المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات التمارين

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب التمارين- مادة رياضيات الأعمال- الصف الثاني عشر الأكاديمي ف1

الوحدة الأولى: المصفوفات

أستعد لدراسة الوحدة

تبسيط مقادير عددية صفحة 6	
1	$4(-1)+3(6)-5(8)=-4+18-40=-26$
2	$3\big(4-(-2)\big)+5(-3+8)=3(6)+5(5)=18+25=43$
3	$9(7-4)+2(-4)^2=9\times 3+2\times 16=27+32=59$
4	$4(7+6-2)-2\big(-3+9-(-2)\big)=4\times 11-2\times 8=44-16=28$
5	$4(-3)(5)+6(-2)(-8)+0(4)(-3)=-60+96+0=36$
6	$2\big(3(-4)-5(-6)\big)-3\big(5(-2)-6(3)\big)=2(-12+30)-3(-10-18)$ $=2(18)-3(-28)=36+84=120$
حل المعادلة الخطية بمتغير واحد صفحة 7	
7	$7x-6=18\Rightarrow 7x=24$ $\Rightarrow x=\frac{24}{7}$
8	$-5x+3=2x+8\Rightarrow 7x=-5$ $\Rightarrow x=-\frac{5}{7}$
9	$2(x-5)+6x=8\Rightarrow 2x-10+6x=8$ $\Rightarrow 8x=18$ $\Rightarrow x=\frac{18}{8}=2.25$
10	$38+7k=8(k+4)\Rightarrow 38+7k=8k+32$ $\Rightarrow k=6$
حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد صفحة 7	
11	$x^2+6x=0\Rightarrow x(x+6)=0$ $\Rightarrow x=0\ ,\ x=-6$

12	$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x = 4 \ , \ x = -1$
13	$10x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (5x+4)(2x-1) = 0$ $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \ , \ x = \frac{1}{2}$
14	$x^2 - 2x = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$ $a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = -4$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$ $\Rightarrow x = 1 - \sqrt{5} \ , \ x = 1 + \sqrt{5}$

حل أنظمة معادلات خطية بمتغيرين بالحذف والتعويض صفحة 9

15	$x + 3y = 17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $2x - 3y = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ بجمع المعادلتين (1) و (2) ينتج: $3x = 15 \Rightarrow x = 5$ وبالتعويض في المعادلة الأولى ينتج: $5 + 3y = 17 \Rightarrow y = 4$ إذن، الحل هو $(5,4)$
16	$3x - 4y = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $x = 2y - 3 \Rightarrow x - 2y = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ نضرب المعادلة الثانية في -2 ثم نجمع المعادلتين فينتج: $3x - 4y = 16$ $-2x + 4y = 6$ $\Rightarrow x = 22$ وبالتعويض في المعادلة الثانية ينتج: $22 - 2y = -3 \Rightarrow y = \frac{25}{2}$ إذن، الحل هو $\left(22, \frac{25}{2}\right)$

الدرس الأول: مقدمة في المصفوفات

1	2×3
2	3×1
3	2×2
4	1×3
5	3×3
6	4×3
7	$P = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 75 \\ 30 & 40 & 55 \\ 50 & 70 & 90 \\ 65 & 90 & 125 \end{bmatrix}$
8	$p_{32} = 70$ ويمثل سعر القهوة وسط بالقروش في أحد المحال التجارية
9	$p_{23} = 55$
10	$x + 3 = 4 \implies x = 1$ $x + y = 8 \implies 1 + y = 8 \implies y = 7$ $z = y + 4 \implies z = 7 + 4 = 11$
11	$\begin{bmatrix} 54 & 94 & 75 \\ 12 & 23 & 18 \end{bmatrix}$
12	$54 + 94 + 75 = 223$ ويمثل مجموع المدارس التي يتوقع إنشاؤها في المحافظات الثلاثة.
13	$94 + 23 = 117$ ويمثل مجموع المدارس والمراكز الصحية التي يتوقع إنشاؤها في المحافظة الثانية.

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

1	$A+B=\begin{bmatrix}11 & 3\\ 2 & 8\\ 11 & 12\end{bmatrix}$
2	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $B+C$
3	$C-D=\begin{bmatrix}5 & -30 & -28\\ -11 & -10 & 28\end{bmatrix}$
4	$B-A=\begin{bmatrix}7 & 7\\ -8 & -6\\ 5 & 0\end{bmatrix}$
5	$4A=\begin{bmatrix}8 & -8\\ 20 & 28\\ 12 & 24\end{bmatrix}$
6	$3A-2B=\begin{bmatrix}-12 & -16\\ 21 & 19\\ -7 & 6\end{bmatrix}$
7	$D+2C=\begin{bmatrix}-17 & 30 & 52\\ 14 & 25 & -16\end{bmatrix}$
8	$-\frac{2}{3}D=\begin{bmatrix}6 & -20 & -24\\ -8 & -10 & 16\end{bmatrix}$
9	المضاعف المشترك للمقامات هو 12، لذلك نحول جميع عناصر الممصفوفة إلى كسور مقامها جميعها 12، ثم نخرج $\frac{1}{12}$ عاملًا مشتركًا لعناصر المصفوفة. $A=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{12} & -\frac{6}{12}\\ \frac{3}{12} & \frac{14}{12}\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}20 & -6\\ 3 & 14\end{bmatrix}$ $k=\frac{1}{12}\ ,\ M=\begin{bmatrix}20 & -6\\ 3 & 14\end{bmatrix}$
10	$3+b=9 \implies b=6$ $a+11=3b \implies a+11=18 \implies a=7$ $-2-4=c \implies c=-6$ $-8+12=d \implies d=4$

11	$x - y = 4$ $x + y = 6$ بجمع المعادلتين نجد أن: $2x = 10 \implies x = 5$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن: $x + y = 6 \Rightarrow 5 + y = 6 \implies y = 1$
12	$3\begin{bmatrix}2 & -1\\4 & 5\end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $2B = 3\begin{bmatrix}2 & -1\\4 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $2B = \begin{bmatrix}6 & -3\\12 & 15\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $2B = \begin{bmatrix}3 & -8\\14 & 14\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}1.5 & -4\\7 & 7\end{bmatrix}$
13	$x[0 \quad 1 \quad 3] + y[0 \quad 0 \quad 5] = [0 \quad 3-y \quad -7]$ $[0 \quad x \quad 3x] + [0 \quad 0 \quad 5y] = [0 \quad 3-y \quad -7]$ $[0 \quad x \quad 3x+5y] = [0 \quad 3-y \quad -7]$ $x = 3 - y$ $3x + 5y = -7$ نعوض x من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية، فنحصل على: $3(3-y) + 5y = -7 \implies 9 - 3y + 5y = -7$ $\implies 2y = -16$ $\Rightarrow y = -8$ $\Rightarrow x = 3 + 8 = 11$
14	لتكن المصفوفة E انتاج المصانع الثلاثة في النصف الأول، ولتكن F انتاج المصانع الثلاثة في النصف الثاني. فإن المصفوفة التي تمثل انتاج المصانع الثلاثة في العام كاملًا هي E + F $E + F = \begin{bmatrix}700 & 1300 & 670\\650 & 1000 & 890\\480 & 900 & 540\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}850 & 1200 & 670\\540 & 860 & 530\\620 & 750 & 490\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}1550 & 2500 & 1340\\1190 & 1860 & 1420\\1100 & 1650 & 1030\end{bmatrix}$

الدرس الثالث: ضرب المصفوفات

1	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
2	$A_{5\times 3} \times C_{3\times 5} = (A\times C)_{5\times 5}$
3	$C_{3\times 5} \times A_{5\times 3} = (C\times A)_{3\times 3}$
4	$B_{2\times 3} \times C_{3\times 5} = (B\times C)_{2\times 5}$
5	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $C \times B$
6	$AB = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23 & 7 & -20\\ -11 & 7 & 26\end{bmatrix}$
7	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإنه لا يمكن إيجاد $B \times A$
8	$BC = \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 9\\ -5 & 30\end{bmatrix}$
9	$CB = \begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}$
10	$BD = \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-13\\ 5\end{bmatrix}$
11	$2A + 3BC = 2\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-4 & 9\\ -5 & 30\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 23\\ -13 & 98\end{bmatrix}$
12	$A^2 = AA = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix}$

