الجُزءُ الثاني

٩

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دولـــة فلسطين

وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

فريق التأليف:

أ. قيس شبانة (منسقاً)
أ. أشجان جبر
أ. أماني الأخضر
أ. محمد غانم
أ. هاشم أبو بكر
أ. جهاد ابو جاسر
أ. عماد جمعة

مركز المناهج

أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/ ٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	**د. صبري صيدم**
نائب رئيس لجنة المناهج	**د. بصري صالح**
رئيس مركز المناهج	**أ. ثروت زيد**

الدائرة الفنية

إشراف فني	**أ. كمال فحماوي**
تصميم فني	**أ. عبد الناصر أبوشوشة**

تحكيم علمي	**د. نبيل الجندي**
تحرير لغوي	**أ. وفاء الجيوسي**
مراجعة	**د. سعيد عساف**
رسومات	**أ. سالم نعيم**
قراءة	**أ. مها غانم**
متابعة للمحافظات الجنوبية	**د. سمية النّخالة**

الطبعة الثانية

٢٠١٩ م/ ١٤٤٠ هـ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 – رام الله – فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

تـقـديـم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

كانون أول / ٢٠١٧م

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ ليكونَ امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفّذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستوياتِ الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوَّنَ هذا الكتاب من خَمس وَحَداتٍ تعليمية، تناولت الوحدة الخامسة: حساب المثلثات والنسب المثلثية وتطبيقات عليها، أمّا الوَحْدَة السادسة، فتناولت الجبر، لتقدم مفهوم الفترة وطرق حلّ المتباينات الخطّية، وتناولت الوَحْدَة السابعة الاقترانات والعمليات عليها، أمّا الوَحْدَة الثامنة (الاحتمالات)، فاستكملت قوانين الاحتمالات التي تعلمها الطلبة سابقاً، بالإضافة للاحتمال المشروط واستقلال الحوادث، وتناولت الوحدة التاسعة (الهندسة) معادلة الدائرة والزوايا المحيطية والمركزية بالإضافة للشكل الرباعي الدائري.

أملُنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظّم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

فريق التأليف

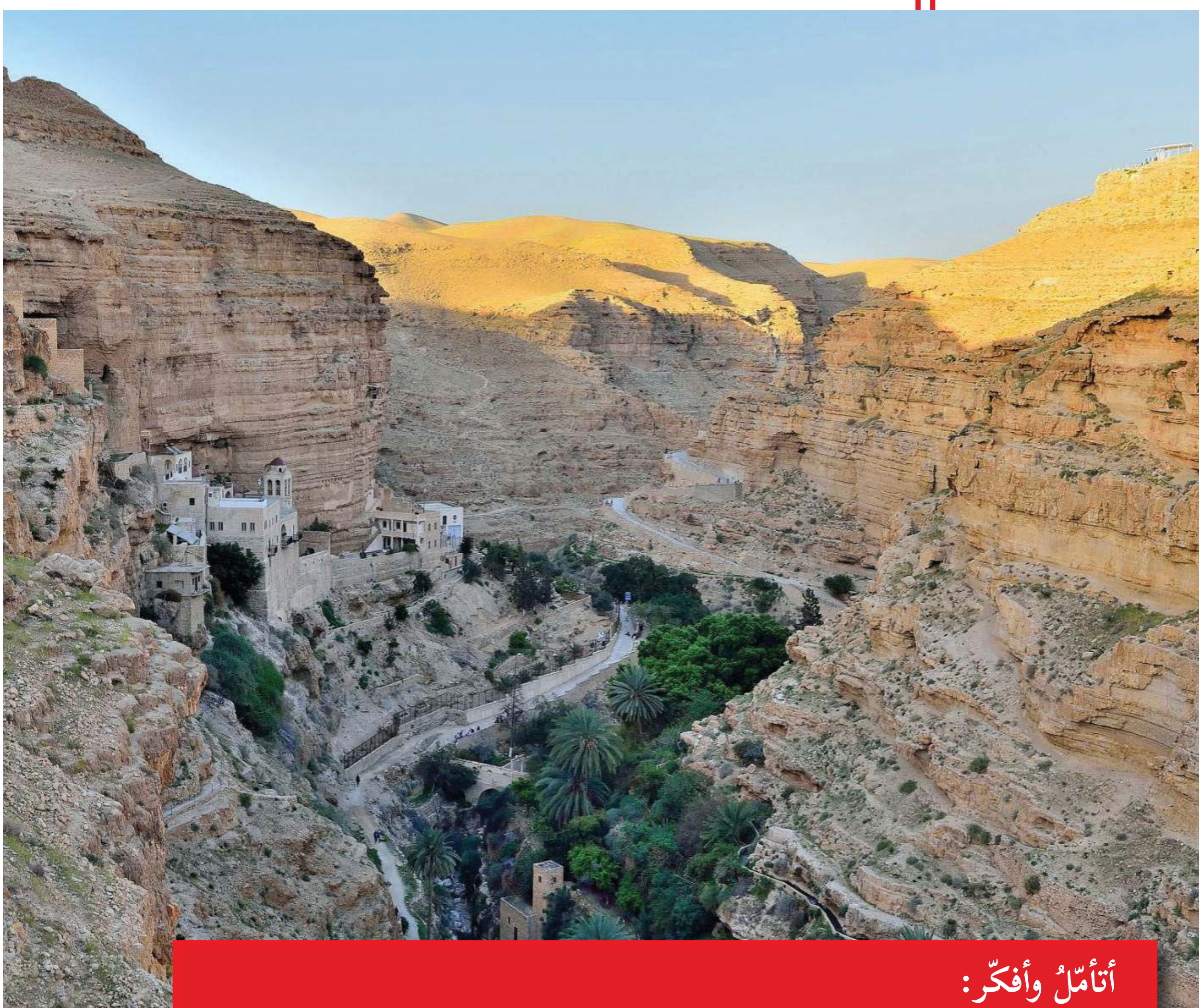
المحتويات

رابط إلكتروني

• www.mohe.ps/pcdc

الوحدة ٥

حساب المثلّثات



أتأمّلُ وأفكّر:

يُمكنُ إقامة جسر بين الجبلين باستخدام النسب المثلثية من خلال رسم تخطيطي لمثلث قائم الزاوية، أناقش ذلك.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف النسب المثلثية في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ إيجاد النّسبِ المثلّثيّة الأساسيّة للزّوايا الحادّة.

٢ التعرُّف إلى النّسب المثلّثيّة الثانويّة.

٣ التعرُّف إلى العلاقات بين النّسب المثلّثيّة.

٤ التعرُّف إلى مفهوم المتطابقة المثلّثيّة.

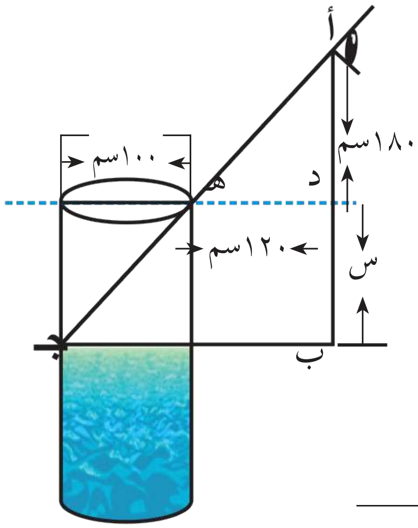
٥ إثبات صحّةِ متطابقةٍ مثلّثيّة .

٦ حلّ معادلةٍ مثلّثيّة .

٧ استخدام النّسب المثلّثيّة في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.

(٥-١) النّسب المثلّثيّة

نشـاط(١): تعاني الزراعة في فلسطين من نقص بالمياه بسبب اجراءات الاحتلال، إذ يقوم المزارعون بإنشاء آبار مياه لأغراض الري، فإذا اراد مزارع طوله ١٨٠سم معرفةَ انخفاضِ مستوى سطحِ مياهِ بئر قطره ١م، واقترب من حافة البئر حتى تمكن من رؤية سطح الماء، وكان بعده عن حافة البئر ١٢٠ سم. أجد انخفاض سطح الماء على النحو الآتي:



نفرض أنّ س تمثّلُ انخفاض مستوى سطح المياه في البئر.

من تشابُه المثلثات أد هـ ، أ ب جـ:

$$\frac{١٨٠}{\text{س} + \square} = \frac{\square}{١٠٠ + ١٢٠}$$

١٨٠ × ـــــ = (س + ١٨٠) (ـــــ)

س + ١٨٠ = ـــــ

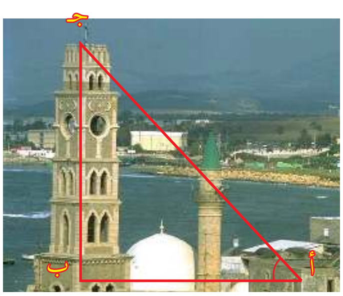
س = ١٥٠ سم

ومنها: انخفاض مستوى سطح المياه في البئر = ـــــــــــ

أتذكّر: النسبة بين طوليّ ضلعيْن من أضلاع المثلّث القائم الزاوية تُسمّى نسبةً مثلّثيّة.

نشاط(٢): برج الساعة في عكا واحد من سبعة أبراج أقيمت في فلسطين عام ١٩٠١م.

يمثّلُ الشكلُ المقابل مثلّثاً قائم الزّاوية في ب، أُكملُ ما يأتي :



١) يُسمّى الضّلعُ أ ب بالنسبة إلى الزاوية أ مجاوراً.

٢) يُسمّى الضّلعُ ب جـ بالنسبة إلى الزاوية أ: ـــــ

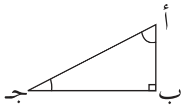
٣) يُسمّى الضّلع أجـ وترَ المثلّث القائم الزّاوية، وهو أطول أضلاع المثلث.

٤) جيب الزاوية أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

٥) جيب تمام الزاوية أ = ـــــ

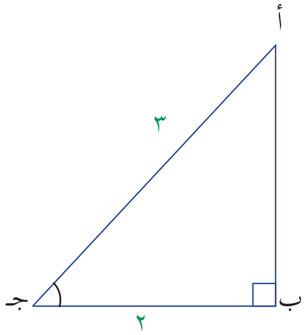
٦) ظل الزاوية أ = ـــــ

أتذكّر: في المثلّث القائم الزّاوية تُسمّى هذه النّسبُ (جا أ، جتا أ، ظا أ) النّسبَ المثلّثيّة الأساسيّة للزّاوية الحادّة أ.



نشاط(٣): أ ب جـ مثلّثٌ قائمُ الزّاوية في ب، فيه جتا جـ = $\frac{٢}{٣}$ ، أ جـ = ٣ وحدات، أجدُ:

١) ظاجـ   ٢) جاجـ



نرسمُ رسماً تخطيطيّاً للمثلّث أ ب جـ

جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\square}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{\square}{٣}$

ومنها ب جـ = ٢ وحدة ، ثمّ نعيّنُ أطوالَ الأضلاع على المثلّث

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢} (لماذا ؟)

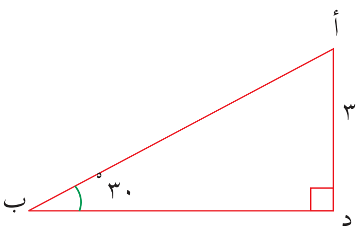
أ ب = ــــــــــــ

ظا جـ = ــــــــــــ

جا جـ = ــــــــــــ

نشاط(٤): أ د ب مثلّثٌ قائمُ الزّاوية في د، فيه أد = ٣ وحدات، أجدُ كلٍّ من:

١) أ ب   ٢) ب د   ٣) النّسبُ المثلّثيّة الأساسيّة للزّوايا: ٣٠° ، ٦٠°



المثلّث أ د ب فيه جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

$\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ = $\frac{١}{٢}$

$\frac{٣}{\text{أب}}$ = $\frac{١}{٢}$

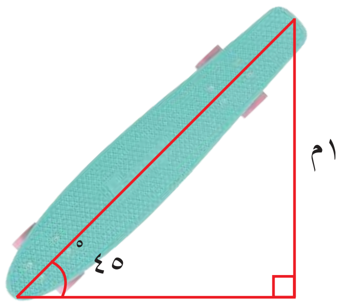
أ ب = ــــــــــــ

ومنها ب د = ــــــــــــ

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠° = ــــــ

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = ــــــ   ظا ٦٠° = ــــــ

نشـاط(٥): لـوح للتزلـج يرتفـع أحـد طرفيـه عـن الأرض ١ م، ويصنـع طرفـه الآخـر مـع الأرض زاويـة قياسـها ٤٥ ° كمـا فـي الشـكل المجـاور بالاعتمـاد علـى المعلومـات الـواردة فـي الشـكل، أكمـل إيجـاد:



١) طول لوح التزلج

طول لوح التزلج = ــــــ م ، لأن ــــــــــــ

٢) النسب المثلثية الأساسية للزاوية ٤٥°

جا ٤٥° = جتا ٤٥° = ــــــ

ظا ٤٥° = ــــــــــ

ملاحظة: يمكـن إيجـادُ قيـاسِ زاويـة إذا عُلِمـتْ إحـدى نسـبها المثلّثيـةّ، باسـتخدام الحاسـبة العلميّـة من خـلال مفاتيـحَ خاصّـة على الآلـة الحاسـبة العلميّـة.

Sin (مِفتاح جا) ، cos (مِفتاح جتا) ، tan (مِفتاح ظا)

مثلًا: جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ يكافئ الزاوية التي جيبها ($\frac{١}{٢}$) = ٣٠°

ورمزها على الآلة الحاسبة: $\sin^{-1}(x)$

لإيجاد الزاوية باستخدام الآلة الحاسبة، نتّبعُ الخطواتِ الآتية:

$\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{\sin} \rightarrow \boxed{0.5} \rightarrow \boxed{=}$ 30°

أتذكّر: إذا كانت س زاوية حادّة، فإنّ: ٠ < جا س < ١

٠ < جتا س < ١

أفكر وأناقش

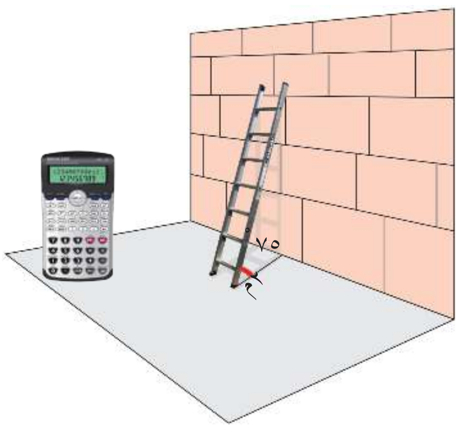
إذا كانت س زاويةً حادّةً، فما القيمُ الممكنةُ لـ ظاس؟

تمارين ومسائل:

س١ أجدُ قيـمَ النّسـبِ المثلّثيّة الأساسيّة للزّاوية الصّغرى في المثلّث أ ب جـ القائم الزاوية في ب، إذا كان أ ب = ٨ سم ، أجـ = ١٠ سم.

س٢ أ ب جـ مثلّـثٌ قائـم الزاويـة فـي ب، إذا علمـت أنّ جاجـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، وأنّ أ ب = $\sqrt{٥}$ ،
أجدُ : جتاجـ، ظاجـ

س٣ اذا كانـت الزاويـة الآمنـة التـي يمكـنُ أنْ يسـتندَ بهـا سُـلّمٌ علـى حائـطٍ هـي ٧٥° تقريبـاً مـع الأرض كمـا فـي الشـكل المجـاور، مـا طـولُ السُـلّمِ، إذا كانـت قاعدتـه تبعـد متريـن عـن الحائـط الرأسـي؟



س٤ من نقطةٍ تبعدُ ٣ أمتار عن قاعدة منزلٍ ارتفاعه ٦ أمتار رصدت قمّة المنزل، أرسمُ شكلًا يبيّن زاويةَ ارتفاعِ قمّةِ المنزل، ثم أحسبُ قيمةَ تلك الزّاوية.

(٥-٢) النّسب المثلّثيّة الثّانوية

نشاط(١) : تنتشرُ زراعةُ النّخيل في فلسطين مثل منطقة أريحا والأغوار، وقطاع غزة، وبيسان؛ ونتيجةً للانتهاكات الإسرائيليّة في تجريف الأشجار تتعرّضُ بعضُها للتكسير. إذا تعرّضت إحدى أشجار النخيل للكسر، كما في الشكل المجاور، وكان طولُ الجزءِ المائلِ من الشجرة على الأرض ١٣ متراً، وكان طولُ الشجرةِ قبل سقوطها ٢٠ متراً، فهل يمكنُ معرفةُ قياسِ الزّاويةِ التي يصنعُها الجزءُ المائل مع سطح الارض؟

يمكن استخدامُ النّسبِ المثلّثيّة لمعرفةِ قياسِ الزّاوية س.

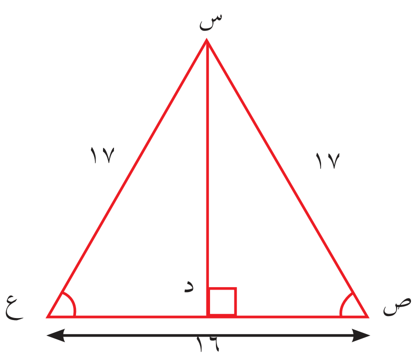
جا س = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\square}{١٣}$

س = الزاوية التي جيبها ($\frac{\square}{١٣}$) = ــــــــ

أفكر وأناقش

هناك نسبٌ مثلّثيّةٌ أخرى يمكن استخدامُها لإيجاد قيمة الزاوية س، أذكر بعضاً منها.

نشاط(٢): س ص ع مثلثٌ متساوي الساقيْن فيه: س ص = س ع = ١٧ وحدة،



ص ع = ١٦ وحدة، أُكملُ إيجاد:

طول $\overline{\text{س د}}$ = ــــــ (نظرية فيثاغورس)

$\frac{\text{س د}}{\text{س ص}}$ = $\frac{\square}{١٧}$ ، وتمثّلُ جا ص.

$\frac{\text{س ص}}{\text{س د}}$ = ــــــ ، وتُمثّل $\frac{١}{\text{جا ص}}$

$\frac{\text{ص د}}{\text{ص س}}$ = ــــــــ ، وتُمثّل جتاص

$\frac{\text{ص س}}{\text{ص د}}$ = ــــــــ ، وتُمثّل ــــــــ

$\frac{\text{س د}}{\text{ص د}}$ = ــــــــ ، وتُمثّل ظا ص

$\frac{\text{ص د}}{\text{س د}}$ = ــــــــ ، وتُمثّل ــــــــ

أَتَعَلَّمُ : النّسبُ المثلّثيّة الناتجة عن مقلوبِ النسبِ المُثلّثيّة الأساسيّة تُسمّى النّسبَ المثلّثيّةَ الثانويّة، وتُعرف كما يأتي:

قاطع الزاوية س: قا س = $\frac{1}{\text{جتا س}}$ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

قاطع تمام الزاوية س: قتاس = $\frac{1}{\text{جا س}}$ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

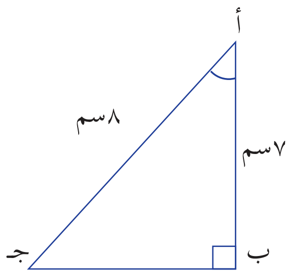
ظلّ تمام الزاوية س: ظتا س = $\frac{1}{\text{ظا س}}$ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

نشاط(٣) : أ ب جـ مثلّثٌ قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٧ سم، أ جـ = ٨ سم، أجد:

١) قا أ ٢) قتا أ ٣) ظتا أ ٤) جا أ × قتا أ ٥) جتا أ × قا أ

نجد أوّلًا طول الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$: (ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 _ (أ ب)^2

(ب جـ)^2 = ٦٤ − ٤٩ = ١٥، ومنها ب جـ = ــــــــ



١) قا أ = $\frac{1}{\text{جتا أ}}$ = $\frac{8}{7}$

٢) قتا أ = ــــــ = ــــــــ

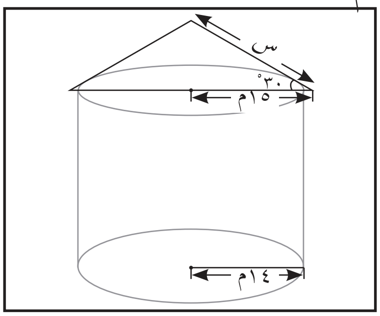
٣) ظتا أ = ــــــ = ــــــــ

٤) جا أ × قتا أ = جا أ × ــــ = ــــــــ

٥) جتا أ × قا أ = ــــــ = ــــــــ

ألاحظ أنّ: النسبة المثلثية × مقلوبها = ــــــ

نشاط (٤): مخزن لتخزين الحبوب على شكل أسطوانة يعلوه غطاء مخروطي كما في الشكل المجاور، وكان نصف قطر قاعدة المخزن ١٤ م. يزيد طول نصف قطر الغطاء مترا واحدا عن طول نصف قطر القاعدة، أجد قيمة س حيث س طول راسم الغطاء.



قا ٣٠° = $\frac{\text{س}}{\square}$

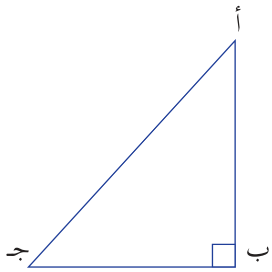
$\frac{٢}{\square}$ = $\frac{\text{س}}{\square}$

س = $\frac{٢}{\square}$ × ـــــــ = ـــــــ م

إذن طول راسم الغطاء = ـــــــ م

نشاط (٥): أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاوية في ب. فيه: ∠ أ + ∠ جـ = ٩٠°، ومنها:

∠ جـ = ٩٠° − ∠ أ



أُكمل إيجاد النسب المثلّثيّة، باستخدام أطوال أضلاع المثلث:

جا أ = ـــــــ ،	جتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
جتا أ = $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ ،	جا جـ =
ظا جـ = ـــــــ ،	ظتا أ =
ظتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ،	ظا أ =
قا أ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ ،	قتا جـ =

أقارنُ بين كلِّ نسبتيْن متقابلتين، ثم أستنتج العلاقة بين النسب المثلثيّة للزاويتين : أ، (٩٠° _ أ) ؟

أَتَعَلَّم : إذا كانت أ زاوية حادّة، فإنّ:

١) جا أ = جتا (٩٠° – أ) ، والعكس صحيح، جا الزاوية = جتا المتممة.

٢) ظا أ = ظتا (٩٠° – أ)، والعكس صحيح، ظل الزاوية = ظتا المتممة.

٣) قـا أ = قتا (٩٠° – أ)، والعكس صحيح، قا الزاوية = قتا المتممة.

نشاط(٦) : أ جـ هـ مثلّثٌ قائم الزاوية في جـ، فيه: جتا هـ = $\frac{١}{٥}$ ،

فإذا كان أ هـ = ١٠ وحدات، أجد:

١) قيم النسب المثلثيّة الأخرى للزاوية هـ .

لإيجاد باقي النسب المثلثيّة نرسم المثلث أ جـ هـ القائم في جـ، فيه: جـ هـ = ٢ وحدة،

أ هـ = ١٠ وحدات. فيكون

أ جـ = ______ ، جا هـ = ______

ظا هـ = ______ ، قا هـ = ______

قتا هـ = $\frac{٥}{\sqrt{٢٤}}$ ، ظتا هـ = ______

٢) قيمة المقدار : $\frac{\text{قتا}(٩٠° - \text{هـ})\ \text{قا}(٩٠° - \text{هـ})}{\text{ظتا هـ}}$

$= \frac{\boxed{} \times \text{قتا هـ}}{\text{ظتا هـ}}$

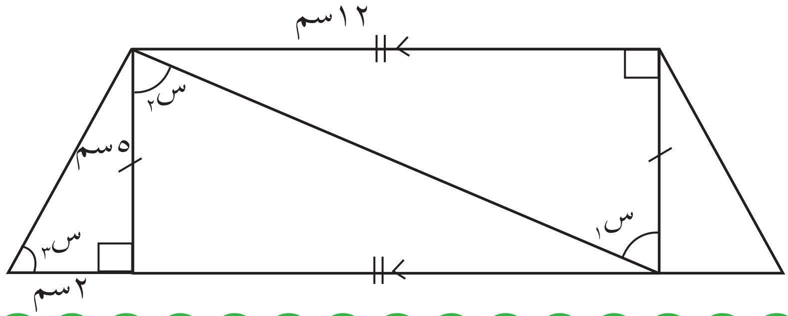
$= \frac{٥ \times \frac{٥}{\sqrt{٢٤}}}{(\quad)} = \frac{٢٥}{\sqrt{٢٤}} \times$ ______

= ____________________

تمارين ومسائل:

س١ س ص ع مثلّثٌ قائمُ الزاوية في ص، فيه س ص = ص ع = ٥ سم، أجدُ كلًّا من :
جتا ع، ظا ع، قا ع، قتا ع.

س٢ أجدُ النسب المثلثيّة الأساسيّة والثانويّة للزّوايا $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ في الشكل الآتي:

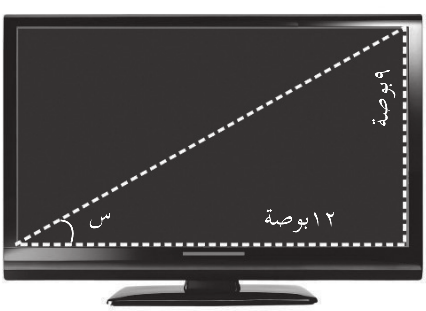


س٣ لدى هاني سلك أ د طولُه ٢٥ سم، أراد أن يشكل منه زاوية قائمة ليستخدمه في حصة الرياضيات، أخذ عليه النقطتان ب، جـ، وقام بثني السلك عند النقطة ب.
بحيث: أ ب = ب جـ = ١٠سم ، ب د يعامد أ ب. أجد:

١ طول $\overline{أ د}$، طول $\overline{أ جـ}$
٢ ظا (أ جـ ب) ، جتا د
٣ ظتا (ب أ جـ)

س٤ أ جـ هـ مثلثٌ قائمُ الزاوية في جـ، جتا (٩٠° − هـ) = $\frac{٢}{٣}$ ، أ هـ = ٣ وحدات، أجد:
جا هـ ، ظا هـ ، ظتا(٩٠° − هـ)

س٥ تُصنَّفُ شاشاتُ الحاسوب وفقاً لطول قطرها، في الشكل المجاور طول الشّاشة* = ١٢ بوصة **، وعرضها = ٩ بوصة، أبيّنُ أنّ: $\frac{جتا س}{١ - جا^٢ س} = \frac{١}{جتا س}$



* الواجهة الأمامية للشاشة
** البوصة = ٢٫٥٤ سم

(٥ –٣)　المتطابقات المثلثيّة

نشـاط(١): هـدى وشـادي طالبـان فـي الصـفّ التاسـع فـي مدرسـة الشـهيد أبـو جهـاد الأساسـيّة، كلّفهمـا معلّمُ الرياضيّـات بواجـبٍ بيتـيّ، وكان حـول كـونِ المعادلـة $س^٢ - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)$ صحيحـةً لـكلّ قيـمِ المتغيّـر س، أم صحيحـة لبعـض قيـم المتغيّـر س. وفـي اليـوم التالـي تناقـش الطالبـان حـول ذلـك.

