الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

الرياضيات

العلمي

الفصل الدراسي الأول

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

الوحدة (١) : النهايات والاتصال

الفصل الأول : النهايات

تدريب (١) ص ١٥

أكمل :

١) $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ١$ ٢) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ غ.م

تدريب (٢) : ص ١٦

١) $\lim_{س \to ١} م(س) = ٢$ ٢) $\lim_{س \to -١} م(س)$ = غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ٢$ ٤) $\lim_{س \to -٢} م(س) = ٣$

تمارين ومسائل

ص ١٧

أ) $\lim_{س \to ٦^+} م(س) = ٥$ ب) $\lim_{س \to -٦} م(س) = ٢$

ج) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ١$ د) $\lim_{س \to -٢} م(س)$ = غ.م

ه) $\lim_{س \to -٨^+} م(س) = -٦$ و) $\lim_{س \to -٨^-} م(س) = -٦$

ز) $\lim_{س \to ١٠} م(س)$ = صفر

ح) م $س \to ٤-$ ط) $\lim_{س \to -٤^+} ل(س)$ = صفر

ي) $\lim_{س \to -٤} ل(س)$ غير موجودة ك) $\lim_{س \to -٤} ل(س)$ غير موجودة

ل) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $[-1,1]$ ب) $\mathbb{R} - (-1,1)$ أ) $\mathbb{R}$

د) $\lambda = -1$ ، 1 هـ) $\lambda = -2$ ، 3

و) $\lim_{s \to 0^+} \lambda(s) = \lim_{s \to 0^-} \lambda(s) = \lambda(0) = 3^2 + 4 = 8$

$\lambda(2) = 2 \times 2 + 1 = 5 \neq 0$

ثانياً : نظريات النهايات

تدريب (1)

1) $\lim_{s \to -2} (\lambda(s) + \theta(s) \times s) = \lim_{s \to -2} \lambda(s) + \lim_{s \to -2} \theta(s) \times \lim_{s \to -2} s$

$= -3 + -6 \times -2$

$= -3 - 12 = -16$

2) $\lim_{s \to 1} \frac{\lambda(s)}{\theta(s)} = \frac{\lim_{s \to 1} \lambda(s)}{\lim_{s \to 1} \theta(s)} = \frac{2}{2} = 1$

3) $\lim_{s \to 1} \sqrt{\lambda(s) \times \theta(s)} + 10 = \sqrt{\lim_{s \to 1} \lambda(s) \times \lim_{s \to 1} \theta(s)} + 10$

$= \sqrt{8} + 2 \times 2 + 10$

$= \sqrt{64} + 10$

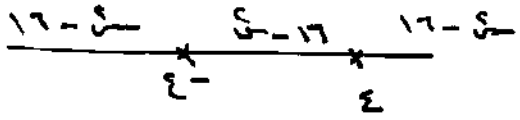
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٢)

١) $\lim_{س \to ٠} |س - ٨| = |٠ - ٨| = ٨$

٢) $\lim_{س \to ١٦} |س - ١٦| =$ صفر

٣) $\lim_{س \to ٤} |س - ١٦| = ٠$



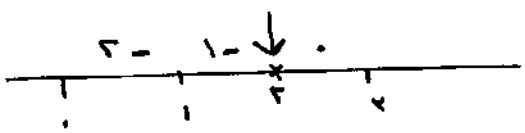
حيث $س \to ٤$ لليمين :

$\lim_{س \to ٤^+} |س - ١٦| =$ صفر

$\lim_{س \to ٤^-} |س - ١٦| =$ صفر

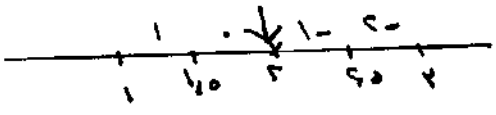
تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to ١} [س - ٢]$



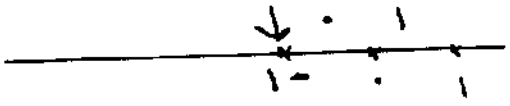
$= -٣$

٢) $\lim_{س \to ١,٥} [٤ - ٢س]$

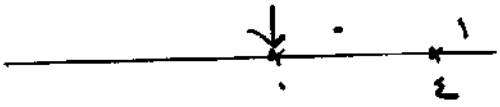


$= ٣$

٣) $\lim_{س \to ٠} [س + ١] = ١$



٤) $\lim_{س \to ٤} [٠,٢٥ س]$



$= ١$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤)

أ) ق(س) = ٢س + ٣ ، ب) س = ٤ عند (٣، ٣)

تدريب (٥)

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{س}$ غير موجود ، ٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س}{س}$ = ١

٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س - ٥}$ غير موجود ، ٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ٥}{س - ٥} = \frac{-٤}{-٥} = \frac{٤}{٥}$

تدريب (٦)

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٠} ق(س)$ غير موجود

تدريب (٧)

١) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ غير موجود ، ٢) $\lim_{س \to ١} ل(س)$ غير موجود

٣) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + ل(س)) = ٨$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عبارات ومسائل

١) أ) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ن(س)) = -٦ + -٤ = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} (م(س) \times ن(س)) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{م(س)}{ن(س)} = \frac{-٦}{-٤} = \frac{٣}{٢}$

د) $\lim_{س \to ٠} ن(س)^{٤} = \left(\lim_{س \to ٠} ن(س)\right)^{٤} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{ن(س) - ١} = \sqrt{\lim_{س \to ٠} (ن(س) - ١)} = \sqrt{-٣ - ١} = \sqrt{-٤}$ غير معرف

و) $\lim_{س \to -٣^{+}} \frac{م(س)}{ن(س)} = \frac{م(-٣)}{ن(-٣)} = \frac{٠}{-٤} = ٠$

٢) أ) $\lim_{س \to ١} (٢ع(س) + ن(س)) = ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $١٢٥ - ٤ = ١٢١$

ج) $\frac{٢٤}{٥}$ د) $٢٥ - ٤ = ٢١$

هـ) $\lim_{س \to ٥^{+}} |س - ٥| = |٠| = ٠$ و) $\lim_{س \to ٥^{-}} |س - ٥| = |٠| = ٠$

ز) $\lim_{س \to ٥} |س - ٥| = |٠| = ٠$ ح) $\lim_{س \to ٨} |س - ٦| = |٢| = ٢$

ط) $\lim_{س \to -٢^{+}} [س + ٢] = ٠$ ي) $\lim_{س \to ١} (س[س] + |س - ١|) = ١$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ز) $\lim_{س \to 5^-} \sqrt{5-س} = صفر$ ح) $\lim_{س \to 1} \sqrt{1-س^2}$ غير م.ع

ط) $\lim_{س \to -1} \sqrt{س^2+4س+4} = \lim_{س \to -1} \sqrt{(س+2)^2} = \lim_{س \to -1} |س+2| = صفر$

٤) فيم جـ $\in [6, 8)$

٥) جـ $\in (-0.5, 0)$

٦) بما أن $\lim_{س \to 2} م(س)$ موجودة $\therefore \lim_{س \to 2^+} م(س) = \lim_{س \to 2^-} م(س)$

$٩ - ٤ب = ٣$ وضح $٩ - ٣ = ٤ب$

$٦ = ٤ب \Leftarrow ب = \frac{٦}{٤}$

٧) أ) $\lim_{س \to 2} (٣س - ٢)$ افرض $٣س - ٢ = ص$

$س \to 2 \Rightarrow ص \to 3$

$\lim_{ص \to 3} د(ص) = ١$

ب) $\lim_{س \to 2} (د(س) + ن(س)) = \lim_{س \to 2} د(س) + \lim_{س \to 2} ن(س) = ٢ + ١ = ٣$

٨) أ) $\lim_{س \to 1} (م(س) + ع(س))$ لأن النهايتين متساويتين

$= ٠ + ٢ = ٢$

ب) $\lim_{س \to 1} م(س) \times \lim_{س \to 1} ع(س) = ١ \times ١ = ١$

ج) افرض $ص = س - ١$ $س \to 1 \Rightarrow ص \to$ صفر

$\lim_{ص \to 0} ٣م(ص) + \lim_{س \to 1} ع(س) = ٣ + ٤ = ٦$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٩) $\lim_{س \to -٣} (س - ل(س)) = -١٠$

$-٣ - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$\Leftarrow -٣ + ١٠ = \lim_{س \to -٣} ل(س) = ٧$

$\therefore \lim_{س \to -٣} (ق^{٢}(س) - ٢ ل(س)) = (\lim_{س \to -٣} ق(س))^{٢} - \lim_{س \to -٣} ٢ ل(س)$

$= ١٦ - ١٤$

$= ٢$

١٠) $ق(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + ٤ - س^{٢}) = \lim_{س \to ٢} ٤ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٤ - \lim_{س \to ٢} س^{٢}$

$= ٤ \times ٥ + ١٦$

$= ١٥ + ١٦ = ٣١$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ثالثا : نهايات الاقترانات الكسرية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥} = \lim_{س \to -٥} \frac{(س+٥)(س-٢)}{(س+٥)} = -٧$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ١}{س - ٢}$ غ.م

تدريب (٢)

١) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{١}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س - ٥}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \left(\frac{١٠ - ٢س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س-٥)(س+٥)}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-٢(٥-س)}{٥س} \times \frac{١}{(س-٥)(س+٥)} = \frac{-٢}{٥٠} = \frac{-٢}{٢٥} \times \frac{١}{١٠}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{٣س+٤} - ٦} \times \frac{\sqrt{٣س+٤} + ٦}{\sqrt{٣س+٤} + ٦}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{٣س+٤} + ٦)}{(٣س+٤) - ٣٦}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{٣س+٤} + ٦)}{(س-٢)} = ١٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

هـ) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2+1} - \sqrt{1-2س^2}}{س} \times \frac{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(س^2+1) - (1-2س^2)}{س^2 (\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2})}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(س^2+1) - (1-2س^2)}{س^2 (\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2})} = \lim_{س \to 0} \frac{3س^2}{س^2 (\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2})}$

$= \frac{3}{2}$

تدريب (٣)

أ) $\lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س^2-4}} = \lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{(س-2)(س+2)}}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

ج) $\lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س-2}}$ لأن المقدار غير معرف عندما $س = 2$

تدريب (٤)

$\lim_{س \to 7} \frac{\sqrt[3]{س+1} - 2}{س-7} \times \frac{\left(\sqrt[3]{(س+1)^2} + 2\sqrt[3]{س+1} + 4\right)}{\left(\sqrt[3]{(س+1)^2} + 2\sqrt[3]{س+1} + 4\right)}$

$= \lim_{س \to 7} \frac{(س+1) - 8}{(س-7)\left(\sqrt[3]{(س+1)^2} + 2\sqrt[3]{س+1} + 4\right)}$

$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4\right)} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

أ) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١)^{٢} - ٨١}{س - ٨} \times \frac{(س+١+٩)}{(س+١+٩)}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{(س - ٨)(س+١+٩)}$

$= \frac{١}{١٨}$

ب) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س} - ٢}{\sqrt[٣]{س} - ٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤\sqrt[٣]{س} + ١٦)}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤\sqrt[٣]{س} + ١٦)}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{(س - ٨)} \times \frac{١}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤\sqrt[٣]{س} + ١٦)}$

$= \frac{-٢}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{-١}{١٢}$

د) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{(٢+س)^{٢}} - \frac{١}{٤} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{٤ - (٢+س)^{٢}}{٤(٢+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{٤ - (٤+٤س+س^{٢})}{٤(٢+س)^{٢}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-٤س - س^{٢}}{٤(٢+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{س} \left(\frac{س^{٢} + ٤س}{٤(٢+س)^{٢}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{س} \times \frac{س(س+٤)}{٤(٢+س)^{٢}}$

$= \frac{-٤}{١٦} = \frac{-١}{٤}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

د) $\lim_{س \to -2} \frac{|س^2 + 4س + 1| - 5}{س^2 + 8} = \lim_{س \to -2} \frac{س^2 + 4س + 5}{س^2 + 8}$

$= \lim_{س \to -2} \frac{(س+2)(س+2)}{(س+2)(س^2 + 2س + 4)} = \frac{0}{4}$

هـ) $\lim_{س \to 3} \frac{|س^2 - 6س + 1| - 1}{س^2 - 9} \times \frac{س^2 - 6س + 6}{س^2 - 6س + 6}$

$\lim_{س \to 3} \frac{(س-3)(س-3)}{(س-3)(س+3)(س^2 - 6س + 6)} = \lim_{س \to 3} \frac{س - 3}{(س+3)(س^2 - 6س + 6)}$

$= \lim_{س \to 3} \frac{(س-3)(-س^2 + 3س + 12)}{(س-3)(س+3)(س^2 - 6س + 6)} = \lim_{س \to 3} \frac{-س^2 + 3س + 12}{(س+3)(س^2 - 6س + 6)}$

$= \frac{-9 + 9 + 12}{(6)(6)} = \frac{12}{36}$

و) $\lim_{س \to 5} \frac{|س^2 - 10س + 25|}{س - 5} = \lim_{س \to 5} \frac{|(س-5)^2|}{س - 5} = \lim_{س \to 5} \frac{|س-5|}{س-5}$

$\lim_{س \to 5^+} \frac{س-5}{س-5} = 1$ ، $\lim_{س \to 5^-} \frac{5-س}{س-5} = -1$

اذن $\lim_{س \to 5} \frac{|س-5|}{س-5}$ غ.م.ج

ن) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١}$ ع ٠م لأن البسط والمقام غير معرّفان في فترة مفتوحة تحوي العدد ١

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س^{٣} - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+٤)}{(س-١)(س^{٢}+س+١)} = \frac{٦}{٣} = ٢$

ط) $\lim_{س \to ٧^{+}} \frac{|س^{٢} - ٤٩|}{|س - ٧|} = \lim_{س \to ٧^{+}} \frac{|(س-٧)(س+٧)|}{|س-٧|} = \lim_{س \to ٧^{+}} |س+٧| = |١٤| = ١٤$

ك) $\lim_{س \to ٥،٥} \frac{س - [س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$ لإيجاد النهاية عند العدد ٥،٥ نجد أن $س - [س]$ تساوي $٥،٥ - ٥ = ٠،٥$

$\lim_{س \to ٥،٥} \frac{س - [س]}{(٢س-٥)(٢س+٥)} = \lim_{س \to ٥،٥} \frac{٠،٥}{(٢س-٥)(٢س+٥)} = \frac{١}{١٠}$

$\lim_{س \to ٥،٥} \frac{س - [س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$ ع ٠م

$\therefore \lim_{س \to ٥،٥} \frac{س - [س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$ ع ٠م

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1+س^2} - \sqrt{1-س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(1+س^2)-(1-س^2)}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})} = \lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})}$

$= \frac{2}{2} = 1$

٢) بما أن النهاية موجودة $\therefore$ م(٣) + ٥ = صفر $\Leftarrow$ م(٣) = -٥

$\lim_{س \to 2} [م(س) - ٢س^2 + ٣ب] = ٧$

$م(٣) - ٦ + ٣ب = ٧ \Leftarrow -٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ٧ + ١١$

$٣ب = ١٨$

$\Leftarrow ب = ٦$

٣) بما أن النهاية موجودة إذاً

$\lim_{س \to 3+} م(س) = \lim_{س \to 3-} م(س)$

$\lim_{س \to 2-} \frac{س^2 - ٤}{س - ٣} = -١ \Leftarrow \lim_{س \to 2-} د س - ٤ = ٩د - ٤$

$٩د - ٤ = -١ \Leftarrow ٩د = ٣ \Leftarrow د = \frac{١}{٣}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٤) بما ان النهاية موجودة

$$\text{①} \quad \cdots \quad 0 = 2 + 2ب + ا$$

$$ا + ا + ب2 = 1$$

$$\text{②} \quad \cdots \quad 1 = ب2 + ا2$$

بحل المعادلتين ① ، ②

$$ا = 3 \quad ، \quad ب = -\frac{5}{2}$$

٥) $$\lim_{س \to 0} \frac{(2س)^{ن} - 1}{س^{ن} - 1} = \lim_{س \to 0} \frac{2^{ن} - 1}{س^{ن} - 1}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{(2^{ن} - 1)(س^{ن} + 1)}{(س^{ن} - 1)} = \lim_{س \to 0} 2^{ن} + 1 = 2$$

٦) بما أن النهاية موجودة

$$\lim_{س \to 2^+} ه(س) = \lim_{س \to 2^-} ل(س)$$

$$\frac{ع^2 - 4}{ع^3 + 3ع^2 + 8} = ع + 5$$

$$\frac{(ع - 2)(ع + 2)}{(ع + 2)(ع^2 + ع + 4)} = ع + 5$$

$$ع - 2 = ع^2 + 10 \Leftarrow ع = -12 \Leftarrow ع = -12$$

٧) النهاية غير موجودة عند الصفر

$$س^3 - 5س + 6 = 0 \quad (س - 2)(س - 3) = 0$$

$$\text{فتم } ا : 2 ، 3$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٢س - ٣}{س^٣ - ٦س + ٥} = \frac{٣}{٤} - ب$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+٣)}{(س-١)^٢} = \frac{٣}{٤} - ب$ ... نهاية البسط والمقام $= ٠$

$\lim_{س \to ١} \frac{س+٣}{س-١} = \frac{٣}{٤} - ب$

$\frac{٤}{٨} = \frac{٣}{٤} - ب \Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} - ب \Leftarrow -ب = -\frac{١}{٢} \Leftarrow ب = ١$

٩) بما ان النهاية موجودة اذاً $د(٠) + ٥ = ٥$

$\lim_{س \to ٠} (د(س) - ٥ - ٣جـ) = ٢ \Leftarrow -٥ - ٥ - ٢جـ = ٢$

$-٢جـ = ٢ + ١٠$

$جـ = -٤$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

رابعًا : نهايات اقترانات مثلثية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} ٢س}{س} = ٢$

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}(س - \pi)}{(س - \pi)} = ١$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{ظا} س} = ١$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا} س}{س} = \frac{٢}{\pi}$

تدريب (٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{جا}٢س + \text{ظا}٢س}{٣س - \text{ظا}٥س}$ بقسمة جميع الحدود على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - \frac{\text{جا}٢س}{س} + \frac{\text{ظا}٢س}{س}}{٣ - \frac{\text{ظا}٥س}{س} \times \text{ظا}٥س} = \frac{١ - ٢ + ٥}{٣} = \frac{٤}{٣} = ١$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢} = \lim_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢})}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢}}{س^٢} = ٢ \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{س}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س + \text{جا}٤س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س}{س}$

$= ٨ + ٤ = ١٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤)

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}س}{س - \frac{\pi}{2}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)} = -١$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}س}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}س)}{-(١ - س)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(١ - س)}{(١ - س)} = -\frac{\pi}{٢}$

تمارين ومسائل

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٨س}{٤س} = \frac{٨}{٤}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س + \text{ظا}٢س - \text{جا}س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س} + \lim_{س \to ٠} \text{ظا}٢س \times \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$

$= ١ + ٢ - ١ = ٢$

٣) $\lim_{س \to ٠} (\text{قا}س + \text{ظا}٥س) = \lim_{س \to ٠} \text{قا}س + \lim_{س \to ٠} \text{ظا}٥س$

$= ١ + ٠ = ١$

٤) $\lim_{س \to ٠} ٧ س^{٢} \text{ظتا}^{٢}(٢س) \text{قتا}٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٧س^{٢}}{\text{ظا}^{٢}(٢س)} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا}٥س} = ٧ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٢٠}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - ٢\text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - (\text{جتا}^{٢}س + ١)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٤س - \text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^{٢}} - ٢\text{جا}٣س\text{جا}س$

$= -٦ \times ١ = -٦$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}س}{س \, \text{ظا}س} \times \frac{1 + \text{جتا}س}{1 + \text{جتا}س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س \, \text{ظا}س (1 + \text{جتا}س)}$ $= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س \, \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س} (1 + \text{جتا}س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا}س}$

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}س}{2س - \pi} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{2(س - \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{2}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}س - \text{جا}س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}$

$= 1 - 1 = \text{صفر}$

٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{جا}س}{(\pi - 4س)^2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{جا}س}{4(\frac{\pi}{4} - س)^2} \times \frac{1 + \text{جا}س}{1 + \text{جا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{جا}^2 س}{4(\frac{\pi}{4} - س)^2 (1 + \text{جا}س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 س}{4(\frac{\pi}{4} - س)^2 (1 + \text{جا}س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{4} - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{4} - س)}{(\frac{\pi}{4} - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \text{جا}س}$

$= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٩

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٧) $\lim_{س\to ٤} \frac{\text{ظا}(س+٤)}{س^٢-١٦} = \lim_{س\to ٤} \frac{\text{ظا}(س+٤)}{(س-٤)(س+٤)} = \lim_{س\to ٤} \frac{\text{ظا}(س+٤)}{(س+٤)} \times \lim_{س\to ٤} \frac{١}{س-٤}$

$= \frac{١}{٨} = \frac{١}{٨} \times ١ =$

١٨) $\lim_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^٢س}{١-\text{جتا}٢س} = \lim_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^٢س}{١-(١-٢\text{جا}^٢س)} = \lim_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^٢س}{٢\text{جا}^٢س}$

$\lim_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^٢س}{\text{جا}^٢س + \text{جا}^٢س} = \frac{١}{٢} \lim_{س\to ٠} \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جاس}}\right)^٢ = \frac{١}{٢}(١) = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢} \lim_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^٢س}{\text{جا}^٢س} = \frac{١}{٢}(-١)^٢ = \frac{١}{٢}$

∴ $\lim_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^٢س}{١-\text{جتا}س}$ غير موجود

١٩) $\lim_{س\to ٣\pi} \frac{\text{جاس}}{س-٣\pi} = \lim_{س\to ٣\pi} \frac{\text{جا}(٣\pi-س)}{(٣\pi-س)} = -\lim_{س\to ٣\pi} \frac{\text{جا}(٣\pi-س)}{(س-٣\pi)}$

$= -١$

٢٠) $\lim_{س\to ٠} \frac{س-٢}{\text{ظا}(س-٢)\pi} = \lim_{س\to ٠} \frac{س-٢}{\text{ظا}(٣\pi-٢\pi-س)} = \lim_{س\to ٠} \frac{س-٢}{\text{ظا}(س-٢)\pi} = \frac{١}{\pi}$

٢١) $\lim_{س\to -٣} \frac{\text{جا}(س+٣)}{س+٣} \cdot \lim_{س\to -٣} \frac{\text{جتا}\left(\frac{س-٣}{٢}\right)}{٢}$

$= \lim_{س\to -٣} \frac{\text{جا}\left(\frac{س+٣}{٢}\right)}{\frac{س+٣}{٢}} \times \lim_{س\to -٣} \text{جتا}\left(\frac{س-٣}{٢}\right)$

$= \text{جتا}(-٣)$

$= \text{جتا}٣$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٢٢) $\frac{ب}{ج} = \frac{٦}{٥-١} = ٦$ ، $ب = ١٢$ ، $\frac{ب^{٢}}{ج} = \frac{٩}{٦} = ب$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢٢ - ٢س)}{-٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢(١١ - س)}{-٥س} = \frac{-جا ٢س}{-٥س}$

$= \frac{٢}{٥}$

الفصل الثاني : الاتصال

أولاً : الاتصال عند نقطة .

تدريب (١)

١) د معرّفة عند $س = ٤$ $د(٤) = \frac{|٤-٤|}{٨} = صفر$

احسب $\lim_{س \to ٤}$ الدالة

$\lim_{س \to ٤^{+}} د(س) = \lim_{س \to ٤^{+}} \frac{س-٤}{|س-٤|} = صفر$

$\lim_{س \to ٤^{-}} د(س) = \lim_{س \to ٤^{-}} \frac{س-٤}{-(س-٤)} = صفر$

بما أن $\lim_{س \to ٤} د(س) = د(٤) = صفر$ ∴ د متصل عند $س = ٤$

تدريب (٢)

١) $س \in ط$ ط هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

تدريب (٣)

بما أن د متصل ∴ $\lim_{س \to -٢^{+}} د(س) = \lim_{س \to -٢^{-}} د(س) = د(-٢)$

$-٢ب + ٩ = ٦$ ---①

$٢ب + ٩ = ٦$ ---②

بحل المعادلتين ينتج $ب = \frac{٣}{٢}$ ، $ا = -\frac{١٢}{٦}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٥)

$$م(س) = \begin{cases} (س+٢)(س-٥) & ، \ س \leq ١ \\ ٣ - س^{٢} & ، \ س > ١ \end{cases}$$

$م$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ لأنها كثيرة حدود

$م$ قابلة للاشتقاق عند $س > ١$ لأنها كثيرة حدود

لاختبار القابلية عند $س = ١$

$$\text{هل } م' \overset{؟}{=} \text{هل}_{س \to ١^+} م' \ \ ؟ \ م'(١)$$

$$٣ \overset{؟}{=} ٣ \quad = \quad ٢$$

$\therefore$ $م$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

طريقة (٢)

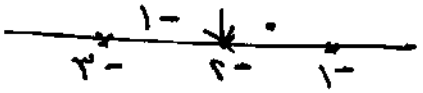
$م$ متصلة عند $س = ١$ لأن $\text{هل}_{س \to ١^+} م(س) = \text{هل}_{س \to ١^-} م(س) = م(١) = ٣$

$ل$ متصلة عند $س = ١$ لأن $\text{هل}_{س \to ١^+} ل(س) = \text{هل}_{س \to ١^-} ل(س) = ل(١) = ١$

$\therefore$ $م$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ (نظرية ٢)

تدريب (٦)

$$ه(س) = \begin{cases} (س-٥)^{٢} & ، \ س \geq -١ \\ -(س-٥)^{٢} & ، \ س < -٢ \end{cases}$$



$ه$ غير متصلة عند $س = -٢$ لأن:

$\text{هل}_{س \to -٢^+} ه = \text{هل}_{س \to -٢^-} ه = (-٢-٥)^{٢} \times -١ = -٤٩$

$ه$ غير متصلة عند $س = ٥$ لأن $\text{هل}_{س \to ٥^-} ه = (س-٥)^{٢} \times ٦$

$\text{هل}_{س \to ٥^+} ه \neq \text{هل}_{س \to ٥^-} ه$ ، في $\text{هل}_{س \to ٥^+} ه$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

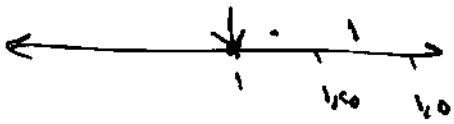
١) $س = -٥$ لأن $\lim_{س \to ٥} م(س) \neq م(٥)$

$س = ١$ لأن $\lim_{س \to ١^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١^-} م(س)$

$س = ٤$ لأن $م(٤)$ غير معرّفة

٣) $\lim_{س \to ١^+} م(س) = ١$

$\lim_{س \to ١,٥^-} م(س) = ٠$



بما أن $\lim_{س \to ١,٥^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١,٥^-} م(س)$ ∴ م غير متصل عند $س = ١,٥$

٣) م غير متصل عند $س = ١$ لأن $م(١)$ غير معرّفة

٤) م غير متصل عند $س = ٢$ لأن $م(٢)$ غير معرّفة

٥) $\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^+} (١ - جتا س) =$ صفر

$\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|س|}{س} = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٠^+} م(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} م(س)$ ∴ م غير متصل عند $س = ٠$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٦) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س-٢) = صفر$

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} |س-٢| = ١٩ - س^٢ = \lim_{س \to ٢^-} (٩-س^٢) = صفر$

$ل(٢) = صفر$

بما ان $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} ل(س) = ل(٢)$

$\therefore$ ل متصل عند $س = ٢$

٧) $م(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

بما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) \neq م(٢)$ $\therefore$ م غير متصل عند $س = ٢$

٨) $ك(٢) = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^+} ك(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ك(س) = صفر$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ك(س)$ غير موجود وعليه ك غير متصل عند $س = ٢$

٩) بما ان ع متصل عند $س = ٢$

فإن $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ع(٢)$

$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \frac{ب}{٢} + ٤$

$\frac{ب}{٢} + ٤ = ٥ \Leftarrow \frac{ب}{٢} = ١ \Leftarrow ب = ٢$

١٠) $ل(١) = ٤$ ، $\lim_{س \to ١^+} ل(س) = \lim_{س \to ١^+} \frac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س-١)(س^٢+٢س+٤)}{(س-١)} = ١٢$

$= ٧$

بما ان $ل(١) \neq \lim_{س \to ١^+} ل(س)$ $\therefore$ ل غير متصل عند $س = ١$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١١) $م(٢) = [٤+٢] = [٦] = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢} (\frac{٦}{٣} + \sqrt{٥+٤})$

$= ٢ + ٣ = ٦$

بما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) = م(٢)$

∴ م متصل عند $س = ٢$

١٢) $\lim_{س \to ٣^+} ل(س) = \lim_{س \to ٣^-} ل(س) = ل(٣)$

$٣- = ٤ + ب \Leftarrow ب = -٧$

١٣) $م(٣) = ٢ \times ٣ + ٥ = ٩ + ٥ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = ٢(٣)^٢ - ٤$

$= ٩ \times ٢ - ٤$

$= ١٤$

بما ان $\lim_{س \to ٣} م(س) \neq م(٣)$ ∴ م غير متصل عندما $س = ٣$.

