بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٤ / الدورة الصيفية

(ورقة عمية/محدود)

المبحث : الرياضيات / المستوى الرابع
القـــرع : العلمي

مدة الامتحـان : ٠٠ ٢ د س
اليوم والتاريخ : الأحد ٢٠١٤/٦/٢٩

ملحوظة : أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (٥)، علماً بأن عدد الصفحات (٣).

السـؤال الأول : (٢٠ علامة)

أ) جـد التكاملات الآتية :

١) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}}$ د س (حيث هـ: العدد النيبيري) (٧ علامات)

٢) $\int \frac{س - ١٣}{٢س^{٢} - ٧س + ٣}$ د س (٨ علامات)

ب) إذا كان $\int$ (قَ(س) – س) دس = لـــو$_{هـ}$ | قتـا س + ظتـا س | + ٢

فأثبت أن قَ(س) = س – قتـا س (٥ علامات)

السـؤال الثاني : (١٨ علامة)

أ) جـد معادلة القطـع الناقـص الذي طول محوره الأصغر (٢) وحدة، وبؤرتاه هما نقطتي تقاطع منحنى القطع المكافئ الذي معادلته س^{٢} = ص مع منحنى القطع الناقص الذي معادلته ص^{٢} = ١٥ – ٣س^{٢} (١٠ علامات)

ب) جـد إحداثيـات الرأس والبـؤرة ومعادلتي الدليـل والمحـور للقطـع المخروطـي الـذي معادلتـه

٣ س^{٢} – ٤ = ٨ ص + ١٢ س

(٨ علامات)

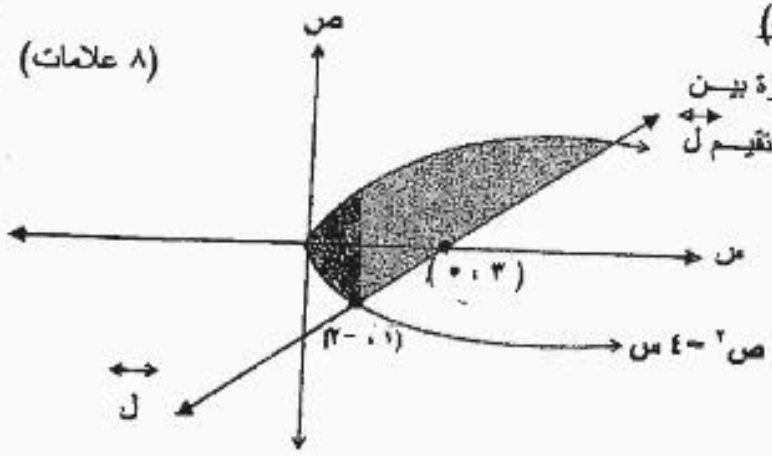
يتبع الصفحة الثانية ...

السـؤال الثالث : (٢١ علامة)

(٨ علامات)

أ) جـد مساحة المنطقة المظللة المحصـورة بيـن منحنـى العلاقـة ص^{٢} = ٤ س ، والمستقيـم ل

انظر الشكل المجاور.



ب) جـد التكاملات الآتية :

(٧ علامات)

١) $\int \frac{-س}{(س+1)\sqrt{س+1}}$ د س

(٦ علامات)

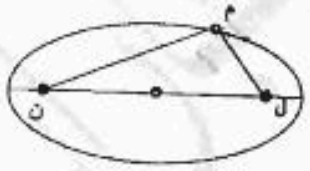
٢) $\int \frac{س + جا س}{١ + جتا س}$ د س

السـؤال الرابع : (٢٢ علامة)

أ) جـد إحداثيـات المركـز والرأسين والبؤرتين والاختلاف المركـزي للقطـع المخروطي الـذي معادلته ٩س^{٢} + ٨ ص − ٤ = ٤ص^{٢} + ٣٦ س

(١٠ علامات)

ب) الشـكل المجـاور يمثل منحنى قطع ناقص مركـزه النقطة (١ ، ١) وبؤرتاه النقطتين ل ، ن واختلافـه المركزي (٠,٦)، فإذا كـان محيـط المثلـث م ل ن يسـاوي (٦٤) وحـدة ، فجـد معادلة هـذا القطـع.



(٨ علامات)

ج) تتحـرك النقطـة و(س ، ص) فـي المستـوى الديكارتي بحيـث يتحدد موقعها في اللحظة ن ≥ صفر بالمعادلتين س = جتـا ٢ ن ، ص = ٣ جـا ن ، جد معادلة مسار النقطة و ، ثم بيّن نوعه.

(٤ علامات)

يتبع الصفحة الثالثة ...