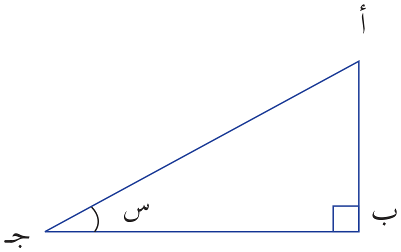
أيّهما كانت إجابتُه صحيحةً: هدى أم شادي؟ ولماذا؟

لاحظ أنّ: $س^٢ - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)$: صحيحة لـ ————————

أَتَعَلَّم : المتطابقة هي معادلة صحيحةٌ لجميع قيمِ المتغيّرات فيها.

والمتطابقة المثلثيّة هي متطابقةٌ تحوي نسباً مثلثيّة. وتكون صحيحةً لجميع قيم الزوايا الموجودة فيها.

نشاط(٢): في المثلث المجاور، أجد:



أوّلًا: العلاقة بين ظاس، جاس، جتاس

$$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\;\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\;}{\;\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\;}$$

$$= \frac{\text{أ ب}}{\square} = \text{ظا س}$$

ثانيا: قيمة $\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س}$

$$\text{جا}^{2}\text{س} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{2} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^{2} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{جتا}^{2}\text{س} = \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^{2} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^{2} = \frac{\square}{\square}$$

ومنها: $\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$

$$= \frac{(\text{أ ب})^{2} + (\text{ب جـ})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}} = 1 \quad \text{(لماذا)؟}$$

أتعلّم: إذا كان س ص ع مثلثاً قائم الزاوية في ص، فإنّ:

١. $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

٢. $\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س} = 1$ (تُسمّى متطابقات مثلثيّةً أساسيّة)

وهناك كثيرٌ من المتطابقات المثلثيّة التي تُشتقُّ من المتطابقة المثلثيّة الأساسيّة السابقة منها:

★ بقسمة طرفيّ المتطابقة المثلثيّة الأساسيّة الثانية على: $\text{جتا}^{2}\text{س}$ ، تنتجُ متطابقةٌ مثلثيّةٌ أساسيّةٌ أخرى:
$\text{ظا}^{2}\text{س} + 1 = \text{قا}^{2}\text{س}$

★ بقسمة طرفيّ المتطابقة نفسها على: $\text{جا}^{2}\text{س}$ ، نحصلُ على المتطابقة : $\text{ظتا}^{2}\text{س} + 1 = \text{قتا}^{2}\text{س}$

نشاط(٣): أُثبتُ صحّةَ المتطابقة الآتية:

$$\frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{(١ - \text{جتا هـ})} = ١ + \text{جتا هـ}$$

الطرف الأيمن : $\frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{(١ - \text{جتاهـ})} = \frac{١ - \text{جتا}^{٢}\text{هـ}}{(١ - \text{جتا هـ})}$

$$= \frac{(\quad\quad)(\quad\quad)}{(١ - \text{جتا هـ})}$$

$= ١ + \text{جتا هـ}$ (الطرف الأيسر)

لاحظ: لإثبات صحّة متطابقة بدأنا بأحد الأطراف للوصول إلى الطرف الآخر.

نشاط (٤): قام كل من علي وهبة بمحاولة اثبات صحة المتطابقة:

جتا س ظتا س = قتا س − جاس كالآتي:

طريقة علي

$\text{جتا س ظتا س} = \text{جتا س} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$= \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س}}$

طريقة هبة

$\text{قتاس} - \text{جاس} = \frac{١}{\text{جا س}} - \text{جا س}$

$= \frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س}}$

(لكن : $\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$)

$= \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س}}$

(أناقش الحلّين)

لاحظ: لإثبات صحّة متطابقة تمّ أخذ كل طرف على حدة حتى تساوى الطرفان.

تمارين ومسائل:

س١ أُثبتُ صحّةَ المتطابقاتِ الآتية:

١) جتا^{٢}س = (١ + جا س) (١ − جاس)

٢) جتا س + جا س ظا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

٣) قا س قتا س = ظا س + ظتا س

٤) (جاس + جتا س)^{٢} − ٢ جا س جتا س = ١

س٢ أعطِ مثالاً يبيّن أنّ كلًّا ممّا يأتي ليس متطابقةً مثلثيّة:

أ) ١ − جا س = جتا س

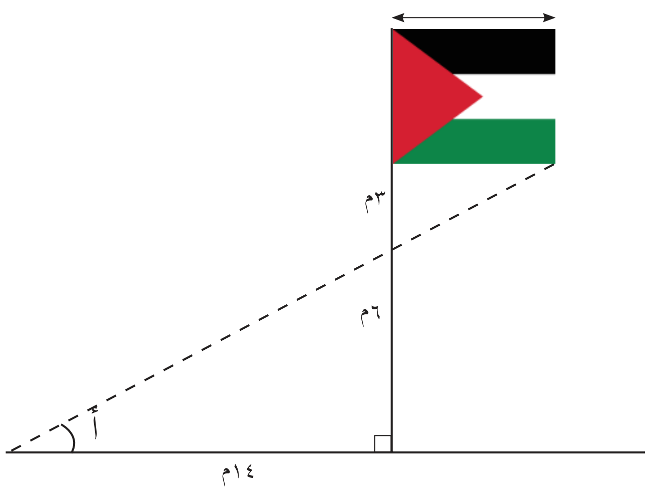
ب) جا س جتا س = $\frac{١}{٢}$ جا س

س٣ تمّ رفع علم فلسطين أمام مقرّ الأمم المتحدة أواخر شهر أيلول من العام ٢٠١٥م.

أ) أجد طول العلم

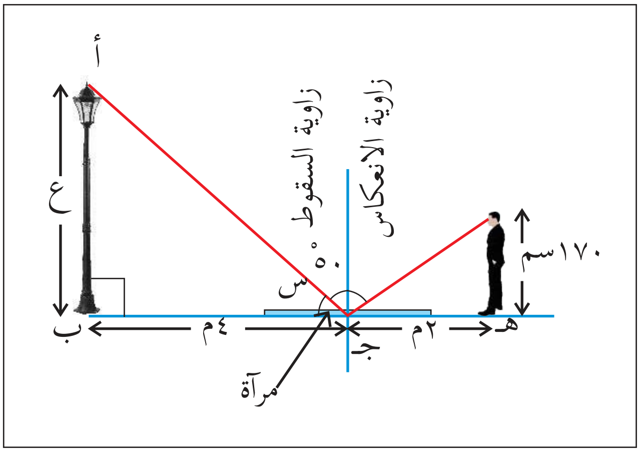
ب) بالاعتماد على الزاوية الحادة أ في الشكل الآتي أتحقق من صحة المتطابقة

(جا أ - ١) (ظا أ + قا أ) = - جتا أ



(٥ – ٤) المعادلات المثلثيّة

نشـاط(١): ينصُّ قانونُ انعكاس الضوْءِ الأوّل على أنّ زاويةَ سقوطِ شعاعٍ على سطحٍ عاكسٍ تساوي زاويةَ انعكاسِ الشعاع نفسه. يحاول شخصٌ طولُه ١٧٠سم معرفةَ ارتفاعِ عمودِ كهرباء؛ من خلال النّظرِ إلى مرآةٍ مستويةٍ ملقاةٍ على سطح الأرض، بحيث يبعدُ عن النقطة جـ مسافة ٢م، إذا عُلِمَ أنّ قياسَ زاوية السقوط* ٥٠°، وأنّ عمودَ الكهرباءِ يبعد ٤م عن النقطة جـ، فكيف يمكنُ استخدامُ النسب المثلثيّة في الشكل المقابل، لمعرفة ارتفاعِ عمودِ الكهرباء؟



قياس زاوية الانعكاس = ــــــــ

قياس الزاوية س في المثلث أ ب جـ = ٤٠° (لماذا؟)

ظا س = $\frac{\square}{٤}$

ع = ٤ ظاس

ع = ٤ □ ظا٤٠° = ٤ □ $\frac{\square}{\square}$ = ٣,٤ متر

تُسمّى الجملةُ : ٣,٤ = ٤ ظاس معادلةً مثلثيّة.

أفكر وأناقش

هل هناك طريقةُ حلٍّ أخرى.

تعريف

المعادلة المثلثيّة: هي معادلة تحتوي نسبةً مثلثيّةً أو أكثر، تكون صحيحةً لبعض قِيَم المتغيّر فيها.

* زاوية السقوط: هي الزّاوية المحصورةُ بين الشّعاع الساقطِ والعمودِ المقام عند نقطةِ السّقوط.

نشاط (٢): أحلُّ المعادلاتِ المثلثيّةَ الآتية:

أ) $\sqrt{٢}$ قتا س – ٢ = ٠ ، حيث: س زاوية حادة.

$\sqrt{٢}$ قتا س – ٢ = ٠

قتا س = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = ـــــــــ

جا س = ـــــــــ ، إذن: س= ٤٥ ْ

ومنها: مجموعة حل المعادلة هي {٤٥ ْ}

ب) $\sqrt{٣}$ جا س – جتا س =٠ ، س زاوية حادّة.

$\sqrt{٣}$ جا س = ـــــــــ

جا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ جتا س (بقسمة طرفيّ المعادلة على جتا س)

ـــــــ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

س = ٣٠ ْ، ومنها: مجموعة حل المعادلة هي {٣٠ ْ}

ملاحظة: **حلّ المعادلة المثلثيّة:** هو إيجادُ قياسِ الزّاويةِ س التي تجعلُ المعادلة صحيحة.
مجموعة حلّ المعادلة: هي مجموعةُ القيمِ التي تجعل المعادلة صحيحةً دائماً.

نشاط(٣): أحلّ المعادلات المثلثيّة الآتية:

٢جتا^{٢} س – ٧جتا س + ٣ = ٠ ، س زاوية حادة.

أُكمل بإيجاد قيمة/ قيم س :

أ) ٢جتا^{٢} س – ٧جتا س + ٣ = ٠ ، س زاوية حادة

(٢جتا س – ـــــ) (جتا س – ٣) = ٠

إمّا ٢ جتا س – ١ = ٠ أو جتا س – ٣ = ٠

جتا س = $\frac{١}{٢}$ جتا س = ٣

س = ـــــــــ مرفوضة (لماذا ؟)

ومنها: مجموعة حلّ المعادلة هي {٦٠ ْ}

أفكر وأناقش هل كل معادلة مثلثية تمثل متطابقة مثلثية؟

تمارين ومسائل:

س١ أحلُّ المعادلاتِ المثلثيّةَ الآتية حيث س، هـ، أ، زوايا حادة :

أ (٢جا هـ − ١) (٢جتا هـ − ١) = ٠

ب ظا^{٢} س − ٢ظا س + ١ = ٠

ج ٢جا^{٢} أ − ٥جا أ + ٢ = ٠

س٢ أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزّاوية في ب فيه: قا أ = $\sqrt{٢}$ ، أحلُّ المعادلاتِ الآتية:

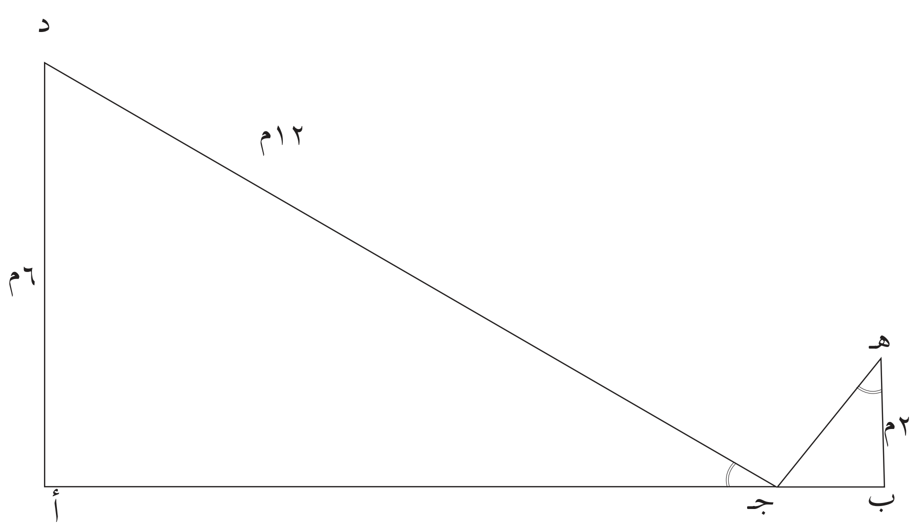
١ س جا أ − جتا أ = ٠

٢ ٢س ظتا أ − ظا أ = ٠

٣ $\frac{\text{قتا}(٩٠^\circ - \text{أ})\ \text{ظتا}\ (٩٠^\circ - \text{أ})}{٢\text{س}^{٢}} - (\frac{١}{\text{س}}) = ٠$ ، س ≠ صفر

س٣ يمثل الشكل الآتي موقع المنزل (هـ) عند النقطة (جـ) المزودة لخدمة الإنترنت من موقع التقوية (د)، وكان ∢ (د جـ أ) = ∢ (جـ هـ ب).

أجد ∢ هـ.



(٥-٥) تمارين عامّة

س١ أضعُ دائرةً حول رمزِ الإجابة الصّحيحة فيما يأتي:

١ ما قيمة المقدار $\frac{\text{جتا س قتا س}}{\text{ظا س}}$ ؟

أ) ظتا س ب) قتا س جـ) ظتا^{٢} س د) قتا^{٢} س

٢ إذا كانت س زاوية حادة، وكان جاس = جتا(س + ٢٠°)، فما قياسَ الزّاوية س ؟

أ) ٣٠° ب) ٣٥° جـ) ٥٠° د) ٢٠°

٣ ما قيمة جا^{٢} ٣٠° + جتا^{٢} ٣٠° ؟

أ) صفر ب) ١ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤ ما قيمة جتا هـ × $\frac{١}{\text{قا هـ}}$ ؟

أ) صفر ب) ١ جـ) جتا^{٢} هـ د) جتا هـ

٥ إذا كانت س زاوية حادة، وكان جتا س ظا س = $\frac{١}{٢}$ ، فما قيمةَ س ؟

أ) ٤٥° ب) ٣٠° جـ) ٦٠° د) ٨٠°

٦ ما قيمةُ المقدار المكافئ لـ: جا^{٢} س + ظا^{٢} س جا^{٢} س ؟

أ) ظا س ب) قا^{٢} س جـ) ظتا^{٢} س د) ظا^{٢} س

س٢ إذا كان جا أ = ٠,٣ ، أجدُ قيمَ النّسبِ المثلثيّة الأخرى للزاوية أ، وقيمَ النّسبِ المثلثيّة للزاوية المتمّمة لها.

س٣ أُثبتُ صحّةَ المتطابقاتِ المثلثيّة الآتية:

أ $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ س}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{ س}}$ = جا^{٢} س

ب جتا^{٢} س + ظا^{٢} س جتا^{٢} س = ١

جـ ١ + ظتا^{٢}(٩٠° − هـ) = قا^{٢} هـ

د $\frac{\text{جا س جتا س}}{\text{ظا س}}$ + $\frac{\text{ظا س}}{\text{قتا}^{٢}\text{ س ظا س}}$ = ١

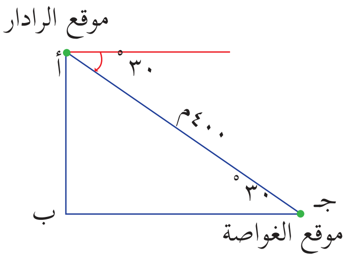
س٤ إذا علمت أنّ: ١٣ جا أ − ١٢ = ٠، حيث أ زاوية حادة. أحسبُ قيمةَ ظا أ + قا أ

س٥ أحلُّ المعادلاتِ المثلثيّةَ الآتية:

أ) -٢جتا هـ + ٣ = ٢

ب) ٢جتا^{٢} هـ − ٥جتا هـ + ٢ = ٠

س٦ رصد رادار على سفينةٍ حربيّةٍ غوّاصةً على بعد ٤٠٠ متر تحت سطح الماء، بزاويةِ انخفاضٍ قياسُها ٣٠°، أجدُ عمقَ الغوّاصة تحت سطح الماء لحظةَ الرّصد.



س٧ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
اجد النسب المثلثية لاي زاوية حادة			
احل مسائل كلامية على النسب المثلية			
اوظف النسب المثلثية في حل مشكلات حياتية			

مشروع الوحدة:

يفصلُ وادي بين قريتي برطعة الشرقية وبرطعة الغربية، ولتسهيل الحركة بينهما فكّر السكّانُ إقامةَ جسرٍ فوقه، كيف تساعد السكّان في التخطيط لإقامة الجسر؟ (اعتبر القريتين على نفس المستوى)

★ حدّد الأدوات اللازمة للعمل.

★ ارسمْ شكلاً توضيحيّاً.

★ حدّد المفاهيم والمهارات الرياضيّة التي تحتاجها.

★ ما المخاطر التي يواجهونها؟

★ اكتبْ تقريراً يوضّحُ خطواتِ العمل.

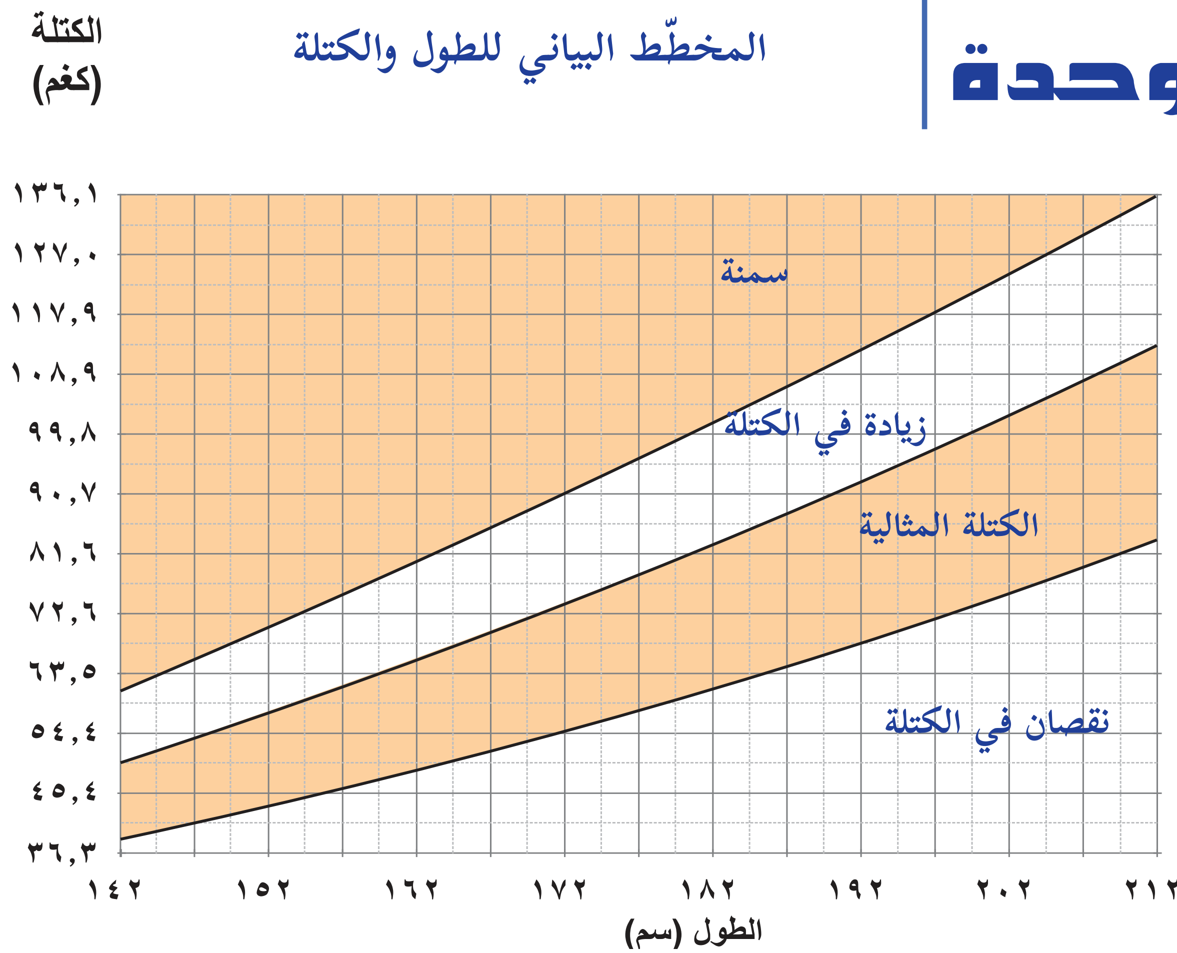
روابط إلكترونية

• www.mohe.ps/pcdc

الوحدة ٦

الجبر وتطبيقات الحساب

المخطّط البياني للطول والكتلة



أتأمّل الصورة، أقيسُ طولي، وأستخدمُ المخطّطَ البيانيّ في تحديد الكتلِ المناسبة، لتكون كتلتِي ضمن الكتلة المثالية (الطبيعية).

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف المتباينات الخطية في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ التعرّف إلى الفترات وأنواعها .

٢ تمثيل الفترات على خطّ الأعداد.

٣ التعرُّف إلى المتباينة الخطيّة بمتغيّرٍ واحدٍ، وحلّها.

٤ التعرُّف إلى المتباينة الخطيّة بمتغيريْن، وتمثيلها بيانيّاً.

٥ حلّ نظامٍ من المتباينات الخطيّة بمتغيريْن بيانيّاً.

٦ حلّ مشكلاتٍ حياتيّة على مفاهيم الوحدة.

(٦ – ١) الفترات

نشاط(١): يعد الحق في توفير التعليم المجاني من الحقوق الأساسية لكل طفل، يلتحق الأطفال في فلسطين بالصف الأول الأساسي في المدارس الحكومية والوكالة إذا كانت أعمارهم بين ٥ سنوات و٧ أشهر، و٦ سنوات و٧ أشهر، في بداية العام الدراسيّ*، إضافةً إلى الذين أعمارهم ٦ سنوات و٧ أشهر تماماً.

يمكن لأي طفل في فلسطين عمره ٦ سنوات وشهر في بداية العام الدراسي الالتحاقُ بالمدارس الفلسطينيّة الحكوميّة، أو الوكالة، لاحظ أنّ ٦ $\frac{١}{١٢}$ محصور بين العددين ٥ $\frac{٧}{١٢}$، ٦ $\frac{٧}{١٢}$.

لا يمكنُ لطفلٍ في فلسطين عمرُه ٥ سنوات الالتحاق في المدارس الحكوميّةٍ، أو مدارس الوكالة.

لاحظ أنّ: ٥ $\not\in$ {س: س $\in$ ح، ٥ $\frac{٧}{١٢}$ $<$ س $\leqslant$ ٦ $\frac{٧}{١٢}$}.

هل يمكنُ للطفل الفلسطينيّ الذي عمره ٥ سنوات و ١٠ أشهر الالتحاقُ بالمدرسة؟ ____، لماذا ؟ ____.

نشاط (٢):

١. أُكملُ كتابةَ المجموعات الآتية:

أ) المجموعة المُكوّنة من العددَيْن الحقيقيّيْن: ١ ، ٥، وجميع الأعداد المحصورة بينهما على خطّ الأعداد = {س : س $\in$ ح ، ١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٥}، وهي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تبدأ بالعدد ١ وتنتهي بالعدد ٥.

ب) المجموعة المكوّنة من العدد ١، وجميع الأعداد المحصورة بين العددَيْن: ١ ، ٥ على خطّ الأعداد = {س: س $\in$ ح ، —— $\leqslant$ س $<$ —— }.

٢. ماذا نسمّي هذه المجموعات؟————

* على اعتبار أن العام الدراسي يبدأ في الأول من شهر أيلول.

أَتَعَلَّمُ : ليكن أ ، ب عدديْن حقيقيّيْن، بحيث: أ < ب، فإنّ مجموعةَ جميعِ الأعدادِ الحقيقيّة المحصورة بين العدديْن: أ ، ب على خطّ الأعداد، تُسمّى فترة ، ويستعمل الرمزان "[" ، "]" للدلالة على انتماء طرفي الفترة أو عدم انتمائهما إليها.

الفترات المحدودة :

ليكن أ ، ب عدديْن حقيقيّيْن ، حيث: أ < ب

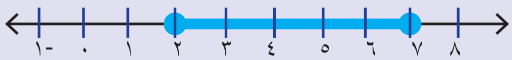
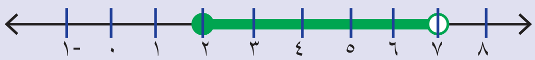
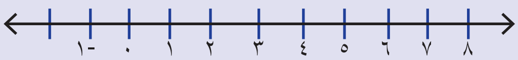
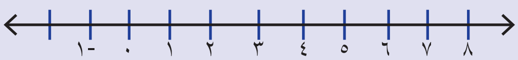
أنواع الفترات	الفترة بالرموز	الفترة على شكل مجموعة
المغلقة	[أ ، ب]	{س: س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب}
نصف المغلقة (نصف المفتوحة)	]أ ، ب]*	{س: س ∈ ح ، أ < س ≤ ب}
نصف المغلقة (نصف المفتوحة)	[أ ، ب[**	{س: س ∈ ح ، أ ≤ س < ب}
المفتوحة	]أ ، ب[***	{س: س ∈ ح ، أ < س < ب}

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

الفترة الثانية: تعبر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من العدد أ والأقل أو يساوي العدد ب

* نصف مغلقة من اليسار ** نصف مغلقة من اليمين *** يمكن كتابتها أيضاً على الصورة (أ ، ب)

نشاط (٣): أُكملُ كتابةَ الفتراتِ الآتيةِ كمجموعاتٍ، وأمثّلُها على خطّ الأعداد:

الفترة	الفترة على شكل مجموعة	التمثيل على خطّ الأعداد
[٢ ، ٧]	{س: س ∈ ح ، ٢ ≤ س ≤ ٧}	
[٢ ، ٧[	{س: س ∈ ح ، ٢ ≤ س < ـــــ}	
]٢ ، ـ]	{س: س ∈ ح ، ـــــ < س ≤ ٥}	
]٢ ، ٥[	{س: س ∈ ح ، ـــــ}	

نشاط (٤): أ) أكتب الفترة [-٢ ، $\frac{١}{٢}$]، على شكل مجموعة: ________________

ب) أمثّلها على خطّ الأعداد:

جـ) أحدّدُ أيَّ الأعداد الآتية تنتمي إلى الفترة [-٢ ، $\frac{١}{٢}$[:

-٢ ، -٣ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، - $\frac{١}{٣}$ ، $\sqrt{٠,٠٤}$ ، -١ ، ٨

د) أكتب ٣ أعداد تنتمي إلى الفترة [-٢ ، $\frac{١}{٢}$[: ______ ، ______ ، __________

أُفَكِّر وأُناقش

١) هل [١ ، ٤] = {١ ، ٤} ؟ ________ ، ولماذا؟

٢) بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد غير منتهي من الأعداد، أعط ثلاثة أعداد بين العددين $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{٢}{١٠}$

نشـاط (٥) مصعدٌ في بنايـةٍ مكوّنـةٍ مـن ٧ طوابـق، كُتـب عليـه: "الحـد الأعلـى للحمولـة ٤٥٠ كغـم" .

