20} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{100}t + \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{t+5}{100} \Rightarrow v = \frac{100}{t+5}$$



$$e^y \frac{dy}{dx} = 10 + 2\sec^2 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^y dy = (10 + 2\sec^2 x) dx$$

$$\Rightarrow \int e^y dy = \int (10 + 2\sec^2 x) dx$$

$$\Rightarrow e^y = 10x + 2 \tan x + C$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{5\pi}{2} + 2 + C \Rightarrow C = -1 - \frac{5\pi}{2}$$

$$\Rightarrow e^y = 10x + 2 \tan x - 1 - \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0, y(6) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C$$

$$y(6) = 4 \Rightarrow \ln 4 = -\ln 6 + C \Rightarrow C = \ln 24$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln 24$$

$$\Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = \ln 24$$

$$\Rightarrow \ln|xy| = \ln 24$$

$$\Rightarrow |xy| = 24$$

$$\Rightarrow |y| = \frac{24}{|x|} \Rightarrow y = \frac{24}{x} \text{ or } \Rightarrow y = -\frac{24}{x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{24}{x} \quad \left(\text{لأن } y = -\frac{24}{x} \text{ لا تحقق شروط السؤال} \right)$$

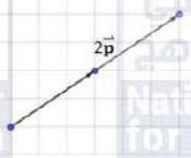
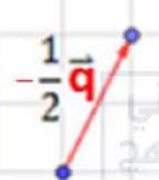
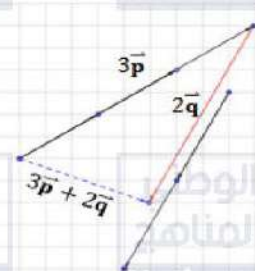




الصورة الإحداثية ومقدار المتجه صفحة 20

1	$A(-1,6), B(-1,-2), C(4,-5), D(5,1)$
	$\vec{AB} = \langle 0, -8 \rangle, \vec{AB} = \sqrt{0 + 64} = 8$
2	$\vec{BC} = \langle 5, -3 \rangle, \vec{BC} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$
3	$\vec{CD} = \langle 1, 6 \rangle, \vec{CD} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$
4	$\vec{DA} = \langle -6, 5 \rangle, \vec{DA} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًا صفحة 20

5	
6	
7	



8	
جمع المتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي صفحة 21	
9	$\vec{u} + \vec{v} = \langle 9, 7 \rangle$
10	$\vec{v} - \vec{u} = \langle 3, 11 \rangle$
11	$3\vec{u} + 2\vec{v} = \langle 21, 12 \rangle$
12	$-2\vec{u} + \vec{v} = \langle 0, 13 \rangle$
الضرب القياسي، والزاوية بين متجهين صفحة 22	
13	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(3) - 5(-1) = 11$
14	$\vec{m} \cdot \vec{n} = -3(8) - 4(6) = -48$
15	$\vec{r} \cdot \vec{s} = -5(2) + 4(3) = 2$
16	$\vec{q} \cdot \vec{p} = 11(-4) + 8(-5) = -84$
17	$ \vec{a} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$
	$ \vec{b} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$
	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3(5) + 7(1) = 22$
$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } \right) = \cos^{-1} \left(\frac{22}{\sqrt{58} \sqrt{26}} \right) \approx 55.5^\circ$	

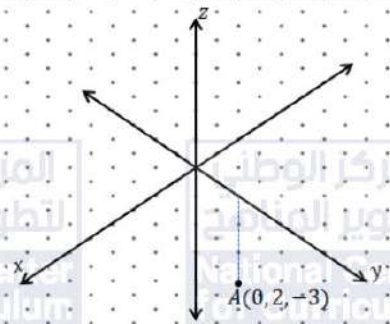


	$ \vec{c} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ $ \vec{d} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$ $\vec{c} \cdot \vec{d} = 2(-6) - 3(9) = -39$ $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{ \vec{c} \vec{d} } \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-39}{\sqrt{13} \sqrt{117}} \right) = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$ ملحوظة: يمكن ملاحظة أن $\vec{d} = -3\vec{c}$ ، ومنه استنتاج أن قياس الزاوية بينهما هو 180° لأن لهما اتجاهان متعاكسان.
18	
19	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4(3n - 4) + n(-10) = 0$ $\Rightarrow 12n - 16 - 10n = 0 \Rightarrow n = 8$

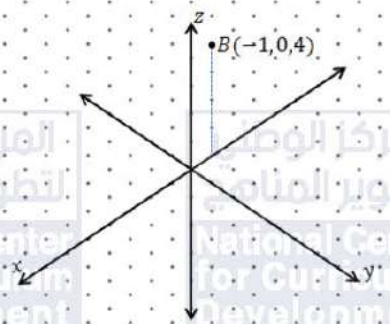


الدرس الأول: المتجهات في الفضاء

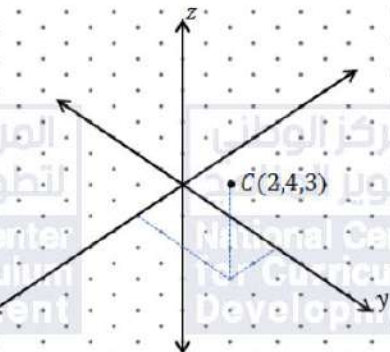
1



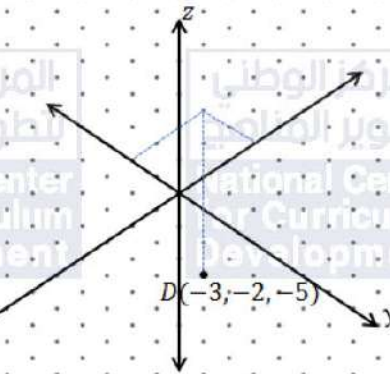
2



3



4



5

$A(3,0,6)$

6

$C(0,5,6)$



7	$D(0,0,6)$
8	$F(3,5,0)$
9	مركزه هو منتصف $\overline{OB}$ وهو: $\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$
10	$\overrightarrow{AB} = \langle 6, 4, -3 \rangle, \overrightarrow{AB} = \sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61}$
11	$\overrightarrow{EF} = \langle 3, 4, -12 \rangle, \overrightarrow{EF} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$
12	$\overrightarrow{GH} = \langle 12, 4, 6 \rangle, \overrightarrow{GH} = \sqrt{144 + 16 + 36} = \sqrt{196} = 14$
13	$ \overrightarrow{AC} = \sqrt{64 + 25 + 45} = \sqrt{134}$ ليكن $\hat{u}$ متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AC}$ ، فإن: $\hat{u} = \frac{1}{ \overrightarrow{AC} } \overrightarrow{AC} = \frac{1}{\sqrt{134}} (8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\hat{k}) = \frac{8}{\sqrt{134}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{134}}\hat{j} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{134}}\hat{k}$
14	$ \vec{v} = \sqrt{25 + 16 + 400} = \sqrt{441} = 21$ $\Rightarrow \hat{v} = \frac{1}{21} \langle -5, 4, 20 \rangle = \langle \frac{-5}{21}, \frac{4}{21}, \frac{6}{21} \rangle$ $\hat{v}$ هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$
15	$ \vec{v} = \sqrt{16 + 144 + 9} = 13$ $\Rightarrow \hat{v} = \frac{4}{13}\hat{i} - \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{3}{13}\hat{k}$ $\hat{v}$ هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$ ، إذن، المتجه الذي له اتجاه $\vec{v}$ نفسه ومقداره 52 هو $52\hat{v}$ ويساوي: $52 \left(\frac{4}{13}\hat{i} - \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{3}{13}\hat{k} \right) = 16\hat{i} - 48\hat{j} + 12\hat{k}$
16	$2\vec{u} + 4\vec{v} = 2\langle 3, 5, -7 \rangle + 4\langle -4, 3, -6 \rangle = \langle -10, 22, -38 \rangle$
17	$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3\langle 3, 5, -7 \rangle - 2\langle -4, 3, -6 \rangle = \langle 17, 9, -9 \rangle$
18	$a\langle 3, 5, -7 \rangle + 5\langle -4, 3, -6 \rangle = \langle 3a - 20, 5a + 15, -7a - 30 \rangle$ $\Rightarrow \langle 3a - 20, 5a + 15, -7a - 30 \rangle = \langle -2, b, c \rangle$ $\Rightarrow 3a - 20 = -2$ و $5a + 15 = b$ و $-7a - 30 = c$ $\Rightarrow a = 6$ و $b = 45$ و $c = -72$