13	$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -70\\ 35 & 42\end{bmatrix}$ أو $A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -70\\ 35 & 42\end{bmatrix}$
14	$(CB)^2 = CB \times CB = \begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}-402 & 24 & 582\\ -211 & 57 & 376\\ -781 & 72 & 1171\end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix}1 & 3\\ x & 2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}y & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -7\\ 8 & -3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}y+9 & -7\\ xy+6 & -x-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -7\\ 8 & -3\end{bmatrix}$ $-x-4 = -3 \implies x = -1$ $y + 9 = 7 \implies y = -2$
16	$\left(\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 16\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-18 & 90\end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}18 & 30\\ 0 & 12\\ 18 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-18 & 90\end{bmatrix}$
17	$B^3 = B \times B \times B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$

18	رتبة A هي 2×1 فيجب أن تكون رتبة C أيضًا 2×1 حتى يمكن جمعها مع المصفوفة A. أفرض أن $C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $A + C = BC \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 6+x \\ 18+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4y \\ 2x-y \end{bmatrix}$ $6 + x = 3x + 4y \implies 2x + 4y = 6$ $18 + y = 2x - y \implies 2x - 2y = 18$ بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نجد: $6y = -12 \implies y = -2$ وبتعويض قيمة y في المعادلة الأولى نجد: $x = 7$ إذن، $C = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.
19	$\begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.09 & 0.095 \\ 0.09 & 0.1 \\ 0.13 & 0.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 432 & 452 \\ 674 & 706.5 \\ 671 & 707.5 \end{bmatrix}$
20	$452 - 432 = 20$ $706.5 - 674 = 32.5$ $707.5 - 671 = 36.5$ المندوب الثالث هو الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة.
21	العبارة صحيحة أحيانًا، إذ إن المصفوفتين المربعتين يمكن إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان إذا كان لهما الرتبة نفسها. وكذلك المصفوفتان ذات الرتبتين: $j \times i$ و $i \times j$ يمكن أيضًا إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان حتى لو لم تكونا مربعتين.
22	العبارة صحيحة أحيانًا، لأنه إذا كانت إحدى المصفوفتين صفرية فبالتأكيد حاصل ضربها مصفوفة أخرى صفرية أيضا. لكن، قد يكون حاصل ضرب المصفوفتين مصفوفة صفرية دون أن تكون أيٌّ منهما صفرية، مثلًا: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ مثال آخر: $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

الدرس الرابع: المحددات وقاعدة كريمر

1	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11$
2	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$
3	$\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0$
4	$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ $= 7(0 + 20) + 3(48 - 8) + 1(-40 - 0)$ $= 140 + 120 - 40 = 220$
5	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 4(-6 - 0) + 2(12 + 6) - 4(0 + 3)$ $= -24 + 36 - 12 = 0$
6	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ $= 5(56 - 12) + 3(32 + 12) + 1(8 + 14)$ $= 220 + 132 + 22 = 374$
7	$\lvert AB \rvert = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 39 - 4 = 35$ $\lvert BA \rvert = \begin{vmatrix} -9 & 26 \\ -10 & 25 \end{vmatrix} = -225 + 260 = 35$
8	$x^2 - 16 = 9 \Longrightarrow x^2 = 25 \Longrightarrow x = \pm 5$
9	$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ $\lvert A^2 \rvert = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 16$ $\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$ نلاحظ أن $\lvert A^2 \rvert = \lvert A \rvert^2$

10	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow \quad x(3+5) - y(-1-2) + (5-6) = 0$ $\Rightarrow \quad 8x + 3y - 1 = 0$
11	$3x - 5y = 22$ $2x + y = 6$ $C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 22 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{22+30}{13} = \frac{52}{13} = 4$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 22 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{13} = \frac{18-44}{13} = \frac{-26}{13} = -2$ إذن، حل النظام هو: $(4, -2)$
12	$5x + 3y = 7$ $2x - 4y = 8$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-28-24}{-26} = \frac{-52}{-26} = 2$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{40-14}{-26} = \frac{26}{-26} = -1$ إذن، حل النظام هو: $(2, -1)$

13	$3x - y = 10$ $5x - 4y = -6$ $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{-40 - 6}{-7} = \dfrac{-46}{-7} = \dfrac{46}{7}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{-18 - 50}{-7} = \dfrac{-68}{-7} = \dfrac{68}{7}$ إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{46}{7}, \frac{68}{7}\right)$
14	مصفوفة المعاملات عمودها الأول هو معاملات x وعمودها الثاني هو معاملات y، معاملات x تظهر في العمود الأول لمحددة y ، و معاملاتy تظهر في العمود الثاني لمحددة x إذن: $D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{6 + 5}{3} = \dfrac{11}{3}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{-4 - 3}{3} = \dfrac{-7}{3}$
15	$A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 7 & 11 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}$ $= -2(11 - 15) - 5(7 - 1) + 1(105 - 11)$ $= 8 - 30 + 94 = 72$ $Area = \frac{1}{2}\lvert A \rvert = \frac{1}{2} \times 72 = 36$

16	ليكن x عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار، فيكون عدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو 4x، وليكن عدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير y. $x + 4x + y = 75 \quad \Rightarrow 5x + y = 75$ $x + 20x + 10y = 460 \Rightarrow 21x + 10y = 460$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{bmatrix}$ $D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 21 = 29$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 75 & 1 \\ 460 & 10 \end{vmatrix}}{29} = \dfrac{750 - 460}{29} = \dfrac{290}{29} = 10$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 75 \\ 21 & 460 \end{vmatrix}}{29} = \dfrac{2300 - 1575}{29} = \dfrac{725}{29} = 25$ إذن، عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار هو 10، وعدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير 25، وعدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو 10×4 ويساوي 40 ورقة.

الدرس الخامس: النظير الضربي للمصفوفة

1	$AB = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $AB = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
2	$FG = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.75 & 14.25 \\ 4.75 & 15.25 \end{bmatrix}$ بما أن $FG \neq I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة F والمصفوفة G لا تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
3	$M = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\lvert M \rvert = 20 - 20 = 0$ بما أن $\lvert M \rvert = 0$، فإن المصفوفة M منفردة، ولا نظير ضربي لها.
4	$N = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\lvert N \rvert = -6 + 66 = 60$ بما أن $\lvert N \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة N غير منفردة، ولها نظير ضربي هو N^{-1} $N^{-1} = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{11}{60} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$
5	$R = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ، $\lvert R \rvert = -9 - 8 = -17$ بما أن $\lvert R \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة R غير منفردة، ولها نظير ضربي هو R^{-1} $R^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{2}{17} & -\frac{3}{17} \end{bmatrix}$

6	$-2x + y = 13$ $x - 2y = -11$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 4 - 1 = 3$ $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ إذن، حل هذا النظام هو $(-5,3)$
7	$4x + 5y = 22$ $3x + 4y = 17$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 16 - 15 = 1$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ إذن، حل هذا النظام هو $(3,2)$

8	$3x - 8y = 34$ $-4x + 2y = 28$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 6 - 32 = -26$ $A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-68-224}{26} \\ \frac{-136-84}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-292}{26} \\ \frac{-220}{26} \end{bmatrix}$ إذن، حل هذا النظام هو $\left(\frac{-292}{26}, \frac{-220}{26}\right)$
9	$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 15 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \implies x(x+2) - 15 = 0$ $\implies x^2 + 2x - 15 = 0$ $\implies (x+5)(x-3) = 0$ $\implies x = -5 \ , \ x = 3$
10	$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \lvert A \rvert = -4 + 6 = 2$ $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \lvert A^{-1} \rvert = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ $\lvert A^{-1} \rvert = \frac{1}{\lvert A \rvert}$
11	$AB = B^5A \implies BAB = BB^5A$ $\implies BAB = B^6A$ $\implies BAB = IA$ $\implies B(AB) = A$

12

$$BA^2 = A \implies BAA = A$$
$$\implies BAAA^{-1} = AA^{-1}$$
$$\implies BA = I$$
$$\implies BAA^{-1} = A^{-1}$$
$$\implies B = A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ , \ |A| = 4 - 3 = 1 \ , \ A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\implies B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

13

$$B = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \ , \ |B| = -25 - 6a$$

بما أن $a \neq -\frac{25}{6}$، فإن المصفوفة B غير منفردة، ولها نظير ضربي هو B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{1}{-25-6a}\begin{bmatrix} 5 & -a \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-25-6a} & \frac{a}{25+6a} \\ \frac{6}{25+6a} & \frac{5}{25+6a} \end{bmatrix}$$

$$B = B^{-1} \implies \begin{bmatrix} \frac{5}{-25-6a} & \frac{a}{25+6a} \\ \frac{6}{25+6a} & \frac{5}{25+6a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\implies \frac{6}{25+6a} = 6$$
$$\implies 25 + 6a = 1$$
$$\implies 6a = -24$$
$$\implies a = -4$$