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ثانياً: الاتصال على فترة

تدريب (١)

د متصل على الفترة $(0,2)$ على صورة كثير حدود.

د متصل على الفترة $(0,5)$ على صورة كثير حدود.

$\lim_{س \to 2^+} د(س) = 9$ ، $د(2) = 9$

$\lim_{س \to 5^-} د(س) = 25$ ، $د(5) = 25$ ، $\lim_{س \to 5^+} د(س) = 25$

اجعل في الاتصال د عند نقطة التجميع.

$\lim_{س \to 5^+} د(س) = 25$ ، $\lim_{س \to 5^-} د(س) = 25$ ، $د(5) = 25$

∴ د متصل عند $س = 5$ وبذلك د متصل على الفترة $[7,3]$

$\lim_{س \to 7^-} د(س) = 27$ ، $د(7) = 9$ د غير متصل عند نهاية

الفترة عند $س = 7$ وعليه د متصل على الفترة $[7,3]$

تدريب (٢)

١) د متصل على $ح - \{5\}$ على صورة اقتران لنفيي معرّف بالقاعدة

عند $س = 5$

$\lim_{س \to 5} د(س) = \lim_{س \to 5} \frac{س^2 - 25}{س - 5} = \lim_{س \to 5} \frac{(س-5)(س+5)}{(س-5)} = 10$

$د(5) = 5 + 5 = 10$

وبذلك د متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

تدريب (٣)

لكي تكون الاقترانة د.

د متصل على $(0.1, 0.1)$ على صورة كثير حدود.

$د = \begin{cases} 0.1 - س & 0.1 \geq س \\ س - 0.1 & 0.1 < س \end{cases}$

د متصل على $(0.1, 0.9)$ على صورة كثير حدود.

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عند نقطة الأولى.

$\lim_{س \to او^+} هـ(س) = \lim_{س \to او^+} (س - او) = او. - او. = صفر$

$\lim_{س \to او^-} هـ(س) = \lim_{س \to او^-} (او. - س) = صفر$

$هـ(او.) = صفر$.

$\therefore هـ$ متصل عند $س = او.$

عند الطرفية:

$\lim_{س \to ا.و^-} هـ(س)$

$س \to ا.و^- = او - ا.و = ٩٠ و$ ، $هـ(ا.و) = ٩٠ و$

$\therefore هـ$ متصل على يسار العدد ا.و.

$\lim_{س \to ٩و^+} هـ(س) = ٩و - او = ٨و$ ، $هـ(٩و) = ٩و - او.$

$س \to ٩و^+$

$\therefore هـ$ متصل على يمين العدد ٩ و

وعليه $هـ$ متصل على الفترة $[ا.و ، ٩و.]$

تدريب (٤)

بما أن الاقترانين $ع$ متصل على الفترة $[-٣π ، ٣π]$ $\therefore ع$ متصل عند $س = .$

وعليه $\lim_{س \to .^+} ع(س) = \lim_{س \to .^-} ع(س) = ع(٠)$

$ب(٢+٠) = \lim_{س \to .^-} \frac{جا ٢س}{٥س} = ٢$

$\frac{٢}{٥} ب = ٢ \Leftarrow$ $\boxed{ب = ١}$ ، $\boxed{ا = ١٠}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

١) هـ متصل على الفترة $(-٢، ١)$ على صورة كثير حدود.

هـ متصل على الفترة $(١، ٢)$ على صورة كثير حدود.

عند نقطة التماس

$\text{نها}_{س \to ١^+} هـ(س) = ٨$ ، $\text{نها}_{س \to ١^-} هـ(س) = ٣ + ٥ = ٨$

$هـ(١) = ٨$

∴ هـ متصل عند $س = ١$

عند الطرف ٢ :

$\text{نها}_{س \to -٢^+} هـ(س) = ١٧$ ، $هـ(-٢) = ١٧$

∴ هـ متصل على مجموعة العدد -٢

$\text{نها}_{س \to ١^-} هـ(س) = ٨$ ، $هـ(١) = ٨$

∴ هـ متصل على يمين العدد ١

ومنه هـ متصل على الفترة $[-٢، ١]$

٢) أحد تعريفي الاقتران ل

$$ل(س) = \begin{cases} ٢س - ١٠ & ٥ \leq س < ٨ \\ ١٠ - ٢س & ١ \leq س < ٥ \end{cases}$$

ل متصل على الفترة $(٥، ٨)$ والفترة $(-١٠، ٥)$ على صورة كثير حدود.

عند نقطة التماس

$\text{نها}_{س \to ٥^+} \text{جتا}(س) = \text{جتا}$ ، $\text{نها}_{س \to ٥^-} \text{جتا}(س) = \text{جتا}$ ، $\text{جتا}(٥) = \text{جتا}$

∴ هـ متصل عند $س = ٥$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عند الطرفين :

$\lim_{س \to -1^+} م(س) = ١٠ + ٢٠ = ٣٠$ ، $م(-١) = ٢٠$

$\therefore$ م متصل على يمين العدد -١٠

$\lim_{س \to ٨^-} م(س) = ١٦ - ١٠ = ٦$ ، $م(٨) = ٦$

$\therefore$ م متصل على يسار العدد ٨

ومنه م متصل على الفترة $[-١٠، ٨]$

٣) ع متصل على الفترة $(-٣، ٥)$ على مجموعة اقتران نسبي معرّف على مجاله

ع متصل على الفترة $(٣، ٥)$ على مجموعة اقتران كثير حدود.

عند $س = ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ع(س) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(س - ٣)}$

$= ٢٧$

بما أن $\lim_{س \to ٣^+} ع(س) \neq \lim_{س \to ٣^-} ع(س)$ $\therefore$ ع غير متصل عند $س = ٣$

ومنه ع متصل على $ح - \{٣\}$

٤) ل متصل على الفترة $(-٥، ٤)$ جذر تربيعي معرّف

ل متصل على الفترة $(٤، ٥)$ متصل (فيه مطلقة)

عند نقطة التحوّل $س = ٤$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

$\lim_{س \to 4^+} ل(س) = \lim_{س \to 4^+} (س^2 - 4) = 12$ ، $\lim_{س \to 4^-} ل(س) = \lim_{س \to 4^-} (س + 4) = 8$ ، $ل(4) = 12$

$\therefore$ ل متصل عند $س = 4$

ومنه ل متصل على الفترة $(-\infty ، \infty)$

٥) $\lim_{س \to 4^-} ع(س) = 8$ ، $ع(4) = 4$

$\therefore$ ع غير متصل عند $س = 4$ من جهة اليسار

$\lim_{س \to 2^+} ع(س) = 8$ ، $ع(2) = 5$

$\therefore$ ع غير متصل عند $س = 2$ من جهة اليمين

ع متصل على الفترة $(4 ، 13)$ على الرغم من وجود عدد لا نهائي من النقاط الحرجة

ومنه ع متصل على الفترة $(4 ، 13)$

٦) $م$ متصل على الفترة $(0 ، 10)$ اقتران جذره معرّف على مجاله

بما الفترة $(2 ، 6)$ موجبة فنقطة تحوّل عند $س = 4$

$\lim_{س \to 4^+} م(س) = 2$ ، $\lim_{س \to 4^-} م(س) = 2$

$\therefore$ $م$ غير متصل عند $س = 4$

عند الطرف

$\lim_{س \to 0^+} م(س) = 2$ ، $م(0) = 1$

$\therefore$ $م$ غير متصل على يمين العدد 0

$\lim_{س \to 6^-} م(س) = 2$ ، $م(6) = 3$

$\therefore$ $م$ متصل على يسار العدد 6

ومنه $م$ متصل على الفترة $(0 ، 6] - \{4\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ب) لجعل الاقتران ع متصل :

$$\lim_{س \to ٢} ع(س) = ٧$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} = ٧$$

بما ان المقام معدوم ∴ (س-٢) عامل من عوامل البسط

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٣ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ)}{(س-٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٢(هـ-١))}{(س-٢)} = ٧$$

$$٢ + ٢ + ٢(هـ-١) = ٧$$

$$٢(هـ-١) = ٣$$

$$هـ - ١ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \boxed{هـ = \frac{٥}{٢}}$$

ج) ع متصل على الفترة $(-\infty, ٢)$ لأنه كثير حدود

ع متصل على الفترة $[٢, ٤]$ اقتران خطي

ع متصل على الفترة $(٤, \infty)$ اقتران نسبي معرف على مجاله.

عند الخرج

$$\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٤ \quad ه(٢) = ٣$$ ∴ ه غير متصل عند س = ٢

$$\lim_{س \to ٤^-} ه(س) = ٣ \quad ، \quad \lim_{س \to ٤^+} ه(س) = \frac{٢٠}{٢٦-١٦} = \frac{٢٠}{-١٠} = -٢$$

∴ ه غير متصل عند س = ٤

مدى ه متصل على ح − {٢، ٤}

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٩) في الفترة $(-١،٠)$ $م$ متصل في جميع قيم $س$ حيث $-١ < س < ٠$

في الفترة $(٠،٢)$ $م$ متصل (مجموع اقترانين متصلين)

نقطة التحول $س = ٠$

$\text{نها}_{س \to ٠^+} م(س) = ٣$ ، $\text{نها}_{س \to ٠^-} م(س) = -١$

$\therefore م$ غير متصل عند $س = ٠$

الاقتران :

$م(س) = -٢$ ، $س \le -١$

$م(س) = \frac{١٢}{٥} + ٢س$ ، $س > -٢$

$م(-٢) = -٢$

$\frac{١٢}{٥} + ٢س = م(-٢)$

$م$ متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية

$م$ متصل على مجال العدد -١

$\frac{١٢}{٥} + ٢س = م(-٢)$

$م$ متصل على مجال العدد -٢

ومنه $م$ متصل على الفترة $[-١،٢] - \{٠\}$

١٠) يكون الاقتران التربيعي مقداراً موجباً لجميع الأعداد الحقيقية

إذا كانت المميز $ب^٢ - ٤أجـ < ٠$

للمقام

$١ - ٤ \times ٩ \times ٣ < ٠$

$١ - ٩١٢ < ٠ \Leftarrow ٩١٢ > ١$

ثم $م$ التي تحقق المتباينة $م > \frac{١}{١٢}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

أسئلة الوحدة

١) أ) $\lim_{س \to 0^+} ق(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to 0^-} ق(س) = -٢$

ج) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٤$

هـ) $م = \{٠، ٢، ٤\}$

و) $ب = \{٠، ٢، ٤\}$

٢) اكتب $ق(س) = ٢س + ١$ ، $س = ١$ ، $ل = ٣$

$\lim_{ل \to ٣} ق(ل) - \lim_{س \to ١} ق(س) = ١٧ = ١ + ١٦ = ٢ + ١٤$

٣) بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

$٩ - ٤ = ١$

$٩ = ٣ \Leftarrow ٩ - ٤ = ١$

$\frac{١}{٣} = ه$

٤) حتى تكون النهاية موجودة : $(س - ٢)$ عامل من عوامل البسط

$٠ = ٩ + ٢ \times (١٣ + ٩) + ٤$

$٠ = ٩ + ٢٦ + ٩٢ + ٤$

$٠ = ٣٩ + ٣ \Leftarrow ٩ = -١٠$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) بما أن $\lim_{س \to ٥} م(س)$ موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥^+} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} م(س)$

$$\lim_{س \to ٥^+} \frac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} = \lim_{س \to ٥^+} \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)} = ٦$$

$س^٢ - ٤س - ٥$ ، $س^٢ + ٤س + ٥$ ، $س^٢ - ٤س - ٥$

١- ٥

$\lim_{س \to ٥^-} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} ٢ جتا \frac{\pi}{٥} س + ب = ٦$

$٢ + ب = ٦ \Leftarrow ب = ٤$

$\boxed{ب = ٤}$

٦) م) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{١ - جتا٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{(١ - ١ + ٢جا^٢س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{٢جا^٢س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{٢ جاس جاس}$

$= \frac{١}{٢} \times ١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{جاس} \left(\frac{س - جاس}{جاس}\right) = \frac{١}{٢} \times ١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{جاس} \left(\frac{س}{جاس} - ١\right)$

$= \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ (١ - ١) = ٠$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{٢ جاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{٢} \left(\frac{س}{جاس} - \frac{جاس}{جاس}\right)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{١ - جتا٢س} = ٠$ عندما $م$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{س + \text{جا}٢س}{٣س} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{٣س} + \frac{\text{جا}٢س}{٣س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{٣س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٢س}{٣س} = \frac{١}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{١}{(١-س)} \left(\frac{١}{\text{لا}س} - ١ \right) = \lim_{س \to ١} \frac{١}{١-س} \left[\frac{١ - \text{لا}س}{\text{لا}س} \right]$

$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{(١-س)} \frac{(١ - \text{لا}س)}{\text{لا}س (\text{لا}س + ١)} = \frac{-١}{٢}$

د) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٣س}{١ - \sqrt{\text{لا}س + ١}} = \lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٣)}{-١ - \text{لا}س + ١}$ بالضرب بمرافق المقام

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٣)}{-\text{لا}س + ١} \times \frac{١ + \text{لا}س + ١}{١ + \text{لا}س + ١} = \lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٣)\left[\text{لا}س + ١ + (س-١)\right]}{(١+س) - (س-١)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٣)\left[\text{لا}س + ١ + (س-١)\right]}{٢}$

$= \frac{١٢}{٣} = ٤$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا } \left(\frac{\pi}{4} - س\right) \times \frac{\text{جا } \left(\frac{\pi}{4} + س\right)}{\text{جا } \left(\frac{\pi}{4} - س\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ط) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{1 - \text{جتا}^2 س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س - 1}{\text{جتا}^2 س - 1} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{1 - \text{جتا}^2 س}$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{\text{جا}^2 س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{\text{جا} س \times \text{جا} س}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{\text{جا} س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{س}{\text{جا} س}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 = 1$$

ي) $\text{نها}_{هـ \to 0} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} + هـ\right) - 1}{هـ} = \text{نها}_{هـ \to 0} \frac{-\text{جا} هـ}{هـ} = -1$ (تعريف المشتقة)

$= \text{مشـ}(\text{جتا} س)$ عندما $س = \frac{\pi}{3}$

$= -\text{جا} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ك) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا} 3س - \text{جتا} 5س}{س^2} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{-2\text{جا} 4س \text{ جا}(-س)}{س^2}$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{8\text{جا} 4س \text{ جا} س}{8 س^2} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 4س}{4س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س}$$

$$= 4 \times 1 = 4$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٢) بالضرب على مقام المجموع الكسري

$$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ع س}{س} - \frac{ا ب س}{س}}{\frac{ب س}{س} - \frac{٤ ا س}{س}} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{ع - ب}{ب - ٤ ا} = \frac{١}{٤} \Leftarrow$$

$$-٤ ب = ب - ٤ \Leftarrow -٥ ب = -٤ \Leftarrow ب = \frac{٤}{٥}$$

ا) $\lim_{س \to ٤} ق(س) = \lim_{س \to ٤} \frac{|س^٢ - ٤|}{س - ٤}$ اعتبر أن النهاية عند س = ٤ من اليسار

$$\lim_{س \to ٤^+} \frac{|س^٢ - ٤|}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)} = ٤$$

$$\lim_{س \to ٤^-} \frac{|س^٢ - ٤|}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤ - س^٢}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(س - ٤)} = -٤$$

∴ ق غير متصل عند س = ٤

$$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = \lim_{س \to ٢^+} [٥ و - س + ٢] = ٤$$

$$\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \lim_{س \to ٢^-} ا س - ١ = ١ - ١ = ٠$$

∴ $\lim_{س \to ٢} ع(س)$ غير موجود

وبالتالي ع غير متصل عند س = ٢

ب) $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} ل(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} -٦ س - [س] = ٢$

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} ل(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} \frac{٩ س^٢ - ١}{|٢ س - ١|} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} \frac{(٣ س - ١)(٣ س + ١)}{-(٢ س - ١)}$$

$$= \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} \frac{(٢ س - ١)(٣ س + ١)}{١ - ٢ س} = -(-١ \times ٠) = ٢$$

∴ ل(−١/٢) = ٢ ∴ ل متصل عند س = −١/٢

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١١) ع(س) = $\sqrt{س+١}$ متصل على الفترة (٢،١) اقترانا جبريا كسرسما

حيث عرّف على مجاله .

ابحث نيا اتصال ع على سياج العدد ٣

$\lim_{س \to ٣^+}$ ع(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ $\sqrt{س+١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

$\lim_{س \to ٣^-}$ ع(س) = $\sqrt{٣+١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

ع(٣) = $\sqrt{٣+١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

بما ان $\lim_{س \to ٣}$ ع(س) = ع(٣) ∴ ع متصل على سياج العدد ٣

وصلت ع متصل على الفترة (٢،١)

١٢) هـ متصل على الفترة (-∞،١) على مجموعة كثيرة حدود .

هـ متصل على الفترة (١،∞) لانه حاصل قسمة كثيرة حدود بافتراض

حيث كسرسما مقامه لا يساوي صفرا مهما ا .

ابحث نيا اتصال هـ عند س = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ س + ١ = ١ + ١ = ٢

$\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ $س^٢$ = ١

بما ان $\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) ≠ $\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) ∴ هـ غير متصل عند س = ١

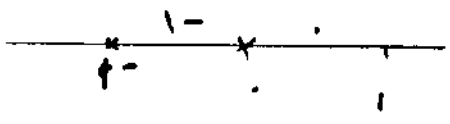
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(١٣) $م$ متصل على الفترة $(-٢، -١)$ على الصورة اقترانين كسريين مختلفين على مجاله

اثبت بالمثال $م$ على الفترة $(-١، ١)$

يوجد نقطة تشعب عند $س = ٠$

$م$ متصل على الفترة $(-١، ٠)$ على الصورة $س + ١$



$م$ متصل على الفترة $(٠، ١)$ على الصورة $٢س - ١$

اثبت بالمثال عند $س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} م(س) = صفر$ ، $\lim_{س \to ٠^-} م(س) = ٠$

$م(٠) = ٠$ ∴ $م$ متصل عند $س = ٠$ وعليه $م$ متصل على $(-١، ١)$

عند نقطة التشعب $س = -١$

$\lim_{س \to -١^+} م(س) = \lim_{س \to -١^+} [س] = -١$

$\lim_{س \to -١^-} م(س) = \lim_{س \to -١^-} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} (س - ١) = -٢$

∴ $م$ غير متصل عند $س = -١$

عند الطرف $س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^+} م(س) \overset{؟}{=} م(-٢)$

$\lim_{س \to -٢^+} \frac{س^٣ + ١}{س + ٢} = \lim_{س \to -٢^+} \frac{(س + ١)(س^٢ - س + ١)}{(س + ٢)} = -٣$

$م(-٢) = -٣$

∴ $م$ متصل عند $س = -٢$ من جهة اليمين

وعليه $م$ متصل على الفترة $[-٢، ١) - \{-١\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٤) $ل \times هـ = \begin{cases} 0 & ، س < 1 \\ \frac{س - 1}{س + 2} & ، 1 \le س < 2 \\ 1,5 & ، س = 2 \end{cases}$

$ل \times هـ$ متصل على الفترة $(1,0)$ لأنه كثير حدود

$ل \times هـ$ متصل على الفترة $(2,1)$ لأنه دالة القوان لسيما مقام غير

المتصل الوحيد عند نقطة التحول

عند $س = 1$

$\lim_{س \to 1^+} ل \times هـ = صفر$ ، $\lim_{س \to 1^-} ل \times هـ = صفر$ ، $ل \times هـ(1) = 0$

$\therefore ل \times هـ$ متصل عند $س = 1$

عند الأطراف

$\lim_{س \to 0^+} ل \times هـ = 0$ ، $ل \times هـ(0) = 0$ $\therefore ل \times هـ$ متصل لأنه يحقق الشرط

$\lim_{س \to 2^-} ل \times هـ = \lim_{س \to 2^-} \frac{س - 1}{س + 2} = \frac{3}{4}$ ، $ل \times هـ(2) = 1,5$

بما أن $\lim_{س \to 2^-} ل \times هـ \neq ل \times هـ(2)$ $\therefore ل \times هـ$ غير متصل لأنه

العدد 2 ينتمي $ل \times هـ$ متصل على الفترة $[0,2]$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(١٥

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ج	ج	ب	د	ج	د	د	ج	ج	ب

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

الفصل الأول : متوسط التغير والمشتقات

أولاً : متوسط التغير

تدريب (١)

١) $\Delta س = ٣,٧ - ٤ = -٠,٣$

٢) $\Delta س = ن + ١ - ن = ١$

تدريب (٢)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٢,١) - هـ(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{(٢,١)^٢ - ٥ - (٢^٢ - ٥)}{٠,١}$$

$$= \frac{٠,٤١}{٠,١} = ٤,١$$

تدريب (٣)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٥ - ٣} = \frac{-١ - ٠}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

تدريب (٤)

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٣} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$$

تدريب (٥)

معدّل التغير $= ظا ١٣٥° = -١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\Delta ص = هـ(٤) - هـ(٣) = ١٢ - ٦ = ٦$

ب) $\Delta ص = هـ(٢ + هـ) - هـ(٢) = (٢ + هـ)^٢ - ١ - (٢^٢ - ١)$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٢ - هـ - ٤ + ٢ = هـ^٢ + ٣هـ$

(٢) معدّل التغير $= \frac{هـ(١ + هـ) - هـ(١)}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٣ - ٣ - (١ - ٣)}{هـ}$

$= \frac{١ + هـ^٣ + ٣هـ - ٣ - ١ + ٣}{هـ} = هـ + ٣$

(١٦)

تدريب (٦)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{(١٣ - ص(٤) + ٢) - (٣ - ص(١) + ٢)}{٣}$$

$$= \frac{(١٣ + ٣ - ٣ - ٢) - (ص(٤) - ص(١))}{٣} = \frac{٩}{٣} - \frac{ص(٤) - ص(١)}{٣}$$

$$= ٣ - ٦ = -٣$$

(٤)

(٣) س = ٢ − ١٫٠ = ١٫٩

ص = ٥ − ٠٫٦ = ٤٫٤

النقطة P(١٫٩ ، ٤٫٤)

(٤) نفرض طول ضلع المربع س وحدة ∴ م(س) = س٢

معدّل التغير = $\frac{م(١٫٦) - م(٦)}{١٫٠ - ٦}$ = $\frac{٢٫٥٦ - ٣٦}{٠٫١}$

= $\frac{١٫٤٤}{٠٫١}$ = ١٤٫٤ سم٢

(٥) معدّل التغير = $\frac{م(٢) - م(-١)}{٢ - (-١)}$ = $\frac{٤ \times ٤ - ٣ م(٢) - (٤ \times ١ - ٣ م(-١))}{٣}$

= $\frac{١٦ - ٤ - ٣(م(٢) - م(-١))}{٣}$ = $\frac{١٢}{٣} - ٣ \times \frac{م(٢) - م(-١)}{٣}$

= ٤ − ٣ × ٥ = −١١

(٦) أ) $\bar{ع}$ = $\frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$ = $\frac{٣٠٠ - ١٢٥ - (١٢٠ - ٢٠)}{٣}$

= $\frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣}$ = $\frac{٧٥}{٣}$ = ٢٥

ب) $\bar{ع}$ = $\frac{ف(٥ن) - ف(٠)}{٥ن}$ = $\frac{٦٠ ٥ن - ٥(٥ن)^٢}{٥ن}$

= $\frac{٥ ٥ن (١٢ - ٥ن)}{٥ن}$ = ٥ (١٢ − ٥ن)

(٧) معدّل التغير = $\frac{م(٤) - م(١)}{٤ - ١}$ = $\frac{م^٢(٤) - م^٢(١)}{٣}$

= $\frac{(م(٤) - م(١))(م(٤) + م(١))}{٣}$

= $\frac{م(٤) - م(١)}{٣} \times (م(٤) + م(١))$ = ٣ × ٢ = ٦

(٢)

٨) $\frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٩-٥} = ١٤$ ، $هـ(٩)-هـ(٥) = ٥٦$

$\frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٥-٢} = ٧$ ، $هـ(٥)-هـ(٢) = ٢١$

معدّل التغير $= \frac{هـ(٩)-هـ(٢)}{٩-٢} = \frac{هـ(٩)-هـ(٥)+هـ(٥)-هـ(٢)}{٧}$

$= \frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٧} + \frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٧} = \frac{٥٦}{٧} + \frac{٢١}{٧} = ١١$

٩) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = ظا\frac{٣}{٤}\pi$

$هـ(٤)-هـ(١) = -١$ ، $هـ(١) = ٥$

١٠) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = \frac{[٤+١]-١٠-١٣}{٣}$

$= \frac{٥-١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١١) $هـ(س) = \frac{١}{س^٢+س}$ ، $س \neq ٠$

مقدار التغير $= هـ(س_٢)-هـ(١) = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} = \frac{١}{٦}$ ، $س_٢^٢+س_٢ = ٦$

$س_٢^٢+س_٢-٦ = ٠$ ، $(س_٢+٣)(س_٢-٢) = ٠$

إذن $س_٢ = ٢$ ، -٣ يُهمل

١٢) ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١٠-٢}{٥-١} = ٢$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$

ثانياً: المشتقة الأولى

التدريبات

(١) أ) $\text{هـ}'(-١) = \lim_{ص \to ٠} \frac{\text{هـ}(-١+ص) - \text{هـ}(-١)}{ص} = \lim_{ص \to ٠} \frac{(-١+ص)^{٣} + ٢(-١+ص) - (-٣)}{ص}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ص^{٣} - ٣ص^{٢} + ٣ص - ١ - ٢ + ٢ص + ٣}{ص}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ص(ص^{٢} - ٣ص + ٥)}{ص} = ٥$

ب) نفرض $٥ص = ل$ ومنه $ص = \frac{ل}{٥}$ ، $ل \to ٠$ عندما $ص \to ٠$.