$$\frac{AP}{PB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{3}{8}$$

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP} = 2\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{BA} = 2\vec{b} + \frac{3}{8}(\vec{BO} + \vec{OA}) = 2\vec{b} + \frac{3}{8}(-2\vec{b} + 2\vec{a})$$

19

$$= \left(2 - \frac{3}{4}\right)\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{4}(5\vec{b} + 3\vec{a}) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

ليكن متجه الموقع للنقطة N هو $\vec{ON}$

$$\vec{LN} = \frac{1}{2}\vec{NM} \Rightarrow \vec{LN} = \frac{1}{3}\vec{LM}$$

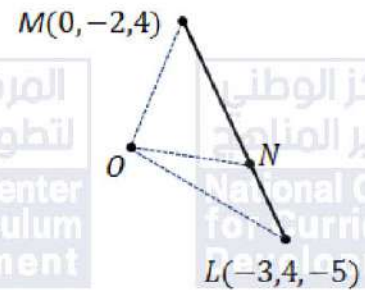
$$\Rightarrow \vec{ON} = \vec{OL} + \vec{LN}$$

20

$$= \vec{OL} + \frac{1}{3}\vec{LM} = \vec{OL} + \frac{1}{3}(\vec{OM} - \vec{OL})$$

$$= \langle -3, 4, -5 \rangle + \frac{1}{3}\langle 3, -6, 9 \rangle$$

$$= \langle -2, 2, -2 \rangle$$



$$\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{b} + \vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \dots \dots \dots (1)$$

$$\vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BD}$$

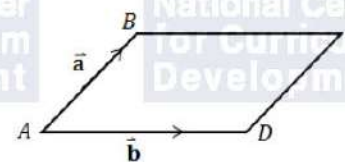
21

$$\Rightarrow -\vec{a} + \vec{b} = -6\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k} \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) + (2): 2\vec{b} = -4\hat{i} + 10\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$(1) - (2): 2\vec{a} = 8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow \vec{a} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$





22	$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = p\langle 1, 0, 4 \rangle + q\langle 2, 0, -3 \rangle + r\langle -5, 3, 1 \rangle$ $= \langle p + 2q - 5r, 3r, 4p - 3q + r \rangle = \langle 28, -12, -5 \rangle$ $3r = -12 \Rightarrow r = -4$ $p + 2q - 5r = 28 \Rightarrow p + 2q = 8 \dots\dots\dots (1)$ $4p - 3q + r = -5 \Rightarrow 4p - 3q = -1 \dots\dots\dots (2)$ $(1) \times 4 - (2): 11q = 33 \Rightarrow q = 3, p = 2$
23	$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = 6\vec{a} + 6\vec{c}$
24	$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = -6\vec{a} + 6\vec{c}$
25	$\vec{OU} = \vec{OA} + \vec{AU} = 6\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AB} = 6\vec{a} + \frac{2}{3}(6\vec{c}) = 6\vec{a} + 4\vec{c}$
26	$\vec{UT} = \vec{UB} + \vec{BT} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{3}(6\vec{c}) + \frac{1}{2}(-6\vec{a}) = 2\vec{c} - 3\vec{a}$
27	$\vec{TA} = \vec{TB} + \vec{BA} = \frac{1}{2}\vec{CB} - 6\vec{c} = \frac{1}{2}(6\vec{a}) - 6\vec{c} = 3\vec{a} - 6\vec{c}$
28	$\vec{OS} = \vec{OC} + \vec{CS} = 6\vec{c} + \frac{3}{5}\vec{CA} = 6\vec{c} + \frac{3}{5}(6\vec{a} - 6\vec{c}) = \frac{18}{5}\vec{a} + \frac{12}{5}\vec{c}$
29	$\vec{US} = \vec{UA} + \vec{AS} = \frac{2}{3}(-6\vec{c}) + \frac{2}{5}(-6\vec{a} + 6\vec{c}) = -\frac{12}{5}\vec{a} - \frac{8}{5}\vec{c}$
30	$\vec{SB} = \vec{SC} + \vec{CB} = \frac{3}{5}\vec{AC} + \vec{CB} = \frac{3}{5}(-6\vec{a} + 6\vec{c}) + 6\vec{a} = \frac{12}{5}\vec{a} + \frac{18}{5}\vec{c}$
31	$\vec{OR} = \vec{OA} + \vec{AR} = \vec{OA} + h\vec{AB}$ $= \vec{OA} + h(\vec{AO} + \vec{OB})$ $= \vec{a} + h(-\vec{a} + \vec{b})$ $= \vec{a} - h\vec{a} + h\vec{b}$ $= (1 - h)\vec{a} + h\vec{b}$



$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ}$$

$$= \overrightarrow{OP} + k(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ})$$

$$= \overrightarrow{OP} + k(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ})$$

$$= \overrightarrow{OP} + k(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB})$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a} + k\left(-\frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}k\vec{a} + 3k\vec{b}$$

$$= \frac{3}{5}(1 - k)\vec{a} + 3k\vec{b}$$

32

في السؤالين السابقين وجدنا أن:

$$\overrightarrow{OR} = (1 - h)\vec{a} + h\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{3}{5}(1 - k)\vec{a} + 3k\vec{b}$$

$$\Rightarrow (1 - h)\vec{a} + h\vec{b} = \frac{3}{5}(1 - k)\vec{a} + 3k\vec{b}$$

33

$$\Rightarrow 1 - h = \frac{3}{5}(1 - k), \quad h = 3k$$

$$\Rightarrow 1 - 3k = \frac{3}{5}(1 - k)$$

$$5 - 15k = 3 - 3k \Rightarrow 2 = 12k$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{6}, \quad h = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{PQ}$$

$$\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \overrightarrow{PR} : \overrightarrow{PQ} = 1 : 6$$