14	بما أن 60% من السعرات مصدرها البروتينات والدهون، فإن 40% الباقية مصدرها من الكربوهيدرات، فإذا كانت كمية الكربوهيدرات في طعامه c g، فإن $4 \times c = \frac{40}{100} \times 3600 \Longrightarrow 4c = 1440$ $\Longrightarrow c = \frac{1440}{4} = 360\ \text{g}$ وإذا كانت كمية البروتين x، وكمية الدهون y، فإن: $x + y = 750 - 360 \Longrightarrow x + y = 390$ $4x + 9y = 3600 - 1440 \Longrightarrow 4x + 9y = 2160$ فالمعادلة المصفوفية التي تستعمل لحل هاتين المعادلتين هي: $AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 9 - 4 = 5$ $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 120 \end{bmatrix}$ مقدار ما يتناوله هذا اللاعب من البروتينات $270g$ ، ومن الدهون $120g$ ، ووجدنا في بداية الحل أن ما يتناوله من الكربوهيدرات 360 g

الوحدة الثانية: الخوارزميات ونظرية المخططات

أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة صفحة 20

1

$$\bar{x} = \frac{89 + 90 + 95 + 72 + 83 + 100 + 94}{7} = 89$$

2

$$\bar{x} = \frac{345 + 279 + 583 + 404 + 556 + 702 + 636}{7} = 500.71$$

3

$$\bar{x} = \frac{78 + 82 + 85 + 74 + 98 + 90 + 80 + 62 + 71 + 91}{10} = 81.1$$

4

$$\bar{x} = \frac{24.6 + 20.9 + 25.5 + 26.9 + 27.1 + 22.36}{6} = 24.56$$

حل مسألة باستخدام خطة التخمين والتحقق صفحة 21

5

ليكن x عمر سماح، و y عمر سهى.

$x - y = 4$

$x + y = 20$

أخمن		أتحقق	
x	y	$x - y$	
15	5	$15 - 5 = 10$	أكبر من 4 ×
10	10	10-10=0	أقل من 4 ×
11	9	$11 - 9 = 2$	أقل من 4 ×
12	8	$12 - 8 = 4$	صحيح ✓

إذن، عمر سماح 12 سنة، وعمر سهى 8 سنوات.

6

ليكن x عدد أكياس السكر، و y عدد أكياس الأرز.

$x + y = 8$

$4x + 7y = 41$

أخمن		أتحقق	
x	y	$4x + 7y$	
7	1	$4(7) + 7(1) = 35$	أقل من 41 ×
6	2	$4(6) + 7(2) = 38$	أقل من 41 ×
4	4	$4(4) + 7(4) = 44$	أكبر من 41 ×
5	3	$4(5) + 7(3) = 41$	صحيح ✓

إذن، عدد أكياس السكر 5 ، و عدد أكياس الأرز 3.

7

ليكن x طول المستطيل، و y عرضه.

$x = 2y$

$2x + 2y = 210$

أخمن		أتحقق	
x	y	$2x + 2y$	
50	25	$2(50) + 2(25) = 150$	أقل من 210 ×
60	30	$2(60) + 2(30) = 180$	أقل من 210 ×
80	40	$2(80) + 2(40) = 240$	أكبر من 210 ×
70	35	$2(70) + 2(35) = 210$	صحيح ✓

إذن، طول المستطيل 70 ، و عرضه 35.

الدرس الأول: الخوارزميات

1

step	N	S	T	Is S=T?	Print
1	7				
2		3.5			
3			2.75		
4				no	
5		2.75			
6 → 3			2.65		
4				no	
5		2.65			
6 → 3			2.65		
4				yes	
7					2.65

$\sqrt{7} \approx 2.65$

2

step	N	S	T	Is S=T?	Print
1	3				
2		1.5			
3			1.75		
4				no	
5		1.75			
6 → 3			1.73		
4				no	
5		1.73			
6 → 3			1.73		
4				yes	
7					1.73

$\sqrt{3} \approx 1.73$

3

step	N	S	T	Is S=T?	Print
1	11				
2		5.5			
3			3.75		
4				no	
5		3.75			
6 ⟶ 3			3.34		
4				no	
5		3.34			
6 ⟶ 3			3.32		
4				no	
5		3.32			
6 ⟶ 3			3.32		
4				yes	
7					3.32

$\sqrt{11} \approx 3.32$

4

step	P	R	T	I	A	M	Print
1	600	4	5				
2				120			
3					720		
4						12	
5							12
6	Stop						

مخرج هذه الخوارزمية هو العدد 12

5

a	b	T	Is T>90?	Print
3	1	10	no	
4	2	20	no	
5	3	34	no	
6	4	52	no	
7	5	74	no	
8	6	100	Yes	8,6
Stop				

مُخرجا الخوارزمية هما العددان 8,6

6

u	v	Is u+v=0?	f	Print
8	8	no	4	4
Stop				

مُخرج الخوارزمية هو العدد 4

7

u	v	Is u+v=0?	f	Print
7	-7	yes		خطأ
Stop				

مُخرج الخوارزمية هو (خطأ)

8

u	v	Is u+v=0?	f	Print
12	4	no	3	3
Stop				

مُخرج الخوارزمية هو العدد 3

9

S	X	Is X<1?	Print
1	48		
	4.8	no	
2	0.48	yes	2
Stop			

مُخرج الخوارزمية هو العدد 2

10

S	X	I	Print
1	9170		
	917	no	
2	91.7	no	
3	9.17	no	
4	0.917	yes	4
Stop			

مُخرج الخوارزمية هو العدد 4

11

S	X	Is X<1?	Print
1	-800		
	-80	yes	1
Stop			

مُخرج الخوارزمية هو العدد 1

الدرس الثاني: خوارزمية تعبئة الصندوق

1	$\frac{16+23+18+9+4+20+35+5+17+13+6+11}{45} = 3.93 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة هو 4 صناديق. B_1: 16 , 23 , 4 B_2: 18 , 9 , 5 , 13 B_3: 20 , 17 , 6 B_4: 35 B_5: 11 عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 صناديق. الارتفاع المهدور هو $5 \times 45 - 177 = 48$
2	الارتفاعات مرتبة تنازليًا: 35 , 23 , 20 , 18, 17 , 16 , 13 , 11 , 9 , 6 , 5 , 4 B_1: 35 , 9 B_2: 23 , 20 B_3: 18 , 17 , 6 , 4 B_4: 16 , 13 , 11 , 5 عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 صناديق. الارتفاع المهدور هو $4 \times 45 - 177 = 3$
3	توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، لأن عدد الصناديق اللازمة يساوي الحد الأدنى.

	$\frac{5+1+8+13+16+5+8+2+15+12+10}{20} = 4.75 \approx 5$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة هو 5 صناديق.
4	$B_1: 5, 1, 8, 5$ $B_2: 13, 2$ $B_3: 16$ $B_4: 8, 12$ $B_5: 15$ $B_6: 10$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 6 صناديق. الارتفاع المهدور هو $6 \times 20 - 95 = 25$
5	الارتفاعات مرتبة تنازليًا: $16, 15, 13, 12, 10, 8, 8, 5, 5, 2, 1$ $B_1: 16, 2, 1$ $B_2: 15, 5$ $B_3: 13, 5$ $B_4: 12, 8$ $B_5: 10, 8$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 5 صناديق. الارتفاع المهدور هو $5 \times 20 - 95 = 5$
6	$B_1: 5, 15$ $B_2: 8, 12$ $B_3: 13, 5, 2$ $B_4: 1, 16$ $B_5: 8, 10$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 5 صناديق. الارتفاع المهدور هو $5 \times 20 - 95 = 5$
7	توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة وخوارزمية الصندوق الكامل، لأن عدد الصناديق اللازمة يساوي الحد الأدنى.

8	$\frac{23+29+11+34+10+14+35+17}{50} = 3.46 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد أقراص التخزين اللازمة هو 4 أقراص. B_1: 23 , 11 , 10 B_2: 29 , 14 B_3: 34 B_4: 35 B_5: 17 عدد الأقراص اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 أقراص. مساحة التخزين المهدورة هي $5 \times 50 - 173 = 77$ MB
9	B_1: 23 , 10 , 17 B_2: 29 , 11 B_3: 34 , 14 B_4: 35 عدد الأقراص اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 أقراص. مساحة التخزين المهدورة هي $4 \times 50 - 173 = 27$ MB
10	وصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، لأن عدد الصناديق اللازمة يساوي الحد الأدنى. ملحوظة: يوجد حل آخر باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل و هو كالآتي: B_1: 29, 11, 10 B_2: 23, 14 B_3: 34 B_4: 35 B_5: 17 ولكن في هذه الحالة لا نحصل على الحل الأمثل.

11	$\frac{650+431+245+643+455+134+710+290+550+452}{1000}=\frac{4560}{1000}=4.56$ ≈ 5 الحد الأدنى من عدد الألواح الخشبية اللازمة هو 5 ألواح. $B_1: 650, 245$ $B_2: 431, 455$ $B_3: 643, 134$ $B_4: 710, 290$ $B_5: 550$ $B_6: 452$ عدد الألواح اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 6 ألواح. طول الجزء المهدور هو $6 \times 1000 - 4560 = 1440\ mm$
12	الأطوال مرتبة تنازليًا: 710 650 643 550 455 452 431 290 245 134 $B_1: 710, 290$ $B_2: 650, 245$ $B_3: 643, 134$ $B_4: 550, 431$ $B_5: 455$ $B_6: 452$ عدد الألواح اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 5 ألواح. طول الجزء المهدور هو $5 \times 1000 - 4560 = 1440\ mm$
13	لم نتوصل إلى الحل الأمثل لا باستخدام خوارزمية الملاءمة الأولى ولا باستخدام خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة.

	$\frac{175+135+210+105+100+150+60+30+90+125}{300}=\frac{1180}{300}=3.93$ ≈ 4 الحد الأدنى من عدد الشاحنات اللازمة هو 4 شاحنات.
14	$B_1: 175, 105$ $B_2: 135, 100, 60$ $B_3: 210, 30$ $B_4: 150, 90$ $B_5: 125$ عدد الشاحنات اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 شاحنات.
15	الكتل مرتبة تنازليًا: 210 175 150 135 125 105 100 90 60 30 $B_1: 210, 90$ $B_2: 175, 125$ $B_3: 150, 135$ $B_4: 105, 100, 60, 30$ عدد الشاحنات اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 شاحنات.
16	توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، لأن عدد الشاحنات اللازمة باستعمال هذه الخوارزمية يساوي الحد الأدنى.
17	$\frac{25+22+30+18+29+21+27+21}{50}=\frac{193}{50}=3.86\approx 4$ الحد الأدنى من عدد الأنابيب اللازمة هو 4 أنابيب. الأطوال مرتبة تنازليًا: 30 29 27 25 22 21 21 18 $B_1: 30, 18$ $B_2: 29, 21$ $B_3: 27, 22$ $B_4: 25, 21$ عدد الأنابيب اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 أنابيب. الجزء المهدور في الأنابيب هو $4\times 50-193=7\ cm$

18	$B_1: 29 , 21$ $B_2: 25 , 22$ $B_3: 30 , 18$ $B_4: 27 , 21$ عدد الأنابيب اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 أنابيب. الجزء المهدور في الأنابيب هو $4 \times 50 - 193 = 7\ cm$
19	توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة وخوارزمية الصندوق الكامل، لأن عدد الصناديق اللازمة في كل منها يساوي الحد الأدنى.

الدرس الثالث: المخططات

1

تمثل الرؤوس مجموعة من المدن.

وتمثل الحافات الطرق الرئيسة التي تربط هذه المدن.

2

WUCNO

WCO

3

ترتبط C بخمس مدن مباشرة، وهي: W,U,K,O,N

4

تكلفة الذهاب من المنطقة C إلى المنطقة D مباشرة هي: JD 6

5

المسار	تكلفة الذهاب من المنطقة A إلى المنطقة D
AD	JD 2
AED	$5 + 3 =$ JD 8
ACD	$4 + 6 =$ JD 10
ABCD	$2 + 3 + 6 =$ JD 11

أقل تكلفة للذهاب من المنطقة A إلى المنطقة D هي 2 دينار على المسار المباشر AD

6

المسار	تكلفة الذهاب من المنطقة B إلى المنطقة E
BAE	$2 + 5 =$ JD 7
BADE	$2 + 2 + 3 =$ JD 7
BACDE	$2 + 4 + 6 + 3 =$ JD 15
BCAE	$3 + 4 + 5 =$ JD 12
BCDE	$3 + 6 + 3 =$ JD 12
BCADE	$3 + 4 + 2 + 3 =$ JD 12
BCDAE	$3 + 6 + 2 + 5 =$ JD 16

أقل تكلفة للذهاب من المنطقة B إلى المنطقة E هي 7 JD على المسار BAE أو المسار BADE

7

مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E)

مجموعة الحافات هي:

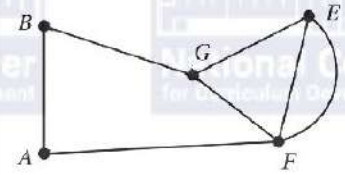
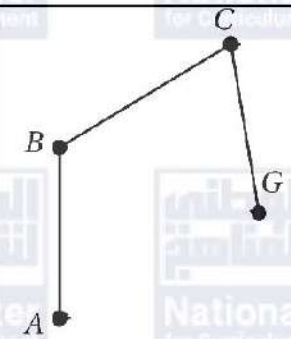
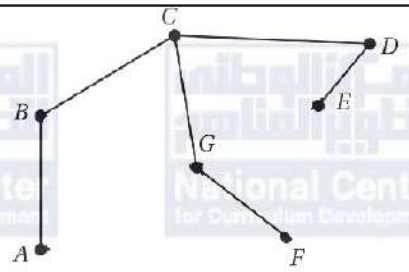
$(AB, AC, AE, BB, BC, BC, BC, CE, CD, DE, DE, DE, DD)$

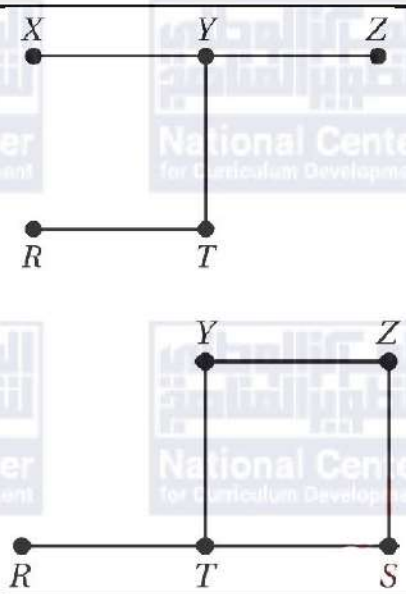
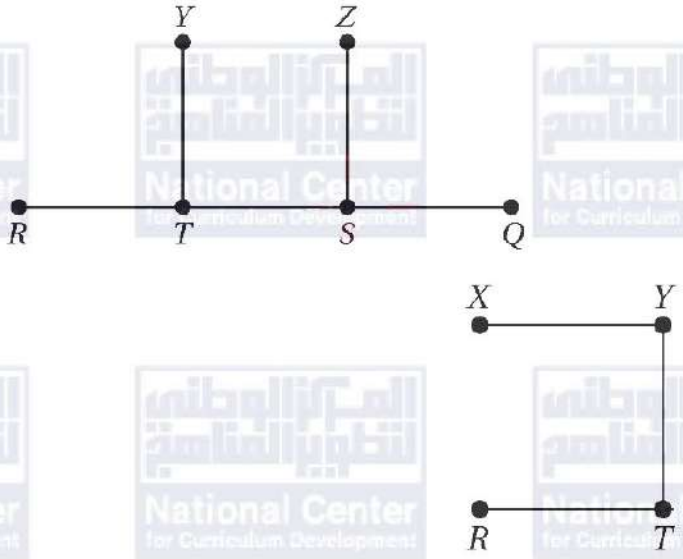
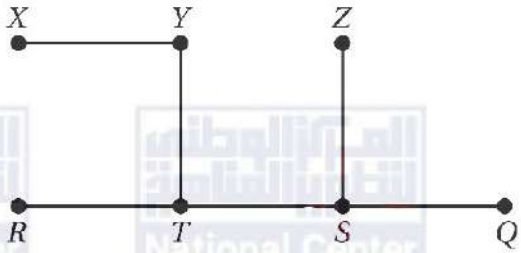
8	<table><tr><th>الرأس</th><th>الدرجة</th><th>نوع الدرجة</th></tr><tr><td>A</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>B</td><td>6</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>C</td><td>6</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>D</td><td>6</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>E</td><td>5</td><td>فردية</td></tr></table>
9	مجموعة الدرجات للمخطط: $deg = (3,5,6,6,6)$
10	XVUT XVURST XVUST XYVUT XYVURST XYVUST XYWVUT XYWVURST XYWVUST
11	للمخطط 11 حافة، إذن، مجموع درجات رؤوسه يساوي: $\sum_{k=1}^{5} \deg V_k = 2 \times 11 = 22$
12	للمخطط 20 حافة، إذن، مجموع درجات رؤوسه يساوي: $\sum_{k=1}^{9} \deg V_k = 2 \times 20 = 40$
13	مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E, F, G, H) مجموعة الحافات هي: $(AB, AD, AE, BF, BC, CG, CD, DH, HG, HE, FE, FG)$

