الرياضيات

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات   أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2025/2)، تاريـخ 2025/2/25 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2025/50)، تاريـخ 2025/4/30 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2025 / 2026 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 783 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025 / 1 / 364)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات، كتاب الطالب: الصف الثاني عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الأول
إعداد / هيئة	الأردن، المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمّل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوي مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي: أ.د. خالد أبو اللوم　　**التصميم الجرافيكي:** راكان محمد السعدي　　**التحرير اللغوي:** نضال أحمد موسى

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الطبعة الأولى (التجريبية)　　1446 هـ / 2025 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ ســعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراســية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عناية كبيرةً، وأَعَدَّها وَفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انســجامها مع القِيَم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية تضمينها أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واستخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغْيَةَ إعداد الطلبة للدراســة الجامعية إعدادًا جيِّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرِّجة تتيح للطلبة فرصة تعلُّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضًا تقديــم الموضوعات بطريقة مُنظَّمة، وجاذبــة، ومُدعَّمة بتمثيلات بيانية، ومُزوَّدة بإرشــادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلُّمهم بسلاســة من دون تعثُّر؛ فهي تُذكِّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتســبوها سابقًا، وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطًا وثيقًا، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتية تُحفِّز الطلبة على تعلُّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حلِّ المســائل نهجٌ ناجعٌ في ترســيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائية؛ فقد تضمَّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرســي، بوصفه مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيَّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقِّق العدالة في التعلُّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة 1

الاقترانات والمقادير الجبرية
Functions and Algebraic Expressions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل الاقترانات والمقادير الجبرية لنمذجة كثير من التطبيقات الحياتية؛ لذا من المُهِمِّ فهم خصائصها وتحليلها. فمثلًا، يستعمل المهندسون خصائص الاقترانات والمقادير الجبرية لتصميم الطرق بشكل انسيابي لضمان قيادة المَرْكبات عليها بصورة آمنة، وتقدير قدرة تحمُّل الجسور والمباني.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ اقترانـات كثيـرات الحـدود، والاقترانـات النسـبية، وبعـض خـواصّ كلٍّ منهـا.
- ✓ قسـمة كثيـر حـدود على كثيـر حـدود آخر باسـتعمال القسـمة الطويلة.
- ✓ تحليل المقادير الجبرية الخطِّية والتربيعية غير الأوَّلية وحالات خاصة من درجات أعلى.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- تحليل كثيرات حدود باسـتعمال نظرية العوامل ونظرية الأصفار النسبية.
- كتابة مقادير نسـبية فـي صورة مجموع كسور جزئية.

أسـتعمل تدريبات (أسـتعد لدراسـة الوحدة) في الصفحات (6–10) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

نظريتا الباقي والعوامل

The Remainder and Factor Theorems

فكرة الدرس تعرُّف نظريتي الباقي والعوامل، واستعمالهما لتحليل اقترانات كثيرات الحدود وإيجاد أصفارها.

المصطلحات طريقة الجدول، نظرية الباقي، نظرية العوامل، أصفار الاقتران، نظرية الأصفار النسبية، معادلة كثير الحدود.

مسألة اليوم صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده بالأمتار: 2 , x, $x^2+6x-19$. ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ \mathrm{m}^3$؟

القسمة باستعمال الجدول

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ كثير الحدود بمُتغيِّر واحد يتكوَّن من وحيد حدٍّ أو أكثر، وأنَّ صورته العامة هي:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب، و $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ أعداد حقيقية.

يُسمّى الاقتران الذي يكون في صورة: $P(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ اقتران كثير حدود، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \;,\qquad P(x) = 5 \;,\qquad P(x) = 2-x$$

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة. فمثلًا، يُمكِن قسمة $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12)$ على $(x + 4)$ كما يأتي:

ناتج القسمة

المقسوم

المقسوم عليه

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline
x+4\,\big) & x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2} \\
 & \quad -2x^2 - 11x \\
 & \quad \underline{-2x^2 - 8x} \\
 & \qquad\quad -3x - 12 \\
 & \qquad\quad \underline{-3x - 12} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

بالضرب في x^2

بالطرح

بالضرب في $-2x$

بالطرح

بالضرب في -3

بالطرح

باقي القسمة

أتعلَّم

يُسمّى اقتران كثير الحدود أحيانًا كثير حدود فقط اختصارًا.

أتذكَّر

قبل البَدْء بقسمة كثيرات الحدود، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية.

أتذكَّر

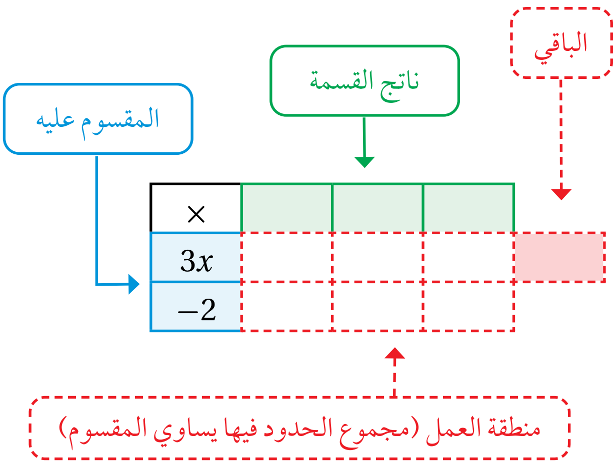
تتوقَّف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

طريقة الجدول (grid method) هي طريقة لقسمة كثيرات الحدود تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود، بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة.

مثال 1

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج: $(9x^3 - x + 3) \div (3x-2)$، ثمَّ أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا من 4 أعمدة (درجة ناتج القسمة +2) و3 صفوف (درجة المقسوم عليه +2)، ثمَّ أكتب حدود المقسوم عليه في العمود الأيسر، وأُضيف خانة الباقي إلى منطقة العمل.



الخطوة 2: أكتب الحدَّ الرئيس من المقسوم ($9x^3$) في الخانة اليسرى العليا من منطقة العمل.

×				
$3x$	$9x^3$			
-2				

الخطوة 3: أبحث عن حدٍّ جبري ناتج ضربه في $3x$ يساوي $9x^3$

بما أنَّ ناتج ضرب $3x$ في $3x^2$ يساوي $9x^3$، فإنَّني أكتب $3x^2$ أعلى الجدول.

×	$3x^2$			
$3x$	$9x^3$			
-2				

الخطوة 4: أضرِب $3x^2$ في -2، ثمَّ أكتب الناتج ($-6x^2$) في الخانة المُناظِرة للحدَّين المضروبين. وبما أنَّ المقسوم في المسألة الأصلية لا يحوي حدًّا من الدرجة الثانية، فإنَّني أُضيف $6x^2$ إلى منطقة العمل كي أحذف الحدَّ $-6x^2$. عند إضافة $6x^2$ إلى منطقة العمل، فإنَّه يُمكِن تحديد الحدِّ الثاني من ناتج القسمة، وهو ($2x$)؛ لأنَّ ناتج ضرب $3x$ في $2x$ يساوي $6x^2$

×	$3x^2$	$2x$		
$3x$	$9x^3$	$6x^2$		
-2	$-6x^2$			

أتعلَّم

درجة كثير الحدود هي أكبر أُسٍّ للمُتغيِّر في حدوده جميعها. وعند قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، فإنَّ درجة ناتج القسمة تكون مُساوِية للفرق بين درجتي المقسوم والمقسوم عليه.

أتذكَّر

يُكتَب المقسوم $9x^3 - x + 3$ بالصورة القياسية كما يأتي:

$9x^3 + 0x^2 - x + 3$

الخطوة 5: أَضـرِب $2x$ في -2، ثمَّ أكتب الناتج $-4x$ فـي منطقة العمل. وللحصول على الحدِّ ذي الدرجة 1 في المقسوم $(-x)$، يجب إضافة $3x$ إلى $-4x$ في منطقة العمل. عند إضافة $3x$، فإنَّه يُمكِن تحديد الحدِّ الأخير في ناتج القسمة، وهو (1)؛ لأنَّ ناتج ضرب $3x$ في 1 يساوي $3x$

$\times$	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	
-2	$-6x^2$	$-4x$		

الخطوة 6: أَضرِب 1 في -2، ثمَّ أكتب الناتج -2 في الخانة المُتبقِّية من منطقة العمل. وبما أنَّني لم أحصل على قيمة مُسـاوِية للحدِّ الأخير (الثابت) في المقسوم، فهذا يعني أنَّني بحاجة إلى إضافة العدد 5 فـي خانة الباقي؛ لأنَّ ناتج جمعه إلى العدد -2 يســاوي (3)، وهو الحدُّ الأخير (الثابت) في المقسوم، عندئذٍ يكون باقي القسمة 5

$\times$	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2	

الباقي

إذن، ناتج القسمة هو: $3x^2 + 2x + 1$، والباقي 5، ويُمكِنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3 - x + 3}{3x - 2} = 3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{3x - 2}$$

أتحقَّق من صِحَّة الحلِّ:

يُمكِننـي التحقُّق مـن صِحَّة الحلِّ بإيجاد مجمـوع الحدود في منطقة العمـل، والتحقُّق من مساواتها للمقسوم.

$$9x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 4x + 3x - 2 + 5 = 9x^3 - x + 3$$

أتحقَّق من فهمي

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$

b) $(2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$

أتذكَّر

مجموع الحدود في منطقة العمل يساوي المقسوم.

أتعلَّم

بما أنَّ المقسوم كثير حدود من الدرجة 3، والمقسوم عليه كثير حدود درجته 1، فإنَّ باقي القسمة من الدرجة 0، وناتج القسمة من الدرجة 2

نظرية الباقي

أُلاحِظ ممّا سبق أنَّه يُمكِن إيجاد باقي قسمة كثير حدود، مثل: $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ على كثير حدود من الدرجة 1، مثل: $(x-3)$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - x - 3 \\ \hline
x-3 & 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5 \\
 & (-)\ 2x^3 - 6x^2 \\ \hline
 & \qquad -x^2 + 0x \\
 & \qquad -x^2 + 3x \\ \hline
 & \qquad\qquad -3x + 5 \\
 & \qquad\qquad -3x + 9 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad \boxed{-4}
\end{array}
$$

الطريقة 2: طريقة الجدول.

$\times$	$2x^2$	$-x$	-3	
x	$2x^3$	$-x^2$	$-3x$	-4
-3	$-6x^2$	$3x$	9	

الباقي

ولكنْ، هل يُمكِن إيجاد باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود من الدرجة 1 بطريقة أبسط؟ في المثال أعلاه، أُقارِن بين باقي القسمة، وهو (-4)، وقيمة $P(3)$:

كثير الحدود المعطى	$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$
بتعويض $x = 3$	$P(3) = 2(3)^3 - 7(3)^2 + 5$
بالضرب	$= 54 - 63 + 5$
بالتبسيط	$= -4$

أُلاحِظ أنَّ قيمة $P(3)$ تساوي باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x-3)$، وهذا يقودنا إلى **نظرية الباقي** (remainder theorem).

أتذكَّر

إذا كان $f(x),\ h(x)$ كثيري حدود، وكان ناتج قسمة $f(x)$ على $h(x)$ هو $Q(x)$ والباقي $R(x)$، فإنَّ:

$f(x) = Q(x)h(x) + R(x)$

وتكون درجة $R(x)$ أقل من درجة $h(x)$.

مفهوم أساسي

نظرية الباقي

باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x-c)$ هو $P(c)$.

بوجه عام، فإنَّ باقي قسمة $P(x)$ على $(ax-b)$ هو $P(\frac{b}{a})$، حيث: $a \neq 0$.

مثال 2

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2,\ h(x) = x - 3$

باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = (x-3)$ هو $P(3)$:

كثير الحدود المعطى	$P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$
بتعويض $x = 3$	$P(3) = (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2$
بالضرب	$= 27 + 63 - 18 + 2$
بالتبسيط	$= 74$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 74

2 $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9,\ h(x) = x + 2$

لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x + 2$، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = x - (-2)$ ليكون الباقي $P(-2)$:

كثير الحدود المعطى	$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9$
بتعويض $x = -2$	$P(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9$
بالضرب	$= -16 - 20 + 8 + 9$
بالتبسيط	$= -19$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -19

3 $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1,\ h(x) = 2x - 1$

لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x - 1$، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = 2(x - \frac{1}{2})$ ليكون الباقي $P(\frac{1}{2})$:

كثير الحدود المعطى	$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$
بتعويض $x = \frac{1}{2}$	$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 4(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) + 1$
بالضرب	$= \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1$
بالتبسيط	$= -\frac{3}{4}$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{3}{4}$

أتحقَّق من فهمي

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2,\ h(x) = x-1$

b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6,\ h(x) = x+3$

c) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9,\ h(x) = 2x + 8$

نظرية العوامل

إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x - k)$ يساوي 0، فإنَّ:

$$\frac{f(x)}{x-k} = q(x)$$

حيث $q(x)$ كثير الحدود الناتج من القسمة. ومنه، فإنَّ:

$$f(x) = (x-k)\ q(x)$$

أيْ إنَّ $(x - k)$ عامل من عوامل $f(x)$، وهذا يُوضِّح **نظرية العوامل** (factor theorem) التي تُعَدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي

نظرية العوامل

يكون $(x-c)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P(c) = 0$.

بوجه عام، يكون $(ax - b)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$، حيث: $a \neq 0$.

إذا عُلِم أحد عوامل كثير الحدود، فإنَّه يُمكِن تحليله تحليلًا كاملًا، وذلك بكتابته في صورة حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يُمكِن تحليلها.

مثال 3

إذا كان: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

1 أُبيِّن أنَّ $(x + 4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

يكون $(x + 4)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان: $P(-4) = 0$؛ لذا أجد $P(-4)$.

كثير الحدود المعطى $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

بتعويض $x = -4$ $P(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12$

بالضرب $= -64 + 96 - 20 - 12$

بالتبسيط $= 0$

إذن، $(x + 4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

2 **أُحلِّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.**

بما أنَّ $(x + 4)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x + 4)$، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

×	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
$+4$	$4x^2$	$8x$	-12	

كثير الحدود المعطى $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

التحليل باستعمال القسمة $= (x + 4)(x^2 + 2x - 3)$

بتحليل ثلاثي الحدود $= (x + 4)(x + 3)(x - 1)$

إذن، $P(x) = (x + 4)(x + 3)(x - 1)$.

أتحقَّق من فهمي

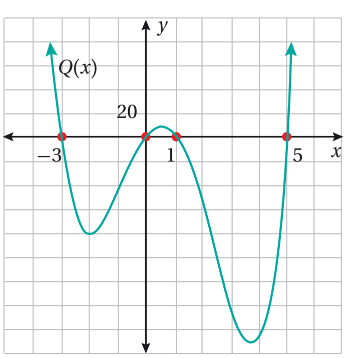
إذا كان: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أُبيِّن أنَّ $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$.

b) أُحلِّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.

الأصفار النسبية

أصفار **كثير الحدود** (zeros of a polynomial) هي قِيَم x التي يكون عندها $P(x) = 0$. وعند تمثيل كثير الحدود بيانيًّا، فإنَّ أصفاره هي إحداثيات x لنقاط تقاطع منحناه مع المحور x. فمثلًا، لكثير الحدود $Q(x)$ المعطى تمثيله البياني جانبًا، توجد 4 أصفار، هي: $-3, 0, 1, 5$، ويقطع عندها منحناه المحور x.



يُمكِن استعمال **نظرية الأصفار النسبية** (rational zero theorem) لإيجاد بعض الأصفار المُحتمَلة لكثيرات الحدود؛ بُغْيَةَ اختبارها.

نظرية الأصفار النسبية

مفهوم أساسي

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ كثير حدود معاملاته **أعداد صحيحة**، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون في صورة $\frac{p}{q}$، حيث p أحد عوامل الحدِّ الثابت (a_0)، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n).

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية

إذا كان: $a_n = 1$، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون أحد عوامل الحدِّ الثابت (a_0).

أتعلَّم

عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته.

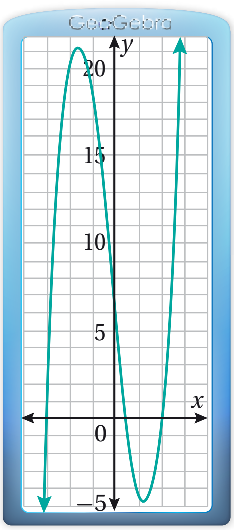
عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود، فإنَّه يُمكِن إيجاد أصفاره الأُخرى باستعمال القسمة والتحليل.

مثال 4

1 أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

الدعم البياني

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل $P(x)$ بيانيًّا وتحديد عدد أصفاره. أُلاحِظ أنَّ منحنى $P(x)$ يقطع محور x في 3 نقاط؛ ما يعني أنَّ $P(x)$ له 3 أصفار، ويُمكِنني التحقُّق من ذلك جبريًّا.



الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدِّ الثابت (6)، وهي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

أجد عوامل المعامل الرئيس (2)، وهي: $\pm1, \pm2$

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

أتذكَّر

لإيجاد الأصفار النسبية المُحتمَلة، أَقسِم عوامل الحدِّ الثابت على عوامل المعامل الرئيس، ثمَّ أكتب الأصفار النسبية المُحتمَلة في أبسط صورة.

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

هل $\frac{p}{q}$ صفر لكثير الحدود؟	$P\left(\frac{p}{q}\right)$	$\frac{p}{q}$
✗	$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$	-1
✗	$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$	1
✓	$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$	2

أتعلَّم

أتوقَّف عن التعويض عندما أجد أوَّل صفر لكثير الحدود.

بما أنَّ: $P(2) = 0$، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أنَّ $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ثمَّ تحليل كثيــر الحدود الناتج (إنْ أمكن).

$\times$	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 + 5x -3)$. ومنه، يُمكِن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ كثير الحدود المعطى

$= (x-2)(2x^2 + 5x -3)$ التحليل باستعمال القسمة

$= (x-2)(2x -1)(x + 3)$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن، $P(x) = (x-2)(2x-1)(x + 3)$.

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $2, \frac{1}{2}, -3$

أتعلَّم

أجد أصفار كثير الحدود بمســاواة كل عامــل من عوامله بالصفر:

$x-2 = 0 \rightarrow x = 2$

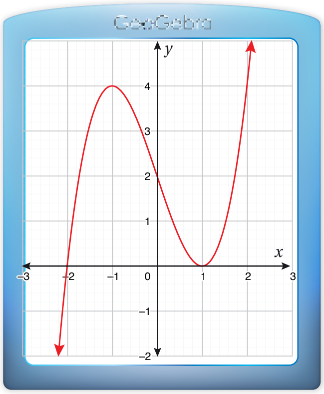
$2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

2 أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

الدعم البياني

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل $P(x)$ بيانيًّا وتحديد عدد أصفاره. أُلاحِظ أنَّ منحنى كثير الحدود يقطع محور x في نقطتين؛ ما يعني أنَّ $P(x)$ له صفران، ويُمكِنني التحقُّق من ذلك جبريًّا.



الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

بمــا أنَّ معامل الحدِّ الرئيس 1، فإنَّ الأصفار النســبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (2).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$\pm1, \pm2$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
-1	$P(-1) = (-1)^3 -3(-1) + 2 = 4$	✗
1	$P(1) = (1)^3 -3(1) + 2 = 0$	✓

بمــا أنَّ: $P(1) = 0$، فإنَّــه يوجــد لكثيــر الحــدود صفــر عندمــا $x = 1$. إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أنَّ $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

$\times$	x^2	x	-2	
x	x^3	x^2	$-2x$	0
-1	$-x^2$	$-x$	2	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 2)$. ومنه، يُمكِن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$P(x) = x^3 - 3x + 2$ كثير الحدود المعطى

$= (x-1)(x^2 + x - 2)$ التحليل باستعمال القسمة

$= (x-1)(x+2)(x-1)$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن، $P(x) = (x+2)(x-1)(x-1)$.

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي: $-2, 1$

أتحقَّق من فهمي

أجد جميع أصفار كثير الحدود في ما يأتي:

a) $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

b) $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

أتعلَّم

إنَّ عدم وجود أصفار نسبية لكثير الحدود لا يعني أنْ ليس له أصفار، وإنَّما يعني أنَّ هذه الأصفار هي أعداد غير نسبية.

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثير الحدود (polynomial equation) هي معادلة يُمكِن كتابتها في صورة: $P(x) = 0$، حيث $P(x)$ كثير حدود من أيِّ درجة، ويُسمّى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

يُمكِن حلُّ بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرائق التحليل البسيطة التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع، لكنَّ بعض معادلات كثيرات الحدود لا يُمكِن حلُّها باستعمال هذه الطرائق، عندئذٍ يُمكِن استعمال نظرية الأصفار النسبية لتحليل كثير الحدود المرتبط بالمعادلة، ثمَّ حلِّ المعادلة.

أتعلَّم

المعادلات الخطِّية والتربيعية والتكعيبية التي تعلَّمْتُها سابقًا هي حالات خاصة من معادلة كثير الحدود.

مثال 5

أحُلُّ المعادلة: $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$.

كثيــر الحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$. وبما أنَّه لا توجد طريقة واضحة لتحليله، مثل إخراج العامل المشــترك أو استعمال التجميع، فإنَّني أجد أحد أصفاره النسبية، ثمَّ أُحلِّله.

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بمــا أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو (1)، فإنَّ الأصفار النســبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (24).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
1	$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$	✗
2	$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$	✓

بمــا أنَّ: $P(2) = 0$، فإنَّــه يوجــد لكثيــر الحــدود صفــر عندمــا $x = 2$. إذن، $(x-2)$ عامــل مــن عوامــل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية، ثمَّ أَحُلُّ المعادلة.

بما أنَّ $(x-2)$ أحد عوامل كثير الحدود، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

$\times$	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	$-12x$	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 12)$. ومنه، يُمكِن تحليل كثير الحدود، وحلُّ المعادلة كما يأتي:

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x-2)(x^2 + x - 12) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

$(x-2)(x+4)(x-3) = 0$ بتحليل ثلاثي الحدود

$x-2 = 0 \quad \text{or} \quad x+4 = 0 \quad \text{or} \quad x-3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 2 \qquad x = -4 \qquad x = 3$ بحلِّ كل معادلة

إذن، حلول المعادلة هي: $x = 2, x = -4, x = 3$.

أتحقَّق من فهمي أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

b) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال معادلات كثيرات حدود يتطلَّب حلُّها استعمال نظرية الأصفار النسبية.

مثال 6 : من الحياة

هندسة العمارة: صنع مهندس معماري نموذجًا لبناية على هيئة هرم قاعدته مُربَّعة الشكل باستعمال طابعة ثلاثية الأبعاد. إذا كان ارتفاع النموذج يقل 2 dm عن طول ضلع قاعدته، وكان حجمه $25\ dm^3$، فما أبعاد النموذج؟

معلومة

الطباعة ثلاثية الأبعاد هي عملية تتمثَّل في صنع نماذج صُلْبة ثلاثية الأبعاد بعد رسمها في جهاز الحاسوب، وتتضمَّن وضع طبقات متتالية من المادة الخام حتّى يكتمل إنشاء النموذج.

الخطوة 1: أستعمل قانون حجم الهرم لكتابة معادلة.

بما أنَّ قاعدة الهرم مُربَّعة، فإنَّني أفترض أنَّ طول ضلعها x dm. ومنه، فإنَّ مساحتها x^2.

وبما أنَّ ارتفاع الهرم يقل 2 dm عن طول ضلع القاعدة، فإنَّ ارتفاع الهرم هو $(x-2)$ dm.

حجم الهرم V	=	$\frac{1}{3}$	×	مساحة القاعدة B	×	الارتفاع h
25	=	$\frac{1}{3}$	×	x^2	×	$(x-2)$

$x^3 - 2x^2 = 75$ بضرب طرفي المعادلة في 3

$x^3 - 2x^2 - 75 = 0$ بطرح 75 من طرفي المعادلة

أتذكَّر

حجم الهرم (V) يساوي ثلث مساحة قاعدته B في ارتفاعه (h).

الخطوة 2: أجد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة، وهو: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 75$.

بما أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو 1، فإنَّ الأصفار النسبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (-75).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1 , \pm3 , \pm5 , \pm15 , \pm25 , \pm75$$

الخطوة 3: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

بما أنَّ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا، فإنَّني أختبر الأصفار النسبية الموجبة فقط.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
3	$P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 75 = -66$	✗
5	$P(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 75 = 0$	✓

الخطوة 4: أُحلِّل المعادلة باستعمال الأصفار النسبية، ثمَّ أحُلُّها.

بمـا أنَّ $(x-5)$ أحد عوامـل كثير الحدود المرتبط بالمعادلة، فإنَّه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسـمة $P(x)$ علـى $(x-5)$، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن).

$\times$	x^2	$3x$	15	
x	x^3	$3x^2$	$15x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-75	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 3x + 15)$. ومنه، يُمكِن حلُّ المعادلة كما يأتي:

$x^3 - 2x^2 - 75 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x - 5)(x^2 + 3x + 15) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

$x - 5 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 3x + 15 = 0$ خاصية الضرب الصفري

بما أنَّ العامل التربيعي $(x^2 + 3x + 15)$ مُميِّزه سـالب، فإنَّه لا توجد له أصفار. ومن ثَمَّ، فإنَّ $x = 5$ هو الحلُّ الحقيقي الوحيد للمعادلة.

إذن، طول قاعدة النموذج 5 dm، وارتفاعه 3 dm

أتحقَّق من فهمي

يزيد ارتفـاع أسـطوانة 5 cm على طول نصـف قُطْر قاعدتهـا. إذا كان حجم الأسـطوانة 72π cm^3، فما طول نصف قُطْر قاعدتها وارتفاعها؟

إرشاد

بما أنَّ الارتفاع $(x - 2)$، فهذا يدلُّ على أنَّ $x > 2$؛ لـذا، أختبـر الأصفـار النسبية التي تزيد على 2

أتذكَّر

مُميِّز المعادلـة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو: $\Delta = b^2 - 4ac$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$

2) $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

3) $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6,\ h(x) = x + 1$

4) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8,\ h(x) = 3x + 4$

أُبيِّن أنَّ $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

5) $f(x) = x^3 - 37x + 84,\ h(x) = x + 7$

6) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6,\ h(x) = 2x - 3$

أُحلِّل كل اقتران ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

8) $g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

9) $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

10) $q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

11) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

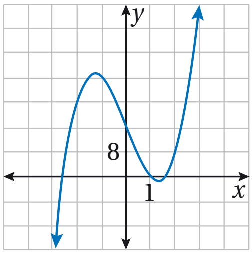
12) $5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

13) $3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

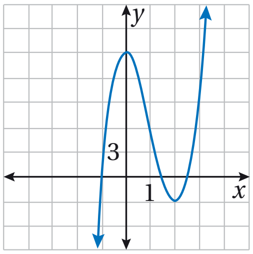
14) $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

أستعمل التمثيل البياني لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمَّ إيجاد جميع أصفار الاقتران:

15) $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$



16) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$



17 إذا كان: $x = 1, x = 4$ هما حلَّين للمعادلة: $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$، فأجد الحلَّ الثالث لها.

18 إذا كان باقي قسمة: $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x - 1$ يساوي مثلي باقي قسمته على $x + 1$، فما قيمة a؟

19 **منحوتات جليدية**: تُصنَع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق مِلْءِ قالب بالماء ثمَّ تجميده. إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مُربَّعة الشكل، وارتفاعها يزيد 1 m على طول قاعدتها، فأجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها 4 m^3

إذا كان: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$، حيث: a, b ثابتان، و $a, b \neq 0$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

20 إذا كان $(x - 3)$ عاملًا من عوامل الاقتران $f(x)$، فأُبيِّن أنَّ: $3a + b = 4$

21 إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي -15، فأُبيِّن أنَّ: $2a + b = 3$

22 أجد قيمة كلٍّ من a، و b.

23 أحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

24 **مسألة مفتوحة**: أكتب اقترانًا من الدرجة الثالثة يكون $(x - 3)$ أحد عوامله، ويكون باقي قسمته على $(x + 1)$ يساوي -8

25 **أكتشف الخطأ**: أرادت سهام إيجاد الأصفار النسبية المُحتمَلة للاقتران: $f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$، فكان حلُّها كالآتي:

$$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{16}, \pm \frac{1}{8}$$

أُبيِّن الخطأ الذي وقعت فيه سهام، ثمَّ أُصحِّحه.

26 **تحدٍّ**: إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x - 3)$ يساوي 4، وباقي قسمته على $(x + 2)$ يساوي 9، فأجد باقي قسمة $f(x)$ على $(x - 3)(x + 2)$.

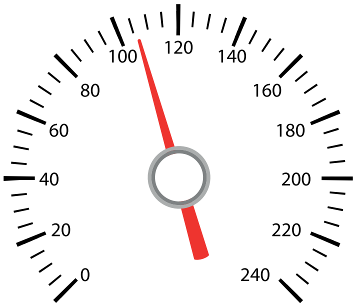
الدرس 2

الكسور الجزئية
Partial Fractions

فكرة الدرس كتابة المقدار الجبري النسبي الذي يُمكِن تحليل مقامه في صورة مجموع مقادير جبرية نسبية أبسط.

المصطلحات تجزئة المقادير النسبية، كسر جزئي.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتـران: $v = \frac{t^2 - 5t + 6}{(t+2)(t^2 - 1)}$ العلاقة بين سـرعة سـيّارة v بالكيلومتر لكل سـاعة والزمن t بالساعات. هل يُمكِن كتابة الاقتـران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحدهما $(t + 2)$، ومقام الآخر $(t^2 - 1)$؟



تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّ المقـدار الجبـري النسـبي هـو مقدار جبـري يُمكِـن كتابته في صورة كسـر بسـطه ومقامـه كثيـرا حـدود، وتعلَّمْتُ أيضًـا أنَّه عند جمـع مقدارين نسـبيين مختلفـي المقام أو طرحهمـا، فإنَّـه يجـب أوَّلًا توحيـد مقاميهمـا باسـتعمال المضاعـف المشـترك الأصغر (م. م. أ) للمقاميـن كمـا يأتي:

$$\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)} - \frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$ بتوحيد المقامين

$$= \frac{3x + 6 - 2x + 8}{(x-4)(x+2)}$$ بطرح البسطين

$$= \frac{x + 14}{(x-4)(x+2)}$$ بالتبسيط

إرشاد
يشـير مصطلح المقدار النسـبي إلـى المقـدار الجبري النسبي أينما ورد في هذه الوحدة.

تجزئة المقادير النسبية (decomposition of rational expressions) هي عملية عكسية للعملية السـابقة، ينتج منها كتابة المقدار النسبي في صورة مجموع مقادير جبرية نسبية، يُبسَّط كلٌّ منها في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث P و Q كثيرا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q، ويُسمّى كلٌّ من هذه المقادير النسبية **كسرًا جزئيًّا** (partial fraction).

كسر جزئي　　　　كسر جزئي

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

تجزئة المقدار النسبي

تعتمد عملية تجزئة المقادير الجبرية النسبية على عوامل المقام. سأتعلَّم في هذا الدرس ثلاث حالات مختلفة من التجزئة تبعًا لنوع عوامل المقام، وهي:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية، أحدها مُكرَّر.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله (مُميِّزه سالب).

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطِّية مختلفة

إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي خطِّية، فإنَّه ينتج من كلٍّ منها كسر جزئي بسطه ثابت ومقامه العامل الخطِّي في الصورة الآتية:

ثابت

$$\frac{A}{ax+b}$$

عامل خطِّي

مفهوم أساسي **تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطِّية مختلفة**

إذا كان $Q(x)$ كثير حدود يُمكِن تحليله تحليلًا كاملًا من دون تكرار أيِّ عامل في الصورة الآتية:

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)(a_3 x + b_3)\ldots(a_n x + b_n)$$

فإنَّه يُمكِن تجزئة المقدار الجبري النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث درجة P أقل من درجة Q، في الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

مثال 1

أُجزِّئ $\frac{2x-13}{x^2-x-2}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة 1: أُحلِّل المقام تحليلًا كاملًا.

$$\frac{2x-13}{x^2-x-2} = \frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثِّل قِيَمًا مجهولةً.

أكتب كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطِّيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمَّ أكتب رمزًا في بسط كل كسر:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}$$

الخطوة 3: أضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x-2)(x+1)$، فإنَّ:

$$(x-2)(x+1)\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = (x-2)(x+1)\left(\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x-13 = A(x+1) + B(x-2)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلٍّ من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(2)-13 = A(2+1) + B(2-2)$$ بتعويض $x = 2$

$$-9 = 3A$$ بالتبسيط

$$A = -3$$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

أتعلَّم

تعويض $x = 2$ يحذف المُتغيِّر B، ويجعل المعادلة بمُتغيِّر واحد، وهو A؛ ما يجعل إيجاد قيمته مُمكِنًا.

- بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة:

بتعويض $x = -1$
$$2(-1) - 13 = A(-1+1) + B(-1-2)$$

بالتبسيط
$$-15 = -3B$$

بقسمة طرفي المعادلة على -3
$$B = 5$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = \frac{-3}{(x-2)} + \frac{5}{(x+1)}$$

أتحقَّق من فهمي

أُجزِّئ كل مقدار نسبي ممّا يأتي إلى كسور جزئية:

a) $\frac{x}{x^2-5x+6}$

b) $\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$

أتعلَّم

تعويض $x = -1$ يحذف المُتغيِّر A، ويجعل المعادلة بمُتغيِّرٍ واحد، وهو B؛ ما يجعل إيجاد قيمته مُمكِنًا.

أتعلَّم

إذا كان مقام المقدار النسبي كثير حدود من الدرجة الثالثة فتحليله يكون إمّا بإخراج عامل مشترك، وإمّا باستعمال التجميع، وإمّا باستعمال نظرية الأصفار النسبية ونظرية العوامل.

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطِّية، أحدها مُكرَّر

في بعض الحالات، ينتج من التحليل الكامل لمقام المقدار النسبي تكرار أحد العوامل الخطِّية.

مفهوم أساسي: تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطِّية، أحدها مُكرَّر

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل خطِّي مُكرَّر n من المرّات، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمَّن الحدود الآتية:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

مثال 2

أُجزِّئ $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة 1: أُحلِّل المقام تحليلًا كاملًا.

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{-x^2+2x+4}{x(x^2-4x+4)}$$ بإخراج x عاملًا مشتركًا

$$= \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)(x-2)}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}$$ بالتبسيط

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثِّل قِيَمًا مجهولةً.

أكتب ثلاثة كسور جزئية مقاماتها عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمَّ أكتب رمزًا في بسط كل كسر. أُلاحِظ أنَّ تحليل المقام هو $x(x-2)^2$، وأنَّ العامل $(x-2)$ مُكرَّر مَرَّتين في هذا التحليل؛ لذا يجب أنْ تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور مقاماتها هي: $x, (x-2), (x-2)^2$.

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

الخطوة 3: أَضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية، وهو $x(x-2)^2$، فإنَّ:

$$x(x-2)^2 \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = x(x-2)^2 \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$-x^2+2x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلٍّ من الثوابت A و B و C باستعمال التعويض.

- بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$-(0)^2 + 2(0) + 4 = A(0-2)^2 + B(0)(0-2) + C(0)$$ بتعويض $x=0$

$$4 = 4A$$ بالتبسيط

$$A = 1$$ بقسمة طرفي المعادلة على 4

أتعلَّم

أتجنَّب الخطأ الشائع الآتي:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \cancel{\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-2}}$$

تكرار العامل الخطِّي من دون استعمال القوَّة لا يعطي تجزئة صحيحة للمقدار النسبي.

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

بتعويض $x = 2$	$-(2)^2 + 2(2) + 4 = A(2-2)^2 + B(2)(2-2) + C(2)$
بالتبسيط	$4 = 2C$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$C = 2$

- بتعويض أيِّ قيمة أُخرى للمُتغيِّر x (مثل: $x = 1$) في المعادلة الناتجة، إضافةً إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

بتعويض $A = 1,$ $C = 2, x = 1$	$-(1)^2 + 2(1) + 4 = (1)(1-2)^2 + B(1)(1-2) + (2)(1)$
بالتبسيط	$5 = 3 - B$
بطرح 3 من طرفي المعادلة	$2 = -B$
بقسمة طرفي المعادلة على -1	$B = -2$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{-x^2 + 2x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

أتعلَّم

لا يُمكِن تعويض $x = 0$ أو $x = 2$ في المعادلة الناتجة؛ لأنَّ ذلك سيؤدّي إلى حذف قيمة B المطلوب إيجادها.

أتحقَّق من فهمي

أُجزِّئ $\frac{x^2 + 8x + 4}{x^3 - 2x^2}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غيرمُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله

تعلَّمْتُ في المثالين السابقين تجزئة مقادير نسبية، جميع عوامل مقاماتها كثيرات حدود خطِّية. ولكنْ في بعض الحالات، قد يحوي تحليل المقام عاملًا تربيعيًّا لا يُمكِن تحليله، عندئذٍ ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي بسطه كثير حدود خطِّي في صورة $Ax + B$، ومقامه العامل التربيعي.

مفهوم أساسي

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا جبريًّا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله وهو $(ax^2 + bx + c)$، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمَّن الحدَّ $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$

مثال 3

أُجزِّئ $\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)}$ إلى كسور جزئية.

بما أنَّ المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يُمكِن تحليله، فإنَّ بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتًا، وبسط الآخر سيكون مقدارًا خطِّيًّا.

الخطوة 1: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتًا في بسط العامل الخطِّي، ومقدارًا خطِّيًّا في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x^2+9)}$$

الخطوة 2: أضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$، فإنَّ:

$$(x+1)(x^2+9)\,\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)} = (x+1)(x^2+9)\left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x^2+9)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x^2 - 3x + 16 = A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x + 1)$$

الخطوة 3: أجد قيمة كلٍّ من الثوابت A و B و C باستعمال التعويض.

- بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة:

$$(-1)^2 - 3(-1) + 16 = A((-1)^2 + 9) + (B(-1) + C)(-1 + 1)$$ بتعويض $x = -1$

$$20 = 10A$$ بالتبسيط

$$A = 2$$ بقسمة طرفي المعادلة على 10

- بتعويض $x = 0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة:

بتعويض $x = 0, A = 2$
$$(0)^2-3(0)+16 = 2((0)^2+9)+(B(0)+C)(0+1)$$

بالتبسيط
$$16 = 18 + C$$

بطرح 18 من طرفي المعادلة
$$C = -2$$

- بتعويض أيِّ قيمة أُخرى للمُتغيِّر x (مثل: $x = 1$) في المعادلة الناتجة، إضافةً إلى تعويض قيمتي A وC الناتجتين:

بتعويض $x = 1$, $A = 2, C = -2$
$$(1)^2-3(1)+16 = 2((1)^2+9)+(B(1)+(-2))(1+1)$$

بالتبسيط
$$14 = 2B + 16$$

بطرح 16 من طرفي المعادلة
$$-2 = 2B$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2
$$B = -1$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-x-2}{(x^2+9)}$$

أتحقَّق من فهمي

أُجزِّئ $\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي، درجة كثير الحدود في بسطه مُساوِية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية مختلفة في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث P و Q كثيرا حدود، ولا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q. ولكنْ، إذا كانت درجة P مُساوِية لدرجة Q أو أكبر منها، فيجب أوَّلًا تجهيز المقدار النسبي باستعمال القسمة الطويلة، وذلك بقسمة P على Q.

مثال 4

أُجزِّئ $\dfrac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}$ إلى كسور جزئية.

بما أنَّ درجة البسط مُساوِية لدرجة المقام، فإنَّني أَقسِم أوَّلًا البسط على المقام، ثمَّ أُجزِّئ.

الخطوة 1: أَقسِم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثمَّ أكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يُمثِّل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline x^2+6x-16 & 2x^2+13x+6 \\ & (-)\ 2x^2+12x-32 \\ \hline & \qquad\quad x+38 \end{array}$$

إذن، ناتج القسمة 2، والباقي $x + 38$. ومنه، فإنَّ:

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{x+38}{x^2+6x-16}$$

الخطوة 2: أُحلِّل مقام باقي القسمة تحليلًا كاملًا، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثِّل قِيَمًا مجهولةً.

أكتب كسرين جزئيين مقاماهما عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمَّ أكتب رمزًا في بسط كلٍّ منهما:

$$\frac{x+38}{x^2+6x-16} = \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}$$

$$\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}$$

الخطوة 3: أَضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x+8)(x-2)$، فإنَّ:

$$(x+8)(x-2)\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = (x+8)(x-2)\left(\frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x+38 = A(x-2) + B(x+8)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلٍّ من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

• بتعويض $x = -8$ في المعادلة الناتجة:

$-8 + 38 = A(-8-2) + B(-8+8)$ بتعويض $x = -8$

$30 = -10A$ بالتبسيط

$A = -3$ بقسمة طرفي المعادلة على -10

• بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$2 + 38 = A(2-2) + B(2+8)$ بتعويض $x = 2$

$40 = 10B$ بالتبسيط

$B = 4$ بقسمة طرفي المعادلة على 10

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2 + 13x + 6}{x^2 + 6x - 16} = 2 + \frac{-3}{x+8} + \frac{4}{x-2}$$

أتحقَّق من فهمي

أُجزِّئ $\frac{3x^2 + 12x + 4}{x^2 + x}$ إلى كسور جزئية.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\frac{2x - 5}{(x+2)(x+3)}$

2) $\frac{2x + 22}{x^2 + 2x}$

3) $\frac{4x - 30}{x^2 - 8x + 15}$

4) $\frac{6x^2 - 7x + 10}{(x-2)(x^2+1)}$

5) $\frac{2 - 3x - 4x^2}{x(x-1)(1-2x)}$

6) $\frac{x}{8x^2 - 10x + 3}$

7) $\frac{1}{2x^3 - 3x^2 - 32x - 15}$

8) $\frac{9x^2 - 9x + 6}{2x^3 - x^2 - 8x + 4}$

9 $\dfrac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}$

10 $\dfrac{(x-3)^2}{x^3-16x}$

11 $\dfrac{7x-3}{x^2-8x+16}$

12 $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

13 $\dfrac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}$

14 $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$

15 $\dfrac{x^2+2x+40}{x^3-125}$

16 $\dfrac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}$

17 $\dfrac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

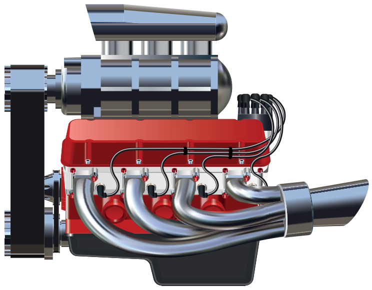
18 $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

19 أُبيِّن أنَّه يُمكِن كتابة $\dfrac{1}{x^2-a^2}$ في صورة $\dfrac{1}{2a(x+a)} - \dfrac{1}{2a(x-a)}$ ، حيث a عدد حقيقي لا يساوي صفرًا.

20 إذا كان: $\dfrac{3p}{(x+3)^2} - \dfrac{p}{x+3} = \dfrac{5x}{(x+3)^2}$ ، فأجد قيمة p.

21 إذا كان: $\dfrac{8p}{3(x-1)^2} + \dfrac{p}{9(x-1)} - \dfrac{px-37}{9(x^2+2)} = \dfrac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)}$ ، فأجد قيمة p.

هندسة ميكانيكية: يُستعمَل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم مُحرِّك ديزل:



$$R(x) = \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)} \,,\ 0 \le x \le 1$$

حيث x مقدار جهد المُحرِّك، و $R(x)$ درجة الحرارة بالفهرنهايت:

22 أُجزِّئ الاقتران $R(x)$ إلى كسور جزئية.

23 إذا كان $R(x)$ يُمثِّل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقل درجة حرارة للعادم، فأجد كُلًّا من الاقترانين، وأستعين بالسؤال السابق في عملية الحلِّ.

24 أحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

25 $\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x^4}$

26 $\frac{2x^2 + 6x - 5}{(x-2)^3}$

27 $\frac{3x^3 + 12x - 20}{x^4 - 8x^2 + 16}$

28 أكتشف الخطأ: بدأت رنيم خطوات تجزئة المقدار $\frac{5x + 2}{(x + 3)^2}$ كالآتي:

$$\frac{5x + 2}{(x + 3)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 3}$$

أُحدِّد الخطأ الذي وقعت فيه رنيم، ثمَّ أُصحِّحه.

29 تبرير: إذا كان: $\frac{ax + b}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$، فأجد قيمة كلٍّ من A وB بدلالة المُتغيِّرين a وb، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

30 مسألة مفتوحة: أكتب اقترانًا نسبيًّا في صورة $\frac{f(x)}{g(x)}$، بحيث تحتوي مقامات كسوره الجزئية على عوامل خطِّية غير مُكرَّرة.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 باقي قسمة: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 9$ على $(x+2)$ يساوي:

a) 3 b) -1 c) 9 d) 27

2 إذا كان $(x-3)$ عاملًا من عوامل: $g(x) = 2x^3 + x^2 + px - 6$، فإنَّ قيمة p هي:

a) -17 b) -3 c) 10 d) -19

3 إذا كان: $\frac{1}{x+k} - \frac{2}{x-2} = \frac{x-4}{x^2 - 5x - 2k}$، فإنَّ k تساوي:

a) -3 b) -2 c) 2 d) 3

4 إذا كان: $\frac{B}{x-4} + \frac{A}{x+1} = \frac{5x-12}{x^2 - 3x - 4}$، فإنَّ قيمة $A + B$ هي:

a) -12 b) -7 c) 3 d) 5

5 إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ هو 2، وباقي قسمته على $(x-2)$ هو 5، فإنَّ باقي قسمة $f(x)$ على $(x-1)\ (x-2)$ هو:

a) 10 b) $1 - x$

c) $2x - 1$ d) $3x - 1$

أُحلِّل كُلًّا ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

6 $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$

7 $8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6$

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

8 $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

9 $x^3 + 16x^2 - 3x = 5x^2 - 18x + 27$

10 إذا كان باقي قسمة كلٍّ من المقدارين: $mx^3 + x^2 - 10x - 6$، و $2x^3 - 4x^2 + mx + 8$ على $(x-2)$ متساويًا، فأجد قيمة الثابت m.

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

11 $\frac{6}{(x+3)(x+1)}$

12 $\frac{5x^2 - 6}{x^3 - 2x^2 + x}$

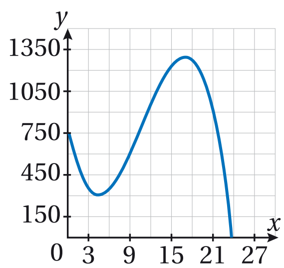
13 $\frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 2x}$

14 $\frac{4x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2}$

15 إذا كان: $\frac{b}{x-3} + \frac{9}{x-a} - = \frac{7x-5}{(x-a)(x-3)}$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

16 إذا كان العدد (-2) هو أحد حلول المعادلة: $x^3 + 5x^2 + 5x - 2 = 0$، فأجد حلولها الأُخرى.

17 أستعمل التمثيل البياني المجاور للاقتران: $f(x) = -x^3 + 32x^2 - 224x + 768$ لأُحلِّله تحليلًا كاملًا.



18 يريد حدّاد أنْ يصنع خزّان ماء على هيئة متوازي مستطيلات، بحيث يزيد طوله 1 m على مثلي عرضه، ويزيد ارتفاعه 1 m على عرضه، ويكون حجمه $30\ m^3$. كم مترًا مُربَّعًا من الحديد يَلزمه لصنع خزّان الماء؟

الوحدة

2

المتطابقات والمعادلات المثلثية

Trigonometric Identities and Equations

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعَدُّ حساب أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا من أهم تطبيقات الاقترانات المثلثية ومعادلاتها. يُستعمَل هذا التطبيق على نطاق واسع في العلوم المختلفة، مثل: علم المساحة، وعلم الملاحة. وهو يُستعمَل أيضًا في تفسير بعض الظواهر الفيزيائية، مثل ظاهرة انكسار الضوء الأبيض؛ أيِ انحراف الضوء عن مساره عند انتقاله من وسط شفّاف إلى وسط شفّاف آخر.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ماهيَّة دائرة الوحدة، ووضع الزاوية القياسي.
- إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.
- حلَّ معادلات مثلثية، بحيث تكون مجموعة الحلِّ ضمن الدورة الواحدة.
- استعمال العلاقة الآتية لحلِّ المثلث القائم الزاوية: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية.
- استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط المقادير المثلثية، وإثبات صِحَّة متطابقات مثلثية أُخرى.
- حلَّ المعادلات المثلثية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (17–13) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

المتطابقات المثلثية 1
Trigonometric Identities 1

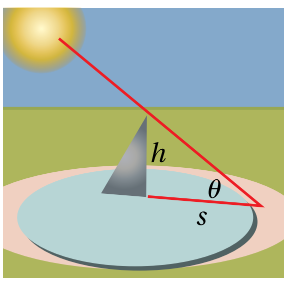
فكرة الدرس

- استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية.
- استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط المقادير المثلثية، وإثبات صِحَّة متطابقات مثلثية.
- إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- إثبات صِحَّة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

المصطلحات متطابقة مثلثية.

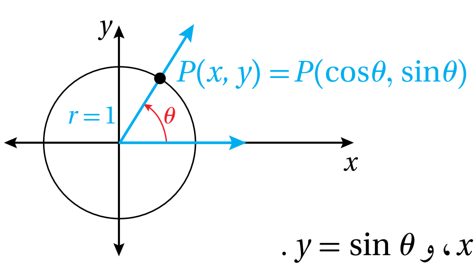
مسألة اليوم

تُعَدُّ المِزْولة الشمسية أوَّل ساعة اخترعها الإنسان، وقد استعملها المسلمون لتحديد أوقات الصلاة. يُبيِّن الشكل المجاور مِزْولة شمسية ارتفاعها h وحدة، وتُمثِّل المعادلة: $s = \dfrac{h \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin \theta}$ طول ظلِّ المِزْولة عندما يكون قياس زاوية سقوط أشعة الشمس θ. هل يُمكِن كتابة معادلة طول الظلِّ بصورة أبسط؟



المتطابقات المثلثية الأساسية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا رُسِمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإنَّ ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$ كما يظهر في الشكل المجاور. ومنه، فإنَّ: $x = \cos \theta$، و $y = \sin \theta$.



أُلاحِظ أنَّ النقطة $P(x, y)$ تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل، ونصف قُطْرها وحدة واحدة؛ لذا تنتج المعادلتان الآتيتان:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّ المعادلة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ صحيحة لجميع قِيَم θ؛ لذا تُسمّى **متطابقة مثلثية** (trigonometric identity).

رموز رياضية

$\sin^2 \theta$ تعني $(\sin \theta)^2$.

$\cos^2 \theta$ تعني $(\cos \theta)^2$.

في ما يأتي المتطابقات المثلثية الأساسية الناتجة بصورة مباشرة من تعريف الاقترانات المثلثية الستة التي درسْتُها سابقًا.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية الأساسية

- **متطابقات المقلوب:**

$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ $\quad$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

- **المتطابقات النسبية:**

$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ $\quad$ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

- **متطابقات فيثاغورس:**

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ $\quad$ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ $\quad$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

- **متطابقات الزاويتين المتتامتين:**

$\sec (\frac{\pi}{2} - \theta) = \csc \theta$ $\quad$ $\tan (\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$ $\quad$ $\sin (\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$

$\csc (\frac{\pi}{2} - \theta) = \sec \theta$ $\quad$ $\cot (\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$ $\quad$ $\cos (\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$

- **متطابقات الزاوية السالبة:**

$\tan (-\theta) = -\tan \theta$ $\quad$ $\cos (-\theta) = \cos \theta$ $\quad$ $\sin (-\theta) = -\sin \theta$

أتعلّم

يُمكِن أيضًا كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات، مثل:

$\sin (90° - \theta) = \cos \theta$

يُمكِن استعمال المتطابقات الأساسية لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية.

مثال 1

أجد قيمة $\sec \theta$ إذا كان: $\sin \theta = \frac{3}{5}$، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقات فيثاغورس

$(\frac{3}{5})^2 + \cos^2 \theta = 1$ بتعويض $\sin \theta = \frac{3}{5}$

$\cos^2 \theta = \frac{16}{25}$ بالتبسيط

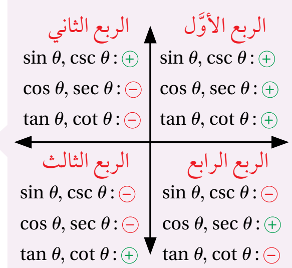
$\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$\cos \theta = -\frac{4}{5}$ جيب التمام سالب في الربع الثاني

$\frac{1}{\cos \theta} = -\frac{5}{4}$ بأخذ المقلوب لكلا الطرفين

$\sec \theta = -\frac{5}{4}$ متطابقات المقلوب

أتذكّر



أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة $\tan\theta$ إذا كان: $\sec\theta = -\frac{3}{2}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

تبسيط المقادير المثلثية وإعادة كتابتها

تبســيط المقادير المثلثية هو كتابة المقادير بدلالة اقتران مثلثي واحد فقط (إنْ أمكن)، ويُمكِن ذلك باستعمال المتطابقات المثلثية.

مثال 2

أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية:

1 $\sin x \cos^2 x - \sin x$

$\sin x \cos^2 x - \sin x = \sin x(\cos^2 x - 1)$ بإخراج العامل المشترك

$= -\sin x(1 - \cos^2 x)$ باستعمال خاصية التوزيع

$= -\sin x \sin^2 x$ متطابقات فيثاغورس

$= -\sin^3 x$ بالضرب

2 $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin x(1+\sin x) + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$ بتوحيد المقامات

$= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \frac{\sin x + 1}{\cos x(1+\sin x)}$ متطابقات فيثاغورس

$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$ بالتبسيط، واستعمال متطابقات المقلوب

3 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot x = \sin x \cot x$ متطابقات الزاويتين المتتامتين

$= \sin x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ المتطابقات النسبية

$= \cos x$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية:

a) $\sin x\,(\csc x - \sin x)$ b) $1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\sec x$

أحتاج في بعض المسائل إلى إعادة كتابة المقادير المثلثية بحيث لا تحوي كسرًا، ويُمكِن عمل ذلك أحيانًا باستعمال الضرب في المُرافِق. فمثلًا، عندما يكون المقام في صورة $1 \pm u$، أو صورة $u \pm 1$، فإنَّني أَضرِب البسط والمقام في مُرافِق المقام، ثمَّ أُطبِّق متطابقات فيثاغورس.

مثال 3

أُعيد كتابة $\dfrac{1}{1+\sin x}$ بحيث لا يحوي كسرًا.

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$
بضرب البسط والمقام في مُرافِق $1+\sin x$، وهو $1-\sin x$

$$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$
بالضرب

$$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$
متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
بكتابة الكسر في صورة فرق بين كسرين

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$$
بالتحليل

$$= \sec^2 x - \tan x \sec x$$
متطابقات المقلوب، والمتطابقات النسبية

رموز رياضية

يُعَدُّ كلٌّ من العاملين: $a-b$، و $a+b$ مُرافِقًا للآخر، وينتج من ضربهما الفرق بين المُربَّعين: $a^2 - b^2$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\dfrac{1}{1+\cos x}$ بحيث لا يحوي كسرًا.

إثبات صِحَّة متطابقة مثلثية

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية، إضافةً إلى تعريف الاقترانات المثلثية، لإثبات صِحَّة متطابقات مثلثية أُخرى، عن طريق تحويل أحد طرفي المتطابقة المثلثية المراد إثبات صِحَّتها إلى الطرف الآخر باتِّباع سلسلة من الخطوات، كلٌّ منها تُعَدُّ متطابقة.

في ما يأتي بعض المبادئ العامة التي تساعدني على إثبات صِحَّة المتطابقات المثلثية:

- **البَدْء بأحد طرفي المتطابقة**: أختار أحد طرفي المتطابقة، الذي يكون أكثر تعقيدًا فيها غالبًا.
- **استعمال المتطابقات المثلثية المعروفة**: يُمكِنني استعمال المتطابقات المثلثية التي أعرفها، إضافةً إلى بعض المهارات الجبرية، لتحويل الطرف الذي اخترته بدايةً.
- **التحويل إلى اقتران الجيب أو جيب التمام**: من المفيد أحيانًا إعادة كتابة جميع الاقترانات بدلالة اقتران الجيب وجيب التمام.

مثال 4

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

1 $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\sin x \tan x = \sin x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$ المتطابقات النسبية

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$ بالضرب

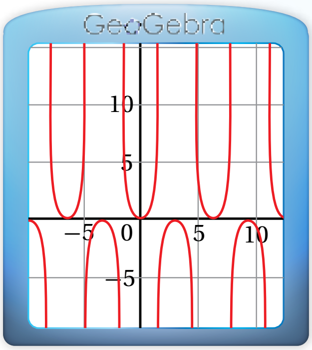
$$= \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{1}{\cos x} - \cos x$$ بكتابة الكسر في صورة فرق بين كسرين

$$= \sec x - \cos x \quad ✓$$ متطابقات المقلوب

الدعم البياني:

يُمكِنني أيضًا إثبات صِحَّة متطابقة بيانيًّا عن طريق تمثيل كل طرف منها بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، والتحقُّق من تطابق التمثيلين البيانيين. أُلاحِظ تطابق التمثيل البياني للمعادلتين: $y = \sin x \tan x$، و $y = \sec x - \cos x$؛ ما يعني أنَّ المتطابقة صحيحة.



أتعلَّم

ليس شرطًا البَدْء دائمًا بالطرف الأكثر تعقيدًا في المسألة. فمثلًا، في الفرع 1 من المثال، يُمكِنني إثبات صِحَّة المتطابقة بَدْءًا بالطرف الأيمن.

2 $\mathbf{\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}}$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيمن أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$ بضرب البسط والمقام في مُرافِق $1-\sin x$، وهو $1+\sin x$

$$= \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$ بالضرب

$$= \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$ بالقسمة على العامل المشترك: $\cos x$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$ بكتابة الكسر في صورة مجموع كسرين

$$= \sec x + \tan x \quad ✓$$ متطابقات المقلوب، والمتطابقات النسبية

3 $\mathbf{\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x}$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}$$ بتوحيد المقامات

$$= \frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}$$ مُربَّع مجموع حدَّين

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 1 + 2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$ خاصية التجميع

$$= \frac{2 + 2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{2\,(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}$$ بإخراج العامل المشترك من البسط

$$= \frac{2}{\sin x}$$ باختصار العامل المشترك: $1+\cos x$

$$= 2\csc x \quad ✓$$ متطابقات المقلوب

توسُّع

هل تُمثِّل المعادلة الآتية متطابقة؟

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1-\cos x}{\sin x} = 2\csc x$$

أتحقَّق من ذلك بطريقة بيانية وأُخرى جبرية.

أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

a) $\cot x \ \cos x = \csc x - \sin x$

b) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

c) $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

يُفضَّـــل أحيانًا تحويل كل طرف من المتطابقة المثلثية المــراد إثبات صِحَّتها إلى مقدار مثلثي وسيط.

مثال 5

أُثبِت صِحَّة المتطابقة: $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \dfrac{1+\cos x}{\cos x}$.

أُلاحِــظ أنَّ طرفي المتطابقة مُعقَّدان؛ لــذا أُحوِّل كلا الطرفين إلى مقدار مثلثي وســيط، بَدْءًا بالطرف الأيسر:

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}$$ بكتابة الكسر في صورة مجموع كسرين

$$= \sec x + 1$$ بالاختصار، واستعمال متطابقات المقلوب

الآن، أُحوِّل الطرف الأيمن إلى المقدار المثلثي الوسيط $\sec x + 1$:

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{\sec x - 1}$$ بتحليل الفرق بين مُربَّعين

$$= \sec x + 1 \quad \checkmark$$ باختصار العامل المشترك: $\sec x - 1$

بما أنَّ الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة.

أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صِحَّة المتطابقة: $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$.

متطابقات المجموع والفرق

تعلَّمْتُ في الأمثلة السـابقة كيفية اسـتعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد قِيَم اقترانات مثلثية، وتبسـيط عبارات مثلثية، وإثبـات صِحَّة متطابقات أُخرى. وسـأتعلَّم الآن كيفية اسـتعمال مجموعة من المتطابقات لإيجاد قيمة اقتران مثلثي لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.

مفهوم أساسي — **متطابقات المجموع والفرق**

متطابقات المجموع:

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

متطابقات الفرق:

- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

مثال 6

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\sin 15°$

$\sin 15° = \sin(60° - 45°)$ — $15° = 60° - 45°$

$= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$ — متطابقة جيب الفرق بين زاويتين

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — بالتعويض

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ — بالتبسيط

أتعلَّم

يُمكِنني التحقُّق من صِحَّة إجابتي باسـتعمال الآلة الحاسـبة. فمثـلًا، فـي الفرع 1 من المثال، فإنَّ: $\sin 15° \approx 0.2588$، و $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \approx 0.2588$

2 $\tan\frac{5\pi}{12}$

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$ $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$ متطابقة الظلِّ لمجموع زاويتين

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$ بالتعويض

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$ بتوحيد المقامات

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$ بالتبسيط

3 $\cos 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 40°$

$$\cos 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 40° = \cos(40° + 20°)$$ متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين

$$= \cos(60°) = \frac{1}{2}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\cos 75°$ b) $\tan\frac{\pi}{12}$ c) $\sin 80° \cos 20° - \cos 80° \sin 20°$

يُمكِنني أيضًا استعمال متطابقات المجموع والفرق لإثبات صِحَّة متطابقات مثلثية أُخرى.

مثال 7 أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

1 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$ متطابقة جيب التمام للفرق بين زاويتين

$$= (0)\cos x + (1)\sin x$$ بالتعويض

$$= \sin x$$ بالتبسيط

أُفكِّر

كيف يُمكِن إثبات صِحَّة المتطابقة:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ بتطبيق التحويلات الهندسية على الاقتران الرئيس: $f(x) = \cos x$؟

2 $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود في طرف المتطابقة الأيمن:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$ متطابقة الظلّ لمجموع زاويتين

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$

b) $\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1} = \tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية ضمن الفترة المعطاة:

1 $\cot\theta, \sin\theta = \dfrac{1}{3}, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

2 $\sec\theta, \tan\theta = -\dfrac{3}{7}, \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$

3 $\tan\theta, \csc\theta = -\dfrac{5}{3}, \pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$

4 $\sin\theta, \sec\theta = \dfrac{9}{4}, \dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

5 $\cos x\ \tan x$

6 $\dfrac{\sec x-\cos x}{\sin x}$

7 $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\csc x}+\cos^2 x$

8 $\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x}+\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x}$

9 $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x\ \cos x}$

10 $\dfrac{\sec x-\cos x}{\tan x}$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

11 $\cot(-x)\cos(-x)+\sin(-x) = -\csc x$

12 $(\sin x+\cos x)^2 = 1+2\sin x\cos x$

13 $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$

14 $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = (\sec x-\tan x)^2$

15 $\sin^4 x-\cos^4 x = \sin^2 x-\cos^2 x$

16 $\dfrac{1}{1-\sin x}-\dfrac{1}{1+\sin x} = 2\sec x\tan x$

17 $\ln|\tan\theta| = \ln|\sin\theta|-\ln|\cos\theta|$

18 $\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\ln|\sec\theta-\tan\theta| = 0$

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية من دون استعمال الآلة الحاسبة:

19) $\sin 165°$

20) $\tan 195°$

21) $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

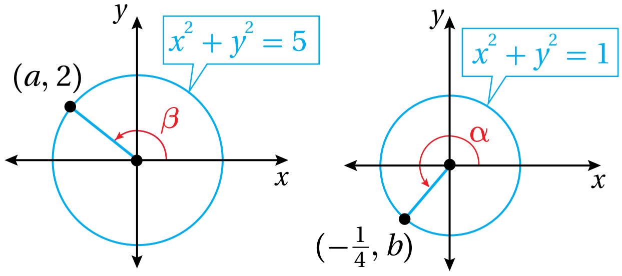
22) $\sin \frac{17\pi}{12}$

23) $\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18}$

24) $\frac{\tan 40° - \tan 10°}{1 + \tan 40° \tan 10°}$

أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ:

$$f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = \tan x$$

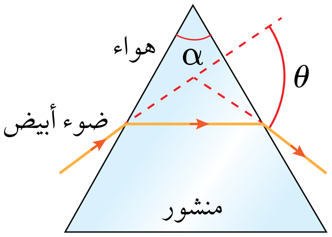


25) $f(\alpha + \beta)$

26) $g(\alpha - \beta)$

27) $h(\alpha + \beta)$

28) **منشور:** يُمكِن قياس معامل انكسار الضوء الأبيض في المنشور باستعمال المعادلة الآتية:



$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

إذا كانت $\alpha = 60°$، فأُثبِت أنَّ معادلة معامل الانكسار تُكتَب في صورة: $n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2}$.

29) إذا كان: $g(x) = \cos x$، فأُثبِت أنَّ:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\cos x \left(\frac{1 - \cos h}{h}\right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

30) إذا كان: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin x + b \cos x$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

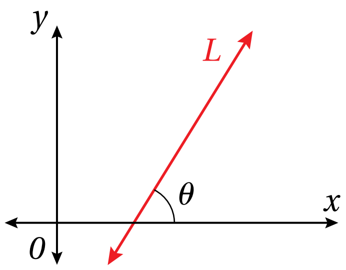
أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

31) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$

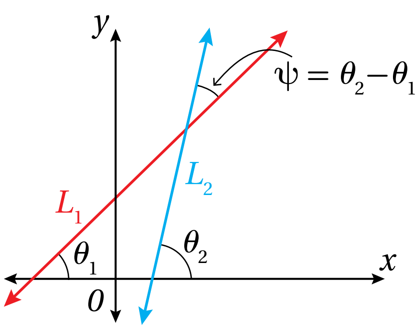
32) $\sin A + \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$

33) $\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} = 0$

34) $\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$



35 **زاوية الميل**: إذا كان L مستقيمًا في المستوى الإحداثي، وθ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب، فإنَّ الزاوية θ تُسمّى زاوية ميل المستقيم L. أُثبِت أنَّ ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة: $m = \tan\theta$، حيث: $0 < \theta < \pi$.



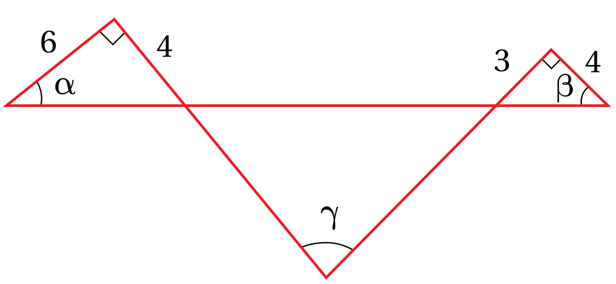
36 إذا كان L_1 و L_2 مستقيمين غير متوازيين في المستوى الإحداثي، وميل كلٍّ منهما m_1 و m_2 على الترتيب، وكانت ψ هي الزاوية الناتجة من تقاطع المستقيمين كما في الشكل المجاور، فأستعمل النتيجة من السؤال السابق لإثبات أنَّ:

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

ملحوظة: الرمز ψ هو حرف يوناني يُقرَأ: (بساي).

مهارات التفكير العليا

37 **تحدٍّ**: اعتمادًا على الشكل الآتي، أُثبِت أنَّ: $\gamma = \alpha + \beta$، ثمَّ أجد $\tan\gamma$.



38 **تبرير**: إذا كان: $\tan\alpha = x + 1$، و $\tan\beta = x - 1$، فأُثبِت أنَّ: $2\cot(\alpha - \beta) = x^2$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

39 **تبرير**: أجد قيمة $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

40 **أكتشف الخطأ**: أكتشف الخطأ في المسألة الآتية، ثمَّ أُصحِّحه:

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)\end{aligned}$$

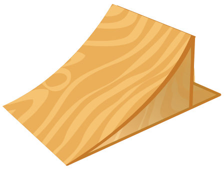
الدرس 2

المتطابقات المثلثية 2
Trigonometric Identities 2

فكرة الدرس

- إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- إعادة كتابة المقادير المثلثية من صورة الضرب إلى صورة الجمع، والعكس.

مسألة اليوم



يختلف ميل منحدرات التزلُّج المُصمَّمة للمنافسة باختلاف مستوى مهارة المتسابقين؛ فميل المنحدر للمتسابقين المحترفين هو $\tan\theta = \frac{5}{3}$، حيث θ الزاوية التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. أمّا المتسابقون المبتدئون فتميل منحدراتهم بزاوية قياسها نصف قياس الزاوية θ. ما ميل المنحدر للمتسابقين المبتدئين؟

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تُستعمَل متطابقات ضعف الزاوية لإيجاد قيمة اقتران مثلثي عند الزاوية 2θ باستعمال قيمة الاقتران عند الزاوية θ.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

صيغة الجيب	صيغ جيب التمام	صيغة الظلّ
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال 1

إذا كان: $\sin\theta = \frac{3}{5}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 2\theta$

بما أنَّ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، وقيمة $\sin\theta$ معلومة، إذن أجد أوَّلًا قيمة $\cos\theta$.

الخطوة 1: أجد قيمة $\cos\theta$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقات فيثاغورس

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$ بتعويض $\sin\theta = \frac{3}{5}$

بالتبسيط $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$

بما أنَّ جيب التمام في الربع الثاني سالب، إذن: $\cos\theta = -\frac{4}{5}$.

الخطوة 2: أجد قيمة $\sin 2\theta$.

متطابقة ضعف الزاوية $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

بتعويض $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$ $= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

بالضرب $= -\frac{24}{25}$

2 $\cos 2\theta$

متطابقة ضعف الزاوية $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

بتعويض $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ $= 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1$

بالتبسيط $= \frac{7}{25}$

3 $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أجد قيمة $\tan\theta$.

المتطابقات النسبية $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

بتعويض $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$ $= \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$

بالتبسيط $= -\frac{3}{4}$

الخطوة 2: أجد قيمة $\tan 2\theta$.

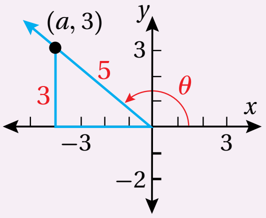
متطابقة ضعف الزاوية $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

بتعويض $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ $= \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$

بالتبسيط $= -\frac{24}{7}$

أتذكَّر

يُمكِن إيجاد قيمة $\cos\theta$ بإيجاد إحداثيي نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية θ.



أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد $\tan 2\theta$ بطريقة أُخرى؟

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\cos\theta = -\frac{2}{3}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 2\theta$ b) $\cos 2\theta$ c) $\tan 2\theta$

يُمكِنني اســتعمال متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات مجمــوع زاويتين لإيجاد قيمة اقتران مثلثي عند 3θ باستعمال قيمة الاقتران عند θ.

مثال 2

أكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$.

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$ — $3\theta = 2\theta + \theta$

$= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$ — متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$ — متطابقات ضعف الزاوية

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$ — باستعمال خاصية التوزيع

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta)$ — متطابقة فيثاغورس

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$ — باستعمال خاصية التوزيع

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ — بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أكتب $\sin 3\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

يُمكِن اســتعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية في كتابــة المقادير المثلثية التي تتضمَّن قوى للجيب وجيب التمام والظلِّ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام فقط.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لتقليص القوَّة

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

مثال 3

أُعيد كتابة $\sin^2 x \cos^2 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

متطابقات تقليص القوَّة
$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع
$$= \frac{1-\cos^2 2x}{4}$$

بكتابة الكسر في صورة فرق بين كسرين
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

متطابقة تقليص القوَّة
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$

بالتبسيط
$$= \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$

بإخراج العامل المشترك
$$= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

أتعلَّم

يُمكِن حلُّ المثال السابق باستعمال متطابقة جيب ضعف الزاوية على النحو الآتي:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\sin^4 x \cos^2 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

تُعَدُّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية نتيجة مباشرة لمتطابقات تقليص القوَّة، وذلك بأخذ الجذر التربيعي لطرفي كل متطابقة، واستعمال الزاوية $\frac{\theta}{2}$ بدلًا من الزاوية θ.

أتعلَّم

تتضمَّن كل متطابقة الرمز $\pm$، وتُختار الإشارة المناسبة للمتطابقة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية $\frac{\theta}{2}$.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال 4

أجد قيمة $\sin 22.5°$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

بما أنَّ $22.5°$ هي نصف $45°$، فإنَّه يُمكِنني استعمال متطابقة جيب نصف الزاوية، حيث $x = 45°$. وبما أنَّ ضلع انتهاء الزاوية $22.5°$ يقع في الربع الأوَّل، فإنَّني أختار الإشارة الموجبة للمتطابقة:

$$\sin \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$ $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$ بالتبسيط

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$ بإنطاق المقام

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة $\cos 112.5°$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

أتعلَّم

تنتج المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من متطابقات تقليص القوَّة.

مثال 5

إذا كان: $\cos x = -\frac{3}{5}$، حيث: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin \frac{x}{2}$

بما أنَّ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$، فإنَّ $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$، وهذا يعني أنَّ ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الثاني:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= \sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}}$$ $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$= \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$ بالتبسيط

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$ بإنطاق المقام

أتذكَّر

بما أنَّ الزاوية $\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني، فإنَّني أختار الإشارة الموجبة لمتطابقة جيب نصف الزاوية.

2 $\cos \frac{x}{2}$

$$\cos \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= -\sqrt{\frac{1+(-\frac{3}{5})}{2}}$$ $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$ بالتبسيط

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5}$$ بإنطاق المقام

أتذكَّر

بما أنَّ الزاوية $\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني، فإنَّني أختار الإشارة السالبة لمتطابقة جيب تمام نصف الزاوية.

3 $\tan \frac{x}{2}$

$$\tan \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= -\sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{1+(-\frac{3}{5})}}$$ $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = -\sqrt{\frac{8}{2}}$$ بالتبسيط

$$= -\sqrt{4} = -2$$ بإيجاد الجذر التربيعي

أتذكَّر

بما أنَّ الزاوية $\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني، فإنَّني أختار الإشارة السالبة لمتطابقة ظِلّ نصف الزاوية.

أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 3 من المثال 5 بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\sin x = \frac{2}{5}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin \frac{x}{2}$ b) $\cos \frac{x}{2}$ c) $\tan \frac{x}{2}$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

يُمكِن كتابة مقدار ضرب، مثل $\sin u \cos v$، في صورة حاصل جمع اقترانات مثلثية أو طرحها، وذلك باستعمال متطابقات تحويل الضرب إلى جمع.

مفهوم أساسي
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

مثال 6

أُعيد كتابة $\sin 3x \sin 5x$ في صورة مجموع أو فرق.

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق
$$\sin 3x \sin 5x = \frac{1}{2}[\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)]$$

بالتبسيط
$$= \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 8x]$$

متطابقات الزاوية السالبة، وخاصية التوزيع
$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x$$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\sin 7x \cos x$ في صورة مجموع أو فرق.

ترتبط كلٌّ من متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق بإحدى متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب.

مفهوم أساسي
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

مثال 7

أُعيد كتابة $\sin 5x - \sin 3x$ في صورة ضرب.

متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

$$\sin 5x - \sin 3x = 2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$= 2\cos\left(\frac{8x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\cos(4x)\sin(x)$$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\cos 3x + \cos 2x$ في صورة ضرب.

يُمكِن اســتعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، والمتطابقــات المثلثية لنصف الزاوية، ومتطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق، في إثبات متطابقات مثلثية أُخرى.