يمكن التعبيرُ عن كتلةِ الحمولةِ الممكنةِ للمصعد بالفترة: [٠ ، ٤٥٠] .

أمثّلُ تلك الفترةَ على خطّ الأعداد:________________________

هـل يمكـن لـ ٣ أشـخاصٍ، كتلُهـم: ٨٣ كغـم ، ٧٩ كغـم ، ٩٠ كغـم، ويحمـل كلٌّ منهـم ٢٥ كغـم مـن الأرز الصعـودُ معـاً إلـى الطابـق الرابـع ؟ ____________ .

وضّح إجابتك ________________________.

الفترات غير المحدودة

ليكن أ عدداً حقيقياً ، فإنّ:

الفترة	الفترة على شكل مجموعة
[أ ، ∞[	{س: س ∈ ح ، س ≥ أ }
]أ ، ∞[	{س: س ∈ ح ، س > أ }
]-∞ ، أ]	{س : س ∈ ح ، س ≤ أ }
]-∞ ، أ[	{س: س ∈ ح ، س < أ }
]-∞ ، ∞[	{ س : س ∈ ح } = ح

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

الفترة الأولى تعبر عن جميع الأعداد الحقيقة الأكبر من أو يساوي العدد أ

ملاحظة: الرمز ∞ يدلّ على مالانهاية في الفترات غير المحدودة.

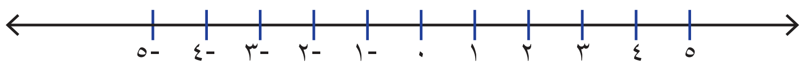
نشاط (٦) أعبّرُ عن المجموعات الآتية بفترات، وأكملُ تمثيلها على خطّ الأعداد:

١) أ = {س: س ∈ ح ، س > -٣}

أ =]-٣ ، ∞[

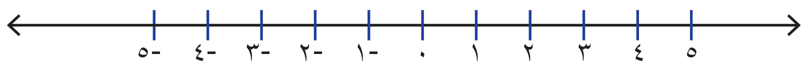
٢) ب = {س: س ∈ ح ، س ⩽ ٢}

ب =]-∞ ، ــــــ[

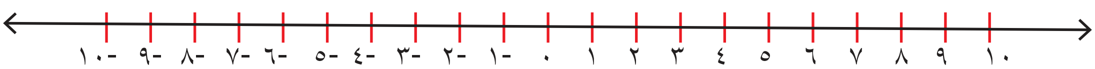


٣) جـ = {س : س ∈ ح}.

جـ =]ــــــ ، ــــــ[



نشاط (٧): أُمثّلُ الفترة]-∞ ، ١٠[على خطّ الأعداد، أحدّدُ أيّ الأعداد الآتية تنتمي إلى هذه الفترة: ١٠ ، -١٠ ، صفر ، -$\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٩٨٠.



١٠ ∉]-∞ ، ١٠[، -١٠ ــــــ]-∞ ، ١٠[، صفر ــــــ

-$\sqrt{٢}$ ــــــ ، $\frac{١}{٢}$ ــــــ ، ٩٨٠ ــــــ

تمارين ومسائل:

س١ كُتبَ على قطرةٍ للعين: "صالحة للاستخدام لمدة ٣٠ يوماً من تاريخ فتح العبوة"، أُعبّرُ عن مدة صلاحيّتها عند فتحها بفترة ، وأُمثّلُها على خطّ الأعداد.

س٢ أكتبُ المجموعات الآتية على شكل فترات :

أ) ل = {س: س ∈ ح ، ٢١ ⩽ س < ٤٠٠}.

ب) جميع الأعداد الحقيقيّة التي بُعدُها عن الصّفر أقلّ من ٥ وحدات.

جـ) درجات الحرارة السّالبة.

س٣ أُمثّلُ الفترات الآتية على خطّ الأعداد :

أ) [-٤ ، ٢]

ب) [-٤,٠ ، ∞[

جـ)]-∞ ، ٩]

س٤ أعبر عمّا يلي بفترات:

أ) فترة صلاحيّةِ مِصباحٍ ٩٥٠ ساعة تشغيل.

ب) الفترة التي تُمثّل أيَّ عددٍ حقيقيٍّ غير موجب.

س٥ أحدّدُ الأعداد التي تنتمي إلى الفترة]-∞ ، -٣[من بين الأعداد:

٣ ، $\frac{-٢٥}{٤}$ ، -٣ ، ٠ ، -٤ ، -١١.

(٦ - ٢) المتباينات الخطّيّة بمتغيّرٍ واحد

نشاط (١): يُعدُّ فقرُ الدم (الأنيميا) من المخاطرِ الصحيّة في المجتمع الفلسطينيّ، وينتجُ عن نقصِ بعضِ المُغذّيات من الفيتامينات، والعناصرِالمعدنيّة، (ويُعدُّ فقرُ الدمِ الناتجُ عن نقص الحديد هو الأكثر انتشاراً، يُعدُّ الذكرُ البالغُ مصاباً بفقر الدم إذا كان معدّلُ الهيموغلوبين في الدم أقلَّ من ١٣غم/ديسلتر*، وللأنثى البالغة أقلّ من ١٢غم/ ديسلتر، وللطّفل وللمرأة الحامل أقلّ من ١١غم/ديسلتر؛ وذلك حسب بروتوكول وِزارة الصّحةِ الفِلسطينيّة، الذي يعتمدُ ما تُقرُّهُ منظّمةُ الصّحةِ العالميّة. فإذا رمزنا لنسبة الهيموغلوبين في الدم للذكر البالغ المصاب بفقر الدم بالرمز س، فيمكن التعبيرُ عنها بـ:

س $<$ ١٣، وتُسمّى متباينة. أُكمل:

هل يُعدُّ الذكرُ البالغ الذي نسبة الهيموغلوبين عنده ٩ مصاباً بفقر الدم؟____________

هل يمكنُ أنْ تكون س = ١٤؟ ____________

تعريف

المتباينةُ الخطيّةُ بمتغيّرٍ واحدٍ: هي عبارةٌ رياضيّةٌ بمتغيّر واحد، وتحوى إحدى الإشارات $\geqslant$ ، $>$ ، $\leqslant$ ، $<$ ، وتُكتَبُ بإحدى الصّور الآتية :

أ س + ب $<$ ٠، أ س + ب $\leqslant$ ٠، أ س + ب $>$ ٠، أ س + ب $\geqslant$ ٠.

حيث أ ، ب أعدادٌ حقيقيّة، أ $\neq$ صفر .

نشاط (٢): أرتّب الأشخاص التالية أسماؤهم حسب أطوالهم من الأطول إلى الأقصر:

أمل: ١,٥٨ م ، مازن: ١,٩٠ م ، جميل: ١٧٠سم.

مازن هو الأطول

الترتيب هو: ______ ، ______ ، ______ .

* ١٠ديسلتر= لتر

نشاط (٣): أُكوّنُ متباينةً تُعبِّرُ عن كلٍّ من الجمل الآتية:

★ الحدّ الأدنى لقيمة المشتريات في محلٍّ تجاريّ؛ للحصول على خصم هو ١٠٠ دينار. فإذا رمزنا لقيمة المشتريات للحاصلين على خصم بالرمز س ، يمكن التعبير عن المسألة بالمتباينة: س ≥ ١٠٠

★ الحدّ الأعلى لزمن التشغيل المتواصل لخلّاطٍ منزليّ ٦٠ ثانية، شغّلتْه أمُّ عبد الله ٣٥ ثانية وما زال يعمل. أرمزُ للزمن الإضافيّ المُمكن للتشغيل م

٦٠	
٣٥	؟

فإنّ المتباينة: ٣٥ + ____ ≤ ____.

نشاط (٤): أجدُ ناتجَ ما يأتي، وأُقارن :

٣ ، ٨ عددان حقيقيّان،   ٨ – ٣ = ____، وهو عدداً موجباً ومنها ٨ > ٣ .

-٢ ، ٦ عددان حقيقيّان،   ٦ – -٢ = ____، وهو عدد ____ ومنها ٦ ____ -٢.

ماذا تلاحظ؟

تعريف

يكون العددُ الحقيقيّ أ أكبرَ من العدد الحقيقيّ ب؛ أي: أ > ب ،إذا كان أ – ب عدداً موجباً، وبالرموز أ – ب > صفر.

نشاط (٥): أضعُ إشارةَ > أو < أو = في الفراغات الآتية :

٥ < ١٢

٥ + **٣** ____ ١٢ + **٣**   ،   ٥ + **-٢** ____ ١٢ + **-٢**

-١ > -٤

-١ + **٢** ____ -٤ + **٢**   ،   -١ + **-٦** ____ -٤ + **-٦**

ماذا تلاحظ ؟____

أتعلّم : إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقيّة ، و كان أ > ب ، فإنّ :

أ + جـ > ب + جـ.

نشاط (٦): أُكمل إيجاد ما يأتي، وأضع إشارة > أو < أو = في الفراغ :

٥ < ١٢ :

٥ × **٣** < ١٢ × **٣** ، ٥ × **-٢** ________ ١٢ × **-٢**

-١ > -٤ :

-١ × **٢** ________ -٤ × **٢** ، -١ × **-٦** ________ -٤ × **-٦**

٣٦ > -٢٤ :

٣٦ ÷ **٦** ________ -٢٤ ÷ **٦** ، ٣٦ ÷ **-٦** ________ -٢٤ ÷ **-٦**

ماذا تلاحظ ؟ ____________________

أتعلّم : إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقيّة ، فإنّه:

إذا كان أ > ب ، وكان جـ عدداً موجباً، فإنّ: أ جـ > ب جـ **و** $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} > \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$.

وإذا كان أ > ب ، وكان جـ عدداً سالباً، فإنّ: أ جـ < ب جـ **و** $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} < \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$.

العبارات أعلاه صحيحه إذا كانت الإشارة ≥.

حلّ المتباينة: هو إيجاد قيمةٍ، أو قيمِ المتغيّر التي تجعل المتباينةَ صحيحةً عند تعويض تلك القيم فيها.

ملاحظة: مجموعةُ قيمِ المتغيّر تُسمّى مجموعةَ حلِّ المتباينة.

مِثال (١): أجدُ مجموعةَ حلّ المتباينة: ٢ س − ٢ ⩽ ٢٠ في ح ، وأُمثّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد.

الحل:

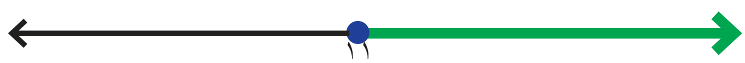
٢ س − ٢ ⩽ ٢٠

باستخدام خاصيّة الجمع للمتباينة: ٢ س − ٢ + ٢ ⩽ ٢٠ + ٢

٢ س ⩽ ٢٢

وبالقسمة على ٢ ينتج: س ⩽ ١١.

مجموعة الحل = [١١ ، ∞[، وتُمثَّلُ على خطّ الأعداد:



أُفَكِّر وأُناقش

ليكن أ ، ب عددين حقيقيّين، بحيث: أ > ب . ما العلاقة بين $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{١}{ب}$ ؟ أوضّحُ بأمثلةٍ عدديّة.

نشاط (٧): كلّفت المعلّمةُ كلًّا من إشراق وندى حلّ المتباينة: ٢س + ٣ > ٤س + ٩ في ح .

طريقة إشراق
٢س + ٣ > ٤س + ٩
٢س + ٣ − ٣ > ٤س + ٩ -٣
٢ س > ٤س + ٦
٢س − ٤ س > ٤س +٦ -٤ س
-٢ س > ٦
س < -٣

طريقة ندى
٢س + ٣ > ٤س + ٩
٢س + ٣ − ٢س > ٤س + ٩ − ٢س
٣ > ٢س + ٩
٣ − ٩ > ٢س + ٩ − ٩
-٦ > ٢س
-٣ > س

أناقش الحلّيْن:

نشاط (٨): بالاعتماد على المتباينة: ١,٥ < س < ٨,٩ ، أُكملُ ما يأتي:

أكبرُ عددٍ صحيحٍ يُحقّقُ المتباينة هو: ٨

أقلُّ عددٍ صحيحٍ يحقّقُ المتباينة هو: ____.

عددُ الأعداد الصّحيحة التي تُحقّقُ المتباينة يساوي: __________.

أكتب ثلاث أعداد صحيحة تحقق المتباينة: ____ ، ____ ، ____

مجموعة حل المتباينة في ح = {س : ____________} =] ١,٥ ، ٨,٩ [

أقارنُ مجموعةَ حلّ المتباينة: ١,٥ < س < ٨,٩ بالفترتيْن:] -∞ ، ٨,٩ [،]١,٥ ، ∞[

أُمثّلُ مجموعةَ حلّ المتباينة على خطّ الأعداد: ______________________________

مِثال (٢): أجدُ مجموعةَ حلّ المتباينـة: س – ١ < ٤س + ٢ ⩽ ٦ ، ثـمّ أُمثّـلُ مجموعـةَ حلّهـا على خـطّ الأعـداد.

الحل: لحلّ المتباينة: س – ١ < ٤ س + ٢ ⩽ ٦ نجد تقاطعَ مجموعتيّ حلّ المتباينتيْن:

س – ١ < ٤ س + ٢ وَ ٤ س + ٢ ⩽ ٦

أوّلًا: المتباينة س – ١ < ٤س + ٢

س – ٣ < ٤س (بطرح ٢ من طرفي المتباينة).

-٣ < ٣س (بطرح س من طرفي المتباينة).

-١ < س (بقسمة طرفي المتباينة على ٣).

إذن: مجموعة الحل]-١ ، ∞[

ثانياً: المتباينة ٤س + ٢ ⩾ ٦

٤س ⩾ ٤ (بطرح ٢ من طرفي المتباينة).

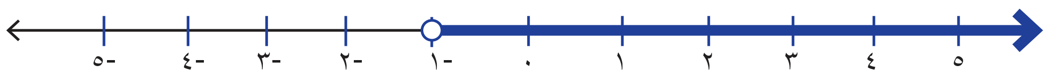
س ⩾ ١ (بقسمة طرفي المتباينة على ٤).

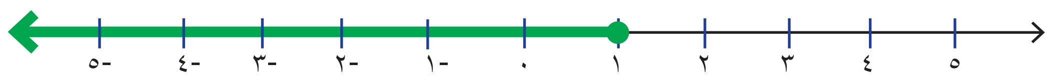
إذن مجموعة الحل] -∞ ، ١[

مجموعة حلّ المتباينة: س − ١ > ٤ س + ٢ ⩾ ٦ هي:

[-١ ، ∞]∩[-∞ ، ١] = [-١ ، ١]،

ألاحظ التمثيل على خطّ الأعداد:





وبالتالي، فإنّ تمثيل مجموعة الحلّ هو تقاطع الفترتين

تمارين ومسائل:

س١ أحلُّ المتباينات الآتية، وأمثّلُ مجموعة حلّها على خطّ الأعداد:

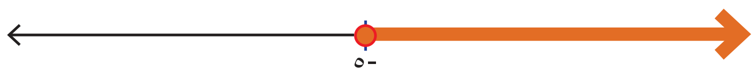
أ) س + ٣ ≤ ٤

ب) ٢(ص + ٥) − ص > ٥

جـ) -س − ٧ ≤ س − ٦

د) ٧ ≤ ٣ − س ≤ ١٢

س٢ أ) أكتبُ متباينةً خطيّةً يكون حلُّها ممثّلًا بالشكل:



ب) أكتب متباينةً تمثّلُ العبارة : «طرح العدد ٧٠ من عددٍ ما، وكانت النتيجة ٥ على الأقلّ» .

س٣ كتلة شاحنة ١٤ طناً، وكان الحد الأعلى لها مع حمولتها ٣٢ طناً، فما الحمولة المتبقيّة المسموح بها. أعبّرُ عن المسألة بمتباينةٍ، ثمّ أحلّها.

س٤ إذا كانت أ ، ب ∈ ح*، ما إشارةُ قيمِ كلٍّ من أ ، ب التي تجعل المتباينةَ صحيحةً في كلٍّ من الحالات الآتية :

١) أ ب < ٠

٢) أ²ب > ٠

٣) $\frac{أ}{ب}$ > ٠

(٦ – ٣) المتباينات الخطّيّة بمتغيّريْن

نشاط (١) ضِمنَ آلياتِ تنظيمِ الأسواق في فِلَسطينَ، أقرّتْ وِزارةُ الاقتصاد الوطنيّ، ضمن الماده ١٧ من قانون حماية المستهلك قراراً بإشهار الأسعارِ على السّلع، ويُلزِمُ هذا القرارُ التّجارَ والبائعين وضْعَ الأسعارِ على السّلع. تحدّد الأسعارِ في الأسواق الفلسطينيّة في بعض الحالات الاستثنائيّة؛ حيث يتمّ وضعُ تسعيرةٍ استرشاديّةٍ لمجموعةٍ من السّلع من قِبَلِ دائرةِ حمايةِ المستهلك في المحافظات، فإذا أُصدِرَتْ استمارةُ شهرِ رمضانَ بأسعارِ مجموعةٍ من السّلعِ الغذائيّـةِ الأساسيّة في إحدى المحافظات، ومنها:

النوع	دجاج مذبوح 	جبنة بلديّة 
السعر (كغم)	٤ دنانير	٥ دنانير

فإذا رصدت سميرة ٣٠ ديناراً لشراء دجاجٍ، وجبنةٍ بلديّة ، فوجدت أنّ كيلوغرام الدّجاج يُباعُ في أحد المحالّ التجاريّة بأربعة دنانير، ويُباعُ كيلوغرام الجبنة بخمسة دنانير، فإذا رمزنا لكتلة الدّجاج س كغم، ولكتلة الجبنة ص كغم. أُعبّرُ عن المسألة بمتباينةٍ:

٤س + ـــ ≤ ٣٠

لاحظ أنّ: س ≥ ٠ و ص ≥ ٠.

هل تستطيع سميرة شراءَ ٤ كيلوغرام دجاج، و٣ كيلوغرام جبنة ؟ ـــــــــــــــ

إذا التزم التاجرُ بالأسعار الاسترشاديّة التي حدّدتْها دائرةُ حماية المستهلك في المحافظة، هل سيكون باستطاعتها شراءُ ٤ كيلوغرام دجاج و ٣ كيلوغرام جبنة ؟ ـــــــــــــــ

أتعلّم: المتباينة الخطيّة بمتغيّريْن: هي عبارة رياضيّةٌ فيها متغيّران، وإحدى الإشارات < ، ≤ ، > ، ≥، وتُكتَبُ بإحدى الصّور الآتية :

أ س + ب ص + جـ < ٠ ، أ س + ب ص + جـ ≤ ٠

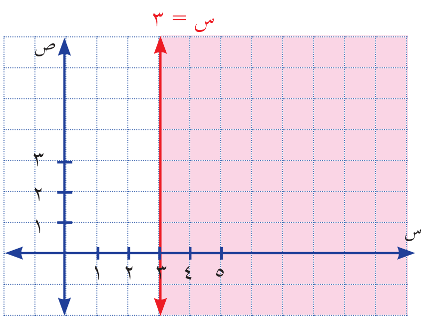
أ س + ب ص + جـ > ٠ ، أ س + ب ص + جـ ≥ ٠

حيث: أ ، ب ، جـ أعدادٌ حقيقيّة و أ ، ب ≠ صفراً.

مِثال (١): أكتبُ مجموعةَ حلّ المتباينة: س ≥ ٣، وأُمثّلُها على خطّ الأعداد ، ثمّ أُمثّلُها في المستوى الديكارتي .

الحل: مجموعة حلّ المتباينة: س ≥ ٣ = [٣ ، ∞[، وتُمثَّل على خطّ الأعداد:

ولتمثيل مجموعة حلّ المتباينة: س ≥ ٣ في المستوى الديكارتي، نرسم الخطّ المستقيم س = ٣ الذي يقسم المستوى إلى منطقتيْن، إحداهما تمثّلُ مجموعة الحل، نظلّل منطقة حلّ المتباينة س ≥ ٣ كما في الشكل .لاحظ أنّ الإحداثي السّيني للنقاط الواقعة ضمن منطقة الحل يُحقّق س ≥ ٣، أُمثّل موقع النقطة (٥ ، ١) .

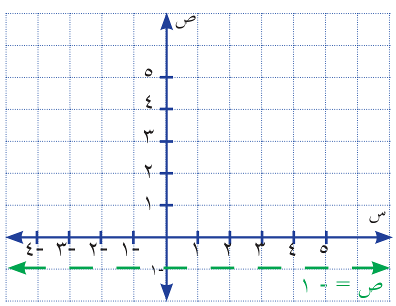


نشاط (٢): أُكملُ تمثيلَ مجموعةِ حلّ المتباينة:

ص > -١ في المستوى الديكارتي.

أرسم الخط المستقيم الذي معادلته ص = -١ ،بحيث يُرسَمُ الخطُّ مُتَقطّعاً؛ لأنّ: ص = -١ لا تُحقّق المتباينة.

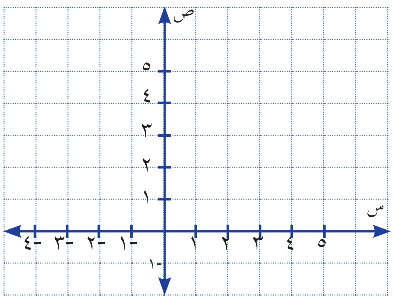
أُظلّل المنطقة التي تمثّل مجموعة الحل، وتشمل جميع النقاط التي إحداثيُّها الصّادي أكبر من -١



أكتب زوجاً مرتّباً ينتمي إلى مجموعة حلّ المتباينة: ص > -١ ———— .

أكتبُ زوجاً مرتّباً لا ينتمي إلى مجموعة حلّ المتباينة: ص > -١ (لا يحقّقها) ________ .

نشاط (٣): أمثّل مجموعة حلّ المتباينة: ٢س -٣ ص ⩾ -٦ في المستوى الديكارتي.



أرسم الخطّ المستقيم ٢س – ٣ص = -٦

لتحديد منطقة الحلّ، أُعوّضُ إحداثيّات نقطةٍ لا تقع على الخط المستقيم المرسوم في المتباينة، ولتكنْ (١، ٠) :

٢×١ – ٣×٠ = ٢ ⩾ -٦ . ماذا تلاحظ؟ ____

أظلّلُ المنطقة التي تمثّل مجموعة الحلّ على الرسم.

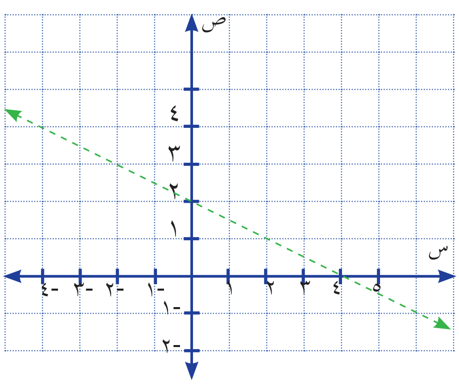
أكتبُ زوجاً مرتّباً ينتمي إلى مجموعة الحل: ________________

أكتبُ زوجاً مرتّباً لا ينتمي إلى مجموعة الحل: ________________

نظام المتباينات : هو أيُّ مجموعةٍ من المتباينات.

والمنطقة التي تمثّل حلَّ النظام هي المنطقة التي تُحقّقُ جميع المتباينات فيه.

نشاط (٤): أحدد المنطقة التي تمثل حل النظام الآتي في المستوى الديكارتي:



س + ٢ص < ٤

س ⩾ ١

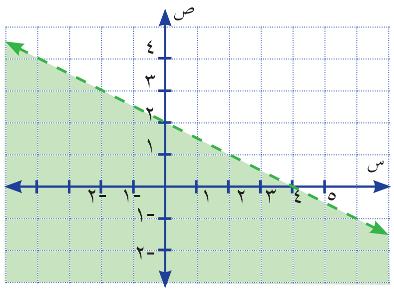
ص ⩾ -١

أُمثّلُ مجموعة حلّ المتباينة: س+٢ص < ٤ :

أرسمُ الخطّ المستقيم: س + ٢ص = ٤ ، لاحظ أنّ الخطَّ متقطع.

أُحدّدُ منطقة حلّ المتباينة: س+ ٢ص < ٤ باختيار زوجٍ مرتّبٍ، مثل: (١ ، ٠) والتعويض فيها:

١ + ٠ = ١ < ٤



أي أنّ: النقطة (١ ، ٠) ضمن منطقة الحلّ .

أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: س + ٢ص < ٤ باللون الأخضر.

١) أُمثّل مجموعة حل المتباينة س ⩾ ١ :

أرسم الخط المستقيم س = ١

ثمّ أحدد منطقة حل المتباينة س ⩾١، باختيار زوجٍ مرتّبٍ مثل:(،)، والتعويض فيها.

أظلّلُ منطقة حل المتباينة س ⩾ ١ بلونٍ آخر.

٢) أُمثّلُ مجموعة حل المتباينة ص ⩾ -١ :

أرسم الخط المستقيم ______________

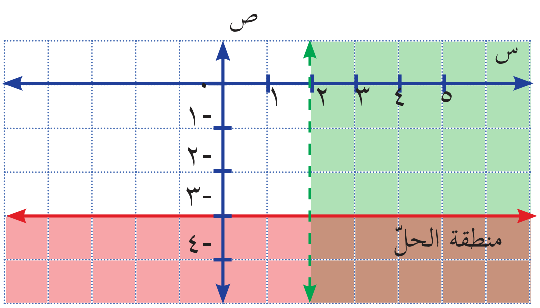
أحدّدُ منطقة حل المتباينة: ص ⩾ -١

أظلّلُ منطقة حل المتباينة __________ بلونٍ مختلفٍ عن اللونيْن السابقيْن.

وبهذا تكون المنطقة الواقعة ضمن مجموعة حلّ كلِّ متباينةٍ في النظام، هي التي تمثّلُ مجموعة حل النظام.

مِثال (٢): ما نظام المتباينات الذي مُثّلت مجموعةُ حلّه في الشكل؟

الحل:



النظام هو :

س > ٢ (تمثّلُها المنطقة المظلّلة باللون الأخضر)

ص ⩽ -٣ (تمثّلُها المنطقة المظلّلة باللون الأحمر)

تمارين ومسائل:

س١ أُمثّلُ بيانيّاً مجموعة حلّ كلِّ متباينة من المتباينات الآتية :

١ ص ⩽ -٢

٢ ٣س − ٢ ص < ٦

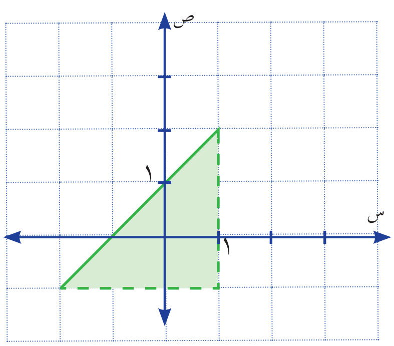
٣ ٢,٥< س < ٤

س٢ أجدُ بالرسم في المستوى الديكارتي المنطقة التي تمثّلُ حلَّ كلِّ نظامٍ من المتباينات الآتية:

أ
ص < ١
س ⩽ ١

ب
ص ⩽ -٢
ص ⩾ ٣ − س
٢س + ٤ص ⩾ ٤

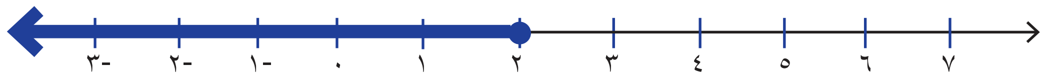
س٣ أجدُ نظام المتباينات الذي يمثّل المنطقة المظلّلة الآتية:

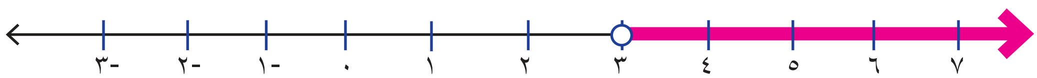


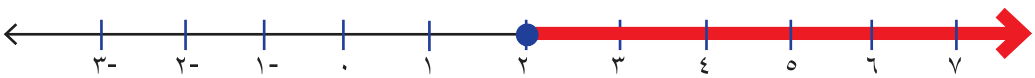
س٤ ينتج مصنع للأقمشة الجاهزة، في إحدى المدن الفلسطينية المشهورة بالصناعات الوطنية، نوعين من الجرابات، صوفية وقطنية، حيث يبيع ربطة الجرابات الصوفية بـ ٢ دينار، وربطة الجرابات القطنية بـ ٣ دنانير. استلم المصنع طلبية من أحد التجار لشراء النوعين بحيث لا يزيد ثمنها عن ٣٠٠ دينار. أمثل بيانياً الخيارات الممكنة التي يمكن للمصنع أن يزود بها ذلك التاجر.

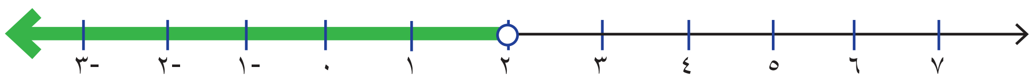
س١ أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ أيٌّ من الآتية تمثل حلَّ المتباينة: ١٠ + ٣ س ⩽ ١٦؟

أ)


ب)


جـ)


د)


٢ إذا كانت ن تمثّلُ المدة بالساعات التي يحتاجها عمرو لحلّ أسئلةِ امتحانٍ كُتِبَ عليه "مدة الامتحان ساعةٌ و نصف"، فما المتباينة التي تُمثّل القيمَ الممكنة لـ ن ؟

أ) ن > ١,٥   ب) ن ⩽ ١,٥   جـ) ن ⩾ ١,٥   د) ن < ١,٥

٣ ما الفترة التي تمثّل المجموعة: {ع : ع ∈ ح ، ع² ⩽ ٤}؟

أ)]٤ ، ∞[ب) [-٢ ، ٢]   جـ)]-∞ ، ٢]   د)]٠ ، ٢]

٤ ما الفترة التي يقع بها العدد ٣,٩̅.

أ) [١ ، ٢]   ب) [-٢ ، ٣]   جـ) [٠ ، ٤]   د)]-٤ ، ٠]

٥ إذا كانت ص ∈]-٧ ، ٥] فما قيمة ص ؟

أ) -٧   ب) ٥   جـ) صفر   د) ١٢

س٢ تُعلنُ إحدى شركات الطيران لزبائنها أنّ الحد الأعلى لأمتعة الراكب الواحد هي ٣٥ كغم، فإذا كانت كتلة الحقيبة الأولى لأحد المسافرين ١٥ كغم، ما الكتلة الممكنة للحقيبة الثانية؟ (أُعبّرُ عن المسألة بمتباينة وأحلّها).

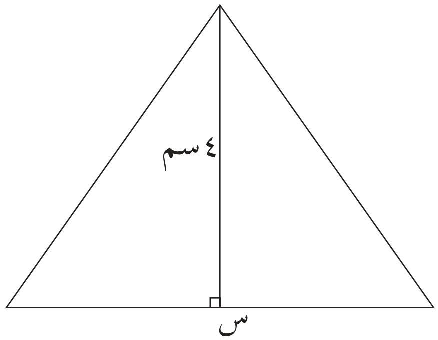
س٣ أُمثّلُ مجموعة حلّ النظام الآتي في المستوى الديكارتي:

س > -١

ص ⩽ ٣,٥

ص – س ⩾ ٢

س٤ ما مجموعة قيم س الممكنة التي تجعل مساحة المثلث في الشكل المجاور أقل من ٤٠ سم^{٢}؟



س٥ أقيّم ذاتي: أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر اثارة التي تعلمتها في هذه الوحدة .

مشروع الوحدة:

تُقدّمُ إحدى الشركاتُ الكبرى عروضاً لوكلائها لتشجيع المواطنين على شراء حاجيّاتهم، فإذا كنتَ صاحبَ هذه الشركة، استخدم الجدولَ أدناه في وضع عروضٍ مميّزة، من وجهة نظرك؛ لتشجيع النّاس على الشراء، مع مراعاة تحقيق أرباحٍ معقولة لشركتك. نظّمْ عروضَك فنيّاً أيضاً، بحيث يمكنك إدراجُها في إحدى الصّحف المحليّة. اكتب في ورقة: لماذا تعتقد بأنّ عرضك قويٌّ، ومنافسٌ لعروض أخرى وما هي المخاطر المتوقعة؟

السلعة	ثمن بيعها نقداً
ثلّاجة.	١٠٠٠ دينار
طبّاخ غاز مع فرن.	١٠٠٠ دينار
غسّالة.	٨٠٠ دينار
مِكنسة كهربائيّة.	٢٥٠ ديناراً
تلفاز.	٥٠٠ دينار

روابط إلكترونية

1- Body mass calculater
2- http://www.screencast.com
3- http://www.mohe.ps.pcdc

الوحدة ٧

الاقترانات

أتأمّل الصّورة: أبحث في الصّورة عن حوافَّ تُمثّلُ منحنياتٍ لاقترانات، أرسمُ رسماً تخطيطيّاً لها، مع تسميتها.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف كثيرات الحدود والعمليات عليها في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ التعرُّف إلى كثيرات الحدود.

٢ جمع كثيرات الحدود وطرحها.

٣ ضرب كثيرات الحدود وقسمتها.

٤ التعرّف إلى الاقتران التربيعي، وتمثيله بيانيّاً.

٥ التعرّف إلى الاقتران النسبي.

٦ إجراء العمليّات الحسابيّة الأربع على الاقترانات النسبيّة.

(٧- ١) كثيرات الحدود

نشاط(١): تستخدم البنوك خدمة الصراف الآلي على نطاق واسع وذلك للتسهيل على المواطن في التعاملات البنكيّة.

يحتوى الصرّافُ الآليّ صناديقَ من فئةِ العملات المتداوَلَة، دينار ، دولار،... ، فإذا كانت س = ١٠ نستطيع التعبيرُ عن الحركات الآتية من الصرّاف الآلي: ١٠، ٨٠ ، ١٠٠، ٣٠٠، بالمقادير الجبريّة:

س ، ٨س ، $س^٢$ ، $٣س^٢$، على التوالي

أمثّلُ مجموعَ حركاتِ الصرّاف الآلي بالرموز: ________________.

تعريف

الاقتران كثير الحدود* على ح: هو اقترانٌ معرَّفٌ على ح، ويتكوّنُ من حدٍّ، أو مجموعِ حدودٍ جبريّةٍ عِدّة، وتكون فيه أُسُسُ المتغيّر أعداداً صحيحةً غيرَ سالبة. ونُعبّرُ عن كثير الحدود بـ:

$$ق(س) = أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_{ن-٢} س^{ن-٢} + \ldots\ldots\ldots + أ_{٢} س^{٢} + أ_{١} س^{١} + أ_{٠}$$

حيث: $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$، $أ_{٢}$، ....$أ_{ن}$ أعدادٌ حقيقيّةٌ، وتُسمّى معاملاتُ كثيرِ الحدود ق(س) ، ن عدداً صحيحاً غيرَ سالب.

ملاحظة: درجة كثير الحدود هي أكبرُ أُسٍّ للمتغيّر فيه.

---

* يمكن تعريف كثير الحدود على أي مجموعة جزئية من ح.

نشاط(٢): أُكمل:

١) ق(س) = ٢$س^{٥}$ − ١٥س + ٩ : اقترانٌ كثيرُ حدود من الدرجة الخامسة؛ لأنّ: الأسس صحيحة غير سالبة، وأكبر أسٍّ فيه هو ٥ .

٢) ق(س) = ٦س − $س^{\frac{١}{٣}}$: ليس اقتراناً كثيرَ حدود؛ لأنّ الأسّ $\frac{١}{٣}$ عدد غير صحيح .

٣) ق(س) = س − س − $س^{\frac{٢}{٥}}$ − $س^{٧}$ + ٢$س^{٥}$ + ٤$س^{٦}$ − ٩: ____________.

٤) ق(س) = ٣ : اقترانٌ ثابتٌ، وهو كثيرُ حدود من الدرجة الصفريّة؛ لأنّه يمكن كتابتُه على صورة: ق(س) = ٣$س^{٠}$.

٥) ق(س) = π$س^{٢}$ − $س^{\frac{٣}{٤}}$ + ١ : ____________.

٦) ق(س) = ٤س + ١ : ____________.

٧) ق(س) = ٣$س^{٢}$ + ٥س − ٤ : ____________.

نشاط(٣): لتكن: ق(س) = ٩$س^{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٥$س^{٤}$ − ٣

أُكمل إيجاد:

$أ_{٤}$ = -٥ ، $أ_{٣}$ = ______ ، $أ_{٢}$ = ______ ، $أ_{١}$ = ______ ، $أ_{٠}$ = ______

تعريف

يتساوى كثيرا الحدود، إذا كان لهما الدرجةُ نفسُها، وكانت معاملاتُ قُوى س المتناظرة متساويةً.

نشاط(٤): إذا كان: ق(س) = ٣$س^{٢}$ + ب س + جـ ، هـ(س) = أ$س^{٢}$ + ٣ س + $\sqrt{٣}$ ،
وكان ق(س) = هـ (س) ، أُكمل إيجاد:

أ = ٣ ، ب = ______ ، جـ = ______

نشاط(٥): ليكن: ق(س) = ٢س + ٤

- هل ق(س) كثير حدود؟ ————
- إذا كان ق(س) = صفر

فإنّ: ٢س + ٤ = ٠

٢س = ———

س = -٢

نُسمّي العدد (-٢) صفراً للاقتران ق؛ لأنّ: ق(-٢) = صفر ، أتحقّق من ذلك.

أَتَعَلَّم : إذا كان ق(س) اقتراناً ، وكان ق(م) = صفراً ، فإنّ العدد م يُسمّى صفراً للاقتران ق(س).

نشاط(٦): وجد محاسب أحد الفنادق أن العلاقة بين عدد نزلاء الفندق، ومقدار ما يربحه بالدنانير، يعطى بالإقتران ر(س) = ٢س^{٢} – ١٨، س ∈ ص$^{+}$، أجد عدد النزلاء الذي يجعل الربح يساوي صفرا.

ر(س) = ٠

٢س^{٢} – ١٨ = ٠

٢س^{٢} = ————

س^{٢} = ٩

و منها إما س= ———— أو س = -٣ (مرفوضة، لماذا؟)

عدد النزلاء الذي يجعل الربح يساوي صفرا هو ————

تمارين ومسائل:

س١ أُبيّنُ أيَّ الاقترانات الآتية تمثّل كثيرَ حدود، ثمّ أكتبُ درجةَ كثيرِ الحدود فيها:

أ) ق(س) = ٢س^{٢} − ٥س + ١

ب) ق(س) = س^{٢} − $\frac{٥}{س^{-٣}}$ − ٧ + ٣س^{٩} − ٢س

جـ) ق(س) = ٥س + س$^{\frac{٢}{٥}}$

س٢ تعد تمارين التنفس أحد الطرق المتبعة لعلاج الأمراض والاضطرابات. في أحدى تمارين التنفس، إذا مُثل حجم الهواء باللتر في رئة ياسر بالإقتران ق(س) = أس^{٣} + ٠,١٢٥ س^{٢} − ٠,٠٣٥س، حيث س تمثل الزمن اللازم لإجراء عملية الشهيق، ومُثل حجم الهواء باللتر في رئة أيمن بالإقتران هـ(س) = ١,٧٣س^{٣} + (٣ب - ١) س^{٢} − ٠,٠٣٥س، أجد قيم كل من: أ، ب التي تجعل حجم الهواء في رئتيهما متساوي.

س٣ أجد أصفار الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٣ − ٧س

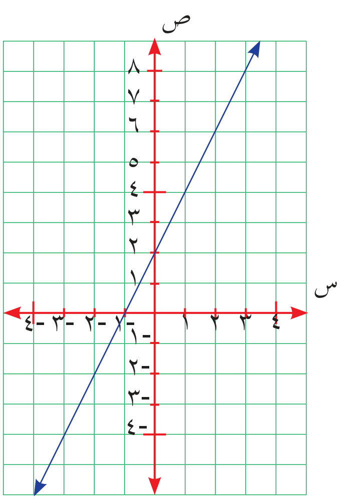
ب) ق(س) = ٥س + ١

جـ) ق(س) = س^{٢} + ٥س − ١٤

د) ق(س) = (٢س + ١) × (س − ٤)

هـ) ق(س) = س^{٢} − ٤

س٤ مُثّل الاقتران ق(س) في المستوى الديكارتي، كما في الشكل المجاور، أجد من الشكل:



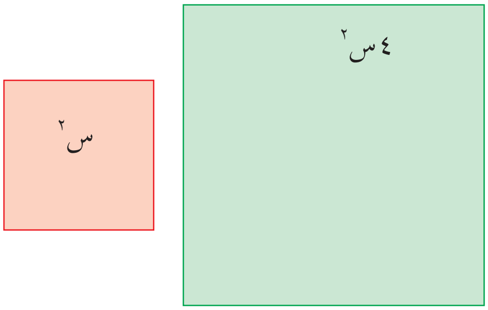
أ) نقطة تقاطعه مع محور الصّادات.

ب) نقطة تقاطعه مع محور السّينات.

جـ) صفر الاقتران ق(س) .

جمعُ كثيراتِ الحدودِ وطرحُها

نشاط(١): تنتشر لعبةُ كرةِ الطائرةِ في فلسطين، ومن أجل تطوير اللعبة يعمدُ الاتّحاد الفلسطينيّ إلى توفير قاعاتٍ لأنديةِ الدرجة الممتازة، طُلب إلى مهندسٍ عملُ تخطيطٍ داخلَ القاعة، لغرفِ ملابس اللاعبين؛ ويمكن تمثيلها بالأشكال الآتية، فرسم المهندس غرفتين، مِساحةُ إحداهما أربعة أضعاف مِساحة الأخرى.



مجموع مساحتيْهما:————

الفرق بين مساحتيْهما: ————

مجموع محيطيْهما:————

أَتَعَلَّم: اذا كان $ق(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ_٢ س^٢ + أ_١ س^١ + أ_٠$

فإن $جـ ق(س) = جـ أ_ن س^ن + جـ أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + جـ أ_٢ س^٢ + جـ أ_١ س^١ + جـ أ_٠$

أوّلاً: جمع كثيرات الحدود:

تعريف

ليكن: ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود، **فإنّ: (ق + هـ)(س) كثير حدود**، بحيث:

(ق + هـ)(س) = ق(س) + هـ(س)

نشاط(٢): ليكن $ق(س) = ٣س^٢ + ٥س - ١$ ، $هـ(س) = ٢س^٢ - ٢س$ ،

أُكمل إيجاد:

$$(ق + هـ)(س) = ق(س) + هـ(س) = (٣س^٢ + ٥س - ١) + (٢س^٢ - ٢س)$$

$$= (٣س^٢ + ٢س^٢) + (٥س - ٢س) - ١$$

$$= ٥س^٢ + \_\_\_\_ - \_\_\_\_$$

لاحظ أنّ: (ق + هـ)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ———— .

نشـاط(٣): إذا كان ق(س) = ٤س^{٣} − ٥س^{٢} + ١ ، ك(س) = -٤س^{٣} − س + ٣ ، أُكمـل إيجـاد:

١) (ق + ك)(س) = ـــــــ + ـــــــ = ـــــــ = (   ) + (   )

= ـــــــــــــــــــــــ

لاحظ أنّ: (ق + ك)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ـــــــــ.

٢) (ق + ك)(-١) = ـــــــــــــ

٣) ق(-١) = ـــــــــــ

٤) ك(-١) = ـــــــــــ

٥) ق(-١) + ك(-١) = ـــــــــــــ

٦) أقارن بين: ق(-١) + ك(-١) ، (ق+ك) (-١) .

أَتَعَلَّم: ناتجُ جمعِ كثيري حدود هو كثيرُ حدود، درجته أقلّ، أو تساوي أعلى درجتيّ الاقترانين.

ثانياً: طرح كثيرات الحدود:

تعريف

ليكن: ق(س)، هـ(س) كثيري حدود، **فإنّ: (ق − هـ)(س) كثير حدود**، بحيث:

(ق − هـ)(س) = ق(س) − هـ(س)

نشـاط(٤) إذا كان ق(س) = ٧س^{٢} + ٥س − ١ ، هـ(س) = ٢س^{٢}− ٢س + ٧ ، أُكمـل إيجـاد:

١) (ق − هـ)(س) = ق(س) − هـ(س) = (٧س^{٢} + ٥س − ١) − (٢س^{٢} − ٢س + ٧)

= (٧س^{٢} − ٢س^{٢}) + (٥س + ــــــ) +(-١ − ٧)

= ٥س^{٢} + ــــــ − ــــــ

لاحظ أنّ: (ق − هـ)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ــــــــــ .

٢) ٣ق(س) = ٣ × (   )

= ٢١س^{٢} + ــــ − ــــ

نشـاط(٥): تعتبر حرفة صيد الأسماك في فلسطين من أقدم الحرف التي تركزت في قطاع غزة، فإذا كانت العائدات من البيع السنوي للأسماك تعطى بالاقتران

ق(س) = ٠,٠٣ س^{٣} + ٠,٢ س^{٢} +٤٠س + ١٢٠

وتكلفة الإنتاج تعطى بالاقتران هـ(س) = ٠,٧ س^{٢} +٢٠س + ٥٠ ، أكتب قاعدة الاقتران الذي يمثل الربح

الربح = العائدات − التكلفة

= ق(س) − هـ(س)

= (٠,٠٣ س^{٣} + ٠,٢ س^{٢} +٤٠س + ١٢٠) − (ــــــــــــــــ)

= ٠,٠٣ س^{٣} − ٠,٥س^{٢} + ــــــــــــ + ــــــــــــ

أُفكّر وأُناقش

ما درجة ناتج طرح كثيري حدود؟

تمارين ومسائل:

س١ إذا كان: ق(س) = ٦س^{٣} + ٥س^{٢} − ١،   هـ(س) = ٣س^{٢} + س + ٤

ك(س) = ٢س^{٢} − ٤، اقتراناتٍ كثيرةَ الحدود، أجد ما يأتي :

أ (ق + هـ)(س)

ب (هـ − ك)(س)

جـ (ق + ك)(-١)

د (ق − هـ) (٣)

هـ ٢ق(س) + ٣ك(س)

و هـ(س) − ٤ق(س)

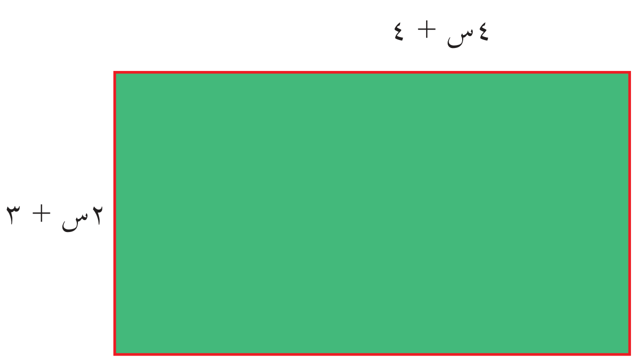
س٢ ليكن :

- ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة
- هـ(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة
- ك(س) كثير حدود من الدرجة الخامسة

فما درجة كلٍّ ممّا يأتي؟

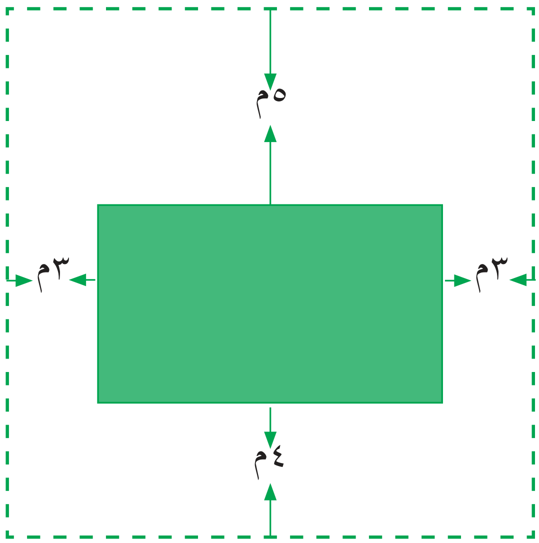
أ (ق + هـ)(س)   ب (ق − ك)(س)   جـ (ق + هـ + ك) (س)

س٣ يمثل الشكل المجاور مخططاً لملعب كرة سلة أبعاده بدلالة س، أجد محيطه عندما س = ٦ م.



(٧ – ٣) ضربُ كثيراتِ الحدودِ وقسمتُها

نشـاط (١): تُصـدرُ إحـدى البلديّـات تراخيـصَ البنـاء للمواطنيـن؛ لغـرض تنظيـم البنـاء، وضبطه في المدن والقرى الفلسطينيّة. يمتلك سميرٌ قطعةَ أرضٍ مربعة الشكل، ويريد بناءَ بيتٍ عليها، بحيث يترك مساحاتٍ حول البيت (ارتدادات)، يمكن تمثيلها بالشكل المجاور، إفترِض طولُ قطعة الأرض س متر.



طول البيت: (س – ٦)

عرض البيت: (س – ــــ)

مِساحة البيت:

أولاً: ضرب كثيرات الحدود:

تعريف

ليكن ق(س)، هـ(س) كثيري حدود، **فإنّ: (ق × هـ)(س) كثير حدود**، ويكون:

(ق × هـ)(س) = ق(س) × هـ(س)

نشاط (٢): إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣، هـ(س) = ٤س + ٢ ، أكمل إيجاد:

(ق × هـ)(س) = ق(س) × هـ(س) = (س^{٢} + ٣) × (٤س + ٢)

= س^{٢} × ٤س + س^{٢} × ٢ + ــــ × ــــ + ــــ × ــــ

= ٤س^{٣} + ــــ + ــــــ + ــــــ

لاحظ أنّ: (ق × هـ)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ــــــــ.

نشاط(٣): إذا كان ق(س) = $٢س^٣ - ٥س^٢ + ١$، ك(س) = $س^٢ - ٣س$ ، أكمل إيجاد:

(ق × ك)(س) = ق(س) × ك(س) = ($٢س^٣ - ٥س^٢ + ١$) × ($س^٢ - ٣س$)

= $٢س^٣ × س^٢$ - ــــــ - ــــــ + ــــــ + ــــــ - ــــــ

= ــــــ - ــــــ + ــــــ + ــــــ - ــــــ

لاحظ أنّ: (ق × ك)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ــــــــ.

أُفَكِّر وأُناقش

ما درجة حاصل ضرب كثيري حدود؟

ثانياً: قسمة كثيرات الحدود:

نشاط(٤): أكمل إيجاد ناتج قسمة ما يأتي:

١) $\frac{٣س^٢}{س} = ٣س$ ، س $\neq$ ٠

٢) $\frac{س^٣}{س^٢} =$ ــــــــ ، س $\neq$ ٠

٣) $\frac{س^٢ - س}{س} = \frac{س(س - ١)}{س} =$ ــــــ ، س $\neq$ ٠

٤) $\frac{٤س^٢}{س^٢} =$ ــــــــ ، س $\neq$ ٠

تعريف

ليكن ق(س)، هـ(س) كثيري حدود، فإنّ:

(ق ÷ هـ)(س) = ق(س) ÷ هـ(س)، هـ(س) $\neq$ صفر لكلّ س $\in$ ح

مِثال: إذا كان ق(س) = ٧س + س^{٣} + ١٢ ، هـ(س) = س + ٢ ، أجدُ: ق(س) ÷ هـ(س).
يمكن إيجادُ ناتج قسمة كثيري حدود باستخدام القسمة الطويلة، إذا كانت درجةُ المقسوم أعلى، أو تساوي درجة المقسوم عليه، باتّباع الخطوات الآتية:

الحل:

١- نرتب حدود الاقترانين ق(س)، هـ(س) تنازليّاً حسب قوى س.
٢- نقسم الحدّ الأوّل في المقسوم على الحد الأوّل في المقسوم عليه، ونضعه حدّاً أوّلَ في ناتج القسمة؛ أي أنّ: س^{٣} على س يساوي س^{٢} .
٣- نضرب (س^{٢}) الذي حصلنا عليه في خطوة ٢ في كلِّ حدٍّ من حدود المقسوم عليه، ونطرح .
٤- نكرّر الخطوتين ٢، ٣ حتى نحصل على باقٍ، درجته أقلّ من درجة المقسوم عليه.

	س^{٢} − ٢س +١١
س + ٢	س^{٣} + ٧س + ١٢
	س^{٣} + ٢س^{٢}
	٠ − ٢س^{٢} + ٧س + ١٢
	-٢س^{٢} − ٤س
	٠ + ١١س + ١٢
	١١س + ٢٢
	٠ -١٠

ناتج قسمة ق(س) على هـ(س) يساوي س^{٢} − ٢س + ١١ . والباقي -١٠ .

أُفَكِّر وأُناقش

✶ كيف نتحقّقُ من صحّة حل المثال السابق؟
✶ ما درجة ناتج قسمة أيّ كثيري حدود؟

نشاط(٥): أكمل إيجاد ناتج قسمة: (٣س^{٢} + س^{٣} − ٤) ÷ (س + ٢) .

	س^{٢}
س + ٢	س^{٣} + ٣س^{٢} − ٤
	س^{٣} + ____
	____
	____
	____

ناتج قسمة (٣س^{٢} + س^{٣} − ٤) على (س + ٢) يساوي ____________، والباقي ______.

لاحظ أنّ:

٣س^{٢} + س^{٣} − ٤ = (س + ٢) × (   )

(س+٢) عامل من عوامل ٣س^{٢} + س^{٣} − ٤

هل ناتجُ القسمةِ عاملٌ من عوامل ٣س^{٢} + س^{٣} − ٤ ؟

أَتَعَلَّم: إذا كان باقي قسمةِ اقتران كثيرِ حدود على اقترانٍ كثير حدود آخر يساوي صفراً، فإنّ المقسومَ عليه عاملٌ من عواملِ المقسوم.

نشاط(٦): خزان ماء اسطواني حجمه باللترات ٥(٢س^{٢} + س − ٣)، و ارتفاعه ٢س + ٣، لحساب مساحة قاعدته قام كل من فاطمة وأحمد بالحل كما يأتي:

طريقة فاطمة

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة = حجم الأسطوانة ÷ الارتفاع

= (١٠س^{٢} + ٥س − ١٥) ÷ (٢س + ٣)

= (٢س + ٣)(٥س − ٥) ÷ (٢س + ٣)

= (٥س − ٥) وحدة مربعة

طريقة أحمد

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة = حجم الأسطوانة ÷ الارتفاع

= (١٠س^{٢} + ٥س − ١٥) ÷ (٢س + ٣)

٥س − ٥

٢س + ٣ | ١٠س^{٢} + ٥س − ١٥

١٠س^{٢} + ١٥س

-١٠س − ١٥

-١٠س − ١٥

صفر

تمارين ومسائل:

س١ إذا كان ق(س) = س^{٢} – ٥س، هـ(س) = ٢ + س ، ك(س) = س^{٣} + ٢س + ١ ، أجد:

أ (ق × هـ)(س) ب (ك × هـ)(س)

س٢ أجد: (ق ÷ هـ)(س) في كلٍّ ممّا يأتي:

أ ق(س) = ٣س^{٢} – ١، هـ(س) = س – ١

ب ق(س) = ٦س^{٣} + ٣س + ٢، هـ(س) = ٢س^{٢} + ١

س٣ أكتب درجة ناتج حاصل ضرب ق(س) في هـ(س) فيما يأتي، دون إجراء عمليّة الضرب:

أ ق(س) = س^{٦} – ٣، هـ(س) = س^{٣} + س^{٢} – ٤

ب ق(س) = ٣س^{٢} – ٥س^{٤} + ٢، هـ (س) = س^{٣} + ١ – س^{٢}

س٤ أكتب درجة ناتج قسمة ق(س) على هـ(س) فيما يأتي، دون إجراء عمليّة القسمة:

أ ق(س) = ٣س^{٥} – ٧س^{٤} +س ، هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ١

ب ق(س)= ٢س^{٣} – ٨س^{٢} + ١ ، هـ(س) = س + ٦

س٥ أبيّنُ باستخدام القسمة الطويلة أنّ س – ٢ عامل من عوامل س^{٣} – ٨

س٦ قطعتا أرض احداهما مربعة الشكل طول ضلعها (س + ٣) والأخرى مستطيلة الشكل أبعادها (س + ١٣)، (س – ٢) هل تتساوى مساحتيهما عندما س = ١٢، س = ٧ ؟ أفسر إجابتي.

(٧ - ٤) الاقتران التربيعيّ

نشـاط(١): كثيرٌ من حركـة الأشياء فـي الطبيعة تحصل بطريقةٍ منظّمـةٍ، وضمـن قوانيـنَ ثابتـة. ففـي الشـكل المجـاور حركـةُ المياه تشـكّلُ شـكلاً منظّماً.

الشـكل الهندسيّ الـذي تصنعه نافورةُ المياه فـي الشـكل منحنًى مفتوحٌ إلى الأسفل .

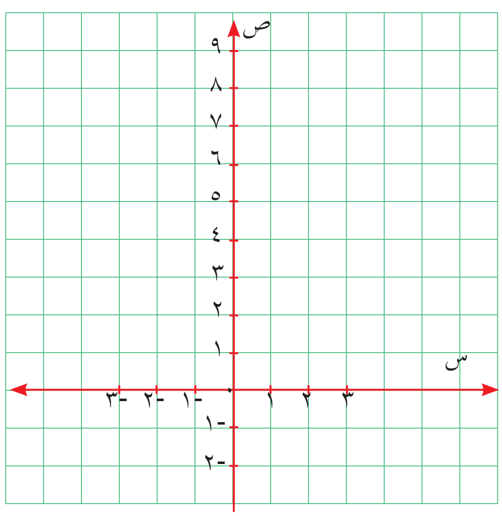
أعـطِ أمثلـةً أخـرى لأشـياء، أو لأشـكالٍ لهـا الحركـة نفسـها : ـــــــــــــــ

تعريف

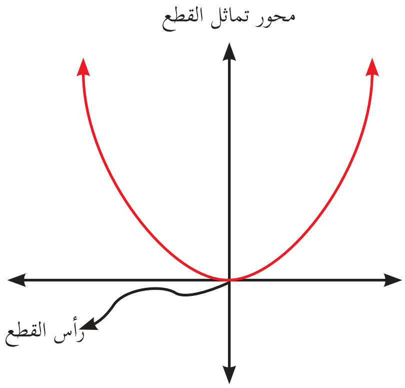
يُسمّى كثيرُ الحدود ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ، حيث: أ، ب، جـ أعداد حقيقيّة، أ $\neq$ صفر اقتراناً تربيعيّاً.

نشاط(٢): أُكمل الجدول الآتي، وأُعيّن النقاط الناتجة في المستوى:

س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = ق(س) = س^{٢}		٤			١		



أَتَعَلَّم: عند تمثيل الاقتران التربيعيّ ق(س) = $س^{٢}$ في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل المجاور، ويُسمّى قطعاً مكافئاً. ويُسمّى هنا قطعاً مكافئاً مفتوحاً إلى الأعلى؛ لأنّ معامل $س^{٢}$ موجب.



نشاط(٣): أُكمل خطواتِ تمثيل الاقتران التربيعيّ: ق(س) = $س^{٢}$ + ٢س − ٣

١) أجدُ الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ، س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = −١

٢) أكوّنُ الجدول لتمثيل النقاط:

س	١	٠	-١	-٢	-٣
ص = ق(س)			-٤		

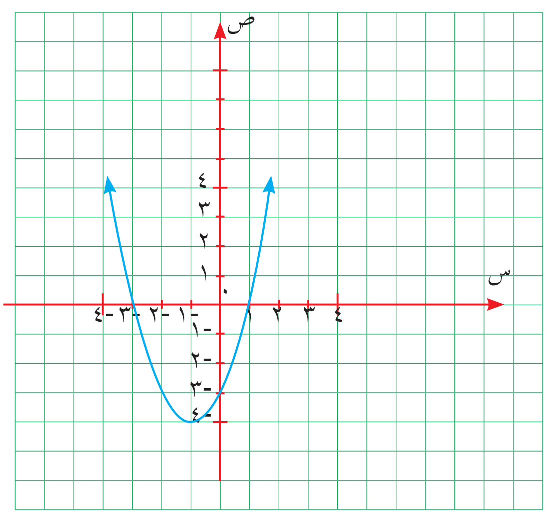
ق(-١) = $(-١)^{٢}$ + ٢×-١ − ٣ = -٤ (-١ ، -٤) إحداثيّات رأس القطع

ق(١) = ________ = ________ (١ ،)

ق(٠) = ________ = ________ (٠ ،)

ق(-٢) = ________ = ________ (-٢ ،)

ق(-٣) = ________ = ________ (-٣ ،)



٣) أُعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأصلُ بينها.

٤) ما نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات؟

٥) الاقتران مفتوح لـ ________ لأن ________

٦) ما الإحداثي الصادي لرأس القطع المكافئ؟ ماذا ألاحظ؟

ألاحظ أنّ: ق(-١) = -٤، وهي القيمة الصغرى للاقتران.

نشـاط(٤): يعـد وجـود الأقـواس أحـد أهـم مظاهـر الفـن العمرانـي فـي فلسـطين، الشـكل المجـاور هـو صـورة بـاب الحديـد فـي المسـجد الأقصـى، القـوس فـي الصـورة يمكـن التعبير عنه بالإقتران هـ(س) = ١٦ - س^{٢}

- ارسم محور تماثل القوس.
- ارسـم المحوريـن الإحداثييـن بحيـث ينطبـق محـور الصـادات علـى محـور تماثل الشـكل، ومحـور السـينات على قاعـدة القـوس.
- نقـاط تقاطـع قاعـدة القـوس مـع محـور السـينات هـي:

عرض القوس عند قاعدته = ————

ارتفاع القوس = ————

تمارين ومسائل:

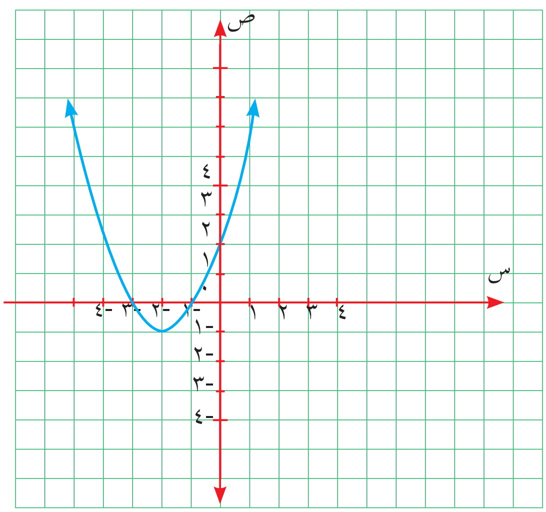
س١ أُمثّل الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = س^{٢} + ٦س + ٩

ب) ق(س) = ٣س^{٢} − ١٢س

جـ) ق(س) = ١ − س^{٢}

س٢ من الشكل المجاور، أجد:



أ) إحداثيّات رأس القطع المكافئ.

ب) أصفار الاقتران.

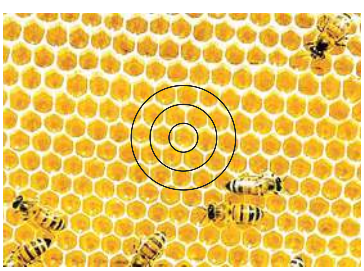
جـ) أرسم في الشكل محور التماثل.

د) إحداثيّات نقطة تقاطعه مع محور الصّادات.

س٣ تمثل عدد الخلايا السداسية في قرص العسل

بالإقتران هـ(ر) = ٣ر^{٢} − ٣ر + ١

حيث ر تمثل عدد الحلقات في القرص.



أمثل الاقتران في المستوى الديكارتي، وهل يمكن أن يكون عدد الأشكال السداسية في إحدى الحلقات يساوي صفر؟ أفسر إجابتي

(٧ – ٥) الاقتران النسبي

نشاط(١): في القاعات الرئيسه يتمّ عملُ أنظمةٍ للتبريد؛للتخفيف من استهلاك الطاقة، يحاول المهندسون أنْ تكونَ نسبةُ مِساحة سطح المجسّم إلى حجمه صغيرة بالحد الكافي. هناك قاعةٌ طولُها س متر ، عرضُها س متر ، ارتفاعُها س متر.

أجد: المساحة الكليّة للقاعة =

٤س × س + ــــ = ٦س^{٢}

حجم القاعة = س × ــــ × ــــ = ــــ

نسبة المِساحة الكليّة للقاعة إلى حجمها = ـــــــــــــــ

تعريف

يُسمّى الاقتران المكتوب على صورة ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ل(س)}}$، اقتراناً نسبيّاً، حيث هـ(س)، ل(س) اقترانان كثيرا حدود، ومجال الاقتران ق(س) هو ح ما عدا أصفار الاقتران ل(س).

نشاط(٢): أكتب أمثلةً لاقتراناتٍ نسبيّة:

ق(س) = $\frac{\text{٣س + ٤}}{\text{س}^{٢} - ٥}$ ، س $\neq \pm \sqrt{٥}$.

هـ(س) = ــــــ

م(س) = ــــــ

نشاط(٣): ما مجال الاقترانات النسبيّة الآتية؟

١) $ق(س) = \frac{٣س^٢ - ٤}{٢س + ٦}$

لإيجاد مجال الاقتران ق(س) نجد أصفار المقام.

لإيجاد أصفار المقام نضع : ٢س + ٦ = صفر

٢س = ــــــ

س = ــــــ

مجال ق(س) هو ح ما عدا أصفار المقام

إذن مجال ق(س) = ح ـ {   }

٢) $ق(س) = \frac{س}{س^٢ - ٥س + ٦}$ نجد أوّلًا أصفار المقام: $س^٢ - ٥س + ٦$ = صفر

(س - ٢) × (س ـ ــــ) = صفر

إمّا س ـ ٢ = صفر ، أو س ـ ــــ = صفر

س= ٢   أو س = ــــ

إذن مجال ق(س) : ح ـ { ٢ ، ــــ }

نشاط(٤): أُكمل إيجاد أصفار الاقترانات النسبيّة الآتية:

١) $ق(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٣س - ٤}$ ، س ≠ -١ ، ٤

$= \frac{س + ٣}{س^٢ - ٣س - ٤}$ = صفر

ينتج أنّ:   س + ٣ = ــــ

س= ــــ

صفر الاقتران ق(س) هو:ــــــــ، وهو صفر البسط

٢) ق(س) $=$ $\frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$ ، س $\neq$ ٣

$=$ $\frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$ $=$ صفر

س^{٢} $-$ ٤س $-$ ١٢ $=$ ــــــ

(س $+$ ٢) $\times$ (س $-$ ـــــ) $=$ صفر

إمّا: س $+$ ٢ $=$ صفر ، أو: س $-$ ـــــ $=$ صفر

س $=$ -٢ ، أو: س $=$ ـــــ

أصفار الاقتران ق(س) هي -٢ ، ـــــ

أتعلَّم: أصفار الاقتران النسبي هي تلك القيم التي تجعل قيمة البسط $=$ صفر، ولا يكون المقام مساوياً صفر عندها.

أُفكِّر وأُناقش

ما القيم التي تجعل قيمة البسط $=$ صفر إذا كان ق(س) $=$ $\frac{٣}{\text{س}^{٢} - ٥}$ ، حيث: س $\neq \pm\sqrt{٥}$ ؟

تمارين ومسائل:

س١ أجد مجال الاقترانات النسبيّة الآتية:

أ) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٥س} + \text{٣س}^{٢} + ٨}{\text{٢س} - \dfrac{١}{٢}}$

ب) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٤س} + ١}{\sqrt{٢}\,\text{س} + ٤}$

جـ) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٣س} + ١}{\text{س}(\text{س}^{٢} - ١)}$

س٢ أجد أصفار الاقترانات النسبيّة الآتية:

أ) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٣} + \text{٤س}}$ ، $\text{س} \neq \text{صفر}$

ب) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{٩س}^{٢} + \text{١٨س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

جـ) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + \text{س} + ١}$

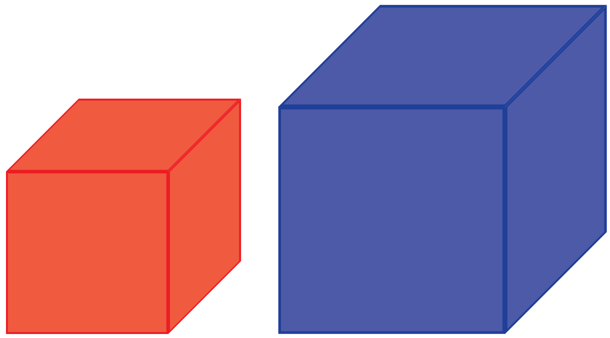
س٣ تم تعبئة خزاني وقود على شكل متوازي المستطيلات، الخزان الأول قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها س وارتفاعه ١م، والخزان الثاني قاعدته مستطيلة الشكل، أبعادها س + ١ ، س − ٢ وارتفاعه ١م.

أ) ما نسبة حجم الخزان الثاني الى حجم الخزان الأول؟.

ب) أي القيم الآتية تعتبر بعداً مناسباً لأبعاد الخزانين س : ٢، ٤

(٧ – ٦) العمليّات على الاقترانات النسبيّة

نشاط(١): تعقد جلسات المجلس الوطني الفلسطيني في قاعات كبيرة مثل قاعة الشهيد ياسر عرفات، وقد صممت هذه القاعات، ويمكن تمثيلها بالشكل المجاور



س ‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏ س + ١

نسبة المساحة الجانبيّة للمكعب إلى حجمه، وذلك لمكعبين أطوال أضلاعهما: س + ١، س

★ النسبة الأولى (المكعب الأزرق) = $\frac{٤ \times (س + ١)^{٢}}{(س + ١)^{٣}}$

★ النسبة الثانية (المكعب الأحمر) = $\frac{\boxed{}}{س^{٣}}$

★ مجموع النسبتين: ________ + ________

جمع الاقترانات النسبيّة وطرحها:

مِثال: أجد ناتج جمع الاقترانات النسبيّة الآتية، بأبسط صورة:

١) $\frac{٣س + ٤}{س^{٢} - ٤} + \frac{٥س + س^{٢} + ٨}{س^{٢} - ٤} = \frac{س^{٢} + ٨س + ١٢}{س^{٢} - ٤}$ ، $س \neq \pm ٢$

$= \frac{(س + ٢)(س + ٦)}{(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{س + ٦}{س - ٢}$

٢) $\frac{٢س}{س - ١} + \frac{٣س + ٢}{س + ٤} = \frac{٢س(س + ٤) + (س - ١)(٣س + ٢)}{(س - ١)(س + ٤)}$ ، $س \neq ١، -٤$

$= \frac{٢س^{٢} + ٨س + ٣س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} + ٣س - ٤} = \frac{٥س^{٢} + ٧س - ٢}{س^{٢} + ٣س - ٤}$

أَتَعَلَّم:

- ليكن $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{ق}_{١}\text{(س)}}{\text{ق}_{٢}\text{(س)}}$ ، $\text{هـ(س)} = \dfrac{\text{هـ}_{١}\text{(س)}}{\text{هـ}_{٢}\text{(س)}}$ اقترانين نسبيّين،

وكانت س تنتمي إلى المجال المشترك للاقترانين النسبيّين ق(س) ، هـ(س)، فإنّ:

$$\frac{\text{ق}_{١}\text{(س)}}{\text{ق}_{٢}\text{(س)}} \pm \frac{\text{هـ}_{١}\text{(س)}}{\text{هـ}_{٢}\text{(س)}} = \frac{\text{ق}_{١}\text{(س) هـ}_{٢}\text{(س)} \pm \text{هـ}_{١}\text{(س) ق}_{٢}\text{(س)}}{\text{ق}_{٢}\text{(س) هـ}_{٢}\text{(س)}}$$

- مجال مجموع أو طرح الاقترانين النسبيّين هو ح ما عدا أصفار المقام.

نشاط(٢): أكمل إيجاد ما يلي:

١) $\dfrac{\text{٣س}^{٢} - \text{٣س}}{\text{س}^{٣} + \text{س}} - \dfrac{\text{٥س} + \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + \text{س}} = \dfrac{\text{٢س}^{٢} - \boxed{}}{\text{س}^{٣} + \text{س}}$

٢) $\dfrac{\text{٢س} - ٣}{\text{س}^{٢}} - \dfrac{\text{٤س}}{\text{س} + ١} = \dfrac{(\text{٢س} - ٣)(\quad) - (\quad)(\quad)}{\text{س}^{٢} \times (\quad)}$

$= \underline{\qquad\qquad}$

ضرب الاقترانات النسبيّة:

مِثال: أجد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{٢س} + ١}{\text{س} - ٥} \times \frac{\text{٥س} - ٢٥}{\text{س}^{٣}} = \frac{(\text{٢س} + ١) \times (\text{٥س} - ٢٥)}{(\text{س} - ٥) \times \text{س}^{٣}}$$

$$= \frac{\text{٥(٢س} + ١) \times (\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٥) \times \text{س}^{٣}} = \frac{\text{٥(٢س} + ١)}{\text{س}^{٣}}$$

أتعلّم :

- ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ق}_{١}(\text{س})}{\text{ق}_{٢}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}_{١}(\text{س})}{\text{هـ}_{٢}(\text{س})}$ ، اقترانين نسبيين

وكانت س تنتمي إلى ح ما عدا أصفار المقامين، فإنّ:

$$\frac{\text{ق}_{١}(\text{س})}{\text{ق}_{٢}(\text{س})} \times \frac{\text{هـ}_{١}(\text{س})}{\text{هـ}_{٢}(\text{س})} = \frac{\text{ق}_{١}(\text{س}) \times \text{هـ}_{١}(\text{س})}{\text{ق}_{٢}(\text{س}) \times \text{هـ}_{٢}(\text{س})}$$

- مجال حاصل ضرب الاقترانيْن هو ح ما عدا أصفار $\text{ق}_{٢}(\text{س})$ ، $\text{هـ}_{٢}(\text{س})$.

نشاط(٣): أكمل إيجاد الناتج، مبيّناً مجاله:

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٢س}}{\text{س} + ٣} \times \frac{\text{٣س} - ٤}{\text{٢س} - ٥} = \frac{\text{٢س} \times (\qquad)}{(\text{س} + ٣) \times (\qquad)}$$

مجال ق(س) هو: ح − { -٣ ، ــــ}

قسمة الاقترانات النسبيّة:

نشاط(٤): ليكن: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{٢س}^{٣}}{\text{س} + ١}$

أُكملُ إيجاد ناتج ما يأتي، بأبسط صورة:

$$\text{ق}(\text{س}) \div \text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} \div \frac{\text{٢س}^{٣}}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} \times \frac{\text{س} + ١}{\text{٢س}^{٣}}$$

$$= \frac{\text{س} \times (\qquad)}{(\qquad) \times \text{٢س}^{٣}} = \underline{\qquad\qquad}$$

أتعلّم :

- ليكن ق(س) = $\frac{\text{ق}_{١}(\text{س})}{\text{ق}_{٢}(\text{س})}$ ، هـ(س) = $\frac{\text{هـ}_{١}(\text{س})}{\text{هـ}_{٢}(\text{س})}$ اقترانين نسبيين، وكان هـ(س) $\neq$ صفر

فإنّ: ق(س) ÷ هـ(س) يساوي

$$\frac{\text{ق}_{١}(\text{س})}{\text{ق}_{٢}(\text{س})} \div \frac{\text{هـ}_{١}(\text{س})}{\text{هـ}_{٢}(\text{س})} = \frac{\text{ق}_{١}(\text{س})}{\text{ق}_{٢}(\text{س})} \times \frac{\text{هـ}_{٢}(\text{س})}{\text{هـ}_{١}(\text{س})} = \frac{\text{ق}_{١}(\text{س}) \times \text{هـ}_{٢}(\text{س})}{\text{ق}_{٢}(\text{س}) \times \text{هـ}_{١}(\text{س})}$$

- مجال ق(س) ÷ هـ(س) هو ح ما عدا أصفار الاقترانات ق$_{٢}$(س)، هـ$_{١}$(س) ، هـ$_{٢}$(س)

نشاط(٥): أكمل إيجاد الناتج مبيّناً مجاله:

$$\text{ق(س)} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٢} \div \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٥} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٢} \times \frac{(\qquad)}{(\qquad)}$$

$$= \frac{٢\text{س} \times (\qquad)}{(\text{س} + ٣) \times (\qquad) \times (\qquad)}$$

مجال ق(س) هو ح − {-٣ ، ____ ، ____، ____}.

تمارين ومسائل:

س١ إذا كان: $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} - ١}$ ، $\text{هـ(س)} = \dfrac{١}{\text{س}^٢ - \text{س}}$ ،

أجد ما يأتي بأبسط صورة، مبيّناً مجال كلٍّ منها :

أ) $\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}$

ب) $\text{ق(س)} - \text{هـ(س)} + ٢$

جـ) $\dfrac{١}{\text{هـ(س)}} \times \dfrac{١}{\text{ق(س)}}$

د) $(\text{ق(س)})^٢ \div \text{هـ(س)}$

س٢ أكتب الاقترانات الآتية بأبسط صورة، مبيّناً مجال كلٍّ منها:

أ) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{٢\text{س} - ١٢} \times \dfrac{٦}{\text{س} - ٣}$

ب) $\text{هـ (س)} = \dfrac{\text{س}^٢ + ٦\text{س} - ١٦}{\text{س}^٢ - ٦٤} \div (\text{س} - ٢)$

س٣ استخدم الفلاح الفلسطيني صومعات على شكل مخروط لتعبئة الحبوب، أحد المخاريط المستخدمة نصف قطره يعطى بالعلاقة $\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$ وارتفاعه $\dfrac{٢\text{س} + ٤}{\text{س}}$

أجد حجم ذلك المخروط.

(٧ – ٨) تمارين عامّة

س١ أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

١ أيّ الاقترانات الآتية يُعدُّ اقتراناً كثير حدود:

أ) $س + \frac{س}{٨} - س^{٥}$ ب) $\frac{٣}{س^{٦}} - ٨$ جـ) $٥\sqrt{س} + ١$ د) $٢س^{-٣} + ٧$

٢ ما مجال الاقتران النسبي $ق(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - س}$ ؟

أ) ح – {١} ب) ح – {-١} جـ) ح – {٠ ، ١} د) ح

٣ ما صفر/أصفار الاقتران النسبي $ق(س) = \frac{س}{س^{٢} - ١}$ ؟

أ) ١ ، - ١ ب) ١ جـ) صفر د) -١، صفر

٤ درجة كثير الحدود ق(س) تساوي ٥ ، ودرجة كثير الحدود هـ(س) تساوي ٣ ، فما درجة حاصل ضربهما ؟

أ) ٢ ب) ٥ جـ) ٨ د) ١٥

س٢ إذا كانت $ق(س) = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٣$، $هـ(س) = س^{٢} + ١$ ، أجد:

أ ق(س) + ٢هـ(س) ب ٤ق(س) – هـ(س) جـ (ق + هـ)(٣)

د ق(س) × هـ(س) + ٥ هـ ق(س) ÷ هـ(س)

س٣ إذا كانت $ق(س) = \frac{٢س - ٢}{س^{٢} - ١}$ ، $هـ(س) = \frac{٣س}{س - ١}$ ، أجد:

أ مجال ق(س) × هـ(س) ب ق(س) + هـ(س)

جـ ق(٣) د ق(س) ÷ ٢هـ(س)

س٤ إذا كان ق(س) = $س^٣ - ٩$ هـ(س) = $أس^٣ + ب س + جـ$ ،

فما قيمة كل من أ ، ب ، جـ التي تجعل ق(س) = هـ(س)؟

س٥ حديقة منزلٍ مستطيلةُ الشكل بعداها ١٥م، ١٠م، وقطرها $٥\sqrt{١٣}$م، فإذا تمّ زيادةُ مِساحةِ الحديقة بمقدار ١٨٦$م^٢$، وذلك بإضافة عددَيْن متساوييْن من الأمتار لكلِّ بعدٍ من أبعادها، أجد :

أ) الاقتران الذي يمثل المساحة بعد الزيادة.

ب) أبعاد الحديقة بعد الزيادة.

س٦ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
احدد المجال والمجال المقابل للاقتران			
احدد نوع اقتران ما			
اجد ناتج ضرب اقترانين			

مشروع الوحدة:

يعد الحق في توفير الطاقة من الحقوق الأساسية لكل فرد، للتخفيف من استهلاك الطاقة، يحاول المهندسون أن تكون نسبة مساحة سطح المجسم إلى حجمه صغيرة بالحد الكافي.

أيهما أفضل في بيتك تركيب نظام تبريد في غرفة الجلوس أم في غرفة نومك؟

أناقش المخاطر الاقتصادية للتكلفة وأقترح طريقة تساعد على التخفيف من استهلاك الطاقة.

روابط إلكترونية

www.geoalgebra.com

www.graphic calculator

الوحدة ٨

الاحتمالات

أتأمّلُ المعالم العربية في الصورة، إذا اُخْتيرَتْ صورةُ أحدِ المعالم عشوائيّاً،فهل الفرصة الكبرى أنْ يكون مَعْلماً دينياً، ويقع في القدس (العاصمة)؟ أُناقش صحّة ذلك.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف قوانين الاحتمالات في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ إيجاد احتمال اتّحاد حادثيْن.

٢ إيجاد احتمال تقاطع حادثيْن.

٣ إيجاد احتمال الحادث المشروط.

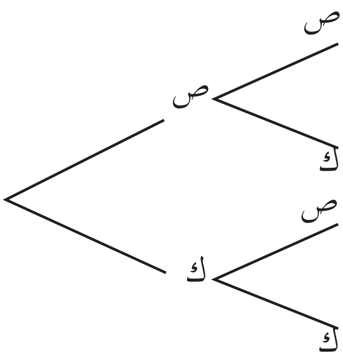
٤ التعرف إلى الحوادث المستقلّة.

نشاط (١): الجنيه الفلسطينيّ هو العملةُ التي استخدمتها حكومة فلسطينَ في عهد الانتداب البريطاني بين عاميّ ١٩٢٧م - ١٩٤٨م.

تم إلقاءِ قطعةِ نقد معدنية من فئة ٥٠ مل مرّتيْن متتاليتيْن، وملاحظة الوجه الظاهر.

ص: تعني وجه صورة عليه غصن الزيتون.

ك: تعني وجه عليه العدد ٥٠ مل



- الفراغ العيني للتجربة Ω = {(ص ، ص) ، .... ، (ك ، ص) ، ....}

(ص ، ك) تعني: ظهور صورة في الرمية الأولى، وكتابة في الرمية الثانية.

(ك ، ص) تعني: ....

- إذا كان ح$_{١}$ حادث ظهور كتابة واحدة فقط ، ح$_{٢}$ حادث ظهور صورة واحدة على الأقلّ، فإنّ:
- ح$_{١}$ = { (ص ، ك)، ....} ، ح$_{٢}$ = {......،(ك ، ص) ، .... }
- ل(ح$_{١}$) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$
- ل(ح$_{٢}$) = $\frac{\square}{\square}$

ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$ = {(ص ، ك) ،   }

ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$ = {   ،   ،   }

- ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$) = $\frac{\square}{\square}$ ، ل(ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$) = $\frac{\square}{\square}$
- احتمال عدم وقوع الحادث ح$_{٢}$ هو:

ل($\overline{ح}_{٢}$) = ١ − ل(ح$_{٢}$) = ١ − ـــــ = ـــــ

أتذكّر: إذا كانت Ω هي الفضاء العينيّ لتجربةٍ عشوائيّة، بحيث إنّ كلَّ عنصرٍ في Ω له فرصة الظهور نفسها(الحدوث)، وكان الحادث ح $\subseteq \Omega$ ، فإنّ :

$$ل(ح) = \frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

$$ل(\bar{ح}) = ١ - ل(ح)$$

- إذا كان ح$_1$، ح$_2$حادثيْن في Ω، فإنّ:

$$ل(ح_1 \cup ح_2) = ل(ح_1) + ل(ح_2) - ل(ح_1 \cap ح_2)$$

نشـاط (٢): في صنـدوقٍ ٦ بطاقـاتٍ مرقّمـة بالأعـداد: ٣ ، ٧ ، ٩ ، ٢٧ ، ٢٤ ، ٣٦ سُـحِبتْ مـن الصّنـدوق بطاقـةٌ عشـوائيّاً ، إذا كان:

ح$_1$ حادثَ ظهورِ عددٍ من مضاعفات العدد ٣،

ح$_2$ حادث ظهور عددٍ من مضاعفات العدد ٦، فإنّ:

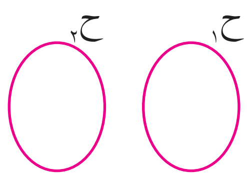
Ω = {٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ٧}

ح$_1$ = {٣ ، ٩ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٣٦}، ح$_2$ = { ، }،

ح$_1 \cap$ ح$_2$ = { }.

ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$) = $\frac{\square}{\square}$ = ـــــــــــ

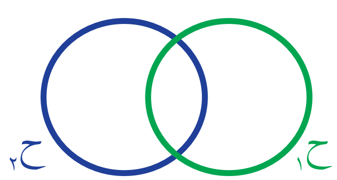
أتذكّر: إذا كان ح$_1$، ح$_2$ حادثيْن منفصليْن في Ω، فإنّ:



$$ل(ح_1 \cup ح_2) = ل(ح_1) + ل(ح_2)$$

نشـاط (٣): إذا كان احتمـالُ أنْ يُنجِـزَ مقـاولُ بنـاءٍ مشـروعيْن (سـكني وتجـاري) معـاً في الموعـد المحدّد يسـاوي $\frac{١}{٤}$ ، واحتمـالُ أنْ يُنجِـزَ المشـروعَ السـكني يسـاوي $\frac{٣}{٤}$ ، واحتمـالُ أنْ يُنجِـزَ المشـروعَ التجـاري $\frac{٢}{٣}$.

- ما احتمالُ أنْ يُنجِزَ المقاولُ المشروعَ السكني فقط؟



ح$_1$: حادث إنجاز المقاول المشروع السكني.

ح$_2$: حادث إنجاز المقاول المشروع التجاري.

احتمال أنْ يُنجَزَ المشروعُ السكني فقط يعني: أنْ يُنجَزَ المشروعُ السكني، وعدم إنجاز المشروع التجاري، وبالرموز: $ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١ \cap \overline{ح_٢})$

$$ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$

- ما احتمالُ أنْ يُنجِزَ المقاولُ المشروعَ التجاري فقط؟

احتمال أنْ يُنجِزَ المشروع التجاري فقط يعني: ....

$$ل(ح_٢ - ح_١) = ل(ح_٢) - ل(ح_٢ \cap ح_١)$$

$$= \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٤} = \_\_\_\_\_\_$$

أَتَعَلَّم: ليكن $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثيْن في الفضاء العيني Ω لتجربةٍ عشوائيّةٍ، فإنّ:

- $\overline{ح_١} \cup \overline{ح_٢} = \overline{ح_١ \cap ح_٢}$
- $\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢} = \overline{ح_١ \cup ح_٢}$

احتمال حدوث $ح_١$ وعدم حدوث $ح_٢$ = $ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

نشاط (٤): ليكنْ: $ل(ح_١) = ٠,٣$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٥$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٢$ ، أُكمِلُ إيجادَ ما يأتي:

- $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$
- $ل(\overline{ح_١}) = ١ - ل(ح_١) = ١ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$
- $ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_٢ \cap ح_١)$

$$= ٠,٣ - ٠,٢ = \_\_\_\_\_\_$$

- $ل(\overline{ح_٢} \cup \overline{ح_١}) = ل(\overline{ح_١ \cap ح_٢}) = ١ - ل(ح_٢ \cap ح_١) = ١ - \_\_\_\_\_\_ = ٠,٨$
- $ل(\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢}) = ل(\overline{ح_١ \cup ح_٢}) = ١ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

تمارين ومسائل:

س١ لَدى عائلةٍ ثلاثةُ أطفال، ما احتمالُ أنْ يكونَ لديها بنتان وولد ؟

س٢ في تجربةِ رمي حجريّ نردٍ منتظميْن مرةً واحدة، وملاحظة الوجهيْن الظاهريْن،

أجدُ احتمالَ ما يأتي:

أ احتمال ظهور عدديْن مجموعهما ٧ .

ب احتمال ظهور عدديْن فرديّيْن.

جـ احتمال ظهور عدديْن مجموعهما ٣ على الأكثر.

س٣ إذا كان $\text{ح}_{١}$، $\text{ح}_{٢}$ حادثيْن في Ω حيث:

$\text{ل}(\text{ح}_{١}) = ٠,٦$

$\text{ل}(\text{ح}_{٢}) = ٠,٣$

$\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢}) = ٠,١٥$

أحسب:

أ $\text{ل}(\text{ح}_{١} - \text{ح}_{٢})$

ب $\text{ل}(\overline{\text{ح}}_{١} \cap \overline{\text{ح}}_{٢})$

(٨ - ٢) الاحتمال المشروط

نشـاط(١): يُمثّلُ الجـدولُ الآتـي بيانـاتِ مجموعـةٍ مـن الطلبـة فـي إحـدى الجامعـات الفلسـطينيّة، لمعرفـة نتائجِهـم فـي مقـرّر الإحصـاء:

الكُليّة / النتيجة	الناجحون	الراسبون	المجموع
العلوم	٢٥	١٥	٤٠
الزّراعة	١٠	٥	١٥
الهندسة	١٥	١٠	٢٥
المجموع	٥٠	٣٠	٨٠

أُخْتيرَ أحدُ الطلبة عشوائيّاً، أجيبُ عمّا يأتي:

- احتمال أنْ يكونَ هذا الطالب من كليّة الزّراعة = $\frac{١٥}{٨٠}$
- احتمال أنْ يكونَ هذا الطالب من الناجحين = ________
- احتمال أنْ يكون هذا الطالب ناجحاً، ومن كليّة الزراعة = $\frac{١٠}{٨٠}$

هل يمكن إيجادُ احتمالِ أنْ يكون هذا الطالب من كليّة الزراعة، بشرط أنّه من الناجحين؟

نشاط(٢): في تجربة رمي حجرَ النّردِ مرّةً واحدةً، وملاحظة الوجه العلوي الظاهر، ما احتمالُ الحصولِ على العدد ٣ إذا علمت أنّ الوجهَ الظّاهرَ عددٌ فرديٌّ؟

Ω = {١ ، ٢ ، ٣ ،   ،   ،   }

$ح_{١}$ يُمثّل حادثَ ظهور العدد ٣ = { ٣ } ، وبالتالي ل($ح_{١}$) = $\frac{١}{٦}$

فإذا عُلِم أنّ الوجهَ الظّاهرَ عددٌ فرديٌّ، فإنّ الفضاءَ العينيَّ يتناقص، بحيث يصبح:

$ح_{٢}$ = {١ ، ٣ ، ٥} (أي فضاء عينيّ جديد)

إذن: احتمال ظهور العدد ٣ ، بعد عِلمنا أنّ الوجهَ الظّاهرَ عددٌ فرديٌّ هو =

ل(ظهور ٣ إذا عُلِمَ أنّه فرديّ) = $\frac{١}{٣}$. و بالرموز: ل($ح_{١}$ / $ح_{٢}$) = $\frac{١}{٣}$. وهو الاحتمال المشروط.

نلاحظ أنّنا عَلِمنا جزءاً من النتيجةِ التي وقعت، وهي أنّ حدثاً معيّناً قد وقع، وهو حادث ظهور عددٍ فرديّ.

والنتيجة: أنّ الحادثيْن يقعان معاً بشرطِ وقوعِ أحدِهما.

بما أن $ح_{١} \cap ح_{٢}$ = {٣} فإن ل($ح_{١} \cap ح_{٢}$) = ________

ومنه: $\frac{ل(ح_{١} \cap ح_{٢})}{ل(ح_{٢})} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{٣}{٦}} = \frac{١}{٣}$.

ما العلاقةُ بين: ل($ح_{١}$ / $ح_{٢}$) و $\frac{ل(ح_{١} \cap ح_{٢})}{ل(ح_{٢})}$ ؟

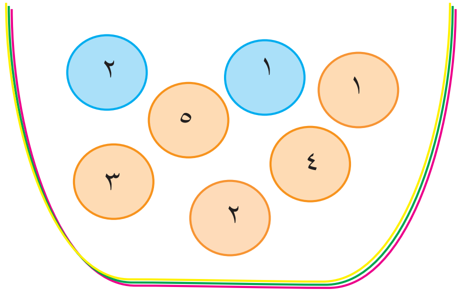
أتعلّم : الاحتمال المشروط: هو إيجادُ قيمةِ الاحتمالِ لحادثٍ ما، عِلماً بأنّ حادثاً آخر قد وقع.

إذا كان $ح_{١}$، $ح_{٢}$ حادثيْن في Ω، فإنّ احتمال وقوع $ح_{١}$ بشرط وقوع $ح_{٢}$ يُرمزُ له بالرمز:

$$ل(ح_{١} / ح_{٢}) = \frac{ل(ح_{١} \cap ح_{٢})}{ل(ح_{٢})} \text{ ، } ل(ح_{٢}) \neq \text{صفر}$$

أي أنّ: ل($ح_{١} \cap ح_{٢}$) = ل($ح_{١}$ / $ح_{٢}$) × ل($ح_{٢}$)

مِثال: يحتوي وعاءٌ على ٥ كراتٍ برتقاليّةِ اللون مرقّمةٍ من ١إلى ٥، وكرتين زرقاويْن مرقّمتين بالأرقام ١ ، ٢ ، كما في الشكل المجاور. إذا سحبنا كرةً عشوائيّةً، ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرةُ المسحوبةُ برتقاليّةً علماً بأنّها تحمل الرقم ٢؟



الحل: ليكن:

$\text{ح}_{١}$: حادث الكرة المسحوبة برتقاليّة اللون.

$\text{ح}_{٢}$: حادث الكرة المسحوبة تحمل الرقم ٢.

ومنه: $\text{ل}(\text{ح}_{٢}) = \frac{٢}{٧}$ ،

$\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢}$ تعني: أنّ الكرةَ المسحوبةَ برتقاليّةٌ، وتحمل الرقم ٢ ،

إذن: $\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢}) = \frac{١}{٧}$

احتمال أنْ تكونَ الكرةُ المسحوبةُ برتقالية، علماً بأنّها تحمل الرقم ٢ =

$$\text{ل}(\text{ح}_{١} / \text{ح}_{٢}) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢})}{\text{ل}(\text{ح}_{٢})} = \frac{\frac{١}{\boxed{}}}{\frac{\boxed{}}{٧}} = \frac{١}{٢} .$$

نشاط(٣): ليكنْ: $\text{ح}_{١}$ ، $\text{ح}_{٢}$ حادثيْن في Ω، حيث إنّ:

$\text{ل}(\text{ح}_{١}) = \frac{١}{٤}$ ، $\text{ل}(\text{ح}_{٢}) = \frac{١}{٣}$ ، $\text{ل}(\text{ح}_{١} \cup \text{ح}_{٢}) = \frac{٢٣}{٦٠}$ ، أُكمل إيجاد $\text{ل}(\text{ح}_{١} / \text{ح}_{٢})$، $\text{ل}(\text{ح}_{٢} / \text{ح}_{١})$:

$$\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢}) = \text{ل}(\text{ح}_{١}) + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

$$\text{ل}(\text{ح}_{١} / \text{ح}_{٢}) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢})}{\text{ل}(\text{ح}_{٢})} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

$$\text{ل}(\text{ح}_{٢} / \text{ح}_{١}) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢})}{\text{ل}(\text{ح}_{١})} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

تمارين ومسائل:

س١ أجب عمّا يأتي:

أ متى يكون $ل(ح_{١} / ح_{٢})$ = صفر

ب متى يكون $ل(ح_{١} / ح_{٢}) = ١$

جـ أعطي أمثلة على كل حالة للفرعين السابقين.

س٢ يحتوي صندوقٌ على ٧ كراتٍ بيضاءِ اللون، مرقّمةٍ من ١ إلى ٧، وعلى ١٣ كرةً سوداءِ اللون مرقّمةٍ من ١ إلى ١٣، سُحِبتْ كرةٌ بشكلٍ عشوائيّ.

- ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرةُ سوداءَ علماً بأنّها تحمل العدد ٣؟

س٣ وُجِدَ أنّ ٠,٣ من مُراجعي إحدى العيادات الصحيّة يعانون من ارتفاع ضغط الدم، وأنّ ٠,١٥ من المراجعين مصابون بمرضٍ في الكبد، و ٠,١ مصابون بالمرضين معاً.

- ما احتمالُ أنْ يكونَ أحدُ المراجعين مصاباً بمرضٍ في الكبد، علماً بأنّه يعاني من ارتفاعِ ضغطِ الدم؟

نشاط (١): من أجل تمثيل الشعب يتم إجراء الانتخابات، أُجرِيتْ انتخاباتُ البلديّات في فلسطين عام ٢٠١٧، وتنافست ثلاثُ قوائمَ من مدينة نابُلْسَ، وأربعُ قوائمَ من مدينة الخليل، تمّ اختيارُ مرشّحٍ من كلّ قائمةٍ عشوائيّاً، لحضورِ مؤتمرٍ حول دوْرِ البلديّات في خدمة المجتمع.

Ω = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (،   ) ، (١ ، ٤) ، (،   ) ، (٢ ، ٢) ، (،   ) ، (،   ) ، (٣ ، ١) ، (،   ) ، (٣ ، ٣) ، (،   ) } ، المسقط الأول يمثّل رقمَ قائمةِ مرشّحِ مدينةِ نابُلْس، والمسقط الثاني يمثّل رقمَ قائمةِ مرشّحِ مدينةِ الخليل.

ما احتمال أنْ يكونَ مرشّحُ مدينةِ نابلسَ من القائمة الثالثة؟

$ح_١$: تُمثّلُ حادثَ أنْ يكونَ مرشّحُ مدينةِ نابلسَ من القائمة الثالثة،

$ح_١$ = { (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) } ، ومنه: ل($ح_١$) = $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$.

ما احتمالُ اختيارِ مرشّحِ مدينةِ الخليل من القائمة الرابعة؟

لتكن: $ح_٢$ تمثّل حادثَ أنْ يكونَ مرشّحُ مدينةِ الخليل من القائمة الرابعة.

$ح_٢$ = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤) } ، ومنه ل($ح_٢$) = $\frac{٣}{١٢}$ = ________

إذا تمّ اختيارُ مرشّحيْن من المدينتيْن بشكلٍ عشوائيّ، ما احتمالُ أنْ يكونَ المرشّحُ الأوّلُ من القائمة الثالثة لمدينة نابلس، وأنْ يكونَ المرشّحُ الثاني من القائمة الرابعة لمدينة الخليل؟

المطلوب: احتمال حدوث الحادثيْن معاً؛ أي ل($ح_١ \cap ح_٢$)

$ح_١ \cap ح_٢$ = {(،   )} ، ل($ح_١ \cap ح_٢$) = $\frac{١}{١٢}$

أجد : ل($ح_١$) × ل($ح_٢$) = $\frac{١}{٣}$ × ________ = $\frac{١}{١٢}$

ما العلاقةُ بين: ل($ح_١ \cap ح_٢$)، ل($ح_١$) × ل($ح_٢$)؟ ________

هل يتأثّرُ اختيارُ مرشّحِ مدينةِ نابلسَ باختيار مرشّحِ الخليل؟________

هل يتأثّرُ حدوثُ $ح_١$ بحدوثِ $ح_٢$؟________

أجد: ل($ح_٢$ / $ح_١$) = $\frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_١)}$ = $\frac{\boxed{\quad}}{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{١}{٤}$ ،

ل($ح_١$ / $ح_٢$) = $\frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$ = ________ = $\frac{١}{٣}$

ما العلاقةُ بين: ل(ح$_{٢}$/ح$_{١}$) ، ل(ح$_{٢}$)؟، وبين: ل(ح$_{١}$/ح$_{٢}$)، ل(ح$_{١}$)؟ ————

نلاحظ أنّ: حادث اختيار المرشّح من إحدى قوائم مدينة نابلس لا يؤثّرُ على حادث اختيار، أو عدم اختيار المرشّح =من مدينة الخليل ، وتُسمّى مثلُ هذه الحوادث حوادثَ مستقلّة .

أتعلّم : يُقال أنّ ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ حادثان مستقلّان، إذا كان وقوعُ أيٍّ منهما لا يؤثّر على وقوعٍ، أو عدمِ وقوع الحادث الآخر؛ أي أنّ :

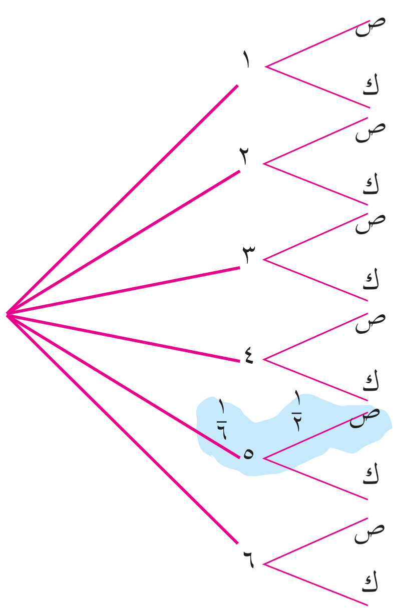
ل(ح$_{١}$/ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$)

ل(ح$_{٢}$/ح$_{١}$) = ل(ح$_{٢}$)

وكذلك ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) × ل(ح$_{٢}$) .

مِثال: في تجربةِ رميِ حجرِ نردٍ، ثمّ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ، وملاحظة الوجهيْن الظاهريْن، ما احتمالُ ظهورِ الرقم ٥ على حجر النرد، وظهور صورةٍ على قطعة النقد؟

Ω = {(١ ، ص) ، (١ ، ك) ، (٢ ، ص) ، (٢ ، ك)، (٣ ، ص) ، (٣ ، ك) ، (٤ ، ص) ، (٤ ، ك) ، (٥ ، ص) ، (٥ ، ك) ، (٦ ، ص) ، (٦ ، ك)}



ليكن ح$_{١}$: حادث ظهور الرقم ٥ على حجر النرد.

ح$_{٢}$: حادث ظهور صورة على قطعة النقد.

والمطلوب: ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$)

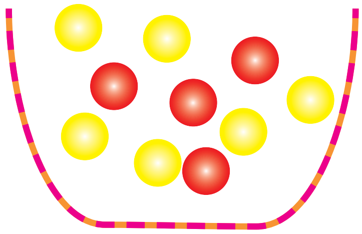
لاحظ أنّ الحادثين ح$_{١}$ و ح$_{٢}$ مستقلّان ، فلا يتأثر رمي قطعةِ النقد برمي حجرِ النرد، فنجد احتمالَ كلٍّ منهما دون الاعتماد على الآخر: ل(ح$_{١}$) = $\frac{١}{٦}$ ، ل(ح$_{٢}$) = $\frac{١}{٢}$

وبما أنّ ح$_{١}$، ح$_{٢}$ مستقلان، ينتج أنّ:

ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) × ل(ح$_{٢}$) = $\frac{١}{٦}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{١٢}$.

أُفكِّر وأُناقش هل يمكنك إيجاد: ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) بطريقةٍ أخرى؟

نشاط(٢): يحتوي صندوقٌ على ٤ كراتٍ حمراءِ اللون، و٦ كراتٍ صفراء اللون متماثلاتٍ في الحجم، سُحبتْ كرتان على التوالي:

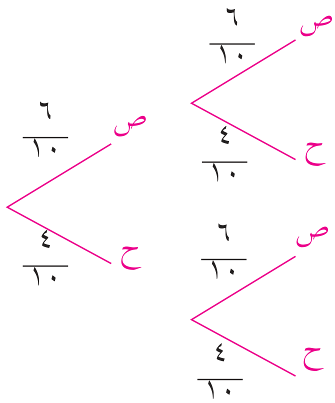


ما احتمالُ أنْ تكونَ الأولى حمراءَ، والثانيةُ صفراء،

إذا كان السّحبُ مع الإرجاع؟

ح$_{١}$: الكرة الأولى المسحوبة حمراء.

ح$_{٢}$: الكرة الثانية المسحوبة صفراء.



احتمال أنْ تكونَ الكرةُ الأولى حمراءَ، والثانيةُ صفراء،

إذا كان السّحبُ مع الإرجاع =

ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) × ل(ح$_{٢}$)

= $\frac{٤}{١٠}$ × $\frac{\square}{\square}$ = $\frac{\square}{١٠٠}$. لماذا؟

نشاط (٣): إذا كان ل(ح$_{١}$) = ٠,٥ ، ل(ح$_{٢}$) = ٠,٧ ،

وكان ل(ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$) = ٠,٨٥، أُبيّن أنّ ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حادثان مستقلّان.

ل(ح$_{١}$) × ل(ح$_{٢}$) = ــــــــــ × ــــــــــ = ــــــــــ

ل(ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) + ل(ح$_{٢}$) − ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$)

٠,٨٥ = ٠,٥ + ٠,٧ − ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$)

ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$) = ٠,٣٥

نلاحظ أنّ: ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) × ل(ح$_{٢}$)، أي أنّ: الحادثين ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ مستقلّان.

نشاط(٤): إذا كان ل(ح$_{١}$) = ٠,٤ ، ل(ح$_{٢}$) = ٠,٥ وكان ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ حادثيْن مستقلّيْن،

أجد قيمةَ ما يأتي:

- ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$) = ــــــــــ × ــــــــــ = ٠,٤ × ــــــــــ = ــــــــــ
- ل(ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$) = ــــــــــ + ــــــــــ − ــــــــــ = ٠,٩ − ــــــــــ = ــــــــــ
- ل(ح$_{١}$ / $\overline{ح_{٢}}$) = ــــــــــــــــ

تمارين ومسائل:

س١ إذا كان: $ل(ح_{١}) = ٠,٦$، $ل(ح_{٢}) = ٠,٥$ ، وكان $ل(ح_{١} \cup ح_{٢}) = ٠,٨$،

أُبيّنُ أنّ: $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ حادثان مستقلّان.

س٢ يحتوي صندوقٌ على ٥ كراتٍ زرقاءِ اللون، و٧ كراتٍ خضراءِ اللون،

سُحبت كرتان على التوالي، مع إرجاع. أحسبُ احتمال ما يأتي:

أ) أنْ تكونَ الكرةُ الأولى زرقاءَ، والثانيةُ خضراء.

ب) أنْ تكونَ الكرتان من اللون نفسِه.

س٣ إذا كان: $ل(\overline{ح_{١} \cup ح_{٢}}) = ٠,٢$، $ل(\overline{ح_{١}}) = ٠,٤$، $ل(ح_{٢}) = ٠,٥$ ، أجد:

أ) $ل(ح_{١} \cap ح_{٢})$

ب) $ل(ح_{٢} / ح_{١})$

جـ) هل $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ حادثان مستقلّان؟

(٨ - ٤) تمارين عامّة

س١ أضعُ دائرةً حول رمز الإجابةِ الصّحيحة فيما يأتي:

١ إذا كان ح١ ، ح٢ حادثين منفصلين في Ω، وكان ل(ح١) = $\frac{٢}{٣}$

ل(ح٢) = $\frac{١}{٤}$ ، فما قيمة ل(ح١ $\cap$ ح٢)؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١١}{١٢}$ جـ) $\frac{٥}{١٢}$ د) صفر

٢ إذا كان ح١ ، ح٢ حادثين مستقلين في Ω، لتجربةٍ عشوائيّةٍ ما، وكان ل(ح١) = ٠,٥

ل(ح٢) = ٠,٤، فما قيمة ل(ح١ $\cup$ ح٢)؟

أ) ٠,٧ ب) ٠,٩ جـ) ٠,٥ د) ٠,٤

٣ إذا كان ل(ح١) = ٠,٧، ل(ح٢) = ٠,٤، ل(ح١ − ح٢) = ٠,٤

فما قيمة ل(ح١ / ح٢)؟

أ) ٠,٦ ب) ٠,٢٥ جـ) ٠,٥ د) ٠,٧٥

٤ إذا كان احتمالُ أنْ ينجحَ عامرٌ في الرياضيّات يساوي ٠,٧، واحتمالُ أنْ ينجحَ في اللغة الإنجليزيّة يساوي ٠,٨، واحتمالُ أنْ ينجحَ في كليهما يساوي ٠,٥٦ .فما احتمالُ نجاحِه في الرياضيّات فقط؟

أ) ٠,٨ ب) ٠,٢٤ جـ) ٠,١٤ د) ٠,٧

٥ إذا كان ل($\overline{ح}$٢ / ح١) = ٠,٣ ، و ل(ح١) = ٠,٤، وكان ح١ ، ح٢ مستقلّيْن، فما قيمة ل(ح١ $\cap$ ح٢)؟

أ) ٠,١٢ ب) ٠,٢٨ جـ) ٠,٧ د) ٠,٣

س٢ إذا كان احتمالُ نجاحِ طالبٍ في امتحان الفيزياء يساوي ٠,٧٥، واحتمالُ نجاحِه في امتحان الكيمياء يساوي ٠,٨ ، واحتمالُ نجاحِه في الامتحانيْن معاً يساوي ٠,٦٥،فما احتمال:

أ نجاح الطالب في أحد الامتحانين؟

ب نجاح الطالب في امتحان الكيمياء فقط؟

س٣ صندوقان يحتوي الأول على ٤ كراتٍ بيضاءِ اللون، و٥ كراتٍ سوداءِ اللون، ويحتوي الثاني على ٣ كراتٍ بيضاءِ اللون، و٣ كرات سوداءِ اللون، وجميعُ الكرات في الصندوقيْن متماثلاتٌ في الحجم: إذا سُحبتْ كرةٌ واحدةٌ من كلِّ صندوقٍ، فما احتمالُ أنْ تكون الكرتان المسحوبتان سوداويْن؟

س٤ إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين في Ω، وكان $ل(ح_١) = \frac{١}{٣}$ ، $ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{١}{٢}$ ، $ل(ح_٢) = \frac{١}{٥}$. أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $ل(ح_١ - ح_٢)$ ب) $ل(ح_٢ / ح_١)$ جـ) $ل(\overline{ح}_١ / \overline{ح}_٢)$

س٥ إذا كان $ل(ح_١) = ٠,٤$ ، $ل(ح_١ / ح_٢) = ٠,٤$ ، $ل(ح_٢ / ح_١) = ٠,٥$

أ) هل $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلان؟ ب) ما قيمةُ $ل(ح_٢)$؟

س٦ أقيّم ذاتي: أعبر بلغتي عن توظيف مفاهيم الوحدة في حياتي المدرسية .

مشروع الوحدة:

تتعدّدُ الهواياتُ والمهاراتُ لَدى الطلبة، ففي إحدى المدارس لوحظَ تعدُّدُ الهواياتِ لدى طلبةِ الصفّ التاسع،منها لعبةُ كرةِ القدم، لعبة كرة السلة، لعبة كرة الطائرة، لعبةُ الشّطرنج، والقراءة وغيرها من الهوايات.

بالتعاون مع زملائك قم بتوزيع طلبة صفّك إلى ثلاث مجموعات، وقم بتصنيف الهوايات لديهم في جدول. اختر أحد الطلبة بصورةٍ عشوائيّة، ثمّ احسبْ :

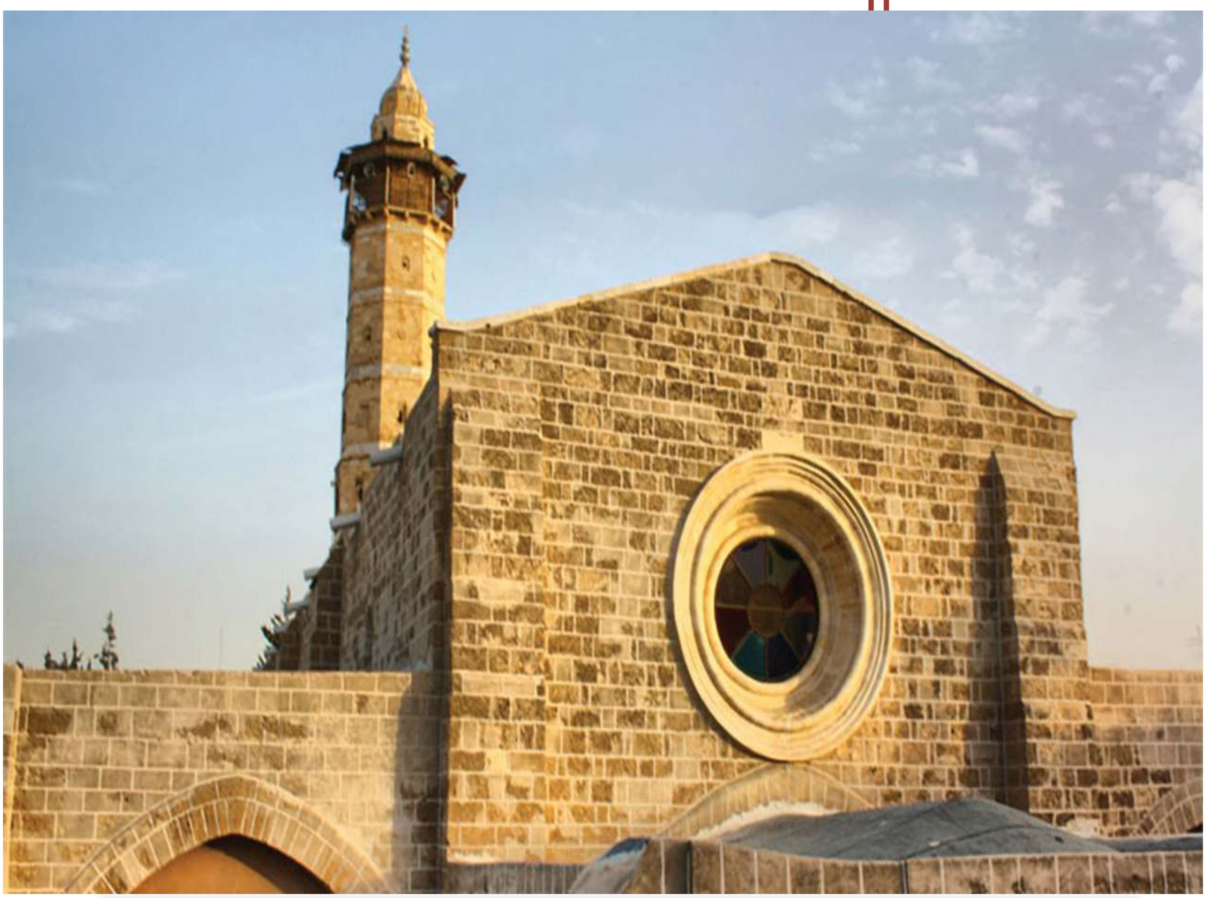
١) احتمال أنْ يكون هذا الطالب من المجموعة الأولى، ويلعب كرة القدم.
٢) احتمال أنْ يكونَ الطالب لاعبَ شطرنج، علما بأنّه من المجموعة الثالثة.
٣) أناقش نتائج المجموعات المختلفة، وأصف الفروقات بينها.

روابط إلكترونية

www.jmasi.com
www.Conditional Events/Probability-site

الوحدة ٩

الهندسة



تأمّلْ صورةَ المسجدِ العُمريّ في مدينةِ غزّة، ولاحظ الأشكالَ الهندسيّةَ (الدائرة) الواردةَ فيها، ومدى الدّقّةِ والإتقانِ في بناءِ المسجد .كيف يمكنُ تحديدُ مركزِ النّافذةِ الدائريّة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف معادلة الدائرة والمماسات والزوايا في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ التعرّف إلى معادلة الدائرة.

٢ إيجاد معادلة الدائرة.

٣ التعرّف إلى الزّوايا المحيطيّة، والزوايا المركزيّة.

٤ استنتاج العلاقةِ بين الزاويتيْن المركزيّة والمحيطيّة المشتركة في القوس نفسه.

٥ استنتاج العلاقةِ بين الزاويتيْن المحيطيّتيْن المشتركتيْن في القوس نفسه.

٦ أن يتعرف على مماس الدائرة.

٧ أن يتعرف الزاوية المماسية في الدائرة.

٨ أن يستنتج العلاقة بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

٩ التعرفّ إلى الشكل الرباعيّ الدائريّ.

١٠ استنتاج بعضِ خصائصِ الشكل الرباعيّ الدائريّ.

(٩ – ١) الدائرة

نشاط (١): تربيةُ الخيولِ والاعتناء بها إرثٌ عربيٌّ أصيلٌ، ومن طُرقِ التعاملِ معَ الخيولِ أن يقومَ الرَجُلِ بمسكِ طَرْفِ حبلٍ يمتدُّ إلى رسنِ الحصانِ الّذي يدورُ ببعدٍ ثابتٍ عن الرَجُلِ.

- ما شكلُ المسارِ الناتجِ من حركةِ الحصانِ حولَ الرَجُلِ؟
- ماذا يُمثّل موقعُ قدمي الرَجُلِ بالنسبةِ للمسارِ؟
- ماذا يُسمّى البعدُ الثابتُ بينَ موقعِ الرَجُلِ ومسارِ الحصانِ؟

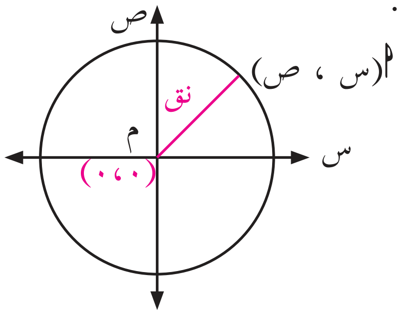
نلاحظ أنّ: المسار الذي يشكّله الحصانُ من دورانه حول نقطةٍ ثابتةٍ (موقع الرَجُلِ) هو دائرة مركزها النقطة الثابتة ونصف قطرها ———.

أتَعَلَّم : المحل الهندسي: هو مسارُ نقطةٍ تتحرّكُ في المستوى الديكارتي لرسم منحنى تحت شروطٍ معيّنة، حيث تُنتجُ هذه المساراتُ أشكالاً هندسيّة.

الدائرة: هي المحلُّ الهندسيّ (المسار) لنقطةٍ تتحرّك في المستوى، بحيث تبعدُ بعداً ثابتاً عن نقطةٍ ثابتةٍ، تُسمّى مركزَ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز م. يُسمّى البعدُ الثابتُ نصفَ قطرِ الدائرة ، ويُرمز له بالرمز نق.

نشاط (٢): يُمثّل الشكل المجاور دائرةً مركزُها نقطةُ الأصل م،

والنقطة أ(س ، ص) تقع على الدائرة،   م أ هو نصفُ قطرِ الدائرة.



باستخدام قانون المسافة بين نقطتين، فإنّ:

$$\text{م أ} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$$

$$\text{م أ} = \sqrt{(\text{س} - ٠)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}}$$

م أ = ــــــــــــــــــ ، ولكن: م أ = نق

بتربيع الطرفيْن أحصل على المعادلة : ــــــــــــــــــ

أَتَعَلَّم : الصورة العامّة لمعادلة الدائرة، التي مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠)، ونصف قطرها نق هي: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

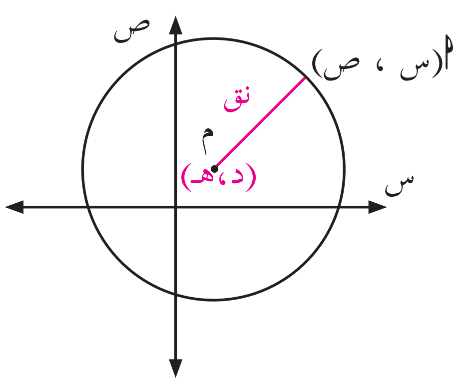
مِثال (١): أكتبُ معادلةَ الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٤ سم.

الحل: معادلة الدائرة: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤^{٢}$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٦$$

نشـاط (٣): لإيجـاد معادلـةِ الدائـرة فـي الشـكل المجـاور، حيـث: م مركـز الدائـرة نصف قطر الدائرة هو م أ، والنقطة ــــــــــــ تقع على الدائرة التي مركزها م.



طول م أ باستخدام قانون المسافة بين نقطتين:

م أ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

م أ = ________________ ، ولكن: م أ = هو نصف قطر

ومنها: نق = ____________

بتربيع الطرفيْن أحصل على المعادلة : ______________________

أَتَعَلَّم : الصورة العامّة لمعادلة الدائرة التي مركزُها النقطة (د ، هـ)، ونصف قطرها نق

هي : **(س – د)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢**

مِثال (٢): أكتبُ معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٢ ، ١)، وطول نصف قطرها ٣ سم.

الحل: **معادلة الدائرة:** (س – د)^٢ +(ص – هـ)^٢ = نق^٢

(س – ٢)^٢ +(ص – ١)^٢ = ٣^٢

ملاحظة: عند فكّ الأقواس في معادلة الدائرة السابقة نحصل على الصورة:

س^٢ – ٤ س + ٤ + ص^٢ – ٢ ص + ١ = ٩

س^٢ – ٤ س + ص^٢ – ٢ ص + ٥ = ٩

س^٢ – ٤ س + ص^٢ – ٢ ص = ٤

نشاط (٤): عند فكّ الأقواس في المعادلة التي على الصورة:(س – د)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢

نحصل على: س^٢ – ________ + د^٢ + ص^٢ – ________ + هـ^٢ = نق^٢

س^٢ – ________ + د^٢ + ص^٢ – ________ + هـ^٢ – نق^٢ = صفر

بفرض أنّ: -د = ل ، -هـ = ك، د^٢ + هـ^٢ – نق^٢ = جـ

تنتج الصورة : ______________________

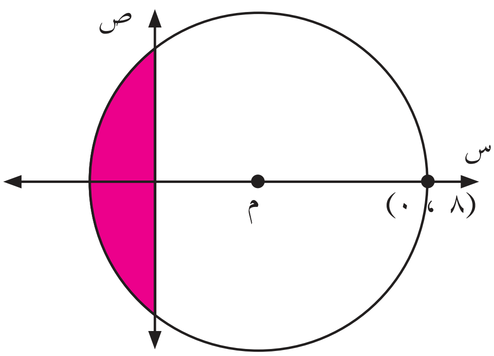
ماذا تلاحظ على معامل س^٢، معامل ص^٢؟

هل يوجد الحدُّ س ص في المعادلة؟

أَتَعَلَّم : الصورة القياسيّة لمعادلة الدائرة هي : **س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠**

ويكون فيها مركزُ الدائرة (-ل ، -ك) ، نصف قطرها نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$

لاحظ أنّ : ل^{٢} + ك^{٢} − جـ > صفر



نشاط (٥): كان الفلاح الفلسطيني يستغل منطقة من أرضه لعمل بيدر عليها، كما هو ممثل في الشكل المظلل، أذا مُثلت معادلة الدائرة: ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ١٢س = ٣٢

أجد مركز ونصف قطر الدائرة.

نحوّلُ المعادلة: ٢س^{٢}+ ٢ص^{٢}− ١٢س = ٣٢ إلى الصورة القياسيّة لمعادلة الدائرة

٢س^{٢} + ٢ص^{٢}− ١٢س − ٣٢ = صفر

نقسم طرفيّ المعادلة على ٢، فتصبح: ______________

٢ل = ________ ، ومنها ل = ________

٢ك = صفر، ومنها ك = صفر

نق = $\sqrt{(-٣)^{٢} + (٠)^{٢} - (-١٦)}$ = $\sqrt{٢٥}$

نق = ٥ وحدات

مركز الدائرة: (،   )

تمارين ومسائل:

س١ أجدُ معادلةَ الدائرة في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي:

ا) مركزُها (٠،٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٥سم.

ب) مركزُها (-٣ ،٢)، وطولُ قطرِها ٦سم.

جـ) مركزُها (- ٢ ، -٧)، وتمرُّ في النقطة (٤، -٨).

س٢ أجدُ مركز الدائرة، وطول نصف قطرها في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي :

ا) $س^{٢} + ص^{٢} - ١ = ٠$

ب) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٤٢$

جـ) $٦س^{٢} + ٦ص^{٢} = ٣٦$

د) $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س = ١٤$

س٣ أيّ المعادلاتِ الآتية معادلةَ دائرة؟

ا) $س^{٢} - ص^{٢} = ٣٦$

ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س = ٩$

جـ) $٨س^{٢} + ٨ص^{٢} + ٢س ص = ١٠$

د) $س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٥ = ٠$

هـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٣ص = ٠$

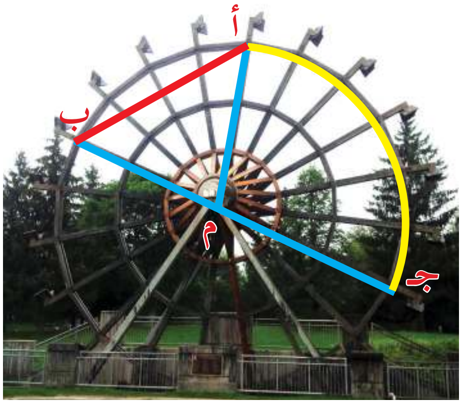
س٤ أجد قيمة ك التي تجعل نصف قطر الدائرة الآتية ٥ وحدات:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٢ك ص - ١٢ = صفر$

س٥ رسم معلم التربية الرياضية في إحدى المدارس الفلسطينية دائرة في وسط ملعب كرة القدم. افترض المعلم أن الدائرة مرسومة في مستوى ديكارتي مركزها (-٢ ، ٤) ، ونصف قطرها ٦ م. ما معادلتها؟

(٩ - ٢) الزّوايا المركزيّة والزّوايا المحيطيّة

نشاط (١): المحافظة على عمارةِ الأرض، والاعتناء بها من ضرورات بقائنا عليها، فـ«على هذه الأرض ما يستحقّ الحياة» .اعتمد الفلّاح قديماً على قوّةِ دفعِ المياه الناتجة من دولاب المياه لتحريك طاحونة القمح، تأمّل دولابَ المياه في الشكل المجاور، ثم أجبْ:



في الدائرة التي مركزها م.

تُسمّى القطعةُ أ م نصفَ قطرِ الدائرة،

بينما القطعة ب جـ ______

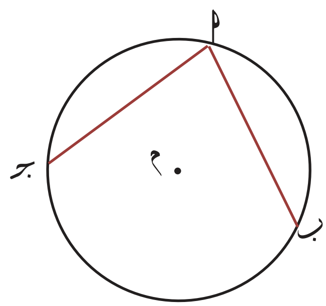
أجـ قوس في الدائرة.

أذكرُ أسماءَ أربعِ زوايا في الشكل المجاور: ______، ______، ______، ______

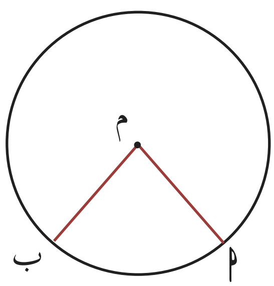
ألاحظ: موقع رأس الزّوايا في الشكل السابق.

تعريف

الزاوية المركزيّة: هي الزاوية التي يقع رأسُها في مركز الدائرة، وضلعاها أنصافُ أقطارٍ في الدائرة.
الزاوية المحيطيّة: هي الزاوية التي يقع رأسُها على الدائرة، وضلعاها أوتارٌ في الدائرة.

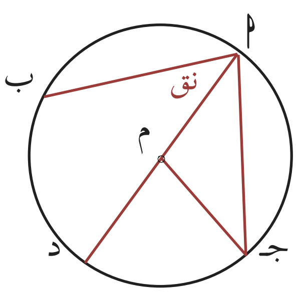


الزاوية ب أ جـ (محيطيّة)



الزاوية أ م ب (مركزيّة)

نشاط (٢): في الشكل المجاور دائرة مركزها م :

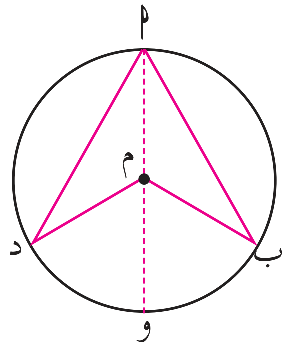


تُسمّى الزاويةُ جـ م د زاويةً ______، لماذا؟

تُسمّى الزاويةُ أ م د زاويةً مركزيّة، لماذا ؟

أذكرُ أسماءَ زاويتيْن محيطيّتيْن ______ ، ______ .

نشاط (٣): في الشكل المقابل، إذا كانت م مركز الدائرة، وكان ∢ ب أ م = ٣٠°،
∢د أ م = ٣٥° أجد: ∢ب م د .



الزاوية ب م و خارجة عن المثلث أ ب م

إذن: ∢ ب م و = ∢ أ ب م + ∢ ب أ م

ولكن : ∢ أ ب م = ∢ ب أ م؛ لأنّ ________________

ومنه : ∢ ب م و = ________ = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

لإيجاد: ∢ د م و = ٢ × ________

= ٢ × ________ = ________

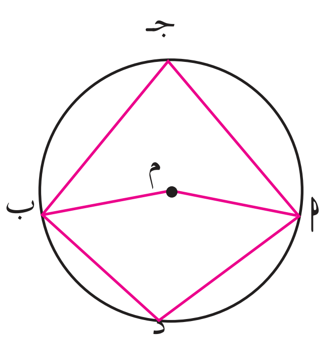
∢ ب م د = ∢ ب م و + ∢ و م د

= ٦٠° + ________ = ________

وينتج أنّ: ∢ ب م د = ٢ × ∢ ________

لاحظ أنّ: الزاويةَ ب م د زاويةٌ مركزيّةٌ، والزاويةَ ب أ د زاويةٌ محيطيّةٌ، مرسومتان على القوس نفسه، ما العلاقة بين قياس الزاويتيْن؟

أَتَعَلَّم : قياسُ الزاويةِ المركزيّة تساوي ضعفَي قياسِ الزاوية المحيطيّة المشترِكة معها في القوس نفسه .



نشاط (٤): تحيط بمدينة القدس (العاصمة) العديد من القرى، إذا مثل الشكل المجاور مواقع القرى (أ ، ب ، جـ ، د) بالنسبة للقدس (م)، وكان∢ أ م ب = ١٥٠°

أجد: ∢ أ جـ ب، ∢ أ د ب.