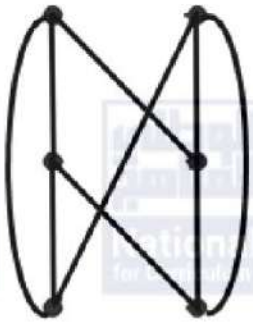
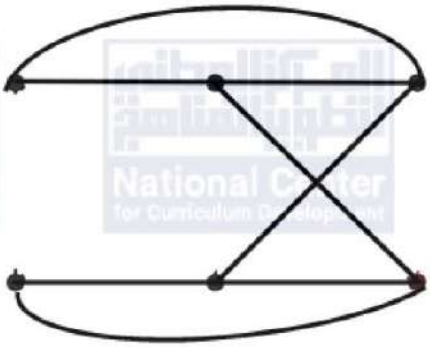
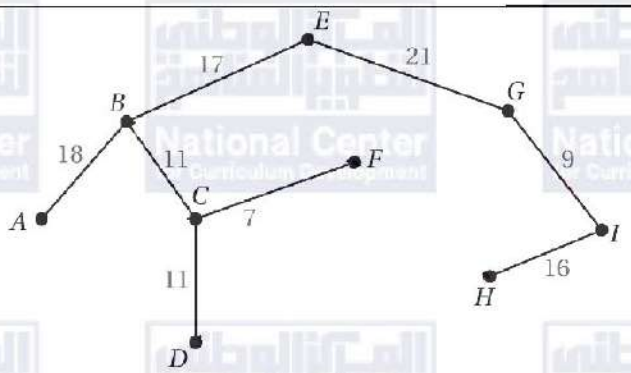
14	<table><tr><th>الرأس</th><th>الدرجة</th><th>نوع الدرجة</th></tr><tr><td>A</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>B</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>C</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>D</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>E</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>F</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>G</td><td>3</td><td>فردية</td></tr><tr><td>H</td><td>3</td><td>فردية</td></tr></table>
15	مجموعة الدرجات للمخطط: $deg = (3,3,3,3,3,3,3,3)$
16	ممشى لا يمثل ممرًا: ABCGHDAEFBA ممر لا يمثل طريقًا: AEFGCBF طريق: ABCD دارة: EFGHE دارة هاملتون:AEFGHDCBA دارة أويلر: لا يمكن إيجاد دارة أويلر في هذا المخطط
17	مجموعة الرؤوس هي: (F, I, J, L, K) مجموعة الحافات هي: (FJ, FI, IJ, JL, JK, LK)
18	<table><tr><th>الرأس</th><th>الدرجة</th><th>نوع الدرجة</th></tr><tr><td>F</td><td>2</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>J</td><td>4</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>I</td><td>2</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>L</td><td>2</td><td>زوجية</td></tr><tr><td>K</td><td>2</td><td>زوجية</td></tr></table>

19	ممشى لا يمثل ممرًا: FIJLKJI ممر لا يمثل طريقًا: FJKLJI طريق: FIJ دارة: JKLJ دارة هاملتون: لا يمكن إيجاد دارة هاملتون في هذا المخطط دارة أويلر: FIJLKJF

الدرس الرابع: أنواع خاصة من المخططات

1	المخطط ليس بسيطًا، لأنه يحتوي حافات متعددة وحلقات.
2	نعم، لأنه يمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.
3	
4	
5	
6	المخطط بسيط، لأنه لايحتوي حافات متعددة ولا حلقات.

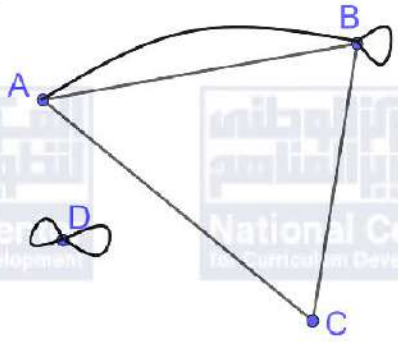
7	نعم، لأنه يمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.
8	المخطط ليس كاملًا، لأن بعض رؤوسه غير متصلة بحواف.
9	
10	
11	

12	
13	
14	 الحافات التي أضيفت بالترتيب هي: HI,IG,GE,EB,BC,CF,CD,BA
15	أقل تكلفة تلزم لتبليط الممرات للربط بين جميع المحطات الرئيسة في الحديقة هي: $(16 + 9 + 21 + 17 + 11 + 7 + 18 + 11) \times 25 = JD\ 2750$
16	$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

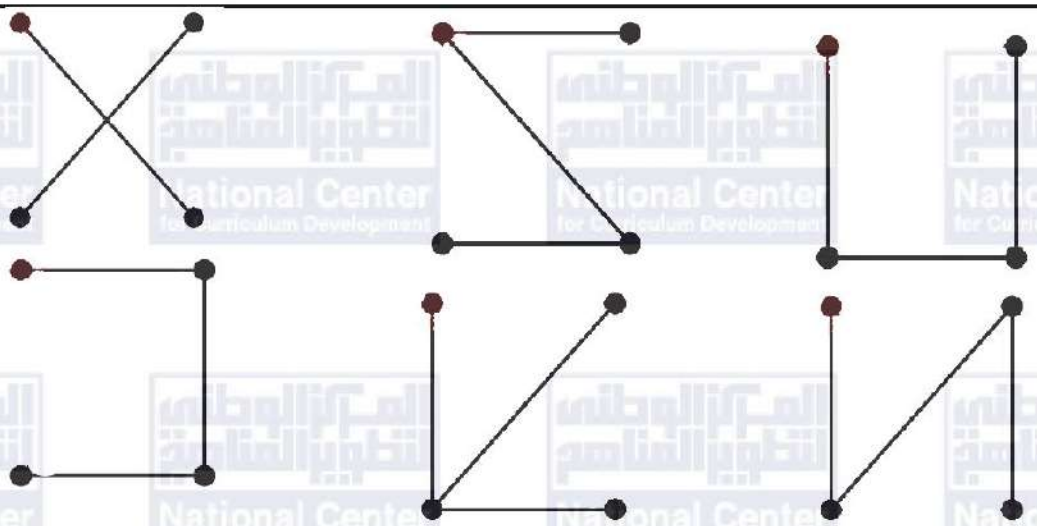
17

	P	Q	R	S	T	U	V
P	–	17	–	–	9	16	–
Q	17	–	3	–	4	–	–
R	–	3	–	4	19	–	–
S	–	–	4	–	–	–	5
T	9	4	19	–	–	12	18
U	16	–	–	–	12	–	15
V	–	–	–	5	18	15	–

18



19



الدرس الخامس: مخططات أويلر

1	المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك) نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها. بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط أويلري.
2	المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك) نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها. بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط أويلري.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	2	زوجية
B	2	زوجية
C	6	زوجية
D	2	زوجية
E	4	زوجية
F	2	زوجية
G	2	زوجية
H	2	زوجية
S	2	زوجية

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	2	زوجية
B	4	زوجية
C	4	زوجية
D	2	زوجية
E	2	زوجية
F	4	زوجية
G	4	زوجية
H	2	زوجية

3	المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك) نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها. | الرأس	الدرجة	نوع الدرجة | |---|---|---| | V | 2 | زوجية | | W | 4 | زوجية | | X | 4 | زوجية | | Y | 3 | فردية | | Z | 3 | فردية | بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.
4	المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك) نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها. | الرأس	الدرجة	نوع الدرجة | |---|---|---| | A | 2 | زوجية | | B | 4 | زوجية | | C | 4 | زوجية | | D | 4 | زوجية | | E | 2 | زوجية | | F | 4 | زوجية | | G | 3 | فردية | | H | 3 | فردية | | R | 4 | زوجية | بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.
5	نلاحظ من المخطط أن درجة كل رأس من رؤوسه زوجية، ما يعني أن المخطط أويلري، ومنه، فإن طول أقصر مسار أويلري في المخطط يساوي الوزن الكلي للمخطط. $10 + 20 + 8 + 40 + 30 + 50 + 19 + 11 + 6 + 35 + 12 + 23 = 264$ إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس G، وينتهي به، هو: 264 وحدة.