$\lim_{ص \to ٠} \frac{\text{هـ}(٠) - \text{هـ}(٥ص)}{٣ص} = \lim_{ل \to ٠} \frac{\text{هـ}(٠) - \text{هـ}(ل)}{\frac{ل}{٥}}$

$= -٥ \lim_{ل \to ٠} \frac{\text{هـ}(ل) - \text{هـ}(٠)}{ل} = -٥\,\text{هـ}'(٠) = -٣٠$

(٢) $\text{هـ}'(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{\frac{س}{س+١} - \frac{٢}{٣}}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣س - ٢(س+١)}{٣(س+١)(س-٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{٣(س+١)(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{١}{٣(س+١)} = \frac{١}{٩}$

(٣) $\text{هـ}'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(-١)}{س - (-١)} = \lim_{س \to -١} \frac{٤س + ١ - (-٣)}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٤س + ٤}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{٤(س+١)}{س+١} = ٤$

$س = ١$ نقطة تفرع

$\text{هـ}'(١) = \lim_{س \to ١^{-}} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^{-}} \frac{٤س + ١ - ٥}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^{-}} \frac{٤(س-١)}{س-١} = ٤$

$\text{هـ}'_{+}(١) = \lim_{س \to ١^{+}} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^{+}} \frac{٢س - ٣ + ٥}{س - ١} = \lim_{س \to ١^{+}} \frac{٢(س-١)}{س-١} = ٢$

$\text{هـ}'(١)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}'(١) \neq \text{هـ}'_{+}(١)$

(٤)

$$(٤)\quad \text{ه}'(س) = \lim_{س \to ٤} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س^٢ + ٨} - \frac{٤}{٤^٢ + ٨}}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{٤(س^٢ + ٨) - س(٤^٢ + ٨)}{(س - ٤)(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)} = \lim_{س \to ٤} \frac{٤س^٢ + ٣٢ - س٤^٢ - ٨س}{(س - ٤)(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{٤(س - ٤)(س - ٨)}{(س - ٤)(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)} = \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٨ - ٤س)}{(س - ٤)(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)}$$

$$= \frac{٨ - س^٢}{(س^٢ + ٨)^٢}$$

ثما رين وحسائل

(أ) ٩) $\text{ه}'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{ه}(٣ + هـ) - \text{ه}(٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ٥(٣ + هـ) - (-٧)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ١٥ - ٥هـ + ٧}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٥هـ}{هـ} = -٥$$

ب) $\text{ه}'(-١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{ه}(-١ + هـ) - \text{ه}(-١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(-١ + هـ)^٣ + (-١ + هـ)^٢ - ٠}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٣ - ٣هـ^٢ + ٣هـ - ١ + ١ - ٢هـ + هـ^٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٣ - ٢هـ^٢ + هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ^٢ - ٢هـ + ١)}{هـ} = ١$$

ج) $\text{ل}'(٥) = \lim_{س \to ٥} \frac{\text{ل}(س) - \text{ل}(٥)}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س - ١} + ٢}{\sqrt{س - ١} + ٢} = \lim_{س \to ٥} \frac{س - ١ - ٤}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)} = \lim_{س \to ٥} \frac{١}{(\sqrt{س - ١} + ٢)} = \frac{١}{٤}$$

(٤)

تدريب (٥)

نفرض طول ضلع المصفوفة س ومساحتها م(س)

فيكون م(س) = س²

$$م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^2 - س^2}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع + س) = ٢س$$

م'(١٠) = ٢ × ١٠ = ٢٠ وحدة مربعة

(٥)

ج) $هـ(٠)$ ، $هـ(٦)$ غير موجودة لأنه $س = ٠$ ، $س = ٦$ طرفي فترة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$هـ'(٣) = \lim_{س \to ٣} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{س - ٣} = ٥$$

$$هـ'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥س - ٩ - ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥(س - ٣)}{س - ٣} = ٥$$

$هـ(٣) = ٥$ لأنه $هـ'_+(٣) = هـ'(٣) = ٥$

د) نعيد تعريف $هـ(س)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤ & س < -٢ \\ ٤ - س^٢ & -٢ \le س \le ٢ \\ س^٢ - ٤ & س > ٢ \end{cases}$$

$$هـ'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{هـ(س) - هـ(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س^٢ - ٣}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{-(س^٢ - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{-(س - ١)(س + ١)}{س - ١} = -٢$$

$س = ٢$ نقطة تفرع

$$هـ'(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢ - ٠}{٢ - س}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{٢ - س} = \lim_{س \to ٢} -(٢ + س) = -٤$$

$$هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤ - ٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٤$$

$هـ(٢)$ غير موجودة لأنه $هـ'(٢) \neq هـ'(٢)$

و) $$هـ'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{هـ(س) - هـ(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{٤ - س^٢}{٣ + س} - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س^٢ + س - ٢}{٣ + س}}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{(س + ١)(س + ٢)}{(س + ٣)(س + ١)} = \frac{١}{٢}$$

(٦)

ج) $\frac{ص}{ص}$ $=$ $\lim_{س \to ع} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$ $=$ $\frac{ع^٣ - ٣ع - ع س^٣ + ٣ع}{ع - س}$

$= \lim_{س \to ع} \frac{ع^٣ - \frac{ع}{ع} - (س^٣ - \frac{س}{س})}{ع - س}$ $= \lim_{س \to ع} \frac{ع - س}{ع - س}$

$= \lim_{س \to ع} \frac{ع س (ع^٢ - س^٢) - ٣(س - ع)}{ع س (ع - س)}$ $= \lim_{س \to ع} \frac{(ع - س)(ع س (ع + س) + ٣)}{ع س (ع - س)}$

$= \frac{٣ + ٣ع}{ع^٢}$

د) $م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$ $= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع - ٦} - \sqrt{٢س - ٦}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع - ٦} - \sqrt{٢س - ٦}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦}}{\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(٢ع - ٦ + ٢س - ٦)}{(ع - س)(\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦})}$ $= \lim_{ع \to س} \frac{(٢ع - ٦) - (٢س - ٦)}{(ع - س)(\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦})}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦}}$ $= \frac{١}{٢\sqrt{٢س - ٦}}$ $= \frac{١}{\sqrt{٨س - ٢٤}}$

٣) $م'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س - هـ)}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س) + م(س) - م(س - هـ)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س) - م(س - هـ)}{هـ}$ ← بفرض $ص = -هـ$

$= م'(س) + \lim_{ص \to ٠} \frac{م(س + ص) - م(س)}{-ص}$ $= م'(س) + م'(س)$

$= ٢ م'(س)$

د) $\lim_{ع \to س} \frac{ع م(س) - س م(ع)}{ع - س}$ $= \lim_{ع \to س} \frac{ع م(ع) + ع م(س) - ع م(ع) - س م(ع)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع م(ع) - س م(ع)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{ع م(س) - ع م(ع)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{م(ع)(ع - س)}{ع - س} - \lim_{ع \to س} \frac{ع(م(ع) - م(س))}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} م(ع) - \lim_{ع \to س} ع \cdot م'(س) = م(س) - س م'(س)$

(٦)

السؤال (٢)

ه) $\frac{ص}{س} = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{٢} + ع س + س^{٢})}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع^{٢} + ع س + س^{٢}) = ٣ س^{٢}$

و) $\frac{ص}{س} = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt[٣]{ع} - \sqrt[٣]{س}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt[٣]{ع} - \sqrt[٣]{س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع س} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع س} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع س} + \sqrt[٣]{س^{٢}})} = \frac{١}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}}$

(٧) جـ) $\lim_{س \to ع} \frac{٢ع\, ق(ع) - ٣س\, ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢ع\, ق(ع) - ع\, ق(س) + ع\, ق(س) - س\, ق(س)}{ع - س}$

$= ٣ \lim_{ع \to س} \frac{ع[ق(ع) - ق(س)]}{ع - س} + ٢ \lim_{ع \to س} \frac{ق(س)(ع - س)}{ع - س}$

$= ٣س\, ق'(س) + ٢ ق(س)$

٤) $\lim_{ه \to ٠} \frac{ق(٥ - ٢ه) - ق(٥ + ٤ه)}{ه} = \lim_{ه \to ٠} \frac{ق(٥) + ق(٥ - ٢ه) - ق(٥ + ٤ه) - ق(٥)}{ه}$

$= - \lim_{ه \to ٠} \frac{ق(٥ + ٤ه) - ق(٥)}{ه} + \lim_{ه \to ٠} \frac{ق(٥ - ٢ه) - ق(٥)}{ه}$

نفرض $٤ه = م$ ومنها $ه = \frac{م}{٤}$ ، نفرض $-٢ه = ل$ ومنها $ه = -\frac{ل}{٢}$

$= - \lim_{م \to ٠} \frac{ق(٥ + م) - ق(٥)}{\frac{م}{٤}} + \lim_{ل \to ٠} \frac{ق(٥ + ل) - ق(٥)}{-\frac{ل}{٢}}$

$= -٤ \lim_{م \to ٠} \frac{ق(٥ + م) - ق(٥)}{م} - ٢ \lim_{ل \to ٠} \frac{ق(٥ + ل) - ق(٥)}{ل}$

$= -٤ ق'(٥) - ٢ ق'(٥) = -٦ ق'(٥) = -٣٦$

(٥) $ق'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{ق(س) - ق(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{(س - ٩) ل(س) - ٠}{س - ٩}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{س - ٩} \times \lim_{س \to ٩} ل(س) = ل(٩)$

(٦) نفرض طول نصف القطر $(نق)$ ، الارتفاع $(ع)$

فيكون $ع = نق + ٢$

$م(نق) = ٢ \pi نق^٢ ع = ٢ \pi نق^٢ (نق + ٢)$

$= ٢ \pi نق^٣ + ٤ \pi نق^٢$

$م'(٦) = \lim_{نق \to ٦} \frac{م(نق) - م(٦)}{نق - ٦} = \lim_{نق \to ٦} \frac{٢ \pi نق^٣ + ٤ \pi نق^٢ - ٩٦ \pi}{نق - ٦}$

$= ٢ \pi \lim_{نق \to ٦} \frac{نق^٣ + ٢نق^٢ - ٤٨}{نق - ٦} = ٢ \pi \lim_{نق \to ٦} \frac{(نق - ٦)(نق + ٨)}{نق - ٦} = ٢٨ \pi$

(٧) $ق'(س) = \lim_{ه \to ٠} \frac{٦ - (س + ه)^٢ - ٣(س + ه) - (٦ - س^٢ - ٣س)}{ه} = \lim_{ه \to ٠} \frac{٦ - س^٢ - ٢سه - ه^٢ - ٣س - ٣ه - ٦ + س^٢ + ٣س}{ه}$

$ق'(-٢) = ٦ - ٤ = ٢$

(٧)

(٨) نفرض طول ضلع المكعب ل وحدة فيكون ح(ل) = ل³

$$\text{ه}'(ج) = \lim_{ل \to ج} \frac{ح(ل) - ح(ج)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} \frac{ل^3 - ٨}{ل - ج}$$

$$= \lim_{ل \to ج} \frac{(ل - ج)(ل^2 + ج ل + ج^2)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} (ل^2 + ج ل + ج^2) = ١٢$$

(٩) نفرض طول نصف قطر الكرة نق وحدة ، ح(نق) = $\frac{٤}{٣}$ π نق³

$$\text{ه}'(\text{نق}) = \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{ح(ع) - ح(\text{نق})}{ع - \text{نق}} = \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{\frac{٤}{٣}\pi ع^3 - \frac{٤}{٣}\pi \text{نق}^3}{ع - \text{نق}}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{ع^3 - \text{نق}^3}{ع - \text{نق}} = \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to \text{نق}} \frac{(ع - \text{نق})(ع^2 + \text{نق} ع + \text{نق}^2)}{ع - \text{نق}}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to \text{نق}} (ع^2 + \text{نق} ع + \text{نق}^2) = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ \text{نق}^2 = ٤ \pi \text{نق}^2$$

ثالثاً : الاتصال والاشتقاقية

التدريبات

(١) ١) س = ٠ نقطة تفرّع

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^+} (\frac{٤}{س} + ١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-} (٥س - ١) = ٩$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} هـ(س)$

إذن هـ غير متصل عند س = ٠

٢) $هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤}{س} + ١ - ٣}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤ - ٢س}{س}}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-٢(س - ٢)}{س(س - ٢)} = -١$

$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١ - ٩}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥(س - ٢)}{س - ٢} = ٥$

هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٠ لأن $هـ'_-(١) \neq هـ'_+(٢)$

(٢) نبحث الاتصال عند س = ٠ لأنها نقطة تفرّع

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^+} (س^٢ - ١) = -١$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-} \sqrt{س + ١} = \sqrt{١} = ١$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ غير موجودة وعليه هـ غير متصل عند س = ٠

إذن هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٠ حسب النظرية

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١ - ١٥}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٨$

(٩)

تمارين ومسائل

(١) أ) $هـ$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$ لأن $هـ$ غير متصل عند $س = ١$

ب) نبحث الاتصال لـ $هـ$ عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٠$ ، إذن $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٠$

$هـ(٢) = ٠$ ، $هـ$ متصل عند $س = ٢$ لأن $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س - ٢ & ؛ س \leq ٢ \\ ٢(س - ٢) & ؛ ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

$هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢(س - ٢) - ٠}{س - ٢} = ٢$

$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$

$هـ'(٢)$ غير موجودة لأن $هـ'_+(٢) \neq هـ'_-(٢)$

ج) نجد تعريف لـ $ل(س)$

بفرض $هـ(س)$ هي قاعدة تجد كل قيمة لها $\frac{١}{٢}$ واحدة.

$$ل(س) = \begin{cases} ٥ & ؛ س \leq -١ \\ ٤ & ؛ -١ < س \leq -\frac{١}{٢} \\ ٣ & ؛ -\frac{١}{٢} < س \leq ٠ \\ ٢ & ؛ ٠ < س \leq \frac{١}{٢} \end{cases}$$

$\lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{ل(س) - ل(\frac{١}{٤})}{س - \frac{١}{٤}} = \lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{٢ - ٢}{س - \frac{١}{٤}} = ٠$

$س = -١$ نقطة تفرع. نبحث الاتصال عند $س = -١$

$\lim_{س \to -١^-} ل(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to -١^+} ل(س) = ٤$

$\lim_{س \to -١} ل(س)$ غير موجودة وعليه $ل$ غير متصل عند $س = -١$

$ل$ غير قابل للاشتقاق عند $س = -١$ لأنه غير متصل عند هذه النقطة

(١٠)

(أ) $د$ غير قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$ ، $س = ٥$ تسمى طرفا فترة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ٣^+} د(س) = \lim_{س \to ٣^+} (٦س - ٣) = ١٥$$

$$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ + ٤س) = ١٥$$

$\lim_{س \to ٣} د(س) = ١٥$ ، $د(٣) = ١٥$ ، إذن $د$ متصل عند $س = ٣$

$$د'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{د(س) - د(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦س - ٣ - ١٥}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$$

$$د'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{د(س) - د(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ + ٤س - ١٥}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} = ٨$$

$د'(٣)$ غير موجودة لأن $د'_+(٣) \neq د'_-(٣)$

(ب) نبحث اتصال $د$ عند $س = ٩$

$$\lim_{س \to ٩} د(س) = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣} = ٦$$

$د(٩) = ٦$ ، $د$ متصل عند $س = ٩$ لأن $\lim_{س \to ٩} د(س) = د(٩) = ٦$

$$د'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - د(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} - ٦}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩ - ٦(\sqrt{س} - ٣)}{(\sqrt{س} - ٣)(س - ٩)}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٦\sqrt{س} + ٩}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)(س - ٩)} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)^٢}{(\sqrt{س} - ٣)^٢ (\sqrt{س} + ٣)}$$

$$= \frac{١}{٦}$$

(ج) $د$ متصل عند $س = ١$ لأن $د(١)$ موجودة

$$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^+} د(س)$$

$$\lim_{س \to ١^-} س^٢ = \lim_{س \to ١^+} (أ س + ب)$$

$$١ = أ + ب \quad \text{ومنه} \quad أ = ٢ \quad ، \quad ب = -١$$

(٤) عندما $س = -١$

د متصل لجميع قيم $س \neq -١$ لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-١ - ٢ع - (-١ - ٢س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢س - ٢ع}{ع - س} = -٢ \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = -٢$$

عندما $-١ < س < ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = ٢س$$

عندما $س > ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$$

$س = -١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to -١^+} د(س) = \lim_{س \to -١^+} س^٢ = ١$$

$$\lim_{س \to -١^-} د(س) = \lim_{س \to -١^-} (-١ - ٢س) = ١$$

$\lim_{س \to -١} د(س) = ١ = د(-١)$ ، د متصل عند $س = -١$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١^-} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} \frac{-١ - ٢س - ١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١^-} \frac{-٢(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١^+} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$د'(-١) = -٢$

$س = ١$ نقطة تفرع

$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} س^٢ = ١$ ، $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} س = ١$

$\lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ١$. د متصل عند $س = ١$

(١٣)

$$\text{هـ}_+'(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س+١)(س-١)}{س-١} = ٢$$

$$\text{هـ}_-'(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{س - ١}{س - ١} = ١$$

$\text{هـ}'(١)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_-'(١) \neq \text{هـ}_+'(١)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} -٢ & س \leq -١ \\ ٢س & -١ < س \leq ١ \\ ١ & س = ١ \\ \text{غير موجودة} & ١ < س < ٢ \end{cases}$$

(٥) نبحث الاتصال هـ عند $س = ٢$

$$\lim_{س \to ٢^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٢^+} (٢س - س^٢) = ٠$$

$$\lim_{س \to ٢^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٢^-} (س^٢ - ٢س) = ٠$$

$\lim_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٢) = ٠$ ، هـ متصل عند $س = ٢$

$$\text{هـ}_+'(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢س - س^٢}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س(٢ - س)}{س - ٢} = -٢$$

$$\text{هـ}_-'(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ٢س}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س(س-٢)}{س - ٢} = ٢$$

$\text{هـ}'(٢)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_+'(٢) \neq \text{هـ}_-'(٢)$

(٦) عندما $س \to ٠$ ، هـ متصل لأنه ثابت

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٠}{ع - س} = \text{صفر}$$

عندما $س = ٤$ ، $\text{هـ}(س) = ٥ - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}[٤] - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٥ - ع - (٥ - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-(ع - س)}{ع - س} = -١$$

عندما $س > ٤$ ، $\text{هـ}(س)$ متصل تماما عند $س = ٥$ لأنه اقتران نسبي

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{٥ - ع} - \frac{١}{٥ - س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٥ - س - (٥ - ع)}{(٥ - ع)(٥ - س)(ع - س)} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(٥ - ع)(٥ - س)} = \frac{١}{(٥ - س)^٢}$$

نبحث الاستمرارية عند نقاط التشعب

عند $س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٥ - س) = ٥$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-} صفر = صفر$

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} هـ(س)$ غير موجودة وعليه $هـ$ غير متصل عند $س = ٠$.

اذن $هـ(٠)$ غير موجودة .

$س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{١}{٥ - س} = ١ \neq \lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^-} (٥ - س) = ١$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ١$ ، $هـ(٤) = ١$. $هـ$ متصل عند $س = ٤$

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{١}{٥ - س} - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{١ - (٥ - س)}{(٥ - س)(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{(٥ - س)(س - ٤)} = ١$

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٥ - س - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤ - س}{س - ٤} = -١$

اذن $هـ'(٤)$ غير موجودة . مما سبق

$هـ(س) = \begin{cases} ٠ & س \leq ٠ \\ ١ - & ٠ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ ، ٤ ، ٥ \\ \frac{١}{(٥ - س)^٢} & س > ٤ \end{cases}$

(٧) $هـ(س) = \begin{cases} ١ & ١ \leq س < ٢ \\ ٢ - س & ٢ \leq س \leq ٣ \\ س - ٣ & ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

$هـ(١)$ ، $هـ(٤)$ غير موجودة لأن $س = ١$ ، $س = ٤$ طرفي فترة

عندما $١ < س < ٤$ ، $هـ(س)$ متصل لأن اقتران ثابت

$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{١ - ١}{ع - س} = ٠$

(١٤)

عندما ٢ < س < ٣ ، هـ(س) = ٢ - س متصل لأنه كثير حدود

هـ(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢ - ع - (٢ - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{س - ع}{ع - س} = -١$

عندما ٣ < س < ٤

هـ(س) = س - ٣ متصل لأنه كثير حدود

هـ'(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - ٣ - (س - ٣)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$

نقاط التفرع ، س = ٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ هـ(س) = ١ ، $\lim_{س \to ٢^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (٢ - س) = ١

$\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = ١ = هـ(٢) . هـ متصل عند س = ٢

هـ'$_+$(٢) = $\lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٣ - س - ١}{س - ٢} = -١$

هـ'$_-$(٢) = $\lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{١ - ١}{س - ٢} =$ صفر

هـ'(٢) غير موجودة لأن هـ'$_+$(٢) ≠ هـ'$_-$(٢)

عند س = ٣

$\lim_{س \to ٣^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ (٢ - س) = ٠ ، $\lim_{س \to ٣^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ (س - ٣) = ٠

$\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٠ ، هـ(٣) = ٠ . إذن هـ متصل عند س = ٣

هـ'$_+$(٣) = $\lim_{س \to ٣^+} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣ - ٠}{س - ٣} = ١$

هـ'$_-$(٣) = $\lim_{س \to ٣^-} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{٣ - س - ٠}{س - ٣} = -١$

هـ'(٣) غير موجودة لأن هـ'$_+$(٣) ≠ هـ'$_-$(٣)

هـ(س) = $\begin{cases} ٠ & ١ < س < ٢ \\ -١ & ٢ < س < ٣ \\ ١ & ٣ < س < ٤ \end{cases}$

غير موجودة عندما س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

(١٥)

رابعاً : قواعد الاشتقاق ١

التدريبات

(١) أ) $\frac{د}{دس}(ق) = ٠$ ب) $\frac{د}{دس}(-٨س) = -٨$ ج) $\frac{د}{دس}(\frac{١}{٢٧}) = ٠$

(٢) $ق(س) = ١٠س^{٥} - ١٥س^{٣}$

$ق'(س) = ٥٠س^{٤} - ٤٥س^{٢}$ ، $ق'(-١) = ٥٠ - ٤٥ = ٥$

(٣) أ) $ق(س) = ٨س^{٤} - ١٠س^{٥}$ ، $ق'(س) = ٣٢س^{٣} - ٥٠س^{٤}$

ب) عند $س = ٤٠$ ، $ق(س) = ٢ + س$

$ق'(س) = ١$ ، $ق'(٤٠) = ١$

ثانياً : مسائل

(١) أ) $ق'(س) = ٠$ ب) $ص' = ٤٠س^{٣}$

ج) $ص' = ٠$ د) $ق(س) = \frac{١}{١٦}س^{٤}$ ، $ق'(س) = \frac{١}{٤}س^{٣}$

(٢) أ) $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٣$ ب) $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٤}(٢س) = \frac{١}{٢}س$

ج) $\frac{دص}{دس} = ١٢٤س^{٢}$ د) $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٢س - ١$

(٣) أ) $ق(س) = ٢س^{٣}$ ، $ق'(-١) = -٦$

ب) عند $س = ٣$ ، $ق(س) = س^{٢} + ٣س - ٦$

$ق'(س) = ٢س + ٣$ ، $ق'(٣) = ٦ + ٣ = ٩$

ج) عند $س = ٤,٢$ ، $ق(س) = ٦ - ٤س^{٢}$

$ق'(س) = -٨س$ ، $ق'(٤,٢) = -٨ \times ٤,٢ = -١٩,٢$

د) عند $س = -١$ ، $ق(س) = ٣س - ١ - (-س) = ٤س - ١$

$ق'(س) = ٤$ ، $ق'(-١) = ٤$

(٤) أ) $ق'(س) = ٦ ل'(س) - ٢ ط'(س)$

$ق'(-٢) = ٦ ل'(-٢) - ٢ ط'(-٢) = ٦ \times ٤ - ٢ \times -٣ = ٣٠$

ب) $ق'(س) = \frac{١}{٢} ل'(س) + ط'(س) + ٣س^{٢}$

$ق'(-٢) = \frac{١}{٢} ل'(-٢) + ط'(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ - ٣ + ١٢ = ١١$

(١٦)

(٥) $مه(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + ٢س & س < ١ \end{cases}$

مه (١) موجودة ، إذن مه متصل عند س = ١

$\lim_{س \to ١^{-}} مه(س) = \lim_{س \to ١^{+}} مه(س)$

$٢ + ب = ٤ - ب + ٢$ ومنه ب = ٢

$مه(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ٢س & س \geq ١ \\ ٤ - ٢س & س < ١ \end{cases} = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ب س & س < ١ \end{cases}$

$مه'_{+}(١) = مه'_{-}(١)$ لأن مه (١) موجودة

$٤ + ٢ = ٤ - ٢$ ، $ب = -٦$

(٦) مه (س) متصل عند س = ح بالفرض

$مه(س) = \begin{cases} ل(س) & س \geq ح \\ ل(ح) & س < ح \end{cases}$

$مه'_{+}(ح) = ل'(ح)$ ، $مه'_{-}(ح) = ل'(ح)$

$مه'_{+}(ح) = ل'(ح) = مه'_{-}(ح)$

إذن مه قابل للاشتقاق عند س = ح وأن مه (ح) = ل (ح)

خامساً: قواعد الاشتقاق

التدريبات

(١) $هـ'(س) = (٤ - ٢س^{٣})(\frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢}س + ٣)(-٦س^{٢})$

$= ٢ - س^{٣} - ٣س^{٣} - ١٨س^{٢} = ٢ - ٤س^{٣} - ١٨س^{٢}$

(٢) $\frac{ص}{س} = \frac{(س^{٢} - ٤)(٦) - (٦س + ١)(٢س)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{٦س^{٢} - ٢٤ - ١٢س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

$= \frac{-٦س^{٢} - ٢س - ٢٤}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

(٣) أ) $ص = \frac{-٢\sqrt{٣}س}{٣س^{٤}} = \frac{-٢\sqrt{٣}}{٣س^{٣}}$

ب) $ص = \frac{-٢}{س} - س^{٢}$ ، $ص' = \frac{٢}{س^{٢}} - ٢س$

فكّر وناقش $هـ'(س) = \frac{س^{٣}(٤س^{٣}) - (س^{٤} - ٢)(٣س^{٢})}{س^{٦}} = \frac{٤س^{٦} - ٣س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}}$

$= \frac{س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{س^{٤} + ٩}{س^{٤}} = ١ + \frac{٩}{س^{٤}}$

(٤) $هـ'(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س > ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$

$هـ'_{+}(١) = ١$ ، $هـ'_{-}(١) = \frac{-٤}{٤} = -١$. $هـ'(١)$ غير موجودة

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$

(١٨)

تمارين وصائل

(١) أ) $ص' = س^٤(٣-س^٢) + (١+س^٣)(-٢س)$

$= ٣س^٤ + ٢س - ٢س^٤ = ٥س^٤ + ٢س$

ب) $ص' = (-٢س^٣ - ٢س + ١)(٤) + (٤س - ٣)(-٦س^٢ - ٢)$

$= -٨س^٣ - ٨س + ٤ + ٢٤س^٣ - ٨س - ٩س^٢ + ٦$

$= ١٦س^٣ - ٩س^٢ - ١٦س + ١٠$

ج) $ص' = \frac{(١-س)(-٢س) - (١-س^٢)(-١)}{(١-س)^٢} = \frac{-٢س^٢ + ٢س + ١ - س^٢}{(١-س)^٢}$