السـؤال الخامس : (١٩ علامة)

أ) يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = √ع ؛ ع > صفر

ت : تسارع الجُسيم، ع : سرعة الجُسيم

فإذا علمت أن السرعة الابتدائية للجُسيم (٩) م / ث ، وقطع مسافة (٨٠) متراً في (٤) ثوانٍ، فجد المسافة التي قطعها بعد ثانيتين من بدء حركته. (٧ علامات)

ب) إذا كان $\int_{٢}^{ب} [\frac{١}{٢} س + ٣] دس = ٢٤$ ، ب > ٢ ، فجد قيمة الثابت ب . (٦ علامات)

ج) إذا كان ق" (س) = جـــا س + هـــ^{٢س} ، وكان ق(٠) = $\frac{١}{٤}$ ، ق َ(٠) = $\frac{١}{٢}$

فجـد قاعدة الاقتران ق(س) (٦ علامات)

(انتهت الأسئلة)

المبحث: الرياضيات
الفرع: العلمي / م ع
مدة الامتحان: ٢
التاريخ: ٢٠١٤/٦/٢٩

رقم الصفحة في الكتاب	
٢٩٠	السؤال الأول/
٢٨٤	٧) أ) $\frac{\text{هـ}^{س}}{\text{هـ}^{س}+\text{هـ}^{-س}}$

نبرهن أن $\text{ص}_{\text{هـ}^{س}} = \text{هـ}^{س}$ (١)

$$\begin{cases} \text{ص}_{\text{هـ}^{س}} = \text{هـ}^{س} \\ \text{ص}_{س} = \frac{1}{\text{ص}_{\text{هـ}^{س}}} \end{cases}$$ (١) أي صحيحا

$$\text{ص}_{\frac{\text{هـ}^{س}}{\text{هـ}^{س}+\text{هـ}^{-س}}} = \frac{\text{ص}_{\text{هـ}^{س}}}{(\text{هـ}^{س}+\text{هـ}^{-س})^{2}} \times \frac{1}{\text{ص}_{\text{هـ}^{س}}}$$ (١)

$$= \frac{\text{هـ}^{س}}{(\text{هـ}^{س}+\text{هـ}^{-س})^{2}} \times \text{ص}_{س}$$ (١)

$$= \frac{\text{هـ}^{س}}{(\text{هـ}^{س}+\text{هـ}^{-س})^{2}} \times \frac{\text{هـ}^{س}}{\text{هـ}^{س}}$$ (١)

$$= \frac{1}{2} \text{ لـ} \left| \frac{\text{هـ}^{2س}}{\text{هـ}^{2س}+1} \right| + \text{ث} \cdot$$ (١)

$$= \frac{1}{2} \text{ لـ} \left| \frac{\text{هـ}^{2س}}{\text{هـ}^{2س}+1} \right| + \text{ث} \cdot$$ (١)

* إذا لم يكتب $\frac{1}{2}$ يخسر علامة واحدة.

* إذا ضاع أية خطوة يخسر علامتها.

رقم الصفحة في الكتاب

٢٩٨

نتائج السؤال الأول

ج) ٨ $\int \frac{١٣-س}{س^{٣}+٣س^{٢}-٤س-١٢}$ دس

$\frac{١٣-س}{س^{٣}+٣س^{٢}-٤س-١٢} = \frac{١٣-س}{(س-٣)(س-٢)(س+٢)}$ (١)

$\frac{ب}{(س-٣)} + \frac{أ}{(س+٢)(س-٢)}$ (١)

$= \frac{أ(س-٢)+ب(س+٢)(س-٣)}{(س+٢)(س-٢)(س-٣)}$

$١٣-س = أ(س-٢)+ب(س+٢)(س-٣)$ (١)

وبوضع $س = ٣$ ⇐ $١٠ = ٥ب$

$ب = ٢$ (١)

وبوضع $س = -٢$ ⇐ $١٥ = -٥أ$

$أ = -٣$ (١)

$\therefore ت = \int \left(\frac{-٣}{س-٢} + \frac{٢}{س-٣}\right)$ دس

$= -٣ \int \frac{١}{س-٢}$ دس $+ ٢ \int \frac{١}{س-٣}$ دس (١)

$= -٣ \ln|س-٢| + ٢ \ln|س-٣| + ث$ (٢)

* أي خطأ في الخطوات يخصم درجة

رقم الصفحة في الكتاب

تابع السؤال الأول/

ب) (٥) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\text{قا}(س) - س)$ جتا س + جتا س ظا^{-1} س د س

٢٢٨

٢٨٢

أثبت أن قا(س) = س − ظا س .

البرهان :

(١) قا(س) − س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}} - \frac{\text{ظا س جتا س}}{\text{جتا س}}$ (١)

= $\frac{\text{جتا س} - \text{ظا س جتا س}}{\text{جتا س}}$ (١)

= $\frac{\text{جتا س}(\text{جتا س} - \text{ظا س})}{\text{جتا س}}$ (١)

∴ قا(س) − س = جتا س − ظا س

قا(س) = س − ظا س وهو المطلوب .