6	نلاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط شبه أويلري. الرأسان اللذان درجتهما فردية هما: C و B، وأقصر طريق يصل بينهما هو: BAC، لذا نكرر حافات هذا الطريق في المخطط. نجد الوزن الكلي للمخطط الناتج: $13 + 13 + 11 + 11 + 8 + 14 + 18 + 27 = 115$ إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس C، وينتهي به، هو: 115 وحدة.
7	نلاحظ من المخطط وجود أكثر من رأسين درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط ليس أويلريًا ولا شبه أويلري. الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط هي: C,H,D,F نحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثم نجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	CH, DF	$400 + 160 = 560$
الطريقة الثانية	CD, HF	$200 + 220 = 420$
الطريقة الثالثة	CF, DH	$180 + 380 = 560$

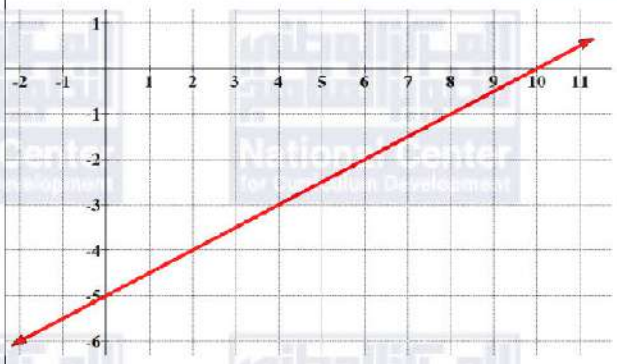
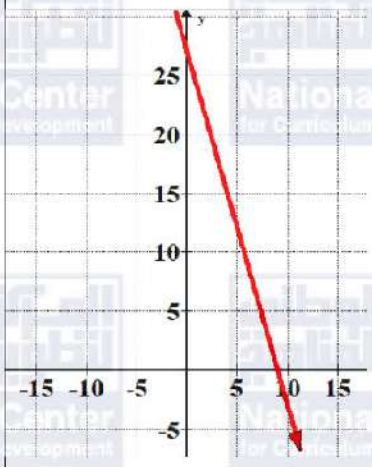
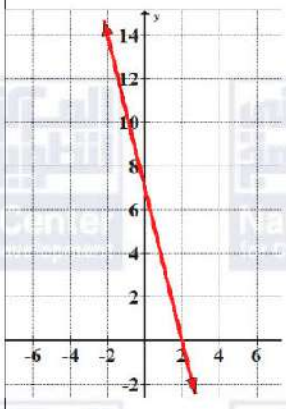
الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الثانية، لذا نكرر حافات هذه الطريقة، ونجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$$60 + 60 + 140 + 140 + 220 + 220 + 340 + 250 + 410 + 210 + 150 + 230 + 320 + 350 + 230 + 330 + 200 + 190 + 180 + 160 + 210 = 4600$$

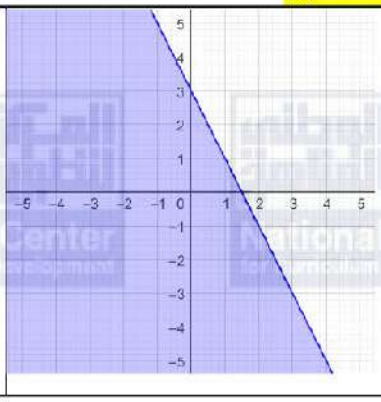
إذن، طول أقصر مسار أويلري يمكن أن تمر به المهندسة لإنجاز مهمتها هو: 4600 m.

الوحدة الثالثة: البرمجة الخطية

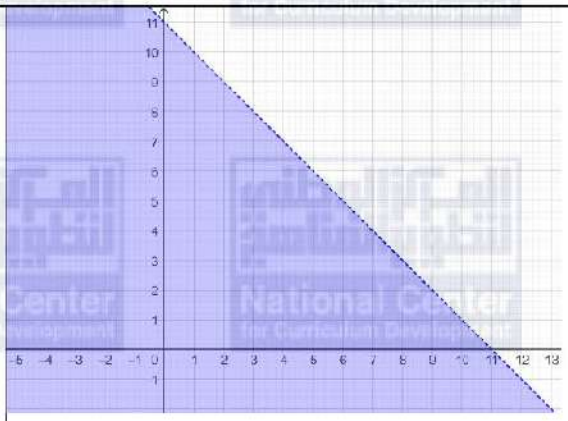
أستعد لدراسة الوحدة

	استعمال المتباينات الخطية بمتغيرين للتعبير عن موقف حياتي صفحة 36
1	أفرض أن طول النوع الأول x، وطول النوع الثاني y، فتكون المتباينة: $4x + 6y \leq 72$
2	أفرض أن كمية العنب x kg، وأن كمية التفاح y kg، فتكون المتباينة: $1.5x + y \leq 6$
	تمثيل معادلة خطية بمتغيرين صفحة 36
3	المقطع xهو 10، والمقطع yهو 5- 
4	المقطع xهو9، والمقطع yهو27 
5	المقطع xهو2، والمقطع yهو7 

	حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بطريقة الحذف صفحة 37
6	$x + y = 5$ $x - y = 1$ بجمع المعادلتين: $2x = 6 \implies x = 3$ بالتعويض في المعادلة الأولى: $3 + y = 5 \implies y = 2$ حل النظام $(3,2)$
7	$2x + y = 9$ $x - y = 0$ بجمع المعادلتين: $3x = 9 \implies x = 3$ بالتعويض في المعادلة الأولى: $6 + y = 9 \implies y = 3$ حل النظام $(3,3)$
8	$x - y = 5$ $x + 2y = -1$ بطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية: $3y = -6 \implies y = -2$ بالتعويض في المعادلة الأولى: $x + 2 = 5 \implies x = 3$ حل النظام $(3, -2)$
	تحديد إذا كان زوج مرتب يمثل حلا لمتباينة خطية بمتغيرين صفحة 38
9	$(0) + 3(1) <? 6$ $3 < 6$ ✓ نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(0,1)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.

10	$(-2)+3(4)<?6$ $10<6$ × نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(-2,4)$ ليس أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
11	$(8)+3(-1)<?6$ $5<6$ ✓ نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(-1, 8)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
12	$-3(-5)+4(3)\geq?12$ $27\geq 12$ ✓ نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(-5,3)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
13	$-3(0)+4(2)\geq?12$ $8\geq 12$ × نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(0,2)$ ليس أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
14	$-3(3)+4(7)\geq?12$ $19\geq 12$ ✓ نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(3,7)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانيا صفحة 39	
15	 المقطع x للمستقيم الحدودي هو 1.5، والمقطع y له هو 3 أعوض النقطة $(0, 0)$ في المتباينة فينتج أن: $0\leq 3-0 \Rightarrow 0\leq 3$ و هذه العبارة صحيحة لذلك أظلل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

16



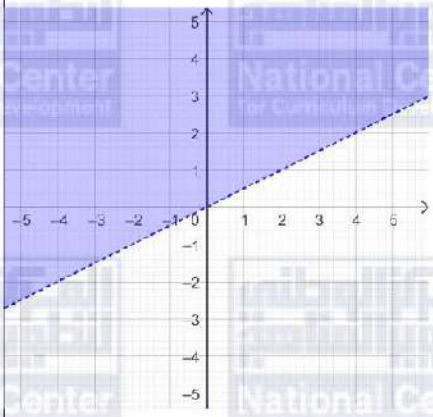
المقطع x للمستقيم الحدودي هو 11، والمقطع y له هو 11

أعوض النقطة (0, 0) في المتباينة فينتج

أن: $0 + 0 < 11$

وهذه العبارة صحيحة لذلك أظلل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

17

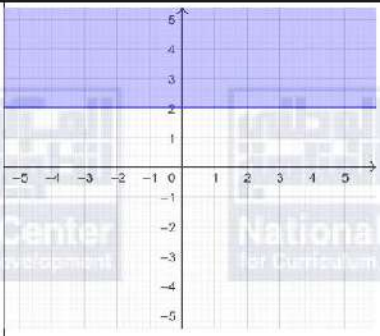


المقطع x للمستقيم الحدودي هو 0، والمقطع y له هو 0، أفرض أن x تساوي 2، وأحل المعادلة $2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 1$، لذلك أرسم المستقيم الحدودي مارًا بالنقطتين (0, 0), (2, 1)

أعوض النقطة (0, 1) في المتباينة فينتج أن: $0 - 2(1) < 0$

أي $-2 < 0$، وهذه العبارة صحيحة لذلك أظلل الجهة التي تحتوي النقطة (0, 1) كما في الشكل المجاور.