$= \frac{-٣س^٢ + ٢س + ١}{(١-س)^٢}$

د) $ص' = \frac{(٢س+٣)(٢س) - (س^٢-١)(٢)}{(٢س+٣)^٢}$

$= \frac{٤س^٢ + ٦س - ٢س^٢ + ٢}{(٢س+٣)^٢} = \frac{٢س^٢ + ٦س + ٢}{(٢س+٣)^٢}$

(٢) أ) $ن(س) = (س^٢ + ٢س)(س^٢ - ٣س - ٦)$

$ن'(س) = (٢س + ٢)(س^٢ - ٣س - ٦) + (س^٢ + ٢س)(٢س - ٣)$

$= ٢س^٣ - ٣س^٢ + ٤س^٢ - ٦س + ٢س^٣ - ٦س^٢ - ١٢س$

$= ٤س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س$

ب) $ن'(س) = \begin{cases} (س-٣)(س^٢+٤س) & س \geq ٣ \\ (٣-س)(س^٢+٤) & س < ٣ \end{cases} = \begin{cases} ٤س^٣ + ٣س^٢ - ١٢س & س \geq ٣ \\ -٤س^٣ - ٣س^٢ + ١٢س & س < ٣ \end{cases}$

$ن'(س) = \begin{cases} ٤س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س & ، س \geq ٣ \\ -٤س^٣ - ٣س^٢ + ١٢س & ، س < ٣ \end{cases}$

$ن'_+(٣) = ٢٧ - ٢٧ - ٣٦ = -٣٦$ ، $ن'_-(٣) = -٢٧ + ٢٧ + ٣٦ = ٣٦$

$ن'(س) = \begin{cases} ٤س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س & ، س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \\ -٤س^٣ - ٣س^٢ + ١٢س & ، س < ٣ \end{cases}$

(١٩)

ج) $\text{ه}'(س) = \frac{(س^2+٤)(٢س-٢) - (س^2-٢س+٤)(٢س)}{(س^2+٤)^2}$

$= \frac{٢س^3 - ٢س^2 + ٨س - ٨ - ٢س^3 + ٤س^2 - ٨س}{(س^2+٤)^2} = \frac{٢س^2 - ٨}{(س^2+٤)^2}$

د) $\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{-(س-١)(س-٤)}{س(س-١)} & \text{إذا } س < ٤ \\ \frac{(س-١)(س-٤)}{س(س-١)} & \text{إذا } س \geq ٤ \text{ ، } س \neq ٥ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{٤-س}{س} & \text{إذا } س < ٤ \\ \frac{س-٤}{س} & \text{إذا } س \geq ٤ \text{ ، } س \neq ٥ \end{cases} = \begin{cases} ١ - \frac{٤}{س} & \text{إذا } س < ٤ \\ \frac{٤}{س} - ١ & \text{إذا } س \geq ٤ \text{ ، } س \neq ٥ \end{cases}$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س^2} & \text{إذا } س < ٤ \\ -\frac{٤}{س^2} & \text{إذا } س > ٤ \text{ ، } س \neq ٥ \end{cases}$

$\text{ه}'_+(٤) = \frac{١}{٤}$ ، $\text{ه}'_-(٤) = -\frac{١}{٤}$ ، $\text{ه}'(٤)$ غير موجودة

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} -\frac{٤}{س^2} & \text{إذا } س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ٤ \\ \frac{٤}{س^2} & \text{إذا } س > ٤ \text{ ، } س \neq ٥ \end{cases}$

(٣) أ) $\text{ه}(س) = س\,\text{ق}(س) + \text{د}(س)$

$\text{ه}(٢) = ٢\,\text{ق}(٢) + \text{د}(٢) = ٢ \times -١ + ٣ = ١$

ب) $\text{ه}(س) = ٢س^3 \times \text{ق}(س) + \text{د}(س) \times ٦س - ٥$

$\text{ه}'(٢) = ١٢ \times -١ + ٣ \times ١٢ - ٥ = ١٩$

ج) $\text{ه}(س) = \text{ق}(س) + \frac{\text{د}(س)}{(\text{د}(س))^2}$

$\text{ه}'(٢) = \text{ق}'(٢) + \frac{\text{د}'(٢)}{(\text{د}(٢))^2} = -١ + \frac{-٢}{٩} = -\frac{١١}{٩}$

د) $\text{ه}'(س) = \frac{٣\,\text{د}(س) \times ٢ - (٢س+١)(٣\,\text{د}'(س))}{(٣\,\text{د}(س))^2}$

$\text{ه}'(١) = \frac{٦\,\text{د}(١) - ١٥\,\text{د}'(١)}{(٣\,\text{د}(١))^2} = \frac{١٨ + ١٥}{٢٧} = \frac{٣٣}{٢٧} = \frac{١١}{٩}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(٤) أ) $هـ'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$ (٢٠)

$هـ'(-٢) = ل(-٢) \times ق'(-٢) + ق(-٢) \times ل'(-٢)$

$= ٢ \times -٦ + ٤ \times -١ = -١٢$

ب) $هـ'(س) = \frac{[ل(س)+١]\, ق'(س) - ق(س) \times ل'(س)}{(ل(س)+١)^{٢}}$

$هـ'(-٢) = \frac{[ل(-٢)+١]\, ق'(-٢) - ق(-٢) \times ل'(-٢)}{(ل(-٢)+١)^{٢}}$

$= \frac{٤ \times -٦ - ٤ \times -١}{(-٣+١)^{٢}} = \frac{-٢٠}{١٦} = -\frac{٥}{٤}$

(٥) أ) نعيد تعريف $هـ(س)$ حول $س = ١,٤$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٣$

$هـ'(س) = ٢س$ ، $هـ'(١,٤) = ٢,٨$

ب) نعيد تعريف $ه(س)$ حول $س = ٢$ ، $ه(س) = \frac{٣}{١ - ٢س}$

$ه'(س) = \frac{-٣ \times -٢}{(١-٢س)^{٢}}$ ، $ه'(٢) = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^{٢}-٤)(٣)(٢س+١) - (٣س^{٢})(٢)}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$هـ'(-١) = \frac{-٣ \times ٣ \times ١ - ٦}{(-٣)^{٢}} = \frac{-٩-٦}{٩} = -\frac{٢}{٣}$

(٦) $\frac{د}{دس}(ل(س) \times م(س) \times ق(س)) = \frac{د}{دس}((ل(س) \times م(س)) \times ق(س))$

$= (ل(س) \times م(س)) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) \times م(س))'$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) م'(س) + م(س) ل'(س))$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ل(س) \times ق(س) \times م'(س) + م(س) \times ل'(س) \times ق(س)$

(٧) نضع $ل(س)$ بدلاً من $م(س)$ ، $ق(س)$ في السؤال السادس ينتج

$\frac{د}{دس}(ل(س))^{٣} = ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س)$

$= ٣(ل(س))^{٢} \cdot ل'(س)$.

(٨) $\text{مـ}(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & س \le ١ \\ ٦س & س > ١ \end{cases}$ (ج١)

$\text{مـ}_{+}(١) = ٦$ ، $\text{مـ}_{-}(١) = ١٢$. اذ لا $\text{مـ}(١)$ غير موجودة

$\text{مـ}(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & س < ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ٦س & س > ١ \end{cases}$

(٩) نعيد تعريف $\text{مـ}(س)$

$$\text{مـ}(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+٦س) & س \ge ٠ \\ -س(س^{٢}+٦س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+٦س^{٢} & س \ge ٠ \\ -س^{٣}-٦س^{٢} & س < ٠ \end{cases}$$

$$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

$\text{مـ}'_{+}(٠) = ٠$ ، $\text{مـ}'_{-}(٠) = ٠$ ، اذ لا $\text{مـ}(٠) = ٠$

$$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

(١٠) مـ متصل عند $س = ج$ لأنه قابل للاشتقاق عند $س = ج$

$$\text{نهـا}_{س \to ج^{+}} \text{مـ}(س) = \text{نهـا}_{س \to ج^{-}} \text{مـ}(س)$$

$$٤ب^{٢}+٨ب+ج = ٤ب^{٢}-٢ب+ج \quad \text{ومنه } ٣ب+٩ = ٠ \quad \cdots (١)$$

$$\text{مـ}(س) = \begin{cases} ٢ج س - ب & س \ge ج \\ -٣ب س^{٢}+٩ & س < ج \end{cases}$$

$\text{مـ}'_{+}(ج) = \text{مـ}'_{-}(ج)$

$$٤ب^{٢}-ب = -١٢ب+٩ \quad \text{ومنه } ٤٣ب+١١ = ٠ \quad \cdots (٢)$$

$٤٣ب+١١ = ٠$ ... (٢)

$٩+٣ب = ج$ ... (١) بالتعويض في (٢) نحل المطلوب

$٢ب = -٦$ ومنه $ب = -٣$

نجد $ج$ من معادلة (١) : $ج = ٩-٣ب = ٩+٩ = ١٨$

سادساً: المشتقات العليا

التدريبات

(١) أ) $ه(س) = ١٥س^{٢} - ٨س + ٦$

$ه'(س) = ٣٠س - ٨$ ، $ه'(-١) = -٣٠ - ٨ = -٣٨$

(٢) $ه(س) = \frac{ن}{١٠} س^{ن-١}$ ، $ه'(س) = \frac{ن(ن-١)}{١٠} س^{ن-٢}$

$ه''(س) = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$٩ س^{٢} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$ن - ٣ = ٢ \Leftarrow ن = ٥$ ، $٩ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١٠} = ٦$

(٣) $ه(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & س \geq ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

١) $ه'_{+}(٠) = ٠$ ، $ه'_{-}(٠) = ٠$ ، $\because ه'(٠)$ موجودة وتساوي صفر

$ه''_{+}(٠) = ٠$ ، $ه''_{-}(٠) = ٠$ ، $\therefore ه''(٠)$ موجودة وتساوي صفر

٢) $ه(س) = \begin{cases} ٣س^{٤} & ، س \geq ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$

٣) $ه''(س) = \begin{cases} ٦ & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

$ه''_{+}(٠) = ٦$ ، $ه''_{-}(٠) = ٠$ ، $\because ه''(٠)$ غير موجودة

تدريبات (١) فرع ج)

$ه(س) = س^{٦} + ١٤س^{٤} - ٣س^{٣} + ١٠س + س^{٢} + ٧$

$ه'(س) = ٦س^{٥} + ٥٦س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٠س - ١٠$

$ه''(س) = ٣٠س^{٤} + ١٦٨س^{٢} - ١٨س + ٢٠$

$ه''(-١) = ٣٠ + ١٦٨ + ١٨ + ٢٠ = ٤٨٠$

(٤٢)

تمارين ومسائل

(١) أ) $ص = ٤س^{٣} - ٧س - ٦$

$ص' = ١٢س^{٢} - ٧$

ب) $ص = س + \frac{١}{س}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

ج) $ه(س) = \begin{cases} س(س+٣)(س+٤) & س \geq ٠ \\ -س(س+٤)(س+٢) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣} + ٧س^{٢} + ١٢س & س \geq ٠ \\ -س^{٣} - ٦س^{٢} - ٨س & س < ٠ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ١٤س + ١٢ & س > ٠ \\ -٣س^{٢} - ١٢س - ٨ & س < ٠ \end{cases}$

$ه'_{+}(٠) = ١٢$ ، $ه'_{-}(٠) = -٨$ ، $\because ه'(٠)$ غير موجودة.

$ه''(س) = \begin{cases} ٦س + ١٤ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ -٦س - ١٢ & س < ٠ \end{cases}$

د) $ه(س) = (س^{٢} + ٤س)(٣س^{٢} + ١)(س + ٤)$

$= ٣س^{٤} + ١٢س^{٣} + س^{٢} + ٤س^{٣} + ١٦س^{٢} + س + ٤$

$= ٥س^{٤} + ١٦س^{٣} + ١٧س^{٢} + س + ٤$

$ه''(س) = ٢٠س^{٣} + ٤٨س^{٢} + ٣٤س + ١$

$ه''(-١) \times ه'(-١) = (-٢٠ + ٤٨ - ٣٤ + ١)(٥ - ١٦ + ١٧ - ٤ + ١)$

$= ٣٠ \times ٩ = -٢٧٠$

(٣) $ه(س) = س^{ن}$ ، $ه'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ه''(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ه'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣} = ٤س$ وعندما $ن - ٣ = ١$ فإن $ن = ٤$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$

(٤) $ص = \frac{-٢}{س^{٢}}$ ، $ص' = \frac{-٢ \times -٢س}{س^{٤}} = \frac{٤}{س^{٣}}$ ، $ص'' = \frac{-١٢س^{٣}}{س^{٨}} = \frac{-١٢}{س^{٥}}$ ، $ص^{٣} = \frac{-٦٠}{س^{٦}}$ (٤)

(٥) $ه(س) = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س - ١$

$ه'(س) = ١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢$

أ) $١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢ = ٠$ ، $س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(س - ١)(س + ٢) = ٠$ ومنه $س = -٢ ، \frac{١}{٢}$

ب) مجموعة $P : (س - ١)(س + ٢) > ٠$

$س \in (-\infty ، -٢) \cup (\frac{١}{٢} ، \infty)$

ج) مجموعة $P : (٢ - س)(س + ٢) < ٠$

$س \in (-٢ ، \frac{١}{٢})$

(٦) أ) $ص = ٤س^{٣} + ١٥س^{٢} - ٦$

$ص' = ١٢س^{٢} - ٩٠س^{٧}$ ، $ص'' = ٤٢س + ٦٣٠س^{٨}$

ب) $ص = ٣٢س^{٢} + ٢٠س + ٥$

$ص' = ٦٤س + ٢٠$ ، $ص'' = ٦٤$

(٧) أ) $ه'(س) = ٢س - ٦$ ، $ه'(س) = ٢$

$ه''(س) =$ صفر ، $ه''(\pi) =$ صفر

ب) $ه(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٢}$

$ه'(س) = س^{٣} - ٢س$ ، $ه'(-١) = -١ + ٢ = ١$

ج) $ه(س) = -\frac{١}{س^{٤}}$ ، $ه'(س) = \frac{٤س}{س^{٤}} = \frac{٤}{س^{٣}}$

$ه''(س) = \frac{-٤ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-١٢س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-١٢}{س^{٤}}$

$ه^{(٤)}(س) = \frac{٦ \times ٤ \times ٣س}{س^{٨}} = \frac{٤٨}{س^{٥}}$ ، $ه^{(٤)}(١) = ٤٨$

(٥٤)

(٨) $هـ(س) = س^٢ ل(س) + ل(س) \times ٢س$

$هـ'(س) = س^٢ ل'(س) + ل(س) \times ٢س + ٢س \times ل(س)$

$= س^٢ ل'(س) + ٤س ل(س) + ٢ ل(س)$

$هـ''(س) = س^٢ ل''(س) + ل'(س) \times ٢س + ٤س \times ل'(س) + ٤ ل(س) + ٢ ل'(س)$

$= س^٢ ل''(س) + ٦س ل'(س) + ٦ ل(س)$

(٩) $(ل \times ق)'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$

$[ل \times ق)''(س) = ل(س) \times ق''(س) + ق'(س) \times ل'(س) + ق(س) \times ل''(س) + ل'(س) \times ق'(س)$

$= (ل \times ق)''(س) + ٢ (ل' \times ق')(س) + (ل \times ق'')(س)$

(١٠) $هـ(س) = ٣س^٢ + ب س + ح$

$هـ(١) = ٣$ ومنه $٣ + ب + ح = ٣$ ... (١)

$هـ'(س) = ٦س + ب$

$هـ'(١) = -٢$ ومنه $٦ + ب = -٢$ ... (٢)

$هـ''(س) = ٦$

$هـ''(١) = ٤$ ومنه $٦ = ٤$

من معادلة (٢) : $ب = -٨$ ومن معادلة (١) : $ح = ٦$

(١١) $ق'(س) = (ل(س) ق(س) - ل'(س) ق(س))$

$= ل(س) ق'(س) + ق(س) ل'(س) - (ل'(س) ق(س) + ق(س) ل'(س))$

$= ل(س) ق'(س) - ل'(س) ق(س)$

(١٢) $ق(س) = ل(س) هـ(س) + هـ(س) ل'(س)$

$ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ'(س) ل(س) + هـ(س) ل'(س) + ل'(س) هـ(س)$

$= ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل''(س) + ٢ ح$ حيث $ل + هـ = ح$

$ل''(س) + هـ''(س) = ٠$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على

$ل''(س) هـ'(س) + هـ''(س) ل'(س) = ٠$

$ق''(س) = ل(س) هـ''(س) + هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ''(س) + هـ(س) ل''(س)$

(٥٢)

١٣) $ق'(س) = ٤ب س^{٣} - \frac{١٦}{س^{٢}}$

$ق''(س) = ١٢ب س^{٢} + \frac{١٦ \times ٢ س}{س^{٤}} = ١٢ب س^{٢} + \frac{٣٢}{س^{٣}}$

$ق'''(س) = ٢٤ب س - \frac{٣٢ \times ٢ س^{٢}}{س^{٦}} = ٢٤ب س - \frac{٩٦}{س^{٤}}$

$ق'''(١) = ٩٠$ ، $٢٤ب - ٩٦ = ٠$

$٢٤ب = ٩٦$ وضح $ب = \frac{١}{٦}$

١٤) $ق'(س) = ٨ - ٨(م-٣) س$

$ق''(س) = -٨(م-٣)$

$-٨(م-٣) < ٠$ ، $م-٣ > ٠$ وضح $م > ٣$

سابعاً : مشتقة الاقترانات المثلثية

التدريبات

(١) $هـ(س) = ٤ جتا س + ٦$

$هـ(\frac{\pi}{٣}) = ٤ \times \frac{١}{٢} + ٦ = ٨$

(٢) $هـ(س) = س جتا س + جا س$

$هـ(\frac{\pi}{٢}) = \frac{\pi}{٢} \times ٠ + ١ = ١$

(٣) $هـ(س) = ظا س = \frac{١}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{-(-جا س)}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا س} \times \frac{جا س}{جتا س} = ظا س ظا س$

$هـ(س) = ظتا س = \frac{١}{جا س}$

$هـ(س) = \frac{-جتا س}{جا^٢ س} = -\frac{١}{جا س} \times \frac{جتا س}{جا س} = -ظتا س ظتا س$

$هـ(س) = ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{جتا س \times جتا س - جا س \times -جا س}{جتا^٢ س}$

$= \frac{جتا^٢ س + جا^٢ س}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} = قا^٢ س$

(٤) $هـ(س) = ظا س ظا س + ظا^٢ س$

$هـ(\frac{\pi}{٦}) = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٢$

تمارين ومسائل

(١) أ) $ص' = ٣ جتا س + جا س$

ب) $ص' = س^٢ جتا س + جا س \times ٢ س$

$= س^٢ جتا س + ٢ س جا س$

ج) $ص' = \frac{جتا س - س \times - جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا س + س جا س}{جتا^٢ س}$

د) $ص' = ظا^٢ س - \sqrt{٣}$ ، هـ) $ص = ١$ ، $ص' = ٠$

و) $ص' = -ظتا س ظتا س - (س \times -ظتا^٢ س + ظتا س \times ١)$

$= ظتا س ظتا س + س ظتا^٢ س - ظتا س$

ز) $ص' = جتا س$ ، $ص'' = -جا س = -ص$

$ص'' + ٦ ص = -ص + ٦ ص = ٥ ص$

(٣) أ) $م'(س) = جا س (-جا س) + جتا س جتا س$

$= جتا^٢ س - جا^٢ س$

$م'(\frac{\pi}{٣}) = (\frac{١}{٢})^٢ - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ب) $م(س) = -جا س + جتا س$ ، $م'(س) = -جتا س - جا س$

$م'(\frac{\pi}{٤}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

ج) $م'(س) = \frac{(١ + جا س)(-جا س) - جتا س جتا س}{(١ + جا س)^٢}$

$= \frac{-جا س - جا^٢ س - جتا^٢ س}{(١ + جا س)^٢} = \frac{-جا س - ١}{(١ + جا س)^٢}$

$م'(\pi) = \frac{-جا \pi - ١}{(١ + جا \pi)^٢} = -١$

د) $م'(س) = س جا س ظا س + ظا س$

$م'(\frac{\pi}{٦}) = \frac{\pi}{٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\pi}{٩} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هـ) $م'(س) = \frac{جا س (ظا^٢ س + ١) - (ظا س + س) جتا س}{جا^٢ س}$

$م'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}(٤ + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣}) \times \frac{١}{٢}}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢} = \frac{٥\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٣}}{\frac{٣}{٤}}$

$= \frac{٦\pi}{٩} - \frac{٨}{\sqrt{٣}}$

(٤) أولاً : ص = جتا س

ص' = − جا س ، ص'' = − جتا س

ص + ص'' = جتا س − جتا س = ٠

ثانياً ص = جا س

ص' = جتا س ، ص'' = − جا س

ص' + ص'' = جا س − جا س = ٠

(٥) أ) هـ(س) = ١ − جا س

١ − جا س = ٠ ومنه جا س = ١

إذاً س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{2}$

ب) هـ(س) = ظا س ظتا س = $\frac{1}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2 \text{س}}$

هـ(س) = ٠ إذا كان جا س = ٠

س = − π ، ٠ ، π

(٦) ص = ٢ جتا س − ب جا س

$(\text{ص}')^2 + \text{ص}^2 = (٢ \text{ جتا س} - \text{ب جا س})^2 + (٢ \text{ جا س} + \text{ب جتا س})^2$

$= ٤ \text{ جتا}^2 \text{س} - ٤ \text{ ب جتا س جا س} + \text{ب}^2 \text{جا}^2 \text{س} + ٤ \text{ جا}^2 \text{س} + ٤ \text{ ب جا س جتا س} + \text{ب}^2 \text{جتا}^2 \text{س}$

$= ٤ (\text{جتا}^2 \text{س} + \text{جا}^2 \text{س}) + \text{ب}^2 (\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س})$

$= ٤ \times ١ + \text{ب}^2 \times ١ = ٤ + \text{ب}^2$.

(٧) أ) ص = − ظتا س ظتا س

ص' = − ظتا س × − قتا^2 س + ظتا س (قتا س ظتا س)

= قتا^3 س + ظتا^2 س قتا س

ب) ص = س (− جا س) + جتا س − ٤ جتا س

= − س جا س − ٣ جتا س

ص'' = − س جتا س + جا س (− ١) + ٣ جا س = ٣ جا س − س جتا س

(٨) فيكون هـ قابلاً للاشتقاق عند س = ٠ ، يجب أن يكون هـ متصلاً عند س = ٠ .

(٩)

$\lim_{س \to 0^+} هـ(س) = \lim_{س \to 0^-} هـ(س)$ ومنه $أ = ب = ٠$

$هـ(س) = \begin{cases} -جاس & س < ٠ \\ ٩ & س \geq ٠ \end{cases}$

$هـ'_+(٠) = \lim_{س \to 0^+} \frac{هـ(س) - هـ(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to 0^+} \frac{جتاس - ١}{س}$

$= \lim_{س \to 0^+} \frac{جتاس - ١}{س} \times \frac{جتاس + ١}{جتاس + ١} = \lim_{س \to 0^+} \frac{جتا^٢س - ١}{س(جتاس + ١)}$

$= \lim_{س \to 0^+} \frac{-جا^٢س}{س(جتاس + ١)} = \lim_{س \to 0^+} \frac{-جاس}{س} \times \lim_{س \to 0^+} \frac{جاس}{جتاس + ١}$

$= -١ \times ٠ = ٠$

$هـ'_-(٠) = ٩ = هـ'_+(٠)$ ، إذن $٩ = ٠$

(٩) نعيد تعريف هـ(س) .

$هـ(س) = \begin{cases} جاس & س \geq \pi \\ -جاس & س < \pi \end{cases}$

$هـ'_+(\pi) = \lim_{س \to \pi^+} \frac{هـ(س) - هـ(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جاس - ٠}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جاس}{س - \pi}$

نفرض س − π = هـ ، عندما س ← π⁺ ، فإن هـ ← ٠⁺

$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{-جا(\pi + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{-(-جاهـ)}{هـ} = ١$

$هـ'_-(\pi) = \lim_{س \to \pi^-} \frac{هـ(س) - هـ(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^-} \frac{-جاس - ٠}{س - \pi}$

$= \lim_{هـ \to 0^-} \frac{جا(س + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{جاهـ}{هـ} = ١$

إذن هـ'(π) = ١ . أي أن هـ قابل للاشتقاق عند س = π

(١٠) $هـ(س) = جتاس - \frac{١}{٢}$

$جتاس - \frac{١}{٢} = ٠$ ، $جتاس = \frac{١}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

ثامناً : قاعدة السلسلة

التدريبات :

(١) (١) نفرض ع = س٣ - س فيكون ص = ع٦ ، ع = س٣ - س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = ٦ ع^{٥} \times (٣ س^{٢} - ١)$

$= ٦ (س^{٣} - س)^{٥} (٣ س^{٢} - ١)$

٢) هـ (س) = ٢ - $\frac{١}{س^{٢}}$ ، هـ (س) = جتا س

(هـ ٥ هـ)' (س) = هـ' (هـ (س)) . هـ' (س) = (٢ - $\frac{١}{جا^{٢} س}$) × جتا س

= ٢ جتا س - ظتا س قتا س

(٣) $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ (قا س + ظا س) (قا س ظا س + قا^٢ س)

$\frac{د ص}{د س}|_{س = ٠}$ = ٢ (١ + ٠) (١ × ٠ + ١) = ٢

(٣) ١) هـ (س) = ٤ قا ٤ س ظا ٤ س

٢) هـ (س) = ٧ (س^٣ + ٢ س - ٨)^٦ (٣ س^٢ + ٢)

٣) هـ (س) = ٤ جا^٣ (س^٢) جتا (س^٢) × ٢ س = ٨ س جا^٣ (س^٢) جتا (س^٢)

(٤) نقطة التماس الطرفية بالنسبة إلى س

هـ (س^٣ - ١) (٣ س^٢) = - $\frac{١}{س^{٢}}$ - ٢ س

س^٣ - ١ = ٧ عندما س = ٢

هـ (٧) (١٢) = - $\frac{١}{٤}$ - ٤

هـ (٧) × ١٢ = - $\frac{١٧}{٤}$ ، هـ (٧) = - $\frac{١٧}{٤}$ × $\frac{١}{١٢}$ = - $\frac{١٧}{٤٨}$

(١) أ) $\frac{د ص}{د س} = ٨(س^٣ - ٢س + ٤)^٧ (٣س^٢ - ٢)$

ب) $\frac{د ص}{د س} = \frac{-٥(س^٢+١)^٤ (٢س)}{(س^٢+١)^١٠} = \frac{-١٠س}{(س^٢+١)^٦}$

ج) $\frac{د ص}{د س} = \frac{(١-س^٢)^٤(٤س^٣) - س^٤(٤(١-س^٣)^٣ \times -٣س^٢)}{(١-س^٢)^٨} = \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٤ + ١٢س^٦(١-س^٣)^٣}{(١-س^٣)^٨}$

$= \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٣(١-س^٣+٣س^٣)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١+٢س^٣)}{(١-س^٣)^٥}$

د) $\frac{د ص}{د س} = -جا(س^٢ - س) \times (٢س - ١) = (١ - ٢س) جا(س^٢ - س)$

(٢) $هـ(س) = ٢س - ٢$ ، $هـ(س) = ٣س^٢$

أ) $(هـ \circ صـ)'(١) = هـ'(صـ(١)) \times صـ'(١)$

$= هـ'(٢) \times ٣ = ٢ \times ٣ = ٦$

ب) $(صـ \circ هـ)'(١) = صـ'(هـ(١)) . هـ'(١) = صـ'(-١) \times$ صفر $=$ صفر

(٣) أ) $(هـ \circ صـ)'(٢) = هـ'(صـ(٢)) . صـ'(٢)$

$= هـ'(٣) \times -٦ = ٤ \times -٦ = -٢٤$

ب) $هـ(س^٢) \times ٢ \times س = هـ'(٣) \times ٢ \times \sqrt{٣٧} = ٨\sqrt{٣٧}$

(٤) نفرض $ع = هـ(س)$ فيكون $ص = جا^ن ع$ ، $ع = هـ(س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} . \frac{د ع}{د س} = ن جا^{ن-١} ع \times جتا ع \times هـ'(س)$