بما أنّ الزاوية أ م ب ________، والزاوية أ جـ ب ________ مشتركتان في القوس أ د ب

إذن: ∢ ٲ م ب = ______ ∢ ٲ جـ ب

∢ ٲ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ × _____ = __________

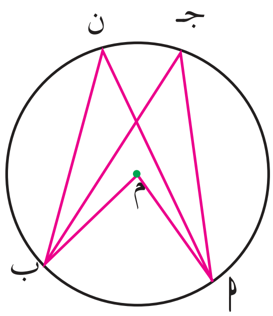
∢ ٲ م ب المنعكسة = ٣٦٠° − ١٥٠° = ٢١٠°

زاوية ٲ م ب المنعكسة مركزيّة على القوس ______، وزاوية ٲ د ب محيطيّة مشتركة معها في القوس ______

إذن: ∢ ٲ م ب المنعكسة = ٢ ∢ ٲ د ب

∢ ٲ د ب = __________ = __________

نشاط (٥): أتأمّلُ الشكل المجاور، فيه م مركز الدائرة، وقياس الزاوية ٲ م ب = ٨٠°، أجدُ: قياس الزاوية ٲ ن ب، وَ قياس الزاوية ٲ جـ ب



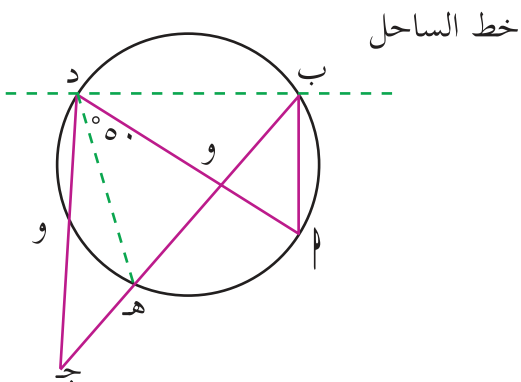
∢ ٲ جـ ب =________ لماذا ؟

∢ ٲ ن ب = ٤٠°

ما العلاقة بين الزاويتيْن: ٲ جـ ب ، ٲ ن ب ؟

أَتَعَلَّم: أي زاويتان محيطيّتان مرسومتان على قوس واحد في الدائرة متساويتان في القياس.

نشاط (٦): تمثل الدائرة في الشكل المجاور المنطقة الخطرة التي يحظر على السفن الاقتراب منها.

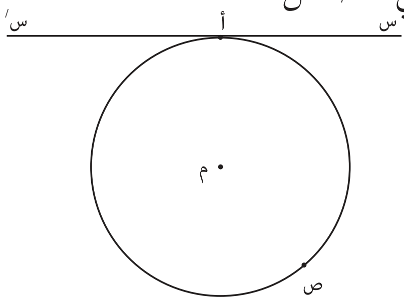


النقطة جـ تمثل موقع سفينة في البحر.

تسمى الزاوية د هـ ب زاوية الخطر

∢ أ ب هـ = ______ لأنها مرسومة ______

نشاط (٧): إرسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة س فقط.

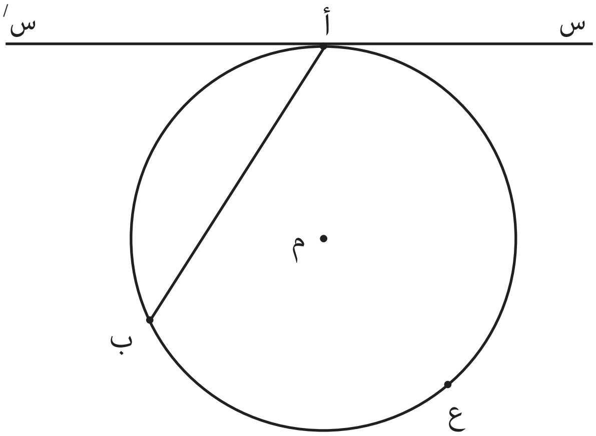


يسمى المستقيم أس أو ...... أو ......

إرسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة ص فقط.

أتعلّم: مماس الدائرة هو المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة تُعرف بنقطة تماسه معها (نقطة تماس).

نشاط (٨): الشكل المرسوم جانباً يمثل دائرة مركزها م ، فيها س س/ مماس للدائرة في النقطة أ.



أب وتر في الدائرة.

تُسمى الزاوية س/ أب زاوية مماسية

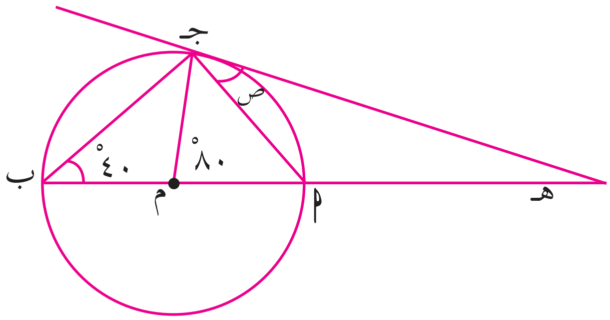
الزاوية المماسية هي ....

نشاط (٩): الأدوات: ورق A4 ، قلم ، فرجار ، مسطرة ، منقلة.

- ارسم دائرة مركزها م (كل مجموعة ترسم دائرة نصف قطرها مختلف عن الآخرى).
- اختر نقطة على الدائرة مثل أ وارسم منها مماس.
- ثم ارسم وتر يمر بالنقطة أ مثل أب، ارسم زاوية محيطية على الوتر من الجهة الأخرى (ليس في جهة المماس)
- قم بقياس الزاوية المماسية والزاوية المحيطية التي رسمتها وسجل ملاحظاتك

- ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

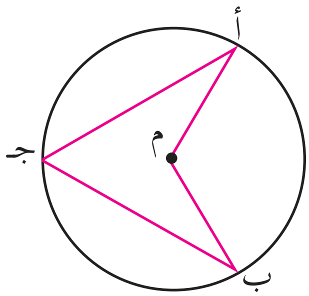
نشاط (١٠): في الشكل المجاور أجد قياس الزاوية المشار اليها بالرموز (م مركز الدائرة)



∢ ص = ...، مماسية ومحيطية على نفس القوس.

ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس؟

تمارين ومسائل:

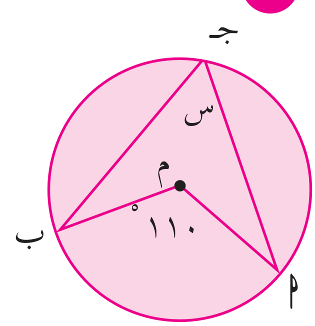


س١ الشكل المجاور فيه م مركز الدائرة، فإذا كان قياس ∢ (أ م ب) = ١٣٠°، أجدُ ∢ (أ جـ ب).

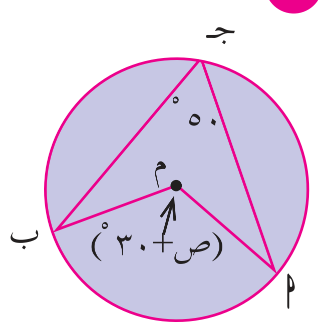
س٢ أبيّنُ أنّ قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على قطر الدائرة تساوي ٩٠°.

س٣ أجدُ قيمةَ المجهولِ في الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة:

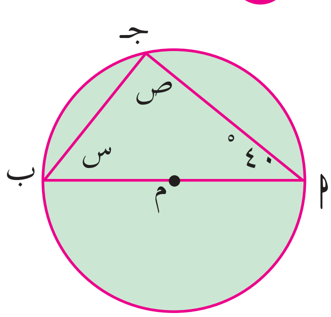
١



٢



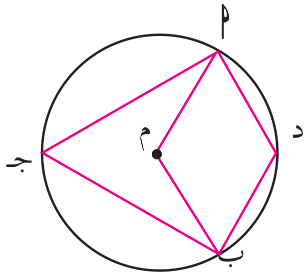
٣



س٤ في الشكل المجاور دائرة مركزها م، فيها :

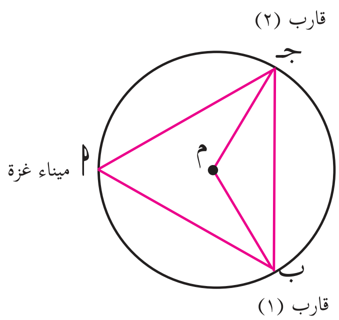
∢ (أ د ب) = ١٤٠°

أجد: ∢ (أ م ب) المنعكسة، و∢ (أ جـ ب) .

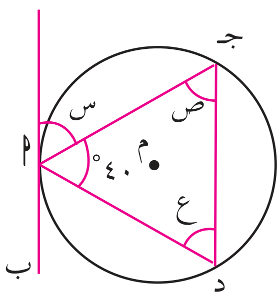


س٥ يعاني الصيادون من ضيق مساحة الصيد المخصصة لهم بسبب إجراءات الاحتلال، انطلق قاربا صيد من ميناء غزة كما في الشكل المجاور، إذا كانتْ الدائرةُ مركزها م، وفيها ∢ (م ب جـ) = ٣٠°

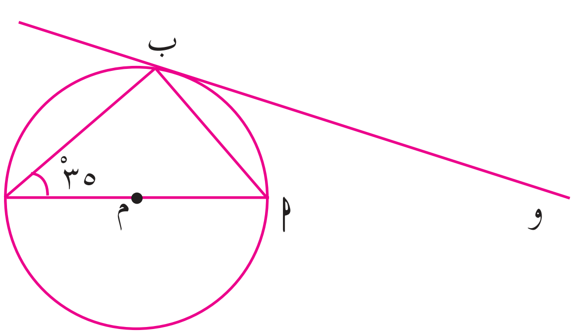
أجد ∢ (ب أ جـ).



س٦ في الشكل المجاور أ ب مماس للدائرة أجد قياس جميع الزاويا المشار اليها بالرموز حيث م مركز الدائرة.

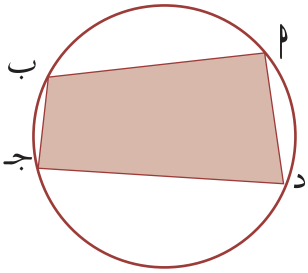


س٧ أجد قياس الزاوية و ب أ في الشكل المجاور.



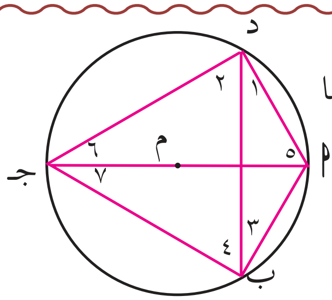
(٩ – ٣) الشكل الرّباعيّ الدائريّ

نشاط (١): يتكوّن الزيّ التراثيّ الشعبيّ في فلسطين من أثوابٍ مطرّزةٍ يدويّاً، بخيوط الحرير أو الصوف، ويتّخذ التطريزُ تصاميمَ وأشكالاً مختلفةً من منطقة إلى أخرى، تتكون من أشكالٍ هندسيّةٍ، ورسوماتٍ، إذا أحطنا الشكل الرباعي في المطرّزة بدائرة، بحيث تمرُّ بجميع رؤوسه، فماذا نُسمّي هذا الشكل؟



في الشكل المقابل رؤوس الشكل الرّباعيّ ــــــــــ تقع على الدائرة التي مركزها م، فيُسمّى الشكل ﻫ ب جـ د شكلًا رباعيّاً دائريّاً.

أَتَعَلَّم : الشكل الرباعيّ الدائريّ: هو شكلٌ رباعيّ تقع رؤوسُه الأربعة على الدائرة.



نشاط (٢): ﻫ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ دائرةٍ مركزها م، أجدُ مجموعَ قياسِ الزاويتيْن المتقابلتيْن د، ب.

∠٣ = ∠٦ (محيطيّتان على قوس واحد)

∠٤ = ـــــــ لماذا؟

لكن∠١ + ∠٢ + ∠٥ + ∠٦ = ـــــــ (مجموع زوايا المثلث)

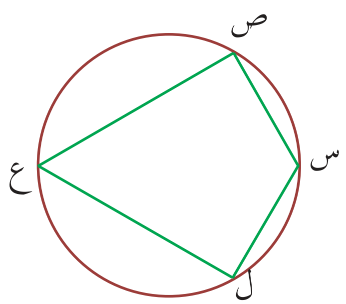
إذن: ∠١ + ∠٢ + ∠٣ + ∠٤ = ١٨٠°

إذن: مجموع قياس الزاويتيْن د، ب = ــــــــــــ

أُفَكِّر وأُناقش أبحث عن طرق أخرى لحل النشاط.

أَتَعَلَّم : كلُّ زاويتيْن متقابلتيْن في الشكل الرباعيّ الدائريّ متكاملتان (مجموعهما ١٨٠˚).
إذا كان مجموعُ زاويتين متقابلتين في شكلٍ رباعيّ = ١٨٠˚، فإنّ هذا الشكل رباعيٌّ دائريّ.

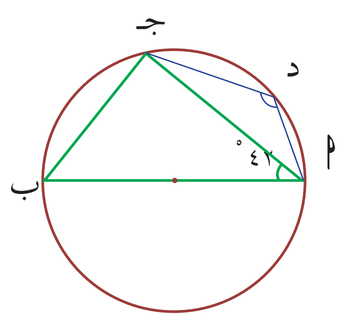
نشاط (٣): في الشكل المقابل يسُمّى الشكلُ س ص ع ل -------------. لماذا؟



إذا كان∠ ع = ٧٠˚

ومنه ∠ س = ــــــــــ . لماذا؟

نشــاط (٤): أ ب جـ د شكلٌ رباعيّ دائريّ، فيه:



الضلع أ ب قطر في الدائرة.

أجد:∠ (أ د جـ)، إذا كان ∠ (جـ أ ب) = ٤٢˚

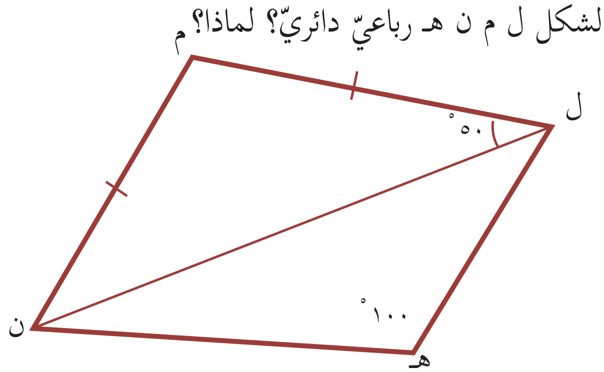
∠ (أ جـ ب) = ــــــــــ . لماذا؟

المثلث أ ب جـ فيه:

∠ (أ ب جـ) = ــــــــــ − (٤٢˚ + ٩٠˚) = ــــــــــ

ومنه:∠ (أ د جـ) = ١٨٠˚ − ٤٨˚ = ١٣٢˚. لماذا؟

نشاط (٥): اقترح أحد مصممي البرامج الحاسوبية النموذج المرفق كتصميم لساحة مدرسة العودة (الشكل التخطيطي) هل الشكل ل م ن هـ رباعيّ دائريّ؟ لماذا؟



∠ (م ن ل) = ــــــــــ . لماذا ؟

∠ م = ٨٠˚. لماذا ؟

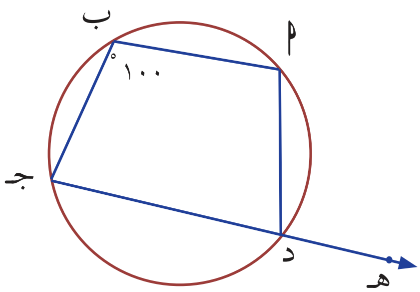
الشكل ل م ن هـ شكلٌ رباعيّ، فيه زاويتان متقابلتان، مجموع قياسهما = ١٨٠˚

إذن الشكل ل م ن هـ شكلٌ رباعيّ دائريّ.

أُفكِّر وأُناقش

هل كلُّ معيّنٍ شكلٌ رباعيّ دائريّ؟

نشاط (٦): في الشكل المقابل أجد∢ ٲ د هـ .



∢ ٲ د جـ = ٨٠°، لماذا ؟-----------------

∢ ٲ د هـ = ــــــــــــــــــــ . لماذا؟

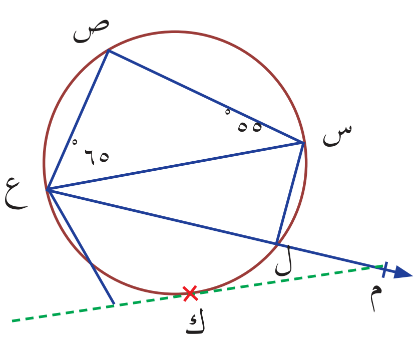
∢ ٲ د هـ تقع على امتداد أحدِ أضلاع الشكل الرباعيّ والضلع المجاور له. ماذا تُسمّى ٲ د هـ بالنسبة إلى الشكل الرباعي ٲ ب جـ د؟

تعريف

إذا مُدّ أحدُ أضلاعِ الشكل الرباعيّ على استقامته، فإنّ الزاويةَ المحصورةَ بين امتداد الضلع والضلع المجاور له تُسمّى **الزاويةَ الخارجةَ** عن الشكل الرباعي.

وقياس الزاوية الخارجة للشكل الرباعي الدائري = قياس الزاوية الداخليّة المقابلة للمجاورة لها.

نشاط (٧): في الشكل المقابل أجد∢ س ل م.

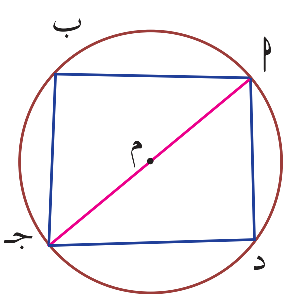


∢ (س ص ع) = ــــــــــــ

الزاوية (س ل م) تُسمّى زاوية ــــــــــــ عن الشكل الرباعي الدائري.

∢ (س ل م) = ــــــــــــ

ملاحظة: إذا كانت إحدى زوايا الشكل الرباعي الدائري قائمةً، فإنّ قُطرَ الشكل الرباعي المقابل لهذه الزاوية القائمة هو قطر الدائرة.

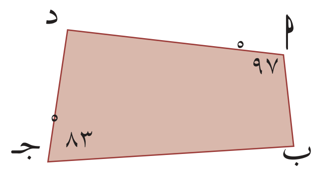


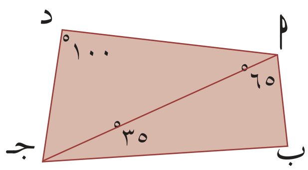
في الشكل الرباعي الدائري ٲ ب جـ د ∢ ٲ ب جـ = ٩٠°

ومنه ٲ جـ قطر في الدائرة، وهو قطر الشكل الرباعي.

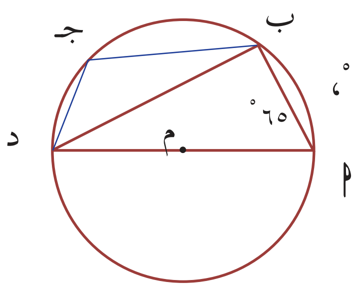
تمارين ومسائل:

س١ أبيّنُ أيّ الأشكال الآتية تمثل شكلًا رباعيّاً دائريّاً.





س٢ أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ دائريّ، فيه قياس الزاوية ب د جـ = ٣٠ ْ، أجد قياس الزاوية ب جـ د ، وقياس الزاوية أ ب جـ.

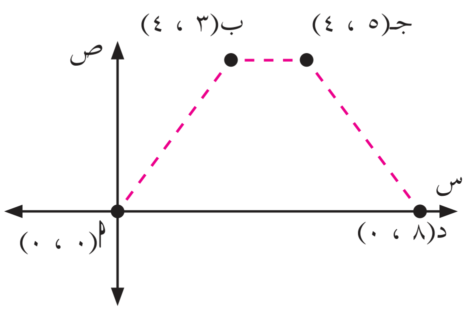


س٣ أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ دائريّ، فيه: ∢ أ = ٤ س + ٢٠ ْ، و∢ جـ = ٣ س+ ١٣ ْ، أجد قيمةَ س بالدرجات، ثم أجدُ قياسيّ كلٍّ من زاوية أ وزاوية جـ .

س٤ في يوم الأرض وعلى لوحة كرتونية، مثّلت هند مواقع لأربعة قرى فلسطينية مهجرة، كما في الشكل المجاور.

أ) ما اسم الشكل الهندسي الذي يصل بين النقاط؟

ب) أبين أن الشكل هو رباعي دائري؟



(٩ - ٤) تمارين عامة

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :(س − ٥)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٦٤ ؟

أ) ٥سم　　ب) ٢سم　　جـ) ٦٤سم　　د) ٨ سم

٢ قياس زاوية مركزيّة في دائرة مركزها م =١٠٠°، فما قياس الزاوية المحيطيّة المشتركة معها في القوس؟

أ) ١٠°　　ب) ٥٠°　　جـ)١٠٠°　　د)٢٠°

٣ ما العلاقة بين كلّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري؟

أ) مجموعهما ٣٦٠°　　ب) متساويتين　　جـ) متكاملتين　　د) متتامتين

٤ ما قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على قطر الدائرة؟

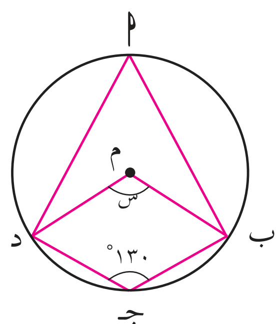
أ) ٩٠°　　ب) ٣٠°　　جـ) ٦٠°　　د) ٨٠°

٥ في الشكل المجاور:

إذا كان م مركز دائرة، فيها ∡ (ب جـ د) = ١٣٠°، فما قيمة س؟

أ) ٥٠°　　ب) ١٠٥°

جـ) ٢٣٠°　　د) ١٠٠°

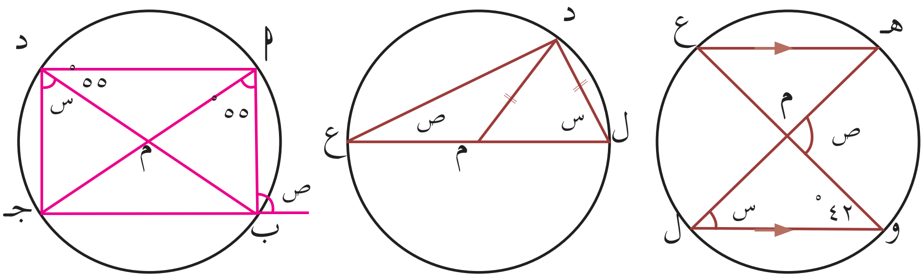


س٢ أجد معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

أ مركزها (-٥،١) ، وتمرّ بالنقطة (٢، ٤)

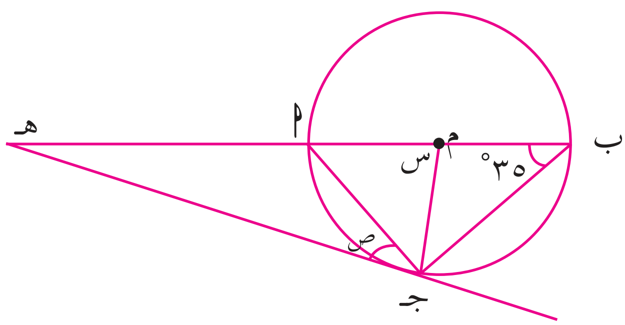
ب نهايتا قطرٍ فيها النقطتان: أ(٧ ، ١٢) ، ب(-٥ ، -٤)

س٣ أجد قياسات الزوايا المجهولة في الأشكال الآتية:



س٤ أ ب جـ د شكلٌ رباعيّ دائريّ، مرسوم داخل دائرة مركزها م، إذا كان أ ب قطراً في الدائرة، وكان قياس الزاوية ب أ جـ = ٤٠°، أجد قياس الزاوية أ د جـ .

س٥ في الشكل المجاور أجد قياس الزوايا المشار إليها بالرموز.



س٥ أقيّم ذاتي: اعبر بلغتي عن نقاط القوة ونقاط الضعف الواردة في مفاهيم الوحدة التي تعلمتها.

مشروع الوحدة:

صمم نموذجاً لجداريّةٍ مستطيلة الشكل أبعادها ٥م، ٢م، لوضعها على جدار المدرسة. أكرر نموذجاً بشكل رباعيّ دائريّ (مستطيل، مربع، . . . . الخ) بحيث نستطيع تكراره ليغطي اللوحة.

هل يُشترَطُ تكرارُ الشكلِ الرباعيّ الدائريّ نفسه في اللوحة كلّها؟

أناقش الخطوات والصعوبات التي قد تواجهك.

روابط إلكترونية

http://www.ies.co.jp/math/java/geo/klight/klight.html

http://www.blogmathnookarabia.com

المشروع

المشروع: شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع. ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.

٢. ينفّذه فرد أو جماعة.

٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.

٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.

٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.

٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.

٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.

٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.

٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.

٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.

٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.

٣. تحديد خطوات سير المشروع.

٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

فريدريك بل (1986):طرق تدريس الرياضيات:الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان). قبرص:الدار العربية للنشر والتوزي

اللحام، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق

ابو الوفاء البوزجاني (1971): علم الحساب العربي ، تحقيق د. احمد سعيدان ،عمان .

انور عكاشة واخرون (1990): تاريخ الرياضيات ، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر ، عمان

كارتر ، فيليب ؛ راسيل ، كين (2010): الدليل الكامل في اختبارات الذكاء، مكتبة جرير ، السعودية

هاشم الطيار، ويحي سعيد (1977): موجز تاريخ الرياضيات، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.

السبتي ، جورج (1988): ، الجبر الخطي ، دار الحكمة ، جامعة البصرة

الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية

الزغلول، عماد (2005)، الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

عبد اللطيف، علي اسحق (1993): عالم الهندسة الرياضية ابن الهيثم، منشورات الجامعة الأردنية، عمان، الاردن .

الخوارزمي ، محمد بن موسى (1939): كتاب الجبر والمقابلة ، تقديم علي مصطفى مسرفة ومحمد مرسي احمد ، القاهرة

ريتش، بارنيت (2004) : الجبر الأساسي ، ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية –القاهرة- مصر

Kline, M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times, Oxford, N.Y

Lamborg.James(2005):Math reference,Wiley ,N.Y

Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Friel,Suzan.Rashlin,Sid.Doyle,Dot.& others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سمية نخالة
م. فواز مجاهد	أ. علي مناصرة	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د. سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. ارواح كرم
أ. نادية جبر	أ. نشأت قاسم	أ. أحلام صلاح	أ. عبد الكريم صالح
أ. نسرين دويكات	أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر
أ. فتحي أبو عودة	د. سمية النخالة	أ. احمد سياعرة	أ. قيس شبانة
أ. مبارك مبارك			

المشاركون في ورشات عمل الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف التاسع:

أ. كريم العارضة	أ. محمد الفرا	أ. رانية شريم	أ. ريم العويضات
أ. عهود طه	أ. راتب نصار	أ. ميسون جمل	أ. منال الصباغ
أ. عبد الله مهنا	أ. أمل جبور	أ. عارف السعافين	أ. ابتسام اسليم
أ. وفاء موسى	أ. منال أسمة	أ. سمير حنيف	أ. سهيل شبير
أ. باسم المدهون	أ. رفيق الصيفي	أ. صلاح الترك	أ. سعيد عتيق
أ. عبد العزيز شلالدة	أ. نبيلة سلامة	أ. رابعة فشافشة	