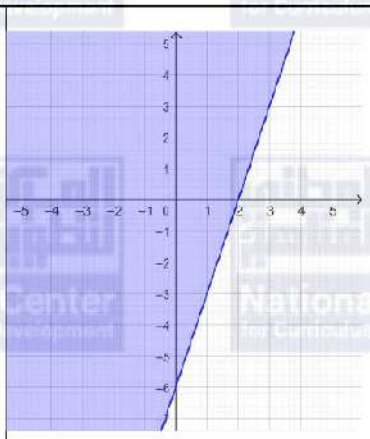
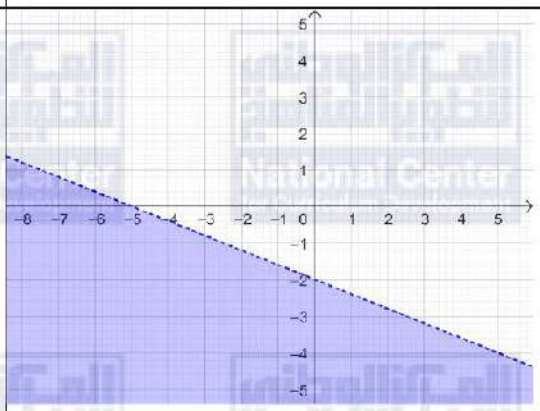
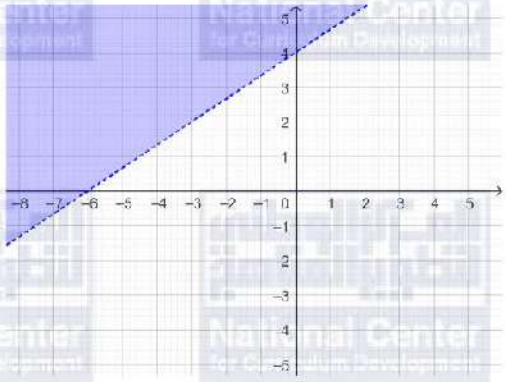
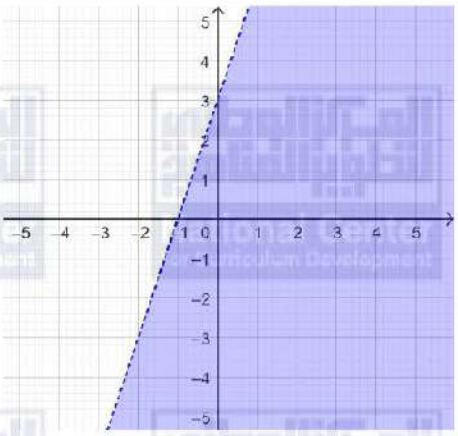
18



المستقيم الحدودي هو: $4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$،

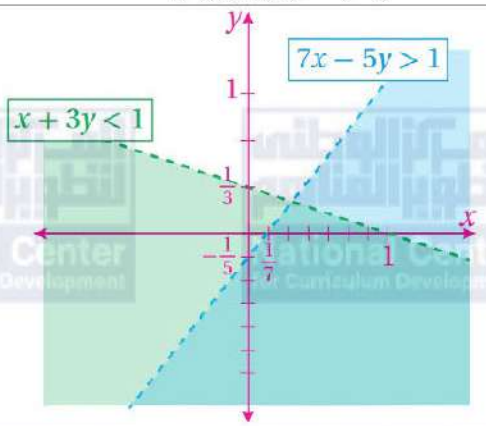
وهذا المستقيم يوازي المحور الأفقي ويقطع المحور y عند 2

إذا عوضت (0, 0) في المتباينة ينتج أن $0 - 8 \geq 0$، وهذه عبارة غير صحيحة، لذلك أظلل الجهة التي لا تحتوي (0, 0) كما في الشكل المجاور.

19		المقطع x للمستقيم الحدودي هو2، والمقطع y له هو6- أعوض النقطة (0 ,0) في المتباينة فينتج أن: $3(0) - 0 \leq 6$ أي $6 \leq 0$ ، وهذه العبارة صحيحة لذلك أظلل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.
20		المقطع x للمستقيم الحدودي هو5-، والمقطع y له هو2- أعوض النقطة (0 ,0) في المتباينة فينتج أن: $0 + 0 < -10$ وهذه العبارة غيرصحيحة لذلك أظلل الجهة التي لا تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.
21		المقطع x للمستقيم الحدودي هو6-، والمقطع y له هو4 أعوض النقطة (0 ,0) في المتباينة فينتج أن: $0 < -10$ ، أي $-4(0) + 5(0) < -10$ وهذه العبارة غيرصحيحة لذلك أظلل الجهة التي لا تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.
22		المقطع x للمستقيم الحدودي هو1-، والمقطع y له هو3 أعوض النقطة (0 ,0) في المتباينة فينتج أن: $0 < 0 + 3$ وهذه العبارة صحيحة لذلك أظلل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

الدرس الأول: حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيا

1

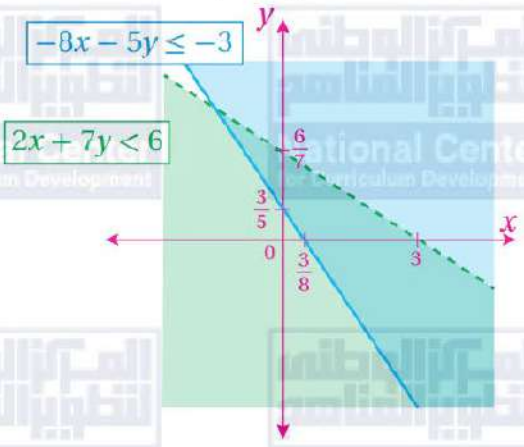


منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من اللونين الأزرق والأخضر.

للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة $(0, -6)$ الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في كلتا المتباينتين:

$7(0) - 5(-6)$	$=$	30	$>$	1	✓
$0 + 3(-6)$	$=$	-18	$<$	1	✓

2

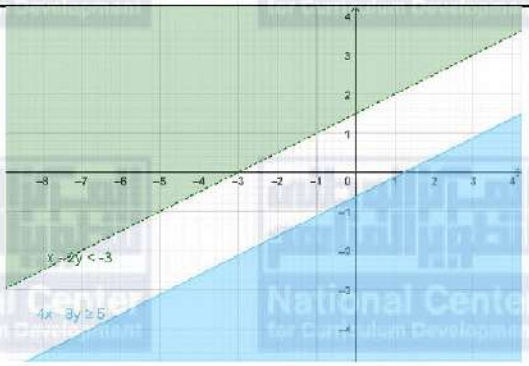


منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من اللونين الأزرق والأخضر.

للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة $(2,0)$ الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في كلتا المتباينتين:

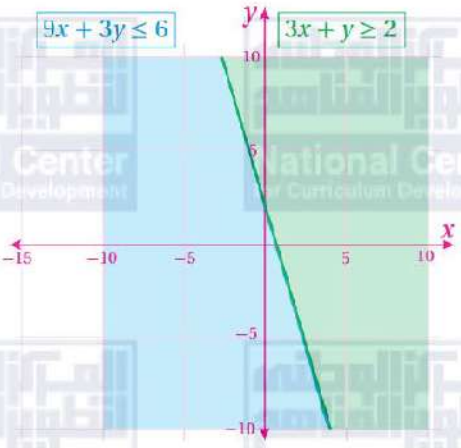
$2(2) + 7(0)$	$=$	4	$<$	6	✓
$-8(2) - 6(0)$	$=$	-16	$\leq$	-3	✓

3



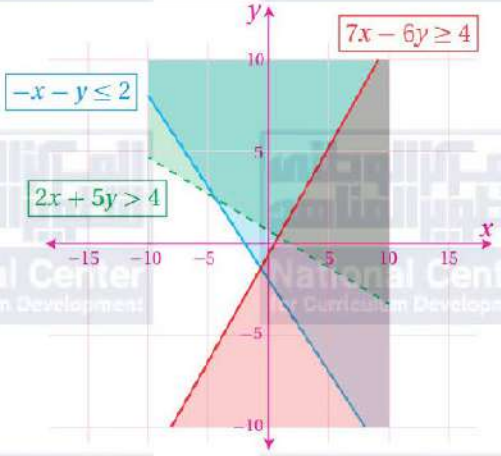
لا توجد منطقة مشتركة، لذا لا يوجد حل للنظام.

4



منطقة الحل هي فقط المستقيم $3x + y = 2$، وهو يمثل تقاطع المنطقتين.