$= ن جا^{ن-١}(هـ(س)) \times جتا هـ(س) \times هـ'(س)$

(٥) أ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} . \frac{د ع}{د س}$

$= ٢جا ع \times (٣س^٢ - ١) = ٢جا(س^٣ - س) \times (٣س^٢ - ١)$

ب) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} . \frac{د ل}{د س} = (ل + ٢) \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}}$

$= (\sqrt{س^٢+١} + ٢) \times \frac{س}{\sqrt{س^٢+١}} = س + \frac{٢س}{\sqrt{س^٢+١}}$

(٣٢)

(٦) $ص = -جا(س + \frac{\pi}{2})$ ، $ص'' = -جتا(س + \frac{\pi}{2})$

$ص + ص'' = جتا(س + \frac{\pi}{2}) - جتا(س + \frac{\pi}{2}) = صفر$

(٧) $\frac{ص}{س} = ظا^2 س + ظا^2 س قا^2 س = قا^2 س(1 + ظا^2 س)$

$= قا^2 س قا^2 س = قا^4 س$

(٨) أ) ق اقتران فردي وأي أن ق(-س) = -ق(س)

باستخدام الطرفين:

-ق(-س) = -ق(س) وعند ق(-س) = ق(س)

إذن ق(س) اقتران زوجي

ب) ق اقتران زوجي ، أي أن ق(-س) = ق(س)

باستخدام الطرفين:

-ق(-س) = ق(س) وعند ق(-س) = -ق(س)

إذن ق(س) اقتران فردي

(٩) أ) $\frac{ص}{س} = 2 جا 3س جتا 3س \times 3 = 3 جا 6س$

عندما $س = \frac{\pi}{9}$ ، $\frac{ص}{س} = 3 جا \frac{2\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ب) $\frac{ص}{س} = 4(س + \frac{1}{س})^3 (1 - \frac{1}{س^2})$

$\frac{ص}{س}\Big|_{س=1} = 4(1+1)^3 (1-1) = صفر$

(١١) أ) $ص' = س قا^2(\frac{1}{س}) \times -\frac{1}{س^2} + ظا(\frac{1}{س}) \times 1$

$= -\frac{1}{س} قا^2(\frac{1}{س}) + ظا(\frac{1}{س})$

$ص'' = -\frac{1}{س} \times 2 قا(\frac{1}{س}) قا(\frac{1}{س}) ظا(\frac{1}{س}) \times -\frac{1}{س^2} + قا^2(\frac{1}{س}) \times \frac{1}{س^2} + قا^2(\frac{1}{س}) \times \frac{1}{س^2}$

$= \frac{2}{س^3} قا^2(\frac{1}{س}) ظا(\frac{1}{س}) + \frac{1}{س^2} قا^2(\frac{1}{س}) - \frac{1}{س^2} قا^2(\frac{1}{س})$

$= \frac{2}{س^3} قا^2(\frac{1}{س}) ظا(\frac{1}{س})$

(٣٣) ب) $ص = \frac{س \times ٢ حا ٢س - جتا س}{س^{٢}} = \frac{٢ س حا ٢س + جتا س}{س^{٢}}$

$ص' = \frac{س^{٤}(٤ س جتا ٢س + ٢ حا ٢س - ٢ حا س) - (٢ س حا ٢س + جتا س) \times ٤ س^{٣}}{س^{٨}}$

$= \frac{-٤ س^{٣} جتا ٢س + ٤ س^{٢} حا ٢س + ٢ حا س جتا س}{س^{٨}}$

$= \frac{٤ س حا ٢س + ٢ جتا ٢س - ٤ س^{٢} جتا ٢س}{س^{٣}}$

(٣٤) $هـ(حا س) \times جتا س = جتا س$ ظتا $س \times ٢$

$حا س = \frac{١}{٢}$ اذا كان $س = \frac{\pi}{٦}$ وضح $س = \frac{٥\pi}{٦}$

$هـ(\frac{١}{٢}) \times جتا \frac{\pi}{٦} = -جتا \frac{٥\pi}{٦} \times ٢$

$هـ(\frac{١}{٢}) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢$

$هـ(\frac{١}{٢}) = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -١$

(٣٥) $\frac{ص}{س} = هـ(س^{٣} + ٢س)(س + ٢)$

$\frac{ص}{س}|_{س=١} = هـ(٣) \times ٤ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

(٣٦) $\frac{ص}{س} = \frac{٦\sqrt{س^{٤}} + ٨\sqrt{س^{٣}}}{٣\sqrt{س^{٣}} + ٨\sqrt{س^{٤}}} = \frac{٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٨ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣ س^{\frac{٣}{٢}} + ٨ س^{\frac{٤}{٣}}}$

(٣٤) $هـ(٤س) = س$

$هـ(٤س) \times ٤ = ٤ س$

$هـ(٤س) = \frac{١}{٤}$

نفرض $س = ١$ ، $هـ(٤) = \frac{١}{٤}$

(٣٣)

(١٥) $ق(س) = ٣س^٢ + ٤$ ، $ق'(س) = ٦س$ ، $ق''(س) = ٦$

$ك(س) = ٦س$ ، $ك'(س) = ٦$ ، $ك''(س) =$ صفر

ب) $(ق \circ ك)'(١) = ق'(ك(١)) \times ك'(١)$

$= ق'(٦) \times ٦ = ٦ \times ٣ \times ٦ = ١٠٨$

ب) $(ق \circ ك)'(ج) = ق'(ك(ج)) \times ك'(ج)$

$= ق'(١٢) \times ٦ = ٦ \times ١٢ \times ٦ = ٤٣٢$

ج) $(ق \circ ك)''(س) = ((ق \circ ك)'(س))'$

$= (ق'(ك(س)) \times ك'(س))' = (ق'(٣س^٢) \times ٦س)'$

$= (١٨س^٢ \times ٦س)' = (١٠٨س^٣)' = ٣٢٤س^٢$

$(ق \circ ك)''(-١) = ٣٢٤$

د) $(ق \circ ك)''(س) = ((ق \circ ك)'(س))' = (ق'(ك(س)) \times ك'(س))'$

$= ق''(ك(س)) \times ك'(س) \times ك'(س) + ق'(ك(س)) \times ك''(س)$

$= ق''(٦س) \times$ صفر $+ ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٠٨$

تاسعاً: الاشتقاق الضمني

التدريبات

(١) ١) $٦س - ٨ص ص' = ٠$

$٨ص ص' = ٦س$ ومنه $ص' = \frac{٣}{٤} \times \frac{س}{ص}$

٢) $٢س \cdot ص' + ٢ص - ٣ص^{٢} ص' = ١ + ٢ص'$

$٢س ص' - ٣ص^{٢} ص' - ٢ص' = ١ - ٢ص$

$ص'(٢س - ٣ص^{٢} - ٢) = ١ - ٢ص$ ومنه $ص' = \frac{١ - ٢ص}{٢س - ٣ص^{٢} - ٢}$

٣) $٢س + ص' = ظا^{٢}ص \cdot ص'$

$ص'(١ - ظا^{٢}ص) = -٢س$ ومنه $ص' = \frac{٢س}{ظا^{٢}ص - ١}$

(٢) ١) $\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} - جاس = ٠$ ومنه $ص' = ٢\sqrt{ص}\ جاس$

٢) $٢(س - ص)(١ - ص') - ص' = ٠$

$٢(س - ص) - ص'(٢(س - ص)) - ص' = ٠$

$ص'(٢س - ٢ص + ١) = ٢(س - ص)$ ومنه $ص' = \frac{٢(س - ص)}{٢س - ٢ص + ١}$

(٣) $-جاص ص' = ١$ ، $ص' = -\frac{١}{جاص}$

نجد جاص بدلالة س:

$جا^{٢}ص = ١ - جتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$

$جاص = \sqrt{١ - س^{٢}}$ ، $-\sqrt{١ - س^{٢}}$ يُهمل

$ص' = -\frac{١}{جاص} = -\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(٤) $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \cdot \frac{دن}{دس}$ ، $\frac{دس}{دن} = ٣جتا٣ن$

$\frac{دص}{دس} = (-جا٣ن) \times ٣ \times \frac{١}{٣جتا٣ن} = -ظا٣ن$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -٣ظا^{٢}٣ن \times \frac{دن}{دس} = -٣ظا^{٢}٣ن \times \frac{١}{٣جتا٣ن}$

$= -ظا^{٣}٣ن$

$\left.\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right|_{ن = \frac{\pi}{٣}} = -(-١)^{٣} = ١$

تمارين وصائل

(١) أ) $٣س + ٨ص \frac{دص}{دس} = ٠$ ، $\frac{دص}{دس} = -\frac{١}{٤} \times \frac{س}{ص}$

ب) $ص \cdot \frac{دص}{دس} = \frac{٣س^٢ + ٨س}{٢\sqrt{٣س^٢ + ٤س}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{ص٢} \times \frac{٣س^٢ + ٨س}{٢\sqrt{٣س^٢ + ٤س}} = \frac{٣س^٢ + ٨س}{٤ص\sqrt{٣س^٢ + ٤س}}$

ج) $٣س^٢ + ٣ص^٢ \cdot \frac{دص}{دس} = س \frac{دص}{دس} + ص$

$\frac{دص}{دس}(٣ص^٢ - س) = ص - ٣س^٢$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{ص - ٣س^٢}{٣ص^٢ - س}$

د) $ظا(س ص)(س \frac{دص}{دس} + ص) = ٢س$

$(س \frac{دص}{دس} + ص) = \frac{٢س}{ظا(س ص)}$ ، $س \cdot \frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{ظا(س ص)} - ص$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{ظا(س ص)} - \frac{ص}{س}$

(٢) أ) $٣(س ص)^٢ (س \cdot \frac{دص}{دس} + ص) = ٤$

$س \frac{دص}{دس} + ص = \frac{٤}{٣(س ص)^٢}$

$س \cdot \frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣(س ص)^٢} - ص$ وضا $\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣س^٢(س ص)^٢} - \frac{ص}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣}(\frac{١}{س^٢ ص^٢}) - \frac{ص}{س}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٤}{٣} \times \frac{-(س^٢ \times ص \cdot \frac{دص}{دس} + ٣س^٢ ص^٢)}{س^٦ ص^٤} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^٢}$

$= -\frac{٤}{٣} \times \frac{س^٢ ص(٢ + س \frac{دص}{دس} + ٣ص)}{س^٦ ص^٤} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^٢}$

$= -\frac{٤}{٣} \times \frac{٢س \frac{دص}{دس} + ٣ص}{س^٤ ص^٣} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^٢}$

ب) $٨س + ٦ص \cdot ص = ٠$ ، $ص = -\frac{٤}{٣} \times \frac{س}{ص}$

$ص = -\frac{٤}{٣}(\frac{ص - س \cdot ص}{ص^٢})$

ج) $\frac{ص}{س} = س(-حاص).صَ + جتاص$

$\frac{ص}{س}(1 + س حاص) = جتاص$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{جتاص}{1+س حاص}$

$\frac{ص^{2}}{س^{2}} = \frac{(1+س حاص)(-حاص)صَ - جتاص(س جتاص.صَ + حاص)}{(1+س حاص)^{2}}$

$= \frac{-(حاص)(صَ)(1+س حاص) - جتاص(س صَ جتاص + حاص)}{(1+س حاص)^{2}}$

$= \frac{-حاص صَ - س صَ - حاص جتاص}{(1+س حاص)^{2}}$

د) جتاس $= \frac{صَ}{2\sqrt{ص}}$ ومنه $صَ = 2\sqrt{ص}$ جتاس

$صَ = 2\sqrt{ص} \times -حاس + جتاس \times \frac{2صَ}{2\sqrt{ص}}$

$= -2\sqrt{ص}$ حاس $+ \frac{صَ جتاس}{\sqrt{ص}}$

٣) أ) $٨س صَ + ٨ص - حاص.صَ = ٠$

$صَ(٨س - حاص) = -٨ص$ ومنه $صَ = \frac{-٨ص}{٨س - حاص}$

$صَ|_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})} = \frac{-٨ \times \frac{\pi}{4}}{٨ \times \frac{\pi}{4} - 1} = \frac{-2\pi}{2\pi - 4} = \frac{4\pi}{4\pi - 2\pi}$

ب) $٣س^{2} - (2س صَ + 2ص) + 3ص^{2}.صَ = ٠$

$صَ(3ص^{2} - 2س) = -3س^{2} + 2ص$

$صَ = \frac{-3س^{2} + 2ص}{3ص^{2} - 2س}$ ، $صَ|_{(1,-1)} = \frac{-3 + 2(-2)}{3 - 2} = -5$

ج) $\frac{ص}{س} = 3 - \frac{4}{س} = \frac{3س - 4}{س}$ ومنه $\frac{1}{ص} = \frac{س}{3س - 4}$

$\frac{1}{ص}صَ = \frac{2 \times 3 - (3س - 4)}{(3س - 4)^{2}}$ ومنه $صَ = \frac{-8}{(3س - 4)^{2}}$

$صَ|_{(2,1)} = \frac{-8}{8^{2}} = -\frac{1}{8}$

(٣٧)

٤) $\text{ظتا}(س+ص) \times (1+ص') = ص'(-\text{جا}س) + 2ص ص' \text{ظتا}س$

$ص' \text{ظتا}(س+ص) + \text{ظتا}(س+ص) = 2ص ص' \text{ظتا}س - ص^2 \text{جا}س$

$ص'(\text{ظتا}(س+ص) - 2ص \text{ظتا}س) = -\text{ظتا}(س+ص) - ص^2 \text{جا}س$

$$ص' = \frac{\text{ظتا}(س+ص) + ص^2 \text{جا}س}{2ص \text{ظتا}س - \text{ظتا}(س+ص)}$$

٥) $\frac{1}{2\sqrt{س}} + \frac{ص'}{2\sqrt{ص}} = 0$

$ص' = -\sqrt{ص} \times \frac{1}{\sqrt{س}}$

يكون المماس أفقياً إذا كان $ص' = 0$ أي أن:

$\sqrt{ص} = 3$ ومنه $س = 9$. يكون المماس أفقياً عند النقطة (٩، ٠)

٦) $ص' = \frac{2}{3}(2س+1)^{-\frac{1}{3}} \times 2 = \frac{4}{3\sqrt[3]{2س+1}}$

٧) $1 = -\text{جا}ص \cdot ص'$ ومنه $ص' = \frac{1}{-\text{جا}ص} = -\text{قا}ص$

$ص'' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times ص' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times -\text{قا}ص$

$= \text{ظا}ص \text{قا}^2ص$

٨) $ص \times -2\text{جا}2س + ص' \text{ظتا}س = س \times 2\text{جتا}2ص \times ص' + \text{جا}2ص$

$ص'(\text{ظتا}س - 2س \text{جتا}2ص) = \text{جا}2ص + 2ص \text{جا}2س$

$$ص' = \frac{\text{جا}2ص + 2ص \text{جا}2س}{\text{ظتا}س - 2س \text{جتا}2ص}$$

$$ص'|_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})} = \frac{\text{جا}\pi + 2 \times \frac{\pi}{2} \text{جا}\pi}{\text{ظتا}\frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} \text{جتا}\pi} = \frac{0 + \pi}{0 + \frac{\pi}{2}} = 2$$

(٩) $س\,ص' + ص = جتاس$

$ص' = \frac{جتاس - ص}{س}$

$ص'' = \frac{س(-حاس - ص') - (جتاس - ص)}{س^2} = \frac{-س\,حاس - س\,ص' - جتاس + ص}{س^2}$

$س\,ص'' + ٢ص' + س\,ص = \frac{-س\,حاس - س\,ص' - جتاس + ص}{س} + ٢ص' + س\,ص$

$= \frac{-س\,حاس - س\,ص' - جتاس + ص + ٢ص' + س^2 ص}{س}$

بالتعويض عن $س\,ص$ بـ $حاس$ و $س\,ص'$ بـ $جتاس - ص$

$= \frac{-س^2 ص - س\,ص' + س\,ص' + س^2 ص}{س} = صفر$

(١٠) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ن}{د س} \cdot \frac{د ص}{د ن} = (\frac{١}{٤ن})(٣ن^2 + ٢) = \frac{٣}{٤}ن + \frac{١}{٢ن}$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{٣}{٤} \times \frac{د ن}{د س} + \frac{-٢ \times \frac{د^2 ن}{د س^2}}{(٢ن)^2} = \frac{١}{٤ن} \times \frac{٣}{٤} - \frac{\frac{١}{٤ن} \times ٢}{(٢ن)^2}$

$= \frac{٣}{١٦ن} - \frac{١}{٣(٢ن)}$

$\left.\frac{د^2 ص}{د س^2}\right|_{ن=١} = \frac{٣}{١٦} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$

(١١) $١ + ص' = جتاص \times ص'$

$ص'' = جتاص \times ص' + ص'(-حاص) \times ص'$

$(ص')^2 جاص = ص''(جتاص - ١)$

$(ص')^2 = ص'' \times \frac{جتاص - ١}{حاص} = ص''(ظتاص - ظتاص)$

(١٢) $ص' = جتاس + س\,ص' + ص$ ، $ص'' = -حاس + س\,ص'' + ص' + ص'$

$ص''(١ - س) = ٢ص' - حاس$ ، $ص'' = \frac{٢ص' - حاس}{١ - س}$

$ص'' + ص = \frac{٢ص' - حاس}{١ - س} + ص = \frac{٢ص' - حاس + ص - س\,ص}{١ - س}$

$= \frac{٢ص' + (ص - (حاس + س\,ص))}{١ - س} = \frac{٢ص'}{١ - س}$

لأن $ص = حاس + س\,ص$

مراجعة

(١) معدّل التغير $= \frac{\text{ظا}(س+هـ) - \text{ظا}س}{هـ}$

$= \frac{\frac{\text{ظا}س + \text{ظا}هـ}{1 - \text{ظا}س\,\text{ظا}هـ} - \text{ظا}س}{هـ}$

$= \frac{\frac{\text{ظا}س + \text{ظا}هـ - \text{ظا}س(1 - \text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)}{1 - \text{ظا}س\,\text{ظا}هـ}}{هـ}$

$= \frac{\text{ظا}س + \text{ظا}هـ - \text{ظا}س + \text{ظا}^2س\,\text{ظا}هـ}{هـ(1 - \text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)}$

$= \frac{\text{ظا}هـ(1 + \text{ظا}^2س)}{هـ(1 - \text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)} = \frac{\text{ظا}هـ\,\text{قا}^2س}{هـ(1 - \text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)}$

(٢) $\text{مـ}'(\frac{\pi}{4}) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{\text{مـ}(\frac{\pi}{4}+هـ) - \text{مـ}(\frac{\pi}{4})}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{4}+هـ) - 1}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{4}\,\text{جتا}هـ + \text{جتا}\frac{\pi}{4}\,\text{جا}هـ - 1}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{\text{جتا}هـ - 1}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{1 - 2\,\text{جا}^2هـ - 1}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} -2\,\frac{\text{جا}هـ}{هـ} \times \text{نهـا}_{هـ \to 0} \text{جا}هـ = -2 \times \text{صفر} = \text{صفر}$

(٣) $\text{مـ}(س) = \begin{cases} س^2 + 2س + 2 & ، 0 \le س < 1 \\ 4س + 1 & ، 1 \le س < 2 \\ 4س + 2 & ، 2 \le س < 3 \\ 4س + 3 & ، س = 3 \end{cases}$

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} 2س + 2 & ، 0 < س < 1 \\ 4 & ، 1 < س < 2 \\ 4 & ، 2 < س < 3 \end{cases}$

$\text{مـ}'(1) = 4$ ، $\text{مـ}'_+(1) = 4$ ، $\text{مـ}'_-(1) = 4$ ، إذن $\text{مـ}'(1) = 4$

$\text{مـ}'(2) = 4$ ، $\text{مـ}'_+(2) = 4$ ، $\text{مـ}'_-(2) = 4$ ، إذن $\text{مـ}'(2) = 4$

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} 2س + 2 & ، 0 < س \le 1 \\ 4 & ، 1 \le س < 2 \\ 4 & ، 2 < س < 3 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 3 \end{cases}$

(٤٠)

(٤) د) $هـ'(س) = \frac{1}{\sqrt{٨س+٥} \times ل'(س) + ل(س) \times \frac{٢}{\sqrt{٨س+٥}}}$

$هـ'(-١) = \frac{1}{\sqrt{٣} \times ل'(-١) + ل(-١) \times \frac{٢}{\sqrt{٣}}} = ٢ \times ١ + ٢ \times \frac{١}{٣} = ٣\frac{١}{٣}$

هـ) $هـ'(س) = \frac{(س^{٢}-س)(٢ل(س) \cdot ل'(س)) - (ل(س))^{٢}(٢س-١)}{(س^{٢}-س)^{٢}}$

$هـ'(-١) = \frac{٢ \times ٢ ل(-١) ل'(-١) - (ل(-١))^{٢}(-٣)}{٤} = \frac{٣ \times ١ \times ٢ - ١ \times -٣}{٤} = \frac{١١}{٤}$

ج) $هـ'(س) = ل'(س) - \frac{س ل'(س) - ل(س)}{س^{٢}}$

$هـ'(-١) = ل'(-١) - \frac{-١ ل'(-١) - ل(-١)}{(-١)^{٢}}$

$= ٢ - \frac{-١ \times ٢ - ١}{١} = ٢ + ٣ = ٥$

د) $هـ'(س) = (ظا^{٢}\frac{\pi}{٣} ل(س)) \times \frac{\pi}{٣} ل'(س)$

$هـ'(-١) = ظا^{٢}(\frac{\pi}{٣} ل(-١)) \times \frac{\pi}{٣} ل'(-١) = (\frac{\pi}{٣} ظا\frac{\pi}{٣})^{٢} \times ٢$

$= \frac{\pi^{٢}}{٣} \times ٤ = \frac{٧\pi}{٣}$

(٥) أ) $صـ = س ظاس + ظاس$

$صـ' = س \times ٢ ظاس قا^{٢}س + ظاس + قا^{٢}س$

$= ٢ س ظاس قا^{٢}س + ٢ قا^{٢}س = ٢ قا^{٢}س (س ظاس + ١)$

$= ٢ قا^{٢}س (١ + صـ)$

ب) $ظتاص \cdot \frac{د ص}{د س} = ١$ ومنه $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{ظتاص}$

نجد ظتاص بدلالة س

$ظتا^{٢}ص + ظا^{٢}ص = ١$ ، $ظتا^{٢}ص + س^{٢} = ١$

إذن $ظتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$ ومنه $ظتاص = \sqrt{١ - س^{٢}}$ لأن $ص \in (٠, \frac{\pi}{٢})$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{ظتاص} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٦) $\frac{ds}{dn} = 2$ ومنه $\frac{dn}{ds} = \frac{1}{2}$

$\frac{dص}{ds} = \frac{dص}{dn} \cdot \frac{dn}{ds} = (3n^2 - 4) \times \frac{1}{2} = n^2 - 2$

$\frac{d^2ص}{ds^2} = \frac{dn}{ds} = \frac{1}{2}$

عندما $n = 6$ ، $\frac{d^2ص}{ds^2} = \frac{1}{2}$

٧) $ل'(س) = 2 هـ(س) \cdot هـ'(س) + 2 هـ(س) \cdot هـ'(س)$

$= 2 هـ(س) \cdot هـ(س) + 2 هـ(س) \cdot هـ'(س) - هـ(س) = صفر$

٨) ١) $هـ(س) = \begin{cases} 4(س+1)^3 & س \leq 0 \\ 4(س-1)^3 & س > 0 \end{cases}$

ب) $هـ'_+(0) = -4$ ، $هـ'_-(0) = 4$ وعليه $هـ'(0)$ غير موجودة

٩) $3ص^2 صَ = هـ(4س^2 - س)(8س - 1)$

$صَ = \frac{هـ(4س^2 - س)(8س - 1)}{3ص^2}$

نجد ص عندما $س = -1$ ، $ص^2 = هـ(5) = -8$ ومنه $ص = -2$

$صَ|_{س=-1} = \frac{هـ(5)(-9)}{(-12)^2} = \frac{-4 \times 9}{12} = -3$

١٠) $هـ(س) = (جتا هـ(س)) هـ(س)$

$هـ'(س) = (جتا هـ(س)) \cdot هـ(س) + هـ(س)(-جا هـ(س)) \times هـ(س)$

$هـ'(1) = جتا هـ(1) \times هـ(1) - هـ(1) جا هـ(1) \times هـ(1)$

$= (جتا \frac{\pi}{3}) \times 4 - صفر = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

١١) $هـ(س) = 3س^2 + 2$ ، $هـ(جا) = 6س$ ، $هـ(س) = 6س$

$(هـ \circ هـ)'(س) = هـ'(هـ(س)) \cdot هـ(س)$

$(هـ \circ هـ)'(2) = هـ'(هـ(2)) \cdot هـ(2) = هـ'(14) \times 12$

$= 7 \times 12 = 84$

ب) $(هـ \circ ص)''(س) = (هـ' \circ ص')'(س)$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص'(س) = ٦$

$= (هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س) + ص'(س) \cdot هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢) + ص'(٢) \cdot هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢)$

$= هـ''(١٢) \times ٦ + ١٢ \times ٦ \times ١٢ = ٧٢ \times ٦ + ٦ \times ١٤٤$

$= ١٢١٦$

(١٢) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٣ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$٣ = -٥ \, ص'(١)$ ومنه $ص'(١) = -\frac{٣}{٥}$

(١٣) $\frac{ص}{س} = س \, ص'(س) + ص(س)$

$\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٣ + ٦ = ٣$

(١٤) $جتا ص \cdot ص' = قا^٢ س$ ومنه $ص' = \frac{قا^٢ س}{جتا ص}$

$جتا ص \times ص' + ص'(-جا ص) \cdot ص' = قا س قا س ظا س$

$ص' جتا ص - (ص')^٢ جا ص = قا^٢ س ظا س$

باستبدال جا ص بـ ظا س

$ص' جتا ص - (ص')^٢ جا ص = قا^٢ س جا ص$ بالقسمة على جتا ص

$ص' - (ص')^٢ ظا ص = قا^٢ س ظا ص$

$ظا ص (قا^٢ س + (ص')^٢) = ص'$. اذن $ظا ص = \frac{ص'}{قا^٢ س + (ص')^٢}$

(١٥) $هـ'(٢س - ١)(٢) = \frac{-٢س}{س^٤} + \frac{٢}{س^٣}$

$هـ'(٣س - ١) = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{س^٢} - \frac{٢}{س^٣})$ ، $٣س - ١ = ٥$ عندما $س = ٢$

$هـ'(٥) = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٨}) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٤}) = \frac{١}{١٢}$

(١٦) $-$ جا ص $\cdot ص' - (س ص' + ص) = ٢$

$-$ جا ص $\cdot ص'' + ص'(-$ جتا ص $\cdot ص') - (س ص'' + ص' + ص') = ٠$

$ص''$ جا ص $+ (ص')^٢$ جتا ص $+ س ص'' + ٢ ص' = ٠$

$ص''(س +$ جا ص$) + ص'(٢ +$ جتا ص$) = ٠$

ب) $(هـ \circ ص)''(س) = (هـ' \circ ص')'(س)$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص''(س) = ٦$