(١)

رقم الصفحة في الكتاب ٣٤٨ — ٣٥٣

السؤال الثاني :

م) ١٠ بإيجاد نوع القطع الناقص ثم إيجاد معادلته :

$٤س^٢ + ص^٢ = ١٥$

$س^٢ - ص = ٠ \Leftarrow ص = س^٢$

$٤س^٢ + (س^٢)^٢ = ١٥$ (١)

$س^٤ + ٤س^٢ - ١٥ = ٠$ (١)

$(س^٢ - ٣)(س^٢ + ٥) = ٠$ (١)

$س^٢ + ٥ \neq ٠$ لماذا

$س^٢ = ٣ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٣}$ (١)

عندما $س = \sqrt{٣} \Leftarrow ص = ٣$ $\therefore (\sqrt{٣}, ٣)$ (١)

وعندما $س = -\sqrt{٣} \Leftarrow ص = ٣$ $\therefore (-\sqrt{٣}, ٣)$

$\therefore ج = ٢\sqrt{٣} \Leftarrow ج = \sqrt{٣}$ (١)

مركز القطع الناقص هو $(٠، ٣)$ وهو منتصف المسافة بين البؤرتين (١)

$\therefore$ المعادلة هي $\frac{(س - ٠)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - ٣)^٢}{ا^٢} = ١$ (١)

$\frac{(س - ٠)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - ٣)^٢}{ا^٢} = ١$

نكون $ج = ب = \sqrt{٣} \Leftarrow ب = ١$ (١)

$ا^٢ = ب^٢ + ج^٢$

$= ١ + ٣ = ٤$

$\therefore ا^٢ = ٤$ (١)

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي

$\frac{س^٢}{٤} + \frac{(ص - ٣)^٢}{١} = ١$ (١)

(٤)

رقم الصفحة في الكتاب

تابع السؤال الثاني /

ب) (٨)

$٣س^{٢}-٤ = ٨ص+١٢س$.

$٣س^{٢}-١٢س = ٨ص+٤$ ①

$٣(س^{٢}-٤س) = ٨ص+٤$

$٣(س^{٢}-٤س+٤) = ٨ص+٤+١٢$ ①

$٣(س-٢)^{٢} = ٨(ص+٢)$

$(س-٢)^{٢} = \frac{٨}{٣}(ص+٢)$ ①

إحداثيا البؤرة $(٢، -٢)$ ①

$٤ح = \frac{٨}{٣} \Leftarrow ح = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$ ①

إحداثيا البؤرة $(٢، -٢+\frac{٢}{٣}) = (٢، \frac{-٤}{٣})$ ①

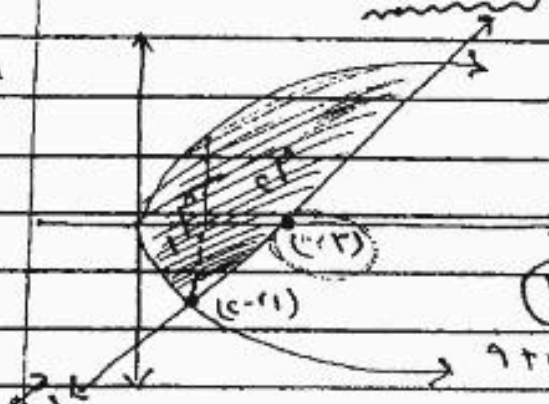
معادلة الدليل $س = ٢$ ①

معادلة المحور $ص = -٢ - \frac{٢}{٣} = \frac{-٨}{٣}$ ①

مركز الامتحانات والاختبارات

رقم الصفحة في الكتاب ٢٧٩

السؤال الثالث /



(أ) $ص^2 = 4س \Leftarrow ص = \pm 2\sqrt{س}$ (١)

معادلة المستقيم ل :

$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ (١)

$\frac{ص - 3}{س - 1} = \frac{3 - 1}{5 - 1}$

$\frac{ص + 3}{ص - 3} = \frac{2}{4} = 1 \Leftarrow$ **ص = س − ٢** (١)

∴ نقطتا التقاطع $ص^2 = (س - 2)^2 = س^2 - 4س + 4$

$س^2 - 6س + 9 = س$

$س^2 - 10س + 9 = 0$

$(س - 9)(س - 1) = 0$

س = ١ ، ٩ (١)

$م = م_1 + م_2 = \int_1^9 [2\sqrt{س} - (-2\sqrt{س})]\, دس + \int_1^9 [2\sqrt{س} - (س - 2)]\, دس$ (١)

$= \int_1^9 [4\sqrt{س}]\, دس + \int_1^9 [2\sqrt{س} - س + 2]\, دس$

$= 4 \times \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 + 2 \times \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} س^2 + 2س \Big|_1^9$ (١)

$= (\frac{8}{3}) - (0) + (\frac{4}{3} \times 27 - \frac{81}{2} + 18) - (\frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{2} + 2)$ (١)

$= \frac{8}{3} + \frac{108}{3} - \frac{81}{2} + 18 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2$ (١)