مثال 8

أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

1 $\dfrac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = 4\cos x - \sec x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$3x = x + 2x$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(x+2x)}{\sin x \cos x}$$

متطابقة جيب المجموع لزاويتين

$$= \frac{\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x}{\sin x \cos x}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$= \frac{\sin x\,(2\cos^2 x - 1) + \cos x\,(2\sin x \cos x)}{\sin x \cos x}$$

بكتابة الكسر في صورة مجموع كسرين

$$= \frac{\sin x\,(2\cos^2 x - 1)}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x\,(2\sin x \cos x)}{\sin x \cos x}$$

باختصار العامل المشترك في البسط والمقام

$$= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x$$

بكتابة الكسر في صورة الفرق بين كسرين

$$= 2\cos x - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$$

متطابقات المقلوب

$$= 4\cos x - \sec x \quad ✓$$

2 $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}$$ متطابقات تحويل الجمع إلى ضرب

$$= \frac{2\cos 2x \sin x}{2\cos 2x \cos x}$$ بالتبسيط

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \tan x \quad ✓$$ المتطابقات النسبية

أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

a) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x$

b) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من $\cos 2\theta, \sin 2\theta, \sin\dfrac{\theta}{2}, \cos\dfrac{\theta}{2}$ للزاوية θ في الفترة المعطاة:

1) $\sin\theta = \dfrac{5}{13}, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

3) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}, \pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$

4) $\csc\theta = -\sqrt{5}, \cos\theta < 0$

5) $\cot\theta = \dfrac{2}{3}, \sin\theta > 0$

6) $\sec\theta = 3, \sin\theta > 0$

أستعمل المتطابقات المثلثية لتقليص القوَّة في كتابة المقادير الآتية بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام:

7) $\sin^4 x$

8) $\cos^4 x$

9) $\cos^4 x \sin^2 x$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

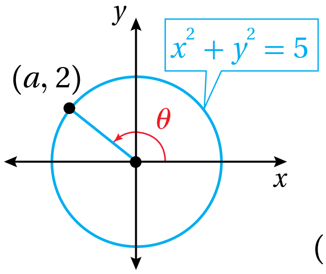
10) $\cos 22.5°$

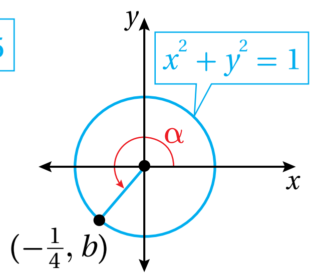
11) $\sin 195°$

12) $\tan\dfrac{7\pi}{8}$

أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ:

$f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \tan x$:





13) $g(2\theta)$

14) $g\left(\frac{\theta}{2}\right)$

15) $f(2\alpha)$

16) $h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة مجموع أو فرق:

17) $\sin 2x \cos 3x$

18) $\sin x \sin 5x$

19) $3 \cos 4x \cos 7x$

أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة ضرب:

20) $\sin x - \sin 4x$

21) $\cos 9x - \cos 2x$

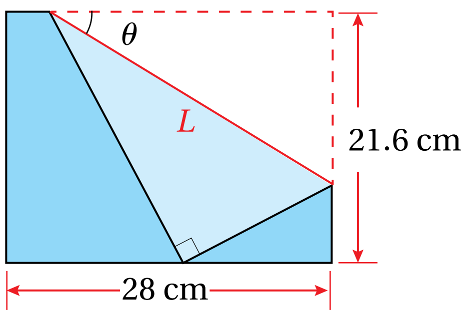
22) $\sin 3x + \sin 4x$

معلومة

استُعمِل فن الأوريغامي للتسلية في بدايات ظهوره، ثمَّ أخذ يتطوَّر بمرور الزمن حتّى أصبح فنًّا له أصوله وقواعده الخاصة.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

الأوريغامي: يقوم فن الأوريغامي (فن طيِّ الورق) الياباني على طيِّ قطعة واحدة من الورق بصورة مُتكرِّرة لصنع أشكال فنية. فعند طيِّ الجزء الأيمن إلى الأسفل من ورقة مستطيلة، بُعْداها: **21.6 cm**، و**28 cm**، كما في الشكل المجاور، فإنَّ طول خطِّ الطيِّ L يرتبط بالزاوية θ عن طريق العلاقة:



$$L = \frac{10.8}{\sin \theta \cos^2 \theta}$$

23) أُثبِت أنَّ علاقة طول خطِّ الطيِّ تُكافِئ العلاقة:

$$L = \frac{21.6 \sec \theta}{\sin 2\theta}$$

24) أجد طول خطِّ الطيِّ L إذا كانت $\theta = 30°$.

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

25 $\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

26 $\cos x = \frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x)$

27 $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos x(\cos x + 1)$

28 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

29 $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

30 $\sin x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$

31 $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1$

32 $\cos^2 2x = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

33 $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \sin 2x$

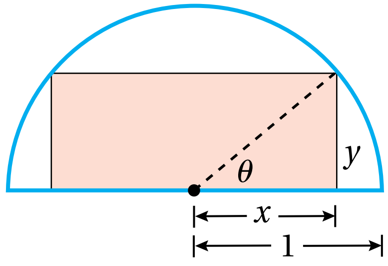
34 $\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

35 $\cot^2\frac{x}{2} = \dfrac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$

36 $\ln|\sin x| = \frac{1}{2}(\ln|1 - \cos 2x| - \ln 2)$

مهارات التفكير العليا

تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا في نصف دائرة، طول نصف قُطْرِها وحدة واحدة:



37 أُعبِّر باقترانٍ بدلالة الزاوية θ عن المساحة A للمستطيل المُوضَّح في الشكل المجاور، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

38 أُثبِت أنَّ: $A(\theta) = \sin 2\theta$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: أُثبِت صِحَّة كلٍّ ممّا يأتي:

39 $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

40 $\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos 4x + 4\cos 2x)$

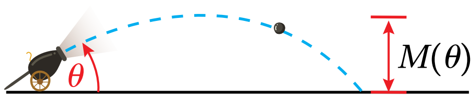
الدرس 3

حلُّ المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فكرة الدرس حلُّ المعادلات المثلثية.

المصطلحات المعادلة المثلثية، المعادلة المثلثية الأساسية.

مسألة اليوم يُطلِق مِدْفع قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 قدمًا لكل ثانية، وزاوية مقدارها θ. ويُستعمَل الاقتران: $M(\theta) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{64}$ لإيجاد أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة بالأقدام. إذا افترضْتُ أنَّ $v_0 = 400$ ft/s، فأجد قياس الزاوية θ، علمًا بأنَّ أقصى ارتفاع للقذيفة هو 625 ft



يُطلَق على المعادلة التي تحوي اقترانات مثلثية اسم **المعادلة المثلثية** (trigonometric equation). وتُعَدُّ المتطابقات المثلثية التي تعرَّفْتُها سابقًا حالة خاصة من المعادلات المثلثية؛ لأنَّها صحيحة لجميع قِيَم المُتغيِّرات المُعرَّف عندها طرفا المعادلة، ولكنَّ بعض هذه المعادلات تكون صحيحة فقط عند قِيَم مُحدَّدة للمُتغيِّر. سأتعلَّم في هذا الدرس كيفية إيجاد حلٍّ لهذا النوع من المعادلات.

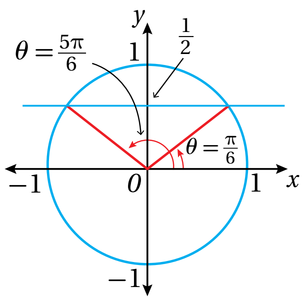
حلُّ المعادلات المثلثية الأساسية

المعادلة المثلثية الأساسية (basic trigonometric equation) هي معادلة في صورة $T(\theta) = c$، حيث: $T(\theta)$ اقتران مثلثي، و c ثابت. لحلِّ أيِّ معادلة مثلثية، يجب تبسيطها بحيث تصبح معادلة مثلثية أساسية؛ لذا من المُهِمِّ أوَّلًا إتقان حلِّ المعادلات المثلثية الأساسية.

مثال 1

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $\sin x = \frac{1}{2}$



الخطوة 1: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب هو 2π، فإنَّني أبدأ أوَّلًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\sin x = \frac{1}{2}$ في الربعين: الأوَّل، والثاني، حيث يكون اقتران الجيب موجبًا.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad , \qquad x = \frac{5\pi}{6}$$

أتعلَّم

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثاني، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ من π:

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

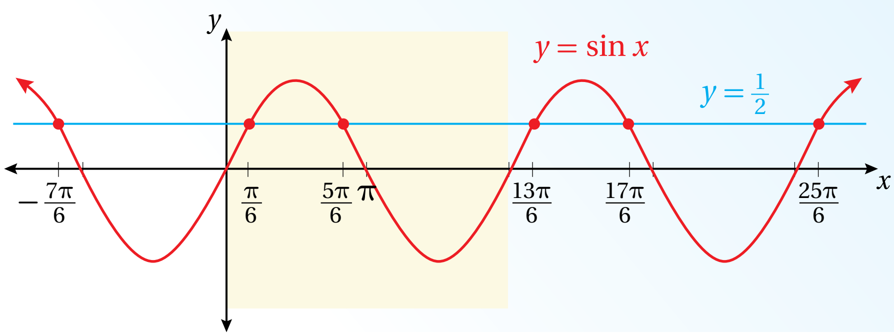
بما أنَّ قِيَم اقتران الجيب تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad , \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

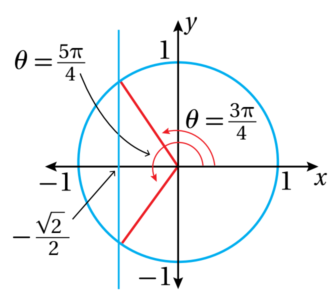
حيث k عدد صحيح

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للحلول:



2 $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



الخطوة 1: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران جيب التمام هو 2π، فإنَّني أبدأ أوَّلًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ في الربعين: الثاني، والثالث، حيث يكون اقتران جيب التمام سالبًا.

أتعلَّم

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثاني، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{4}$ من π:

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

ولإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثالث، أُضيف الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{4}$ إلى π:

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$$x = \frac{3\pi}{4} \qquad , \qquad x = \frac{5\pi}{4}$$

الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

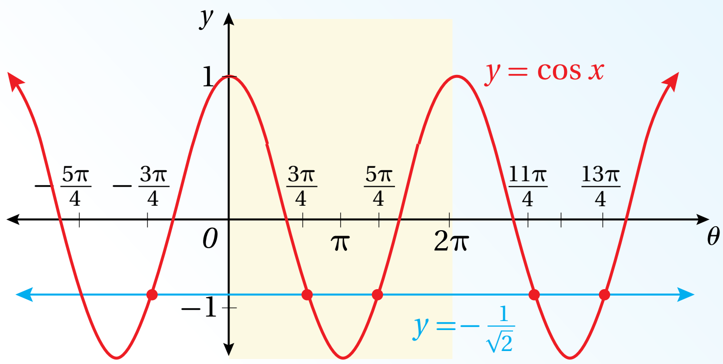
بما أنَّ قِيَم اقتران جيب التمام تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad , \qquad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

حيث k عدد صحيح

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للحلول:



أتحقَّق من فهمي أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

تعلَّمْتُ في المثال السابق حلَّ معادلات مثلثية أساسية لنسب مثلثية ذات زوايا خاصة. ولكنْ، إذا لم تكن الزوايا معروفة، فيُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجادها.

مثال 2

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $\cos x = 0.65$

الخطوة 1: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$\cos x = 0.65$ المعادلة المعطاة

$x = \cos^{-1}(0.65)$ بأخذ $\cos^{-1}$ لطرفي المعادلة

≈ 0.86 باستعمال الآلة الحاسبة

بما أنَّ طول دورة اقتران جيب التمام هو 2π، فإنَّني أبدأ أوَّلًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\cos x = 0.65$ في الربعين: الأوَّل، والرابع.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$x \approx 0.86 \quad , \quad x \approx 5.42$

أتذكَّر

لإيجاد قياس الزاوية، أضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.

أتعلَّم

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الرابع، أطرح الزاوية المرجعية 0.86 من 2π:

$2\pi - 0.86 \approx 5.42$

الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران جيب التمـــام تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

$$x \approx 0.68 + 2k\pi \quad , \quad x \approx 5.42 + 2k\pi$$ حيث k عدد صحيح

2 $\tan x = -2$

الخطوة 1: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$\tan x = -2$ المعادلة المعطاة

$x = \tan^{-1}(-2)$ بأخذ $\tan^{-1}$ لطرفي المعادلة

≈ -1.11 باستعمال الآلة الحاسبة

بما أنَّ طول دورة اقتران الظلِّ هو π، فإنَّني أجد حلَّ المعادلة ضمن الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

للمعادلة حلٌّ وحيد ضمن هذه الفترة، هو: $x \approx -1.11$.

الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الظلِّ تتكرَّر كل π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى الحلِّ السابق على النحو الآتي:

$$x \approx -1.1 + k\pi$$ حيث k عدد صحيح

أتذكَّر

لإيجـــاد قيـــاس الزاوية، أضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $\sin x = 0.23$

b) $\tan x = -10$

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا واحدًا

يُمكِـــن حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا واحـــدًا عن طريق فصل هذا الاقتران في أحد طرفي المعادلة أوَّلًا، ثمَّ إيجاد حلٍّ للمعادلة.

مثال 3

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $3 \sin x - 2 = 5 \sin x - 1$

الخطوة 1: أفصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

المعادلة المعطاة	$3 \sin x - 2 = 5 \sin x - 1$
بطرح $5 \sin x$ من كلا الطرفين	$-2 \sin x - 2 = -1$
بإضافة 2 إلى كلا الطرفين	$-2 \sin x = 1$
بقسمة طرفي المعادلة على -2	$\sin x = -\frac{1}{2}$

الخطوة 2: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب هو 2π، فإنَّني أبدأ أوَّلًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\sin x = -\frac{1}{2}$ في الربعين: الثالث، والرابع.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$$x = \frac{7\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

الخطوة 3: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الجيب تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد الصحيحة 2π إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

حيث k عدد صحيح

2 $\tan^2 x - 3 = 0$

الخطوة 1: أفصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

المعادلة المعطاة	$\tan^2 x - 3 = 0$
بإضافة 3 إلى طرفي المعادلة	$\tan^2 x = 3$
بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$\tan x = \pm\sqrt{3}$

الخطوة 2: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الظلِّ هو π، فإنَّني أجد حلَّ المعادلة ضمن الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

أتعلَّم

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثالث، أُضيف الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ إلى π:

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

ولإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الرابع، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ من 2π:

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة ضمن هذه الفترة، هما:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

الخطوة 3: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الظلِّ تتكرَّر كل π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقَيْنِ على النحو الآتي:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$ حيث k عدد صحيح

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $5 \sin x = 3 \sin x + \sqrt{3}$

b) $2 \cos^2 x - 1 = 0$

حلُّ المعادلات المثلثية بالتحليل

يُمكِن حلُّ بعض المعادلات المثلثية باستعمال التحليل، مثل المعادلات التي في صورة معادلة تربيعية، والمعادلات التي تتطلَّب إخراج عامل مشترك.

مثال 4

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

1 $\mathbf{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0}$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ المعادلة المعطاة

$(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$ بالتحليل

$2 \sin x - 1 = 0$ or $\sin x - 1 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ بإضافة 1 إلى طرفي كل معادلة، وقسمة طرفي المعادلة الأولى على 2

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$ بحلِّ المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}$.

2 $\cos x \sin x = 3 \cos x$

المعادلة المعطاة	$\cos x \sin x = 3 \cos x$
بإعادة ترتيب المعادلة	$\cos x \sin x - 3 \cos x = 0$
بإخراج العامل المشترك	$\cos x (\sin x - 3) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$\cos x = 0$ or $\sin x - 3 = 0$
بإضافة 3 إلى طرفي المعادلة الثانية	$\cos x = 0$ $\sin x = 3$
بحلِّ المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$	$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

لا يوجد حلٌّ للمعادلة: $\sin x = 3$؛ لأنَّ القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$.

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

a) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

b) $\sin x \cos x = 2 \sin x$

أخطاء شائعة

من الأخطاء الشائعة عند حلِّ معادلة، مثل: $\cos x \sin x = 3 \cos x$، قسمة طرفي المعادلة على $\cos x$، وهذا يؤدّي إلى فقدان الحلَّيْن عندما $\cos x = 0$، وهما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$.

حلُّ المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية

تحوي بعض المعادلات المثلثية اقترانًا مثلثيًّا أو أكثر، ولكنْ يتعذَّر فصل هذه الاقترانات بالتحليل؛ لذا يُمكِن حلُّها باستعمال المتطابقات المثلثية، إضافةً إلى بعض العمليات الجبرية.

أتعلَّم

عند استعمال المتطابقات والعمليات الجبرية في حلِّ المعادلات، فإنَّ الناتج قد لا يُحقِّق المعادلة الأصلية؛ لذا يجب التحقُّق من صِحَّة الحلِّ بالتعويض في المعادلة الأصلية، أو تمثيل المعادلة بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا.

مثال 5

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

1 $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$

المعادلة المعطاة	$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$
متطابقات فيثاغورس	$2 (1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$
خاصية التوزيع	$2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0$
بضرب طرفي المعادلة في -1	$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$
بالتحليل	$(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

خاصية الضرب الصفري

$$2\sin x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad \sin x - 2 = 0$$

بحِّل كل معادلة لـ $\sin x$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \qquad \sin x = 2$$

بحِّل المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

لا يوجد حلٌّ للمعادلة: $\sin x = 2$؛ لأنَّ القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1

أتحقَّق:

للتحقُّق، أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

عندما $x = \frac{7\pi}{6}$

$$2\cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{3}{2} + -\frac{3}{2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

عندما $x = \frac{11\pi}{6}$

$$2\cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

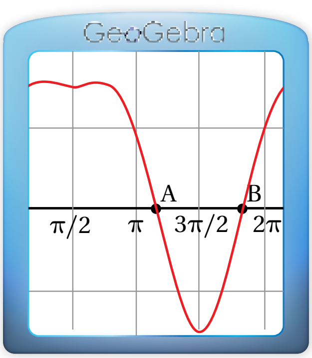
$$\frac{3}{2} + -\frac{3}{2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \frac{11\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$.

الدعم البياني:

يُمكِنني التحقُّق من صِحَّة الحلِّ بتمثيل المعادلة: $y = 2\cos^2 x + 3\sin x$ باستعمال برمجية جيوجبرا، وملاحظة نقاط تقاطع منحنى المعادلة مع المحور x في الفترة $[0, 2\pi)$.



2 $\sin 2x - \cos x = 0$

المعادلة المعطاة

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$2\sin x\cos x - \cos x = 0$$

بإخراج العامل المشترك

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$\cos x = 0 \quad \text{or} \quad 2\sin x - 1 = 0$$

بحِّل المعادلة الثانية لـ $\sin x$

$$\cos x = 0 \qquad \sin x = \frac{1}{2}$$

بحِّل كل معادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

أتحقَّق:

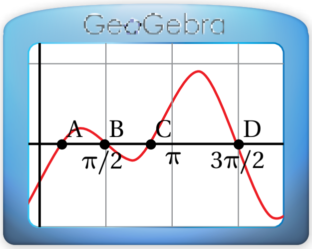
للتحقُّق، أُعوِّض قِيَم x في المعادلة الأصلية.

عندما $x=\frac{\pi}{6}$	عندما $x=\frac{5\pi}{6}$	عندما $x=\frac{\pi}{2}$	عندما $x=\frac{3\pi}{2}$
$\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\stackrel{?}{=}0$	$\sin 2\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\stackrel{?}{=}0$	$\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\stackrel{?}{=}0$	$\sin 2\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\stackrel{?}{=}0$
$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\stackrel{?}{=}0$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\stackrel{?}{=}0$	$0-0\stackrel{?}{=}0$	$0-0\stackrel{?}{=}0$
$0=0$ ✓	$0=0$ ✓	$0=0$ ✓	$0=0$ ✓

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هي: $x=\frac{3\pi}{2}$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\frac{5\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{6}$.

الدعم البياني:

يُمكِنُني التحقُّق من صِحَّة الحلِّ بتمثيل المعادلة: $y=\sin 2x-\cos x$ بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، وملاحظة نقاط تقاطع منحنى المعادلة مع المحور x في الفترة $[0, 2\pi)$.



أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

a) $2\sin^2 x-3\cos x=0$

b) $2\sin 2x-3\sin x=0$

يتطلَّب حلُّ بعض المعادلات المثلثية تربيع طرفي المعادلة أوَّلًا، ثمَّ استعمال المتطابقات. وقد لا يُحقِّق الناتج المعادلة الأصلية؛ لذا يجب التحقُّق من صِحَّة الحلِّ.

مثال 6

أَحُلُّ المعادلة: $\cos x+1=\sin x$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

المعادلة المعطاة	$\cos x+1=\sin x$
بتربيع الطرفين	$\cos^2 x+2\cos x+1=\sin^2 x$
متطابقات فيثاغورس	$\cos^2 x+2\cos x+1=1-\cos^2 x$
بالتبسيط	$2\cos^2 x+2\cos x=0$
بإخراج $2\cos x$	$2\cos x(\cos x+1)=0$
خاصية الضرب الصفري	$2\cos x=0$ or $\cos x+1=0$
بحلِّ كل معادلة لـ $\cos x$	$\cos x=0$ $\cos x=-1$
بحلِّ كل معادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$	$x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ $x=\pi$

أتعلَّم

أُربِّع طرفي المعادلة تمهيدًا للحصول على المتطابقة:

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

أتحقَّق:

للتحقُّق، أُعوِّض قِيَم x في المعادلة الأصلية.

عندما $x = \frac{3\pi}{2}$	عندما $x = \frac{\pi}{2}$	عندما $x = \pi$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 \stackrel{?}{=} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \stackrel{?}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos(\pi) + 1 \stackrel{?}{=} \sin(\pi)$
$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$	$0 + 1 \stackrel{?}{=} 1$	$-1 + 1 \stackrel{?}{=} 0$
$1 \neq -1$ ✗	$1 = 1$ ✓	$0 = 0$ ✓

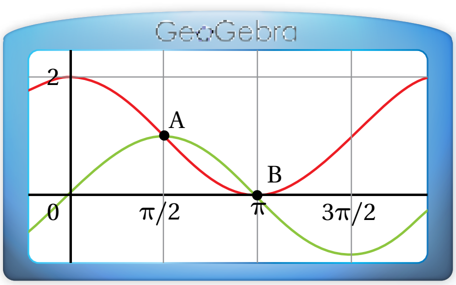
إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$.

أتذكَّر

الحلُّ الدخيل هو حلٌّ لا يُحقِّق المعادلة الأصلية.

الدعم البياني:

يُمكِنني التحقُّق من صِحَّة الحلِّ بتمثيل المعادلتين: $y = \sin x$، و $y = \cos x + 1$ بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، وملاحظة نقاط تقاطع منحنيي المعادلتين في الفترة $[0, 2\pi)$.



أتحقَّق من فهمي أَحُلُّ المعادلة: $\cos x - \sin x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لضعف الزاوية

يُمكِن حلُّ معادلة مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا لضعف الزاوية، بحلِّ المعادلة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لضعف الزاوية أوَّلًا، ثمَّ إجراء عملية القسمة لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 7

أَحُلُّ المعادلة: $\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ المعادلة المعطاة

$2\cos x \sin x = -1$ بضرب طرفي المعادلة في 2

$\sin 2x = -1$ متطابقات ضعف الزاوية

بما أنَّ الحلَّ الوحيد للمعادلة $\sin\theta = -1$ في الفترة $[0, 2\pi)$ هو $\frac{3\pi}{2}$، فإنَّ $2x = \frac{3\pi}{2}$.

ومنه، فإنَّ جميع حلول المعادلة: $\sin 2x = -1$ تُكتَب في صورة:

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$
k عدد صحيح

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$
بقسمة طرفي المعادلة على 2

يُمكِن إيجاد حلول المعادلة: $\sin 2x = -1$ في الفترة $[0, 2\pi)$ على النحو الآتي:

$$x = \frac{3\pi}{4} + (0)\pi = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{3\pi}{4} + (1)\pi = \frac{7\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{3\pi}{4} + (2)\pi = \frac{11\pi}{4}$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \frac{7\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ المعادلة: $2\cos 2x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لنصف الزاوية

يُمكِن حلُّ معادلة مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا لنصف الزاوية، بحلِّ المعادلة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لنصف الزاوية أوَّلًا، ثمَّ إجراء عملية الضرب لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 8

أحُلُّ المعادلة: $2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$$2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$$
المعادلة المعطاة

$$2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$$
بجمع $\sqrt{3}$ لطرفي المعادلة

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
بقسمة طرفي المعادلة على 2

بما أنَّ حلَّي المعادلة: $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$ هما: $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$، فإنَّ:

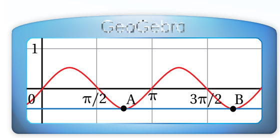
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

أتعلَّم

أستمر في تعويض قِيَم لـ k، وأتوقَّف عندما أحصل على زاوية أكبر من 2π.

الدعم البياني:

أُلاحِظ عند تمثيل المعادلتين: $y = \cos x \sin x$، و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًّا، باستعمال برمجية جيوجبرا، تقاطع منحنيي المعادلتين عندما $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.



ومنه، فإنَّ جميع حلول المعادلة: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{x}{2}$ تُكتَب في صورة:

k عدد صحيح

$$\frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

بضرب طرفي المعادلة في 2

$$x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$$

أُلاحِظ أنَّه عند تعويض $k = 0$ في المعادلتين: $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi\ ,\ x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$، فإنَّ الناتج هــو $x = \frac{4\pi}{3}\ ,\ x = \frac{2\pi}{3}$ على الترتيب، ضمــن الفترة $[0, 2\pi)$. أمّا عند تعويض قِيَم أُخرى فإنَّ الناتج يكون خارج الفترة.

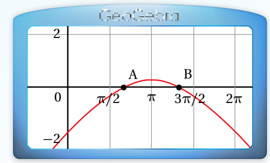
إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \frac{4\pi}{3}\ ,\ x = \frac{2\pi}{3}$.

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ المعادلة: $2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

الدعم البياني:

أُلاحِظ من التمثيل البياني للمعادلة: $y = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}$، باستعمال برمجية جيوجبرا، تقاطع منحنى المعادلة مع المحور x عندما $x = \frac{4\pi}{3}\ ,\ x = \frac{2\pi}{3}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.



أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية لقِيَم x جميعها:

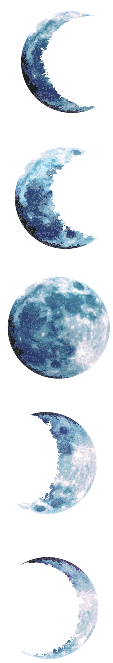
1. $2\sin x + 3 = 2$
2. $1 - \cos x = \frac{1}{2}$
3. $\sin x = -0.3$
4. $\cos x = 0.32$
5. $\tan x = 5$
6. $\sec^2 x - 2 = 0$
7. $\cot x + 1 = 0$
8. $\csc^2 x - 4 = 0$
9. $3\sqrt{2}\cos x + 2 = -1$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

10. $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$
11. $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$
12. $2\cos^2 x + \cos x = 0$
13. $\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$
14. $\sin x + 2\sin x\cos x = 0$
15. $\tan^2 x\cos x = \tan^2 x$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

16. $2\cos^2 x + \sin x = 1$
17. $\tan^2 x - 2\sec x = 2$
18. $\csc^2 x = \cot x + 3$
19. $\sin 2x = 3\cos 2x$
20. $4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$



أطوار القمر: عندما يدور القمر حول الأرض، فإنَّ الجانب المُواجِه للأرض يكون في الغالب مضاءً جزئيًّا بواسطة الشمس. تَصِف أطوار القمر مقدار الجزء الظاهر من سطحه بسبب سقوط ضوء الشمس عليه، ويعطى مقياس فلكي للطور بالعلاقة: $F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$، حيث θ الزاوية بين الأرض والشمس والقمر $(0° \leq \theta \leq 360°)$. أجد قياس الزاوية θ لكل طور ممّا يأتي:

21 القمر الجديد $(F = 0)$.

22 الهلال $(F = 0.25)$.

23 القمر المُكتمِل $(F = 1)$.

24 زنبرك: تعطى الإزاحة لزنبرك نابض باستعمال العلاقة: $y = 4\, e^{-3t} \sin 2\pi t$. ما الأوقات (قِيَم t) التي يكون فيها الزنبرك في وضعية الراحة $(y = 0)$؟

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

25 $\sin 2x + \cos x = 0$

26 $\tan \frac{x}{2} - \sin x = 0$

27 $2 \sin^2 x = 2 + \cos 2x$

28 $2 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2} = 0$

29 $\sin x - \sqrt{3}\, \cos x = 0$

30 $\cos 2x = \cos x$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2$، حيث k ثابت، فأُجيب عمّا يأتي:

31 أُثبِت عدم وجود حلٍّ للمعادلة عندما $k > 1$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

32 أحُلُّ المعادلة عندما $k = -8$، حيث: $-\pi < x < \pi$، ثمَّ أُبرِّر خطوات الحلِّ.

33 تبرير: أجد جميع الحلول المُمكِنة للمعادلة: $\sin(\cos x) = 0$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

34 تحدٍّ: أحُلُّ المعادلة: $\tan x + \cot x = 5$، حيث: $0 \leq x < 2\pi$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان $\cot\theta = 1$، فإنَّ $\tan\theta$ تساوي:

a) -1 b) 1

c) 0 d) 3

2 إذا كان $\cos x = -0.45$، فإنَّ قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ هي:

a) -0.55 b) -0.45

c) 0.45 d) 0.55

3 المعادلة غير الصحيحة ممّا يأتي هي:

a) $\tan(-x) = -\tan x$

b) $\tan(-x) = \frac{1}{\cot(-x)}$

c) $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$

d) $\tan(-x) + 1 = \sec(-x)$

4 أحد الآتية مُكافِئ للمقدار: $\tan x \times \frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$:

a) $\tan x$ b) $\sin x$

c) $\cot x$ d) $\cos x$

5 أحد الآتية لا يُكافِئ $\cos x$، حيث: $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

a) $\frac{\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ b) $\cot x \sin x$

c) $\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$ d) $\tan x \csc x$

6 أحد الآتية يُكافِئ: $\sin x + \cot x \cos x$:

a) $2\sin x$ b) $\frac{1}{\sin x}$

c) $\cos^2 x$ d) $\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}$

7 أحد الآتية لا يُعَدُّ حلًّا للمعادلة:

$\sin x + \cos x \tan^2 x = 0$:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{7\pi}{4}$

c) 2π d) $\frac{5\pi}{2}$

8 أحد الآتية يُعَدُّ حلًّا للمعادلة: $2\cos x = 1$:

a) $\frac{8\pi}{3}$ b) $\frac{13\pi}{3}$

c) $\frac{10\pi}{3}$ d) $\frac{15\pi}{3}$

9 أحد الآتية مُكافِئ للمقدار: $\frac{\cos x(\cot^2 x + 1)}{\csc x}$:

a) $\tan x$ b) $\cot x$

c) $\sec x$ d) $\csc x$

10 أحد المقادير الآتية يُمكِن استعماله لتكوين متطابقة مع المقدار: $\frac{\sec x + \csc x}{1+\tan x}$، حيث: $\tan x \neq -1$:

a) $\sin x$ b) $\cos x$

c) $\tan x$ d) $\csc x$

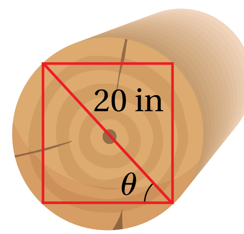
أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

11 $3\cos 37.5° \sin 37.5°$

12 $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$

13 $\cos 255° - \cos 195°$

14 **عارضة خشبية:** يراد قَصُّ قطعة خشبية على شكل منشور قاعدته مستطيلة من قطعة خشب على شكل أسطوانة، طول قُطْرها 20 in كما هو مُبيَّن في الشكل المجاور. أُثبِت أنَّه يُمكِن تمثيل مساحة المقطع العرضي للقطعة الخشبية باستعمال الاقتران:



$$A(\theta) = 200 \sin 2\theta$$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

15 $\tan y = \dfrac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

16 $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3\sin^2 2x$

17 $\ln|\cos x| = \frac{1}{2}(\ln|1+\cos 2x| - \ln 2)$

18 $\sec 2x = \dfrac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$

19 $\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$

20 إذا كانت θ زاوية حادَّة، وكان $\cos\theta = \frac{4}{5}$، فأُثبِت أنَّ:

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

21 $\dfrac{\sec x - \cos x}{\sec x} = \sin^2 x$

22 $(\sin x + \cos x)^4 = (1 + 2\sin x\cos x)^2$

23 $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

24 $\dfrac{\sin x \sec x}{\tan x} = 1$

25 $\ln|\sec\theta| = -\ln|\cos\theta|$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

26 $\tan(-15°)$

27 $\sin\frac{7\pi}{12}$

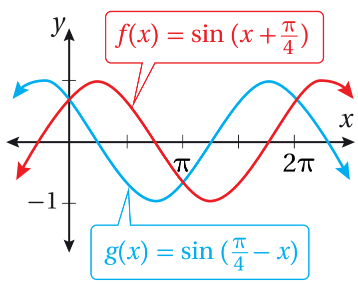
28 $\dfrac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°}$

29 $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

30 أَحُلُّ المعادلة الآتية، وأستعين بالشكل التالي في عملية الحلِّ:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

حيث: $0 \le x \le 2\pi$.



أُبسِّط كُلًّا من المقادير الآتية باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

31 $\cos^2 5x - \sin^2 5x$

32 $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

33 $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8x}{2}}$

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

34 $4\sin x - 3 = 0$

35 $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 3$

36 $\cos x \sin x - \sin x = 0$

37 $\sin x - 2\sin^2 x = 0$

38 $\sin x - \cos x - \tan x = -1$

39 $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$

40 $\tan 3x + 1 = \sec 3x$

الوحدة
3

التفاضل وتطبيقاته
Differentiation and its applications

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعَدُّ التفاضل أحد أكثر فروع الرياضيات اســتخدامًا في التطبيقات العلمية؛ إذ يُمكِن عن طريقه حســاب مُعدَّل تغيُّر كمية ما بالنسبة إلى كمية أُخرى، مثل سرعة الجسم المُتحرِّك وتسارعه بالنســبة إلى الزمن. يُســتعمَل التفاضل أيضًا في الحســابات الكيميائية لإيجاد مُعدَّل تغيُّــر كتلة المادة المُشِعَّة بالنسبة إلى الزمن، وتحديد مقدار الكتلة في أيِّ زمن.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة.
- استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
- حلَّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقات.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إيجاد مشتقات اقترانات مختلفة.
- إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- إيجاد مشتقات اقترانات باستعمال قاعدة السلسلة.
- إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية.
- حلَّ مسائل وتطبيقات حياتية على المُعدَّلات المرتبطة بالزمن.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (23–21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

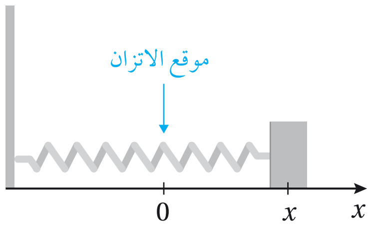
مشتقة اقترانات خاصة

Differentiation of Special Functions

فكرة الدرس إيجاد مشتقات الاقترانات الآتية: الأُسِّي الطبيعي، اللوغاريتمي الطبيعي، الجيب، جيب التمام.

المصطلحات الموقع، السرعة المتجهة، التسارع، السرعة القياسية.

مسألة اليوم يهتزُّ جسم مُثبَّت في زنبرك أفقيًّا على سطح أملس كما في الشكل المجاور. ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = 8 \sin t$ موقع الجسم، حيث t الزمن بالثواني، وx الموقع بالسنتيمترات:



1) أجد موقع الجسم وسرعته وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}\pi$.

2) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}\pi$؟

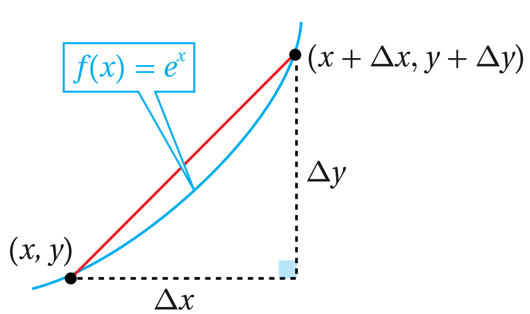
مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الثابت ومشتقة اقتران القوَّة باستعمال قواعد خاصة. وسأتعلَّم الآن إيجاد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ومشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام.

أتذكَّر

يُسمّى العدد e الأساس الطبيعي، أو العدد النيبيري؛ وهو عدد غير نسبي، ويُسمّى الاقتران: $f(x) = e^x$ الاقتران الأُسِّي الطبيعي.

أفترض أنَّ (x, y) و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطتان، كلٌّ منهما قريبة من الأُخرى، وأنَّهما تقعان على منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$.



إذن، الفرق بين الإحداثي y للنقطتين هو:

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$$

ومنه، فإنَّ ميل القاطع المارِّ بالنقطتين (x, y) و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

إذن، ميل المماس عند النقطة (x, y) هو:

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

ولكنْ، ما قيمة: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ ؟

يُمكِن الاستعانة بجدول القِيَم الآتي لإيجاد قيمة: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

$\rightarrow 0 \leftarrow$

Δx	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	0.9516	0.9950	0.9995		1.0005	1.0050	1.0517

$\rightarrow 1 \leftarrow$

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$.

إذن، ميل المماس عند النقطة (x, y) هو:

$$m = f'(x) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

وهـذا يعنـي أنَّ ميل المماس عنـد أيِّ نقطة تقع علـى منحنى الاقتران الأُسِّـي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة.

أتذكَّر

ميل المماس عند نقطة ما يساوي مشـتقة الاقتران عند هذه النقطة.