34



1	$\vec{AB} = \langle -7, 2, 7 \rangle$ $\vec{BC} = \langle -2, 5, -3 \rangle$ $\vec{CD} = \langle 14, -4, -14 \rangle$ $\vec{DA} = \langle -5, -3, 10 \rangle$ بما أن: $\vec{CD} = -2\vec{AB}$ إذن: $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ لكن لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{BC} = k\vec{DA}$ نظرًا لأن النسبة بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، لذلك $\vec{BC} \nparallel \vec{DA}$ والشكل $ABCD$ ليس متوازي أضلاع.
2	$\vec{AB} = \langle -6, -3, -2 \rangle$ $\vec{BC} = \langle -14, -1, 23 \rangle$ $\vec{CD} = \langle 6, 3, 2 \rangle$ $\vec{DA} = \langle 14, 1, -23 \rangle$ $\vec{AB} = (-1)\vec{CD} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{CD}$ $\vec{BC} = (-1)\vec{DA} \Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{DA}$ إذن، الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع لأن فيه زوجين من الأضلاع المتوازية. يمكن الحل بالاستناد للتوازي:
3	$ABCD \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}$ $\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{OA} - \vec{OB}$ $= \langle 3, 1, 5 \rangle + \langle 2, 3, 1 \rangle - \langle 6, 5, 4 \rangle = \langle -1, -1, 2 \rangle$ $\Rightarrow D(-1, -1, 2)$
4	$\vec{OT} = \vec{OB} + \vec{BT} = 2\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{BA} = 2\vec{b} + \frac{1}{6}(\vec{BO} + \vec{OA}) = 2\vec{b} + \frac{1}{6}(-2\vec{b} + 5\vec{a})$ $= \left(2 - \frac{2}{6}\right)\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a} = \frac{10}{6}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a} = \frac{5}{6}(2\vec{b} + \vec{a})$ $\Rightarrow \vec{OT} = \frac{5}{6}(2\vec{b} + \vec{a})$ $\Rightarrow \vec{OT} \parallel (2\vec{b} + \vec{a})$
5	$\vec{OS} = 3\vec{OR} = 3(\vec{OP} + \vec{PR}) = 3\left(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{PQ}\right)$ $= 3\vec{a} + \vec{PO} + \vec{OQ}$ $= 3\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}$ $= 2\vec{a} + \vec{b}$



6	$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OT} = -\vec{a} - \vec{b}$ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = -\vec{a} + (2\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$ $\Rightarrow \overrightarrow{PT} = (-1)\overrightarrow{PS}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة P نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط T, P, S تقع على استقامة واحدة.
7	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = 8\vec{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = 8\vec{a} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = 8\vec{a} + \frac{2}{5}(-8\vec{a} + 7\vec{c})$ $= \left(8 - \frac{16}{5}\right)\vec{a} + \frac{14}{5}\vec{c} = \frac{24}{5}\vec{a} + \frac{14}{5}\vec{c} = \frac{2}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c})$
8	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = 7\vec{c} + 12\vec{a}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OB}$ إذن، المتجهان ينطلقان من النقطة نفسها ومتوازيان. ومنه، فإن النقاط O, P, B تقع على استقامة واحدة.
9	وجدنا في السؤال السابق أن: $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ $\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OP}{OP + PB} = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow 5 OP = 2 OP + 2 PB \Rightarrow 3 OP = 2 PB$ $\Rightarrow \frac{OP}{PB} = \frac{2}{3} \Rightarrow OP:PB = 2:3$
10	$\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + t(4\hat{j} - 2\hat{k}) = 2\hat{i} + (3 + 4t)\hat{j} - (5 + 2t)\hat{k}$
11	$\vec{r} = \langle 2, -7, 11 \rangle + t\langle -4, 5, 8 \rangle = \langle 2 - 4t, -7 + 5t, 11 + 8t \rangle$
12	$\vec{v} = \langle 6 - 1, 19 - (-7) \rangle = \langle 5, 26 \rangle$ $\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{r} = \langle 1, -7 \rangle + t\langle 5, 26 \rangle = \langle 1 + 5t, -7 + 26t \rangle$
13	$\vec{v} = \langle 7 - (-5), 13 - 4, -8 - 15 \rangle = \langle 12, 9, -23 \rangle$ $\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{r} = \langle -5, 4, 15 \rangle + t\langle 12, 9, -23 \rangle = \langle -5 + 12t, 4 + 9t, 15 - 23t \rangle$



14	$\vec{v} = \langle 13 - 5, 10 - 22, 3 - (-8) \rangle = \langle 8, -12, 11 \rangle$ $\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{r} = \langle 5, 22, -8 \rangle + t \langle 8, -12, 11 \rangle = \langle 5 + 8t, 22 - 12t, -8 + 11t \rangle$
15	$\vec{v} = \langle 9 - 0, 4 - 2, 6 - (-5) \rangle = \langle 9, 2, 11 \rangle$ $\vec{v}$ هو اتجاه المستقيم المطلوب معادلته، $\Rightarrow \vec{r} = \langle 0, 2, -5 \rangle + t \langle 9, 2, 11 \rangle = \langle 9t, 2 + 2t, -5 + 11t \rangle$
16	تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l إذا وُجد عدد حقيقي t حيث: $\langle -5 + 3t, 8 - 2t, 4 + 9t \rangle = \langle 3, 7, 11 \rangle$ $\Rightarrow -5 + 3t = 3 \quad \text{و} \quad 8 - 2t = 7 \quad \text{و} \quad 4 + 9t = 11$ $\Rightarrow t = \frac{8}{3}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{7}{9}$ لا توجد قيمة واحدة للوسيط t تحقق المعادلات الثلاث، إذن: النقطة $(3, 7, 11)$ لا تقع على المستقيم l. تقع النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l، إذن توجد قيمة للوسيط t تحقق المعادلة الآتية:
17	$\langle -5 + 3t, 8 - 2t, 4 + 9t \rangle = \langle 1, b, c \rangle$ $-5 + 3t = 1 \Rightarrow t = 2$ $8 - 2t = b \Rightarrow 8 - 4 = b \Rightarrow b = 4$ $4 + 9t = c \Rightarrow 4 + 18 = c \Rightarrow c = 22$
18	الإحداثي y للنقطة الواقعة في المستوى xz هو 0 نجد قيمة t التي تحقق المعادلة $8 - 2t = 0$، وهي $t = 4$ ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz نعوض $t = 4$ في معادلته: $\vec{r} = \langle -5 + 3t, 8 - 2t, 4 + 9t \rangle \Rightarrow \vec{r} = \langle -5 + 12, 8 - 8, 4 + 36 \rangle = \langle 7, 0, 40 \rangle$ إذن، إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz هي: $(7, 0, 40)$ يتوازي المستقيمان إذا توازى اتجاهاهما، أي:
19	$\langle 4, a, -12 \rangle \parallel \langle 3, -2, -9 \rangle$ $\Rightarrow \langle 4, a, -12 \rangle = k \langle 3, -2, -9 \rangle, k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow 4 = 3k \Rightarrow k = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow a = -2k = \frac{4}{3}(-2) = -\frac{8}{3}$



	النقاط $A(7,1,q), V(2,5,-3), U(p,-3,-1)$ على استقامة واحدة:
20	$\Rightarrow \overrightarrow{AV} \parallel \overrightarrow{VU} \Rightarrow \overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{VU}, k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \langle -5, 4, -3 - q \rangle = k\langle p - 2, -8, 2 \rangle$ $4 = -8k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$ $-5 = k(p - 2) \Rightarrow p = 12$
21	$\overrightarrow{VU} = \langle 12 - 2, -3 - 5, -1 - (-3) \rangle = \langle 10, -8, 2 \rangle$ اتجاه المستقيم l هو: $\vec{v} = \langle 10, -8, 2 \rangle$، ويمكن تبسيطه إلى $\langle 5, -4, 1 \rangle$ معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = \langle 2, 5, -3 \rangle + t\langle 5, 4, 1 \rangle$
22	من السؤال 20 نجد أن: $-3 - q = 2k \Rightarrow -3 - q = -1 \Rightarrow q = -2$
23	لإيجاد متجه موقع النقطة D نعوض $\lambda = 2$ في معادلة l_1 $\vec{r} = \langle 3 + 2, -2 + 2(2), 4 - 2 \rangle = \langle 5, 2, 2 \rangle$ إذن، معادلة المستقيم المطلوب هي: $\vec{r} = \langle 5, 2, 2 \rangle + t\langle 3, 2, -1 \rangle$



	اتجاه l_1: $\langle 1, -1, -2 \rangle$ معادلة l_1: $\vec{r} = \langle 4, 3, 3 \rangle + t\langle 1, -1, -2 \rangle$ اتجاه l_2: $\langle -1, 0, 1 \rangle$ معادلة l_2: $\vec{r} = \langle 5, 1, 0 \rangle + u\langle -1, 0, 1 \rangle$ المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: $\langle 1, -1, -2 \rangle = k\langle -1, 0, 1 \rangle$ يتقاطع المستقيمان إذا وجد عدداً حقيقياً t, u يحققان: $\langle 4 + t, 3 - t, 3 - 2t \rangle = \langle 5 - u, 1, u \rangle$ 24 $\Rightarrow 3 - t = 1 \Rightarrow t = 2$ $\Rightarrow 4 + t = 5 - u \Rightarrow t + u = 1 \Rightarrow 2 + u = 1 \Rightarrow u = -1$ $\Rightarrow 3 - 2t = u \Rightarrow 2t + u = 3$ $2(2) + (-1) \stackrel{?}{=} 3$ $3 = 3 \checkmark$ تحقق المعادلات الثلاث للقيمتين $t = 2, u = -1$، فالمستقيمان متقاطعان، ونجد نقطة تقاطعهما بتعويض $t = 2$ في معادلة l_1 $\vec{r} = \langle 4, 3, 3 \rangle + 2\langle 1, -1, -2 \rangle = \langle 6, 1, -1 \rangle$ إذن، نقطة التقاطع هي: $(6, 1, -1)$
25	اتجاه l_1: $\langle 2, 2, 3 \rangle$ معادلة l_1: $\vec{r} = \langle 3, 1, -2 \rangle + t\langle 2, 2, 3 \rangle$ اتجاه l_2: $\langle 2, 1, -1 \rangle$ معادلة l_2: $\vec{r} = \langle 9, 6, -2 \rangle + u\langle 2, 1, -1 \rangle$ المستقيمان غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي k يحقق المعادلة: يتقاطع المستقيمان إذا وجد عدداً حقيقياً t, u بحيث: $\langle 3 + 2t, 1 + 2t, -2 + 3t \rangle = \langle 9 + 2u, 6 + u, -2 - u \rangle$ $\Rightarrow 3 + 2t = 9 + 2u \Rightarrow t - u = 3 \dots \dots \dots (1)$ $1 + 2t = 6 + u \Rightarrow 2t - u = 5 \dots \dots \dots (2)$ $-2 + 3t = -2 - u \Rightarrow 3t + u = 0 \dots \dots \dots (3)$ $(2) - (1): t = 2 \Rightarrow u = -1$ نفحص تحقق المعادلة (3) عند $t = 2, u = -1$: $3(2) + (-1) \stackrel{?}{=} 0$ $5 = 0 \times$ عبارة غير صحيحة المعادلة غير متحققة، إذن، المستقيمان غير متقاطعين، و غير متوازيين، فهما متخالفان.



$$\overrightarrow{AB} = \langle 3, -3, -2 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 2, 1, 3 \rangle + t \langle 3, -3, -2 \rangle$$

معادلة المستقيم:

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \langle 2 + 3t, 1 - 3t, 3 - 2t \rangle$$

$$AC = 3CB \Rightarrow |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}| = 3|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2 + 3t - 2)^2 + (1 - 3t - 1)^2 + (3 - 2t - 3)^2}$$

$$= 3\sqrt{(2 + 3t - 5)^2 + (1 - 3t + 2)^2 + (3 - 2t - 1)^2}$$

$$\Rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0$$

(بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$$\Rightarrow (2t - 3)(4t - 3) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow C \left(\frac{13}{2}, -\frac{7}{2}, 0 \right)$$

$$\text{أو } t = \frac{3}{4} \Rightarrow C \left(\frac{17}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right)$$

حل آخر:

هناك حالتان لمواضع النقاط A, B, C:

الأولى: أن تكون C بين A، و B كما في الرسم الآتي:



وفي هذه الحالة يكون متجه موقع النقطة C هو: متجه موقع A زائداً $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ أي:

$$\vec{r} = \langle 2, 1, 3 \rangle + \frac{3}{4} \langle 3, -3, -2 \rangle = \left\langle \frac{17}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

والثانية: أن تكون C خارج القطعة المستقيمة $\overrightarrow{AB}$ ، كما في الرسم

المجاور، وفي هذه الحالة يكون متجه موقع النقطة C هو:

متجه موقع A زائداً $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ أي:

$$\vec{r} = \langle 2, 1, 3 \rangle + \frac{3}{2} \langle 3, -3, -2 \rangle = \left\langle \frac{13}{2}, -\frac{7}{2}, 0 \right\rangle$$

إذن، الإحداثيات الممكنة للنقطة C هي: $\left(\frac{17}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right)$ و $\left(\frac{13}{2}, -\frac{7}{2}, 0 \right)$

الطريقة الثالثة للحل:

بما أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فهناك حالتان:

إما $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CB}$ أو $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$



نثبت أن كل زوج من أزواج المستقيمات، متقاطعان، ونجد نقاط التقاطع (رؤوس المثلث):
متجه موقع أي نقطة على المستقيمات الثلاثة على التوالي تعطى كما يأتي:

$$\begin{pmatrix} -3 + 5t \\ 1 - 2t \\ 4 - 4t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + s \\ 5 + s \\ -4 - 2s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 + 2q \\ -1 - 5q \\ 2q \end{pmatrix}$$

$$\langle -3 + 5t, 1 - 2t, 4 - 4t \rangle = \langle 1 + s, 5 + s, -4 - 2s \rangle$$

$$-3 + 5t = 1 + s \Rightarrow 5t - s = 4 \dots \dots \dots (1)$$

$$1 - 2t = 5 + s \Rightarrow 2t + s = -4 \dots \dots \dots (2)$$

$$4 - 4t = -4 - 2s \Rightarrow 2t - s = 4 \dots \dots \dots (3)$$

$$(1) + (2): 7t = 0 \Rightarrow t = 0, s = -4$$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $t = 0, s = -4$: $\checkmark 2(0) - (-4) = 4$

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $A(-3, 1, 4)$

$$\langle 1 + s, 5 + s, -4 - 2s \rangle = \langle 2 + 2q, -1 - 5q, 2q \rangle$$

$$1 + s = 2 + 2q \Rightarrow s - 2q = 1 \dots \dots \dots (1)$$

$$5 + s = -1 - 5q \Rightarrow s + 5q = -6 \dots \dots \dots (2)$$

$$-4 - 2s = 2q \Rightarrow s + q = -2 \dots \dots \dots (3)$$

$$(2) - (1): 7q = -7 \Rightarrow q = -1, s = -1$$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $q = -1, s = -1$: $\checkmark (-1) + (-1) = -2$

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $B(0, 4, -2)$

$$\langle -3 + 5t, 1 - 2t, 4 - 4t \rangle = \langle 2 + 2q, -1 - 5q, 2q \rangle$$

$$-3 + 5t = 2 + 2q \Rightarrow 5t - 2q = 5 \dots \dots \dots (1)$$

$$1 - 2t = -1 - 5q \Rightarrow 2t - 5q = 2 \dots \dots \dots (2)$$

$$4 - 4t = 2q \Rightarrow 2t + q = 2 \dots \dots \dots (3)$$

$$(3) - (2): 6q = 0 \Rightarrow q = 0, t = 1$$

نفحص تحقق المعادلة (1) عند $q = 0, t = 1$: $\checkmark 5(1) - 2(0) = 5$

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $C(2, -1, 0)$

أثبتنا أن كل اثنين من هذه المستقيمات متقاطعان، فهذه المستقيمات تكون مثلثًا، أطوال أضلاعه هي:

$$AB = \sqrt{9 + 9 + 36} = \sqrt{54}$$

$$BC = \sqrt{4 + 25 + 4} = \sqrt{33}$$

$$AC = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45}$$



1	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4(-2) + 5(3) - 3(-7) = 28$
2	$\vec{e} \cdot \vec{f} = -13(-2) + 8(3) - 5(10) = 0$
3	$\vec{m} \cdot \vec{n} = 7(2) + 4(-5) - 9(10) = -96$
4	$\vec{w} \cdot \vec{v} = 15(6) + 24(5) - 7(a) = 0 \Rightarrow a = 30$
	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5(2) + 2(-1) + 3(-2) = 2$
	$ \vec{a} = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$
5	$ \vec{b} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$
	$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } \right) = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3\sqrt{38}} \right) \approx 83.8^\circ$
	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1(-1) + 1(-1) - 1(4) = -6$
	$ \vec{a} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$
6	$ \vec{b} = \sqrt{1 + 1 + 16} = 3\sqrt{2}$
	$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-6}{3\sqrt{6}} \right) = \cos^{-1} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \approx 144.7^\circ$
7	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\lambda) + 4(-3) + \lambda(4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$
	$\Rightarrow (\lambda + 6)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -6, \lambda = 2$
	$\vec{v} = \langle 2, -6, 3 \rangle : l_1$ اتجاه
	$\vec{w} = \langle 3, -4, 12 \rangle : l_2$ اتجاه
8	$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2(3) - 6(-4) + 3(12) = 66$
	$ \vec{v} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$
	$ \vec{w} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$
	$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{ \vec{v} \vec{w} } \right) = \cos^{-1} \left(\frac{66}{7(13)} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{66}{91} \right) \approx 43.5^\circ$



9	اتجاه l_1: $\vec{v} = \langle 3 - (-2), -5 - 11, 9 - 6 \rangle = \langle 5, -16, 3 \rangle$ اتجاه l_2: $\vec{w} = \langle 4 - (-5), 3 - 9, 8 - 12 \rangle = \langle 9, -6, -4 \rangle$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5(9) - 16(-6) + 3(-4) = 129$ $\vec{v} = \sqrt{25 + 256 + 9} = \sqrt{290}$ $\vec{w} = \sqrt{81 + 36 + 16} = \sqrt{133}$ $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{ \vec{v} \vec{w} } \right) = \cos^{-1} \left(\frac{129}{\sqrt{290} \sqrt{133}} \right) \approx 48.9^\circ$
10	$\vec{m} = \langle v, 0, -1 \rangle$, $\vec{n} = \langle 2, -1, 0 \rangle$ $\vec{m} \cdot \vec{n} = 2v + 0 + 0 = 2v$ $\vec{m} = \sqrt{v^2 + 1}$ $\vec{n} = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$ $\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{m} \vec{n} \cos 60^\circ$ $\Rightarrow 2v = \sqrt{5(v^2 + 1)} \times \frac{1}{2} \Rightarrow 16v^2 = 5v^2 + 5 \Rightarrow v^2 = \frac{5}{11} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5}{11}}$ لأن $(-\sqrt{\frac{5}{11}})$ لا يجعل قياس الزاوية بين المتجهين 60°
11	$\vec{OA} = \langle 3, -2, 6 \rangle$, $\vec{OB} = \langle -5, 4, 1 \rangle$ $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -5(3) + 4(-2) + 1(6) = -17$ $\vec{OA} = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$ $\vec{OB} = \sqrt{25 + 16 + 1} = \sqrt{42}$ $m\angle AOB = \theta$ $\cos \theta = \frac{-17}{7\sqrt{42}} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{-17}{7\sqrt{42}} \right)^2} = \frac{\sqrt{1776}}{7\sqrt{42}}$ $Area = \frac{1}{2} (OA)(OB) \sin \theta = \frac{1}{2} (7)(\sqrt{42}) \frac{\sqrt{1776}}{7\sqrt{42}} = \frac{1}{2} \sqrt{1776} \approx 21.07$

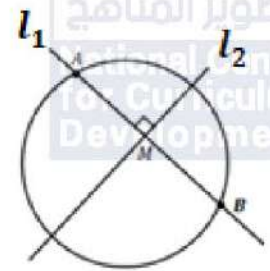




	$\vec{EF} = \langle 4, -10, -7 \rangle$ $\vec{r} = \langle 1, -3, 5 \rangle + t\langle 4, -10, -7 \rangle$ معادلة المستقيم l هي : إذا كانت M هي مسقط العمود من G على المستقيم l، فإن: $\Rightarrow \vec{OM} = (1 + 4t, -3 - 10t, 5 - 7t)$ $\vec{MG} = (-1 - 4t, -3 + 10t, -1 + 7t)$ ويكون:
12	$\vec{EF} \perp \vec{MG}$ $\Rightarrow \langle 4, -10, -7 \rangle \perp \langle -1 - 4t, -3 + 10t, -1 + 7t \rangle$ $\Rightarrow 4(-1 - 4t) - 10(-3 + 10t) - 7(-1 + 7t) = 0$ $\Rightarrow -4 - 16t + 30 - 100t + 7 - 49t = 0$ $\Rightarrow -165t = -61 \Rightarrow t = \frac{33}{165} = 0.2$ $\Rightarrow M(1.8, -5, 3.6)$
13	$GM = \sqrt{(1.8 - 0)^2 + (-5 + 6)^2 + (3.6 - 4)^2} = \sqrt{4.4} \approx 2.1$
	مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث BAC لأن القطر AC يقسمه إلى مثلثين متطابقين.
14	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6(15) - 2(8) + 11(5) = 129$ $ \vec{AB} = \sqrt{36 + 4 + 121} = \sqrt{161}$ $ \vec{AC} = \sqrt{225 + 64 + 25} = \sqrt{314}$ $m\angle BAC = \theta = \cos^{-1} \left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}} \right) \approx 55^\circ$ $Area(ABCD) = 2 \times \frac{1}{2} (AC)(AB) \sin \theta = \sqrt{161}\sqrt{314} \sin 55^\circ \approx 184.2$
15	$\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -q + 6 - 2 = 0 \Rightarrow q = 4$



16	$\langle -4 + 4u, 10 + 2u, p - u \rangle = \langle 8 - t, 2 + 3t, -12 + 2t \rangle$ $-4 + 4u = 8 - t \Rightarrow 4u + t = 12 \dots \dots \dots (1)$ $10 + 2u = 2 + 3t \Rightarrow 2u - 3t = -8 \dots \dots \dots (2)$ $p - u = -12 + 2t \Rightarrow p = 2t + u - 12 \dots \dots \dots (3)$ $(1) \times 3 + (2): 14u = 28 \Rightarrow u = 2, t = 4$ وبما أن المستقيمين متقاطعان، نتحقق المعادلة (3) أيضًا عند $u = 2, t = 4$ ويكون: $p = -2$ وتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي $M(4, 14, -4)$
17	العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه (نظرية)، والنقطة M (نقطة تقاطع l_1 و l_2) هي نقطة منتصف الوتر $\overline{AB}$. $\Rightarrow \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OA} + 2\vec{AM}$ $= \langle 9, -1, -14 \rangle + 2(\langle 4, 14, -4 \rangle - \langle 9, -1, -14 \rangle)$ $= \langle 9, -1, -14 \rangle + 2\langle -5, 15, 10 \rangle$ $= \langle -1, 29, 6 \rangle$
18	$\vec{OF} = \langle -19 + t, 14 - 3t, -5 + at \rangle$ $\vec{TF} = \langle -19 + t + 2, 14 - 3t - 5, -5 + at - 8 \rangle$ $= \langle -17 + t, 9 - 3t, -13 + at \rangle$ $\vec{TF} \perp l \Rightarrow \langle -17 + t, 9 - 3t, -13 + at \rangle \cdot \langle 1, -3, a \rangle = 0$ $\Rightarrow -17 + t - 3(9 - 3t) + a(-13 + at) = 0$ $\Rightarrow -17 + t - 27 + 9t - 13a + a^2t = 0$ $\Rightarrow (10 + a^2)t = 13a + 44$ $\Rightarrow t = \frac{13a + 44}{10 + a^2}$





	$\frac{13a + 44}{10 + a^2} = 5 \Rightarrow 5a^2 + 50 = 13a + 44$ $\Rightarrow 5a^2 - 13a + 6 = 0 \Rightarrow (5a - 3)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{5}, a = 2$
19	$\overrightarrow{OF} = \langle -19 + t, 14 - 3t, -5 + at \rangle$ $a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19 + 5, 14 - 15, -5 + 10 \rangle = \langle -14, -1, 5 \rangle$ $a = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19 + 5, 14 - 15, -5 + 3 \rangle = \langle -14, -1, -2 \rangle$
20	متجه الموقع لأي نقطة على المستقيم l هو: $\langle 3 + 7u, -2 - 7u, 4 + 5u \rangle$ تقع C على المستقيم l إذا وجد عدد حقيقي u حيث: $\langle 3 + 7u, -2 - 7u, 4 + 5u \rangle = \langle -4, 5, -1 \rangle$ $\Rightarrow 3 + 7u = -4, \quad -2 - 7u = 5, \quad 4 + 5u = -1$ $\Rightarrow u = -1, \quad u = -1, \quad u = -1$ إذن، C تقع على المستقيم l المعطى لأنها تنتج من تعويض $u = -1$ في معادلته المتجهة.
21	$\overrightarrow{AB} = \langle 1 - 3, -5 - (-2), 6 - 4 \rangle = \langle -2, -3, 2 \rangle$ $\Rightarrow \vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle -2, -3, 2 \rangle$ هي معادلة متجهة للمستقيم المطلوب.
22	$\overrightarrow{OD} = \langle 3 - 2t, -2 - 3t, 4 + 2t \rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3 - 2t + 4, -2 - 3t - 5, 4 + 2t + 1 \rangle = \langle 7 - 2t, -7 - 3t, 5 + 2t \rangle$ $\angle CDA$ قائمة، فإن $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AD}$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{CD}$ يعامد $\overrightarrow{AB}$ لأن D تقع على $\overrightarrow{AB}$. $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \langle -2, -3, 2 \rangle \cdot \langle 7 - 2t, -7 - 3t, 5 + 2t \rangle = 0$ $\Rightarrow -2(7 - 2t) - 3(-7 - 3t) + 2(5 + 2t) = 0$ $\Rightarrow -14 + 4t + 21 + 9t + 10 + 4t = 0$ $\Rightarrow 17t = -17 \Rightarrow t = -1$ $\overrightarrow{OD} = \langle 3 + 2, -2 + 3, 4 - 2 \rangle = \langle 5, 1, 2 \rangle$ $\Rightarrow D(5, 1, 2)$
23	اتجاه المستقيم الأول l_1: $\langle 2, -1, -2 \rangle$ اتجاه المستقيم الثاني l_2: $\langle 1, -2, 2 \rangle$ المستقيمان متعامدان لأن: $\langle 2, -1, -2 \rangle \cdot \langle 1, -2, 2 \rangle = 2(1) - 1(-2) - 2(2) = 0$



يتقاطع المستقيمان إذا وجدت قيم حقيقية t, u تحقق:

$$\langle 8 + 2t, 2 - t, -2t \rangle = \langle -9 + u, 21 - 2u, -4 + 2u \rangle$$

$$8 + 2t = -9 + u \Rightarrow 2t - u = -17 \dots \dots \dots (1)$$

$$2 - t = 21 - 2u \Rightarrow 2u - t = 19 \dots \dots \dots (2)$$

$$-2t = -4 + 2u \Rightarrow 2t + 2u = 4 \dots \dots \dots (3)$$

$$24 \quad (3) - (1): 3u = 21 \Rightarrow u = 7, \quad t = -5$$

نفحص تحقق المعادلة (2) عند هذه القيم: $\checkmark 2(7) - (-5) = 19$

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونجد نقطة التقاطع بتعويض $u = 7$ في معادلة l_2 :

$$\vec{r} = \langle -9 + 7, 21 - 14, -4 + 14 \rangle = \langle -2, 7, 10 \rangle$$

إذن، نقطة التقاطع هي: $E(-2, 7, 10)$



إيجاد التوافيق صفحة 31

1	$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$
2	$\binom{50}{1} = \frac{50!}{1!49!} = 50$
3	$\binom{100}{99} = \frac{100!}{99!1!} = 100$
4	$\binom{1000}{0} = \frac{1000!}{0!1000!} = 1$
5	$\binom{20}{20} = \frac{20!}{20!0!} = 1$
إيجاد التباديل صفحة 31	
6	$P(10,9) = \frac{10!}{1!} = 10! = 3628800$
7	$P(8,0) = \frac{8!}{8!} = 1$
8	$P(7,7) = \frac{7!}{0!} = 7! = 5040$
9	$P(6,1) = \frac{6!}{5!} = \frac{6(5!)}{5!} = 6$
10	$P(5,2) = \frac{5!}{3!} = \frac{5(4)3!}{3!} = 20$



المتغيرات العشوائية، وتوزيعها الاحتمالي صفحة 32

$$X \in \{0,1,2,3,4\}$$

$$P(X = 0) = P(TTTT) = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1) = P(\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = P(\{TTHH, THHT, HTHT, HTTH, THTH, HHTT\}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P(\{THHH, HHHT, HTHH, HHTH\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 4) = P(HHHH) = \frac{1}{16}$$

X	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$X \in \{1,2,3\}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{4}}{\binom{7}{5}} = \frac{1}{7}, P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{3}}{\binom{7}{5}} = \frac{4}{7}, P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}} = \frac{2}{7}$$

X	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$



$$X \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P(X = 0) = P(\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = P(\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\})$$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = 2) = P(\{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\})$$

$$= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 3) = P(\{(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 4) = P(\{(1,5), (2,6), (5,1), (6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(X = 5) = P(\{(1,6), (6,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

X	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين لمجموعة من المشاهدات صفحة 33

$$\mu = \frac{1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1 - 1 - 5 + 3}{10} = 1.4$$

$$\sum x^2 = 92$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\mu)^2 = \frac{92}{10} - 1.96 = 7.24$$

$$\sigma = \sqrt{7.24} \approx 2.7$$

$$\mu = \frac{-2 - 3 - 4 + 5 + 2 + 1 + 4 + 5}{8} = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n} = \frac{9 + 16 + 25 + 16 + 1 + 0 + 9 + 16}{8} = 11.5$$

$$\sigma = \sqrt{11.5} \approx 3.4$$



إيجاد التوقع، والتباين، والانحراف المعياري صفحة 34

16	$E(x) = \sum xp(x) = -0.2$ $\sigma^2 = \sum x^2p(x) - (E(x))^2 = 1(0.4) + 1(0.6) - (-0.2)^2 = 0.96$ $\sigma = \sqrt{0.96} \approx 0.98$
17	$\sum p(x) = 1 \Rightarrow 0.2 + 0.1 + 0.3 + k = 1 \Rightarrow k = 0.4$ $E(x) = \sum xp(x) = 1.9$ $\sigma^2 = \sum x^2p(x) - (E(x))^2 = 1(0.1) + 4(0.3) + 9(0.4) - (1.9)^2 = 1.29$ $\sigma = \sqrt{1.29} \approx 1.14$



الدرس الأول: التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين

1	$P(X = 4) = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{343}{4096} \approx 0.084$
2	$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$ $= \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^0 + \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^1 + \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0.414$
3	$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 1)$ $= 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^0 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$
4	$P(3 \leq X \leq 7)$ $= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$ $= \frac{1}{8} \left(\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^3 + \left(\frac{7}{8}\right)^4 + \left(\frac{7}{8}\right)^5 + \left(\frac{7}{8}\right)^6 \right) \approx 0.373$
5	$P(X < 2) = P(X = 1) = \frac{1}{8} = 0.125$
6	$P(X > 5) = \left(1 - \frac{1}{8}\right)^5 = \left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0.513$
7	$P(1 < X < 3) = P(X = 2) = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^1 = \frac{7}{64} \approx 0.109$
8	$P(4 < X \leq 6) = P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^4 + \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0.137$
9	$P(X = 4) = \binom{5}{4} (0.4)^4 (0.6)^1 \approx 0.077$
10	$P(X \geq 5) = P(X = 5) = \binom{5}{5} (0.4)^5 (0.6)^0 \approx 0.010$
11	$P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5))$ $= 1 - \left(\binom{5}{4} (0.4)^4 (0.6)^1 + \binom{5}{5} (0.4)^5 (0.6)^0 \right) \approx 0.913$
12	$P(3 < X \leq 5) = P(X = 4) + P(X = 5)$ $= \binom{5}{4} (0.4)^4 (0.6)^1 + \binom{5}{5} (0.4)^5 (0.6)^0 \approx 0.087$
13	$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ $= \binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2 + \binom{5}{4} (0.4)^4 (0.6)^1 + \binom{5}{5} (0.4)^5 (0.6)^0$ ≈ 0.317



14	$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ $= \binom{5}{0} (0.4)^0 (0.6)^5 + \binom{5}{1} (0.4)^1 (0.6)^4 + \binom{5}{2} (0.4)^2 (0.6)^3$ ≈ 0.683
15	$P(2 \leq X < 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$ $= \binom{5}{2} (0.4)^2 (0.6)^3 + \binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2 + \binom{5}{4} (0.4)^4 (0.6)^1$ ≈ 0.653
16	$P(5 < X < 8) = 0$
17	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.45} = \frac{20}{9} \approx 2.22$
18	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5$
19	$E(X) = np = 10(0.2) = 2$ $Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) = 10(0.2)(0.8) = 1.6$
20	$E(X) = np = 150(0.3) = 45$ $Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) = 150(0.3)(0.7) = 31.5$
21	$P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$ $= 0.1(0.9)^0 + 0.1(0.9)^1 + 0.1(0.9)^2 + 0.1(0.9)^3 = 0.3439$
22	$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3))$ $= 1 - (0.1 + 0.1(0.9) + 0.1(0.9)^2) = 0.729$ ويمكن حسابه باستعمال القاعدة: $P(X > x) = (1 - p)^x$ $P(X > 3) = (1 - 0.1)^3 = (0.9)^3 = 0.729$
23	ليكن X عدد الاهداف المسجلة في الرميات الـ 15 $\Rightarrow X \sim B(15, 0.1)$ $P(X = 3) = \binom{15}{3} (0.1)^3 (0.9)^{12} \approx 0.129$
24	ليكن X عدد الطلبة الذين سيحتاجون أوراقًا إضافية من بين الطلبة الثلاثين: $\Rightarrow X \sim B\left(30, \frac{3}{5}\right) \Rightarrow P(X = 10) = \binom{30}{10} \left(\frac{3}{5}\right)^{10} \left(\frac{2}{5}\right)^{20} \approx 0.002$
25	$P(X = 0) = \binom{30}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^{30} = \left(\frac{2}{5}\right)^{30} \approx 1.153 \times 10^{-12}$



1	$\mu_A = 15 > \mu_B = 12$ $\sigma_B > \sigma_A$ وذلك لأن قيم المتغير العشوائي في B أكثر انتشارًا من نظيراتها في المنحنى A
2	$P(0 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < 0) = 0.8849 - 0.5 = 0.3849$
3	$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
4	$P(Z < z) = 0.638$ الاحتمال المعطى (0.638) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 0.35$
5	$P(Z > z) = 0.6$ الاحتمال المعطى (0.6) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.6 \Rightarrow P(Z < z) = 0.6 \Rightarrow z = 0.25 \Rightarrow$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z = -0.25$
6	$P(0 < Z < z) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < 0) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) - 0.5 = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.95$ الاحتمال المعطى (0.95) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z \approx 1.64$
7	$P(-z < Z < z) = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) - (1 - P(Z < z)) = 0.8$ $\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.8$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9$ الاحتمال المعطى (0.9) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 1.28$

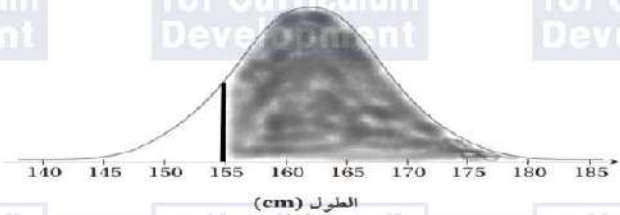


8	$P(X < 35) = P\left(Z < \frac{35 - 30}{10}\right) = P(Z < 0.5) = 0.6915$
9	$P(X > 38.6) = P\left(Z > \frac{38.6 - 30}{10}\right) = P(Z > 0.86) = 1 - P(Z < 0.86)$ $= 1 - 0.8051 = 0.1949$
10	$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20 - 30}{10}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0.8413$
11	$P(35 < X < 40) = P\left(\frac{35 - 30}{10} < Z < \frac{40 - 30}{10}\right) = P(0.5 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.5)$ $= 0.8413 - 0.6915 = 0.1498$
12	$P(15 < X < 32) = P\left(\frac{15 - 30}{10} < Z < \frac{32 - 30}{10}\right) = P(-1.5 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -1.5) = P(Z < 0.2) - (1 - P(Z < 1.5))$ $= P(Z < 0.2) + P(Z < 1.5) - 1 = 0.5793 + 0.9332 - 1 = 0.5125$
13	$P(17 < X < 19) = P\left(\frac{17 - 30}{10} < Z < \frac{19 - 30}{10}\right) = P(-1.3 < Z < -1.1)$ $= P(Z < -1.1) - P(Z < -1.3) = 1 - P(Z < 1.1) - (1 - P(Z < 1.3))$ $= P(Z < 1.3) - P(Z < 1.1) = 0.9032 - 0.8643 = 0.0389$
14	$P(X < x) = 0.3 \Rightarrow P(Z < z) = 0.3$ الاحتمال المعطى (0.3) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 0.3 \Rightarrow P(Z < z) = 0.7$ $\Rightarrow z = 0.52$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z = -0.52$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = -0.52 \Rightarrow x = 24.8$



15	$P(X > x) = 0.6915 \Rightarrow P(Z > z) = 0.6915$ الاحتمال المعطى (0.6915) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.6915 \Rightarrow P(Z < z) = 0.6915 \Rightarrow z = 0.5$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي $z = -0.5$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = -0.5 \Rightarrow x = 25$
16	$P(X < x) = 0.7516 \Rightarrow P(Z < z) = 0.7516$ الاحتمال المعطى (0.7516) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 0.67$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = 0.67 \Rightarrow x = 36.7$
17	$P(X > x) = 0.09 \Rightarrow P(Z > z) = 0.09$ الاحتمال المعطى (0.09) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z > z) = 0.09 \Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.09 = 0.91$ $\Rightarrow z = 1.34$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = 1.34 \Rightarrow x = 43.4$
18	$P(X > 1020) \Rightarrow P\left(Z > \frac{1020 - 1000}{10}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228$ إذن، النسبة المئوية للحاويات التي تريد كتلتها عن 1020 kg هي 2.28%
19	$P(990 < X < 1010) \Rightarrow P\left(\frac{990 - 1000}{10} < Z < \frac{1010 - 1000}{10}\right)$ $= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$ $= 2P(Z < 1) - 1$ $= 2(0.8413) - 1 = 0.6826$ إذن، النسبة المئوية للحاويات التي تتراوح كتلتها بين 990 kg و 1010 kg هي 68.26%
20	$P(X < 1020) = P\left(Z < \frac{1020 - 1000}{10}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$ إذن، النسبة المئوية للحاويات الصالحة للشحن هي 97.72%



21	
22	$P(X > 155) \Rightarrow P\left(Z > \frac{155 - 162}{6.3}\right) \approx P(Z > -1.11) = P(Z < 1.11)$ $= 0.8665$
23	$P(X > 169) \Rightarrow P\left(Z > \frac{169 - 162}{6.3}\right) \approx P(Z > 1.11) = 1 - 0.8665$ $= 0.1335$



تتنوع الإجابات لوجود عدد لانهائي من الفترات $[z_1, z_2]$ والتي يقع ضمنها النسبة المعطاة من الطالبات. هذه بعض الإجابات المحتملة:

- نختار البحث عن فترة على الشكل $[-1, z]$ بحيث: $P(-1 < Z < z) = 0.5$
 $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -1) = 0.5$
 $\Rightarrow P(Z < z) - (1 - P(Z < 1)) = 0.5$
 $\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 1) - 1 = 0.5$
 $\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 1) = 1.5$
 $\Rightarrow P(Z < z) + 0.8413 = 1.5$
 $\Rightarrow P(Z < z) = 0.6587$
 $\Rightarrow z = 0.4$

إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-1, 0.4]$

$$\frac{x_1 - 162}{6.3} = -1 \Rightarrow x_1 = 155.7$$

$$\frac{x_2 - 162}{6.3} = 0.4 \Rightarrow x_2 = 164.52$$

إذن، الفترة $[155.7, 164.52]$ من الأطوال تحوي 50% من الطالبات.

24

- نختار أيضًا الحل السهل $Z > 0$ والذي يشمل 50% من البيانات، أي الفترة $Z \in [0, \infty)$ وفي قيم X (الأطوال)، هذا يعني الفترة $(162, \infty)$

وبما أن المساحات عندما $Z > 3.4$ صغيرة جدًا، كما يظهر في جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فيمكن إهمالها ويمكن اعتبار أن 50% من الطالبات تقع أطوالهن ضمن $0 < Z < 3.4$ التي تقابل فترة

الأطوال $[162 \text{ cm}, 183.42 \text{ cm}]$. (لأن $x_2 = 162 + 3.4 \times 6.3 = 183.42$)

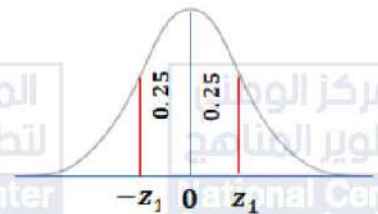
- ويمكننا أن نأخذ فترة على الصورة $[-z_1, z_1]$ تقع فيها أطوال 50% من الطالبات كما هو مبين في الرسم الآتي:

نلاحظ من الرسم أن المساحة على يسار z_1 تساوي 0.75

$$P(Z < z_1) = 0.75 \Rightarrow z_1 = 0.67$$

$$\Rightarrow x_1 = 0.67(6.3) + 162 \approx 166.2$$

$$\Rightarrow x_2 = -0.67(6.3) + 162 \approx 157.8$$



إذن، إحدى الفترات التي تقع ضمنها أطوال 50% من الطالبات هي: $(157.8 \text{ cm}, 166.2 \text{ cm})$



نختار أولاً البحث عن فترة من الشكل $[-2, z]$ حيث: $P(-2 < Z < z) = 0.815$

$$\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -2) = 0.815$$

$$\Rightarrow P(Z < z) - (1 - P(Z < 2)) = 0.815$$

$$\Rightarrow P(Z < z) + P(Z < 2) = 1.815$$

$$\Rightarrow P(Z < z) + 0.9772 = 1.815$$

$$\Rightarrow P(Z < z) = 0.8378$$

$$\Rightarrow z = 0.98$$

إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-2, 0.98]$

$$\frac{x_1 - 162}{6.3} = -2 \Rightarrow x_1 = 149.4$$

$$\frac{x_2 - 162}{6.3} = 0.98 \Rightarrow x_2 \approx 168.2$$

25

إذن، الفترة $[149.4, 168.2]$ من الأطوال تحوي 81.5% من الطالبات.

نختار أيضاً البحث عن فترة على الشكل $[-z, z]$ بحيث $P(-z < Z < z) = 0.815$

$$\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.815$$

$$\Rightarrow P(Z < z) - (1 - P(Z < z)) = 0.815$$

$$\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.815$$

$$\Rightarrow P(Z < z) = 0.9075$$

$$\Rightarrow z = 1.32$$

إذن، الفترة المطلوبة لقيم z هي: $[-1.32, 1.32]$

$$\frac{x_1 - 162}{6.3} = -1.32 \Rightarrow x_1 = 153.684 \approx 153.7$$

$$\frac{x_2 - 162}{6.3} = 1.32 \Rightarrow x_2 = 170.316 \approx 170.3$$

إذن، الفترة $[153.7, 170.3]$ من الأطوال تحوي تقريباً 81.5% من الطالبات.