$= (هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س) + ص''(س) \cdot هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢) + ص''(٢) \cdot هـ'(ص(٢)) \cdot ص'(٢)$

$= هـ''(١٢) \times ٦ \times ١٢ + ٦ \times ٢٧ = ٤٣٢ + ١٨٢$

$= ٦١٤$

(١٢) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٣ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$ع = -٥ ص'(١)$ ومنه $ص'(١) = -\frac{ع}{٥}$

(١٣) $\frac{ص}{س} = س ص'(س) + ص(س)$

$\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٤ + ٦ = ٢$

(١٤) $جتاص \cdot ص' = قا^٢ س$ ومنه $ص' = \frac{قا^٢ س}{جتاص}$

$جتاص \times ص' + ص'(-جاص) \cdot ص' = قاس قاس ظاس$

$ص'' جتاص - (ص')^٢ جاص = قا^٢ س ظاس$

باستبدال جاص بـ ظاس

$ص'' جتاص - (ص')^٢ جاص = قا^٢ س جاص$ بالقسمة على جتاص

$ص'' - (ص')^٢ ظاص = قا^٢ س ظاص$

$ظاص (قا^٢ س + (ص')^٢) = ص''$. اذن $ظاص = \frac{ص''}{قا^٢ س + (ص')^٢}$

(١٥) $هـ'(٢س - ١)(٢) = \frac{-٢س}{س^٤} + \frac{٢}{س^٣}$

$هـ'(٣س - ١) = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{س^٢} - \frac{٢}{س^٣})$ ، $٣س - ١ = ٥$ عندما $س = ٢$

$هـ'(٥) = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٨}) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٤}) = \frac{١}{١٢}$

(١٦) $-جاص \cdot ص' - (س ص' + ص) = ٠$

$-جاص \cdot ص'' + ص'(-جتاص \cdot ص') - (س ص'' + ص' + ص') = ٠$

$ص'' جاص + (ص')^٢ جتاص + س ص'' + ٢ ص' = ٠$

$ص''(س + جاص) + ص'(٢ + ص' جتاص) = ٠$

(٤٤)

(١٧) $ص = ب جتا س + ا جا س$

$(ص)^2 + (ص')^2 = ب^2 جتا^2 س + ا^2 جا^2 س + 2 ا ب جا س جتا س$

$+ ب^2 جا^2 س + ا^2 جتا^2 س - 2 ا ب جا س جتا س$

$= جتا^2 س (ب^2 + ا^2) + جا^2 س (ب^2 + ا^2)$

$= (ب^2 + ا^2)(جتا^2 س + جا^2 س) = ب^2 + ا^2$

(١٨) $3 ص^2 ص' = هـ'(س^3 - س)(٤س - ١)$

عندما $س = ٠$ يكون $ص^2 = هـ(٦) = -٨$ ومنه $ص = -٢$

$3(-2)^2 ص'_{س=٠} = هـ'(٦) \times -9$

$12 ص'_{س=٠} = ٤ \times -9 = -٣٦$ ، $ص'_{س=٠} = \frac{-٣٦}{12} = -٣$

(١٩) أ) $هـ(س) = ٣س^2 - ٤س$ ، $هـ'(س) = ٦س - ٤$ ، $هـ''(س) = ٦$

$ق(س) = ٦س + ١$ ، $ق'(س) = ٦$

$(هـ \circ ق)'(١) = هـ'(ق(١)) \cdot ق'(١)$

$= هـ'(٤) \times ٧ = ٧٧ \times ٢ = ١٥٤$

ب) $(هـ \circ ق)''(س) = ((هـ \circ ق)'(س))' = (هـ'(ق(س)) \cdot ق'(س))'$

$= هـ''(ق(س)) \cdot ق'(س) + ق'(س)(هـ'(س) \cdot ق'(س))$

$(هـ \circ ق)''(١) = هـ''(ق(١)) \cdot ق'(١) + ق'(١)(هـ'(ق(١)) \cdot ق'(١))$

$= هـ''(٤) \times ٦ + ٧ (هـ'(٤) \times ٧)$

$= ٢٢ \times ٦ + ٧ \times ٦ \times ٧ = ٤٠٦$

(٢٠) أ) $س = ٠$ ب) $س = -١$ ، ٠ ، ١ جـ) $س = ٠$

(٢١) أ) جـ ب) ب جـ) د د) أ هـ) ب و) د ز) جـ ح) ب ط) أ

رياضيات / العلمي / ف ١

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

تطبيقات هندسية

تدريب (١) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \sqrt{س + ٣}$ عند $(١ ، ٢)$

ميل المماس $= ق'(س)|_{س=١} = \frac{١}{٢\sqrt{س+٣}}|_{س=١} = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ١)$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = -٤(س - ١)$

تدريب (٢) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، $د(س) = س$

يتقاطعان عندما $ق(س) = د(س) \Leftarrow \frac{٤}{س} = س \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

ميل المماس لـ $ق(س)|_{س=-٢} = ق'(-٢) = \frac{-٤}{س^٢}|_{س=-٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

ميل المماس لـ $د(س)|_{س=٢} = د'(٢) = ١$

وبما أن $د'(٢) \times ق'(-٢) = ١ \times -١ = -١$ ∴ متعامدان

تدريب (٣) ص ١٦٣ :

$ق(س) = جا س$: $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ميل المماس = المشتقة $= ق'(س) = ٠ \Leftarrow$ جتا $س = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

$(\frac{\pi}{٢} ، ١) \in [٠ ، ٢\pi]$ ، $(\frac{٣\pi}{٢} ، -١) \in [٠ ، ٢\pi]$

∴ المشتقة $= ق'(س) =$ جتا $س$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

تدريب (٤) ص ١٦٤ :

$ق(س) = ج س^٢ + ج س + ج$ ، ميل المماس المرسوم $= ق'(س) = ٢ج س + ج$

$ق'(١) =$ ظا ١٣٥°

$٢ج + ج = -١ \Leftarrow ٣ج = -١ \Leftarrow ج = \frac{-١}{٣}$

$ج = -٠.٣٣$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٥) ص ١٦٥

$ق(س) = ٥ - س^٢$ ، النقطة (٣، ١) لا تقع على منحنى $ق(س)$

أفرض أن النقطة $(س_١، ص_١)$ تقع على منحنى $ق(س) \Leftarrow ص_١ = ٥ - س_١^٢$

ميل المماس عند $(س_١، ص_١) = ق'(س_١) = -٢ س_١$

معادلة المماس: $ص - ٠ = -٢ س_١ (س - ٣)$

$ق(س_١) = ص_١ \Leftarrow ٥ - س_١^٢ = -٢ س_١ (س_١ - ٣)$

$٥ - س_١^٢ = -٢ س_١^٢ + ٦ س_١ \Leftarrow س_١^٢ - ٦ س_١ + ٥ = ٠ \Leftarrow (س_١ - ١)(س_١ - ٥) = ٠$

$س_١ = ١$ أو $س_١ = ٥$

نقطة المماس الأولى $(١، ٤)$ ومعادلة المماس الأولى: $ص - ٤ = -٢(س - ١)$

$\Leftarrow$ الثانية $(٥، -٦)$ $\Leftarrow$ الثانية: $ص + ٦ = -١٠(س - ٥)$

تمارين ومسائل

ص ١٦٦

١) $ق(س) = س^٢ + ٦ س + ٥$ ، $ق'(س) = ٢ س + ٦$

ميل المماس عند $(١، ٢)$ $= ق'(١) = ٨$

٢) $ق(س) = س^٣$ يتقاطع مع المستقيم $ص = س + ٦$ عندما

$ق(س) = ص \Leftarrow س^٣ = س + ٦ \Leftarrow س^٣ - س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

ميل المماس $|_{س=٢} = ق'(٢) = ٣(٢)^٢ = ١٢$

معادلة المماس: $ص - ٨ = ١٢(س - ٢)$

عند $(٢، ٨)$

٣) $ق(س) = س^٢ - ٣ س + ٣$ ، $ق'(س) = ٢ س - ٣$

ميل المماس $= ق'(س_١) = ظا \frac{٣\pi}{٤} \Leftarrow ٢ س_١ - ٣ = -١ \Leftarrow ٢ س_١ = ٢ \Leftarrow س_١ = ١$

النقطة $(١، ١)$

٤) $(ص - ٤)^٢ = س + ٢ \Leftarrow ٢(ص - ٤) \times \frac{د ص}{د س} = ١ \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢ ص - ٨}$

ميل المنحنى $=$ ميل المستقيم $\Leftarrow \frac{١}{٢ ص - ٨} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٢ ص - ٨ = ٦ \Leftarrow ص = ٣$

$\therefore$ النقطة $(-١، ٣)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) $ق(س) = س^3 - 4س^2 + 3$ ، $ق'(س) = 3س^2 - 4$ ، ميل المماس $= -2$

ميل المماس المتجه لأعلى $= ق'(س_1) = -2 \Leftarrow 3س_1^2 - 4 = -2 \Leftarrow س_1 = 1$

$(1، 0)$

معادلة المماس: $ص - 0 = -2(س - 1) \Leftarrow ص = -2س + 2$

٦) $ق(س) = \frac{4}{س}$ عند $(2، 1)$ ، $ق'(س) = -\frac{4}{س^2}$

ميل المماس $= ق'(1) = -4$ ، ميل العمودي $= \frac{1}{4}$

معادلة المماس: $ص - 4 = -4(س - 1)$

معادلة العمودي: $ص - 4 = \frac{1}{4}(س - 1)$

٧) $ق(س) = س^3 + ب س^2 + جـ س + د$ عند $(0، 2)$ ، $ق'(س) = 3س^2 + 2ب س + جـ$

$ق(0) = 2 \Leftarrow \boxed{د = 2}$

$ق'(0) =$ ميل المستقيم $= 1 \Leftarrow ق'(0) = جـ = 1 \Leftarrow \boxed{جـ = 1}$

٨) $ق(س) = \frac{4}{س}$ يمر بالمستقيم $3س - ص + جـ = 0$ ، $ق'(س) = -\frac{4}{س^2}$ ، $ص = 2$

$ق'(س_1) = ص \Leftarrow -\frac{4}{س^2} = 2 \Leftarrow س^2 = 1 \Leftarrow س = \pm 1$

$ق(1) = |ص|_{س=1} \Leftarrow 4 = 2 + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = 2}$

$ق(-1) = |ص|_{ص=-1} \Leftarrow 4 = -2 + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = 6}$

٩) العلاقة $س = ص^2 - 4ص$ تقاطع مع محور الصادات عندما $س = 0$

$ص^2 - 4ص = 0 \Leftarrow ص(ص - 4) = 0 \Leftarrow ص = 0$ ، $ص = 4$

النقطة الأولى $(0، 0)$ ، النقطة الثانية $(4، 4)$

معادلة المماس الأولى: ميل المماس $= 1 = 2ص \cdot ص' - 4ص' \Leftarrow ص' = \frac{1}{2ص - 4}$

$ص - 0 = -\frac{1}{4}(س - 0)$

معادلة المماس الثانية:

$ص - 4 = \frac{1}{4}(س - 4)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٠) العلاقة $ص^2 + 6ص = س^2 + 2س - 2$ ، $2ص\,ص' + 6ص' = 2س - 2$

$ص' = \frac{2س - 2}{2ص + 6} = \frac{س - 1}{ص + 3}$ = ميل المماس عند النقطة

ميل المماس $= ظا\theta \Leftarrow ص' = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = ظا\theta$ ، $\theta = 135°$

(-1 ، 3)

١١) $ص = 3جتاس + قتاس$ عند $س = \frac{\pi}{4}$ ، النقطة $(\frac{\pi}{4}، ص)$

$ص' = -3جاس + قتاس ظاس$

ميل المماس $= ص'_{س=\frac{\pi}{4}} = -3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \times 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ميل العمودي $= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

معادلة المماس : $ص - ص = -\frac{\sqrt{2}}{2}(س - \frac{\pi}{4})$

معادلة العمودي : $ص - ص = \sqrt{2}(س - \frac{\pi}{4})$

١٢) $ص = س^3 - \frac{3}{2}س^2 + س - \frac{3}{4}$ عند $س = 1$ ، $ص = 1$ ، $(1، 1)$

ميل المماس $= ص'_{س=1} = 3 - 3 + 1 = 1$

معادلة المماس : $ص - 1 = 1(س - 1)$

١٣) $ص = \frac{1}{س^2 + 1}$ ، $ص' = \frac{-2س}{(س^2+1)^2}$

ميل المماس $= ص'_{س=4} = -\frac{8}{289}$ ، معادلة المماس : $ص - \frac{1}{17} = -\frac{8}{289}(س - 4)$

$ص = -\frac{8}{289}س + \frac{1}{17}$

المماس يقطع السينات عندما $ص = 0 \Leftarrow س = 4$

المساحة $= \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$ وحدات مربعة

١٤) ميل المماس عند $(2، 1)$ $= ق'(1) = 2 \times 1 = 2$ ، ميل العمودي عند $(2، 1) = -\frac{1}{2}$

معادلة المماس : $ص - 2 = 2(س - 1) \Leftarrow ص = 2س$ تقطع محور السينات عند $س = 0$

معادلة العمودي : $ص - 2 = -\frac{1}{2}(س - 1) \Leftarrow ص = -\frac{1}{2}س + \frac{5}{2}$ تقطع محور السينات عند $س = 5$

المساحة $= \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$ وحدات مربعة

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تطبيقات فيزيائية

تدريب (١) ص ١٦٩ :

ف(ن) = ٤ جا٣ن − ٥ جتا٣ن

ف(π/٤) = ٤ جا π/٤ − ٥ جتا π/٤ = ٤√٢/٢ − ٥√٢/٢ = −٠,٧ م

ع(ن) = ١٢ جتا٣ن + ١٥ جا٣ن ⇐ ع(π/٤) = ١٢ جتا π/٤ + ١٥ جا π/٤ = ٠ + ١٥ = ١٥ م/ث

ج(ن) = −٣٦ جا٣ن + ٤٥ جتا٣ن ⇐ ج(π/٤) = −٣٦ جا π/٤ + ٤٥ جتا π/٤ = −٣٦ + ٠ = −٣٦ م/ث²

تدريب (٢) ص ١٦٩ :

ف(ن) = ن³ − ٩ن² + ١٥ن ، ع(ن) = ٣ن² − ١٨ن + ١٥ ⇐ ٣(ن − ١)(ن − ٥) = ٠

ن = ١ ث ، ن = ٥ ث

ج(ن) = ٦ن − ١٨ ⇐ ج(١) = ٦ − ١٨ = −١٢ م/ث² ، ج(٥) = ٣٠ − ١٨ = ١٢ م/ث²

تدريب (٣) ص ١٧٠ :

ف(ن) = ٥٠ن − ٥ن² ⇐ ع(٥) = ٥٠ − ١٠ن ⇐ ٠ = ٥٠ − ١٠ن ⇐ ن = ٥ ث

⇐ ن = ٨ ث عندها يكون الجسم في أعلى ارتفاع

ف(٨) − ل = ٠ ⇐ ٤٠٠ − ٣٢٠ − ل = ٠ ⇐ ل = ٨٠ م ارتفاع البرج

تمارين ومسائل ص ١٧١

١) ف(ن) = ن³ − ٦ن² + ٩ن + ٣

ع(ن) = ف(ن) = ٣ن² − ١٢ن + ٩ ⇐ ع(٥) = ٣ × ٢٥ − ١٢ × ٥ + ٩ = ٩ م/ث

ج(ن) = ع(ن) = ٦ن − ١٢ ⇐ ٦(ن − ٢) = ٠ ⇐ ن = ٢ ث ، ن = ٣ ث

ت(٥) = ف(٥) = ٦ × ٢٥ − ١٢ × ٥ = ٩٠ م ، ت(٣) = ٦ م/ث ، ت(٤) = ٨ م/ث

٢) ف(ن) = ٢ جا(π/٣ ن) + √٣ ن

ع(ن) = ف(ن) = ٢ × π/٣ جتا π/٣ ن + √٣ = π/٣ جتا π/٣ ن + √٣ ⇐ π/٣ جتا π/٣ ن = −√٣

جتا π/٣ ن = −√٣ × ٣/π ⇐ ت(ن) = ف(ن) = جتا π ن ⇐ ت(π/٣) = جتا π = −١ م/ث

٣) ف(ن) = ٤,٩ن² − ١٩,٦ن + ٢٤,٥

ع(ن) = ف(ن) = ٩,٨ن − ١٩,٦ ⇐ ٩,٨ن − ١٩,٦ = ٠ ⇐ ن = ١٩,٦ / ٩,٨ = ٢ ث

ف(٥) = ٤,٩ × ٢٥ − ١٩,٦ × ٥ + ٢٤,٥ = ٢٤,٥ − ٩٨ + ٢٤,٥ = −٤٩ م

ت(٤) = ع(٤) = ٩,٨ × ٤ − ١٩,٦ = ١٩,٦ م/ث

ف(٤) = ٤,٩ × ١٦ − ١٩,٦ × ٤ + ٢٤,٥ = ٧٨,٤ − ٧٨,٤ + ٢٤,٥ = ٢٤,٥ م

٤) ف(ن) = ١٢٨ن − ١٦ن² ⇐ ع(ن) = ف(ن) = ١٢٨ − ٣٢ن ⇐ ع(ن) = ٠ عندما ن = ٤ ث

ع(ن): + ٠ − ٤ + ٨

ع(٣) > ٠ عندما ن ∈]٠ ، ٤[، ف(٤) = ١٢٨ × ٤ − ١٦ × ١٦ = ٢٥٦ م

ت = ٣ ⇐ ع(ن) = −٣٢ قدم/ث ، ع(٠) = ١٢٨ قدم/ث

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇐ ف'(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇐ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇐ ن = ٣ ⇐ (ن − ٣)(ن − ٥) = ٠

ع(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇐ ع(١) = ٦٤ قدم/ث ، ع(٥) = −٦٤ قدم/ث

٦) ف(ن) = ٩٠ن − ٥ن² ، ع(ن) = ٩٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٩ ث

ف(٩) = ٨٠ ⇐ ٨٠ = ٩٠ − $\frac{٥}{١٠٠}$ ك² ⇐ ك = ٤٠

٧) ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن² ، ع(ن) = ف'(ن) = ٤٠ − ١٠ن

ع(ن) = ٠ ⇐ ٤٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٤ ث ، زمن الصعود = زمن الهبوط = ٨ ث

ب) ن = ٦ ث

ج) ف(٤) = ٩٠ − ١٦٠ + ٨٠ = ١٢٠ − ٦٠ = ٤٠ قدم

د) ع(ن) = ٠ ⇐ ن = ١ ث

هـ) ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن² = ٧٥ ⇐ ن = ٣ ث أو ن = ٥ ث

و) ف'(ن + $\frac{١}{٢}$) = ف'(ن) ⇐ ١٦(ن + $\frac{١}{٢}$)² = ١٦ن² + ١٦ن + ٤

ن = ١ ث ، ف($\frac{٣}{٢}$) = ١٦($\frac{٣}{٢}$)² = ٣٦ متر ارتفاع البناية

٩) ع = ٤ ، أ ف = ن = $\frac{٤ \times ٤}{٢ \text{ أ ف}}$ = $\frac{٤ \times ٤ \text{ أ ف}}{\text{أ ف}^٢}$ ⇐ ٨ = $\frac{١٦}{ك}$ ⇐ ك = ٢

١٠) ع$_ص$ = ١ − ٢ ف ⇐ ف = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ع$_ص$ = ٠ ⇐ ٠ = ٤ − ٢ ف ، ف = ٢ ، ن = $\frac{١}{ف}$ ن

ت = −٢ × $\frac{١}{٢}$ م/ث² ⇐ ت = −١ م/ث²

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

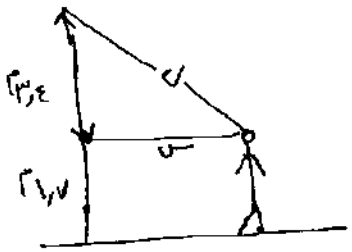
تدريب (١) ص١٧٥ :

$\frac{ds}{dt} = -١٠$ سم/ث ،

أ) $ح = \frac{٤}{٣}\pi نق^٣ \Rightarrow \frac{dح}{dt} = ٤\pi نق^٢ \cdot \frac{dنق}{dt}$ ، $\left|\frac{dح}{dt}\right|_{نق=١٠} = ٤\pi \times ١٠^٢ \times -١٠ = -٤٠٠\pi$ سم^٣/ث

ب) $م = ٤\pi نق^٢ \Rightarrow \frac{dم}{dt} = ٨\pi نق \frac{dنق}{dt}$ ، $\left|\frac{dم}{dt}\right|_{نق=٥} = ٨\pi \times ٥ \times -١٠ = -٤٠\pi$ سم^٢/ث

تدريب (٢) ص١٧٦ :



$\frac{ds}{dt} = ٢$ م/ث ، $\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=٣} =$

$ل = \sqrt{س^٢ + (٣,٤)^٢} \Rightarrow \frac{dل}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt} \times س}{\sqrt{س^٢ + (٣,٤)^٢}}$

$\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=٣} = \frac{٢ \times ٣}{\sqrt{٩ + (٣,٤)^٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٢٠,٥٦}}$ م/ث

تدريب (٣) ص١٧٧

$\frac{dθ}{dt} = ٠,٥$ د/ث

أ) $م = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \text{ جا}θ \Rightarrow \frac{dم}{dt} = ٣٢ \text{ جا}θ \times \frac{dθ}{dt}$

$\left|\frac{dم}{dt}\right|_{θ=٦٠°} = ٣٢ \times \text{جا}٦٠° \times ٠,٥ = ٨\sqrt{٣}$ سم^٢/ث

ب) $\left|\frac{dم}{dt}\right|_{θ=١٢٠°} = ٣٢ \times \text{جا}١٢٠° \times ٠,٥ = -٨\sqrt{٣}$ سم^٢/ث

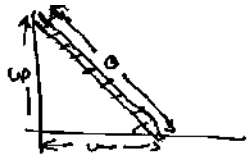
تمرين (١) ص١٧٩

$\frac{ds}{dt} = -١٠٠٠$ سم/ث حيث :

$ح = س^٣ \Rightarrow \frac{dح}{dt} = ٣س^٢ \frac{ds}{dt}$ ، $\left|\frac{dح}{dt}\right|_{س=١٠} = ٣ \times ١٠^٢ \times -١٠٠٠ = -٣٠٠٠٠٠$ سم^٣/ث

$م = ٦س^٢ \Rightarrow \frac{dم}{dt} = ١٢س \frac{ds}{dt}$ ، $\left|\frac{dم}{dt}\right|_{س=١٠} = ١٢ \times ١٠ \times -١٠٠٠ = -١٢٠٠٠$ سم^٢/ث

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

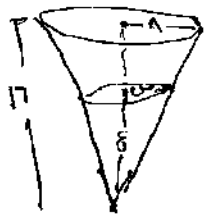


تمرين (٥) صفحة ١٧٩

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}$ م/ث ، $\frac{dA}{dt} = ?$ عندما $s = 3$ م

$s^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{25 - s^2}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{-3s}{\sqrt{25-s^2}} \times \frac{1}{2} = \frac{-3 \times 3}{2\sqrt{25-9}} = -\frac{3}{4}$ م^2/ث



٣) تدريب (٣) :

$\frac{dV}{dt} = 12$ سم^3/ث ، $\frac{dr}{dt} = ?$ عندما $r = 4$ سم

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\frac{h}{r} = \frac{11}{4} \Rightarrow h = \frac{11}{4}r$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{11}{4}r = \frac{11}{12}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{11}{4}\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow 12 = \frac{11}{4}\pi \times 16 \times \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{11\pi}$ سم/ث

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi \times 4 \times \frac{3}{11\pi} = \frac{24}{11}$ سم^2/ث

تدريب (٤) :

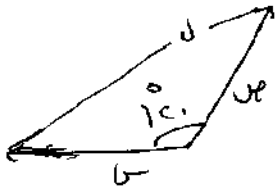
$\frac{dA}{dt} = 30$ كم^2/ساعة ، $\frac{ds}{dt} = 4$ كم/ساعة

$\frac{dL}{dt} = ?$ عندما $s = 8$ كم ، $h = 3$ كم

$L = \sqrt{s^2 + h^2 - 2sh\cos 120^\circ} = \sqrt{s^2 + h^2 + sh}$

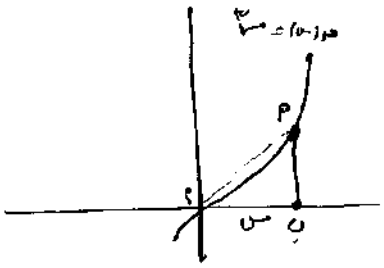
$\frac{dL}{dt} = \frac{2s\frac{ds}{dt} + h\frac{ds}{dt} + s\frac{dh}{dt}}{2\sqrt{s^2+h^2+sh}}$

$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{\substack{s=8\\h=3}} = \frac{2\times8\times4 + 3\times4 + 8\times3}{2\sqrt{64+9+24}} = \frac{68}{2\sqrt{97}}$



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٥)



$\frac{ds}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dm}{dt}\right|_{\text{لما تتلاشى}} = ؟$

$م = \frac{1}{2} \times س \times س^3 = \frac{1}{2} س^4$

$\frac{dm}{ds} = 2س^3$ ، $\frac{ds}{dt}$ = ؟ ، ت = ١٢ ثانية ، س = ٢ سم

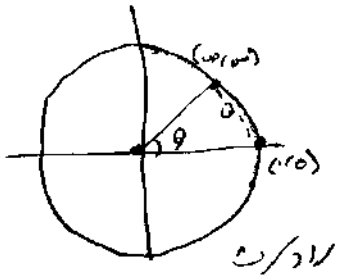
$\left|\frac{dm}{dt}\right|_{\substack{س=2 \\ ن=1}} = 2 \times 4 \times 2 = 16$ سم^2/ث

$ل^2 = س^2 + (2س + 6)^2 \Leftarrow ل = \sqrt{س^2 + 4س + 36}$

$\frac{dل}{dس} = \frac{2س + 4}{2\sqrt{س^2 + 4س + 36}}$ ⇐ $\frac{dل}{dت} = \frac{dل}{dس} \times \frac{dس}{dت}$

$\left|\frac{dل}{dت}\right|_{\substack{ن=1 \\ س=2}} = \frac{2(2+4)}{\sqrt{4+8+36}} = \frac{12}{\sqrt{48}} = \frac{12}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3}$ سم/ث

تمرين (٦)



$\frac{dع}{dت} = 10$ سم/ث ، $\left|\frac{dθ}{dت}\right|_{θ=\frac{\pi}{3}} = ؟$

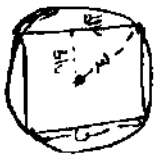
$ل = \cos θ \Leftarrow ل = \frac{1}{2}$ ⇐ $\frac{dل}{dع} = \frac{1}{2}$ ⇐ $\frac{dع}{dل} = 2$ ث/سم

$ب = \sqrt{ع^2 + ع^2 - 2 \times ع \times ع \cos θ} = \sqrt{2ع^2 - 2ع^2 \cos θ}$

$\frac{dب}{dع} = \frac{4ع - 4ع \cos θ}{2\sqrt{2ع^2 - 2ع^2 \cos θ}}$ ⇐ $\frac{dب}{dθ} = \frac{dب}{dع} \times \frac{dع}{dθ}$

$\left|\frac{dب}{dθ}\right|_{θ=\frac{\pi}{3}} = \frac{4 \times 10 - 4 \times 10 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{200 - 200 \times \frac{1}{2}}} \times 20 = \frac{200}{\sqrt{100}} = \frac{200}{10} = 20$ سم/ث

تمرين (٧) .