تنبيه

لا تُعَـدُّ الإجـراءات التي سـبقت النظريـة برهانًـا عليها، وإنَّما تُمهِّد للنظرية، وتُقدِّم تصوُّرًا لها.

نظرية **مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي**

إذا كان: $f(x) = e^x$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ:

$$f'(x) = e^x$$

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = 3e^x}$

$f(x) = 3e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3e^x$ قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

أتذكَّر

- $(af(x))' = af'(x)$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

2 $f(x) = x^2 + e^x$

$f(x) = x^2 + e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 2x + e^x$ قواعد مشتقات اقتران القوّة، والمجموع، والاقتران الأُسِّي الطبيعي

3 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$ بتوزيع المقام على البسط

$= \dfrac{x^{1/3}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$= x^{-2/3} - 2e^x$ بالتبسيط

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} - 2e^x$ قواعد مشتقات اقتران القوّة، والاقتران الأُسِّي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران

$= -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$ تعريف الأُسِّ السالب، والصورة الجذرية

أتذكَّر

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

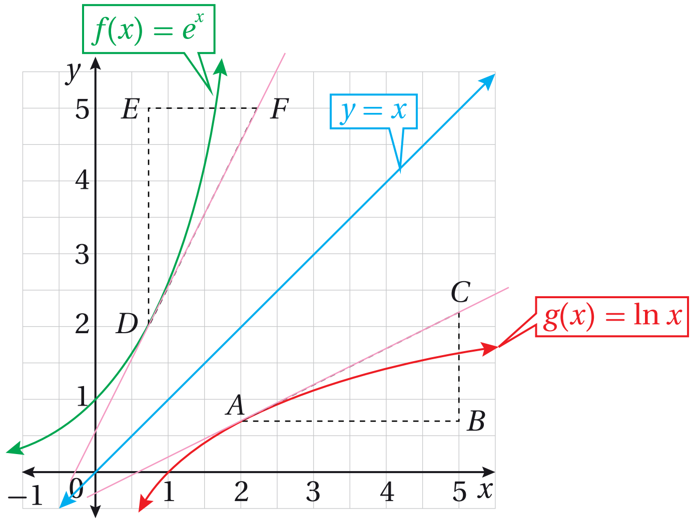
أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 5e^x + 3$ b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$ c) $y = 8e^x + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

يُبيِّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = \ln x$.



أتذكَّر

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: $y = \ln x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسِّي الطبيعي: $y = e^x$.

أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ ميل المماس عند النقطة A، الواقعة على منحنى الاقتران: $g(x) = \ln x$، هو: $\frac{CB}{AB}$. إذن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB}$$

بما أنَّ المثلث DEF هو انعكاس للمثلث ABC حول المستقيم: $y = x$، فإنَّهما متطابقان؛ لذا فإنَّ:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE}$$

وبما أنَّ $\frac{DE}{FE}$ هو ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x$ عند النقطة D، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}}$$

وبما أنَّ ميل المماس عند أيِّ نقطة تقع على منحنى الاقتران الأُسِّي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة، فهذا يعني أنَّ ميل المماس عند النقطة D هو الإحداثي y للنقطة D. وبسبب الانعكاس؛ فإنَّ الإحداثي y للنقطة D هو الإحداثي x للنقطة A. وبذلك، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}} = \frac{1}{x}$$

أتذكَّر

الانعكاس هو تحويل هندسي ينقل الشكل من إحدى جهتي محور الانعكاس إلى الجهة الأُخرى على البُعْد نفسه من محور الانعكاس، من دون تغيير أبعاد الشكل أو تدويره. بوجه عام، فإنَّ الاقتران f والاقتران العكسي له متماثلان حول المحور $y = x$.

نظرية — **مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي**

إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

يُمكِن إثبات هذه النظرية لاحقًا باستعمال الاشتقاق الضمني الوارد في الدرس الرابع من هذه الوحدة.

أتذكَّر

مجال الاقتران $\ln x$ هو $(0, \infty)$.

تعلَّمْتُ سابقًا قوانين الضرب والقسمة والقوَّة للوغاريتمات، ويُمكِنني استعمال هذه القوانين مع النظرية السابقة لإيجاد مشتقة اقتران يحوي اللوغاريتم الطبيعي.

مراجعة المفهوم — **قوانين اللوغاريتمات**

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

أُفكِّر

لماذا يُشترَط أنَّ $b \neq 1$؟

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \ln (x^4)$

$f(x) = \ln(x^4)$ الاقتران المعطى

$= 4 \ln x$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

$f'(x) = \frac{4}{x}$ قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

2 $f(x) = \ln (xe^x) + \ln (7x)$

$f(x) = \ln (xe^x) + \ln (7x)$ الاقتران المعطى

$= \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 2 \ln x + x + \ln 7$ بالتبسيط، واستعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$ قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، واقتران القوَّة، والثابت

أتذكَّر

اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$ هو لوغاريتم أساسه العدد الطبيعي e، ومن المُمكِن كتابته في صورة: $\log_e x$.

أتذكَّر

- $\ln e = 1$
- $\ln e^p = p$
- إذا كان: $b \neq 1$، حيث: $b > 0$، فإنَّ: $\log_b b^x = x$.

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

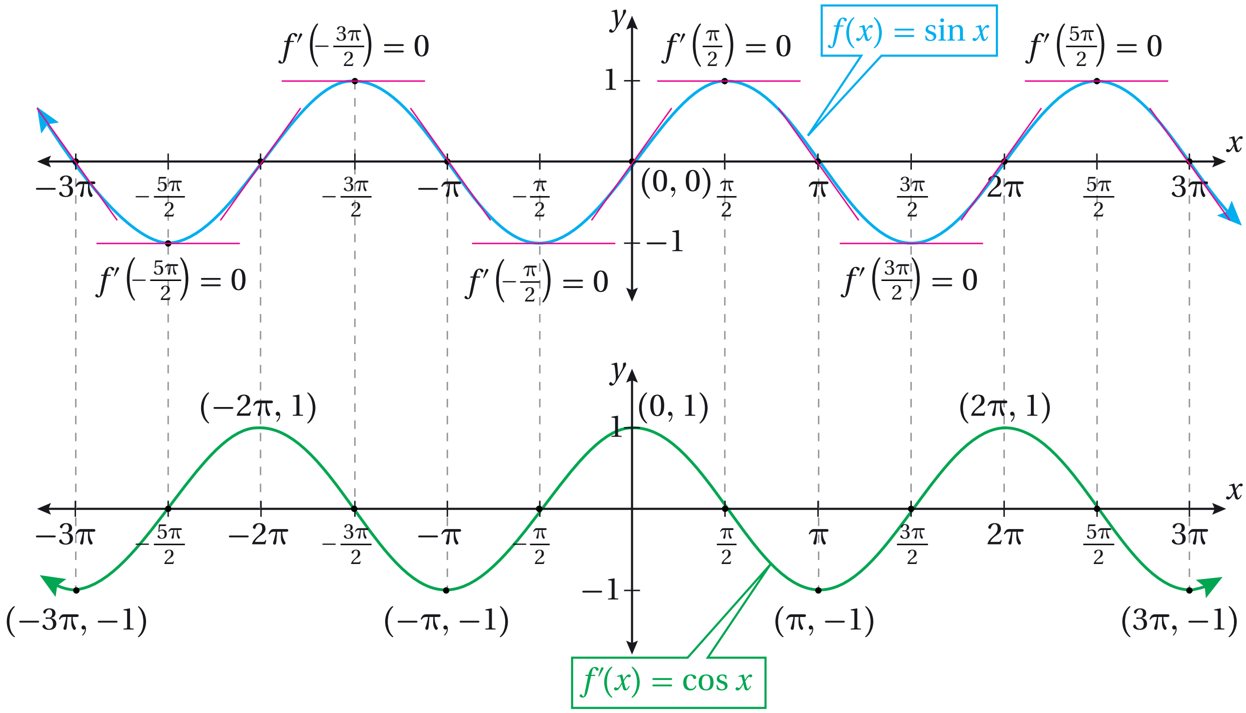
a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln (4x)$

b) $f(x) = \ln (2x^3)$

مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات المثلثية هي قواعد معطاة باستعمال النسب المثلثية. وسأتعلَّم الآن إيجاد مشتقة كلٍّ من اقتران الجيب، واقتران جيب التمام.

يُبيِّن الشكل الآتي كُلًّا من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x$، حيث x قياس الزاوية بالراديان، والتمثيل البياني لمنحنى $f'(x)$ الذي رُسِم باستعمال ميل المماس لمنحنى $f(x)$.



يظهر من الشــكل الســابق أنَّ منحنى $f'(x)$ مُطابِق تمامًا لمنحنى جيـب التمام؛ ما يعني أنَّ: $f'(x) = \cos x$. ويُمكِن بطريقة مُشابِهة اســتنتاج أنَّ مشتقة اقتران جيب التمام هي انعكاس منحنى اقتران الجيب حول المحور x.

تنبيه

لا يُعَدُّ الرسم إثباتًا رياضيًّا للنظريـة، ولكنَّـه يعطي تصوُّرًا لها.

نظرية **مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام**

- إذا كان: $f(x) = \sin x$، فإنَّ: $f'(x) = \cos x$.
- إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$.

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = 3\sin x + 4}$

$f(x) = 3\sin x + 4$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3\cos x$ قواعد مشتقات اقتران الجيب، ومضاعفات الاقتران، والثابت، والمجموع

2 $\boldsymbol{y = \frac{1}{2} e^x - 7 \cos x}$

$y = \frac{1}{2} e^x - 7 \cos x$ الاقتران المعطى

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} e^x + 7 \sin x$ قواعد مشتقات الاقتران الأُسِّي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران، واقتران جيب التمام، والمجموع

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \frac{\sin x}{2} + 3 \cos x$

b) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin \frac{\pi}{2}$

تطبيقات: معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما

يُمكِن استعمال أيٍّ من قواعد الاشــتقاق التي تعلَّمْتُها في هذا الدرس لإيجاد معادلة المماس عند نقطة ما على منحنى الاقتران.

مثال 4

إذا كان الاقتران: $\boldsymbol{f(x) = \ln \left(\frac{x}{e}\right)}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $\boldsymbol{(1, -1)}$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$.

$f(x) = \ln \left(\frac{x}{e}\right)$ الاقتران المعطى

$= \ln x - \ln e$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \ln x - 1$ الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات

$f'(x) = \frac{1}{x}$ قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والثابت، والفرق

$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ بتعويض $x = 1$

إذن، ميل المماس هو 1

أتذكَّر

إذا كان: $b \neq 1$، حيث: $b > 0$، فإنَّ: $\log_b b = 1$.

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$$y - (-1) = 1(x - 1)$$ بتعويض $x_1 = 1, y_1 = -1, m = 1$

$$y = x - 2$$ بالتبسيط

إذن، معادلة المماس هي: $y = x - 2$.

2 **معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$.**

بما أنَّ ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$ هو 1، فإنَّ ميل العمودي على المماس هو -1

ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$ هي:

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$

$$y = -x$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln \sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

أتذكَّر

إذا تعامد مستقيمان، كلٌّ منهما ليس رأسيًّا، فإنَّ حاصل ضرب ميليهما هو -1 ؛ أيْ إنَّ ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

تطبيقات: الحركة في مسار مستقيم

عند دراسة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرَّك على خطِّ أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا، وأنَّ **موقع** (position) هذا الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن t، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$.

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر اقتران الموقع $s(t)$ بالنسبة إلى الزمن اسم **السرعة المتجهة** (velocity) للجسم، ويُرمَز إليه بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّي بهذا الاسم لأنَّه يُستعمَل لتحديد كلٍّ من مقدار سرعة الجسم، واتجاه حركته.

أتذكَّر

يأخذ موقع الجسم $s(t)$ قِيَمًا موجبةً، أو قِيَمًا سالبةً، أو صفرًا.

أتعلَّم

تُسمّى النقطة 0 على خطِّ الأعداد نقطة الأصل.

فـإذا كانت قيمــة $v(t) > 0$، فإنَّ الجســم يتحرَّك في الاتجـاه الموجــب. وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$، فإنَّ الجســم يتحرَّك في الاتجاه السالب. وإذا كانت $v(t) = 0$، فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر الســرعة المتجهة بالنســبة إلى الزمن اسم **التسارع** (acceleration)، ويُرمَز إليــه بالرمز $a(t)$. أمّا القيمة المُطلَقة للســرعة المتجهة فتُســمّى **الســرعة القياســية** (speed)، وهي تُحدِّد مقدارًا، ولا تُحدِّد اتجاه الحركة.

أتعلَّم

المســافة كمية قياســية (ليست متجهة)، والموقع كمية متجهة.

مفهوم أساسي — **الحركة في مسار مستقيم**

إذا مثَّل الاقتران $s(t)$ موقع جســم يتحرَّك في مسار مســتقيم، فإنَّ سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة: $v(t) = s'(t)$، وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

أمّا سرعته القياسية فهي $|v(t)|$.

مثال 5

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

1 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 2$.

سرعة الجسم:

أجد مشتقة اقتران الموقع، ثمَّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$ اقتران السرعة

$v(2) = 12(2) - 3(2)^2$ بتعويض $t = 2$

$= 12$ بالتبسيط

تسارع الجسم:

أجد مشتقة اقتران السرعة، ثمَّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$ اقتران التسارع

$= 12 - 6(2)$ بتعويض $t = 2$

$= 0$ بالتبسيط

سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي 12 m/s، وتسارعه هو 0 m/s^2

إرشاد

تشير كلمة (السرعة) إلى الســرعة المتجهــة أينما ورد ذكرها في الكتاب.

أُفكِّر

ما معنى أنْ يكون التسارع فـي لحظة مـا مُسـاوِيًا للصفر؟

2 **أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.**

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

$12t - 3t^2 = 0$ بمساواة اقتران السرعة بالصفر

$3t(4-t) = 0$ بإخراج $3t$ عاملًا مشتركًا

$t = 0 \quad \text{or} \quad t = 4$ بحلِّ كل معادلة لـ t

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0$، و $t = 4$.

3 **في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟**

$v(t) = 12t - 3t^2$ اقتران السرعة

$v(5) = 12(5) - 3(5)^2$ بتعويض $t = 5$

$= -15$ بالتبسيط

بما أنَّ إشارة السرعة سالبة، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ سرعة الجسم سالبة عندما $t = 5$، وأنَّ موقعه عند اللحظة نفسها موجب $(s(5) = 25)$؛ ما يعني عدم وجود علاقة بين موقع الجسم واتجاه حركته.

4 **متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟**

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أوَّل مَرَّة عندما $t = 0$. ومنه، فإنَّ: $s(0) = 0$.

لإيجاد الأوقات التي يعود فيها الجسم إلى هذه النقطة، أَحُلُّ المعادلة: $s(t) = 0$:

$6t^2 - t^3 = 0$ بمساواة اقتران الموقع بالصفر

$t^2(6-t) = 0$ بإخراج t^2 عاملًا مشتركًا

$t = 0 \quad \text{or} \quad t = 6$ بحلِّ كل معادلة لـ t

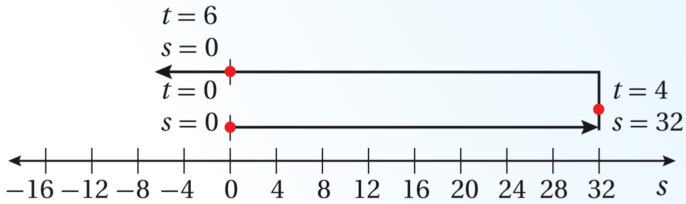
إذن، يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد 6 s

أتذكَّر

يدلُّ الرمز $s(0)$ على الموقع الابتدائي لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم، في حين تدلُّ العبارة $s = 0$ على أنَّ موقع الجسم هو نقطة الأصل.

الدعم البياني:

يُبيِّن المُخطَّط الآتي اتجاهات حركة الجسم في المسار المستقيم.



أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

a) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 4$.

b) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

أتذكَّر

إذا كانت المعادلة التي تَصِف الإزاحة y لجسم عند الزمن t هي: $y = a \sin \omega t$، أو: $y = a \cos \omega t$، فإنَّ الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة.

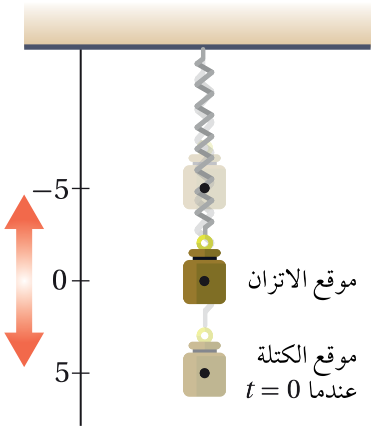
تطبيقات: الحركة التوافقية البسيطة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات الجيبية تُستعمَل لنمذجة السلوك الدوري في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، مثل حركة اهتزاز كتلة مُعلَّقة بزنبرك؛ إذ يُمكِن إيجاد سرعة هذه الكتلة وتسارعها باستعمال المشتقات.

مثال 6 : من الحياة

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

زنبرك: يُبيِّن الشكل المجاور جسمًا مُعلَّقًا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسفل موقع الاتزان $(s = 0)$، ثمَّ تُرِك عند الزمن $t = 0$ ليتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل. ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:



1) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

اقتران السرعة $v(t) = s'(t) = -5 \sin t$

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = -5 \cos t$

2 أَصِف حركة الجسم.

- اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع، فإنَّ الجسم يتحرَّك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s، والقيمة السالبة تعني أنَّ الجسم فوق موقع الاتزان.

- أُلاحِظ أنَّ قيمة السرعة القياسية تكون أكبر ما يُمكِن في كلٍّ من الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$. وفي هذه الحالة، فإنَّ $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس). وبالرجوع إلى اقتران الموقع، أُلاحِظ أنَّ قيمته تُصبِح صفرًا (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$؛ ما يعني أنَّ سرعة الجسم القياسية تكون أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان.

- اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإنَّ قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ ذلك أنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

- تكون قيمة التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان؛ لأنَّ قوَّة الجاذبية وقوَّة الزنبرك تُلغي إحداهما الأُخرى عند هذه النقطة. ولكنْ، إذا كان الجسم عند أيِّ موقع آخر، فإنَّ هاتين القوَّتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفرًا.

أتذكَّر

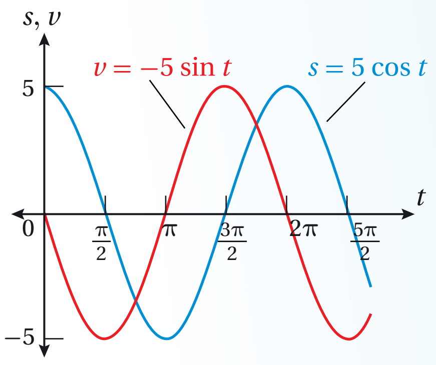
متطابقة فيثاغورس:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

الربط بالفيزياء

تسارع الجسم في كل لحظة يرتبط بمُحصِّلة القوى المُؤثِّرة فيه بحسب القانون الثاني لنيوتن: $\sum F = ma$، حيث a تسارع الجسم، وm كتلته، و$\sum F$ مُحصِّلة القوى المُؤثِّرة فيه.

الدعم البياني:



أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور لاقتراني الموقع والسرعة أنَّ موقع الجسم يتراوح بين القيمة $s = 5$ cm والقيمة $s = -5$ cm، وأنَّ سرعته تتراوح بين القيمة $v = 5$ cm/s والقيمة $v = -5$ cm/s.

أُلاحِظ أيضًا أنَّ السرعة القياسية تكون أكبر ما يُمكِن عندما يقطع منحنى اقتران الموقع المحور x (موقع الاتزان).

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جســـم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 2 \sin x - e^x$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

4) $f(x) = e^{x+1} + 1$

5) $f(x) = e^x + x^e$

6) $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

7) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2} e^{\pi})$.

8) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2} e^{\pi})$.

9) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

10) اختيـار مـن مُتعـدِّد: أيُّ الآتيـة تُمثِّل معادلـة العمودي على المماس لمنحنـى الاقتـران: $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

11 إذا كان: $f(x) = \ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x > 0$، فأُبيِّن أنَّ $f'(x) = \frac{1}{x}$.

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

12 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

13 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

14 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

15 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

16 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

17 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

18 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

19 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

زنبرك: **يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:**

20 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

21 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

22 أَصِف حركة الجسم.

مهارات التفكير العليا

23 تبريـــر: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجـد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

24 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

تبريـر: إذا كان الاقتـران: $y = ke^x$، حيـث: $k > 0$، وكان منحنـاه يقطـع المحـور y عنـد النقطـة P، فأُجيـب عـن السـؤالين الآتيـن تباعًـا:

25 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

26 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y = \log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أُثبِت أنَّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

28 اعتمادًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = \log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

تبرير: يُمثِّـل الاقتـران: $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$ موقع جُسَـيْم يتحرَّك في مسـار مسـتقيم، حيث s الموقـع بالأمتار، و t الزمـن بالثواني:

29 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

30 أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون لحظي أوَّل مَرَّة بعد انطلاقه.

31 أجد موقع الجُسَيْم عندما يكون تسارعه صفرًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

الدرس 2

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية.
- إيجاد المشتقات العليا.

المصطلحات المشتقة الثالثة، المشتقة (n).

مسألة اليوم كلَّما ازداد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلَّصت مساحة البؤبؤ. يُستعمَل الاقتران: $A(b) = \frac{40 + 24b^{0.4}}{1 + 4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالملّيمترات المُربَّعة، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm). وتُعرَف حساسية العين للضوء بأنَّها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع. أجد اقترانًا يُمثِّل حساسية العين للضوء.

مشتقة ضرب اقترانين

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقات اقترانات مختلفة، مثل: اقترانات القوَّة، والاقتران الأُسِّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام. تعلَّمْتُ أيضًا إيجاد مشتقات مضاعفات هذه الاقترانات والاقترانات الناتجة من جمعها وطرحها. ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقات الاقترانات الناتجة من ضرب هذه الاقترانات؟ فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فكيف يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)g(x)$؟

لنفترض أنَّ: $f(x) = u,\ g(x) = v,\ y = f(x)g(x) = uv$، وأنَّ Δx هي زيادة صغيرة في x، ينتج منها تغيُّر في y, u, v مقداره $\Delta y, \Delta u, \Delta v$ على الترتيب. ومنه، فإنَّ:

$$f(x + \Delta x) = u + \Delta u,\ g(x + \Delta x) = v + \Delta v,\ f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) = y + \Delta y$$

إذن:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$ بالتعويض

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y$$ بطرح y من طرفي المعادلة

$$= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$ بتعويض $y = uv$

$$= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v - uv$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\, \Delta v$$ بالتبسيط

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$ بقسمة جميع أطراف المعادلة على Δx

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$ ميل المماس عند النقطة (x, y)

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + (\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u)\frac{dv}{dx}$$ باستعمال تعريف المشتقة

$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + (0)\frac{dv}{dx}$$ $\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u = 0$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$ بالتبسيط

$$(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$ بالتعويض

إذن: $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

نظرية

مشتقة الضرب

بالكلمات: مشتقة ضرب اقترانين هي الاقتران الأوَّل مضروبًا في مشتقة الاقتران الثاني، ثمَّ يضاف إليه الاقتران الثاني مضروبًا في مشتقة الاقتران الأوَّل.

بالرموز: إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)g(x)$ على النحو الآتي:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)}$

$$f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = (3x-2x^2)\frac{d}{dx}(5+4x) + (5+4x)\frac{d}{dx}(3x-2x^2)$$ قاعدة مشتقة الضرب

$$= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الطرح

$$= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= -24x^2 + 4x + 15$$ بالتبسيط

أتعلَّم

يُمكِنني حلُّ الفرع 1 من المثال 1 باستعمال خاصية التوزيع أوَّلًا، ثمَّ اشتقاق الاقتران الناتج باستعمال قاعدة مشتقة المجموع، أو قاعدة مشتقة الفرق.

2 $\boldsymbol{f(x) = xe^x}$

$f(x) = xe^x$	الاقتران المعطى
$f'(x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$	قاعدة مشتقة الضرب
$= xe^x + e^x \times 1$	قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي
$= xe^x + e^x$	بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = \ln x \cos x$

أخطاء شائعة

من الأخطاء الشائعة عند إيجاد مشتقة حاصل ضرب اقترانين، ضرب مشتقة الاقتران الأوَّل في مشتقة الاقتران الثاني.

مشتقة قسمة اقترانين

مشتقة قسمة اقترانين ليست حاصل قسمة مشتقة كلٍّ منهما، مثلما أنَّ مشتقة ضرب اقترانين ليست حاصل ضرب مشتقة كلٍّ منهما. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فكيف يُمكِن إيجاد مشتقة $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؟

لنفترض أنَّ: $\frac{u}{v} = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) = u, g(x) = v, y =$. ومنه، فإنَّ: $u = vy$. وبما أنَّ الاقتران u هو حاصل ضرب اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقته باستعمال قاعدة مشتقة الضرب على النحو الآتي:

$$\frac{du}{dx} = v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx}$$

ومن ثَمَّ، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ كما يأتي:

$v\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}$	بإعادة ترتيب المعادلة
$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}}{v}$	بقسمة طرفي المعادلة على v

بتعويض $y = \frac{u}{v}$

$$= \frac{\frac{du}{dx} - \frac{u}{v} \times \frac{dv}{dx}}{v}$$

بالتبسيط

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

بالتعويض

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}$$

إذن: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$.

نظرية **مشتقة القسمة**

بالكلمات: مشتقة قسمة اقترانين هي المقام في مشتقة البسط مطروحًا منه البسط في مشتقة المقام، ثمَّ قسمة الجميع على مُربَّع المقام.

بالرموز: إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان $g(x) \neq 0$، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $\frac{f(x)}{g(x)}$ على النحو الآتي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2)\frac{d}{dx}(1 - x^2) - (1 - x^2)\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$ قواعد مشتقات اقتران القوَّة، والطرح، والجمع

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$ بالتبسيط

2 $\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln x}{x+1}}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{(x+1)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{(x+1)^2}$$ قواعد مشتقات اقتران القوَّة، والطرح، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$= \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{x + 1 - x\ln x}{x(x+1)^2}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمية بالنسبة إلى كمية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلًا، إيجاد $\frac{dy}{dx}$ يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x.

تتغيَّر القِيَم في كثير من المواقف الحياتية بالنسبة إلى الزمن. فمثلًا، إذا كان r كمية مُعيَّنة؛ فإنَّ مُعدَّل تغيُّرها بالنسبة إلى الزمن t هو $\frac{dr}{dt}$.

مثال 3 : من الحياة

مرض: **تعطى درجة حرارة مريض أثناء مرضه بالاقتران: $T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$، حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت:**

1 **أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.**

أجد $T'(t)$:

$$T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$$ الاقتران المعطى

$$T'(t) = \frac{(1+t^2)\frac{d}{dt}(4t) - (4t)\frac{d}{dt}(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$$ قاعدتا مشتقة القسمة، ومشتقة الثابت

$$= \frac{(1+t^2)(4) - (4t)(2t)}{(1+t^2)^2}$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة المجموع

$$= \frac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$ بالتبسيط

إذن، مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو: $T'(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$.

2 **أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض عندما $t = 2$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.**

أجد $T'(2)$:

$$T'(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$ مشتقة $T(t)$

$$T'(2) = \frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2}$$ بتعويض $t = 2$

$$= -0.48$$ بالتبسيط

إذن، عندما يكون الزمن 2 h، فإنَّ درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة.

أتحقَّق من فهمي

سكّان: يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$، حيث t الزمن بالسنوات، وP عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

مشتقة المقلوب

يُمكِن إيجاد قاعدة عامة لمشتقة مقلوب أيِّ اقتران باستعمال قاعدة القسمة. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ اقترانًا، حيث: $f(x) \neq 0$، وكان: $A(x) = \frac{1}{f(x)}$، فإنَّ:

$$A'(x) = \frac{f(x) \times 0 - 1 \times f'(x)}{(f(x))^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$ بالتبسيط

إذن: $A'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

نظرية — مشتقة المقلوب

بالكلمات: مشتقة مقلوب اقتران هي سالب مشتقة الاقتران مقسومًا على مُربَّع الاقتران.

بالرموز: إذا كان $f(x)$ اقترانًا، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $\frac{1}{f(x)}$ على النحو الآتي:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

أتعلَّم

إذا كان c عددًا ثابتًا، وكان $f(x)$ اقترانًا، وكان: $h(x) = \frac{c}{f(x)}$، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّ:

$$h'(x) = \frac{-cf'(x)}{(f(x))^2}$$

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \dfrac{-\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$ قاعدة مشتقة المقلوب

$= \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الجمع

2) $\boldsymbol{f(t) = \dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}}$

$f(t) = \dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$ الاقتران المعطى

$f'(t) = \dfrac{-\frac{d}{dt}(t+\frac{1}{t})}{(t+\frac{1}{t})^2}$ قاعدة مشتقة المقلوب

$= \dfrac{-1+\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2}$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة المقلوب

$= \dfrac{1-t^2}{t^2(t+\frac{1}{t})^2}$ بالتبسيط

أُفكِّر

هل توجد طريقة أُخرى لإيجاد مشتقة الاقتران في الفرع 2 من المثال 4؟

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{1}{5x-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

مشتقات الاقترانات المثلثية

تعلَّمْتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام. وسأتعلَّم الآن كيف أجد مشتقات الاقترانات المثلثية باستعمال مشتقة القسمة. فمثلًا، لإيجاد مشتقة اقتران الظلِّ، أفترض أنَّ $f(x) = \tan x$. وباستعمال مشتقة القسمة، فإنَّ:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ المتطابقات النسبية

$$f'(x) = \frac{(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x) - (\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$ قاعدتا مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \sec^2 x$$ متطابقات المقلوب

نظرية — **مشتقات الاقترانات المثلثية**

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

إثبات الحالات الثلاث المُتبقِّية من النظرية جاء بصورة تدريب في المسائل (22 – 20).

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 \sec x$

$$f(x) = x^2 \sec x$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sec x) + \sec x \frac{d}{dx}(x^2)$$ قاعدة مشتقة الضرب

$$= x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$$ قاعدتا مشتقة اقتران القاطع، ومشتقة اقتران القوَّة

أتذكَّر

القاطع $(\sec x)$ هو مقلوب جيب التمام، وقاطع التمام $(\csc x)$ هو مقلوب الجيب.

2 $\mathbf{f(x) = \dfrac{\csc x}{1 + \tan x}}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \frac{\csc x}{1 + \tan x}$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$f'(x) = \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(\csc x) - (\csc x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

قواعد مشتقات اقتران الظلِّ، والمجموع، وقاطع التمام

$$= \frac{(1+\tan x)(-\csc x \cot x) - (\csc x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x \cot x$

b) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \sin x}$

المشتقات العليا

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان $f(x)$ اقترانًا، فإنَّ المشتقة $f'(x)$ هي اقتران أيضًا، ومن المُمكِن إيجاد مشتقته، التي يُرمَز إليها بالرمز $f''(x)$. وفي هذه الحالة، يُطلَق على الاقتران الجديد $f''(x)$ اسم **المشتقة الثانية** للاقتران $f(x)$.

إذا كان $f''(x)$ اقترانًا، فإنَّه يُرمَز إلى مشتقته بالرمز $f'''(x)$، وتُسمّى **المشتقة الثالثة** (third derivative) للاقتران $f(x)$. ويستمر إيجاد المشتقات وتسمياتها على النحو نفسه، ويُستعمَل الرمز $f^{(n)}(x)$ للدلالة على **المشتقة (n)** (n^{th} derivative).

رموز رياضية

تُستعمَل الرموز: $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ للتعبير عن المشتقة الثانية، وتُستعمَل الرموز: $\frac{d^ny}{dx^n}, y^{(n)}, \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$ للتعبير عن المشتقة (n).

مثال 6

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

المشتقة الأولى: $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

المشتقة الثانية: $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

المشتقة الثالثة: $f'''(x) = \frac{6}{x^4}$

المشتقة الرابعة: $f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^5}$

أتحقَّق من فهمي

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x) = x \sin x$.

أتعلَّم

يشير الرمز $f^{(n)}$ إلى المشتقة (n) للاقتران f، في حين يشير الرمز f^n إلى الاقتران f مرفوعًا إلى القوَّة n.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

2) $f(x) = x^3 \sec x$

3) $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

4) $f(x) = e^x (\tan x - x)$

5) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x} + 3)$

8) $f(x) = \frac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

9) $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3}$

10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12) $(fg)'(0)$

13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14) $(7f - 2fg)'(0)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x = -2$

16) $f(x) = \frac{1 + x}{1 + \sqrt[3]{x}}, x = 8$

17) $f(x) = \frac{1 - x}{1 + \sqrt{x}}, x = 4$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

18 $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}, (0, \frac{1}{2})$

19 $f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ ممّا يأتي اعتمادًا على أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ، $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

20 $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

21 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

22 $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23 $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

24 $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

25 $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

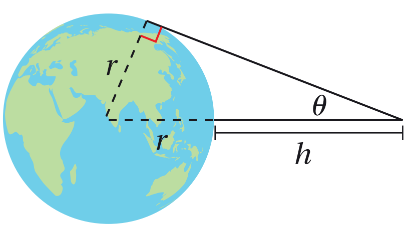
26 **نباتات هجينة:** وجد فريق بحث زراعي أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28 أُثبِت أنَّ: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.

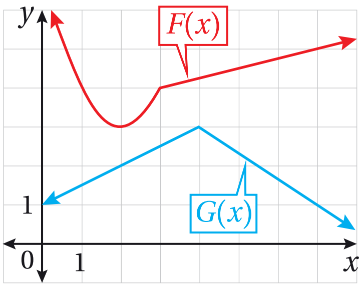
أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور. إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



29 أُثبِت أنَّ: $h = r(\csc\theta - 1)$.

30 أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad (أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

31 إذا كان: $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنَّ: $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.

إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

33 $Q'(7)$

32 $P'(2)$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $y = \frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x \neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.

37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثمَّ أجد $\frac{dx}{dy}$.

38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أُثبِت أنَّ: $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

40 أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

الدرس 3

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

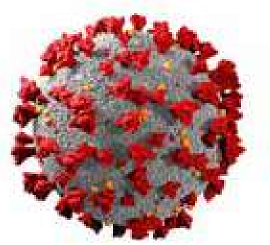
فكرة الدرس

- إيجاد مشتقات اقترانات باستعمال قاعدة السلسلة.
- إيجاد مشتقات المعادلات الوسيطية.

المصطلحات قاعدة السلسلة، قاعدة سلسلة القوّة، المعادلة الوسيطية، المُتغيِّر الوسيط، مجال الوسيط.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران: $P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$، حيث $P(t)$ العدد التقريبي الكلي للطلبة المصابين بعد t يومًا من ملاحظة الإنفلونزا أوَّل مَرَّة في المدرسة.

أجد سرعة انتشار الإنفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقترانَي قوَّة، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران الخارجي وقيمته عند الاقتران الداخلي، ثمَّ ضربه في مشتقة الاقتران الداخلي. تُعَدُّ هذه الطريقة إحدى أهم قواعد الاشتقاق، وتُسمّى **قاعدة السلسلة** (the chain rule). فمثلًا، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$، الذي فيه $u = 5x^3 - 2x$ اقتران داخلي، و $y = u^4$ اقتران خارجي، على النحو الآتي:

أتذكَّر

$$h(x) = \underbrace{(\overbrace{5x^3 - 2x}^{\text{الداخلي}})^4}_{\text{الخارجي}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ قاعدة السلسلة

$$= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$$ بتعويض $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2, \frac{dy}{dx} = 4u^3$

$$= 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$$ بتعويض $u = 5x^3 - 2x$

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقترانين كما يأتي:

نظرية — قاعدة السلسلة

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \,.\, g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$، حيث تُحسَب قيمة $\frac{dy}{du}$ عندما $u = g(x)$.

أتذكَّر

يُعبِّر الرمز $\frac{dy}{du}$ عن مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى u، ويُعبِّر الرمز $\frac{du}{dx}$ عن مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى x.

وبكلمات أُخرى، مشتقة الاقتران المُركَّب $f(g(x))$ هي حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$.

يُمكِن التوصُّل إلى النتائج الآتية عند تطبيق قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة اقترانات ناتجة من تركيب اقترانين، أحدهما اقتران مثلثي، أو اقتران أُسِّي طبيعي، أو اقتران لوغاريتمي طبيعي:

نتائج — قاعدة السلسلة والاقترانات المشهورة

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\big(\csc g(x)\big) = -\csc\big(g(x)\big)\cot\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\sin g(x)\big) = \cos\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\sec g(x)\big) = \sec\big(g(x)\big)\tan\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\cos g(x)\big) = -\sin\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\cot g(x)\big) = -\csc^2\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\tan g(x)\big) = \sec^2\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(\ln g(x)\big) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\big(e^{(g(x))}\big) = e^{g(x)} \times g'(x)$$

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \cos 2x$

$f(x) = \cos 2x$ — الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x) = -\sin 2x \times 2$ — مشتقة $\cos g(x)$، حيث: $g(x) = 2x$

$= -2\sin 2x$ — بالتبسيط

2 $\boldsymbol{f(x) = e^{(x+x^2)}}$

$f(x) = e^{(x+x^2)}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{(x+x^2)}) = e^{(x+x^2)} \times (1 + 2x)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x+x^2$

3 $\boldsymbol{f(x) = \ln(\sin x)}$

$f(x) = \ln(\sin x)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln(\sin x)\right) = \frac{\cos x}{\sin x}$ مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = \sin x$

$= \cot x$ المتطابقات المثلثية النسبية

أتذكَّر

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

أتذكَّر

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$ b) $f(x) = e^{\ln x}$ c) $f(x) = \ln(\cot x)$

قاعدة سلسلة القوَّة

يُعَدُّ الاقتران المُركَّب الذي يكون في صورة $f(x) = (g(x))^n$ أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا، وتُمثِّل مشتقته حالة خاصة من قاعدة السلسلة، وتُسمّى **قاعدة سلسلة القوَّة** (power chain rule)، حيث الاقتران الخارجي هو اقتران قوَّة.

مفهوم أساسي **قاعدة سلسلة القوَّة**

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان: $u = g(x)$ اقترانًا، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $(g(x))^n$ على النحو الآتي:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسّية $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$

قاعدة سلسلة القوّة $f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$

باشتقاق x^2-1 $= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x$

الصورة الجذرية $= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

2 $f(x) = \tan^4 x$

بإعادة كتابة الاقتران المعطى $f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$

قاعدة سلسلة القوّة $f'(x) = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$

باشتقاق $\tan x$ $= 4\tan^3 x \times \sec^2 x$

3 $f(x) = \sqrt{\ln x}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسّية $f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$

قاعدة سلسلة القوّة $f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$

باشتقاق $\ln x$ $= \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{1}{x}$

الصورة الجذرية $= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

c) $f(x) = (\ln x)^5$

أُفكِّر

ما وجه الاختلاف بين الاقتران: $f(x) = \tan^4 x$ والاقتران: $h(x) = \tan x^4$؟

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ: $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

الاستعمال المُتكرِّر لقاعدة السلسلة

أحتاج أحيانًا إلى اســتعمال قاعدة السلسلة أكثر من مَرَّة لإيجاد المشــتقة. فمثلًا، إذا كان $y = f(u), u = g(x), x = h(t)$، حيث f و g و h اقترانات، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة y بالنسبة إلى t باستعمال قاعدة السلسلة مَرَّتين كالآتي:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = e^{\csc 4x}}$

$f(x) = e^{\csc 4x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = \csc 4x$

$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$ مشتقة $\csc g(x)$، حيث: $g(x) = 4x$

$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$ بالتبسيط

2 $\boldsymbol{f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right)}$

$f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \times \frac{d}{dx}\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right)$ مشتقة $\sin g(x)$، حيث: $g(x) = \tan\sqrt{3x^2 + 4}$

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x^2 + 4}\right)$ مشتقة $\tan g(x)$، حيث: $g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \times \frac{d}{dx}(3x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ بكتابة $\sqrt{3x^2 + 4}$ في صورة أُسِّية

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)$ قاعدة سلسلة القوّة

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times 6x$ باشتقاق $3x^2+4$

$= \dfrac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$ الصورة الجذرية، والتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$

b) $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

قواعد الاشتقاق الأساسية، وقاعدة السلسلة

لإيجاد مشـــتقة اقتران في بعض الحالات، أحتاج إلى تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية، مثل: مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق، ومشتقة الضرب، ومشـــتقة القسمة، ومضاعفات الاقتران، إضافةً إلى تطبيق قاعدة السلسلة.

مثال 4

1 **أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$.**

$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x \frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$ قاعدة مشتقة الضرب

$= e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2e^{-0.2x}$ قاعدة السلسلة

$= 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$ بإعادة كتابة الاقتران

$f'(\frac{\pi}{8}) = 4e^{-0.2(\pi/8)}\cos 4(\frac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\pi/8)}\sin 4(\frac{\pi}{8})$ بتعويض $x = \frac{\pi}{8}$

$= -0.2e^{-0.025\pi}$ بالتبسيط

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد مشـــتقة الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ بطريقة أُخرى؟

2 أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x=0$.

الاقتران المعطى	$f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$
قاعدة سلسلة القوَّة	$f'(x)=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)$
قاعدة مشتقة القسمة	$=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\left(\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right)$
بالتبسيط	$=\frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}$
بتعويض $x=0$	$f'(0)=\frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3}$
بالتبسيط	$=\frac{-18}{27}=\frac{-2}{3}$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=0$ هو: $\frac{-2}{3}$. ومنه، فإنَّ ميل العمودي على المماس عندما $x=0$ هو: $\frac{3}{2}$.

معلومة

تشير كثير من المراجع التاريخية إلى أنَّ العالِم المُسلِم ثابت بن قرة هو مَنْ مهَّد لعلم التفاضل والتكامل في القرن الثالث الهجري.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x=1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$.

مثال 5 : من الحياة

أعمال: طرحت إحدى الشركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثمَّ رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه.

إذا مثَّل الاقتران: $N(t)=\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}$, $t>0$ عدد القطع المَبيعة منذ طرح هذا المُنتَج، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 **أجد مُعدَّل تغيُّر عدد القطع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن.**

أجد $N'(t)$:

$$N(t) = \frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}$$ الاقتران المعطى

$$N'(t) = \frac{(2t+1)^2 \frac{d}{dt}(250000\,t^2) - (250000\,t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{(2t+1)^2(500000\,t) - (250000\,t^2)\,2(2t+1)\times 2}{(2t+1)^4}$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة

$$= \frac{(2t+1)^2(500000\,t) - (1000000\,t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$ بالتبسيط

$$= \frac{(2t+1)(500000\,t)\,((2t+1) - 2t)}{(2t+1)^4}$$ بإخراج العامل المشترك

$$= \frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$ بقسمة البسط والمقام على $(2t+1)$

2 **أجد $N'(52)$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.**

أجد $N'(52)$:

$$N'(t) = \frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$ مشتقة الاقتران $N(t)$

$$N'(52) = \frac{500000\,(52)}{(2(52)+1)^3}$$ بتعويض $t = 52$

$$\approx 22$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $N'(52) = 22$، وهـذا يعني أنَّ إجمالـي عدد القطع المَبيعة مـن المُنتَج يزداد بمُعدَّل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعًا على طرح المُنتَج في الأسواق.

أتحقَّق من فهمي

تُحسَب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات بالدينار باستعمال الاقتران:

$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

b) أجد $U'(20)$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

مشتقة $a^{(g(x))}$

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أجد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي: $f(x) = e^x$. ولكنْ، كيف يُمكِنني إيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = a^x$، حيث a عدد حقيقي موجب؟

يُمكِن استعمال خصائص اللوغاريتمات لكتابة a^x بدلالة e^x، حيث a عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، كما يأتي:

$$a^x = e^{\ln a^x}$$ الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات

$$a^x = e^{x \ln a}$$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

يُمكِن إيجاد مشتقة a^x باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a})$$ مشتقة a^x

$$= e^{x \ln a} \times \ln a$$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x \ln a$

$$= a^x \times \ln a$$ $e^{x \ln a} = a^x$

إذن: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$.

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $a^{g(x)}$، حيث $g(x)$ اقتران، كما يأتي:

نظرية — مشتقة $a^{g(x)}$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x) \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

أُفكِّر

لماذا يُشترَط أنْ يكون $a \neq 1$، و $a > 0$ دائمًا عند التعامل مع الاقتران: $f(x) = a^x$؟

أُفكِّر

هل ستظلُّ النظرية صحيحة إذا كان $a = 1$؟

مثال 6

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 8^{5x}$

$$f(x) = 8^{5x}$$ الاقتران المعطى

$$f'(x) = (\ln 8)8^{5x}(5) = (5 \ln 8)8^{5x}$$ مشتقة $a^{g(x)}$

2 $f(x) = 6^{x^2}$

$f(x) = 6^{x^2}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = (\ln 6)6^{x^2}\,(2x) = (2x \ln 6)\, 6^{x^2}$ مشتقة $a^{g(x)}$

3 $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3e^{3x} + (3 \ln 2)2^{3x}$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 3x$، ومشتقة $a^{g(x)}$، وقاعدة مشتقة المجموع

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$

b) $f(x) = 6^{1-x^3}$

c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

مشتقة $\log_a g(x)$

لإيجاد مشـــتقة $\log_a x$، حيث a عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، أستعمل صيغة تغيير الأساس في اللوغاريتمات لكتابة $\log_a x$ بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، ثمَّ أجد المشتقة كما يأتي:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$ صيغة تغيير الأساس

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$ بإيجاد المشتقة

$$= \frac{1}{\ln a} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$$ بإخراج الثابت $\frac{1}{\ln a}$

$$= \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$ مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$= \frac{1}{x \ln a}$$ بالتبسيط

إذن: $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$.

أتذكَّر

$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $\log_a g(x)$، حيث $g(x)$ اقتران، كما يأتي:

نظرية — **مشتقة $\log_a g(x)$**

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

أتذكَّر

عند التعامل مع الاقتران: $f(x) = \log_a g(x)$، فإنَّ $g(x) > 0$.

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \log \cos x$

$f(x) = \log \cos x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$ مشتقة $\log_a g(x)$

$= -\dfrac{\tan x}{\ln 10}$ المتطابقات النسبية

أتذكَّر

يُكتَب اللوغاريتم الاعتيادي عادةً من دون أساس، حيث إنَّ أساسه 10

2 $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

$f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = \log_2 x^2 - \log_2 (x-1)$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$f'(x) = \dfrac{2x}{(\ln 2)\, x^2} - \dfrac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$ مشتقة $\log_a g(x)$، وقاعدة مشتقة الطرح

$= \dfrac{2}{(\ln 2)\, x} - \dfrac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$ بالتبسيط

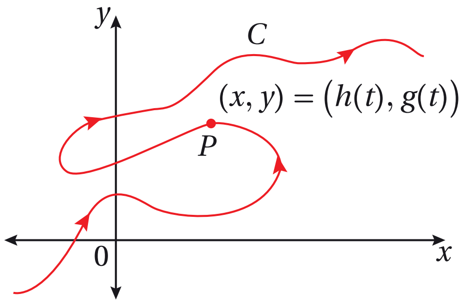
أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

مشتقة المعادلات الوسيطية



يُبيِّن الشكل المجاور الجُسَيْم P الذي يتحرَّك على المنحنى C لحظة مروره بالنقطة (x, y).

ألاحِظ أنَّ المنحنى C لا يُحقِّق اختبار الخطِّ الرأسي؛ لذا لا يُمكِن إيجاد علاقة واحدة فقط في صورة $y = f(x)$ تربط جميع قِيَم x بقِيَم y المُناظِرة لها على المنحنى. ولكنْ، يُمكِن كتابة كلٍّ من الإحداثي x والإحداثي y في صورة اقتران بالنسبة إلى الزمن t كما يأتي:

$$x = h(t), \qquad y = g(t)$$

أتعلَّم

ليس شرطًا أنْ يُمثِّل المُتغيِّر t الزمنَ.

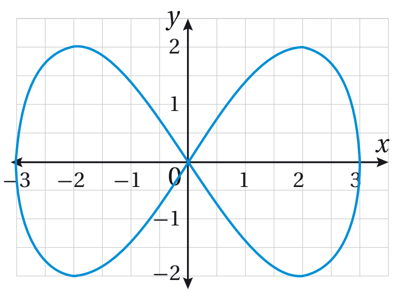
يُشكِّل هذان الاقترانان معًا **معادلة وسيطية** (parametric equation) للمنحنى C، ويُسمّى t **المُتغيِّر الوسيط** (parameter)؛ لأنَّ كل قيمة له تُحدِّد قيمةً للمُتغيِّر x، وقيمةً أُخرى للمُتغيِّر y. وعند تمثيل الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، يَنتج المنحنى C.

يُمكِن تحديد قِيَم المُتغيِّر t عن طريق فترة تُسمّى **مجال الوسيط** (parametric domain)؛ لأنَّ النقاط على المنحنى قد تتكرَّر بعد هذه الفترة.

$$\underbrace{x = h(t) \quad , \quad y = g(t)}_{\text{معادلة وسيطية}} \qquad \qquad \underbrace{t_0 \leq t \leq t_1}_{\text{مجال الوسيط}}$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 3 \cos t, y = 2 \sin 2t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$



يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لهذه المعادلة الوسيطية بإيجاد مشتقة كلٍّ من x و y بالنسبة إلى الوسيط t أوَّلًا، ثمَّ استعمال قاعدة السلسلة على النحو الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = -3 \sin t$$ بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{dy}{dt} = 4 \cos 2t$$ بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$ باستعمال قاعدة السلسلة

بقسمة طرفي المعادلة على $\frac{dx}{dt}$ ، حيث: $\frac{dx}{dt} \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

بتعويض $\frac{dy}{dt} = 4 \cos 2t, \frac{dx}{dt} = -3 \sin t$

$$= \frac{4 \cos 2t}{-3 \sin t}$$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة أيِّ معادلة وسيطية كما يأتي:

مفهوم أساسي

مشتقة المعادلة الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين بالنسبة إلى المُتغيِّر الوسيط t، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال 8

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = 2 \sin t , \qquad y = 3 \cos t , \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

الخطوة 1: أجد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$$

بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{dy}{dt} = -3 \sin t$$

مشتقة المعادلة الوسيطية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

بتعويض $\frac{dy}{dt} = -3 \sin t, \frac{dx}{dt} = 2 \cos t$

$$= \frac{-3 \sin t}{2 \cos t}$$

المتطابقات النسبية

$$= -\frac{3}{2} \tan t$$

بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2} \tan \frac{\pi}{4}$$

بإيجاد الناتج

$$= -\frac{3}{2}$$

أتذكَّر

يُستعمَل الرمز: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقة عندما $x = a$.

الخطوة 2: أجد x و y عندما $t=\frac{\pi}{4}$.

بتعويض $t=\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $x=2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

بتعويض $t=\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $y=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

إذن: $x=\frac{2}{\sqrt{2}}\,,\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

الخطوة 3: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة $\quad$ $y-y_1=m(x-x_1)$

بتعويض $x_1=\frac{2}{\sqrt{2}}, y_1=\frac{3}{\sqrt{2}}, m=-\frac{3}{2}$ $\quad$ $y-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

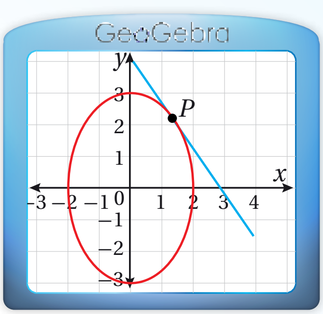
بإعادة كتابة المعادلة $\quad$ $2y+3x=6\sqrt{2}$

أتذكَّر

أستعمل الحقيقة الآتية:

$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

الدعم البياني:



يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى المعادلة الوسيطية: $x=2\sin t, y=3\cos t$، حيث: $0\le t\le 2\pi$، ومماس المنحنى عند النقطة $P\left(\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

يُمكِن تمثيل المعادلة الوسيطية باستعمال برمجية جيوجبرا، عن طريق كتابة الصيغة الآتية في شريط الإدخال، ثمَّ الضغط على ↵ :

curve $(2\sin t, 3\cos t, t, 0, 2\pi)$

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\sec t\ ,\qquad y=\tan t\ ,\qquad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = e^{4x+2}$

2) $f(x) = 50e^{2x-10}$

3) $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$

4) $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

6) $f(x) = x^2 \tan \frac{1}{x}$

7) $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

9) $f(x) = (\ln x)^4$

10) $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$

12) $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

13) $f(x) = 2^{-x}\cos \pi x$

14) $f(x) = \frac{10\log_4 x}{x}$

15) $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

16) $f(x) = \log_3(1 + x\ln x)$

17) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

18) $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19) $f(x) = 4e^{-0.5x^2}, x = -2$

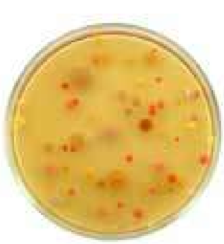
20) $f(x) = x + \cos 2x, x = 0$

21) $f(x) = 2^x, x = 0$

22) $f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}, x = 3$

23) إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان: $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2, g'(5) = 6$، فأجد $A'(5)$.

24) إذا كان: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأُثبِت أنَّ: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.



بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25) أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

26) إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = \sin \pi x \, , f'''(x)$

28 $f(x) = \cos\,(2x + 1), f^{(5)}\,(x)$

29 $f(x) = \cos x^2 , f''(x)$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

31 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المُتبقِّية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

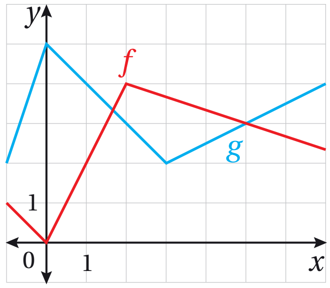
36 $x = \frac{t}{2}\,, y = t^2 - 4, t = -1$

37 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t\,, t = \frac{\pi}{3}$

38 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t\,, t = -\frac{\pi}{4}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = 2(t - \sin t\,), y = 2(1 - \cos t)$، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1 + \sqrt{2}$، و$1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



40 $h'(1)$

41 $p'(1)$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax+b)$، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد قيمة كلٍّ من a و b، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

44 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2 , y = 2t$:

45 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

46 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(a^2 , 2a)$.

47 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|a|(2+a^2)^2$.

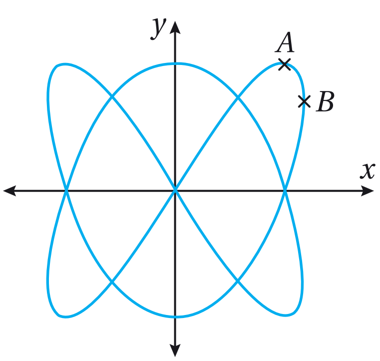
تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

48 $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

49 $y = e^x \sin^2 x \cos x$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



50 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

51 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

52 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \ge 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

53 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

54 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته صفرًا.

55 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

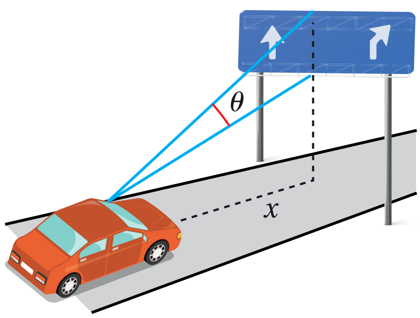
الدرس 4

الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

فكرة الدرس إيجاد مشتقات العلاقات الضمنية.

المصطلحات العلاقة الضمنية، الاشتقاق الضمني.

مسألة اليوم يقود سائق سيّارته في اتجاه لافتة على طريق سريع كما في الشكل المجاور. إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافتة، و x المسافة بينه وبين اللافتة بالأمتار، وكانت العلاقة التي تربط θ بـ x هي: $\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$، فما مُعدَّل تغيُّر θ بالنسبة إلى x؟

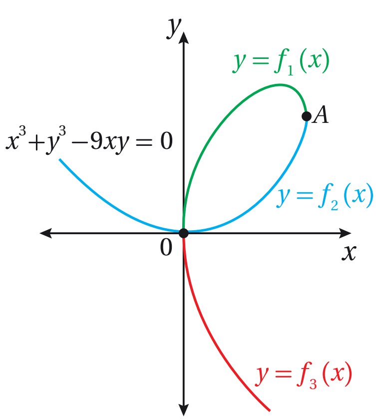


العلاقة الضمنية ومشتقتها

جميع الاقترانات التي درسْتُ مشتقاتها حتّى الآن هي اقترانات تُكتَب في صورة $y = f(x)$ بوجه عام؛ أيْ إنَّه يُمكِن فيها التعبير عن مُتغيِّرٍ صراحةً بدلالةِ مُتغيِّرٍ آخر مثل الاقترانات الآتية:

$$y = x^3 - 8x\,, \qquad y = \frac{7x}{x^2+9}\,, \qquad y = \sqrt[3]{x-1}$$

أُلاحِظ أنَّه توجد معادلات، مثل: $x^3 + y^3 - 9xy = 0$، يصعب (أو لا يُمكِن) كتابتها بصورة صريحة كما يأتي: $y = f(x)$؛ لأنَّها حقيقةً تحوي داخلها أكثر من اقتران. فمثلًا، تتكوَّن المعادلة: $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ من ثلاثة اقترانات، هي: f_1, f_2, f_3 كما في الشكل المجاور. ولكنْ، لا يُمكِن كتابة هذه الاقترانات بصورة صريحة؛ لذا تُمثِّل هذه المعادلة **علاقة ضمنية** (implicit relation).



أتذكَّر

تعلَّمْتُ في الدرس السابق إيجاد مشتقات المعادلات الوسيطية التي لا يُمكِن فيها كتابة y صراحةً في صورة اقتران بدلالة x.

ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية، ولا يُمكِن – في الوقت نفسه – كتابتها في صورة اقتران بصورة صريحة كما يأتي: $y = f(x)$؟

يُطلَق على عملية إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية اسم **الاشتقاق الضمني** (implicit differentiation)، ويُمكِن تلخيص خطوات إجرائها كما يأتي:

مفهوم أساسي — **الاشتقاق الضمني**

بافتراض أنَّ معادلةً تُعرِّف y ضمنيًّا بوصفه اقترانًا بالنسبة إلى المُتغيِّر x، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ باتِّباع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، مراعيًا استعمال قاعدة السلسلة عند اشتقاق حدود تتضمَّن المُتغيِّر y.
- **الخطوة 2:** أُرتِّب حدود المعادلة بحيث تصبح جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف المعادلة الأيسر، والحدود الأُخرى في طرف المعادلة الأيمن.
- **الخطوة 3:** أُخرِج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا من حدود طرف المعادلة الأيسر.
- **الخطوة 4:** أَحُلُّ المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

مثال 1

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$ قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

2 $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos y) = \frac{d}{dx}(2x-3y)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3y)$$ قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه لا يُمكِن كتابة المعادلة في صورة اقتران بشكل صريح.

$$\cos x - \sin y \frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة الجيب، ومشتقة جيب التمام، وقاعدة السلسلة

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y \frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$ بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$ بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$ بحلّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 13$

b) $2x + 5y^2 = \sin y$

أحتاج في بعض المسائل إلى استعمال قاعدتي مشتقة الضرب ومشتقة القسمة، إضافةً إلى قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقة علاقة ضمنية.

مثال 2

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $2xy - y^3 = 1$

$$\frac{d}{dx}(2xy - y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$ قاعدتا مشتقة الفرق، ومشتقة الثابت

$$2x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$ قاعدة مشتقة الضرب

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة السلسلة

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y$$ بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y^2) = -2y$$ بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x - 3y^2}$$ بحلّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

2 $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = \frac{d}{dx}(y^2 \cos x)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = y^2 \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(y^2)$$ قاعدة مشتقة الضرب

$$\cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = -y^2 \sin x + \cos x \left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$ مشـــتقة الجيب، ومشـــتقة جيب التمام، واقتران القوَّة، وقاعدة السلسلة

$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x + 2y \cos x \frac{dy}{dx}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$ بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y) - 2y\cos x) = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$ بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 \sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

أخطاء شائعة

يُخطِئ بعض الطلبة عند إيجاد مشـــتقة: $(\sin(x+y))$، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران المثلثي من دون إيجاد مشتقة الزاوية، باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي: $\cancel{\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = \cos(x+y)\frac{dy}{dx}}$

3 $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1) - (x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$ قاعدتا مشتقة القسمة، ومشتقة السلسلة

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$ قاعدة مشتقة اقتران القوَّة

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$ بالتبسيط

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y(x+1)^2}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$= \frac{1}{y(x+1)^2}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $3xy^2 + y^3 = 8$

b) $\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$

c) $x^2 = \frac{x - y}{x + y}$

أُفكِّر

هــل يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ في الفــرع 3 مــن المثال 2 بطريقة أُخرى؟

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجاد ميل المماس لمنحنى علاقــة ضمنية عند أيِّ نقطة تُحقِّق المعادلة، وذلك بإيجاد $\frac{dy}{dx}$ أوَّلًا، ثمَّ تعويض قيمتي x و y للنقطة المطلوب إيجاد قيمة الميل عندها.

مثال 3

1 أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $e^{2x} \ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(e^{2x} \ln y) = \frac{d}{dx}(x + y - 2)$$

قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والضرب

$$e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln y) + \ln y \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(2)$$

قواعد مشتقات الاقتران الأُسِّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والقوَّة، والسلسلة

$$e^{2x} \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} + \ln y \times 2e^{2x} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{e^{2x}}{y} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x} \ln y$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y} - 1\right) = 1 - 2e^{2x} \ln y$$

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2x} \ln y}{\frac{e^{2x}}{y} - 1}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, 1)$.

بتعويض $x = 1, y = 1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1 - 2e^{2(1)} \ln(1)}{\frac{e^{2(1)}}{1} - 1}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{e^2 - 1}$$

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, 1)$ هو: $\frac{1}{e^2 - 1}$.

أتعلَّم

يُمكِــن إيجــاد الميــل عنــد النقطــة المطلوبة بالتعويض فــي المعادلة الناتجة بعد إيجاد مشتقة الطرفين مباشرة، ثمَّ حلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$.

2 أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = x$ عندما $x = 4$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$2y\,\frac{dy}{dx} = 1$$ مشتقتا اقتران القوَّة، وقاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$.

أُعوِّض قيمة x في العلاقة الأصلية لإيجاد قيمة y المقابلة لها:

$$y^2 = x$$ العلاقة الأصلية

$$y^2 = 4$$ بتعويض $x = 4$

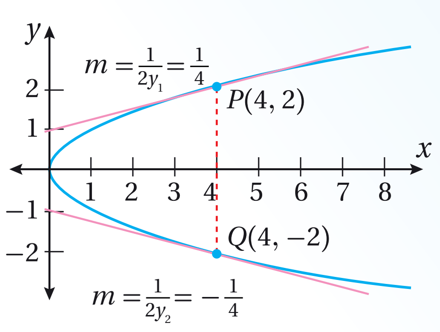
$$y = \pm 2$$ بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

إذن، أجد الميل عند النقطتين: $(4, 2)$، و $(4, -2)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,\,-2)} = -\frac{1}{4} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,\,2)} = \frac{1}{4}$$

الدعم البياني:

أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور لمنحنى العلاقة: $y^2 = x$ وجود نقطتين على منحنى العلاقة، والإحداثي x لكلٍّ منهما 4؛ ما يعني أنَّ لكل نقطةٍ مماسًّا خاصًّا بها، وهذا يُؤكِّد منطقية الحلِّ الجبري.



أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

b) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$.

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجاد معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية بإيجاد ميله، ثمَّ التعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

مثال 4

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$ قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والثابت

$$2x - (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ قواعد مشتقات القوَّة، والضرب، والسلسلة

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2x$$ بإعادة ترتيب المعادلة

$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$ بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(-1, 2)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)}$$ بتعويض $x = -1, y = 2$

$$= \frac{4}{5}$$ بالتبسيط

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(-1, 2)$ هو: $\frac{4}{5}$.

الخطوة 3: أجد معادلة المماس عند النقطة $(-1, 2)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$$y - (2) = \frac{4}{5}(x - (-1))$$ بتعويض $x_1 = -1, y_1 = 2, m = \frac{4}{5}$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة استعمال الاشتقاق الضمني لإيجاد $\frac{dy}{dx}$. وسأتعلَّم الآن كيف أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ باستعمال الاشتقاق الضمني، وذلك باشتقاق $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى المُتغيِّر x، علمًا بأنَّه إذا احتوت المشتقة الأولى على y، فإنَّ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ستحتوي على الرمز $\frac{dy}{dx}$ الذي يُمكِن حذفه بتعويض قيمته.

مثال 5

إذا كان: $2x^3 - 3y^2 = 8$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) = 0$$ قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والثابت

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$ قاعدتا مشتقة القوَّة، والسلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$ بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)\frac{d}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{d}{dx}(y)}{(y)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{2xy - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$ قاعدتا مشتقة القوَّة، والسلسلة

$$= \frac{2xy - x^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^2}$$ بتعويض $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

تعلَّمْتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد مشتقة المعادلات الوسيطية. وسأتعلَّم الآن كيف أجد المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية باستعمال الاشتقاق الضمني.

أتعلَّم

بما أنَّ $\frac{dy}{dx}$ في المعادلة الوسيطية هي اقتران بالنسبة إلى المُتغيِّر t، فإنَّ إيجاد المشتقة الثانية يكون ضمنيًّا بالنسبة إلى المُتغيِّر x.

مفهوم أساسي — المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية

إذا كان: $x = h(t)$، و $y = g(t)$، حيث h و g اقترانان، وكان: $\frac{dy}{dx}$ اقترانًا بالنسبة إلى المُتغيِّر t، فإنَّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال 6

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 1$:

$$x = t^3 + 3t^2, y = t^4 - 8t^2$$

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$ بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$ بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ مشتقة المعادلة الوسيطية

$= \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t}$ بتعويض $\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$

$= \frac{4t(t^2 - 4)}{3t(t + 2)}$ بإخراج العامل المشترك من البسط والمقام

$= \frac{4(t + 2)(t - 2)}{3(t + 2)}$ بتحليل الفرق بين المُربَّعين

$= \frac{4}{3}(t - 2)$ بالتبسيط

أتعلَّم

تبسيط المشتقة الأولى يُسهِّل عملية إيجاد المشتقة الثانية.

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 1$.

بإيجاد مشتقة $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t-2)\right) = \frac{4}{3}$$

المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

بتعويض $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4}{3}$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{3t^2 + 6t} = \frac{4}{3(3t^2 + 6t)}$$

بتعويض $t = 1$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{3(3(1)^2 + 6(1))}$$

بالتبسيط

$$= \frac{4}{27}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 2$:

$$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

4) $e^x y = xe^y$

5) $3^x = y - 2xy$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

7) $x = \sec \frac{1}{y}$

8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

10) $x + y = \cos(xy)$

11) $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

أجد y' لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

14) $y^3 + 2x^2 = 11y,\ y = 1$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

15 $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

16 $x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$

17 $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

20 $x + y - 1 = \ln (x^2 + y^2), (1, 0)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

21 $x + y = \sin y$

22 $4y^3 = 6x^2 + 1$

23 $xy + e^y = e$

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x-6)(y+4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

25 أُثبِت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثمَّ أجد إحداثيي نقطتي التماس.

26 أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x + 2y = 0$.

27 أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًّا على المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$، حيث: $y \neq 0$.

28 إذا كان $x^2 + y^2 = 25$، فأُثبِت أنَّ: $y'' = -\frac{25}{y^3}$.

29 إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$، حيث: $x > 0, y > 0$، فأُثبِت أنَّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

30 أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

31 إذا كان $y = \ln x$، حيث: $x > 0$، فأُثبِت أنَّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني.

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

32) $x = \sin t, y = \cos t,\ t = \frac{\pi}{4}$

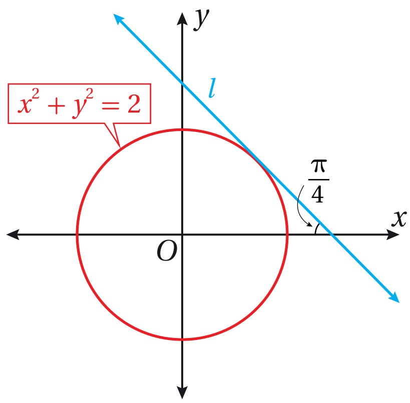
33) $x = e^{-t},\ y = t^3 + t + 1, t = 0$

إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأوَّل.

35) أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأوَّل، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيًّا.

36) يُبيِّن الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 2$، والمستقيم l الذي يُمثِّل مماسًّا لمنحنى العلاقة في الربع الأوَّل. أجد معادلة المستقيم l باستعمال المشتقة.



مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

37) أجد $\frac{dy}{dx}$.

38) يُمكِن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t, y = \tan t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

39) أُثبِت أنَّ المقدارين الجبريين اللذين يُمثِّلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في السؤالين السابقين متكافئان، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

40) أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى العلاقة يساوي 2

41) تبرير: إذا مثَّل l أيَّ مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$، حيث k عدد حقيقي موجب، فأُثبِت أنَّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

الدرس 5

المُعدَّلات المرتبطة

Related Rates

فكرة الدرس حلُّ مسائل وتطبيقات حياتية على المُعدَّلات المرتبطة بالزمن.

مسألة اليوم تُستعمَل المعادلة: $S = \frac{\sqrt{hm}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان، حيث h ثابت يُمثِّل طوله بالسنتيمتر، وm كتلته بالكيلوغرام.

يتَّبِع خالد حِمْية غذائية تجعله يخسر من كتلته 2 kg شهريًّا. ما مُعدَّل التغيُّر في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته 70 kg، علمًا بأنَّ طوله 170 cm؟

عنـد اسـتعمال معادلة ما للربط بيـن كميات تتغيَّر كلٌّ منها بالنسـبة إلى الزمـن، فإنَّه يُمكِن اسـتعمال قاعدة السلسلة لاشتقاق هذه المعادلة بالنسبة إلى الزمن، فتنتج معادلة جديدة تربط بين مُعدَّلات تغيُّر هذه الكميات بالنسـبة إلى الزمن، وتُحدَّد قيمـة مُعدَّل التغيُّر لأيٍّ من هذه الكميـات في لحظة ما إذا عُلِمت مُعدَّلات تغيُّر الكميات الأُخرى، وقِيَم الكميات جميعها في هذه اللحظة.

مفهوم أساسي **استراتيجية حلِّ مسائل المُعدَّلات المرتبطة**

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثمَّ أُحدِّد المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة.

2) **أرسـم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثمَّ أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، مثل: الكميات الثابتة، والكميات المُتغيِّرة بمرور الزمن.

3) **أكتب معادلة:** أكتب معادلة تربط بين المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي علمْتُ مُعدَّلات تغيُّرها.

4) **أشتق بالنسبة إلى الزمن:** أسـتعمل قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر الوسيط t.

5) **أعـوِّض، ثمَّ أجد مُعدَّل التغيُّر المطلوب:** أُعوِّض في المعادلة الناتجـة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات ومُعدَّلات تغيُّرها، ثمَّ أحُلُّ المعادلة تبعًا لمُعدَّل التغيُّر المطلوب إيجاده.

مُعدَّل تغيُّر المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن

يتطلَّب حلُّ بعض المسائل الحياتية إيجاد مُعدَّل تغيُّر المساحة أو الحجم بالنسبة إلى الزمن، مثل تغيُّر مساحة موجات الماء الدائرية المُتكوِّنة على سطح ما عند هَطْلِ المطر.

مثال 1

عند سقوط قطرة ماء على مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر إحدى الدوائر يزداد بمُعدَّل 3 cm/s، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 مُعدَّل تغيُّر محيط الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 5 cm

الخطوة 1: أكتب معادلة، وأُحدِّد المعطيات والمطلوب.

المعادلة: أفترض أنَّ r هو نصف قُطْر الدائرة، وأنَّ C هو محيطها. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين المُتغيِّرين باستعمال المعادلة الآتية:

$$C = 2\pi r$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$.

المطلوب: $\left.\frac{dC}{dt}\right|_{r=5}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثمَّ أُعوِّض.

$C = 2\pi r$ المعادلة

$\frac{d}{dt}(C) = \frac{d}{dt}(2\pi r)$ بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t

$\frac{dC}{dt} = 2\pi \times \frac{dr}{dt}$ قاعدة السلسلة

$= 2\pi(3)$ بتعويض $\frac{dr}{dt} = 3$

$= 6\pi$ بالتبسيط

إذن، يزداد محيط الدائرة بمُعدَّل 6π cm/s عندما يكون نصف قُطْرها 5 cm

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ مُعدَّل تغيُّر محيط الدائرة لا يتأثَّر بطول نصف القُطْر، وهذا يعني أنَّ للمحيط مُعدَّل تغيُّر ثابتًا.

2 مُعدَّل تغيُّر مساحة الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 9 cm

الخطوة 1: أكتب معادلة، وأُحدِّد المعطيات والمطلوب.

المعادلة: أفترض أنَّ A هو مساحة الدائرة. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين A و r باستعمال المعادلة الآتية:

$$A = \pi r^2$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$.

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=9}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثمَّ أُعوِّض.

$A = \pi r^2$ المعادلة

$\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$ بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$ قاعدة السلسلة

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=9} = 2\pi(9)(3)$ بتعويض $r = 9, \frac{dr}{dt} = 3$

$= 54\pi$ بالتبسيط

إذن، تزداد مساحة الدائرة بمُعدَّل $54\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ عندما يكون نصف قُطْرها 9 cm

أتحقَّق من فهمي

تنفخ ماجدة بالونًا على شكل كرة، فيزداد حجمه بمُعدَّل $80 \text{ cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر 6 cm

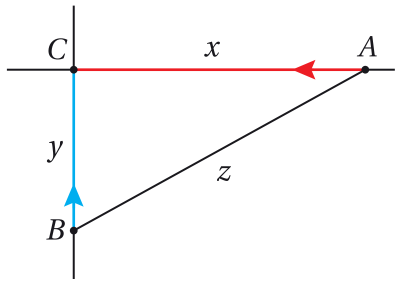
مُعدَّل تغيُّر المسافة بالنسبة إلى الزمن

يُعَدُّ إيجاد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين جسمين مُتحرِّكين أحد التطبيقات الحياتية المُهِمَّة لعلم التفاضل، ومن ذلك إيجاد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين سيّارتين أثناء حركتهما.

مثال 2

تتحرَّك السيّارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80 km/h، وتتحرَّك السيّارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100 km/h، وهما تَتَّجِهان نحو تقاطع مروري. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين عندما تكون السيّارة A والسيّارة B على بُعْد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثمَّ أكتب معادلة، وأُحدِّد المطلوب.



أرسم المُخطَّط، وأُحدِّد عليه المعطيات الواردة في المسألة، ثمَّ أُسمّي نقطة التقاطع المروري C.

المعادلة: أفترض أنَّ x هو المسافة بين A و C، وأنَّ y هو المسافة بين B و C، وأنَّ z هو المسافة بين A و B. ومن ثَمَّ، يُمكِن الاستعانة بنظرية فيثاغورس للربط بين x و y و z باستعمال المعادلة الآتية:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dx}{dt} = -80, \frac{dy}{dt} = -100$.

المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\substack{x=0.3 \\ y=0.4}}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثمَّ أُعوِّض.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$ المعادلة

$$\frac{d}{dt}(z) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$ بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$ قاعدة السلسلة، والاشتقاق الضمني

$$= \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$ بتعويض $\frac{dx}{dt} = -80, x = 0.3$

$y = 0.4, \frac{dy}{dt} = -100$

$$= -128$$ بالتبسيط

إذن، تقترب السيّارتان إحداهما من الأُخرى بمُعدَّل 128 km/h عندما تكون السيّارة A والسيّارة B على بُعْد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ طول كلٍّ من x و y مُتناقِص؛ لذا فإنَّ مُعدَّل تغيُّر كلٍّ منهما سالب.

أتحقَّق من فهمي

تحرَّكت السـيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجَهت السيّارة A نحو الشـمال بسرعة $45\ \text{km/h}$، واتَّجَهت السـيّارة B نحو الشرق بسرعة $40\ \text{km/h}$. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

مُعدَّل تغيُّر الزاوية بالنسبة إلى الزمن

تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّ زاويـة الارتفاع هي الزاوية المحصورة بين خـطِّ النظر إلى الأعلى والخطِّ الأفقـي، وأنَّ زاوية الانخفاض هـي الزاوية المحصورة بين خطِّ النظر إلى الأسـفل والخطِّ الأفقي. والآن سأتعلَّم حساب مُعدَّل تغيُّر زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض بالنسبة إلى الزمن.

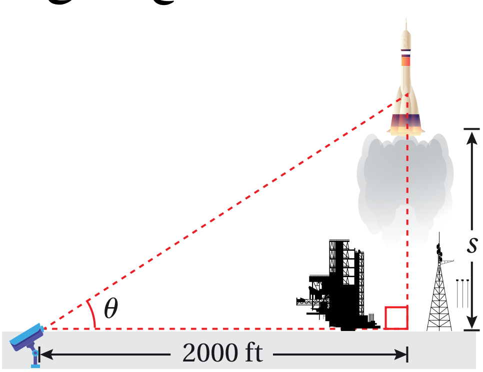
مثال 3 : من الحياة

رصدت كاميرا مُثبَّتة عند مسـتوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسيًّا إلى الأعلى، وقد أُعطِي موقعه بالاقتـران: $s(t) = 50t^2$، حيث s الموقع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة 2000 ft عن مِنَصَّة الإطلاق، فأجد مُعدَّل تغيُّر زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوانٍ من انطلاقه.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثمَّ أكتب معادلة، وأُحدِّد المطلوب.

أرسـم المُخطَّط، ثمَّ أُحدِّد عليه المعطيات الواردة في المسألة.



المعادلة: أفترض أنَّ θ هي زاوية ارتفاع الصاروخ، وأنَّ s هو موقع الصاروخ. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين s و θ باستعمال المعادلة الآتية:

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: بمـا أنَّ موقـع الصـاروخ هـو $s(t) = 50t^2$، فـإنَّ سـرعته هي $v(t) = \frac{ds}{dt} = 100t$.

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=10}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثمَّ أُعوِّض.

المعادلة
$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t
$$\frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{2000}\right)$$

قاعدة السلسلة
$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{d\theta}{dt}$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

لإيجاد $\cos^2\theta$، أستعمل النسب المثلثية:

جيب تمام الزاوية
$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{s^2 + (2000)^2}}$$

بتعويض $s = 50t^2$
$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{(50t^2)^2 + (2000)^2}}$$

بتعويض $t = 10$
$$= \frac{2000}{\sqrt{(50(10)^2)^2 + (2000)^2}}$$

بالتبسيط
$$= \frac{2}{\sqrt{29}}$$

إذن: $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$ بعد 10 ثوانٍ من انطلاق الصاروخ.

المعادلة الناتجة من الاشتقاق
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

بتعويض $\cos^2\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{ds}{dt} = 100t$
$$= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2}{2000} \times 100t$$

بتعويض $t = 10$
$$= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2}{2000} \times 100(10)$$

بالتبسيط
$$= \frac{2}{29}$$

إذن، مُعدَّل تغيُّر زاوية ارتفاع الصاروخ عندما $t = 10$ هو: $\frac{2}{29}$ rad/s .

أُفكِّر

هل توجد طريقة أُخرى لحلِّ المسألة؟

أتحقَّق من فهمي

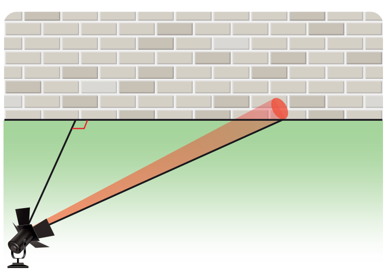
أمســك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تُحلِّق على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، وتتحرَّك أفقيًّا بسرعة 2 m/s. أجد مُعدَّل تغيُّر الزاوية بين الخيط والمســتوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100 m، علمًا بأنَّ ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m

مُعدَّل التغيُّر بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية

تعلَّمْتُ سابقًا الحركة الدائرية. والآن سـأتعلَّم حساب مُعدَّلات تغيُّر زمنية مرتبطة بهذا النوع من الحركة.

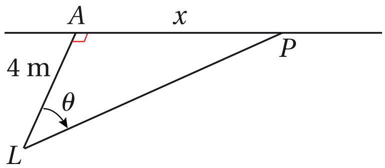
أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

مثال 4



يدور مصبــاح مُثبَّت بالأرض حول نفســه 3 دورات في الدقيقة، ويبعد مسافة 4 m عن جدار مستقيم كما في الشــكل المجاور. أجد ســرعة تحرُّك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بُعْد 8 m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مُبتعِدة عن هذه النقطة.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثمَّ أكتب معادلة، وأُحدِّد المطلوب.



أرســم المُخطَّط، ثمَّ أُحدِّد عليــه موقع المصباح L، وموقع بقعــة الضوء P، وأقــرب نقطــة إلى المصباح على الجدار، وهي النقطة A التي تبعد عنه مسافة 4 m

المعادلة: أفتــرض أنَّ بقعــة الضــوء P تبعد مســافة x عــن A، وأنَّ θ هــي الزاوية ALP.

ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين x و θ باستعمال المعادلة الآتية:

$$x = 4 \tan \theta$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: مُعدَّل تغيُّر الزاوية θ بالنسبة إلى الزمن، وهو يُمثِّل السرعة الزاويَّة.

أستعمل معطيات السؤال لإيجاد السرعة الزاويَّة كالآتي:

قيـاس الدورة الكاملـة 2π، وهذا يعنـي أنَّ كل 3 دورات تُقابِل زاوية الدوران التي قياسـها $3 \times 2\pi$، أو 6π راديان:

السرعة الزاويَّة	$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{\theta}{t}$
بتعويض $\theta = 6\pi, t = 1 \text{ min}$	$= \frac{6\pi}{1 \text{ min}}$

إذن، السرعة الزاويَّة لبقعة الضوء: $\frac{d\theta}{dt} = 6\pi \text{ rad/ min}$، وهي تُمثِّل مُعدَّل التغيُّر المعطى.

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8}$.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثمَّ أُعوِّض.

المعادلة	$x = 4 \tan \theta$
بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t	$\frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(4 \tan \theta)$
قاعدة السلسلة، والاشتقاق الضمني	$\frac{dx}{dt} = 4 \sec^2 \theta \times \frac{d\theta}{dt}$

أستعمل متطابقات فيثاغورس لإيجاد $\sec^2 \theta$ عندما $x = 8$:

المعادلة الأصلية	$x = 4 \tan \theta$
بتعويض $x = 8$	$8 = 4 \tan \theta$
بحلِّ المعادلة لـ $\tan \theta$	$\tan \theta = 2$
متطابقات فيثاغورس	$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$
بتعويض $\tan \theta = 2$	$= 1 + 2^2$
بالتبسيط	$= 5$

إذن، $\sec^2 \theta = 5$ عندما $x = 8$.

المعادلة الناتجة من الاشتقاق	$\frac{dx}{dt} = 4 \sec^2 \theta \times \frac{d\theta}{dt}$
بتعويض $\sec^2 \theta = 5, \frac{d\theta}{dt} = 6\pi$	$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} = 4(5) \times 6\pi$
بالتبسيط	$= 120\pi$

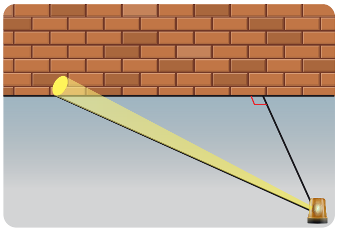
إذن، تتحرَّك بقعة الضوء بسرعة 120π m/min عندما تكون على بُعْد 8 m عن النقطة A أثناء حركتها مُبتعِدة عن هذه النقطة.

أتذكَّر

السـرعة الزاويَّة هي قيمة التغيُّر في قيـاس الزاوية بالراديان مقسـومة على الزمـن المنقضي، ويُرمَز إليها بالرمز ω.

أتحقَّق من فهمي

يدور مصباح مُثبَّت بالأرض حول نفسه 4 دورات في الدقيقة، ويبعد مسافة 3 m عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تحرُّك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بُعْد 1 m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مُقترِبة من هذه النقطة.



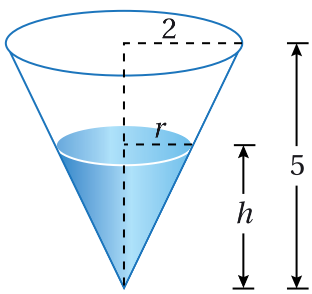
مُعدَّل تغيُّر حجم السائل بالنسبة إلى الزمن

من المعلوم أنَّ السوائل تَتَّخِذ شكل الوعاء الذي توضَع فيه؛ لذا يُمكِن حساب مُعدَّل تغيُّر حجم السائل بالنسبة إلى الزمن اعتمادًا على شكل الوعاء وأبعاده.

مثال 5

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم، ارتفاعه 5 m، ونصف قُطْر قاعدته 2 m، ورأسه إلى الأسفل.

تسرَّب الماء من الخزّان بمُعدَّل $\frac{1}{12}$ m³/min. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 4 m؟



الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا، ثمَّ أكتب معادلة، وأُحدِّد المطلوب.

أرسم المُخطَّط، ثمَّ أُحدِّد عليه المعطيات الواردة في المسألة.

المعادلة: أفترض أنَّ r هو نصف قُطْر سطح الماء في الخزّان، وh ارتفاع الماء في الخزّان، وV حجم الماء في الخزّان. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين r وh وV باستعمال المعادلة الآتية:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{12}$.

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}$.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ حجم الماء يتناقص في الخزّان؛ لذا يكون $\frac{dV}{dt}$ سالبًا.

الخطوة 2: أكتب المعادلة بدلالة مُتغيِّر واحد.

يُمكِنني كتابة V بدلالة المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، وهو h، باستعمال تشابه المثلثات:

$$\frac{r}{h}=\frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad r=\frac{2h}{5}$$

وبذلك، يُمكِن كتابة المعادلة على النحو الآتي:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h=\frac{4\pi}{75}h^3$$

الخطوة 3: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثمَّ أُعوِّض.

المعادلة
$$V=\frac{4\pi}{75}h^3$$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t
$$\frac{d}{dt}(V)=\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{75}h^3\right)$$

قاعدة السلسلة، والاشتقاق الضمني
$$\frac{dV}{dt}=\frac{4\pi}{75}\times 3h^2\times\frac{dh}{dt}$$

بتعويض $\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{12}$, $h=4$
$$-\frac{1}{12}=\frac{4\pi}{75}\times 3(4)^2\times\frac{dh}{dt}$$

بحلِّ المعادلة لـ $\frac{dh}{dt}$
$$\frac{dh}{dt}=-\frac{25}{768\pi}$$

إذن، يتناقص ارتفاع الماء في الخزّان بمُعدَّل $\frac{25}{768\pi}$ m /min عندما يكون ارتفاع الماء 4 m

أتذكَّر

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، كان المثلثان مُتشابِهين، وكانت أطوال أضلاعها المُتناظِرة مُتناسِبة.

أتحقَّق من فهمي

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم، رأسه إلى الأسفل، وارتفاعه 10 m، ونصف قُطْر قاعدته 5 m. صُبَّ الماء في الخزّان بمُعدَّل π m^3/min. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 8 m؟

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدَّل 2 cm/s، ويقل طول ضلعه الآخر بمُعدَّل 3 cm/s، بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل 20 cm، وبلغ طول الضلع الثاني 50 cm:

1. ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟
2. ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟
3. ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطْر المستطيل في تلك اللحظة؟
4. أيُّ الكميات في المسألة مُتزايِدة؟ أيُّها مُتناقِصة؟ أُبرِّر إجابتي.

مُكعَّب طول ضلعه 10 cm. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل 6 cm/s، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

5. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بَدْء تمدُّده.
6. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعَّب بعد 6s من بَدْء تمدُّده.

وقود: **خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15 m، وقُطْر قاعدته 2 m. مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل 500 L/min:**

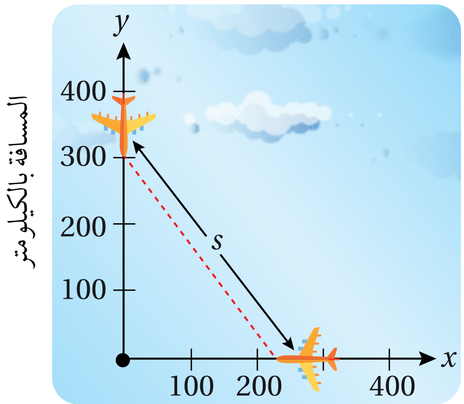
7. أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزّان عند أيِّ لحظة.
8. أجد مُعدَّل تغيُّر المساحة الجانبية للوقود عند أيِّ لحظة.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

آلات: **يسقط الرمل من حزام ناقل بمُعدَّل $10\ m^3/min$ على قِمَّة كَوْمة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكَوْمة يساوي دائمًا ثلاثة أثمان طول قُطْر قاعدتها، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

9. سرعة تغيُّر ارتفاع الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها 4 m
10. سرعة تغيُّر طول نصف قُطْر قاعدة الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها 4 m
11. سرعة تغيُّر مساحة قاعدة الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها 4 m

طيران: رصد مُراقِب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت الطائرة الأولى تسير بسرعة $450\ km/h$، في حين كانت الطائرة الثانية تسير بسرعة $600\ km/h$:



المسافة بالكيلومتر

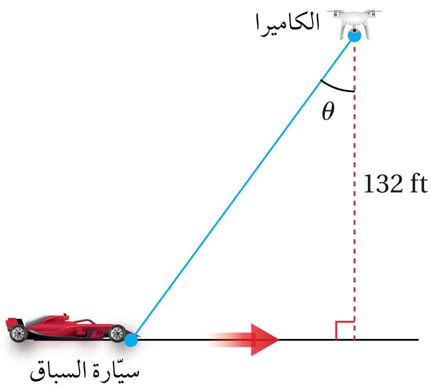
12 أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الطائرتين في اللحظة التي تبعد فيها الطائرة الأولى مسافة $225\ km$ عن نقطة التقاء مسار حركة الطائرتين، وتبعد فيها الطائرة الثانية مسافة $300\ km$ عن النقطة نفسها، علمًا بأن الطائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه.

13 هل يجب على مُراقِب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتِّخاذ مسار مختلف؟ أُبرِّر إجابتي.

14 **دراجات نارية:** تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad. إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى $15\ km/h$، وسرعة الدرّاجة الثانية $20\ km/h$، فأجد سرعة ابتعاد كلٍّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

15 **قوارب:** يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع $1\ m$ عن مُقدِّمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة $1\ m/s$، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة $8\ m$ في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟

سباقات سيّارات: ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة $132\ ft$، وترصد سيّارة تتحرَّك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها $264\ ft/s$ كما في الشكل المجاور:



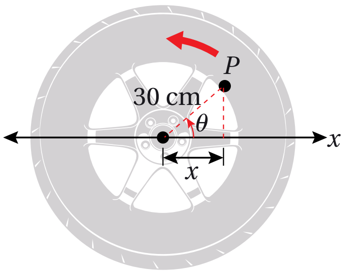
16 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

17 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

18 فيزياء: يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران: $f(x) = 2 \sin \frac{\pi x}{2}$. وعند مروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$، فإنَّ الإحداثي x لموقعه يزداد بمُعدَّل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الجُسَيْم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

سيّارات: عجلة سيّارة طول نصف قُطْرها الداخلي 30 cm، وهي تدور بمُعدَّل 10 دورات في الثانية. رُسِمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:



19 أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.

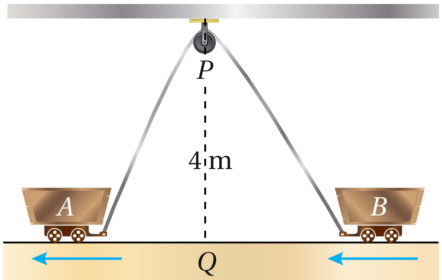
20 أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$.

21 ضوء: مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة 12 m. إذا سار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّه على الجدار عندما يكون على بُعْد 4 m من الجدار.

مهارات التفكير العليا

أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

22 تبرير: رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m، وهو يمرُّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m، وكانت العربة A تتحرَّك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعْد 3 m من النقطة Q، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

23 تبرير: يركض عَدّاء في مضمار دائري، طول نصف قُطْره 100 m، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف صديقه على بُعْد 200 m من مركز المضمار. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين العَدّاء وصديقه عندما تكون المسافة بينهما 200 m

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجُسَيْم. إحدى الآتية تُمثِّل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجُسَيْم صفرًا:

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$ c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

2 إذا كان: $y = uv$، وكان:
$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$،
فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) 2 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

4 إذا كان: $y = \tan 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4 \sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$

c) $\sec^2 (4t)$ d) $4 \sec^2 (4t)$

5 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

6 إذا كان: $f(x) = \log (2x - 3)$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2}{(2x-3) \ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$

c) $\frac{1}{(2x-3) \ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7 إذا كان: $y = 2^{1-x}$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

8 إذا زاد حجم مُكعَّب بمُعدَّل $24 \text{ cm}^3/\text{min}$، وزادت مساحة سطحه بمُعدَّل $12 \text{ cm}^2/\text{min}$، فإنَّ طول ضلعه في تلك اللحظة هو:

a) 2 cm b) $2\sqrt{2}$ cm

c) 4 cm d) 8 cm

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

9 $f(x) = e^x (x + x\sqrt{x})$

10 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

11 $f(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$

12 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

13 $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

14 $f(x) = 5^{2-x}$

15 $f(x) = 10 \sin 0.5x$

16 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

17 $f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان:
$f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$،
فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

18 $(fg)'(2)$

19 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

20 $(3f - 4fg)'(2)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

21 $f(x) = x^7 \ln x$

22 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

23 $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

24 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

25 $x = t^2, y = t + 2, t = 4$

26 $x = 4\cos t, y = 3\sin t, t = \frac{\pi}{4}$

إذا كان: $y = x \ln x$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

28 أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

29 $x(x+y) = 2y^2$

30 $x = \frac{2y}{x^2 - y}$

31 $y \cos x = x^2 + y^2$

32 $2xe^y + ye^x = 3$

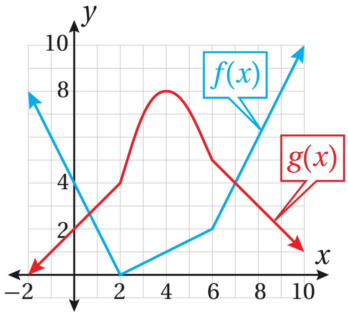
33 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

34 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

35 $x^2 e^y = 1, (1, 0)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و$g(x)$. إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$، وكان: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



36 $p'(1)$

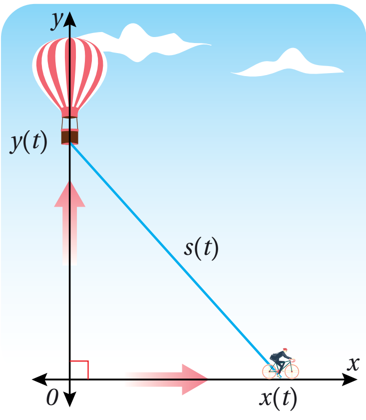
37 $p'(4)$

38 $q'(7)$

39 **مواد مُشِعَّة:** يُمكِن نمذجة الكمية R (بالغرام) المُتبقِّية من عيِّنةٍ كتلتها 200 g من عنصر مُشِعٍّ بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

40 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالسنتيمترات، وt الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

41 يرتفع بالون رأسيًّا فوق مستوى طريق مستقيم أفقي بمُعدَّل 1 ft/s. وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65 ft فوق الطريق، مَرَّت أسفله درّاجة تتحرَّك بسرعة 17 ft/s كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تغيُّر المسافة بين البالون والدرّاجة بعد 3 ثوانٍ من هذه اللحظة.



الوحدة 4

الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers

ما أهمية هذه الوحدة؟

قدَّمت الأعــداد المُركَّبة حــلًّا لأيِّ معادلــة كثير حدود بصــرف النظر عن نوعها؛ ما جعلها أحــد أكثر الموضوعات الرياضية اســتعمالًا فــي العلــوم التطبيقية، مثــل: تصميم الكاميــرات الرقميــة، وأجنحة الطائرات، وإشـــارات الهواتــف المحمولــة، وحســابات الدارات الكهربائية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- حلَّ المعــادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل، واستعمال القانون العام.
- حلَّ معادلات كثيرات الحدود باستعمال نظرية الباقي، ونظرية العوامل.
- تمثيــل المتجهــات فــي المســتوى الإحداثي، والعمليات الحسابية عليها.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- مفهوم العدد المُركَّب، وتمثيله في المســتوى المُركَّب، وإيجاد سعته الرئيسة ومقياسه.
- إجــراء العمليات الحســابية علــى الأعداد المُركَّبة.
- تمثيل المحل الهندسي لمعادلات ومتباينات تتضمَّن أعدادًا مُركَّبةً في المستوى المُركَّب.

أســتعمل تدريبات (أســتعد لدراســة الوحدة)، في الصفحتين 31 و 32 من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers

فكرة الدرس تعرُّف العدد المُركَّب، وإيجاد سعته ومقياسه، وتمثيله بيانيًّا في المستوى المُركَّب.

المصطلحات الوحدة التخيُّلية، العــدد التخيُّلي، العدد المُركَّب، الجزء الحقيقي، الجــزء التخيُّلي، مُرافِق العدد المُركَّب، مقياس العدد المُركَّب، ســعة العدد المُركَّب، السعة الرئيسة للعدد المُركَّب، الصورة المثلثية للعدد المُركَّب.

مسألة اليوم افترض عالِم الرياضيات الإيطالي جيرولامو كاردانو قديمًا أنَّ القيمة: $\sqrt{-1}$ تُمثِّل حلًّا للمعادلة: $x^2 + 1 = 0$. هل يبدو ذلك منطقيًّا؟

الوحدة التخيُّلية والعدد التخيُّلي

تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّه لا يوجد حلٌّ حقيقي للمعادلة التربيعية: $x^2 = -1$؛ لأنَّني إذا حاولْتُ حلَّها، فإنَّ الناتج سيكون:

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

وهذا غير مُمكِن؛ لأنَّ مُربَّع أيِّ عدد حقيقي لا يكون سالبًا.

لكنَّ علماء الرياضيات تمكَّنوا من حلِّ هذه المعادلة بابتكار توسعة للنظام العددي، تمثَّلت في إضافة **وحدة تخيُّلية** (imaginary unit) رُمِز إليها بالرمز i، وعُرِّفت لتُحقِّق المعادلة: $i^2 = -1$.

بنــاءً على تعريف i، فإنَّ كُلًّا من i و $-i$ يُعَدُّ جذرًا تربيعيًّا للعدد -1 ؛ لأنَّ $i^2 = (-i)^2 = -1$، إلّا أنَّ i يُسمّى **الجذر الرئيس** للعدد -1

يُطلَــق على العدد الذي في صورة: $\sqrt{-k}$، حيث k عدد حقيقي موجب، اســم **العدد التخيُّلي** (imaginary number)، ويُمكِن إيجاد الجذر الرئيس للعدد الحقيقي السالب $(-k)$ على النحو الآتي:

$$\sqrt{-k} = \sqrt{-1 \times k} = \sqrt{-1} \times \sqrt{k} = i\sqrt{k}$$

معلومة

تُمثِّــل الأعــداد التخيُّلية ركيــزة أساســية في علم الهندسة الكهربائية.

مثال 1

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1 $\sqrt{-16}$

$\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \times 16}$ بالتحليل

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{16}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= i \times 4 = 4i$ تعريف الجذر الرئيس للعدد -1

2 $\sqrt{-72}$

$\sqrt{-72} = \sqrt{-1 \times 36 \times 2}$ بالتحليل

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{36} \times \sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= i \times 6 \times \sqrt{2} = 6i\sqrt{2}$ تعريف الجذر الرئيس للعدد -1

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

a) $\sqrt{-75}$

b) $\sqrt{-49}$

أتعلَّم

يُكتَب الرمز i على يمين العدد المضروب فيه. أمّا إذا كان مضروبًا في مُتغيِّر أو جذر، فإنَّه يُكتَب على يسار المُتغيِّر أو الجذر. من الأمثلة على ذلك:

$5i,\ ix\ ,\ 2i\sqrt{14}$

ضرب الأعداد التخيُّلية

يتطلَّب ضرب الأعداد التخيُّلية كتابتها أوَّلًا بدلالة i، ثمَّ استعمال خاصيتي التبديل والتجميع لكتابة الناتج في أبسط صورة، كما هو الحال في ما يأتي بالنسبة إلى الجذرين الرئيسين للعددين: -9 و -4 (بافتراض أنَّ $i = \sqrt{-1}$):

خطأ

$$\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} = \sqrt{-9(-4)}$$
$$= \sqrt{36}$$
$$= 6$$

صحيح

$$\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} = i\sqrt{9} \times i\sqrt{4}$$
$$= 3i \times 2i$$
$$= 6i^2 = 6(-1) = -6$$

أتعلَّم

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فإنَّ: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$، لكنَّ ذلك غير صحيح للأعداد السالبة، والأعداد التخيُّلية.

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة بافتراض أنَّ $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$:

1 $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$

$\sqrt{-8} \times \sqrt{-18} = \sqrt{-1 \times 8} \times \sqrt{-1 \times 18}$ بالتحليل

$= (\sqrt{-1} \times \sqrt{8}) \times (\sqrt{-1} \times \sqrt{18})$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= (i \times \sqrt{8}) \times (i \times \sqrt{18})$ بافتراض أنَّ $\sqrt{-1} = i$

$= (i \times i) \times (\sqrt{8} \times \sqrt{18})$ خاصيتا التبديل والتجميع للضرب

$= i^2 \times \sqrt{144}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= -1 \times 12 = -12$ بالتبسيط: $i^2 = -1$

2 $5\boldsymbol{i} \times \sqrt{-4}$

$5i \times \sqrt{-4} = 5i \times \sqrt{-1 \times 4}$ بالتحليل

$= 5i \times \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$ خاصية ضرب الجذور التربيعية

$= 5i \times i \times 2$ بافتراض أنَّ $\sqrt{-1} = i$

$= (2 \times 5) \times i \times i$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= 10i^2$ بالضرب

$= 10 \times -1 = -10$ بالتبسيط: $i^2 = -1$

3 $\boldsymbol{i}^{15}$

$i^{15} = (i^2)^7 \times i$ خاصية قوّة القوّة

$= (-1)^7 \times i$ بالتبسيط: $i^2 = -1$

$= -i$ بالتبسيط: $(-1)^7 = -1$

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة بافتراض أنَّ $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$ b) $\sqrt{-50} \times -4i$ c) i^{2021}

أتذكَّر

- خاصية التبديل للضرب: إذا كان a, b عددين حقيقيين، فإنَّ: $a \times b = b \times a$
- خاصية التجميع للضرب: إذا كانت a, b, c أعدادًا حقيقيةً، فإنَّ: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- إذا كان a عددًا حقيقيًّا، وكان n و m عددين صحيحين، فإنَّ: $(a^n)^m = a^{nm}$
- تبقى الخصائص الثلاث السابقة صحيحة إذا كانت a و b و c أعدادًا تخيُّلية.

أتذكَّر

العدد (-1) مرفوعًا إلى أُسٍّ زوجي يساوي (1)، ومرفوعًا إلى أُسٍّ فردي يساوي (-1).

الأعداد المُركَّبة

العــدد المُركَّــب (complex number) هو عدد يُمكِن كتابته فــي صورة: $a + ib$، حيث a و b عــددان حقيقيان. يتكوَّن العــدد المُركَّب من **جزء حقيقــي** (real part) هو العدد a، **وجزء تخيُّلي** (imaginary part) هو العدد b.

أتعلَّم

الجـزء التخيُّلـي هو b، وليس ib.

عند كتابة العدد المُركَّب في صورة $(a + ib)$، فإنَّه يكون مكتوبًا بالصورة القياسية.

أُلاحِظ من الصورة القياســية للعدد المُركَّب أنَّ الأعــداد الحقيقية هي أيضًا أعداد مُركَّبة؛ لأنَّه يُمكِن كتابة أيِّ عدد حقيقي a في صورة: $a + 0i$؛ وهو عدد مُركَّب، فيه $b = 0$.

أُلاحِــظ أيضًا أنَّ الأعداد التخيُّلية هــي أعداد مُركَّبة؛ لأنَّه يُمكِن كتابــة أيِّ عدد تخيُّلي ib في صورة: $0 + ib$؛ وهو عدد مُركَّب، فيه $a = 0$.

$$z = x + i\,y$$

الجزء الحقيقي عدد تخيُّلي الجزء التخيُّلي

أَســتنتج ممّا ســبق أنَّ الأعداد الحقيقية والأعــداد التخيُّلية تُمثِّل مجموعتيــن جزئيتين من النظام العددي، وأنَّ اتحادهما معًا، إضافةً إلى حاصل جمع أعدادهما، ينتج منه مجموعة الأعداد المُركَّبة.

يُبيِّن المُخطَّط الآتي العلاقات بين مجموعات الأعداد التي تعلَّمْتُها سابقًا.

الأعداد المُركَّبة (C) تشمل الأعداد الحقيقية والأعداد التخيُّلية معًا، إضافةً إلى حاصل جمع هذه الأعداد.

الأعداد التخيُّلية (i):

$\sqrt{-7}, \sqrt{-9}$

$\sqrt{-0.25}$

$i\sqrt{3}, -5i, \frac{3}{4}i$

الأعداد غير النسبية (I):

أعداد لا يُمكِن كتابتها في صورة نسبة بين عددين صحيحين.

$\sqrt{2}, \sqrt{7}, -\sqrt{10},$

$0.070070007...$

الأعداد النسبية (Q):

$\{\frac{p}{q}, p, q \in Z; q \neq 0\}$

الأعداد الصحيحة (Z):

$\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

الأعداد الكلية (W):

$\{0, 1, 2, 3, ...\}$

الأعداد الحقيقية (R) تشمل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية معًا.

خاصية المساواة للأعداد المُركَّبة

يتساوى العددان المُركَّبان إذا تساوى جُزآهما الحقيقيان، وتساوى جُزآهما التخيُّليان.

مفهوم أساسي **تساوي الأعداد المُركَّبة**

يتساوى العددان المُركَّبان: $a + ib, c + id$ إذا وفقط إذا كان: $a = c, b = d$، حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

مثال 3

أجد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$ صحيحة.

أُساوي الجزأين الحقيقيين، وأُساوي الجزأين التخيُّليين، ثمَّ أَحُلُّ المعادلتين الناتجتين:

بمساواة الجزأين التخيُّليين	$3y + 2 = 8$	بمساواة الجزأين الحقيقيين	$2x - 6 = 4x$
بحلِّ المعادلة	$y = 2$	بحلِّ المعادلة	$x = -3$

إذن: $x = -3, y = 2$.

أتحقَّق من فهمي

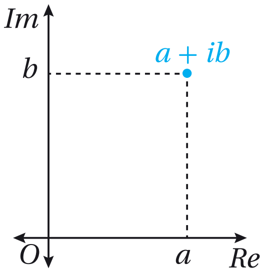
أجد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحة.

معلومة

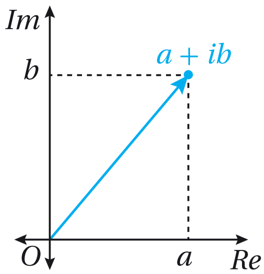
يُسمّى المستوى المُركَّب أيضًا مستوى آرجاند؛ نسبةً إلى عالِم الرياضيات جون آرجاند الذي ابتكره عام 1806م.

تمثيل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا

يُمكِن تمثيل العدد المُركَّب $a + ib$ في المستوى الإحداثي في صورة الزوج المُرتَّب (a, b)، أو صورة المتجه $\langle a, b\rangle$، عندئذٍ يُسمّى المحور الأفقي **المحور الحقيقي**، ويُرمَز إليه بالرمز (Re)، ويُسمّى المحور الرأسي **المحور التخيُّلي**، ويُرمَز إليه بالرمز (Im)، في حين يُسمّى المستوى الإحداثي في هذه الحالة **المستوى المُركَّب**.



صورة الزوج المُرتَّب

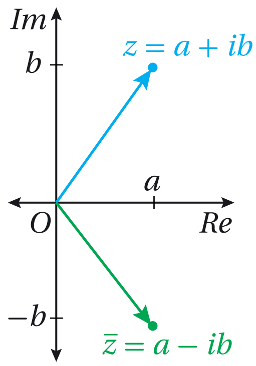


صورة المتجه

أتعلَّم

يُستعمَل الحرف z رمزًا للعدد المُركَّب بوجه عام.

أمّا **مُرافِق العدد المُركَّب** (conjugate) المكتوب بالصورة القياسية: $z = a + ib$ فهو العدد المُركَّب: $\bar{z} = a - ib$. وعند تمثيل z ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، أُلاحِظ أنَّ كُلًّا منهما هو انعكاس للآخر في المحور الحقيقي (Re) كما في الشكل المجاور.



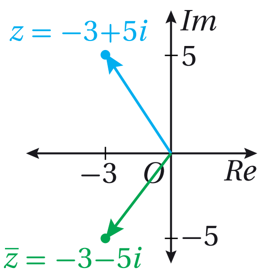
مثال 4

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $z = -3 + 5i$

مُرافِق العدد المُركَّب: $z = -3+5i$ هو: $\bar{z} = -3 - 5i$.

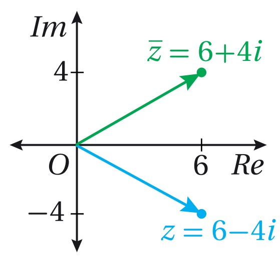
يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(-3, 5)$ العدد المُركَّب z، ويُمثِّل الزوج المُرتَّب $(-3, -5)$ مُرافِقه $\bar{z}$.



2 $z = 6 - 4i$

مُرافِق العدد المُركَّب: $z = 6 - 4i$ هو: $\bar{z} = 6 + 4i$.

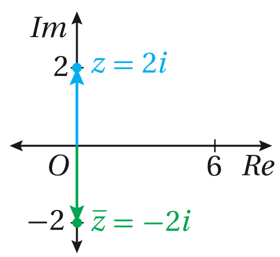
يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(6, -4)$ العدد المُركَّب z، ويُمثِّل الزوج المُرتَّب $(6, 4)$ مُرافِقه $\bar{z}$.



3 $z = 2i$

مُرافِق العدد المُركَّب: $z = 2i$ هو: $\bar{z} = -2i$.

يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(0, 2)$ العدد z، ويُمثِّل الزوج المُرتَّب $(0, -2)$ مُرافِقه $\bar{z}$.



أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $z = 2 + 7i$ b) $z = -3 - 2i$ c) $z = -3i$

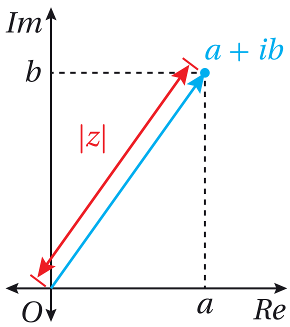
أُفكِّر

ما مُرافِق العدد الحقيقي a؟

مقياس العدد المُركَّب

مقياس العدد المُركَّب (modulus) المكتوب في الصورة القياسية: $z = a + ib$ هو المسافة بين نقطة الأصل $(0, 0)$ والنقطة (a, b)، ويُرمَز إليه عادةً بالرمز $|z|$ أو الرمز r.

يُستعمَل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد مقياس العدد المُركَّب.



أتعلَّم

عند تمثيل العدد المُركَّب في صورة المتجه، فإنَّ مقياس العدد المُركَّب هو طول المتجه.

مفهوم أساسي — **مقياس العدد المُركَّب**

مقياس العدد المُركَّب: $z = a + ib$ هو: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، حيث a, b عددان حقيقيان.

مثال 5

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

1 $z = 3 - 4i$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$ صيغة مقياس العدد المُركَّب

$$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$ بتعويض $a = 3, b = -4$

$$= \sqrt{25} = 5$$ بالتبسيط

2 $z = 12i$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$ صيغة مقياس العدد المُركَّب

$$= \sqrt{0^2 + (12)^2}$$ بتعويض $a = 0, b = 12$

$$= \sqrt{144} = 12$$ بالتبسيط

أتذكَّر

$12i = 0 + 12i$

أتحقَّق من فهمي

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

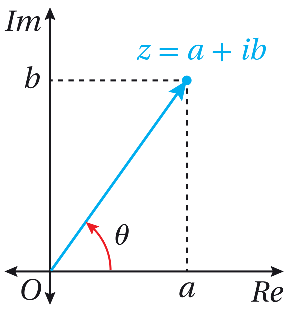
a) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$

b) $z = -2i$

c) $z = 4 + \sqrt{-20}$

سعة العدد المُركَّب

سـعة العدد المُركَّب (argument) هي الزاوية θ المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تُمثِّل العدد المُركَّب مَقيسةً بالراديان. ويُرمَز إلى سعة العدد المُركَّب z بالرمز $\arg(z)$.



وبما أنَّه يوجد عدد لانهائي من الزوايا المرسومة في الوضع القياسي التي لها ضلع الانتهاء نفسه، فقد عُرِّفت **السعة الرئيسة** (principal argument) للعدد المُركَّب بأنَّها السعة التي تقع في الفترة: $-\pi < \theta \le \pi$، ويُرمَز إلى السعة الرئيسة بالرمز $\text{Arg}\,(z)$، أيْ إنَّ:

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi n = \theta + 2\pi n, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

ويُمكِن استعمال النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية لإيجاد سعة العدد المُركَّب: $z = a + ib$ الذي يقع في الربع الأوَّل.

إرشاد

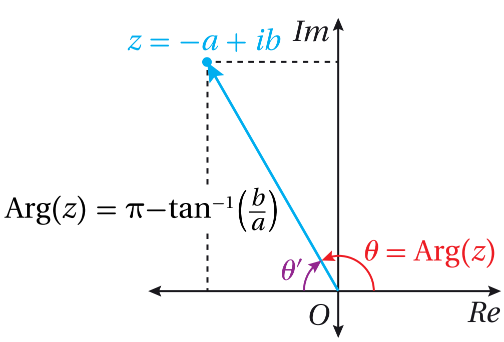
تشير كلمة (السعة) إلى السعة الرئيسة أينما ورد ذكرها في الكتاب.

مفهوم أساسي — **السعة في الربع الأوَّل**

إذا كان: $z = a + ib$ عددًا مُركَّبًا يقع في الربع الأوَّل، فإنَّ سعته تعطى بالصيغة الآتية:

$$\theta = \text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

إذا وقع العدد المُركَّب z في الربع الثاني، فإنَّ سعته تكون زاوية مُنفرِجة؛ لذا تُستعمَل مُكمِّلتها لإيجادها. إذا كانت سعة z هي الزاوية المُنفرِجة θ، فإنَّ مُكمِّلتها θ' هي زاوية حادَّة؛ لذا يُرسَم في الربع الثاني مثلثٌ قائمٌ، أحد رؤوسه z، وإحدى زواياه θ' كما في الشكل المجاور، وتُستعمَل النسب المثلثية لإيجاد قياس θ'.



عدد مُركَّب في الربع الثاني

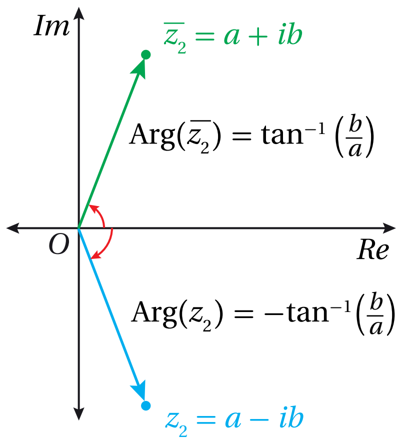
أتذكَّر

يكون قياس الزاوية موجبًا عند دوران ضلع انتهائها عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وسالبًا عند دورانه في اتجاه دوران عقارب الساعة.

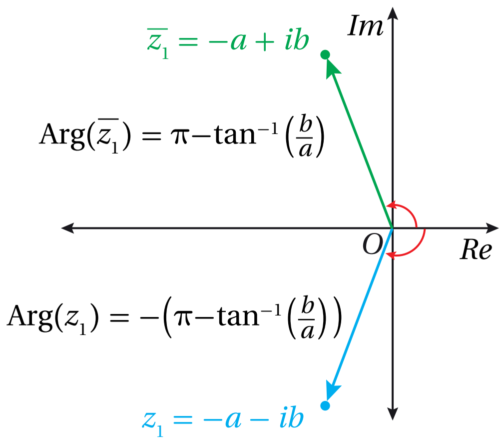
أمّا إذا وقع العدد المُركَّب في الربع الثالث أو الربع الرابع، فإنَّ سعته تساوي معكوس سعة مُرافِقه الذي يقع في الربع الأوَّل أو الربع الثاني؛ لأنَّ قياس الزاوية بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تُمثِّل العدد المُركَّب يساوي قياس الزاوية بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تُمثِّل مُرافِق العدد المُركَّب، لكنَّ اتجاه كلٍّ من هاتين الزاويتين مختلف (إحداهما في اتجاه دوران عقارب الساعة، والأُخرى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة).

تنبيه

في الشكل المجاور، $a, b > 0$.



عدد مُركَّب في الربع الرابع



عدد مُركَّب في الربع الثالث

مُلخَّص المفهوم

سعة العدد المُركَّب

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فإنَّ:

$\text{Arg}(z)$	الربع الذي يقع فيه z	العدد المُركَّب z
$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	الأوَّل	$z = a + ib$
$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	الثاني	$z = -a + ib$
$-\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$	الثالث	$z = -a - ib$
$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	الرابع	$z = a - ib$

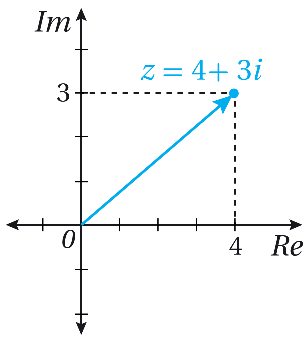
أُفكِّر

كيف أجد السعة عندما $a = 0$؟

مثال 6

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، وأُقرِّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1 $z = 4 + 3i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المُركَّب: $z = 4 + 3i$ في الشكل المجاور، أُلاحِظ أنَّه يقع في الربع الأوَّل.

$\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ سعة العدد المُركَّب في الربع الأوَّل

$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ بتعويض $a = 4, b = 3$

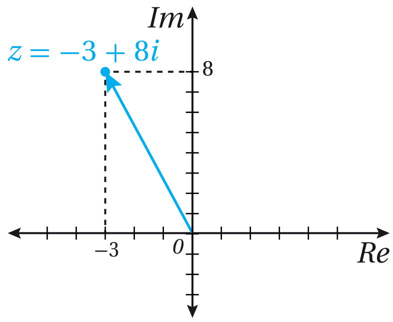
≈ 0.64 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: $\text{Arg}(z) \approx 0.64$.

أتذكَّر

يجب ضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.

2 $z = -3 + 8i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المُركَّب: $z = -3 + 8i$ في الشكل المجاور، أُلاحِظ أنَّه يقع في الربع الثاني.

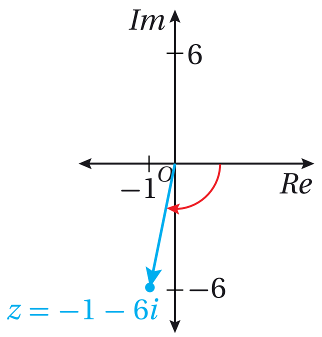
$\text{Arg}(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ سعة العدد المُركَّب في الربع الثاني

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$ بتعويض $a = 3, b = 8$

≈ 1.93 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: $\text{Arg}(z) \approx 1.93$.

3 $z = -1 - 6i$



بالنظـــر إلـــى التمثيـــل البياني للعـــدد المُركَّب: $-1 - 6i$ في الشكل المجاور، أُلاحِظ أنَّه يقع في الربع الثالث.

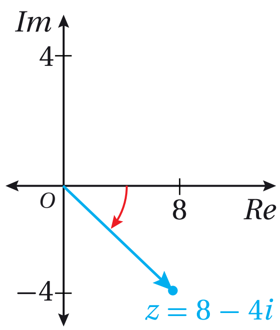
$\text{Arg}(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ سعة العدد المُركَّب في الربع الثالث

$= -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right)\right)$ بتعويض $a = 1, b = 6$

≈ -1.74 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: $\text{Arg}(z) \approx -1.74$.

4 $z = 8 - 4i$



بالنظـــر إلـــى التمثيـــل البيانـــي للعـــدد المُركَّب: $z = 8 - 4i$ في الشـــكل المجاور، أُلاحِظ أنَّه يقع في الربع الرابع.

$\text{Arg}(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ سعة العدد المُركَّب في الربع الرابع

$= -\tan^{-1}\left(\frac{4}{8}\right)$ بتعويض $a = 8, b = 4$

≈ -0.46 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: $\text{Arg}(z) \approx -0.46$.

أتعلَّم

تشـــترك الأعـــداد المُركَّبة مع المتجهـــات في بعض الخصائـــص، مثـــل وجود مقدار واتجاه لكلٍّ من العدد المُركَّب والمتجـــه، لكنَّها تختلف عن المتجهات من حيث التســـمية والعمليات الحسابية.

أتحقَّق من فهمي

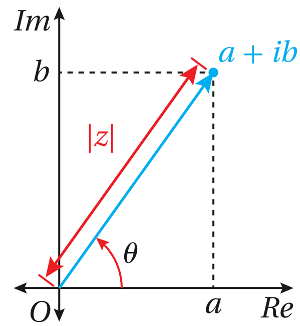
أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، وأُقرِّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

a) $z = 8 + 2i$

b) $z = -5 + 12i$

c) $z = -2 - 3i$

d) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$



الصورة المثلثية للعدد المُركَّب

يُبيِّن الشكل المجاور النقطة (a , b) التي تُمثِّل العدد المُركَّب: $z = a + ib$، الذي مقياسه: $r = |z|$، وسعته: θ.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$\cos\theta = \frac{a}{r}$ تعريف جيب التمام

$a = r\cos\theta$ بالضرب التبادلي

$\sin\theta = \frac{b}{r}$ تعريف الجيب

$b = r\sin\theta$ بالضرب التبادلي

بتعويض قيمة كلٍّ من a، وb في الصورة القياسية للعدد المُركَّب: $(a + ib)$، فإنَّ:

$$z = a + ib = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تُسمّى الصيغة: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ **الصورة المثلثية** (trigonometric form) للعدد المُركَّب.

أتعلَّم

إذا لم أستعمل السعة الرئيسة في هذه الصيغة، فإنَّ العدد المُركَّب لا يُعَدُّ مكتوبًا بالصورة المثلثية، عندئذٍ يتعيَّن عليَّ إضافة $2\pi n$ أو طرحه لإيجاد السعة الرئيسة في الفترة $-\pi < \theta \leq \pi$

مفهوم أساسي — الصورة المثلثية للعدد المُركَّب

إذا كان: $z = a + ib$، فإنَّ سعة العدد المُركَّب: $\text{Arg}(z) = \theta$، ومقياسه: $|z| = r$، يُستعمَلان لكتابته بالصورة المثلثية كما يأتي:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

أتعلَّم

عندما أكتب العدد المُركَّب بالصورة المثلثية، فإنَّني أترك الإجابة في صورة: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، من دون حساب قيمة $\sin\theta$ وقيمة $\cos\theta$.

مثال 7

أكتب العدد المُركَّب z في كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

1 $|z| = 4, \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ الصورة المثلثية للعدد المُركَّب

$= 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ بتعويض $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$

إذن، الصورة المثلثية للعدد المُركَّب z هي: $z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

أتعلَّم

يُمكِن استعمال الصورة المثلثية لتحديد سعة العدد المُركَّب ومقياسه بسهولة.

2 $z = -2 - 5i$

الخطوة 1: أجد مقياس العدد المُركَّب z.

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

الخطوة 2: أجد سعة العدد المُركَّب z.

بما أنَّ العدد المُركَّب z يقع في الربع الثالث، فإنَّ:

$$\mathrm{Arg}(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$ سعة العدد المُركَّب في الربع الثالث

$$= -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$ بتعويض $a = 2, b = 5$

$$\approx -1.95$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: $\mathrm{Arg}(z) \approx -1.95$.

الخطوة 3: أكتب العدد المُركَّب z بالصورة المثلثية.

$$z \approx \sqrt{29}\left(\cos(-1.95) + i \sin(-1.95)\right)$$

أُفكِّر

كيف يُمكِن تحديد الربع الذي يقع فيه العدد المُركَّب من دون تمثيله بيانيًّا في المستوى المُركَّب؟

أتحقَّق من فهمي

أكتب العدد المُركَّب z في كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

a) $|z| = 4\sqrt{2}, \mathrm{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$

b) $z = -4 - 4i$

c) $z = 2i$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-19}$

2) $\sqrt{\frac{-12}{25}}$

3) $\sqrt{\frac{-9}{32}}$

4) $\sqrt{-53}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة بافتراض أنَّ $\sqrt{-1} = i$:

5) i^{26}

6) i^{39}

7) $(i)(2i)(-7i)$

8) $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$

9) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$

10) $2i \times \sqrt{-9}$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z بالصورة القياسية بافتراض أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

11) $\frac{2+\sqrt{-4}}{2}$
12) $\frac{8+\sqrt{-16}}{2}$
13) $\frac{10-\sqrt{-50}}{5}$

أُحدِّد الجزء الحقيقي والجزء التخيُّلي لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثمَّ أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

14) $z = 2 + 15i$
15) $z = 10i$
16) $z = -16 - 2i$

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

17) $z = -15 + 3i$
18) $z = 8 - 7i$
19) $z = 12 + 17i$
20) $z = -3-25i$
21) $3i$
22) 15

أجد $|z|$، و $\bar{z}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

23) $z = -5 + 5i$
24) $z = 3+ 3i\sqrt{3}$
25) $z = 6 -8i$

أجد قِيَم كلٍّ من x، و y الحقيقية التي تجعل كُلًّا من المعادلات الآتية صحيحة:

26) $x^2 - 1 + i\,(2y - 5) = 8 + 9i$
27) $2x + 3y + i\,(x - 2y) = 8 - 3i$
28) $y - 3 + i\,(3x + 2) = 9 + i\,(y - 4)$
29) $i\,(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، وأُقرِّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

30) 1
31) $3i$
32) $-5 - 5i$
33) $1 - i\sqrt{3}$
34) $6\sqrt{3} + 6i$
35) $3 - 4i$
36) $-12 + 5i$
37) $-58 - 93i$
38) $2i - 4$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z بالصورة المثلثية:

39 $|z| = 2, \text{Arg}\, z = \frac{\pi}{2}$

40 $|z| = 3, \text{Arg}\, z = \frac{\pi}{3}$

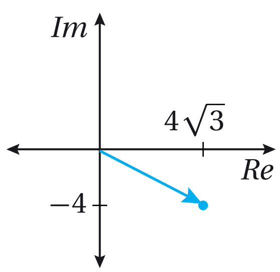
41 $|z| = 7, \text{Arg}\, z = \frac{5\pi}{6}$

42 $|z| = 1, \text{Arg}\, z = \frac{\pi}{4}$

43 $z = 6$

44 $z = 1 + i$

45 يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المُركَّب z_1 في المستوى المُركَّب. أجد العدد المُركَّب z_2 الذي يُحقِّق ما يأتي:



$$|z_2| = 40 \quad \text{and} \quad \text{Arg}\, z_2 = \text{Arg}\, \overline{z_1}$$

بافتراض أنَّ: $z = a + ib$، حيث: $|z| = 10\sqrt{2}$، وأنَّ: $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$:

46 أكتب العدد المُركَّب z بالصورة القياسية.

47 أجد قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين z و $\overline{z}$.

إذا كان: $z = -8 + 8i$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

48 $|z|$

49 $\text{Arg}(z)$

50 $|\overline{z}|$

51 $\text{Arg}(\overline{z})$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $\text{Arg}(5 + 2i) = \alpha$، فأجد سعة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة α، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

52 $-5 - 2i$

53 $5 - 2i$

54 $-5 + 2i$

55 $2 + 5i$

56 $-2 + 5i$

57 تحدٍّ: إذا كان: $z = 5 + im$، حيث: $|z| = 6$، و $0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$، فأجد قيمة العدد الحقيقي m.

58 تبرير: إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$، فأجد جميع قِيَم k الحقيقية المُمكِنة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: بافتراض أنَّ z_1 عدد مُركَّب، مقياسه: $4\sqrt{5}$، وسعته: $\theta = \tan^{-1}(2)$:

59 أكتب العدد المُركَّب z_1 بالصورة القياسية.

60 إذا كان: $z_2 = 7 - 3i, z_3 = -5 + i$، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: z_1, z_2, z_3 في المستوى المُركَّب.

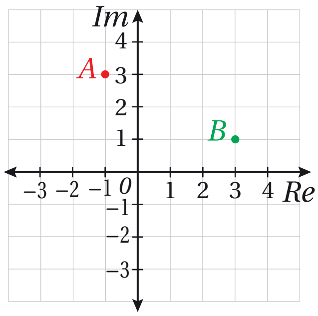
الدرس 2

العمليات على الأعداد المُركَّبة
Operations with Complex Numbers

فكرة الدرس

- إجراء العمليات الحسابية الأربع (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة) على الأعداد المُركَّبة.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد مُركَّب، وإيجاد الجذور المُركَّبة لمعادلات كثيرات الحدود.

مسألة اليوم



اعتمادًا على المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين A و B، أجد السعة والمقياس للعدد المُركَّب AB.

جمع الأعداد المُركَّبة وطرحها

تُشبِه عمليتا جمع الأعداد المُركَّبة وطرحها عمليتي جمع المقادير الجبرية وطرحها، حيث تُجمَع الحدود المُتشابِهة بعضها مع بعض.

لجمع عددين مُركَّبين أو طرحهما، يتعيَّن جمع جزأيهما الحقيقيين أو طرحهما، وجمع جزأيهما التخيُّليين أو طرحهما.

مفهوم أساسي — **جمع الأعداد المُركَّبة وطرحها**

إذا كان: $z_1 = a + ib,\ z_2 = x + iy$ عددين مُركَّبين، فإنَّه يُمكِن إيجاد ناتج جمعهما أو طرحهما على النحو الآتي:

$$z_1 + z_2 = (a + x) + i\,(b + y)$$

$$z_1 - z_2 = (a - x) + i\,(b - y)$$

مثال 1

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\mathbf{(5 + 7i) + (-9 - 4i)}$

$$(5 + 7i) + (-9 - 4i) = 5 + 7i - 9 - 4i \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= (5 - 9) + (7 - 4)i \quad \text{خاصيتا التبديل والتجميع}$$

$$= -4 + 3i \quad \text{بالتبسيط}$$

أتعلَّم

يُحقِّق جمع الأعداد المُركَّبة خاصية التبديل. فإذا كان z و w عددين مُركَّبين، فإنَّ:

$$z + w = w + z$$

أتعلَّم

النظير الجمعي للعدد المُركَّب: $z = a + bi$ هو: $-z = -a - bi$

2 $\mathbf{(8 - 5i) - (2 - 11i)}$

$(8 - 5i) - (2 - 11i) = 8 - 5i - 2 + 11i$ خاصية التوزيع

$= (8 - 2) + (-5 + 11)i$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= 6 + 6i$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(7 + 8i) + (-9 + 14i)$

b) $(11 + 9i) - (4 - 6i)$

ضرب الأعداد المُركَّبة

يُمكِن ضرب الأعداد المُركَّبة بطريقة مُشابِهة لعملية ضرب المقادير الجبرية، وذلك باستعمال خاصية التوزيع. فبعد إتمام عملية الضرب، يوضَع العدد -1 بدل i^2 أينما ظهرت.

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أكتبه بالصورة القياسية:

1 $\mathbf{5i(3 - 7i)}$

$5i(3 - 7i) = 5i(3) + (5i)(-7i)$ خاصية التوزيع

$= 15i + (-35)i^2$ بالضرب

$= 15i + (-35)(-1)$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$= 35 + 15i$ بكتابة الناتج بالصورة القياسية

2 $\mathbf{(6 + 2i)(7 - 3i)}$

$(6+2i)(7-3i) = 6(7) + 6(-3i) + 2i(7) + 2i(-3i)$ خاصية التوزيع

$= 42 - 18i + 14i - 6i^2$ بالضرب

$= 42 - 18i + 14i - 6(-1)$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$= (42 + 6) + (-18 + 14)i$ بتجميع الحدود المُتشابِهة

$= 48 - 4i$ بالتبسيط

3 $(5+4i)(5-4i)$

$(5+4i)(5-4i) = 5(5)+5(-4i)+4i(5)+4i(-4i)$ خاصية التوزيع

$= 25 - 20i + 20i - 16i^2$ بالضرب

$= 25 - 20i + 20i + 16$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$= 41$ بتجميع الحدود المُتشابِهة

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أكتبه بالصورة القياسية:

a) $-3i(4-5i)$ b) $(5+4i)(7-4i)$ c) $(3+6i)^2$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ كُلًّا من العددين المُركَّبين المضروبين مُرافِق للآخر، وأنَّ ناتج الضرب عدد حقيقي.

قسمة الأعداد المُركَّبة

لاحظْتُ في الفرع الأخير من المثال السابق أنَّ ناتج ضرب العدد المُركَّب: $5+4i$ في مُرافِقه يساوي عددًا حقيقيًّا. وهذا صحيح دائمًا لأيِّ عدد مُركَّب: $z = a+ib$، وناتج الضرب يكون دائمًا في صورة: a^2+b^2؛ أيْ إنَّ $z\bar{z} = |z|^2$.

يُمكِن استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مُركَّبين، وذلك بضرب كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه في مُرافِق المقسوم عليه، فيصبح المقسوم عليه عددًا حقيقيًّا.

أتذكَّر

مُرافِق العدد المُركَّب: $z = a+ib$ هو العدد المُركَّب: $\bar{z} = a-ib$

مثال 3

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أكتبه بالصورة القياسية:

1 $\dfrac{8-5i}{3-2i}$

$\dfrac{8-5i}{3-2i} = \dfrac{8-5i}{3-2i} \times \dfrac{3+2i}{3+2i}$ بالضرب في $\dfrac{3+2i}{3+2i}$

$= \dfrac{24+16i-15i-10i^2}{9+4}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \dfrac{24+16i-15i+10}{13}$ $i^2=-1$

$= \dfrac{34+i}{13}$ بجمع الحدود المُتشابِهة

$= \dfrac{34}{13} + \dfrac{1}{13}i$ بكتابة الناتج بالصورة القياسية

2 $\dfrac{3+5i}{2i}$

$$\frac{3+5i}{2i} = \frac{3+5i}{2i} \times \frac{i}{i}$$ بالضرب في $\frac{i}{i}$

$$= \frac{3i+5i^2}{2i^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{3i-5}{-2}$$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$ بكتابة الناتج بالصورة القياسية

أتعلَّم

يُمكِن أيضًا ضرب كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه في $\frac{-2i}{-2i}$، لكنَّ الأسهل هو الضرب في $\frac{i}{i}$.

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أكتبه بالصورة القياسية:

a) $\dfrac{-4+3i}{1+i}$ b) $\dfrac{2-6i}{-3i}$ c) $\dfrac{7i}{4-4i}$

ضرب الأعداد المُركَّبة المكتوبة بالصورة المثلثية وقسمتها

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، فإنَّ:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\big)$$

$$= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

أتعلَّم

- $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

مفهوم أساسي: ضرب الأعداد المُركَّبة المكتوبة بالصورة المثلثية

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، فإنَّ:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه إذا كان: $-\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq \pi$، فإنَّ:

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$

يُمكِن بطريقة مُشابِهة إثبات أنَّه إذا كان $z_2 \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

مفهوم أساسي **قسمة الأعداد المُركَّبة المكتوبة بالصورة المثلثية**

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، فإنَّ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه إذا كان: $-\pi < \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$، وكان $z_2 \neq 0$، فإنَّ:

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

مثال 4

إذا كان: $z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$، وكان: $z_2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$، فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

1 $z_1 z_2$

صيغة ضرب عددين مُركَّبين مكتوبين بالصورة المثلثية

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\sin(\theta_1+\theta_2))\right)$$

بالتعويض

$$= 2 \times 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 20\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

2 $\frac{z_1}{z_2}$

صيغة قسمة عددين مُركَّبين مكتوبين بالصورة المثلثية

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

بالتعويض

$$= \frac{10}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

بحساب السعة الرئيسة

$$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 5\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

أتذكَّر

في الصورة المثلثية، يجب أنْ تكون θ هي السعة الرئيسة.

أتذكَّر

تقع السعة الرئيسة في الفترة $-\pi < \theta \leq \pi$، ويُمكِن تحديدها بطرح $2\pi n$، أو إضافته إلى الزاوية الناتجة من الجمع أو الطرح.

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

a) $6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أتذكَّر

θ	$0°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	0	-1

الجذر التربيعي للعدد المُركَّب

يوجد لكل عدد مُركَّب جذران تربيعيان، وهما عددان مُركَّبان أيضًا. فإذا كان: $\sqrt{z} = x + iy$، فإنَّ: $z = (x + iy)^2$. ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد قيمة كلٍّ من x، و y الحقيقيتين بتربيع الطرفين، ثمَّ المقارنة بين الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيُّلية في طرفي المعادلة.

مثال 5

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z = 21 - 20i$.

أفترض أنَّ: $\sqrt{z} = x + iy$، حيث x و y عددان حقيقيان:

$\sqrt{z} = x + iy$ بالفرض

$z = (x + iy)^2$ بتربيع الطرفين

$21 - 20i = (x + iy)^2$ بتعويض قيمة z

$21 - 20i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ بفكِّ القوسين

$21 - 20i = x^2 - y^2 + 2ixy$ بتعويض $i^2 = -1$

$21 = x^2 - y^2$ بمساواة الجزأين الحقيقيين

$-20 = 2xy$ بمساواة الجزأين التخيُّليين

إذن، ينتج النظام الآتي الذي يحوي معادلتين بمُتغيِّرين، ويُمكِن حلُّه بطريقة التعويض:

أتذكَّر

يتساوى العددان المُركَّبان: $a + bi, c + di$ إذا وفقط إذا كان: $a = c, b = d$.

المعادلة الأولى	$x^2 - y^2 = 21$
المعادلة الثانية	$2xy = -20$
بحلِّ المعادلة الثانية لـ y	$y = -\frac{10}{x}$
بتعويض $y = -\frac{10}{x}$ في المعادلة الأولى	$x^2 - \left(-\frac{10}{x}\right)^2 = 21$
بضرب طرفي المعادلة الناتجة في x^2	$x^4 - 100 = 21x^2$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x^4 - 21x^2 - 100 = 0$
بالتحليل	$(x^2 - 25)(x^2 + 4) = 0$
بحلِّ المعادلتين	$x^2 = 25 \quad \text{or} \quad x^2 = -4$

بما أنَّ x عدد حقيقي، فإنَّ: $x = \pm 5$.

وبتعويض قيمتي x في المعادلة: $y = -\frac{10}{x}$، فإنَّ الناتج:

$$x = 5 \quad \rightarrow \quad y = -2$$

$$x = -5 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

إذن، الجذران التربيعيان للعدد المُركَّب: $21 - 20i$ هما: $5 - 2i$، و $-5 + 2i$

أتعلَّم

يُمكِن أيضًا حلُّ المعادلة الثانية لـ x.

أتعلَّم

يُمكِن التحقُّق من صِحَّة الحلِّ بتربيع كلٍّ من الجذرين التربيعيين الناتجين، ثمَّ مقارنة الناتجين بالعدد المُركَّب الأصلي.

أتحقَّق من فهمي

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

a) $-5 - 12i$

b) $-9i$

c) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

الجذور المُركَّبة لمعادلات كثيرات الحدود

تعلَّمْتُ سابقًا حلَّ بعض المعادلات التربيعية في صورة: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث: a, b, c أعداد حقيقية، باستعمال القانون العام الذي صيغته:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

استعملْتُ أيضًا المُميِّز ($\triangle = b^2 - 4ac$) لتحديد إذا كان للمعادلة التربيعية جذران حقيقيان أم لا، وإذا كان الجذران متساويين أم لا كما في الجدول الآتي:

جذرا المعادلة التربيعية	$\triangle = b^2 - 4ac$
حقيقيان مختلفان	$\triangle > 0$
حقيقيان متساويان	$\triangle = 0$
لا توجد جذور حقيقية	$\triangle < 0$

ولكنْ، وبعد تعرُّف الأعداد المُركَّبة في هذه الوحدة أُلاحِظ أنَّه إذا كان المُميِّز سالبًا، فإنَّه ينتج عددان مُركَّبان مُترافِقان من تعويض القِيَم: a, b, c في القانون العام.

إذن، يُمكِن القول إنَّه إذا كان المُميِّز سالبًا، فإنَّ للمعادلة التربيعية جذرين مُركَّبين. ومن ثَمَّ، يُمكِن تعديل الجدول السابق على النحو الآتي:

جذرا المعادلة التربيعية	$\triangle = b^2 - 4ac$
حقيقيان مختلفان	$\triangle > 0$
حقيقيان متساويان	$\triangle = 0$
مُركَّبان مُترافِقان في صورة: $f \pm ig, g \neq 0$	$\triangle < 0$

يتبيَّن ممّا سبق أنَّه إذا كان: $f + ig$ جذرًا لمعادلة تربيعية ذات معاملات حقيقية، فإنَّ مُرافِقه: $f - ig$ هو أيضًا جذر للمعادلة نفسها. ويُمكِن تعميم هذا الاستنتاج ليشمل أيًّا من معادلات كثيرات الحدود.

إذا كانت درجة معادلة كثير حدود أكبر من الصفر، فقد لا توجد لها جذور حقيقية، وإنَّما توجد لها جذور مُركَّبة.

عند التعامل مع الأعداد المُركَّبة، فإنَّ أيَّ معادلة كثير حدود، درجتها أكبر من الصفر، لها – على الأقل – جذر مُركَّب واحد، في ما يُعرَف باسم **النظرية الأساسية في الجبر**.

أتعلَّم

درجة معادلة كثير الحدود هي أعلى أُسٍّ للمُتغيِّر فيها.

نظرية

النظرية الأساسية في الجبر

يوجد جذر مُركَّب واحد – على الأقل – لأيِّ معادلة كثير حدود، درجتها أكبر من الصفر.

صحيح أنَّ النظرية الأساسية في الجبر تُؤكِّد وجود صفر مُركَّب واحد –على الأقل– لأيِّ معادلة كثير حدود، درجتها أكبر من الصفر، لكنَّها لا تساعد على إيجاد هذا الصفر.

فمثلًا، إذا كانت: $p(x) = 0$ معادلة كثير حدود من الدرجة $n \geq 1$، فإنَّ النظرية الأساسية في الجبر تضمن وجود جذر مُركَّب واحد –على الأقل– للمعادلة، وليكن: z_1.

ثمَّ إنَّ **نظرية العوامل** التي تعلَّمْتُها سابقًا تضمن إمكانية تحليل $p(x)$ في صورة: $p(x) = (x-z_1)\, q_1(x)$، حيث $q_1(x)$ كثير حدود درجته $n-1$.

فإذا كانت درجة $q_1(x)$ لا تساوي صفرًا، فإنَّه يُمكِن تطبيق النظرية الأساسية في الجبر عليه لإثبات وجود جذر مُركَّب آخر لكثير الحدود، وهكذا حتّى إثبات وجود n من الجذور المُركَّبة لـ $p(x)$.

أتعلَّم

$q_1(x)$ هو ناتج قسمة $p(x)$ على $(x-z_1)$.

التحليل المُركَّب

نظرية

لأيِّ معادلة كثير حدود من الدرجة n، حيث: $n \neq 0$، يوجد n من الجذور المُركَّبة، بما في ذلك الجذور المُكرَّرة.

أمثلة:

$z^6 + 2z^5 - z + 7 = 0$	$5z^2 - z^3 + z - 19 = 0$	$z^4 - 4z^2 + z^3 = 0$
6 جذور.	3 جذور.	4 جذور.

أتعلَّم

للمعادلة: $x^2 = 0$ جذران، هما: $x = 0, x = 0$؛ أيْ إنَّ لها جذرًا مُكرَّرًا مرَّتين.

تُستعمَل نظرية التحليل المُركَّب، وحقيقة أنَّ الجذور المُركَّبة تأتي في صورة أزواج من الأعداد المُركَّبة المُترافِقة، لتحديد أنواع الجذور المُمكِنة لمعادلة كثير الحدود كما في الجدول الآتي:

درجة معادلة كثير الحدود	عدد الجذور	أنواع الجذور المُمكِنة
1	1	جذر حقيقي واحد.
2	2	جذران حقيقيان، أو جذران مُركَّبان مُترافِقان.
3	3	ثلاثة جذور حقيقية، أو جذر حقيقي واحد وجذران مُركَّبان مُترافِقان.
4	4	أربعة جذور حقيقية، أو جذران حقيقيان وجذران مُركَّبان مُترافِقان، أو أربعة جذور مُركَّبة (زوجان من الجذور المُركَّبة المُترافِقة).
...	...	...

أتعلَّم

ينطبق الجدول المجاور على كثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية فقط.

يُمكِن اســتعمال نظريتي الباقي والعوامل لتحليل كثير الحــدود، وحلّ معادلته كما في المثال الآتي.

مثال 6

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 + 4z^2 + z = 26$

أجعل الطرف الأيمن صفرًا بطرح 26 من طرفي المعادلة:

$$z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$$

بحسب نظرية الأصفار النسبية، إذا كان لهذه المعادلة جذر نسبي، فإنَّه يكون أحد عوامل الحدِّ الثابت (-26)، وهي: $\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$.

بالتعويض، أجد أنَّ العدد 2 يُحقِّق هذه المعادلة:

$$2^3 + 4(2^2) + 2 - 26 = 0$$

إذن، $z - 2$ هو أحد عوامل كثير الحدود.

أَقسِم $z^3 + 4z^2 + z - 26$ على $z - 2$ لإيجاد العامل التربيعي باستعمال طريقة الجدول على النحو الآتي:

$\times$	z^2	$6z$	13	
z	z^3	$6z^2$	$13z$	0
-2	$-2z^2$	$-12z$	-26	

إذن، يُمكِن كتابة المعادلة في صورة حاصل ضرب العامل الخطِّي والعامل التربيعي كما يأتي:

$$z^3 + 4z^2 + z - 26 = (z-2)(z^2 + 6z + 13) = 0$$

باستعمال خاصية الضرب الصفري، فإنَّ:

$$z^2 + 6z + 13 = 0 \quad \text{or} \quad z - 2 = 0$$

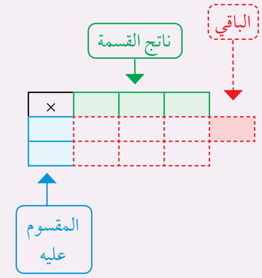
باستعمال القانون العام، فإنَّ جذور المعادلة التربيعية هي:

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = -3 \pm 2i$$

إذن، لهذه المعادلة 3 جذور، هي: $2, -3 + 2i, -3 - 2i$

أتذكَّر

تعلَّمْتُ في الوحدة الأولى من هذا الكتاب طريقة الجدول؛ وهي طريقة تعتمد أساسًا على ضرب كثيرات الحدود، بوصف ذلك عملية عكسية لعملية القسمة.



أتحقَّق من فهمي

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$

أتعلَّم

تُستعمَل هذه الطريقة أحيانًا لإيجاد قِيَم معاملات مجهولة في المعادلة.

إذا عُلِم أحد جذور المعادلة، فإنَّه يُمكِن السير بخطوات عكسية (بَدْءًا بالجذر المعلوم) لإيجاد المعادلة الأصلية، أو أحد معامِلاتها.

مثال 7

إذا كان: $3 + 9i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

بما أنَّ: $3 + 9i$ هو أحد جذور المعادلة، فإنَّ مُرافِق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

أَتَّبِع خطوات عكسية لإيجاد المعادلة التربيعية:

$$x = 3 \pm 9i$$ $3 \pm 9i$ هما جذران للمعادلة

$$x - 3 = \pm 9i$$ بطرح 3 من طرفي المعادلة

$$(x - 3)^2 = -81$$ بتربيع الطرفين

$$x^2 - 6x + 90 = 0$$ بالتبسيط

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة، أستنتج أنَّ:

$a = -6, b = 90$.

أتعلَّم

يُمكِن كتابة معادلة تربيعية، جذراها معروفان z_1, z_2، كما يأتي:

$$z^2 - (z_1 + z_2)\, z + (z_1 z_2) = 0$$

يُمكِن أيضًا استعمال هذه الفكرة لحلِّ هذا المثال بطريقة أُخرى مباشرة.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $2 - i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أكتبه بالصورة القياسية:

1) $(7+ 2i) + (3- 11i)$
2) $(5- 9i) - (-4+ 7i)$
3) $(4 - 3i)(1 + 3i)$
4) $(4 - 6i)(1 - 2i)(2 - 3i)$
5) $(9 - 2i)^2$
6) $\frac{10}{3 - i}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

7) $6(\cos \pi + i \sin \pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

8) $\left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10}\right) \div \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$

9) $12\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \div 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

10) $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

أجد القِيَم الحقيقية للثابتين a و b في كلٍّ ممّا يأتي:

11) $(a + 6i) + (7 - ib) = -2 + 5i$

12) $(11 - ia) - (b - 9i) = 7 - 6i$

13) $(a + ib)(2 - i) = 5 + 5i$

14) $\frac{a - 6i}{1 - 2i} = b + 4i$

15) أَضرِب العدد المُركَّب $8\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ في مُرافِقه.

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

16) $3 - 4i$

17) $-15 + 8i$

18) $5 - 12i$

19) $-7 - 24i$

إذا كان: $w = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

20) zw

21) $\frac{z}{w}$

22) $\frac{w}{z}$

23) $\frac{1}{z}$

24) w^2

25) $5iz$

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة لكلٍّ من المعادلات الآتية:

26) $z^2 + 104 = 20z$

27) $z^2 + 18z + 202 = 0$

28) $9z^2 + 68 = 0$

29) $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$

30) $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

31) $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المُركَّبان المعطيان في كلٍّ ممّا يأتي:

32) $2 \pm 5i$

33) $7 \pm 4i$

34) $-8 \pm 20i$

35) $-3 \pm 2i$

إذا كان: $z_3 = 2 - 2i$, $z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$, $z_1 = \sqrt{12} - 2i$، فأجد المقياس والسعة لكلٍّ ممّا يأتي:

36) $\frac{z_2}{z_1}$

37) $\frac{1}{z_3}$

38) $\frac{z_3}{z_2}$

إذا كان: $z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أُمثِّل العدد z بيانيًّا في المستوى المُركَّب.

40 أجد الجذرين التربيعيين للعدد z.

41 إذا كان: $(a-3i)$، و $(b+ic)$ همـا الجذريـن التربيعيين للعدد المُركَّـب: $55-48i$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية: a، و b، و c.

أحُلُّ المعادلة المعطى أحد جذورها في كلٍّ ممّا يأتي:

43 $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0, -9$

42 $x^3 + x^2 + 15x = 225, 5$

45 $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0, -2 + i$

44 $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37), 6 - i$

إذا كان: $(4 + 11i)$ هو أحد جذري المعادلة: $z^2 - 8z + k = 0$، حيث k عدد حقيقي، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

46 أجد الجذر الآخر للمعادلة.

47 أجد قيمة الثابت k.

مهارات التفكير العليا

تبرير: **أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:**

48 أجد ناتج: $(p + iq)^2$، حيث p و q عددان حقيقيان.

49 إذا كان: $(p + iq)^2 = 45 + im$ ، حيـث p و q عددان صحيحان موجبان، و $p > q$، فأجد ثلاث قِيَم مُمكِنة للعدد الحقيقي m.

50 أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $45 - 108i$.

51 برهان: أُثبِت أنَّ: $z\bar{z} = |z|^2$ لأيِّ عدد مُركَّب z.

52 برهان: إذا كان z عددًا مُركَّبًا، حيث: $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $|z| = 5\sqrt{5}$، وكان: $\frac{z}{3+4i} = p + iq$ ، فأُثبِت أنَّ: $p + q = 1$.

53 تحدٍّ: العدد المُركَّب: $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة: $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$.
أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثمَّ أحُلُّ المعادلة الآتية: $x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$.

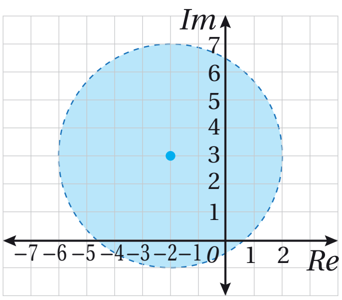
الدرس 3

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب
Locus in the Complex Plane

فكرة الدرس تعرُّف المحل الهندسي في المستوى المُركَّب، ورسمه، وتمثيل منطقة حلِّ متباينات في هذا المستوى.

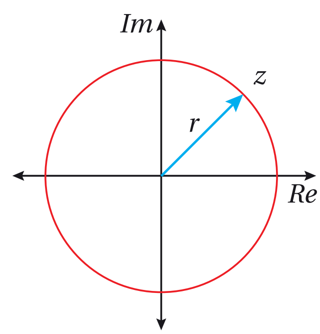
المصطلحات المحل الهندسي، المُنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة، الشعاع.

مسألة اليوم أكتب متباينة بدلالة z، تُحقِّقها جميع الأعداد المُركَّبة التي تقع في المنطقة المُظلَّلة المُبيَّنة في المستوى المُركَّب في الشكل المجاور.



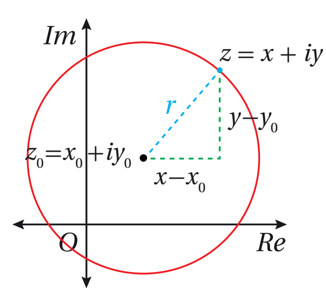
الدائرة

المحل الهندسي (locus) هو مجموعة النقاط في المستوى المُركَّب التي يُمكِن لنقطة مُتحرِّكة ضمن شرط أو شروط (معادلة، أو متباينة) أنْ تكون منها. فمثلًا، الدائرة هي محل هندسي لنقطة تتحرَّك في مسار يبعد مسافة مُحدَّدة عن نقطة ثابتة هي مركز الدائرة.



في المستوى المُركَّب، تبعد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلة: $|z|= r$ مسافة r وحدة عن نقطة الأصل؛ لأنَّ مقياس كلٍّ منها هو r وحدة. ومن ثَمَّ، فإنَّ المحل الهندسي الذي تُمثِّله هذه المعادلة هو دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قُطْرها r كما في الشكل المجاور.

إذا كان مركز دائرة مرسومة في المستوى المُركَّب هو العدد z_0 (ليس نقطة الأصل)، وطول نصف قُطْرها r وحدة كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِن استعمال نظرية فيثاغورس لكتابة معادلة تُمثِّل هذا المحل الهندسي على النحو الآتي:



$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$ نظرية فيثاغورس

أُلاحِظ أنَّ طرف المعادلة الأيسر يساوي $|z - z_0|$، حيث: $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$.

$$|z - z_0| = r$$ بتعويض $|z - z_0|$ في المعادلة

إذن، المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z - z_0| = r$ هو دائرة مركزها z_0، وطول نصف قُطْرها r.

مفهوم أساسي

معادلة الدائرة في المستوى المُركَّب

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-(a+ib)| = r$ هو دائرة مركزها (a, b)، وطول نصف قُطْرها r وحدة.

مثال 1

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-2+8i| = 3$، ثمَّ أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الخطوة 1: أجد المحل الهندسي.

عندما أكتب المعادلة في صورة: $|z-(a+ib)| = r$، فإنَّ: $|z-(2-8i)| = 3$، وهذه معادلة دائرة، مركزها $(2, -8)$، وطول نصف قُطْرها 3 وحدات.

الخطوة 2: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أكتب هذه المعادلة بالصيغة الديكارتية على النحو الآتي:

$$|z-2+8i| = 3$$ المعادلة المعطاة

$$|x+iy-2+8i| = 3$$ باستبدال z بالصيغة $x+iy$

$$|(x-2)+(y+8)i| = 3$$ بتجميع الحدود المُتشابِهة

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+8)^2} = 3$$ صيغة مقياس العدد المُركَّب

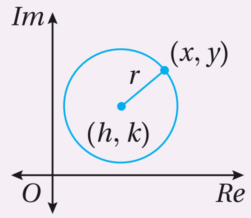
$$(x-2)^2+(y+8)^2 = 9$$ بتربيع الطرفين

أُلاحِظ أنَّ المعادلة: $(x-2)^2+(y+8)^2 = 9$ هي أيضًا معادلة دائرة، مركزها $(2, -8)$، وطول نصف قُطْرها 3 وحدات.

أتذكَّر

الصيغة القياسية (الديكارتية) لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، ونصف قُطْرها r، هي:

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

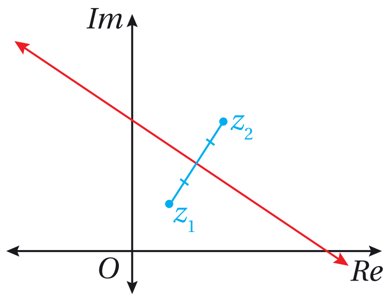


أتحقَّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z+5-4i| = 7$، ثمَّ أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة

يُطلَق على المحل الهندسي للنقطة z التي تتحرَّك في المستوى المُركَّب، وتظلُّ على بُعْدين متساويين من النقطتين الثابتتين: z_1، وz_2، اسم **المُنصِّف العمودي** (perpendicular bisector) للقطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين الثابتتين كما في الشكل المجاور.



تُمثِّل $|z-z_1|$ المسافة بين z وz_1، وتُمثِّل $|z-z_2|$ المسافة بين z وz_2. وبما أنَّ هاتين المسافتين متساويتان بصرف النظر عن موقع z، فإنَّه يُعبَّر عن ذلك بالمعادلة الآتية:

$$|z-z_1| = |z-z_2|$$

مفهوم أساسي — **المُنصِّف العمودي**

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب للنقطة z التي تُحقِّق المعادلة: $|z-(a+ib)| = |z-(c+id)|$ هو المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: (a, b)، و(c, d).

مثال 2

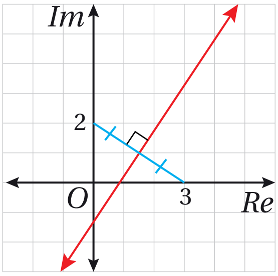
أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-2i| = |z-3|$، ثمَّ أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الخطوة 1: أجد المحل الهندسي.

عندما أكتب المعادلة في صورة:

$|z-(a+ib)| = |z-(c+id)|$، فإنَّ:

$|z-(0+2i)| = |z-(3+0i)|$. وهذه معادلة المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: $(3, 0)$، و$(0, 2)$، وهو يظهر باللون الأحمر في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

لكتابة المعادلة بالصيغة الديكارتية، أُعوِّض $z = x + iy$، ثمَّ أجد مقياس العدد المُركَّب، ثمَّ أُبسِّط:

المعادلة المعطاة	$\|z-3\| = \|z-2i\|$
باستبدال z بالصيغة $x+iy$	$\|x+iy-3\| = \|x+iy-2i\|$
بتجميع الحدود المُتشابِهة	$\|(x-3)+iy\| = \|x+(y-2)i\|$
صيغة مقياس العدد المُركَّب	$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$
بتربيع الطرفين، وفكِّ الأقواس	$x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2-4y+4$
بطرح x^2، و y^2 من الطرفين	$-6x+9 = -4y+4$
بكتابة المعادلة في صورة: $Ax+By+C=0$	$6x-4y-5=0$

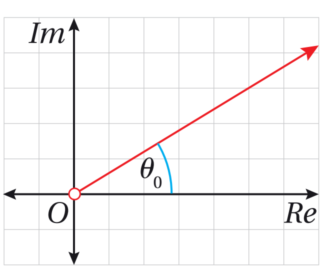
إذن، معادلة المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x-4y-5=0$

أتحقَّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z+1| = |z-5i|$، ثمَّ أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الشعاع الذي يبدأ بالنقطة $(0, 0)$

إنَّ سعة جميع الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلة: $\text{Arg}(z) = \theta_0$ هي θ_0؛ لذا فإنَّها تقع على شعاع (ray) يصنع زاوية قياسها θ_0 راديان مع المحور الحقيقي الموجب، ويبدأ (الشعاع) بنقطة الأصل، ويمتدُّ بصورة لانهائية في أحد اتجاهيه كما في الشكل المجاور.



أتعلَّم

تكون سعة الأعداد المُركَّبة الواقعة على الطرف الآخر من المستقيم هي: $\theta_0 \pm \pi$؛ لذا استُثنِيت هذه الأعداد من المحل الهندسي للمعادلة: $\text{Arg}(z) = \theta_0$؛ فهي لا تُحقِّق المعادلة.

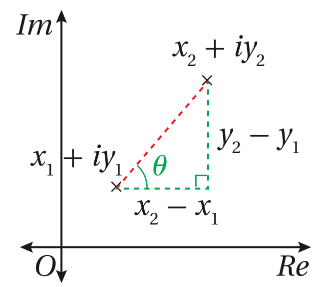
ومن ثَمَّ، فإنَّ المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $\text{Arg}(z) = \theta_0$ هو شعاع يبدأ بنقطة الأصل، وليس له نهاية.

بما أنَّ سعة العدد المُركَّب: $z = 0$ غير مُعرَّفة، فإنَّ الشعاع لا يحوي نقطة الأصل، ويُعبَّر عن ذلك بدائرة مُفرَغة في بداية الشعاع.

الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a, b)

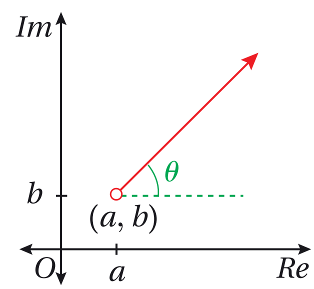
إذا كان: $z_1 = x_1 + iy_1 \, , z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مُركَّبين، فإنَّ: $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i\,(y_2 - y_1)$.

يُمكِن حساب سعة العدد المُركَّب: $z_2 - z_1$ المُوضَّح في الشكل المجاور على النحو الآتي:



$$\operatorname{Arg}(z_2 - z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \theta$$

أُلاحِظ من الشكل المجاور أنَّ سعة العدد المُركَّب: $(z_2 - z_1)$ تساوي قياس الزاوية θ التي يصنعها المستقيم الواصل بين العددين: z_1، وz_2 مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



ومن ثَمَّ، فإنَّ الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة: $\operatorname{Arg}(z - (a + ib)) = \theta$ تقع جميعها على الشعاع الذي نقطة بدايته (a, b)، وهو يصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور. وبما أنَّ ناتج تعويض نقطة بداية الشعاع في المعادلة هو $\operatorname{Arg}(0)$ (قيمة غير مُعرَّفة)، فإنَّ نقطة بداية الشعاع تُستثنى، ويُعبَّر عنها بدائرة مُفرَّغة.

مفهوم أساسي **الشعاع**

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب الذي تُمثِّله المعادلة: $\operatorname{Arg}(z - (a + ib)) = \theta$ هو شعاع يبدأ بالنقطة (a, b)، ويصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

أتذكَّر

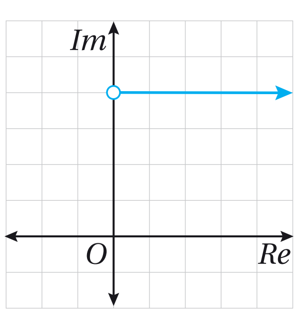
$-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$

مثال 3

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثمَّ أرسمه في المستوى المُركَّب:

1 $\operatorname{Arg}(z - 4i) = 0$

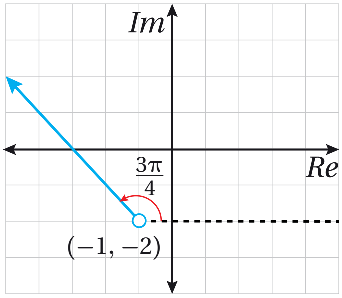
تُمثِّل هذه المعادلة شعاعًا يبدأ بالنقطة $(0, 4)$، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها 0 مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي؛ أيْ إنَّه يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.



أتعلَّم

تُرسَم الزاوية θ مع المستقيم في اتجاه المحور الحقيقي الموجب.

2 $\text{Arg}(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$



عندما أكتب المعادلة في صورة: $\text{Arg}(z-(a+bi))=\theta$، فإنَّ: $\text{Arg}(z-(-1-2i))=\frac{3\pi}{4}$. وهذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(-1, -2)$، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.

أتحقَّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثمَّ أرسمه في المستوى المُركَّب:

a) $\text{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$

b) $\text{Arg}(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

تمثيل المتباينات في المستوى المُركَّب

يُعَدُّ حلُّ المتباينة في المستوى المُركَّب محلًّا هندسيًّا يُمكِن تمثيله بيانيًّا بصورة مُشابِهة لتمثيل حلِّ المتباينة في المستوى الإحداثي.

بدايةً، يُرسَم منحنى المعادلة المرتبطة بالمتباينة بعد استعمال رمز المساواة $(=)$ بدلًا من رمز المتباينة $(<, >, \leq, \geq)$، حيث تُمثِّل المعادلة الناتجة منحنًى يُسمّى **المنحنى الحدودي**؛ وهو منحنى يُقسِّم المستوى المُركَّب إلى جزأين، أحدهما يحوي جميع الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المتباينة.

قد يكون المنحنى الحدودي جزءًا من المحل الهندسي إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $\geq$، أو الرمز $\leq$؛ فيُرسَم المنحنى الحدودي متصلًا. وقد لا يكون المنحنى الحدودي جزءًا من المحل الهندسي إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $<$، أو الرمز $>$؛ فيُرسَم المنحنى الحدودي مُتقطِّعًا.

أتعلَّم

قد يكون المنحنى الحدودي مستقيمًا، أو شعاعًا، أو دائرةً، أو أيَّ منحنى آخر.

مثال 4

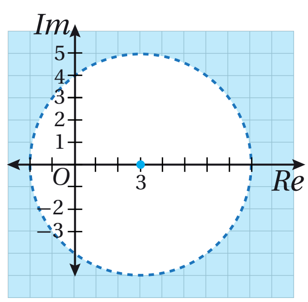
أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق كل متباينة ممّا يأتي:

1 $|z - 3| > 5$

الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي.

يُمثِّـل منحنى المعادلة: $|z - 3| = 5$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z - 3| > 5$ ؛ وهو دائرة مركزها $(3, 0)$، وطول نصف قُطْرها 5 وحدات. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي مُتقطِّعًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.



تبعد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المتباينة: $|z - 3| > 5$ مسافةً تزيد على 5 وحدات عن مركز الدائرة. إذن، منطقة الحلول المُمكِنة للمتباينة تقع خارج محيط الدائرة: $|z - 3| = 5$ كما في الشكل المجاور.

2 $|z - 7| \leq |z + 3i|$

الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي.

يُمثِّل منحنى المعادلة: $|z - 7| = |z + 3i|$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z - 7| \leq |z + 3i|$؛ وهو المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(7, 0)$ و $(0, -3)$. وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تتحقَّق المتباينة: $|z - 7| \leq |z + 3i|$ في إحدى جهتي المنحنى الحدودي، ويُمكِن تحديدها باختبار عدد مُركَّب عشوائيًّا في المتباينة.

أختار العدد: $z = 0 + 0i$ الذي تُمثِّله نقطة الأصل:

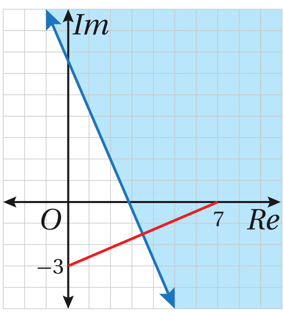
المتباينة الأصلية $|z - 7| \leq |z + 3i|$

بتعويض $z = 0 + 0i$ $|0 - 7| \overset{?}{\leq} |0 + 3i|$

بالتبسيط $\sqrt{49} \overset{?}{\leq} \sqrt{9}$

$7 \overset{?}{\leq} 3$ ✗

بما أنَّ العدد: $z = 0 + 0i$ لا يُحقِّق المتباينة، فإنَّ منطقة الحلول المُمكِنة هي المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.



3 $\frac{\pi}{6} \leq \mathbf{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$

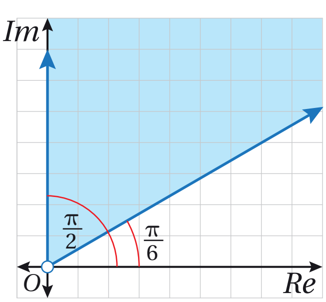
الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي.

يُمثِّل منحنى المعادلة: $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$ شعاعًا يبدأ بنقطة الأصل، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي الموجب. ويُمثِّل منحنى المعادلة: $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ شعاعًا آخرَ يبدأ بنقطة الأصل، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب.

إذن، يُمثِّل الشعاعان معًا منحنًى حدوديًّا للمتباينة: $\frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$. وبما أنَّه توجد مساواة في رمزي المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

المنطقة التي تُمثِّلها المتباينة: $\frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$ هي جزءٌ من المستوى المُركَّب محدودٌ بشعاعين كما في الشكل المجاور.



أتذكَّر

تُستثنى نقطة الأصل بدائرة مُفرَغة في بداية الشعاع.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق كل متباينة ممّا يأتي:

a) $|z+3+i| \leq 6$ b) $|z+3+i| < |z-4|$ c) $\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

تمثيل نظام متباينات في المستوى المُركَّب

يُمكِن أيضًا تمثيل منطقة حلِّ نظام متباينات بيانيًّا في المستوى المُركَّب بصورة مُشابِهة لتمثيل أنظمة المتباينات في المستوى الإحداثي.

مثال 5

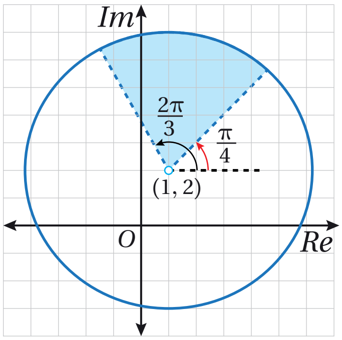
أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z-1-2i| \leq 5$، والمتباينة: $\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$.

الخطوة 1: أُحدِّد المنحنى الحدودي لكل متباينة.

- تُمثِّل المعادلة: $|z-1-2i| = 5$ دائرة مركزها النقطة $(1, 2)$، وطول نصف قُطْرها 5 وحدات. وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.
- تُمثِّل المعادلة: $\mathrm{Arg}(z-1-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(1, 2)$، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم الشعاع مُتقطِّعًا.
- تُمثِّل المعادلة: $\mathrm{Arg}(z-1-2i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(1, 2)$، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّني أرسم الشعاع مُتقطِّعًا.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تُمثِّل المتباينة: $|z-1-2i| \leq 5$ النقاط الواقعة داخل الدائرة وعليها، وتُمثِّل المتباينة: $\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين.



إذن، المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينتين معًا هو الجــزء الواقع داخل القطاع الدائري وعلى قوسه كما في الشكل المجاور.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z + 3 - 2i| \geq 4$، والمتباينة: $\frac{-\pi}{2} < \text{Arg}(z - 2 + i) < \frac{\pi}{4}$.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثمَّ أُمثِّله في المستوى المُركَّب، ثمَّ أجد معادلته الديكارتية:

1) $|z| = 10$
2) $|z - 9| = 4$
3) $|z + 2i| = 8$
4) $|z - 5 + 6i| = 2$
5) $|z + \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$
6) $|z + 6 - i| = 7$
7) $|z - 5| = |z - 3i|$
8) $|z + 3i| = |z - 7i|$
9) $|z + 5 + 2i| = |z - 7|$
10) $|z - 3| = |z - 2 - i|$
11) $\frac{|z + 6 - i|}{|z - 10 - 5i|} = 1$
12) $|z + 7 + 2i| = |z - 4 - 3i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثمَّ أرسمه في المستوى المُركَّب:

13) $\text{Arg}(z + 2 - 5i) = \frac{\pi}{4}$
14) $\text{Arg}(z - 1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$
15) $\text{Arg}(z - 4i) = -\frac{3\pi}{4}$

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

16) $|z - 2| < |z + 2|$
17) $|z - 4 - 2i| \leq 2$
18) $|z - 4| > |z - 6|$
19) $0 < \text{Arg}(z - 2 - 2i) < \frac{\pi}{4}$
20) $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - 3 + 4i) \leq \frac{\pi}{4}$
21) $2 \leq |z - 3 - 4i| \leq 4$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

22 أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلة: $|z-3+2i| = \sqrt{10}$، والمعادلة: $|z-7+i| = |z-6i|$، ثمَّ أجد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلتين معًا.

23 أجد العدد المُركَّب الذي يُحقِّق كُلًّا من المحل الهندسي: $|z+2i| = |z-3|$، والمحل الهندسي: $|z-1+5i| = |z+3-i|$.

24 أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية:

$$\text{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}\ ,\ \text{Arg}(z+2-5i) = \frac{-\pi}{2}\ ,\ |z+2-5i| = \sqrt{29}$$

25 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z+2i| > |z-3|$، والمتباينة: $|z-1+5i| < |z+3-i|$.

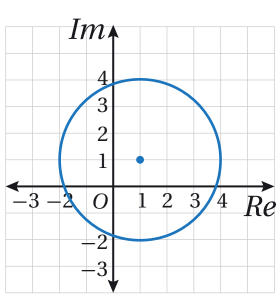
26 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{2} < \text{Arg}(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$، والمتباينة: $|z+2-5i| > \sqrt{29}$.

27 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$، والمتباينة: $2 < |z-3+i| \leq 5$

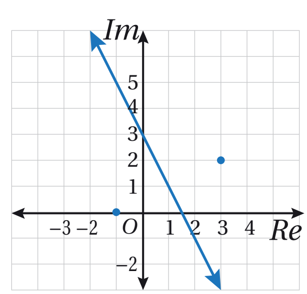
إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

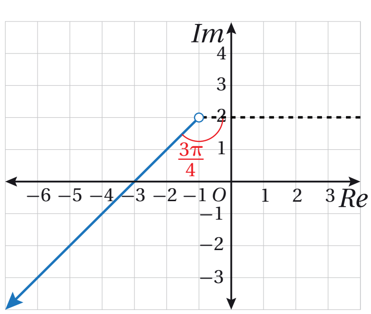
28



29

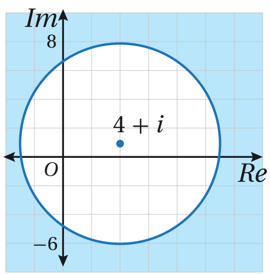


30 أكتب معادلة في صورة: $\text{Arg}(z-a) = \theta$، حيث a عدد مُركَّب، و $-\pi < \theta \leq \pi$ تُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.

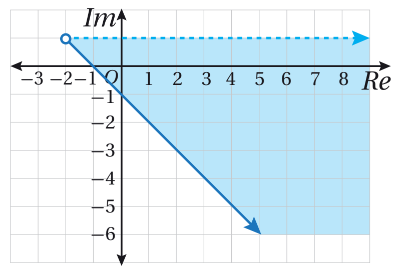


أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

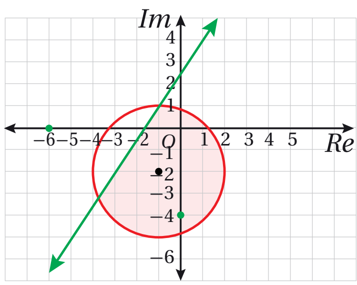
31



32



33 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.



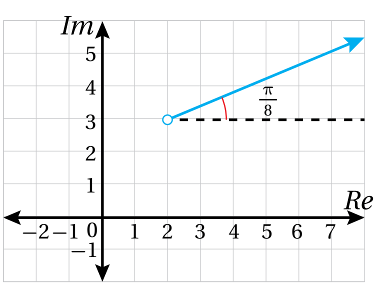
مهارات التفكير العليا

34 تبرير: إذا كان العدد المُركَّب z يُحقِّق المعادلة: $|z - 3 + 4i| = 2$، فأجد أكبر قيمة لـ $|z|$ وأقل قيمة له، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

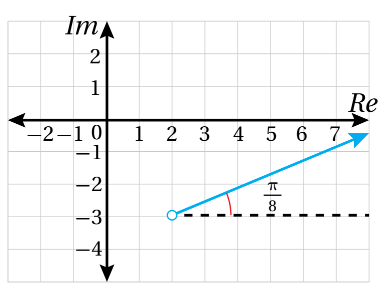
35 تحدٍّ: أُثبِت أنَّ المعادلة: $|z - 6| = 2|z + 6 - 9i|$ تُمثِّل دائرة، ثمَّ أجد مركزها وطول نصف قُطْرها.

36 تبرير: أيُّ الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته: $\text{Arg}(z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{8}$؟ أُبرِّر إجابتي.

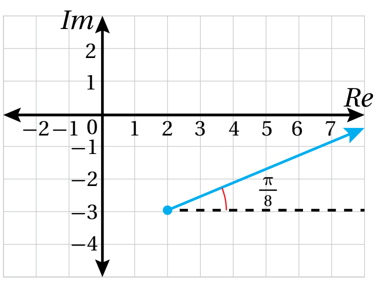
a)



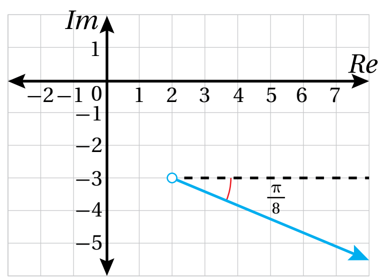
b)



c)



d)



أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $\sqrt{-1} = i$، فإنَّ i^{343} تساوي:

a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i

2 ناتج $(1-i)^3$ هو:

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$

c) $2-2i$ d) $2+2i$

3 إذا كان $2i$ هو أحد جذور المعادلة:

$az^3 + 5z^2 + 8z + 20 = 0$، فإنَّ قيمة a هي:

a) -8 b) -2 c) 2 d) 8

4 الصورة المثلثية للعدد المُركَّب: $z = -1 + i\sqrt{3}$ هي:

a) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

b) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

c) $2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

d) $2(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$

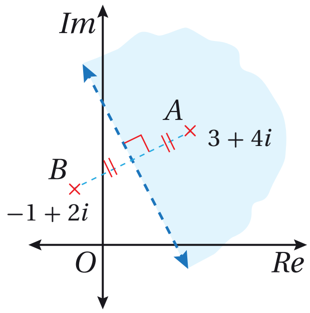
5 الصورة القياسية لناتج:

$8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ هي:

a) $4i$ b) -4

c) $-4+4i$ d) $4-4i$

6 إحدى الآتية تَصِف المنطقة المُظلَّلة في الشكل المجاور:



a) $|z-1+2i| < |z+3+4i|$

b) $|z-1+2i| > |z+3+4i|$

c) $|z+1-2i| < |z-3-4i|$

d) $|z+1-2i| > |z-3-4i|$

7 أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z = 45 - 28i$.

8 أجد مقياس العدد المُركَّب: $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$، وسعته، وأُقرِّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

9 إذا كان: $z = -8 + 8i$، وكان: $w = a + 2i$، حيث $a < 0$، فأجد قيمة a، علمًا بأنَّ: $|z + w| = 26$.

إذا كان: $w = \frac{14 - 31i}{3 - 2i}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أكتب العدد w في صورة: $x + iy$.

11 إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة: $z^2 + cz + d = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين c، و d.

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

12 $|z-6| \leq 3$

13 $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(z-2) \leq \frac{2\pi}{3}$

14 $|z+1+i| > |z-3-3i|$

إذا مثَّلت النقطة M العدد: $z_1 = 1-8i$، ومثَّلت النقطة N العدد: $z_2 = 4+7i$، وكانت O هي نقطة الأصل، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

15 أُبيِّن أنَّ المثلث OMN متطابق الضلعين.

16 أُبيِّن أنَّ جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$

17 أجد مساحة المثلث OMN.

18 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z-8| > |z+2i|$، والمتباينة: $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$

إذا كانت: $z = 5+2i$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أُبيِّن أنَّ: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{29}(21+20i)$.

20 عن طريق البحث في سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة: z، و $\bar{z}$، و $\frac{z}{\bar{z}}$، أُبيِّن أنَّ:

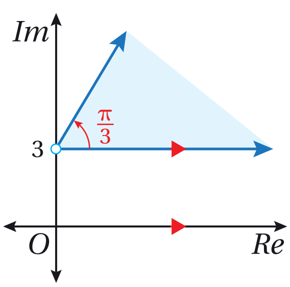
$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

تُمثِّل النقاط: A، و B، و C، و D جذور المعادلة: $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$:

21 إذا كان العدد: $(-2+4i)$ هو أحد هذه الجذور، فأجد الجذور الثلاثة الأُخرى لهذه المعادلة.

22 أُمثِّل الجذور الأربعة في المستوى المُركَّب، ثمَّ أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

23 أكتب (بدلالة z) متباينة تُمثِّل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي:



إذا كان: $z^2 + 2z + 10 = 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

24 أُبيِّن أنَّ لجذري المعادلة المقياس نفسه.

25 أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

26 يُحقِّق العددان المُركَّبان u، و v المعادلة: $u+2v = 2i$، والمعادلة: $iu + v = 3$. أحُلُّ المعادلتين لإيجاد العدد u، والعدد v.

27 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}\, z \leq \frac{2\pi}{3}$، والمتباينة: $|z-2i| \leq 2$.

ملحقات

الجبر

العمليات الحسابية

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

الأُسس والجذور

لأيِّ عددين حقيقيين x وy، ولأيِّ عددين صحيحين m وn:

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n}=\frac{1}{x^n},\ x\neq 0$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n},\ y\neq 0$$

$$x^{1/n}=\sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m$$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$ (إذا كانت جميع الجذور مُعرَّفة، حيث $n>1$)

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}},\ y\neq 0$$ (إذا كانت جميع الجذور مُعرَّفة، حيث $n>1$)

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

القانون العام

إذا كان: $ax^2+bx+c=0$، فإنَّ:

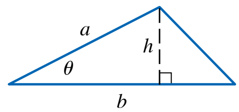
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

الهندسة

صيغ هندسية (المساحة الكلية A، والمحيط C، والحجم V)

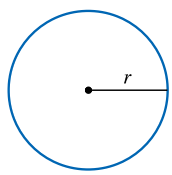
- المثلث:

$$A=\frac{1}{2}bh$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$



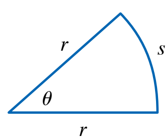
- الدائرة:

$$A=\pi r^2$$
$$C=2\pi r$$



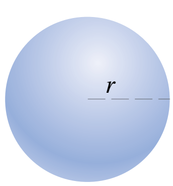
- القطاع الدائري:

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$
$$s=r\theta\ \ (\theta\ \text{radian})$$



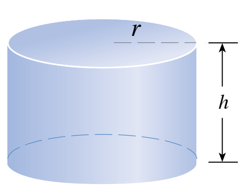
- الكرة:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$A=4\pi r^2$$



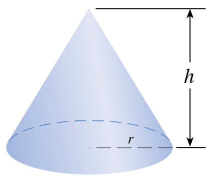
- الأسطوانة:

$$V=\pi r^2 h$$
$$A=2\pi rh+2\pi r^2$$



- المخروط:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2$$



الهندسة الإحداثية

المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف

- المسافة بين النقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1\,P_2}$ هما:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

المستقيم

- ميل المستقيم المارِّ بالنقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$ هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- معادلة المستقيم المارِّ بالنقطة $P_1\,(x_1, y_1)$، وميله m هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- إذا كان l مستقيمًا في المستوى الإحداثي، وθ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب، فإنَّ ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة: $m = \tan\theta$، حيث: $0 < \theta < \pi$.

البُعْد بين نقطة ومستقيم

البُعْد بين المســـتقيم l، الذي معادلته: $Ax + By + C = 0$، والنقطة $P(x_1, y_1)$، يعطى بالصيغة الآتية:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

شرط ألّا تكون قيمتا A و B معًا صفرًا.

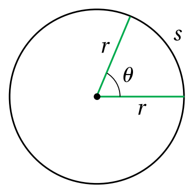
الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، ونصف قُطْرها r، هي:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

المثلثات

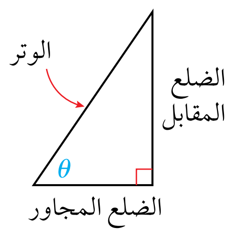
قياسات الزوايا



$$\pi = 180^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{rad}$$

$$1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

الاقترانات المثلثية في المثلث القائم الزاوية



$$\sin\theta = \frac{(\text{المقابل})}{(\text{الوتر})} \qquad \csc\theta = \frac{(\text{الوتر})}{(\text{المقابل})}$$

$$\cos\theta = \frac{(\text{المجاور})}{(\text{الوتر})} \qquad \sec\theta = \frac{(\text{الوتر})}{(\text{المجاور})}$$

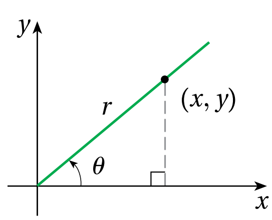
$$\tan\theta = \frac{(\text{المقابل})}{(\text{المجاور})} \qquad \cot\theta = \frac{(\text{المجاور})}{(\text{المقابل})}$$

الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

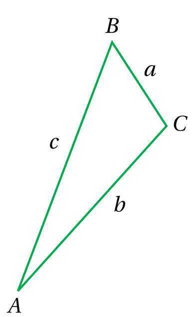
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$



قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



قانون جيوب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات المقلوب:

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

- المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

- متطابقات فيثاغورس:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

- متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ $\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$ $\quad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

- متطابقات الزاوية السالبة:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

المتطابقات المثلثية لتقليص القوّة

$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ $\quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

قيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة

$\theta°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

الاقترانات الأُسّيّة واللوغاريتمية

العلاقة بين الصورة الأُسّيّة والصورة اللوغاريتمية

إذا كان $x>0$، و $b>0,\ b\neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأُسّيّة
$\log_b x = y$	إذا وفقط إذا	$b^y = x$
الأُسُّ، الأساس		الأُسُّ، الأساس

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x>0$، و $b>0,\ b\neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $\qquad b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $\qquad b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $\qquad b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x>0$ $\qquad \log_b x = \log_b x$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b\neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p\log_b x$

قواعد الاشتقاق

القواعد الأساسية

$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x))=cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=f'(x)-g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x))=f(x)\,g'(x)+g(x)\,f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

مشتقات الاقترانات الأُسّيّة والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(b^x)=b^x\ln b \qquad \frac{d}{dx}(\log_b x)=\frac{1}{x\ln b}$$

مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

رموز رياضية

المستقيم المارُّ بالنقطتين A و B	$\overleftrightarrow{AB}$
القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتيها A و B	$\overline{AB}$
الشعاع الذي نقطة بدايته A، ويمرُّ بالنقطة B	$\overrightarrow{AB}$
طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$	AB
متجه نقطة بدايته A، ونقطة نهايته B	$\overrightarrow{AB}$
المتجه v	$\vec{\mathbf{v}}$
مقدار المتجه v	$\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert$
الزاوية A	$\angle A$
زاوية ضلعاها $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$	$\angle ABC$
قياس الزاوية A	$m\angle A$
المثلث ABC	ΔABC
موازٍ لـ	$\parallel$
عمودي على	$\perp$
نسبة a إلى b	$a:b$
تكامل غير محدود	$\int$
تكامل محدود	$\int_a^b$
مشتقة الاقتران $f(x)$	$f'(x)$

سعة العدد المُركَّب	arg
السعة الرئيسة للعدد المُركَّب	Arg
دينار أردني	JD
متر	m
كيلومتر	km
سنتيمتر	cm
كيلوغرام	kg
غرام	g
ثانية	s
دقيقة	min
ساعة	h
إنش	in
قدم	ft
توافيق n من العناصر أُخِذ منها r كل مَرَّة	$\binom{n}{r}$ ${}_nC_r$
احتمال الحادث A	$P(A)$
احتمال الحادث مُتمِّمة الحادث A	$P(\overline{A})$
الوسط الحسابي	μ
الانحراف المعياري	σ
التباين	σ^2