5

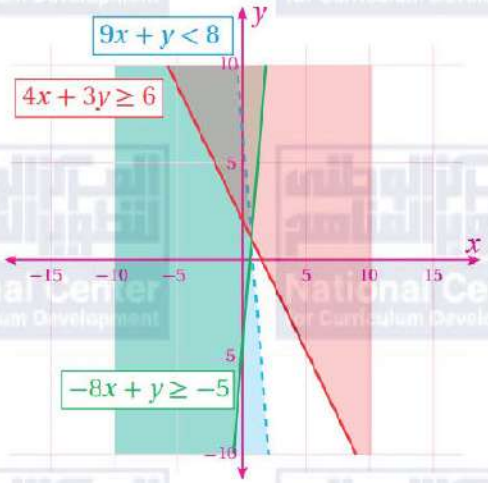


منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من الألوان الأزرق والأخضر والزهري.

للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة (5,0) الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في المتباينات:

$2(5)+5(0)$	$=$	10	$>$	4	✓
$7(5)-6(0)$	$=$	35	$\geq$	4	✓
$-5-0$	$=$	-5	$<$	2	✓

6

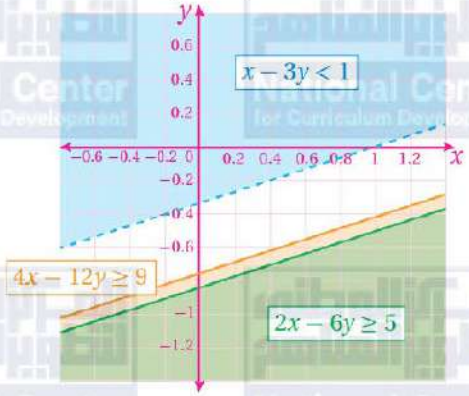


منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من الألوان الأزرق والأخضر والزهري.

للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة $(0,6)$ الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في المتباينات:

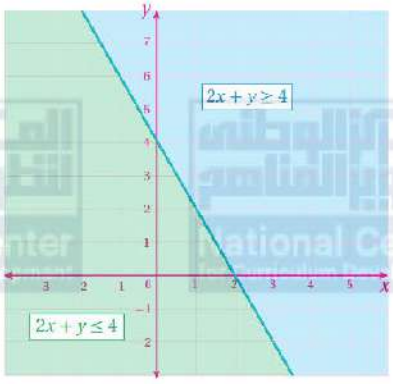
$4(0)+3(6)$	$=$	18	$\geq$	6	✓
$9(0)+6$	$=$	6	$<$	8	✓
$-8(0)+6$	$=$	6	$\geq$	-5	✓

7

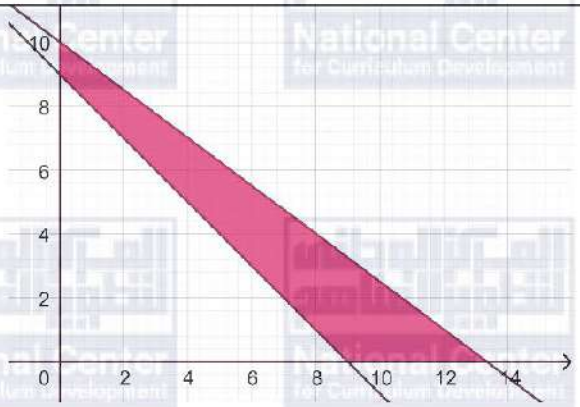


لا يوجد حل لهذا النظام لعدم وجود منطقة مشتركة بين حلول المتباينات الثلاثة.

8



مجموعة حلول هذا النظام هي نقاط المستقيم الحدودي الممثل بالشكل

9	نفرض x عدد وجبات النوع الأول، y عدد وجبات النوع الثاني. $x + y > 9$ $1.5x + 2y \leq 20$ $x \geq 0 , y \geq 0$
10	
11	(1,4), (8,5), (3,2)

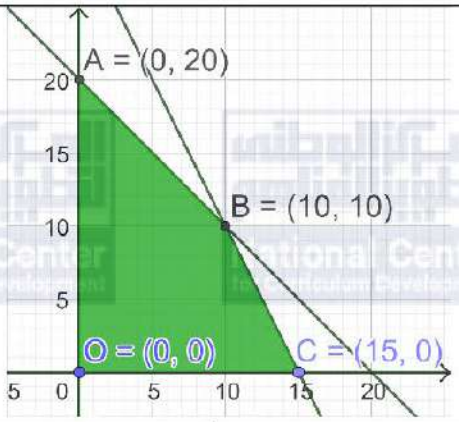
الدرس الثاني: البرمجة الخطية

1

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$Q = 4x + 2y$
$A(0,4)$	$Q = 4(0) + 2(4) = 8$
$B(3,1)$	$Q = 4(3) + 2(1) = 14$
$C(6,0)$	$Q = 4(6) + 2(0) = 24$

النقطة التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يمكن هي: $A(0,4)$

2



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$W = x + 2y$
$A(0,20)$	$W = (0) + 2(20) = 40$
$B(10,10)$	$W = (10) + 2(10) = 30$
$C(15,0)$	$W = (15) + 2(0) = 15$
$O(0,0)$	$W = (0) + 2(0) = 0$

النقطة التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن هي: $A(0,20)$

نفرض x عدد الدراجات من النوع A، y عدد الدراجات من النوع B.

3

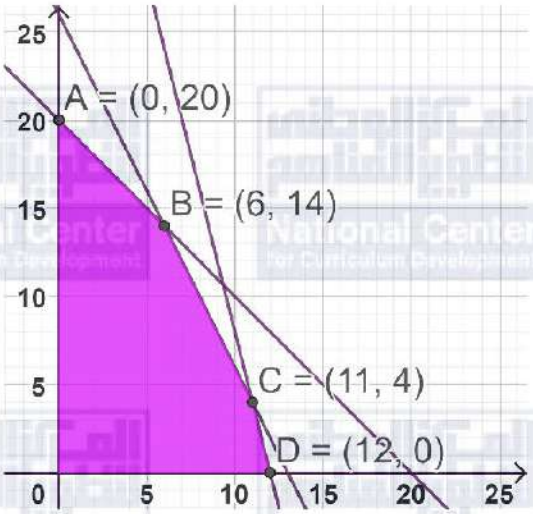
$2x + 2y \leq 40$

$4x + y \leq 48$

$x + 0.5y \leq 13$

$x \geq 0 , y \geq 0$

$P = 45x + 30y$



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 45x + 30y$
$A(0,20)$	$P = 45(0) + 30(20) = 600$
$B(6,14)$	$P = 45(6) + 30(14) = 690$
$C(11,4)$	$P = 45(11) + 30(4) = 615$
$D(12,0)$	$P = 45(12) + 30(0) = 540$
O(0, 0)	$P = 45(0) + 30(0) = 0$

إذن، لتحقيق أكبر ربح ممكن، يتعين على المصنع إنتاج 6 دراجات من النوع A و14 دراجة من النوع B.

نفرض x عدد الطاولات المستطيلة، y عدد الطاولات الدائرية.

4

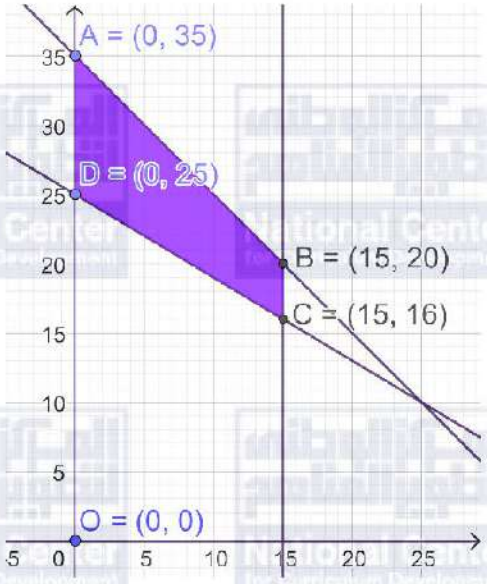
$6x + 10y \geq 250$

$x + y \leq 35$

$x \leq 15$

$x \geq 0 , y \geq 0$

$P = 28x + 52y$



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 28x + 52y$
$A(0,35)$	$P = 28(0) + 52(35) = 1820$
$B(15,20)$	$P = 28(15) + 52(20) = 1460$
$C(15,16)$	$P = 28(15) + 52(16) = 1252$
$D(0,25)$	$P = 28(0) + 52(25) = 1300$

إذن، لتحقيق أقل تكلفة ممكنة، يتعين على فاطمة استئجار 15 طاولة مستطيلة و16 طاولة دائرية.