$\frac{dس}{dت} = 4$ سم/ث ، $\left|\frac{dم}{dت}\right|_{س=10} = ؟$

$م = \text{نهـ} \pi - س^2$

$\frac{dم}{dت} = 2\pi \text{نهـ} \frac{dس}{dت} - 2س \frac{dس}{dت}$ ⇐ $\frac{dس}{dت} = \frac{1}{2}$ ⇐ $\frac{dت}{dس} = 2$

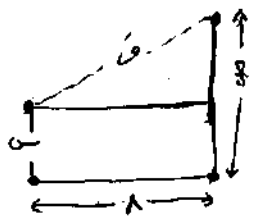
$\left|\frac{dم}{dت}\right|_{\substack{س=10 \\ \text{نهـ}=\frac{1}{2}}} = 40\pi - 40 = 40(\pi - 1)$ سم^2/ث

$\text{نهـ} = \frac{1}{2} \Leftarrow \text{نهـ} = \frac{س}{2ع} \Leftarrow \text{جا} ٣٠ = \frac{ع}{س}$

$ع = 10$ سم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٩):



$\frac{د ص}{د ن} = ٢ م/ث$ ، $\frac{د س}{د ن} = ١ م/ث$ ، $\left|\frac{د ف}{د ن}\right| =$ ؟

$ف = \sqrt{(ص - ٢)^٢ + ٦٤}$

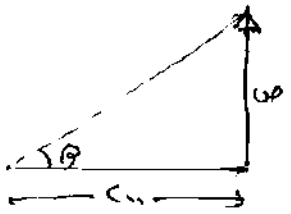
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(ص - ٢)(\frac{د ص}{د ن} - \frac{د س}{د ن})}{٢\sqrt{(ص - ٢)^٢ + ٦٤}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{(٨ - ٢)(٢ - ١)}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}} = \frac{٦}{١٠} = ٠٫٦$ م/ث

$س = \frac{د س}{د ن} \times ٢ = ١ \times ٢ = ٢$ م

$ص = \frac{د ص}{د ن} \times ٤ = ٢ \times ٤ = ٨$ م

تمرين (٦):



$\frac{د ص}{د ن} = ١٠$ م/ث ، $\left|\frac{د θ}{د ن}\right| =$ ؟ عندما ص = ٤

$ظا θ = \frac{ص}{س}$

$ظا θ = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

$قا^٢ θ = ظا^٢ θ + ١$

$قا^٢ θ = \frac{٤}{٢٥} + ١ = \frac{٢٩}{٢٥}$

$قا θ = \frac{٥}{٥}$

$\frac{د θ}{د ن} \times قا θ = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{١}{س}$

$\frac{د θ}{د ن} \times \frac{٥}{٥} = ١٠ \times \frac{١}{١٠} = ١$

$\frac{د θ}{د ن} = \frac{١}{٥}$ راديان/ث

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

النقط الحرجة

تدريب (١)

$ق(س) = س^3 - 12س + 1$; $س \in [-3, 3]$

$ق'(س) = 3س^2 - 12$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$

$ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = \pm 3$

$\therefore$ النقط الحرجة هي

$(-3, 10)، (3, 8)، (-2, 17)، (2, -10)$

تدريب (٢)

$ق(س) = جاس - جا^2 س$; $س \in [0, \pi]$

$ق'(س) = جتاس - 2 جاس جتاس$; $س \in (0, \pi)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow جتاس(1 - 2جاس) = 0 \Leftarrow جتاس = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow جاس = \frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = 0, \pi$

النقط الحرجة $(0, 0)، (\frac{\pi}{2}, 0)، (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{4})، (\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{4})$

تدريب (٣)

$ق(س) = \sqrt[3]{س^2}$; $س \in [-2, 2]$

$ق'(س) = \frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

$ق'(س) = 0$ لا يوجد قيم لـ $س$

$ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = \pm 0 \Leftarrow س = 0$

$\therefore$ النقط الحرجة $(-2, \sqrt[3]{4})، (0, 0)، (2, \sqrt[3]{4})$

تدريب (٤)

$ق(س) = |س^2 - 2س|$; $س \in [-1, 4]$

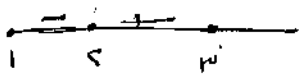
$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 2س & ، س \leq 0 \text{ أو } س \geq 2 \\ -س^2 + 2س & ، 0 < س < 2 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 2س - 2 & ، س < 0 \text{ أو } س > 2 \\ -2س + 2 & ، 0 < س < 2 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 0 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

$\therefore$ النقط الحرجة هي

$(-1, 3)، (0, 0)، (1, 1)، (2, 0)، (4, 8)$



$ق(س)$ غير موجودة عندما $س = 2$

لأن $ق'(2^+) \neq ق'(2^-)$

كذلك عند اطراف الفترة عند $س = 1، 3$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (1)

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٢):

$د(س) = س^3 + أ س^2 + ب س + ج$ لها نقطة حرجة عند $س = -1$ ، $د = 3$

$د'(س) = 3س^2 + 2أ س + ب$

$د'(-1) = 0 \Leftarrow 3 - 2أ + ب = 0$

$د'(3) = 0 \Leftarrow 27 + 6أ + ب = 0$

$-2أ + ب = -3$

$6أ + ب = -27$

$8أ = -24 \Leftarrow أ = -3$

$ب = 3$

تمرين (٣)

$د'(س) = 0 \Leftarrow س = 0 \; ، \; س = -2$

$د'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = -3 \; ، \; س = 3$

$\therefore$ النقط الحرجة $(-3، د(-3))$ ، $(-2، د(-2))$ ، $(0، د(0))$ ، $(3، د(3))$

تمرين (٤)

$د(س) = \frac{س^3 - 1}{س^3 + 1} \Leftarrow د'(س) = \frac{(3س^2)(س^3+1) - (س^3-1)(3س^2)}{(س^3+1)^2} = \frac{(6س^2)(س^3+1-س^3+1)}{(س^3+1)^2}$

$د'(س) = \frac{6س^2}{(س^3+1)^2} \Leftarrow د'(س) = 0 \Leftarrow 6س^2 = 0 \Leftarrow س = 0$

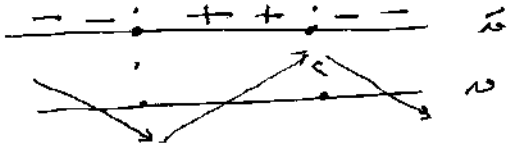
$د'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س^3 + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$ مرفوض لأن طال

النقطة الحرجة $(0، -1)$

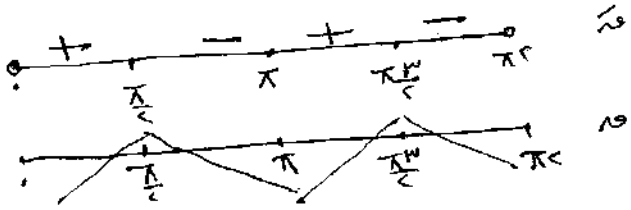
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

التزايد والتناقص

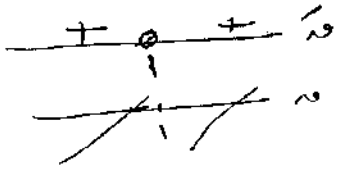
تدريب (1)



تدريب (2):

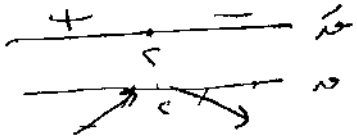


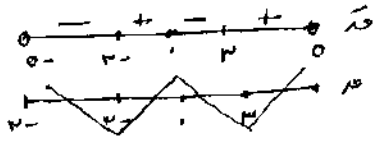
تدريب (3):

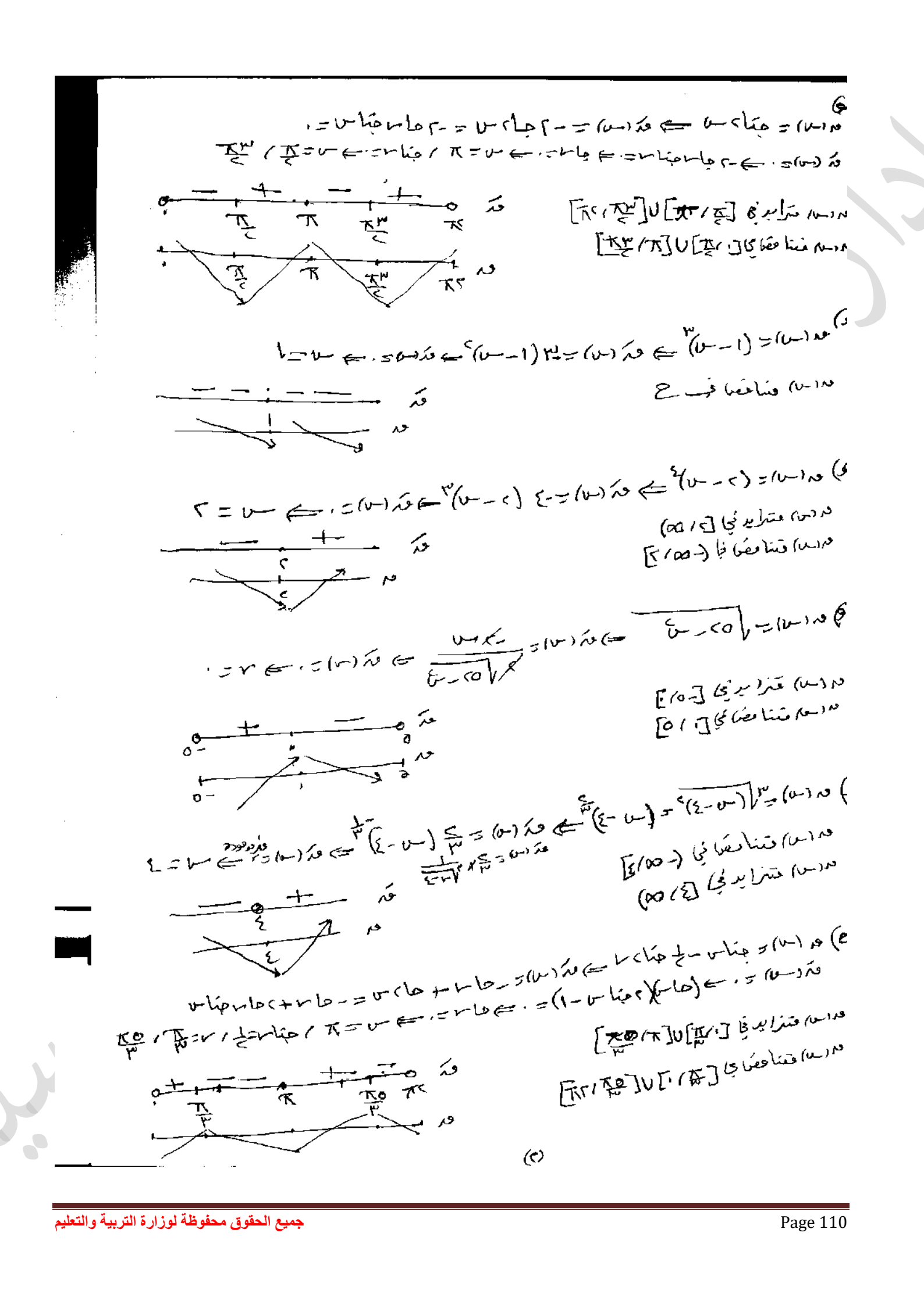


تمارين ومسائل

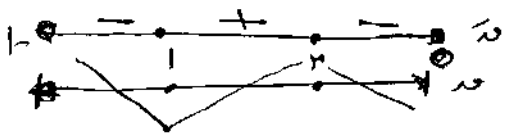
1)



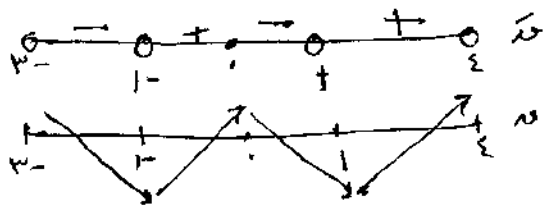




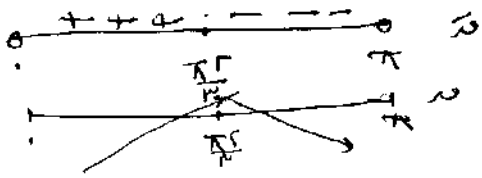
تدريب (١)



تدريب (٢)



تدريب (٣)



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين وحل

أ) $م(س) = س^3 - 6س^2 + 9س$

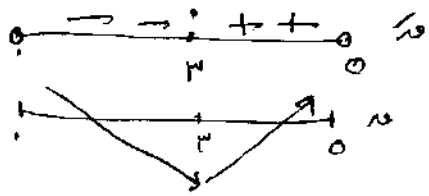
$م'(س) = 3س^2 - 12س + 9$

$م'(س) = 0 \Leftrightarrow 3س^2 - 12س + 9 = 0$

$س^2 - 4س + 3 = 0$

$(س - 3)(س - 1) = 0$

$س = 3$ أو $س = 1$



للاقتران $م(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 3$ حيث $م(3) = 0$

قيمة عظمى محلية عندما $س = 1$ حيث $م(1) = 4$

ب) $م(س) = س^3 - 12س$

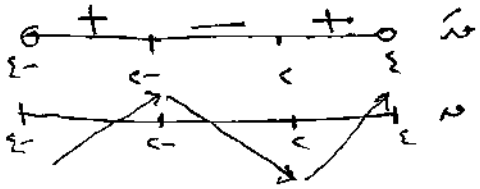
$م'(س) = 3س^2 - 12$

$م'(س) = 0 \Leftrightarrow 3س^2 - 12 = 0$

$س^2 - 4 = 0$

$(س - 2)(س + 2) = 0$

$س = 2$ أو $س = -2$



للاقتران $م(س)$:

قيمة عظمى محلية عندما $س = -2$ حيث $م(-2) = 16$

قيمة صغرى محلية عندما $س = 2$ حيث $م(2) = -16$

$م(س)$ عظمى في (-16)

$م(س)$ عظمى (16)

ج) $م(س) = (س - 2)^3$ ، $س \in [0, 4]$

$م'(س) = 3(س - 2)^2$

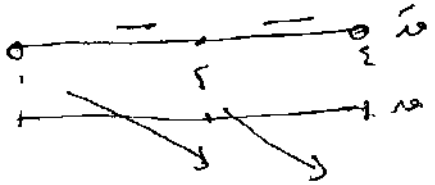
$م'(س) = 0 \Leftrightarrow 3(س - 2)^2 = 0$

$(س - 2)^2 = 0$

$س = 2$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 4$ حيث $م(4) = 8$

قيمة صغرى مطلقة عندما $س = 0$ حيث $م(0) = -8$



د) $م(س) = \begin{cases} 3س + 1 & ، س \leq 3 \\ 5 - س & ، 3 < س \leq 5 \end{cases}$

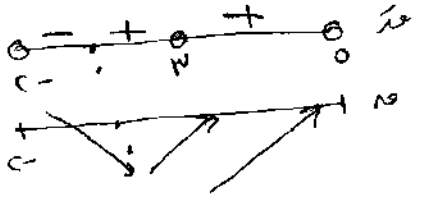
$م'(س) = \begin{cases} 3 & ، س < 3 \\ -1 & ، 3 < س < 5 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 3 \end{cases}$

$م'(س) = 0 \Leftarrow$ لا يوجد

للاقتران $م(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 3$ حيث $م(3) = 10$

قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 0$ حيث $م(0) = 1$



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

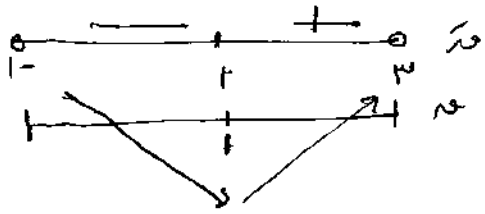
د) $ق(س) = |(س-1)^3| = \begin{cases} (1-س)^3 & ، س < 1 \\ (س-1)^3 & ، س \geq 1 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -3(1-س)^2 & ، س < 1 \\ 3(س-1)^2 & ، س > 1 \end{cases}$ غير معرفة عند $س = 1$

للاقتران $ق(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 1$ لأن $ق(1) = 0$ وهي مطلقة

قيمة عظمى مطلقة هي (3)



هـ) $ق(س) = \frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{3}س^3$ ، $س \in [0, 3]$

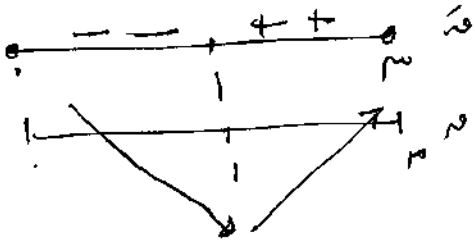
$ق'(س) = س^3 - س^2 = س^2(س-1)$ ، $ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ أو $س = 1$

للاقتران $ق(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 1$ لأن $ق(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

قيمة عظمى مطلقة هي $ق(3) = \frac{27}{4} - 9 = \frac{9}{4}$

قيمة صغرى مطلقة هي $-\frac{1}{12}$



و) $ق(س) = \sqrt[3]{س^2}$ ، $س \in [-8, 1]$

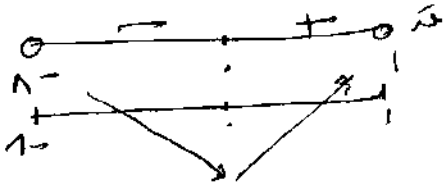
$ق'(س) = \frac{2}{3}س^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

للاقتران $ق(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 0$ لأن $ق(0) = 0$

قيمة صغرى مطلقة هي $ق(0) = 0$

قيمة عظمى مطلقة هي $ق(-8) = 4$

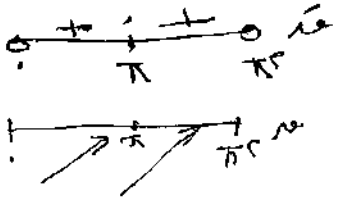


ز) $ق(س) = س + جا س$ ، $س \in [0, 2\pi]$ ⇐ $ق'(س) = 1 + جتا س$ ⇐ $ق'(س) = 0$ ⇐ $س = \pi$

للاقتران $ق(س)$:

قيمة صغرى مطلقة عندما $س = 0$ لأن $ق(0) = 0$

قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 2\pi$ لأن $ق(2\pi) = 2\pi$

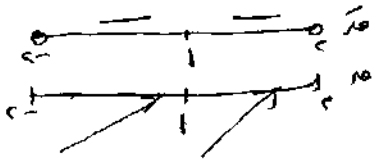


ح) $ق(س) = (1-س)^3$ ، $س \in [-2, 2]$ ⇐ $ق'(س) = 3(1-س)^2$ ⇐ $ق'(س) = 0$ ⇐ $س = 1$

للاقتران $ق(س)$:

قيمة عظمى مطلقة هي $ق(-2) = 27$

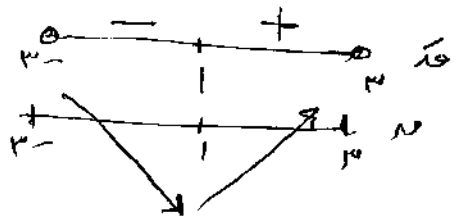
قيمة صغرى مطلقة هي $ق(2) = -1$



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $د(س) = (1-س)^2$ ، $س \in [-3, 3]$

$د'(س) = 3(1-س)^2 \Leftarrow د'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

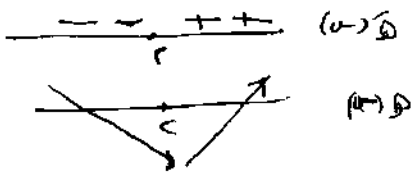


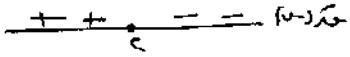
لا تقترن د(س) :

قيمة صغرى محلية هي د(1) = 0 وطلقة

قيمة كبرى مطلقة هي د(-3) = 256

د) $ه(س) = (1-س)(1-د(س))^3 \Leftarrow ه'(س) = -3د'(س)(1-د(س))^2 \Leftarrow ه'(س) = 0 \Leftarrow د'(س) = 0$ يعني $س = 2$

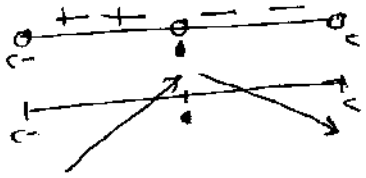




لا تقترن ه(س) في صغرى محلية

عند $س = 2$ هي $ه(2) = (1-د(2))^3 = (1-3)^3 = -8$

ب) مجموعة قيم س التي عندها نقط حرجة لاقتران د(س) = {-2، 0، 2}



ج) الاقتران متزايد في الفترة $[-2, 0]$

ومتناقص في $[0, 2]$

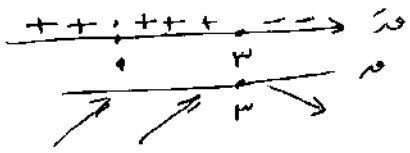
د) الاقتران في صغرى محلية عند $س = 0$

هـ) م الاقتران نقط حرجة عند $س = 0$ ، $س = 3$

و) معطيا الاقتران متزايد في $[-3, 0]$

ومتناقص في $[0, 3]$

ز) الاقتران في صغرى محلية عند $س = 3$

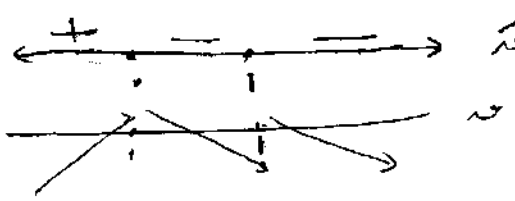


ح)

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ب) $د(س) = \begin{cases} ٣ - س^{٤} & ، س \leq ١ \\ \frac{٣}{س} & ، س > ١ \end{cases}$ ⇐ $د'(س) = \begin{cases} -٤س^{٣} & ، س \leq ١ \\ -\frac{٣}{س^{٢}} & ، س > ١ \end{cases}$

$د'(س) = ٠$ ⇐ $س = ٠$ أو $س = ١$



$د(س)$ متزايدة في $(-\infty, ١]$

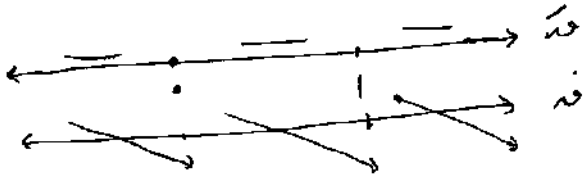
$د(س)$ متناقصة في $[١, \infty)$

جـ) $د(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٣} & ، س \leq ١ \\ \frac{٣}{س} & ، س > ١ \end{cases}$

$د'(س) = \begin{cases} -٣س^{٢} & ، س < ١ \\ -\frac{٣}{س^{٢}} & ، س > ١ \end{cases}$ ⇐ $د'(س)$ غير معرفة عند $س = ١$

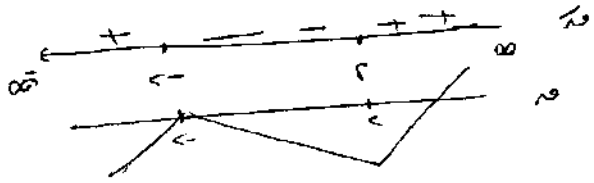
$د'(س) = ٠$ ⇐ $س = ٠$

$د(س)$ متناقصة في ح



٢) $د(س)$ متزايدة في $(-\infty, -٢] \cup [٢, \infty)$

$د(س)$ متناقصة في $[-٢, ٢]$

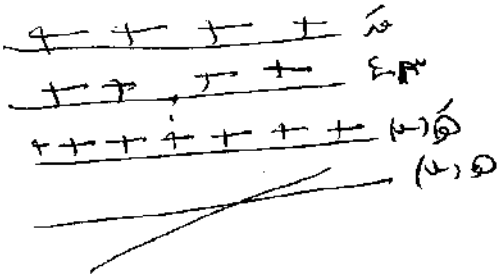


٣) $ق(س) = د(س) + س^{٣}$

$ق'(س) = د'(س) + ٣س^{٢}$

علماً أن $ق'(س) > ٠$

$ق(س)$ متزايدة في $[٩, ٧]$



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

التقعر

تدريب (١)

$$\text{د}(س) = س^4 - 6س^3 + 24س + 7 \quad ، \quad [-5, 5]$$

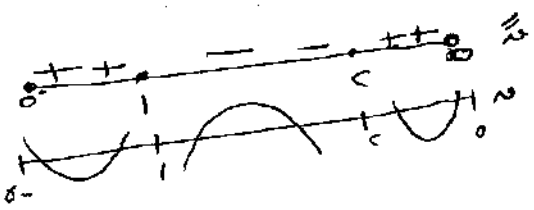
$$\text{د}'(س) = 4س^3 - 18س^2 + 24س \Leftarrow \text{د}''(س) = 12س^2 - 36س + 24$$

$$\text{د}''(س) = 0 \Leftarrow 12(س^2 - 3س + 2) = 0 \Leftarrow (س-1)(س-2) = 0 \Leftarrow س = 1 \text{ ، } س = 2$$

الاقتران مقعر لأعلى في الفترات

$$[-5, 1] \text{ و } [2, 5]$$

الاقتران مقعر لأسفل في الفترة $[1, 2]$

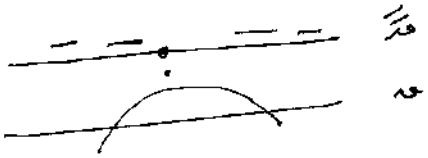


تدريب (٢) :

$$\text{د}(س) = س^{\frac{4}{3}} \Leftarrow \text{د}'(س) = \frac{4}{3}س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow \text{د}''(س) = \frac{4}{9}س^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{د}''(س) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^2}} \Leftarrow \text{د}''(س) \text{ غير موجودة عندما } س = 0$$

الاقتران مقعر لأسفل في الفترة $(-\infty, \infty)$



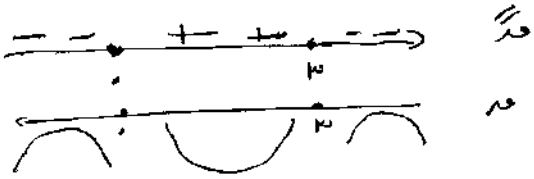
تدريب (٣) :

$$\text{د}(س) = 3س^4 - س^6 \Leftarrow \text{د}'(س) = 12س^3 - 6س^5 \Leftarrow \text{د}''(س) = 36س^2 - 30س^4$$

$$\text{د}''(س) = 0 \Leftarrow (12س^2)(3 - س) = 0 \Leftarrow س = 0 \text{ ، } س = 3$$

للاقتران نقطتي انعطاف هما

$$(0, 0) \text{ ، } (3, 81)$$



تدريب (٤) :

$$\text{د}(س) = س^3 - 12س + 3 \Leftarrow \text{د}'(س) = 3س^2 - 12 \Leftarrow \text{د}'(س) = 0 \Leftarrow س = \pm 2$$

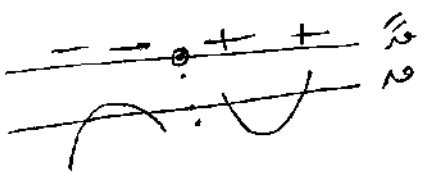
$$\text{د}''(س) = 6س \Leftarrow \text{د}''(-2) = -12 < 0 \text{ ∴ توجد قيمة عظمى محلية عندما } س = -2$$

$$\text{د}''(2) = 12 > 0 \text{ ∴ توجد قيمة صغرى محلية عندما } س = 2$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