$= \frac{112}{3} - \frac{81}{2} + 16$

$= \frac{112}{3} - 40 + 16$

$= \frac{112}{3} - 24$

$= \frac{112 - 72}{3}$

$= \frac{40}{3}$ وحدة مربعة. (١)

(٦)

رقم الصفحة في الكتاب ٢٦١

تابع إجابة السؤال الخامس /

ب) ١)

$$\int_{1}^{2} \frac{-س}{(س+1)\sqrt{س+1}}\, دس$$

نفرض أن $ص = س+1 \Leftarrow س = ص-1 \Leftarrow -س = 1-ص$ ①

$دص = دس$

عندما $س = 0 \Leftarrow ص = 1$ ①

$س = 1 \Leftarrow ص = 2$

$$\therefore ت = \int_{1}^{2} \frac{1-ص}{ص\sqrt{ص}}\, دص$$ ①

$$= \int_{1}^{2} \frac{1-ص}{ص^{\frac{3}{2}}}\, دص$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{(1-ص)(1+ص)}{ص^{\frac{3}{2}}(1+ص)}\, دص$$ ①

$$= \int_{1}^{2} \frac{1+ص}{ص^{\frac{3}{2}}}\, دص$$ ①

$$= -\int_{1}^{2} (ص^{-\frac{3}{2}} + ص^{-\frac{1}{2}})\, دص$$

$$= -\left| -2ص^{-\frac{1}{2}} - ص^{-\frac{1}{2}} \right|_{1}^{2}$$ ①

$$= -(-2\sqrt{2} - \sqrt{2}) - (-2 - 1)$$

$$= 3\sqrt{2} + 3$$ ①

$$= 3(\sqrt{2}+1)$$

أي منهما .

رقم الصفحة في الكتاب ٢٦٨

تابع السؤال الخامس/

ب) ٢) A

$$\int \frac{س + جتاس}{1 + جتاس}\, دس$$

$$= \int \left(\frac{س}{1+جتاس} + \frac{جتاس}{1+جتاس} \right) دس \quad (1)$$

$$= \int ٢ قتا^{2} \frac{س}{2}\, دس + \int \frac{جتاس \times جتاس}{1+جتاس}\, دس \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \int س\, قتا^{2} \frac{س}{2}\, دس + \int ظا^{2} \frac{س}{2}\, دس$$

$$\text{لـ} ٢ = س \quad \text{ومنه} \quad دس = ٢\, دس \quad (1)$$

$$\text{ومنه} \quad ظا \frac{س}{2} = ٢ ظا \frac{س}{2}$$

$$\therefore ت = \frac{1}{2} \times ٢ \times ظا \frac{س}{2} + \int ظا^{2} \frac{س}{2}\, دس \quad (1)$$

$$= س ظا \frac{س}{2} - \int ظا \frac{س}{2}\, دس$$

$$= س ظا \frac{س}{2} + ٢ \ln |قتا \frac{س}{2}| + د \quad (1)$$

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الرابع /

أ) $٩س^{٢} + ٨ص^{٢} - ٤ = ٤ص^{٢} + ٣٦س$ ١٠

$(٩س^{٢} - ٣٦س) - (٤ص^{٢} - ٨ص) = ٤$

$٩(س^{٢} - ٤س) - ٤(ص^{٢} - ٢ص) = ٤$ ①

$٩(س^{٢} - ٤س + ٤) - ٤(ص^{٢} - ٢ص + ١) = ٤ + ٣٦ - ٤$ ①

$٩(س - ٢)^{٢} - ٤(ص - ١)^{٢} = ٣٦$

$\frac{(س-٢)^{٢}}{٤} - \frac{(ص-١)^{٢}}{٩} = ١$ ①

وهذه معادلة قطع زائد كبدء مفتوحة على المحور السيني ①

بينما: $أ^{٢} = ٤$ ، $أ = ٢$

$ب^{٢} = ٩$ ، $ب = ٣$ ①

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ٤ + ٩ = ١٣$

$جـ = \sqrt{١٣}$ ①

١- احداثيا المركز (٢ ، ١) ①

٢- احداثيا الرأسين (٢ + ٢ ، ١) ، (٢ - ٢ ، ١) ⇐ (٤ ، ١) ، (٠ ، ١) ①

٣- احداثيا البؤرتين (٢ + $\sqrt{١٣}$ ، ١) ، (٢ - $\sqrt{١٣}$ ، ١) ①

٤- الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ}$

$= \frac{\sqrt{١٣}}{٢} > ١$ ①

* إذا اختلاف المركز أشار إلى حاصل من عند الترتيب واضح قطع ناقص ليصبح من (٧) علامات تخسر أول ثلاثة علامات

* إذا اختلاف نوع القطع وذكر بأنه قطع ناقص ليصبح من (٧) علامات على بأنه معادلة القطع الذي حصل عليها معادلة قطع زائد كم علامة نوع القطع ، ٢ ، ١ هـ.

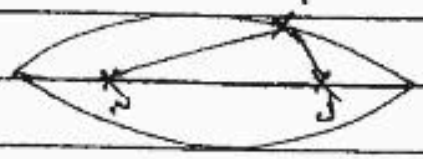
رقم الصفحة في الكتاب

٣٤٨

٣٥٣

تابع السؤال الرابع/

ب) ⚠ ٨



$\overline{ن ل} = ٢ع$

$\overline{م ن}^{٢} + \overline{ن ل}^{٢} = \overline{م ل}^{٢}$ ①

$\therefore ٢م ع + ٢ع^{٢} = ٦٤$ مميز قانون $\overline{م ل}$ ①

$٣ع = ٢ + م$

$\frac{٦}{١٠} = \frac{ع}{م} \Leftarrow ع = \frac{٣}{٥}م$ ①

$\therefore م^{٢} + \frac{٩}{٢٥}م^{٢} = ٣٦$

$\frac{١٦}{٢٥}م^{٢} = ٣٦$

$م^{٢} = \frac{٣٦}{\frac{١٦}{٢٥}} = ٥٦$ ①

$\therefore م^{٢} = ٤٥٦$

$\therefore ع = \frac{٣}{٥} \times ٢٠ = ١٢$ ①

$\therefore ع^{٢} = ١٤٤$

لكن $ن^{٢} = م^{٢} - ع^{٢}$

$= ٤٥٦ - ١٤٤$

$ن^{٢} = ٣١٢$ ①

∴ معادلة القطع الناقص هي

$\frac{(س - ٤)^{٢}}{م^{٢}} + \frac{(ص - ٥)^{٢}}{ن^{٢}} = ١$ ①

$\frac{(س - ١)^{٢}}{٤٥٦} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٣١٢} = ١$ ①

⑩

رقم الصفحة في الكتاب ٣٤٧

تابع السؤال الرابع/

(٤) (ب)

$س = جتا^{٤} ن$ ، $ص = ٢ حا^{٣} ن$

$جتا^{٢} ن = ١ - حا^{٢} ن$ (١)

$س = ١ - (\frac{١}{٢} ص)^{٢}$ (١)

$$\begin{cases} س = ١ - \frac{٤}{٩} ص^{٢} \\ \frac{٤}{٩} ص^{٢} = ١ - س \\ ٤ ص^{٢} = ٩ - ٩ س \\ ٤ ص^{٢} ع = - ٩ ع س + ٩ \\ ٤ ص^{٢} = - ٩ (س - ١) \end{cases}$$ (١) أي منهما

وهذه معادلة منحنى مكافئ . (١)

رقم الصفحة في الكتاب ٢٥٢

السؤال الخامس/

(٧) أ)

$\text{ق} = \frac{\text{د}ع}{\text{د}ن} \times \text{د}ن$.

$ع = ع_{ن}^{\frac{1}{2}} + ٤$. (١)

$\text{د}ع = \frac{1}{2} ع_{ن}^{-\frac{1}{2}} \text{د}ن$.

$\text{د}ع = \frac{1}{2} ع_{ن}^{-\frac{1}{2}} \text{د}ن$.

$\text{د}ع = \frac{1}{2} ن^{-\frac{1}{2}} \text{د}ن$. (١)

$\text{د}ع = \frac{1}{2\sqrt{ن}} \text{د}ن$.

لكن عندما $ن = ١$ ، $ع = ٩$

$\therefore ٩ = ٢\sqrt{١} + ج$ (١)

$\therefore ج = ٧ \Leftarrow ٩ = ٢ + ج$

$\therefore ع = ٢\sqrt{ن} + ٧$

$ع_{ن}^{\frac{1}{2}} = ٢\sqrt{ن} + ٣$

$ع = (٢\sqrt{ن} + ٣)^{٢}$

$\frac{\text{د}ف}{\text{د}ن} = (٢\sqrt{ن} + ٣)^{٢}$

$\text{د}ف = (٢\sqrt{ن} + ٣)^{٢} \text{د}ن$ (١)

$ف = \int (٢\sqrt{ن} + ٣)^{٢} \text{د}ن$

$ف(ن) = \frac{(٢\sqrt{ن} + ٣)^{٣}}{٣ \times \frac{1}{2}} + ج$ (١)

لكن عندما $ن = ٤$ ، $ف = ٨٠$

$\therefore ٨٠ = \frac{٣}{٢}(١٢٥) + ج$

$ج = ٨٠ - \frac{٣٧٥}{٢} = -\frac{٣٧٥}{٢}$ (١)

$\therefore ف(ن) = \frac{٢}{٣}(٢\sqrt{ن} + ٣)^{٣} - \frac{٣٧٥}{٢}$

$\therefore ف(٢) = \frac{٢}{٣}(٦٤) - \frac{٣٧٥}{٢}$

$= \frac{١٢٨}{٣} - \frac{٣٧٥}{٢}$

$= \frac{١١٨}{٣}$ متر . (١) أي صورة

(١٢)

رقم الصفحة في الكتاب

تابع السؤال الخامس /

ب) $\int_{2}^{b} [\frac{1}{2}س + ٣] \, دس = ٤ جـ$ ، ب > ٢ ..... ٢٤٨

$[\frac{1}{2}س + ٣] = \begin{cases} ٤ & ٢ \leq س < ٤ \\ ٥ & ٤ \leq س < ٦ \\ ٦ & ٦ \leq س < ٨ \end{cases}$ (١)

$\therefore ٤ جـ = \int_{2}^{4} ٤ دس + \int_{4}^{6} ٥ دس + \int_{6}^{b} ٦ دس$

(١) (١) (١)

$٤ جـ = ٨ + ١٠ + ٦(ب - ٦)$ (١)

$٤ جـ = ١٨ - ٦ب + ٣٦$

$٦ب = ١٨ - ٤جـ + ٣٦$

$٦ب = ٤٣$

$\boxed{ب = ٧}$ (١)

الاختبارات والاختبارات

رقم الصفحة في الكتاب

تابع إجابة السؤال الخامس /

٢٢٦ ٢٢٧ ٢٩٣

(٦) Δ

$م''(س) = جا س + هـ^{س}$

$م'(٠) = \frac{١}{٢}$ ، $م(٠) = \frac{١}{٤}$

$م'(س) = \int (جا س + هـ^{س}) \, د س$ (١)

$= -جتا س + \frac{١}{٢} هـ^{س} + ج_{١}$ (١)

لكن $م'(٠) = \frac{١}{٢} = -جتا ٠ + \frac{١}{٢} هـ^{٠} + ج_{١}$

$\frac{١}{٢} = -١ + \frac{١}{٢} + ج_{١}$

$ج_{١} = ١$ (١)

$\therefore م'(س) = -جتا س + \frac{١}{٢} هـ^{س} + ١$

$م(س) = \int (-جتا س + \frac{١}{٢} هـ^{س} + ١) \, د س$ (١)

$م(س) = -جا س + \frac{١}{٢} هـ^{س} + س + ج_{٢}$ (١)

لكن $م(٠) = \frac{١}{٤} = -جا ٠ + \frac{١}{٢} هـ^{٠} + ٠ + ج_{٢}$

$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} + ج_{٢}$

$ج_{٢} = -\frac{١}{٤}$

$\therefore م(س) = -جا س + \frac{١}{٢} هـ^{س} + س - \frac{١}{٤}$ (١)

* اذا لم يكتب هـ ولم يذكر تقريب غير ذلك

السؤال الأول/

أ) ١) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س}+هـ^{س}}\,د س = \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}(هـ^{س}+1)}\,د س$ ①

$= \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+1}\,د س$ ② $= \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س}+1}\,د س$ ①

$= \frac{1}{2}\int \frac{2هـ^{س}}{هـ^{2س}+1}\,د س = \frac{1}{2}\,لو_{هـ}|هـ^{2س}+1| + ث$ ②

ج) $\int \frac{س-13}{س^{3}-2س+3}\,د س$

$\frac{س-13}{س^{3}-2س+3} = \frac{ا}{(س-3)} + \frac{ب س+ج}{(س^{2}+س-1)}$

$س-13 = ا(س^{2}+س-1) + (ب س+ج)(س-3)$

حكرر حسب المخرج فيه

عندما $س=3 \Leftarrow -10 = 5ا \Leftarrow ا=-2$

عندما $س=0 \Leftarrow -13 = -ا-3ج \Leftarrow ج=5$

$\int \frac{س-13}{س^{3}-2س+3}\,د س = \int \frac{-2}{س-3}\,د س + \int \frac{ب س+5}{س^{2}+س-1}\,د س$

$= -2\,لو_{هـ}|س-3| + \frac{ب}{2}\,لو_{هـ}|س^{2}+س-1| + ث$

١) $\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$

بالتعويض

نفرض $u = e^{x}$

$du = e^{x}\,dx$

$\int \frac{e^{x}\cdot e^{x}}{e^{x}(1+e^{-x})}\,dx$

$\int \frac{u}{1+\frac{1}{u}}\cdot\frac{du}{u}$

$\int \frac{1}{1+u}\,du = \ln|1+u| + c$

$\ln|1+e^{x}| + c$

ادارة الامتحانات والاختبارات

$\int \frac{1}{1+e^{x}}\,dx = \int \frac{1}{e^{x}(e^{-x}+1)}\,dx$

$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$u = 1+e^{-x}$

$du = -e^{-x}\,dx$

$\int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + c$

$-\ln|1+e^{-x}| + c$

$\int \frac{1}{(1+x)(1-x)}\,dx$

$\frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$

$A = \frac{1}{1-x}\Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}$

$B = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$

$\int \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\,dx$

$\frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| + c$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

السؤال الثالث/

أ) نجد معادلة المستقيم ل المار بالنقطتين (١،٣)، (٣،٥)

① $م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٥-٣}{٣-١} = ١$

معادلة المستقيم $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٣ = ١(س - ١)$

② $ص = س + ٢$

$ص^٢ = ٤س$ ⟹ $٢ص \frac{دص}{دس} = ٤$

$ص = س - ٢$ ⟹ $س = ص + ٢$

$س_١ = س_٢$ ⟹ $ص + ٢ = \frac{ص^٢}{٤}$ ⟹ $ص^٢ = ٤ص + ٨$

$ص^٢ - ٤ص - ٨ = ٠$ ⟹ $(ص - ٦)(ص + ٢) = ٠$

① $ص = ٦$ ، $ص = -٢$

① $م = \int_{-٢}^{٦} (س_٢ - س_١)\, دص$

$= \int_{-٢}^{٦} (ص + ٢ - \frac{ص^٢}{٤})\, دص$ ① $= \frac{ص^٢}{٢} + ٢ص - \frac{ص^٣}{١٢} \Big]_{-٢}^{٦}$

① $= (١٨ + ١٢ - \frac{٢١٦}{١٢}) - (٢ - ٤ + \frac{٨}{١٢})$

① $= ١٨ - ١٨ + ٤ - \frac{٢}{٣}$

وحدة مساحة $= \frac{٤٥}{٣} - \frac{٢}{٣} = \frac{٤٣}{٣}$

السؤال الثالث/

(أ) $\int_{1}^{2} \frac{-س}{\sqrt{1+2س}}\, ds$

نفرض $ص = \sqrt{1+2س} \Rightarrow ص^2 = 1+2س$ ①

$\frac{1}{2} ص\, ص = ds$

عندما $س = 0 \Rightarrow ص = 1$

عندما $س = 1 \Rightarrow ص = \sqrt{3}$

$ص^2 = 1+2س$

$2س = ص^2 - 1$

$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1 - ص^2}{ص^2} \times \frac{1}{2} ص\, ص$ ①

$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{(1-ص)(1+ص)}{ص^2} \frac{1}{2} ص\, ص$ ①

$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{(1+ص)}{ص} \frac{1}{2} ص\, ص$

$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{ص})\, ص\, ص$ ①

$= \frac{1}{2} [ص + \ln ص]_{1}^{\sqrt{3}}$ ①

$= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \ln \sqrt{3}) - \frac{1}{2} (1 + \ln 1)$ ①

$= \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \ln 3 - 1)$

(١٧)
(١٨)

السؤال الثالث /

(ب)

(1) $\int \frac{-س}{\sqrt{1-(س+1)^2}}\, ds$

(2) $\int \frac{-س}{\sqrt{1-(س+1)^2}}\, ds$

نفرض $ص = \sqrt{1-(س+1)^2} \Leftarrow ص^2 = 1-(س+1)^2$ ①

$\frac{ds}{ص}$

عندما $س = 0 \Leftarrow ص = 1$ ①

عندما $س = -1 \Leftarrow ص = 1$

$ص^2 - 1 = -س$

$= \int_1^1 \frac{ص^2 - 1}{ص} \times \frac{ص\, ds}{ص^2 - ص}$ ①

$= \int_1^1 \frac{ص^2 - 1}{ص^2 - ص} \times ص\, ds$ ①

$= \int_1^1 \frac{(ص-1)(ص+1)}{ص(ص-1)}\, ds$ ①

$= \int_1^1 (ص+1)\, ds$ ①

$= [ص + س]_1^1$ ①

$= (1+1) - (-1+0)$

$= 2 + 1$ ①

$= 3$

دار الرواد للكتب والاختبارات

س/ ٤

ب) $\int \frac{1+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx + \int \frac{1+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ ①

$= \int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx + \ln|1+\cos x|$ ①

$= \int \frac{\frac{1}{2}\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx - \ln|1+\cos x|$

$\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$

$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ①

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x| - \ln|1+\cos x|$ ①

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln|1+1| - \ln|1+\frac{1}{\sqrt{2}}|$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 - \ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right|$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 - \ln|\sqrt{2}+1| + \ln\sqrt{2}$

$= \frac{\pi}{8} - \ln|\sqrt{2}+1|$ ①

ادارة الامتحانات والاختبارات

٣

ا) $\frac{\text{جا س}}{1+\text{جتا س}}$ ①

$\text{هـ} = \text{س} + \text{جا س} \leftarrow \text{د هـ} = 1 + \text{جتا س}$

$\text{د هـ} = \frac{1}{1+\text{جتا س}}$ د س $\leftarrow$ $\text{د هـ} = \int \frac{1}{1+\text{جتا س}} \times \frac{1-\text{جتا س}}{1-\text{جتا س}}$ د س $= \int \frac{1-\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س}}$ د س ②

$\text{هـ} = \int \text{قا}^2\text{س} - \text{قا س ظا س} = -\text{ظا س} + \text{قا س}$

$+ \int (\text{س} + \text{جا س})(\text{قا س} - \text{ظا س}) - \int (1+\text{جتا س})(\text{قا س} - \text{ظا س})$ د س ①

$\int (\text{قا س} - \text{ظا س} + \text{جا س قا س} - \text{جا س ظا س})$ د س ①

$\int (\text{قا س} - \text{ظا س} + \text{ظا س} - \text{جا س ظا س})$ د س.

$\int (\text{قا س} - \text{جا س ظا س})$ د س $= \int \text{قا س}$ د س $- \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا س}}$ د س

$= \text{لو}_\text{هـ} |\text{قا س} - \text{ظا س}| - \int \frac{1-\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا س}}$ د س ①

$\int \frac{1}{\text{جا س}}$ د س $- \int \text{جا س}$ د س $= \int \text{قا س}$ د س $- \int \text{جا س}$ د س

$= \text{لو}_\text{هـ} |\text{قا س} + \text{ظا س}| + \text{جتا س} + \text{جـ}$ ①

$(\text{س} + \text{جا س})(\text{قا س} - \text{ظا س}) + \text{لو}_\text{هـ} |\text{قا س} - \text{ظا س}| - \text{لو}_\text{هـ} |\text{قا س} + \text{ظا س}| - \text{جتا س}$

①

س ب س

$\int_{ب}^{ج} س + ص جتا س \, د س$

$\int_{ب}^{ج} 1 + جتا س \, د س$

ق	ك
$س + ص جتا س$	$\frac{1}{1+جتا س}$ × $\frac{1-جتا س}{1-جتا س}$
$\frac{1-جتا س}{جا س}$	$\frac{جا^2 س}{1+جتا س}$

$(-ص جتا س + ص جتا ب)$

$= (س + ص جا س)(ظتا س - ظتا ب) + \int_{ب}^{ج} (1+جتا س)(ظتا س - ظتا ب) \, د س$

$+ \int_{ب}^{ج} (ظتا س - ظتا ب + \frac{جتا س}{جا س} - جتا ب) \, د س$

$+ \int_{ب}^{ج} (\frac{1}{جا س} - \frac{جتا س}{جا س}) \, د س$

$+ \int_{ب}^{ج} \frac{جتا س - 1}{جا س} \, د س$

$+ \int_{ب}^{ج} \frac{-جا س}{جا س} \, د س$

$+ \int_{ب}^{ج} -1 \, د س$

$= (س + ص جا س)(ظتا س - ظتا ب) + ج - ب$

ادارة الامتحانات والاختبارات

السؤال الثالث /

أ) $\int \frac{س + جاس}{1 + جتاس} \, دس$

$= \int \frac{س + جاس}{1 + جتاس} \times \frac{1 - جتاس}{1 - جتاس} \, دس$ ①

$= \int \frac{س - س جتاس + جاس - جاس جتاس}{(1 - جتا^2 س)} \, دس$

$= \int \frac{س - س جتاس + جاس - جاس جتاس}{جا^2 س} \, دس$ ①

$= \int (\frac{س}{جا^2 س} - \frac{س جتاس}{جا^2 س} + \frac{جاس}{جا^2 س} - \frac{جاس جتاس}{جا^2 س}) \, دس$

$= \int س \, قتا^2 س \, دس - \int س \, قتاس ظتاس \, دس + \int قتاس \, دس - \int ظتاس \, دس$

$= \int س \, قتا^2 س \, دس - \int س \, قتاس ظتاس \, دس + \int قتاس \, دس - \int ظتاس \, دس$

* $\int س \, قتا^2 س \, دس$ $ع = س \Rightarrow ع د = 1 \, دس$

$ع د = قتا^2 س \, دس \Rightarrow هـ = -ظتاس$ ①

$= -س ظتاس + \int ظتاس \, دس$

$= -س ظتاس + لو |قاس| + ج$

* $\int س \, قتاس ظتاس \, دس$ $ع = س \Rightarrow ع د = 1 \, دس$

$ع د = قتاس ظتاس \, دس \Rightarrow هـ = قتاس$ ①

$= -س قتاس + \int قتاس \, دس$

$= -س قتاس + \int قتاس \times \frac{قتاس + ظتاس}{قتاس + ظتاس} \, دس$

$= -س قتاس + \int \frac{قتاس ظتاس + قتا^2 س}{قتاس + ظتاس} \, دس$

$= -س قتاس + لو |قتاس + ظتاس| + ج$ ①

* $\int قتاس \, دس = لو |قتاس + ظتاس| + ج$ ①

* $\int ظتاس \, دس = لو |قاس| + ج$ ①

$= -س ظتاس + س قتاس - لو |قتاس + ظتاس| + ج$ ①

ب) صحيح