أ) $ق(س) = س + \frac{4}{س}$ ⇐ $ق'(س) = 1 - \frac{4}{س^2}$ ⇐ $ق''(س) = \frac{8}{س^3}$

$ق'(س) = 0$ ⇐ $س = \pm 2$ ∉ مجال $ق$



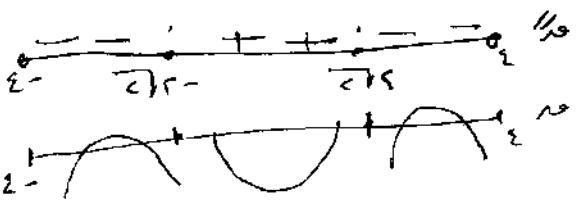
متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأسفل في $[-\infty, 0)$

متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأعلى في $(0, \infty]$

ب) $ق(س) = \sqrt{16 - س^2}$ ⇐ $ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{16-س^2}}$

$ق''(س) = \frac{-\sqrt{16-س^2} \times 1 + س \times \frac{-س}{\sqrt{16-س^2}}}{16 - س^2} = \frac{\frac{-(16-س^2) - س^2}{\sqrt{16-س^2}}}{16-س^2} = \frac{-16+س^2-س^2}{\sqrt{(16-س^2)^3}}$

$ق''(س) = \frac{-16}{\sqrt{(16-س^2)^3}}$ ⇐ $ق''(س) = 0$ ⇐ $س = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

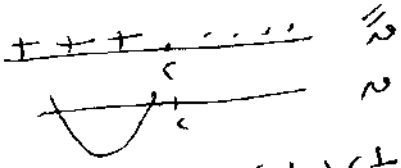


متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأسفل في $[-4, -2\sqrt{2}]$, $[2\sqrt{2}, 4]$

متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأعلى في $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

جـ) $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س < 2 \\ 5 - س & ، س \geq 2 \end{cases}$ ⇐ $ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، س < 2 \\ -1 & ، س > 2 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 2 & ، س > 2 \\ 0 & ، س < 2 \end{cases}$

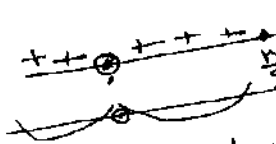


متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأعلى في $(-\infty, 2)$

د) $ق(س) = \left(\frac{س-1}{س}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{س}\right)^2$ ⇐ $ق'(س) = 2\left(1 - \frac{1}{س}\right)\left(\frac{1}{س^2}\right) = 2\left(\frac{1}{س^2} - \frac{1}{س^3}\right)$

$ق''(س) = 2\left(\frac{-2س}{س^4} + \frac{3}{س^4}\right) = 2\left(\frac{-2س+3}{س^4}\right) = \frac{-4س+6}{س^4}$ ⇐ $ق''(س) = 0$ ⇐ $س = \frac{3}{2}$

$س \neq 0$

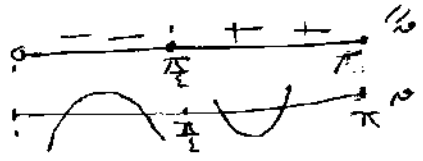


متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأعلى في $(0, \frac{3}{2}]$

متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأسفل في $[\frac{3}{2}, \infty)$

هـ) $ق(س) = جتاس - جاس + 1$ ⇐ $ق'(س) = -جاس - جتاس$

$ق''(س) = -جتاس + جاس = 0$ ⇐ $جاس = جتاس$ ⇐ $س = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ∉ $(\pi, 2\pi)$



متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأعلى في $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

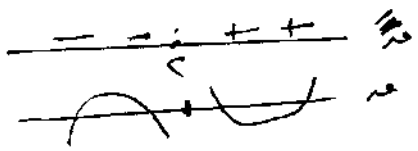
متغيرا الاقتران $ق$ و $س$ متقعر لأسفل في $[0, \frac{\pi}{4}]$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $ق(س) = س^3 - 6س^2 + 9س + 2 \Rightarrow ق'(س) = 3س^2 - 12س + 9 \Rightarrow ق''(س) = 6س - 12$

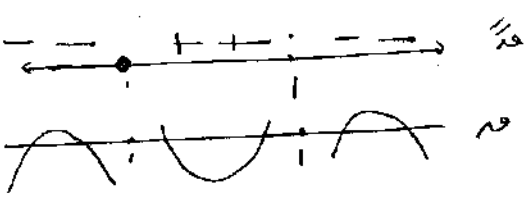
$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 3$ أو $س = 1$

للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 2$



د) $ق(س) = \frac{1}{5}س^5 - \frac{1}{3}س^3 \Leftarrow ق'(س) = س^4 - س^2 \Leftarrow ق''(س) = 4س^3 - 2س$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ أو $س = 1$ أو $س = -1$



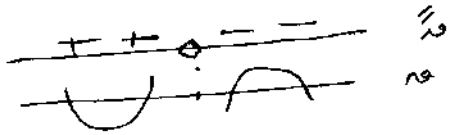
نقطتا انعطاف عند $س = 0$ ، $س = 1$

بما أن الاقتران $ق(س)$ متصل على $[-1, 1]$

فهو تزايدي على $[0, 1]$

وهو تناقصي على $[-1, 0]$ ، $(-\infty, -1]$ ، $[1, \infty)$

هـ) $ق(س) = س^{\frac{5}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{5}{3}س^{\frac{2}{3}} \Leftarrow ق''(س) = \frac{10}{9}س^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$



بما أن $ق(س)$ متصل على $[-\infty, \infty)$

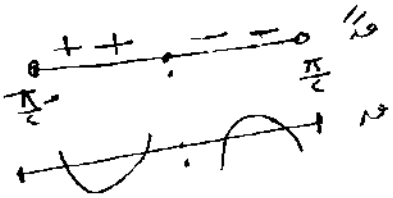
فهو تزايدي على $[-\infty, 0]$

وهو تناقصي على $[0, \infty)$

نقطة انعطاف عند $س = 0$

و) $ق(س) = س - ظا س \Rightarrow ق'(س) = 1 - قا^2 س \Rightarrow ق''(س) = -2قا^2 س ظا س = -2 \frac{جا س}{جتا^3 س}$

للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$



ز) $ق(س) = جا س - جتا س \Rightarrow ق'(س) = جتا س + جا س \Rightarrow ق''(س) = -جا س + جتا س$

$ق''(س) = 0 \Leftarrow جا س = جتا س \Leftarrow ظا س = 1$

$س = \frac{\pi}{4}$ أو $س = \frac{5\pi}{4}$

$ق''(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$

$\therefore$ للاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = \frac{3\pi}{4}$

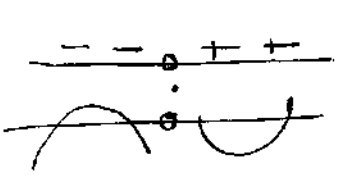
$ق''(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 0$

$\therefore$ للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س = \frac{7\pi}{4}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

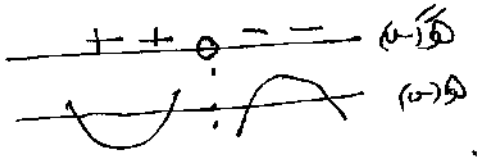
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) $م(س) = \frac{1}{س}$ ⇐ $م'(س) = \frac{-1}{س^2}$ ، $م''(س) = \frac{2}{س^3}$



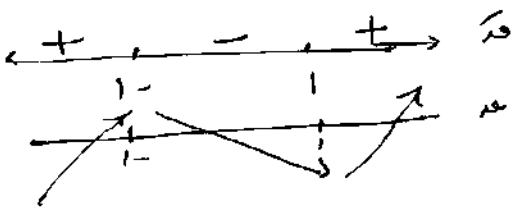
مقعر للأعلى في $[0, \infty)$
مقعر للأسفل في $(-\infty, 0)$
لا يوجد نقطة انعطاف لأن $م(س)$ غير معرف عند $س = 0$
وعند $س = 0$ مماس رأسي

$ك(س) = س^{\frac{1}{3}}$ ⇐ $ك'(س) = \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}}$ ، $ك''(س) = \frac{-2}{9} س^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9 \sqrt[3]{س^5}}$



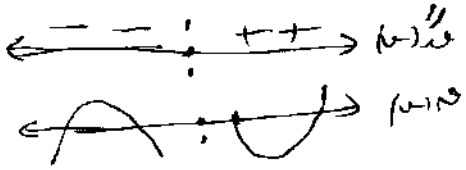
مقعر للأعلى في $(-\infty, 0]$
مقعر للأسفل في $[0, \infty)$
للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$ ومماس عند $س = 0$

٦) أ) $م(س)$ متزايد في $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$م(س)$ متناقص في $[-1, 1]$



ب) $م'(س) = 0 \Leftarrow س = \pm 1$
ج) للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = -1$
قيمة صغرى محلية عند $س = 1$

د) $م'(-1) = 0$ ، $م''(-1) < 0 \Leftarrow م(-1)$ قيمة عظمى محلية
$م'(1) = 0$ ، $م''(1) > 0 \Leftarrow م(1)$ قيمة صغرى محلية

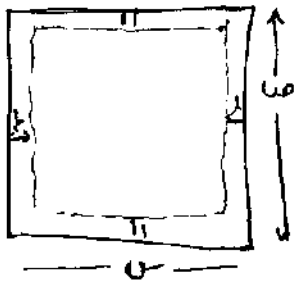


هـ) مقعر للأعلى في $[0, \infty)$
مقعر للأسفل في $(-\infty, 0]$
و) للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تطبيقات القيم العظمى

تدريب (١):



$م = س ص = ١٢٨$

$ص = \frac{١٢٨}{س}$

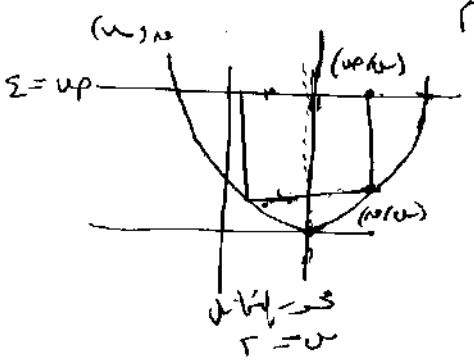
$م = س(٣٠ - س) = ٣٠س - س^٢$

$م' = ٣٠ - ٢س = ٠ \Leftarrow س = ١٥$

$م'' = -٢ < ٠$ ∴ عظمى

$م_{max} = ٣٠(١٥) - (١٥)^٢ = ٤٥٠ - ٢٢٥ = ٢٢٥$ م^٢

تدريب (٢):



$م = \frac{١}{٢}(٣س + ٤ - س^٢ + ٢س - ٤)(٣س + ٤ - ٤ + ٢س + س^٢)$

$م = \frac{١}{٢}(-س^٢ + ٥س)(٥س + س^٢)$

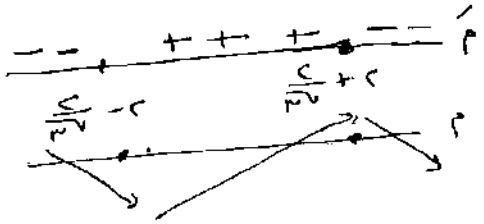
$م = \frac{١}{٢}(-س^٣ - ٥س^٢ + ٥س^٢ + ٢٥س)$

$م = \frac{١}{٢}(-س^٣ + ٢٥س)$

$م' = \frac{١}{٢}(-٣س^٢ + ٢٥) = ٠ \Leftarrow س = \pm\sqrt{\frac{٢٥}{٣}}$

∴ أكبر مساحة تكون عندما $س = \sqrt{\frac{٢٥}{٣}}$ م

تدريب (٣):



∴ أكبر مساحة للمستطيل عندما

$س = (\sqrt{\frac{٢٥}{٣}}, ٢\sqrt{\frac{٢٥}{٣}})$ م

تدريب (٣):

$م_{\Delta} = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times جا\theta = ٣٢ جا\theta$

$م' = ٣٢ جتا\theta = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{٢}$

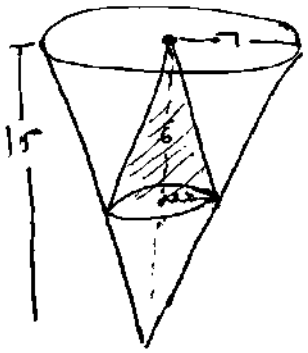
$م'' = -٣٢ جا\theta$

$م''|_{\theta = \frac{\pi}{٢}} = -٣٢ < ٠$ ⇐ أكبر مساحة للمثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{٢}$

أي عندما المثلث قائم الزاوية

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤) :



من التشابه

$\frac{ع - ١٢}{١٢} = \frac{نق}{٦}$

$٦ ع - ١٢ = ١٢ نق$

$ع = ١٢ - ٢ نق$

$ح = \frac{\pi}{٣} نق^{٢} ع$

$ح = \frac{\pi}{٣} نق^{٢} (١٢ - ٢ نق)$

$ح = \frac{\pi}{٣} (٦ نق^{٢} - نق^{٣})$

$ح = \frac{\pi}{٣} (٣ نق^{٢} - نق^{٣})$

$ح' = \frac{\pi}{٣} (٦ نق - ٣ نق^{٢}) = \pi (٢ نق - نق^{٢})$

$ح' = ٠ \Leftarrow \pi (٢ نق - نق^{٢}) = ٠ \Leftarrow \pi نق (٢ - نق) = ٠$

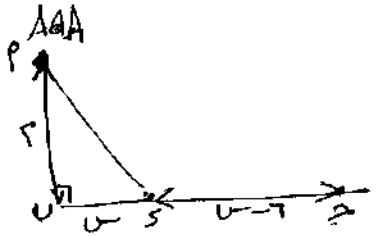
$نق = ٠$ مرفوض ، $نق = ٢$

$ح'' = \pi (٢ - ٢ نق)$

$ح''(٢) = -٢ \pi < ٠$ ∴ عند $نق = ٢$ يوجد نهاية عظمى

∴ أكبر حجم $= ح(٢) = \frac{\pi}{٣} (٩٦ - ٢٤) = ٢٤ \pi$ سم^{٣}

تدريب (٥)



$ت = ١٠٠٠٠ (٥ \sqrt{س^{٢} + ٤} + ٣ (٦ - س))$

$ت' = ١٠٠٠٠ (\frac{٥ س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} - ٣)$

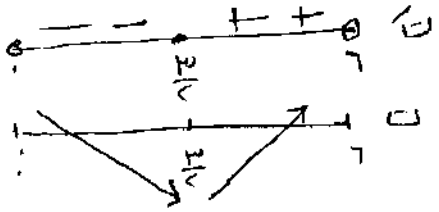
$ت' = ٠ \Leftarrow \frac{٥ س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} = ٣ \Leftarrow ٥ س = ٣ \sqrt{س^{٢} + ٤}$

$٢٥ س^{٢} = ٩ (س^{٢} + ٤)$

$١٦ س^{٢} = ٣٦ \Leftarrow س = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

∴ أقل تكلفة ممكنة عندما $س = \frac{٣}{٢}$

وأكبر تكلفة عندما $س = ٦$



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

تمرين (١) صـ ٢١٥

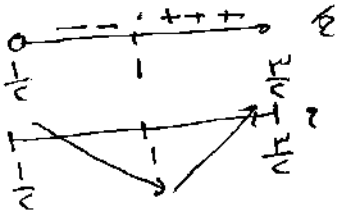
$$\text{جـ} = س + \frac{١}{س} = \frac{س^٢ + ١}{س} \; ; \; س \in \left[\frac{١}{٢} \, ، \, ٣\right]$$

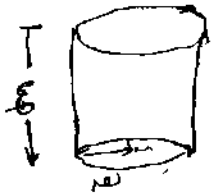
$$\text{جـ}' = ١ - \frac{١}{س^٢} \Leftarrow \text{جـ} = ٠ \Leftarrow \frac{س^٢ - ١}{س^٢} = ٠ \Leftarrow س = ١ \; ، \; س = -١ \notin$$

$$\text{جـ}\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢} + ٢ = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{جـ}(٣) = \frac{٣}{٣} + \frac{٣}{٣} = \frac{١٣}{٣}$$

∴ أكبر قيمة عندما $س = ٣$ ، أقل قيمة عندما $س = \frac{١}{٢}$





$$\text{ح} = \text{نق}^٢ \text{ع} \Leftarrow ١١٠٠\pi = \text{نق}^٢ \times ٤٠ \Leftarrow \text{نق} = ٥$$

$$\text{م} = ٢\pi \text{نق}^٢ + ٢\pi \text{نق} \text{ع}$$

$$\text{م} = ٢\pi \text{نق}^٢ + \frac{٢٠٠\pi}{\text{نق}}$$

$$\text{م}' = ٤\pi \text{نق} - \frac{٢٠٠\pi}{\text{نق}^٢} \Leftarrow \text{م}' = ٠ \Leftarrow ٤\pi \text{نق} = \frac{٢٠٠\pi}{\text{نق}^٢} \Leftarrow \text{نق}^٣ = ٥٠ \Leftarrow \text{نق} = ٥\sqrt[٣]{٢}$$

$$\text{م}'' = ٤\pi + \frac{٤٠٠\pi}{\text{نق}^٣} \Leftarrow \text{م}''(٥\sqrt[٣]{٢}) = ٤\pi + \frac{٤٠٠\pi}{٥٠} = ١٢\pi > ٠$$

∴ عند $\text{نق} = ٥\sqrt[٣]{٢}$ تكون م أقل ما يمكن

$$\text{أقل م} = ٢\pi(٥\sqrt[٣]{٢})^٢ + \frac{٢٠٠\pi}{٥\sqrt[٣]{٢}} = ٣٠\pi\sqrt[٣]{٤}$$

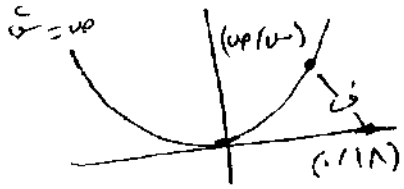
$$\text{ع} = \frac{\text{ح}}{\pi \text{نق}^٢} = \frac{١٠٠\pi}{\pi(٥\sqrt[٣]{٢})^٢} = ٥\sqrt[٣]{٤}$$

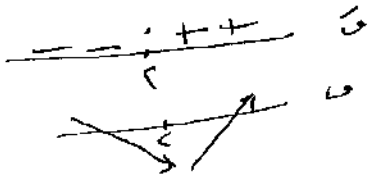
(٣)

$$\text{ص} = \sqrt{(س - ١٨)^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{(س - ١٨)^٢ + س^٤}$$

$$\text{ص}' = \frac{٢(س - ١٨) + ٤س^٣}{٢\sqrt{(س - ١٨)^٢ + س^٤}}$$

$$\text{ص}' = ٠ \Leftarrow ٤س^٣ + ٢(س - ١٨) = ٠ \Leftarrow س = ٢$$

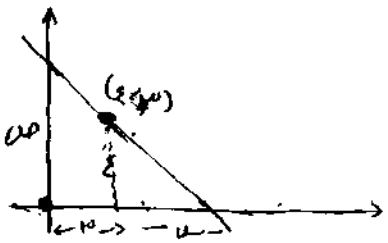


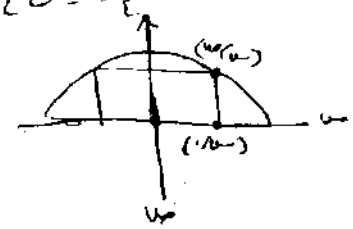


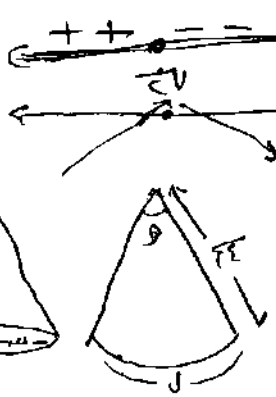
أقل بعد يمكن عندما $س = ٢$ وبالتالي

$$\text{ف}(٢) = \sqrt{٢٥٦ + ١٦} = \sqrt{٢٧٢}$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم







جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

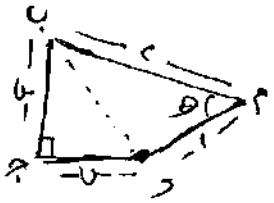
٨) الربح = البيع − التكلفة ⇐ ر(س) = ٥٠ س − ٠٫١ س² − ٥٠ س − ١٠٠

ر(س) = ١٥٠ س − ٠٫١ س² − ٥٠ ⇐ ر′(س) = ١٥٠ − ٠٫٢ س ⇐ ر′(س) = ٠

س = ١٥٠ / ٠٫٢ = (١٥٠ × ١٠٠) / ٢ = ٧٥٠

ر′ : + + + + − − − − ، ٧٥٠

الربح يمكن سنوياً عندما س = ٧٥٠ قطعة



٩) م = ½ × ٢ × ١ × جتاهـ + ½ × ٢ × ١ × جاهـ

م = جاهـ + ٢ جتاهـ

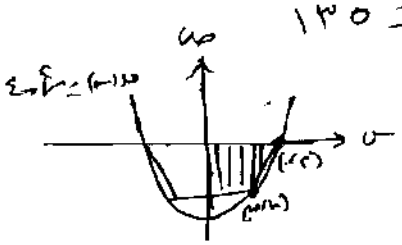
م = جاهـ − جتاهـ + ٢/٤ ، ٠ < هـ < π

م′(هـ) = جتاهـ + جاهـ

م′(هـ) = ٠ ⇐ جتاهـ = −جاهـ ⇐ هـ = ٣π/٤

م″(هـ) = −جاهـ + جتاهـ ⇐ م″(٣π/٤) = −½ − ½ = −√٢ < ٠

∴ الكمية المطلوبة تتحقق عندما هـ = ٣π/٤ = ١٣٥°



١٠) م = ½ (س + ٢)(٤ − س²)

م′(س) = (س + ٢)(٤ − س²) + (١)(٤ − س²)

م′(س) = −٣ س² − ٤ س + ٤

م′(س) = ٠ ⇐ −(٣ س − ٢)(س + ٢) = ٠ ⇐ س = ٢/٣ ، س = −٢

م″(س) = −٦ س − ٤

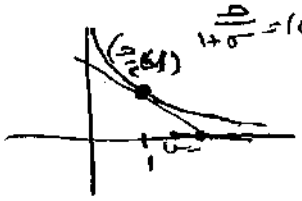
م″(٢/٣) = −٨ < ٠

∴ الكمية المطلوبة تتحقق عندما س = ٢/٣

م(٢/٣) = (٢٥/٩)(٣٢/٢٧) = ٨٠/٢٧ وحدة مربعة.

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

أسئلة الوحدة



١) ميل المماس = $\left|\frac{-٤}{(١+س)^{٢}}\right|_{س=١} = \frac{-٤}{٤} = -١$

معادلة المماس هي: $ص - \frac{٢}{٢} = -١(س - ١) \Leftarrow ص = -س + \frac{٣}{٢}$

المماس يقطع محور السينات عندما $ص = ٠ \Leftarrow س = ٣$

المماس يقطع محور الصادات عندما $س = ٠ \Leftarrow ص = \frac{٣}{٢}$

$\Delta = \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٨}$ وحدة مربعة

٢) $ف(ن) = \frac{ن}{٢} - جتا ن \Rightarrow ف'(ن) = \frac{١}{٢} - ٢ جتا ن جتا ن$

$ف'(ن) = \frac{١}{٢} - جتا ن \Rightarrow ف'(ن) = ٠ \Leftarrow جتا ن = \frac{١}{٢} \Leftarrow ن = ٢ن = \frac{\pi}{٣} \Leftarrow ن = \frac{\pi}{٦}$

$ن = ٢ن = ١٥٠° \Leftarrow ن = \frac{٥\pi}{٦}$

$ح''(ن) = -٢ جتا ن$

$ح''(\frac{\pi}{١٢}) = -٢ جتا \frac{\pi}{٦} = -٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

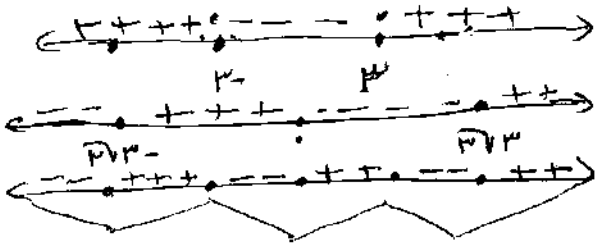
$ح''(\frac{٥\pi}{١٢}) = -٢ جتا \frac{٥\pi}{٦} = -٢ \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

٣) $ق(س) = \sqrt{س^{٣} - ٧س}$

$ق'(س) = \frac{٣س^{٢} - ٧}{٢\sqrt{س^{٣} - ٧س}}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٧ = ٠ \Leftarrow س = \pm\sqrt{\frac{٧}{٣}}$

$ق'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س^{٣} - ٧س = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = \pm\sqrt{٧}$



ق متزايدة في $(-\sqrt{٧}, -\sqrt{٣}) \cup (٠, \sqrt{٣}) \cup (\sqrt{٧}, \infty)$

ق متناقصة في $(-\infty, -\sqrt{٧}) \cup (-\sqrt{٣}, ٠) \cup (\sqrt{٣}, \sqrt{٧})$

ق لها قيمة عظمى محلية عند $س = -\sqrt{٣}$ ، $ق(-\sqrt{٣}) = ٣\sqrt{٣}$

ق لها قيمة صغرى محلية عند $س = ٠$ ، $ق(٠) = ٠$

ق لها قيمة صغرى محلية عند $س = \sqrt{٣}$ ، $ق(\sqrt{٣}) = -٣\sqrt{٣}$

٤) $ق(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} - ٤س + ٥$

$ق'(س) = ٦س^{٢} + ١٠س - ٤$

$ق''(س) = ١٢س + ١٠$

$ق''(١) = ٢٢ > ٠$

$ق'(١) = ٦ + ١٠ - ٤ = ١٢$

$ق'(-٢) = ٢٤ - ٢٠ - ٤ = ٠$

$ق''(-٢) = -٢٤ + ١٠ = -١٤ < ٠$

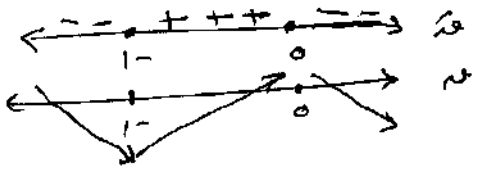
$ق(-٢) = -١٦ + ٢٠ + ٨ + ٥ = ١٧$

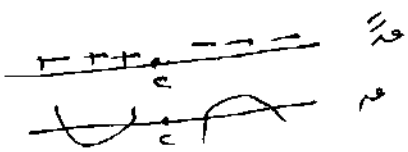
$ق(١) = ٢ + ٥ - ٤ + ٥ = ٨$

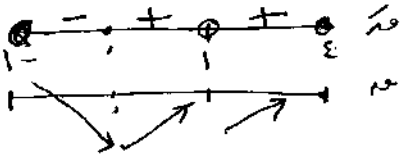
$ق(١) = ٠ \Leftarrow ٥ + ج = ٠ \Leftarrow ج = -٥$

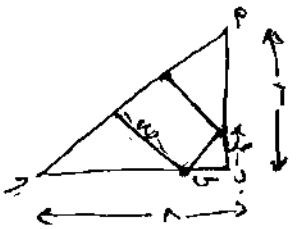
$ق(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} - ٤س - ٥$

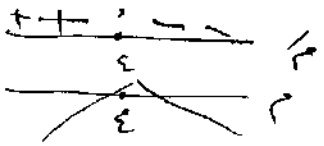
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم











جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم