المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف العاشر - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات   إبراهيم عقله القادري   هيثم زهير مرشود

نقين أحمد جوهر (منسقًا)

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقـم (2020/4)، تاريـخ 2020/6/11 م، وقرار مجلس التربيـة والتعليم رقـم (2020/56) تاريـخ 2020/6/24 م بـدءًا مـن العام الـدراسي 2020 / 2021 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 360 - 9

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2051)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف العاشـر: كتاب الطالـب (الفصـل الدراسـي الأول)/ المركز الوطنـي لتطوير المناهـج. –ط2؛ مزيدة ومنقحـة.– عمـان: المركز، 2022

(144) ص.

ر.إ.: 2022/4/2051

الواصفات: / الرياضيات/ / التعليم الاعدادي/ / المناهج/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)
أعيدت طباعته

1441 هـ / 2020 م
2021 م – 2024 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنســان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ ســعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مــع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمــة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهم المواد الدراســية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشــكلات، فقد أَوْلى المركز هذا المبحث عناية كبيرةً، وحــرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائــق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انســجامها مع القيم الوطنية الراســخة، وتلبيتها لحاجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلُّم. وكذلك إبراز خطة حَلِّ المسألة، وإفراد دروس مستقلة لها تتيح للطلبة التدرُّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مســائل متنوعة. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة المفاهيمَ والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرُّب المكثَّف على حَلِّ المسائل يُعَدُّ إحدى أهم طرائق ترســيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبــة ورقة عمل في كل درس، تُحَلُّ بوصفها واجبًا منزليًّــا، أو داخل الغرفة الصفية إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنَّنا ندرك جيدًا حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً تُوفِّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُســتخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا ســيَّما على شــبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهِمَّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدِّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت طلبتنا أيُّ فرصة، فقد اســتعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهُوَّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالَم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجــاب طلبتنا والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وســهولةً، ونعد بأنْ نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ

1

الأسسُ والمعادلاتُ

Exponents and Equations

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستخدَمُ أنظمةُ المعادلاتِ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ. فخبراءُ الأرصادِ الجويةِ -مثلًا- يُعبِّرونَ عنِ العلاقةِ بينَ درجةِ الحرارةِ، وسرعةِ الرياحِ، والضغطِ الجويِّ، ومعدلِ الهطلِ، باستخدامِ نظامِ معادلاتٍ غيرِ خطِّيٍّ؛ ذلكَ أنَّ أيَّ تغيُّرٍ في أحدِ هذهِ العواملِ يؤدّي إلى تغيُّرٍ في العواملِ الأُخرى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ التحليلِ.
- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ القانونِ العامِّ.
- ✓ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ تتضمَّنُ معادلتيْنِ خطِّيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.
- ✓ قواعدَ الأسسِ الصحيحةِ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ، وأُخرى تربيعيةٍ.
- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ.
- ◄ الأسسَ النسبيةَ، وخصائصَها.
- ◄ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

مشروعُ الوحدةِ

أنظمةُ المعادلاتِ في حياتِنا

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنْ أنظمةِ معادلاتٍ في نماذجَ حياتيةٍ.

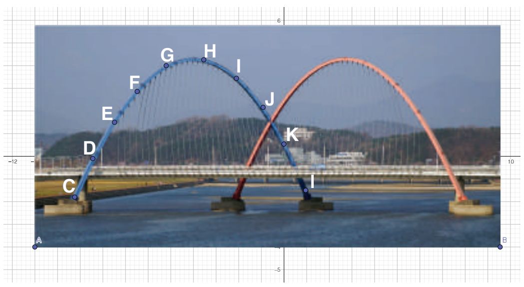
الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

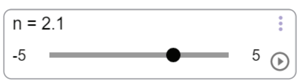
1 أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورٍ لنماذجَ حياتيةٍ تظهرُ فيها منحنياتٌ ومستقيماتٌ متقاطعةٌ (مثلُ: الجسورِ، ونوافيرِ المياهِ، وخرائطِ الطرقِ)، أوْ ألتقطُ صورًا لذلكَ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ على جهازِ الحاسوبِ.

2 أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ معادلةِ كلٍّ منَ المنحنياتِ المتقاطعةِ التي تظهرُ في الصورِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

- أنقرُ على أيقونةِ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظتُها.
- أُعدِّلُ موقعَ الصورةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها بتحريكِ النقطتيْنِ A وَ B اللتيْنِ تظهرانِ عليْها.



- أَجِدُ معادلةَ أحدِ المنحنياتِ التي تظهرُ في الصورةِ، وذلكَ بتحديدِ بعضِ النقاطِ عليْهِ باستعمالِ أيقونةِ A منْ شريطِ الأدواتِ.
- أكتبُ الصيغةَ FitPoly ({C, D, E, F, G, H, I, J, K, L},n) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ ↵ ليظهرَ منحنًى فوقَ الصورةِ، ومعادلةٌ في شريطِ الإدخالِ.



- أستعملُ المُؤشِّرَ فوقَ المعادلةِ لضبطِ المنحنى الظاهرِ، بحيثُ ينطبقُ تمامًا على المنحنى الذي في الصورةِ.
- أُكرِّرُ الخطواتِ السابقةَ لتحديدِ معادلاتِ المنحنياتِ الأُخرى التي تظهرُ في الصورةِ.

3 أكتبُ معَ أفرادِ مجموعتي نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ منحنييْنِ متقاطعيْنِ في كلِّ صورةٍ، ثمَّ نختارُ إحدى هذهِ الأنظمةِ لنحُلَّها جبريًّا، ثمَّ نتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ بإظهارِ نقاطِ تقاطعِ المنحنييْنِ في برمجيةِ جيوجبرا.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةٌ بالصورِ (نستعملُ خاصيةَ طباعةِ الشاشةِ).
- بعضُ الصعوباتِ التي واجهْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومعلومةٌ جديدةٌ تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ.

معمل برمجية جيوجبرا

حَلُّ أنظمةِ المعادلاتِ بيانيًّا

Solving Systems of Equations Graphically

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيلِ أنظمةِ المعادلاتِ، وحَلِّها بيانيًّا.

أستعملُ الرابطَ www.geogebra.org /download لتثبيتِ نسخةِ GeoGebra Classic 6 منْ هذهِ البرمجيةِ على جهازِ الحاسوبِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ النسخةِ المتوافرةِ في شبكةِ الإنترنتْ منْ دونِ حاجةٍ إلى تثبيتِها في جهازِ الحاسوبِ عنْ طريقِ الرابطِ الإلكترونيِّ: www.geogebra.org /classic

نشاطٌ

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

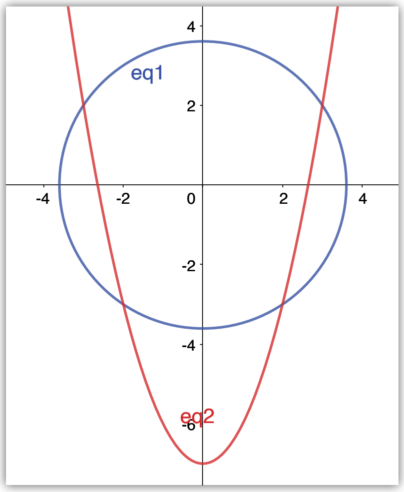
$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y = 7$$

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + y^2 = 13$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x	$\square^2$	+	y	$\square^2$	=	1	3	↵



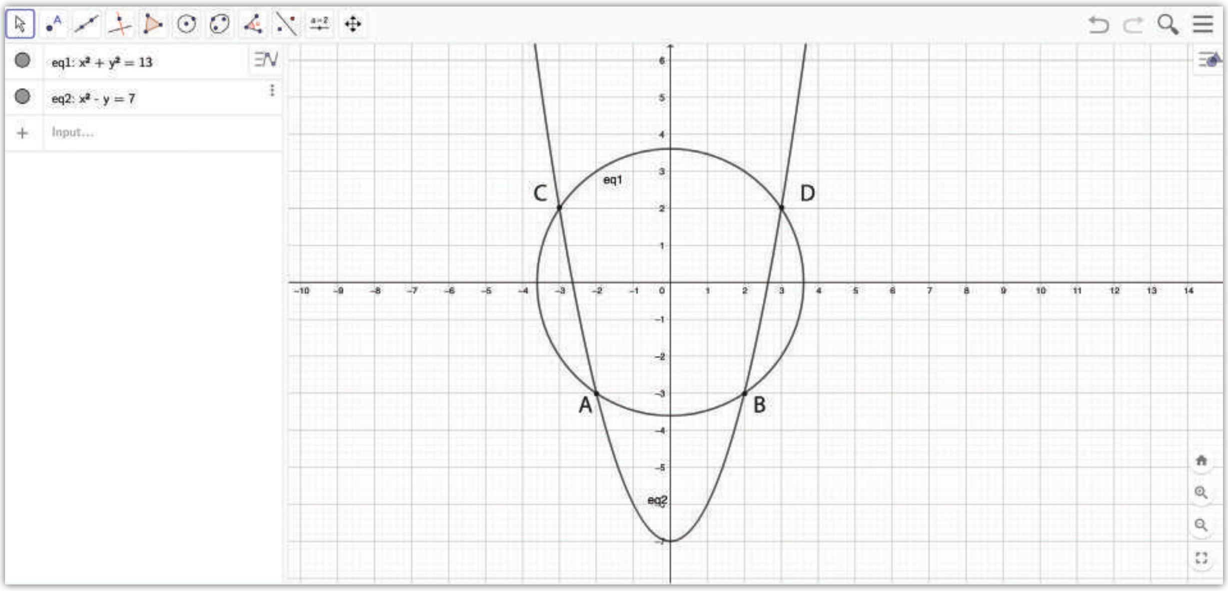
الخطوةُ 2: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 - y = 7$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x	$\square^2$	−	y	=	7	↵

أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في أربعِ نقاطٍ؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلاتِ.

الخطوةُ 3: أُحــدِّدُ إحداثياتِ نقاطِ التقاطعِ بينَ منحنيَي المعادلتيْنِ. أختارُ Intersect منْ شــريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على منحنيَي المعادلتيْنِ، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ.



إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ هيَ: $(-3, 2), (3, 2), (2, -3), (-2, -3)$؛ ما يعني أن حلولَ نظامَ المعادلاتِ هيَ:

الحَلُّ الأولُ: $x = -3, y = 2$ **الحَلُّ الثاني:** $x = 3, y = 2$

الحَلُّ الثالثُ: $x = 2, y = -3$ **الحَلُّ الرابعُ:** $x = -2, y = -3$

أتدرب

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:

1) $y = x - 4$
$2x^2 + 3y^2 = 12$

2) $y = x^2$
$x^2 + 2y^2 = 34$

3) $x + y = 16$
$x^2 - y^2 = 20$

4) $3x + 4y = 1$
$y = x^2 + 5$

5) $y = 6x$
$x^2 + y^2 = 9$

6) $x = 7 + y$
$y = 3x^2 - 2$

الدرسُ 1

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ
Solving a System of Linear and Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخلَ إحدى المدنِ، في حينَ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخرَ منحنيًا داخلَ المدينةِ نفسِها. هلْ يتقاطعُ هذانِ الطريقانِ أمْ لا؟

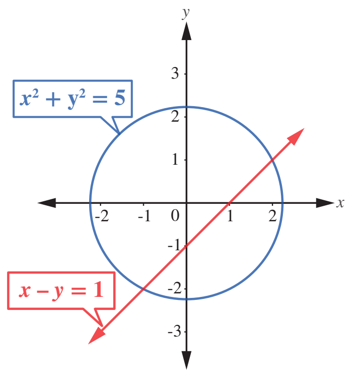
يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ، وذلكَ بكتابةِ أحدِ المُتغيِّرَيْنِ في المعادلةِ الخطِّيةِ بدلالةِ الآخرِ، ثمَّ تعويضِهِ في المعادلةِ التربيعيةِ وحَلِّها.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 5$$

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra)، أوْ حاسبةٍ بيانيةٍ، لتمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ كما في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ. أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في نقطتيْنِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:



الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ الخطِّيَّةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

$x - y = 1$	المعادلةُ الخطِّيةُ
$y = x - 1$	بكتابةِ y بدلالةِ x

الْخُطْوَةُ 2 أُعوِّضُ قيمةَ y من المعادلةِ الخطِّيَّةِ في المعادلةِ التربيعيَّةِ:

$x^2 + (x - 1)^2 = 5$	بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ
$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$	بفكِّ القوسيْنِ
$2x^2 - 2x - 4 = 0$	بالتبسيطِ
$x^2 - x - 2 = 0$	بالقسمةِ على 2

الْخُطْوَةُ 3 أحلُّ المعادلةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

بالتحليلِ $(x+1)(x-2)=0$

خاصيَّةُ الضربِ الصفريِّ $x+1=0 \quad \text{or} \quad x-2=0$

بحلِّ المعادلتَينِ $x=-1 \quad \text{or} \quad x=2$

الْخُطْوَةُ 4 أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y :

الحالةُ الأولى: عندما $x=-1$:

$y=x-1$

بتعويضِ $x=-1$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y=-1-1=-2$

الحَلُّ الأولُ: $(x,y)=(-1,-2)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الأوّلِ، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(-1,-2)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x-y=-1-(-2)=1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2+y^2=(-1)^2+(-2)^2=1+4=5$ ✓

الحالةُ الثانيةُ: عندما $x=2$:

بتعويضِ $x=2$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y=2-1=1$

الحَلُّ الثاني: $(x,y)=(2,1)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الثاني، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(2,1)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x-y=2-1=1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2+y^2=(2)^2+(1)^2=4+1=5$ ✓

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$2x+y=12$

$y=x^2+5x-6$

يوجدُ حَلّانِ لنظامِ المعادلاتِ في المثالِ السابقِ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامُ معادلاتٍ لهُ حَلٌّ واحدٌ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

أَتذكَّرُ

توجدُ طرائقُ عِدَّةٌ لِحَلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ، منْها: التحليلُ إلى العواملِ، والقانونُ العامُّ.

إرشادٌ

يجبُ تعويضُ الحَلِّ في كلتا معادلتَيِ النظامِ؛ لكيلا يكونَ الحَلُّ غيرَ صحيحٍ، بحيثُ يُحقِّقُ إحدى المعادلتَيْنِ منْ دونِ الأُخرى.

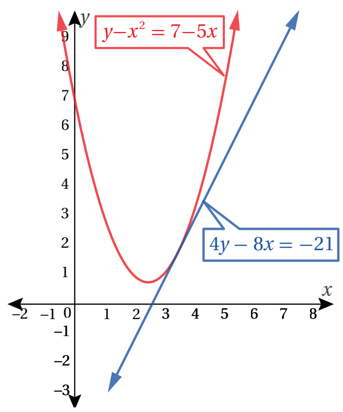
مثال 2

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$

$$4y - 8x = -21$$

عندَ تمثيلِ معادلتَي النظامِ في المســتوى الإحداثيِّ نفسِــهِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ كَمــا في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حلًّا واحــدًا فقطْ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:



الْخُطْـوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ الخطِّيَّةَ بالصورةِ القياسيَّةِ (بدلالةِ y).

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$4y - 8x = -21$
بجمعِ $8x$ للطرفَينِ	$4y = 8x - 21$
بقسمةِ الطرفَينِ على 4	$y = 2x - 5.25$

الْخُطْـوَةُ 2 أُعوِّضُ قيمةَ y منَ المعادلةِ الخطِّيَّةِ في المعادلةِ التربيعيَّةِ:

المعادلةُ التربيعيَّةُ	$y - x^2 = 7 - 5x$
بتعويضِ قيمةِ y منَ المعادلةِ الخطِّيَّةِ	$(2x - 5.25) - x^2 = 7 - 5x$
بالتبسيطِ	$x^2 - 7x + 12.25 = 0$

الْخُطْـوَةُ 3 أحلُّ المعادلةَ الناتجةَ:

لِحلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ : $a = 1, b = -7, c = 12.25$

القانونُ العامُّ	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بالتعويضِ	$= \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12.25)}}{2(1)}$
بالتبسيطِ	$= \dfrac{7 \pm \sqrt{49-49}}{2} = 3.5$

الْخُطْـوَةُ 4 أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y :

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$y = 2x - 5.25$
بتعويضِ $x = 3.5$	$= 2(3.5) - 5.25$
بالتبسيطِ	$= 1.75$

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ الزوجُ المُرتَّبُ $(3.5, 1.75)$

أَتذكَّرُ

أستعملُ القانونَ العامَّ لحلِّ المعــادلاتِ التــي يَصعُبُ تحليلُها.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$y = 2x + 1$$
$$x^2 + y^2 = 10$$

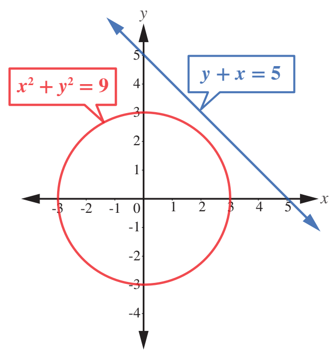
لاحظْتُ في المثاليْنِ السابقيْنِ وجودَ حَلٍّ أوْ حَلَّيْنِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكنْ، هلْ توجدُ أنظمةُ معادلاتٍ ليسَ لها حَلٌّ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتي:

$$\boldsymbol{y + x = 5}$$
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 9}$$

يَتبيَّنُ منَ التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ لا يتقاطعانِ في أيِّ نقطةٍ؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:



المعادلةُ الخطِّيةُ $y + x = 5$

بكتابةِ x بدلالةِ y $x = 5 - y$

بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ التربيعيةِ $(5-y)^2 + y^2 = 9$

بإيجادِ المفكوكِ $25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$

بالتبسيطِ $2y^2 - 10y + 16 = 0$

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 2, b = -10, c = 16$، وبالتعويضِ في صيغةِ المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (-10)^2 - 4(2)(16) = -28$$

قيمةُ المُميِّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنهُ لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أَتذكَّرُ

يعتمدُ عددُ جذورِ المعادلةِ وأنواعُها علـى قيمةِ المُميِّزِ الذي يُرمَزُ إليهِ بالرمزِ (Δ)، حيثُ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

أَتذكَّرُ

لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عددٌ سالبٌ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور:

$$x - y = 0$$
$$y = x^2 + 3x + 2$$

عددُ حلولِ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ

نتيجةٌ

لأيِّ نظـامٍ يتكوَّنُ منْ معادلـةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ، تكونُ واحدةٌ مـنَ العباراتِ الآتيةِ صحيحةً:

1 وجودُ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. 2 وجودُ حَلٍّ واحدٍ فقطْ. 3 عدمُ وجودِ حَلٍّ.

توجدُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لِحَلِّ الأنظمةِ التي تتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

مثال 4: من الحياة

سَجّادةٌ مستطيلةُ الشكلِ مصنوعةٌ يدويًّا، مجموعُ بُعْدَيْها 7 m، وطولُ قُطْرِها 5 m. أَجِدُ كُلًّا منْ طولِها، وعرضِها.

لإيجادِ بُعْدَي السَّجّادةِ، أكتبُ نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ المسألةَ، ثمَّ أَحُلُّهُ.

أَفترضُ أنَّ طولَ السَّجّادةِ هوَ x، وأنَّ عرضَها هوَ y، وبما أنَّ مجموعَ بُعْدَي السَّجّادةِ هوَ 7 m، فإنَّ: $x + y = 7$، وبما أنَّ قُطْرَ السَّجّادةِ هوَ 5 m، فإنَّ (باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$، إذنْ، أصبحَ لديْنا نظامٌ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

$$y + x = 7$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

والآنَ، سأَحُلُّ النظامَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيةُ	$x + y = 7$
بكتابةِ y بدلالةِ x	$y = 7 - x$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$x^2 + (7 - x)^2 = 25$
بالتبسيطِ	$2x^2 - 14x + 24 = 0$
بالقسمةِ على 2	$x^2 - 7x + 12 = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ إلى العواملِ:

بالتحليلِ	$(x - 4)(x - 3) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x - 4 = 0$ or $x - 3 = 0$
بحَلِّ كلِّ معادلةٍ	$x = 4$ or $x = 3$

معلومةٌ

قدْ تستغرقُ صناعةُ السَّجّادةِ اليدويةِ الصغيرةِ 4 أشهرٍ منَ العملِ المُتواصِلِ.

أَتذكَّرُ

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ التحليلِ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ.

أُعوِّضُ قيمَ x في المعادلةِ الخطِّيةِ لإيجادِ قيمِ y:

بتعويضِ قيمةِ $x = 3$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 7 - 3$

قيمةُ y الأولى $y = 4$

بتعويضِ قيمةِ $x = 4$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 7 - 4$

قيمةُ y الثانيةُ $y = 3$

إذن، حَلُّ النظامِ هوَ: $(4, 3)$ وَ $(3, 4)$.

بما أنَّ طولَ السَّجّادةِ أكبرُ منْ عرضِها، فإنَّ الطولَ هوَ $4\,m$، والعرضَ هوَ $3\,m$

أتحقق من فهمي

مزرعةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها $50\,m$، ومحيطُها $140\,m$. أَجِدُ بُعْدَيِ المزرعةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 + 4x - 2$
$y + 6 = 0$

2) $y = x^2 + 6x - 3$
$y = 2x - 3$

3) $y = x^2 + 4$
$x - y = -1$

4) $y = x^2 + 4x - 1$
$7x + 2y = 6$

5) $y = x^2 + 4x + 7$
$y - 3 = 0$

6) $y = x^2 - 2x + 4$
$y = x$

7) $x^2 + y^2 = 34$
$2x - y = 1$

8) $y = x^2 + 2x + 1$
$y = 0$

9) $x^2 + y^2 = 4$
$x + y = 5$

10) $x^2 + y^2 = 10$
$x - y = 2$

11) $x^2 + (y - 1)^2 = 17$
$x = 1$

12) $2x + 3y = 5$
$2y^2 + xy = 12$

13) **بركةٌ:** بركةُ ماءٍ قاعدتُها مستطيلةُ الشكلِ، ومحيطُها $16\,m$، والفرقُ بينَ مربَّعَيْ بُعْدَيْها $16\,m^2$. أَجِدُ بُعْدَيْها.

14) **أعدادٌ:** أَجِدُ العددَيْنِ الموجبَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما 12، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 24

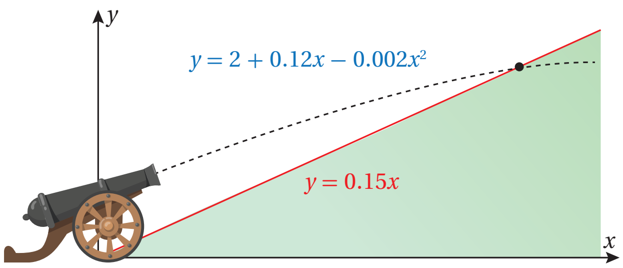
15) **هندسةٌ:** دائرتانِ مجموعُ محيطَيْهِما $12\pi\,cm$، ومجموعُ مساحتَيْهِما $20\pi\,cm^2$. أَجِدُ قُطْرَ كلٍّ منْهُما.

16 **أعمارٌ**: قالَتْ شيماءُ: «عُمْري أكبرُ بأربعِ سنواتٍ منْ عُمْرِ أخي ريّانَ، ومجموعُ مُربَّعَيْ عُمْرَيْنا هوَ 346 عامًا». ما عُمْرُ شيماءَ؟

17 **لوحةٌ**: لوحةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُها يساوي مِثْلَيْ عرضِها، وطولُ قُطْرِها $\sqrt{1.25}$ m، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفةُ المترِ الطولي الواحدِ منْهُ بالدينارِ 2.25 . أَجِدُ تكلفةَ الإطارِ.

18 **زراعةٌ**: قسَّمَ فيصلٌ 41m^2 منْ مزرعتِهِ إلى منطقتيْنِ مربَّعتَيِ الشكلِ، ثمَّ زرعَهُما بمحصولَيِ الطماطمِ والبطاطا. إذا زادَ بُعْدُ المنطقةِ المزروعةِ بالطماطمِ مترًا واحدًا على بُعْدِ المنطقةِ المزروعةِ بالبطاطا، فما مساحةُ المنطقةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ؟

19 تُمثِّلُ المعادلةُ $y = 2 + 0.12x - 0.002x^2$ مسارَ قذيفةِ مِدفعٍ تمَّ إطلاقُها نحوَ تلَّةٍ. أجِدُ إحداثيّاتِ النقطةِ التي اصطدمتْ عندَها القذيفةُ بسفحِ التلَّةِ؛ إذا علمتُ أنَّهُ مستقيمٌ ومعادلتُهُ $y = 0.15x$.

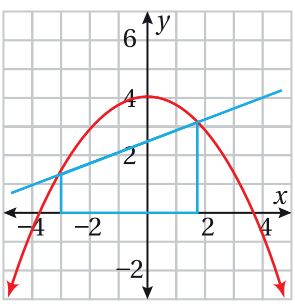


مهاراتُ التفكيرِ العليا

20 **تبريرٌ**: صُمِّمَتْ نافورةٌ بصورةٍ يخرجُ منْها الماءُ بحسبِ العلاقةِ: $y + x^2 = 10$، إذا وُضِعَتْ وحدةُ إنارةٍ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ: $y = 12 + x$، فهلْ يصلُ ماءُ النافورةِ إلى وحدةِ الإنارةِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

21 **تحدٍّ**: إذا علمْتُ أنَّ المستقيمَ الذي معادلتُهُ: $y = 3x + p$ يقطعُ المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، فما قيمةُ p؟

22 **تحدٍّ**: أجِدُ مساحةَ شبهِ المنحرفِ المرسومِ باللونِ الأزرقِ أسفلَ مُنحنى الاقترانِ $y = -0.3x^2 + 4$ في الشكلِ المجاورِ.



الدرسُ 2

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ
Solving a System of Two Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.

مسألةُ اليومِ استعملَتْ خبيرةُ تسويقِ المعادلتيْنِ التربيعيتيْنِ الآتيتيْنِ لتمثيلِ مقدارِ كلٍّ منَ العرضِ والطلبِ لسلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغْيَةَ تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ معَ الطلبِ في السوقِ، حيثُ يُمثِّلُ x سعرَ الوحدةِ، ويُمثِّلُ y عددَ الوحداتِ المبيعةِ. هلْ يُمكِنُني مساعدةُ الخبيرةِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ؟

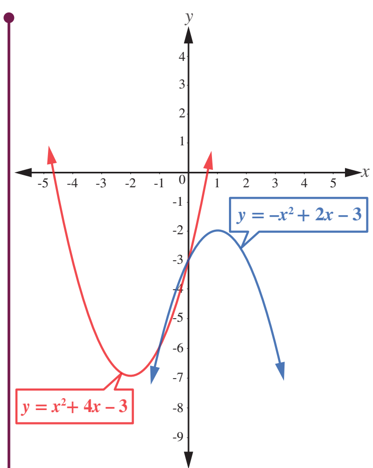
$$y = x^2 + 6x$$
$$y = -x^2 + 24x$$

لِحَلِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، تُساوى أوَّلًا المعادلتانِ بعضُهُما ببعضٍ لتكوينِ معادلةٍ تربيعيةٍ واحدةٍ.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$\boldsymbol{y = x^2 + 4x - 3}$$
$$\boldsymbol{y = -x^2 + 2x - 3}$$



عندَ تمثيلِ معادلتَيِ النظامِ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ أنَّ منحنييْهِما يتقاطعانِ في نقطتيْنِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$2x^2 + 2x = 0$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

$2x(x + 1) = 0$ بتحليلِ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ

$x = 0 \quad$ or $\quad x = -1$ حَلّا المعادلةِ

لإيجادِ قيمةِ y، أُعوِّضُ قيمتَيْ x في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ أيضًا.

الحالةُ الأولى: إذا كانَتْ $x = 0$:

بتعويضِ $x = 0$ في إحدى المعادلتيْنِ $y = -(0)^2 + 2(0) - 3$

بالتبسيطِ $y = -3$

إذنْ، الحَلُّ الأولُ للنظامِ هوَ: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالةُ الثانيةُ: إذا كانَتْ $x = -1$:

بتعويضِ $x = -1$ في إحدى المعادلتيْنِ $y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$

بالتبسيطِ $y = -6$

إذنْ، الحَلُّ الثاني للنظامِ هوَ: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ: $(0, -3)$, $(-1, -6)$.

إرشادٌ

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x وَ y في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$y = -x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 + 2x - 3$

قدْ يتقاطعُ منحنيا معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وعندئذٍ يكونُ لنظامِ المعادلاتِ الذي تُكوِّنُهُ هاتانِ المعادلتانِ حَلٌّ واحِدٌ.

مثال 2: من الحياة

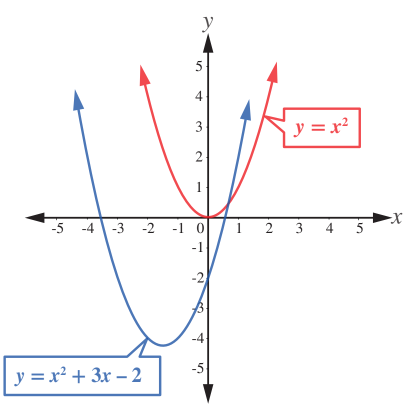
سباقاتٌ: في أحدِ سباقاتِ المراحلِ، سلكَ مُتسابِقٌ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ التربيعيةُ: $y = x^2$ في حينِ سلكَ مُتسابِقٌ آخرُ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ: $x^2 + 3x = y + 2$. أَجِدُ نقطةَ التقاطعِ بينَ مسارَيِ المُتسابِقيْنِ.

أكتبُ المعادلةَ $x^2 + 3x = y + 2$ بالصورةِ القياسيَّةِ (بدلالةِ y) .

بطرحِ 2 منَ الطرفَينِ $x^2 + 3x - 2 = y$

باستعمالِ الخاصيَّةِ التبديليَّةِ $y = x^2 + 3x - 2$

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ بينَ منحنييْهما؛ ما يعني أنَّ لنظامِ المعادلاتِ حَلًّا واحدًا. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

معلومةٌ

تُجرى سباقاتُ المراحلِ على مدارِ أيامٍ، وهيَ تقامُ على مساراتٍ متنوعةٍ منْ حيثُ التضاريسُ، مثلِ: الطرقِ المُنبسِطةِ، والطرقِ الجبليةِ.

بمساواةِ المعادلتيْنِ $x^2 + 3x - 2 = x^2$

بطرحِ x^2 منْ كلا الطرفيْنِ $x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ $3x - 2 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

بعدَ ذلكَ أجدُ قيمةَ y، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

بتعويضِ $x = \frac{2}{3}$ في المعادلةِ الثانيةِ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$

بالتبسيطِ $y = \frac{4}{9}$

إذنْ، حَـلُّ نظـامِ المعـادلاتِ هـوَ: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}$، ونقطـةُ تقاطـعِ المنحنييْـنِ هـيَ: $(\frac{2}{3} , \frac{4}{9})$.

معلومةٌ

رياضـةُ التزلّجِ هـيَ إحدى أسـرعِ الرِّياضاتِ غيرِ الآليةِ؛ فقدْ تصلُ سرعةُ المُتزلِّجِ إلى 200 km/h

أتحقق من فهمي

تزلّـجٌ: تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 + 2x$ مسـارَ مُتزلِّـجٍ على الجليدِ، في حيـنِ تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخرَ. أبحثُ عنْ جميعِ النقاطِ التي قدْ يصطدمُ عندَها المُتزلِّجانِ إذا لمْ يكونا حذريْنِ.

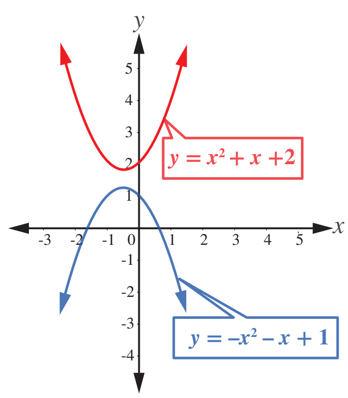
عرضْنا في المثاليْنِ السابقيْنِ أنظمةَ معادلاتٍ تربيعيةٍ لها حَلّانِ أوْ حَلٌّ واحدٌ. ولكنْ، هلْ يوجدُ دائمًا حَلٌّ للنظامِ المُكوَّنِ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؟ أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y = x^2 + x + 2$$
$$y = -x^2 - x + 1$$

عندَ تمثيـلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشـكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ عدمُ وجـودِ نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ لإيجادِ قيمةِ x:

بمساواةِ المعادلتيْنِ $x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$

بالتبسيطِ $2x^2 + 2x + 1 = 0$

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا.

قيمُ المعاملاتِ هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويضِ في صيغةِ المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمةُ المُميِّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنْ ثَمَّ، فلا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

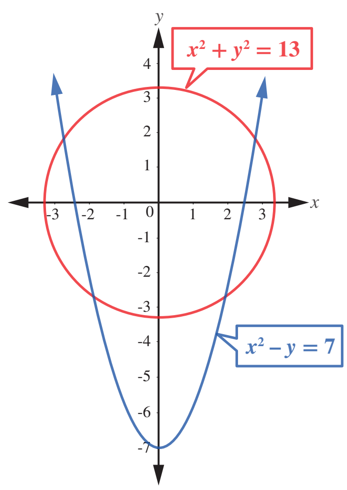
$$\boldsymbol{y = x^2 + 4}$$
$$\boldsymbol{y = -x^2 + 2}$$

عرضْنا في الأمثلةِ السابقةِ أنظمةً لها حَلّانِ، أوْ حَلٌّ واحدٌ، أوْ ليسَ لها حَلٌّ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامٌ مُكوَّنٌ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، لهُ ثلاثةُ حلولٍ، أوْ أربعةٌ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثُمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 13}$$
$$\boldsymbol{x^2 - y = 7}$$



عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ 4 نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلتيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

يظهرُ المُتغيِّرُ x في كلتا المعادلتيْنِ بالقوَّةِ نفسِها؛ لذا يُمكِنُني استعمالُ الحذفِ للتخلُّصِ منْ هذا المُتغيِّرِ، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ التي تحوي مُتغيِّرًا واحدًا هوَ y:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$(-)\quad x^2 - y = 7$$

$$y^2 + y = 6 \qquad \text{بالطرحِ}$$

$$y^2 + y - 6 = 0 \qquad \text{بطرحِ 6 منْ كلا الطرفيْنِ}$$

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أوِ التحليلِ:

$$(y + 3)(y - 2) = 0 \qquad \text{بالتحليلِ}$$

إذنْ: $y = -3$, $y = 2$

أُعوِّضُ قيمتَيْ y في إحدى معادلتَيِ النظامِ لإيجادِ قيمِ x:

$$x^2 = -3 + 7 \qquad \text{بتعويضِ قيمةِ } y = -3$$

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 2$

إذنْ، $x = 2 , x = -2$

بتعويضِ قيمةِ $y = 2$ $x^2 = 2 + 7 = 9$

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 3$

إذنْ، توجدُ أربعةُ حلولٍ للنظامِ، هيَ: $(-3 , -2)$ ، وَ$(-3 , 2)$، وَ $(3 , 2)$ ، وَ$(3 , -2)$.

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ هذهِ الحلولِ بتعويضِها في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$3y - x^2 = -12$$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = 2x^2 + x - 5$, $y = -x^2 - 2x - 5$

2) $y = x^2 - 4x + 1$, $y = -2x^2 - 4$

3) $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 3$

4) $y = x^2 + x + 1$, $y = -x^2 + x - 2$

5) $y = -x^2 + 5x$, $y = x^2 - 5x$

6) $y = x^2$, $y = x^2 + x + 6$

7) $y = -x^2 + 6x + 8$, $y = -x^2 - 6x + 8$

8) $x^2 + y^2 = 16$, $y = x^2 - 5$

9) $5x^2 - 2y^2 = 18$, $3x^2 + 5y^2 = 17$

10) أَجِدُ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتيْنِ:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

11) عددانِ، مجموعُ مربَّعَيْهِما 89، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 39، ما هذانِ العددانِ؟

12 **فيزياءُ:** قُذِفَتْ كرتانِ رأسيًّا في الوقتِ نفسِهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ: $y = -2t^2 + 12t + 10$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةٍ، وكانَتِ المعادلةُ: $y = -2t^2 + 4t + 42$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَّ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظةِ.

13 **ثقافةٌ ماليةٌ:** بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ.

14 أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$x^2 + xy = 6$$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

15 **تبريرٌ:** قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

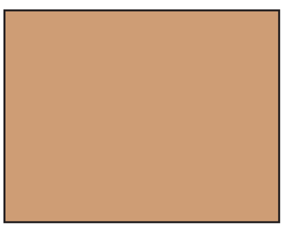
هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ.

17 **تحدٍّ:** قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ $50\ \text{m}$، ومساحتُهُ $1200\ \text{m}^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ.

18 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ $(5, 3)$ أحدَ حلولِهِ.

19 **تحدٍّ:** قطعةٌ منْ ورقٍ مُقَوًى مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $216\ \text{cm}^2$، ثُنيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ \text{cm}^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ.



الدرسُ 3

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ
Simplifying Exponential Expressions

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الأسسِ النسبيةِ وتبسيطُها.

المصطلحاتُ الأُسُّ النسبيُّ.

مسألةُ اليومِ حديقةٌ مربعةُ الشكلِ، طولُ نصفِ ضلعِها مُعطًى بالحدِّ الجبريِّ $2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}z^{4}$، ما مساحتُها بالوحداتِ المربَّعةِ؟

مراجعةُ المفاهيمِ **التحويلُ مِنَ الصيغةِ الأسّيّةِ إلى الصيغةِ الجذريةِ**

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n وَ m عددينِ صحيحينِ موجبينِ $(n > 1)$، فإنَّ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$، إلّا إذا كانتْ $a < 0$، وَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ الجذرَ يكونُ غيرَ معرَّفٍ.

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{27})^1$ بكتابةِ المقدارَ في صورةِ الجذرِ الثالثِ

$= \sqrt[3]{3\times3\times3}$ بتحليلِ العددِ 27 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= 3$

2 $4^{\frac{3}{2}}$

$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3$ بكتابةِ المقدارِ في صورةِ الجذرِ التربيعي مرفوعًا للأُسِّ 3

$= (\sqrt{2\times2})^3$ بتحليلِ العددِ 4 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (2)^3$

$= (2\times2\times2)$ تعريفُ الأسسِ

$= 8$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ: $a^n = \underbrace{a\times a\times a\times a\times \dots \times a}_{n \text{ مرة}}$، ويُسمّى a الأساسَ، وَ n الأُسَّ.

3 $(81)^{-\frac{5}{4}}$

الصورةُ الجذريةُ $(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$

بتحليلِ العددِ 81 إلى عواملِهِ الأوليةِ $= (\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3})^{-5}$

$= (3)^{-5}$

تعريفُ الأُسِّ السالبِ $= \frac{1}{(3)^5}$

تعريفُ الأسسِ $= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}$

$= \frac{1}{243}$

4 $(-8)^{\frac{7}{3}}$

الصورةُ الجذريةُ $(-8)^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^{7}$

بتحليلِ العددِ 8− إلى عواملِهِ الأوليةِ $= (\sqrt[3]{-2 \times -2 \times -2})^{7}$

$= (-2)^7$

$= -128$

أتذكَّرُ

لأيِّ عـددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا لأسٍ سـالبٍ ويقعُ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $32^{\frac{1}{5}}$ b) $9^{\frac{5}{2}}$ c) $(16)^{-\frac{5}{4}}$

مراجعةُ المفاهيمِ

خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها

لأيِّ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ a وَ b وعددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n، فإنَّ:

1. ضربُ القوى $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. قوَّةُ القوى $(a^n)^m = a^{n \times m}$
3. قوَّةُ ناتجِ الضربِ $(ab)^n = a^n \times b^n$
4. قسمةُ القوى $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
5. قوَّةُ ناتجِ القسمةِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$

تنطبقُ خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها التي درسْتُها سابقًا للأسسِ الصحيحةِ على **الأسسِ النسبيةِ** (rational exponents) أيضًا.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}}$

$y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ ضربُ القوى

$= y^{-1}$ بجمعِ الأسسِ

$= \frac{1}{y}$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

2 $(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}$ بالتبسيطِ

$= x^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

3 $(a \times b^2)^{\frac{3}{2}}, a > 0$

$(a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2\times\frac{3}{2}}$ قوّةُ ناتجِ الضربِ

$= \sqrt{a^3} \times b^3$ الصورةُ الجذريةُ

4 $\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}}$

$\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$ قسمةُ القوى

$= z^{\frac{6}{8}}$ بالتبسيطِ

$= z^{\frac{3}{4}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[4]{z^3}$ الصورةُ الجذريةُ

أَتعلَّمُ

تنقسمُ الجذورُ بحسبِ دليلِ الجذرِ إلى نوعيْنِ، هما: الجذورُ الفرديةُ، والجذورُ الزوجيةُ. مثلاً:

جذورٌ فرديةٌ:

$\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{x^2+1}$

جذورٌ زوجيةٌ:

$\sqrt{18}$, $\sqrt[6]{9+3y}$

5 $\left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$\left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \dfrac{x^{4\times\frac{3}{4}}}{y^{2\times\frac{3}{4}}}$ قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

$= \dfrac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$ قوَّةُ القوى

$= \left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$ الصورةُ الجذريةُ

6 $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ تعريفُ الأُسِّ النسبيِّ

$= x^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$ قسمةُ القوى

$= x^{\frac{2}{15}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[15]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$

d) $\dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$

e) $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

f) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$

تبسيطُ العباراتِ الأسّيّةِ

مفهومٌ أساسيٌّ

تكونُ العبارةُ الأُسِّيَّةُ في أبسطِ صورةٍ إذا:

1 ظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً، وكانَتِ الأسسُ جميعُها موجبةً.

2 لَمْ تتضمَّنِ العبارةُ قوَّةَ القوى.

3 كانَتِ الكسورُ والجذورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

مثال 3

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيّةٌ موجبةٌ:

1 $\dfrac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$

$\dfrac{6x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)\times\left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right)\times\left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right)$ قسمةُ القوى

$= 3x^4y^{-1}$ بالتبسيطِ

$= \dfrac{3x^4}{y}$ تعريفُ الأُسِّ السالبُ

2 $\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$

$\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} = \dfrac{3\times 6}{9}\times\dfrac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}}\times\dfrac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ ضربُ القوى

$= 2\times\dfrac{x}{x^1}\times\dfrac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ بالتبسيطِ

$= 2x^{1-1}y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}}$ بقسمةِ القوى

$= 2x^0y^{\frac{3}{2}}$ تعريفُ الأُسِّ الصفريِّ

$= 2\sqrt{y^3}$ الصورةُ الجذريةُ

3 $\sqrt[3]{64x^{12}y^3}$

$\sqrt[3]{64x^{12}y^3} = (64x^{12}y^3)^{\frac{1}{3}}$ صورةُ الأُسِّ النسبيِّ

$= (64)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{12}{3}}(y)^{\frac{3}{3}}$ قوّةُ ناتجِ الضربِ

$= 4x^4y$ بالتبسيطِ

أَفهمُ

إذا كانَتْ $m = n$ فإنَّ:

$1 = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-n} = a^0$

إذنْ، $a^0 = 1$.

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيّةٌ موجبةٌ:

a) $\dfrac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$

b) $\dfrac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$

c) $\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $512^{\frac{1}{9}}$ 2 $125^{\frac{2}{3}}$ 3 $36^{-\frac{1}{2}}$

4 $(-243)^{\frac{6}{5}}$ 5 $(25)^{\frac{3}{2}}$ 6 $(-64)^{\frac{7}{3}}$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7 $z^{-\frac{4}{2}} \times z$ 8 $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$ 9 $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$

10 $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$ 11 $\dfrac{\sqrt{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$ 12 $\dfrac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

13 $\left(\dfrac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$ 14 $\dfrac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{\left(3x^2y^{\frac{5}{2}}\right)\left(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5}\right)}$ 15 $\dfrac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$

16 $\dfrac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{\left(27p^3q\right)^{-\frac{1}{3}}}$ 17 $\dfrac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$ 18 $\dfrac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$

مهارات التفكير العليا

19 **تحدٍّ**: أَجِدُ قيمةَ المقدارِ الأُسِّيِّ الآتي:

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$

20 **تبريرٌ**: تتضاعفُ عيِّنةٌ في المختبرِ 3 مَرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا علمْتُ أنَّ فيها 7300 خليةٍ بكتيريةٍ، فكمْ خليةً سيصبحُ فيها بعدَ مرورِ 5 أسابيعَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

تحدٍّ: أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

21 $\dfrac{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}}{r^2 + r^3}$ 22 $\dfrac{y^{-\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}}}$ 23 $\dfrac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$

24 **تبريرٌ**: أُقارِنُ بينَ العددَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعتمادًا على خصائصِ الأسسِ، منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ. أُبرِّرُ إجابتي.

الدرسُ
4

حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ
Solving Exponential Equation

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ، حَلُّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ الأُسِّيَّةُ.

مسألةُ اليومِ تستغرقُ الزنبقةُ المائيةُ 26 يومًا لتنموَ بصورةٍ كاملةٍ. إذا علمْتُ أنَّ الزهرةَ تنمو يوميًّا بمقدارِ الضِّعْفِ عنِ اليومِ السابقِ، فكمْ يومًا يَلزمُها لتصلَ إلى نصفِ مرحلةِ النموِّ؟

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ (exponential equation) هيَ معادلةٌ تتضمَّنُ قوًى أُسسُها مُتغيِّراتٌ، ويتطلَّبُ حَلُّها كتابةَ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ المقارنةَ بينَ أُسَّيِ الطرفيْنِ، وَفقَ القاعدةِ التي نصُّها: "إذا تساوَتْ قوَّتانِ لهُما الأساسُ نفسُهُ، فإنَّ أُسَّيْهِما متساويانِ."

مثال 1

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1 $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$ — $5^2 = 25$

$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$ — الأساسانِ متساويانِ

$3x + 2 = 2x - 2$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = -4$ — بحَلِّ المعادلةِ

2 $8^x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$

$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$ — قوَّةُ القوى

$2^{3x} = 2^{-x+1}$ — ضربُ القوى

$3x = -x + 1$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = \frac{1}{4}$ — بحَلِّ المعادلةِ

أَبحثُ: قوَّةُ العددِ 2 أوْ 2^x مهمةٌ جدًّا في علمِ الحاسوبِ، لماذا؟

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$

b) $9^{x} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

c) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

توجدُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لِحَلِّ المعادلاتِ الأسيةِ.

مثال 2: من الحياة

قدْ يحتوي الغِرامُ الواحدُ منَ التربةِ علــى نحوِ 10^{10} خلايا بكتيريةٍ مختلفةِ الأنواعِ.

بكتيريــا: تمثِّلُ المعادلــةُ $y = 3(4^{\frac{x}{2}})$ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ x ســاعةً في تجرِبةٍ مخبريةٍ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ في العينةِ 192 خليةً؟

$y = 3(4^{\frac{x}{2}})$ المعادلةُ المعطاةُ

$192 = 3(4^{\frac{x}{2}})$ بتعويضِ $y = 192$ في المعادلةِ

$64 = (4^{\frac{x}{2}})$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

$4^{3} = (4^{\frac{x}{2}})$ $64 = 4^{3}$

$3 = \frac{x}{2}$ بمساواةِ الأُسُسِ

$x = 6$ بحلِّ المعادلةِ الخطّيةِ الناتجةِ

إذنْ، يصبحُ في العيّنةِ 192 خليةً بعدَ 6 ساعاتٍ.

أتحقق من فهمي

ازدادَ اســتعمالُ المواقــعِ التعليميةِ بما نسبتُهُ 900% منذُ عامِ 2000م.

تعليمٌ: يزدادُ عددُ الاشتراكاتِ في موقعٍ تعليميٍّ على الإنترنتْ عامًا بعدَ عامٍ، وتُستعملُ المعادلةُ $y = 2(3^{2x})$ لحســابِ عددِ الاشــتراكاتِ y بالألوفِ بعدَ مرورِ x عامًا مِنْ إطلاقِ الموقعِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الاشتراكاتِ في الموقعِ 162 ألفَ اشتراكٍ؟

يُمكِنُنــي حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ أُسِّــيَّتيْنِ بكتابةِ طرفَيِ المعادلــةِ الأولى في صورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِــهِ، ثمَّ مساواةِ أُسَّيِ الطرفيْنِ، ثمَّ تكرارِ ذلكَ في المعادلةِ الثانيةِ، فيتكوَّنُ نظامٌ منْ معادلتيْنِ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور:

$$4^{2x} \times 2^{y} = 64$$
$$9^{x} \times 3^{y} = 81$$

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ الأولى	$4^{2x} \times 2^{y} = 64$
بتحليلِ العددَيْنِ 4 وَ 64 إلى عواملِهِما الأوليةِ	$(2^2)^{2x} \times 2^{y} = 2^6$
قوَّةُ القوى	$2^{4x} \times 2^{y} = 2^6$
ضربُ القوى	$2^{4x+y} = 2^6$
بمساواةِ الأسس	$4x + y = 6$

بتطبيقِ الخطواتِ نفسِها على المعادلةِ الثانيةِ تنتجُ المعادلةُ الخطِّيَّةُ $2x + y = 4$

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الخطِّيَّ الناتجَ بالحذفِ:

$$\begin{array}{rr} & 4x + y = 6 \\ (-) & 2x + y = 4 \\ \hline & 2x = 2 \end{array}$$

بطرحِ المعادلتيْنِ	$2x = 2$
بالقسمةِ على 2	$x = 1$
بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ الثانيةِ	$4(1) + y = 6$
	$4 + y = 6$
بحَلِّ المعادلةِ	$y = 2$

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = 1 , y = 2$

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطِّيِّ بالحذفِ، أوِ التعويضِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاورِ:

$$\frac{4^{x}}{256^{y}} = 64$$
$$3^{2x} \times 9^{y} = 243$$

قَدْ لا يكونُ مِنَ الممكنِ كتابةُ أحدِ طرفَيِ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ على صورةِ قوةٍ للأساسِ نفسِه، عندئذٍ يمكنُ حلُّ المعادلةِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةٍ حاسوبيةٍ أَوْ آلةٍ حاسبةٍ بيانيةٍ.

مثال 4 أَحُلُّ المعادلةَ الأُسّيّةَ الآتيةَ $5 = 3^{x-1}$ بيانيًّا.

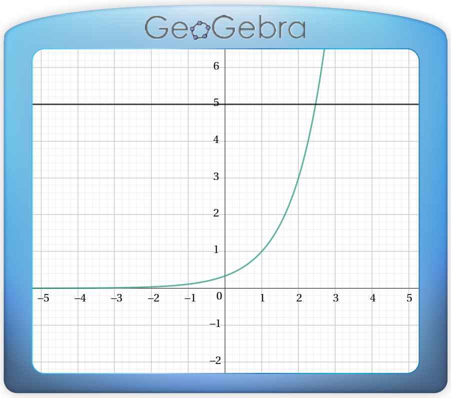
ألاحظُ أنَّهُ ليسَ مِنَ الممكنِ كتابةُ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، لذلكَ أَحُلُّ المعادلةَ بيانيًّا.

الْخُطْـوَةُ 1 أكتبُ نظامَ معادلاتٍ باستعمالِ طرفَي المعادلةِ.

المعادلةُ 1 $y = 5$

المعادلةُ 2 $y = 3^{x-1}$

الْخُطْـوَةُ 2 أمثّلُ المعادلتَينِ بيانيًّا في المستوى نفسِهِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجِبرا.



الْخُطْـوَةُ 3 أجـدُ إحداثيَّـيْ نقطـةِ تقاطعِ المنحنيَينِ.

أختارُ أيقونةَ Intersect مِنْ شـريطِ الأدواتِ، ثُمَّ أنقرُ على كلا المنحنيَينِ فيظهرُ إحداثيّا نقطةِ التقاطعِ $(2.46, 5)$

إذنْ، حلُّ المعادلةِ هُوَ $x = 2.46$

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلتَينِ الأُسّيتَينِ الآتيتَينِ بيانيًّا:

a) $3^x = -6^{x+2} + 1$ **b)** $5 = 4^{x+1}$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1. $64 = (32)^{3-x}$
2. $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$
3. $128^{x-5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
4. $64^{7x+1} = \frac{2}{16^{4x-3}}$
5. $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = (11)^{x+7}$
6. $\left(\sqrt{7}\right)^{4x+5} = \left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$
7. $9^{x^2} \times 27^{x^2} = 243$
8. $5^{2x} \times 25^{x} = 125$
9. $2^{x^2} \times 2^{6x} = \frac{1}{32}$

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

10 $5^{y} = 25^{x-3}$

$125^{y} = 25^{x-1}$

11 $3^{y} = 3^{2x+y}$

$27^{y} = 27^{x+3}$

12 $5^{2x} \times 25^{y} = 125$

$\frac{8^{x}}{2^{y}} = 16$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$

$\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$

$8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^{2}$

15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$

$2^{m^2} \times 2^{n} = 64$

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

16 $4^{x+3} = 6$

17 $2^{x} = 1.8$

18 $4 = 8^{x}$

19 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 10$

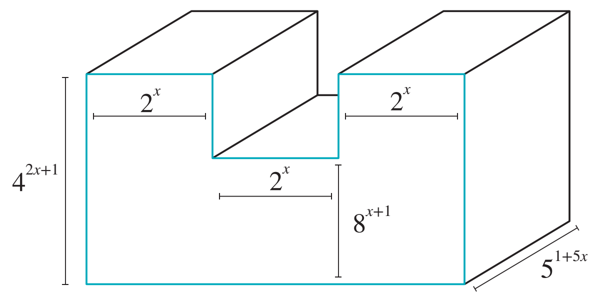
20 $2^{-x-3} = 3^{x+1}$

21 $5^{x} = -4^{x+4}$

22 **تصويرٌ:** تُستعمَلُ المعادلةُ $y = 2^{x+2}$ لحسابِ مقاسِ ورقةٍ y بعدَ تكبيرِها بنسبةِ 100% عددَ x مِنَ المرّاتِ، مقارنةً بمقاسِها الأصليِّ، باستعمالِ آلةٍ ناسخةٍ. كَمْ مرّةً يجبُ تكبيرُ صورةٍ ليصبحَ مقاسُها 32 ضعفَ مقاسِها الأصليِّ؟

23 **بكتيريا:** يُمثِّلُ المقدارُ 3^{t-2} عددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةٍ مخبريةٍ بعدَ مرورِ t منَ الساعاتِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الخلايا البكتيريةِ 2187 خليةً؟

24 **هندسةٌ:** أكتبُ في أبسطِ صورةٍ عبارةً أُسِّيَّةً تُمثِّلُ حجمَ الشكلِ المجاورِ.



مهارات التفكير العليا

25 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ: $2 + 2^{x} = 1$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

26 **تبريرٌ:** أَحُلُّ المعادلةَ: $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$ ، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.

27 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيَ:

$$2^{x} + 3^{y} = 10$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ تُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$3x + y = 6$$

a) $(1, 3)$ b) $(0, 2)$
c) $(2, 0)$ d) $(-2, -2)$

2 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ يُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$y = x^2 - 5x + 6$$
$$y = -x^2 + 2x + 3$$

a) $(0, 3)$ b) $(1, 2)$
c) $(2, 0)$ d) $(3, 0)$

3 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ يُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$3^{5x} \times 9^y = 27$$
$$5^{3x} \times 5^y = 25$$

a) $(-1, -1)$ b) $(1, 1)$
c) $(-1, 1)$ d) $(1, -1)$

4 يمثّلُ $x = -1$ حلًّا للمعادلةِ الأُسّيّةِ:

a) $5^{2x+1} = 25$ b) $3^{1+x} = 81$
c) $7^{3-2x} = 49$ d) $4^{2-x} = 64$

5 المقدارُ الجبريُّ الــذي يجبُ وضعُه في المربَّعِ الفارغِ للمعادلةِ $\left(\frac{2y}{x}\right)^2 = \frac{8x^2y^3}{\square}$ هوَ:

a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$
c) $2xy$ d) x^2y^2

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

6 $y = 4x$
$y = 5 - x^2$

7 $y - x = 15$
$x^2 + y^2 = 64$

8 $y = x^2 - 4x + 5$
$y = -x^2 + 5$

9 $y = -x^2 - x + 12$
$y = x^2 + 7x + 12$

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي،

$$x - 2y = 1$$
$$x^2 - y^2 = c$$

فأَجِدُ:

10 حَلَّ هذا النظامِ، علمًا بأنَّ $c = 8$

11 جميعَ قيمِ c الممكنةِ التي لا تجعلُ للنظامِ أيَّ حَلٍّ.

12 أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $3 - 7x < 6x^2$ بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y = 3 - 7x$$
$$y = 6x^2$$

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيّةٌ موجبةٌ:

13 $\dfrac{2}{2^{3} \times 2^{-4}}$

14 $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

15 $\dfrac{(16p^{4}q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^{2}q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$

16 $\dfrac{(27a^{\frac{3}{2}}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^{4}b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

17 $3^{a}x^{b} = \dfrac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$

18 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^{2}} = x^{a}$

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيّةِ الآتيةِ:

19 $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$

20 $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{c-\frac{5}{2}}$

21 $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$

22 $500 = \dfrac{2^{\frac{1}{2}-x}}{5^{2x}}$

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

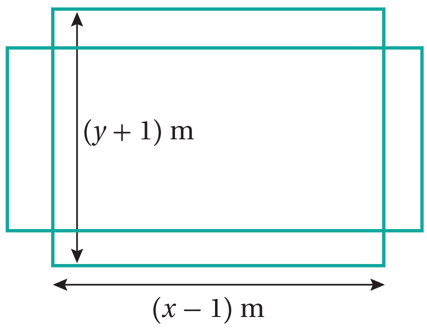
23 $36^{x+4} = 6^{y}$
$36^{y} = 36^{x+6}$

24 $5^{2x+4} = 5^{y-3}$
$7^{y-x} = 49$

25 عددانِ مجموعُ مربعَيْهما 85 ومربعُ مجموعِهما 121، ما هُما؟

26 يمثلُ كلٌّ منْ X, Y عددَينِ مفقودَينِ في الرقْمِ السّرّيِّ $XY1290$. إذا كانَ مجموعُ العددَينِ المفقودَينِ 12 ومجموعُ مربعَيهما يساوي 90، فأجدُ قيمةَ كلٍّ منهُما.

27 **تنسٌ:** ملعبُ تنسٍ طولُهُ x مترًا وعرضُهُ y مترًا ومِساحتُهُ 224 m^2، إذا تمّت زيادةُ عرضه بمقدارِ 1 m وتقليل طوله بمقدارِ 1 m فازدادَتْ مساحتُهُ بمقدارِ 1 m^2 كما في الشكلِ الآتي، فأجدُ أبعادَ ملعبِ التنسِ.



تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

28 أَجِدُ جميعَ قيمِ p التي تجعلُ منحنى المعادلةِ الخطّيّةِ $y = 2x + p$ لا يقطعُ منحنى المعادلةِ $y = x^{2} + 3x - 1$.

29 أجدُ الأعدادَ الصحيحةَ الموجبةَ a,b,c إذا كانَ $(ab^{c})^{3} = 27b^{21}$

30 أجدُ العددَينِ اللذَينِ ناتجُ جمعِ القوةِ الخامسةِ لأحدِهما مَعَ مربعِ العددِ الثاني يساوي 268

الوحدةُ 2

الدائرةُ
Circle

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ الدائرةُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ ظهورًا على سطحِ الأرضِ، بلْ في جميعِ الكونِ. فهيَ تظهرُ جليًّا في بؤبؤِ العينِ، وفي الفاكهةِ، وجذوعِ الأشجارِ، وغيرِ ذلكَ منَ المخلوقاتِ. وقدِ استفادَ الإنسانُ منَ الخصائصِ الفريدةِ لهذا الشكلِ المُعقَّدِ في مجالاتٍ عِدَّةٍ، مثلِ: الهندسةِ، والصناعةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ إيجادَ محيطِ الدائرةِ، ومساحتِها.
✓ تمييزَ حالاتِ تطابُقِ المثلثاتِ، وتشابُهِها.
✓ إيجادَ مجموعِ قياسِ زوايا كلٍّ منَ المثلثِ، والشكلِ الرباعيِّ.
✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ في المستوى الإحداثيِّ، وإحداثياتُ نقطةِ المنتصفِ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- حسابَ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.
- العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرةِ، والإفادةَ منْها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ.
- كتابةَ معادلةِ الدائرةِ، وإيجادَ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.
- العلاقةَ بينْ دائرتيْنِ، وماهيةَ المماسّاتِ المشتركةِ.

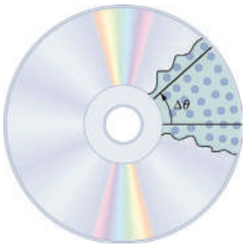
مشروعُ الوحدةِ

استعمالاتٌ علميةٌ لخصائصِ الدائرةِ

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنِ استعمالاتٍ علميةٍ لخصائصِ الدائرةِ، ووصفِها، ونمذجتِها.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1 أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في مكتبةِ المدرسةِ (أوْ في شبكةِ الإنترنتْ) عنْ نموذجٍ علميٍّ أوْ حياتيٍّ تُستعمَلُ فيهِ إحدى الخصائصِ الآتيةِ للدائرةِ:

- العلاقةُ بينَ الزوايا المركزيةِ والزوايا المحيطيةِ.
- العلاقةُ بينَ الزاويةِ المماسِّيةِ والزاويةِ المحيطيةِ المُشترِكةِ معَها في القوسِ نفسِهِ.
- الدوائرُ المُتماسَّةُ.
- معادلةُ الدائرةِ.

2 أكتبُ في مستندِ معالجِ النصوصِ (وورد) فقرةً أَصِفُ فيها النموذجَ الحياتيَّ أوِ العلميَّ الذي اخترتُهُ، مُحدِّدًا خصائصَ الدائرةِ الموجودةِ في هذا النموذجِ، ثمَّ أُفسِّرُها.

3 أُضيفُ إلى المستندِ صورًا توضيحيةً للنموذجِ، ذاكرًا مصدرَ المعلوماتِ والصورِ.

4 أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لرسمِ شكلٍ يُوضِّحُ استعمالَ الخاصيةِ في النموذجِ، وأضعُ عليْهِ قياساتِ الزوايا وأطوالَ الأضلاعِ جميعَها. وهذهِ بعضُ الإرشاداتِ التي قدْ تُساعِدُ على رسمِ الشكلِ التوضيحيِّ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:

- لرسمِ دائرةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Circle with Center through Point منْ شريطِ الأدواتِ.
- لإيجادِ قياسِ زاويةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Angle ، ثمَّ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ، وضلعِ انتهائِها.
- لإيجادِ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ، أنقرُ على أيقونةِ cm Distance or Length ، ثمَّ على القطعةِ المستقيمةِ.
- لرسمِ مماسٍّ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، أُحدِّدُ أولًا النقطةَ بالنقرِ على أيقونةِ A Point ، ثمَّ أيقونةِ Tangents .

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، بما في ذلكَ صورةُ الشكلِ الذي رُسِمَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
- معلومةٌ جديدةٌ تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومُقترَحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

الدرسُ 1

أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها
Chords, Diameters and Tangents of a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الوتـرِ، والقُطْرِ، والممـاسِّ، وخصائصِ كلٍّ منهـا، والعلاقاتِ التي تربـطُ بعضَها ببعضٍ، وتوظيفُ ذلكَ في إيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ وقياساتِ زوايا مجهولةٍ.

المصطلحاتُ الدائرةُ، مركزُ الدائرةِ، الوترُ، القوسُ، القُطْرُ، نصفُ القُطْرِ، المماسُّ، نقطةُ التَّماسِّ، القاطعُ.

مسألةُ اليومِ في حديقةِ منـزلِ عبيرَ طاولـةٌ دائريةٌ، وهيَ تريدُ عمـلَ فتحةٍ عندَ مركزِها لتثبيـتِ عمودٍ يحمل مِظلَّةٍ بها. كيـفَ يُمكِنُ لعبيرَ تحديدُ مركزِ الطاولةِ؟

الدائرةُ (circle) هيَ المحلُّ الهندسيُّ لنقطةٍ تتحرَّكُ في المستوى، بحيثُ تظلُّ على البُعْدِ نفسِهِ عنْ نقطةٍ مُحدَّدةٍ تُسـمّى **مركزَ الدائرةِ** (center). أمّا **الوترُ** (chord) فهوَ قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بينَ نقطتيْنِ على الدائرةِ، ويُسـمّى الوترُ الذي يمرُّ بمركزِ الدائـرةِ **القُطْرَ** (diameter). ويُطلَقُ على القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ مركزَ الدائرةِ بنقطةٍ عليْها اسمُ **نصفِ القُطْرِ** (radius).

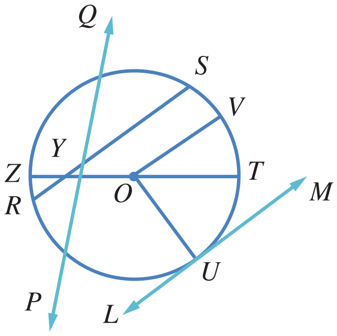
القاطعُ (secant) هوَ مسـتقيمٌ يقطعُ الدائرةَ في نقطتيْنِ، ويحوي وترًا فيها. أمّا المستقيمُ الذي يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ فيُسـمّى **المماسَّ** (tangent). ويُطلَقُ على نقطةِ التقاءِ المماسِّ بالدائرةِ اسمُ **نقطةِ التَّماسِّ** (point of tangency).

رموزٌ رياضيةٌ

- ترمزُ $\overleftrightarrow{LM}$ إلى المسـتقيمِ LM.
- ترمـزُ LM إلـى طـولِ القطعةِ المسـتقيمةِ. أمّا $\overline{LM}$ فترمزُ إلـى القطعةِ المستقيمةِ نفسِها.

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



1 مماسًّا للدائرةِ.

$\overleftrightarrow{LM}$

2 أربعةَ أنصافِ أقطارٍ.

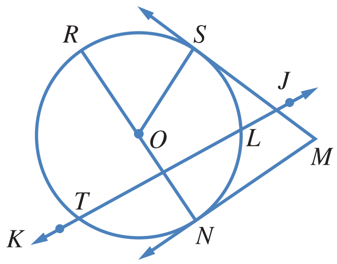
$\overline{OV}$, $\overline{OT}$, $\overline{OZ}$, $\overline{OU}$

3 قُطْرًا للدائرةِ.
$\overline{ZT}$

4 وترًا للدائرةِ.
$\overline{SR}$, $\overline{ZT}$

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



a) قاطعًا للدائرةِ.

b) وترًا للدائرةِ.

c) مماسًّا للدائرةِ.

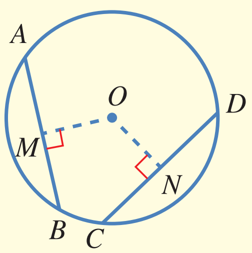
نظرياتٌ

أوتارُ الدائرةِ

1 الوترانِ المُتطابِقانِ يبعدانِ المســافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ. والوترانِ اللذانِ يبعدانِ المســافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ مُتطابِقانِ.

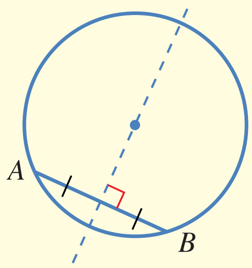
مثالٌ: بما أنَّ $AB = CD$، فإنَّ $OM = ON$.

وإذا كانَ $OM = ON$، فإنَّ $AB = CD$.



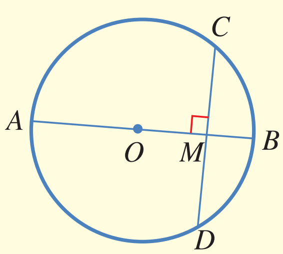
2 المُنصِّفُ العموديُّ لأيِّ وترٍ في الدائرةِ يمرُّ بمركزِها.

مثالٌ: في الشــكلِ المجاورِ، يقعُ مركــزُ الدائرةِ على الخطِّ المُتقطِّعِ.



3 نصفُ القُطْرِ العموديُّ على وترٍ في دائرةٍ يُنصِّفُ ذلكَ الوترَ.

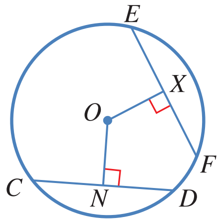
مثالٌ: بما أنَّ $\overline{AB} \perp \overline{CD}$، فإنَّ $MC = MD$. وإذا مرَّ القُطْرُ بمنتصفِ وترٍ فإنَّهُ يعامدُهُ.



رموزٌ رياضيةٌ

يــدلُّ الرمزُ $\perp$ علــى تعامُدِ قطعتيْنِ، أوْ مستقيميْنِ.

مثال 2

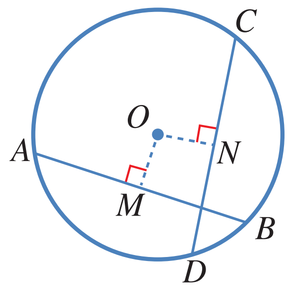


في الشكلِ المجاورِ، $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $ON = OX$ ، وَ $EF = 8$ cm، فما طولُ $\overline{NC}$؟

ON وَ OX يُمثِّلانِ بُعْدَي الوترَيْنِ CD وَ EF عنْ مركزِ الدائرةِ، وهما مُتطابِقانِ.

$ON = OX$	منْ معطياتِ السؤالِ
$CD = EF$	إذا تساوى بُعْدا وترَيْنِ عنْ مركزِ الدائرةِ، فهما مُتطابِقانِ
$NC = \frac{1}{2} CD$	نصفُ القُطْرِ العموديِّ على وترٍ يُنصِّفُهُ
$= \frac{1}{2} EF$	الوترانِ $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ مُتطابِقانِ
$= \frac{1}{2}(8) = 4$ cm	بالتعويضِ

أتحقق من فهمي



في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $OM = ON$، وَ $CN = 12$ cm، فما طولُ $\overline{AB}$؟

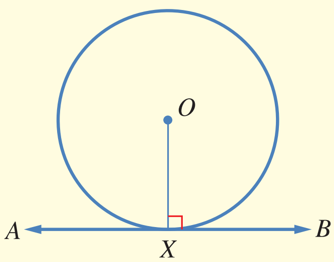
نظرياتٌ

مماسّاتُ الدائرةِ

1 مماسُّ الدائرةِ يكونُ عموديًّا على نصفِ القُطْرِ المرسومِ منْ نقطةِ التَّماسِّ.

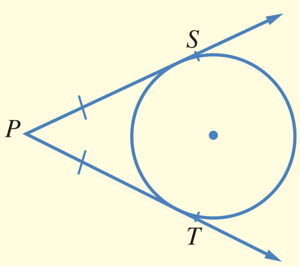
مثالٌ: نصفُ القُطْرِ $\overline{OX}$ عموديٌّ على المماسِّ $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overline{OX} \perp \overleftrightarrow{AB}$



2 القطعتانِ المماسّيتانِ المرسومتانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها لهُما الطولُ نفسُهُ.

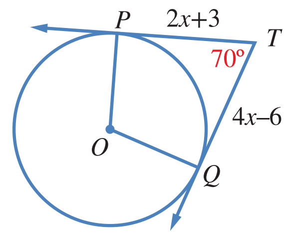
مثالٌ: $\overline{PS}$ وَ $\overline{PT}$ لهُما الطولُ نفسُهُ: $PS = PT$.



رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ $\overleftrightarrow{PT}$ على مماسِّ الدائرةِ. أمّا $\overline{PT}$ فيدلُّ على القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطةِ P ونقطةِ التَّماسِّ، ويدلُّ الرمزُ PT على طولِ هذهِ القطعةِ.

مثال 3



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{TP}$ وَ $\overleftrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

1 أَجِدُ قيمةَ x .

قطعتانِ مماسّيتانِ مرسومتانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها	$TP = TQ$
بالتعويضِ	$2x + 3 = 4x - 6$
بإضافةِ $6 - 2x$ إلى الطرفيْنِ	$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$
بالتبسيطِ	$9 = 2x$
	$x = \frac{9}{2}$

2 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ POQ.

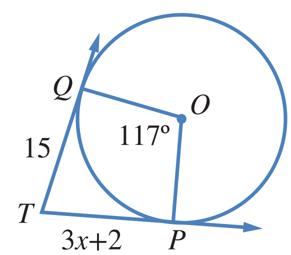
أفترضُ أنَّ قياسَ الزاويةِ POQ هوَ y:

مماسُّ الدائرةِ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ في نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle OQT = m\angle OPT = 90^\circ$
مجموعُ قياسِ الزوايا الداخليةِ للشكلِ الرباعيِّ هو 360°	$90^\circ + 70^\circ + 90^\circ + y = 360^\circ$
بالتبسيطِ	$250^\circ + y = 360^\circ$
بطرحِ 250° منَ الطرفيْنِ	$y = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$

رموزٌ رياضيةٌ

يرمزُ الحرفُ m في $m\angle OQT$ إلى قياسِ الزاويةِ OQT.

أتحقق من فهمي

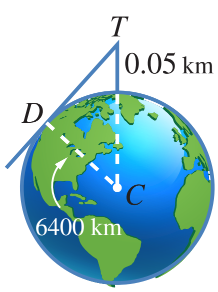


في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{TP}$ وَ $\overrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

a) أَجِدُ قيمةَ x .

b) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ PTQ .

مثال 4: من الحياة



أبراجٌ: يرتفعُ برجُ مراقبةٍ **50 m** عنْ مستوى الأرضِ. ما أبعدُ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطْرِها **6400 km** تقريبًا؟

أرسمُ مُخططًا يُمثِّلُ المسألةَ.

الدائرةُ تُمثِّلُ الأرضَ، والنقطةُ T تُمثِّلُ قمَّةَ البرجِ، والمماسُّ $\overleftrightarrow{TD}$ يُمثِّلُ خطَّ البصرِ، ونقطةُ التَّماسِّ D هيَ أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ. ارتفاعُ البرجِ $50 \text{ m} = 0.05 \text{ km}$

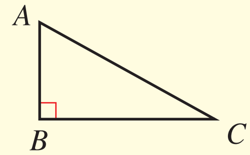
المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ عندَ نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle TDC = 90^\circ$
نظريةُ فيثاغورس	$(CT)^2 = (TD)^2 + (CD)^2$
بالتعويضِ	$(6400 + 0.05)^2 = (TD)^2 + (6400)^2$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$40960640.0025 = (TD)^2 + 40960000$
بطرحِ 40960000 منَ الطرفيْنِ	$640.0025 = (TD)^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$25.3 \approx TD$

إذنْ، المسافةُ التي تُمثِّلُ أبعدَ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ هيَ: 25 km تقريبًا.

أتذكَّرُ

نظريةُ فيثاغورس: إذا كانَ المثلثُ ABC قائمَ الزاويةِ في B، فإنَّ:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

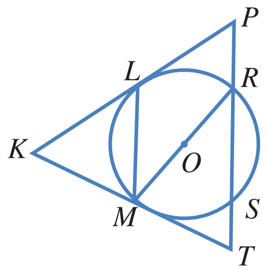


أتحقق من فهمي

برجُ مراقبةٍ: تبعدُ أقصى نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ برجِ مراقبةٍ مسافةَ 32 km عنْهُ. ما ارتفاعُ قمَّةِ البرجِ عنْ سطحِ الأرضِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطرِها 6400 km تقريبًا.

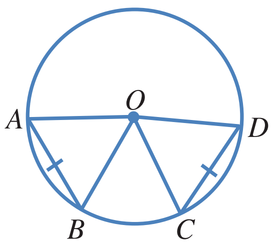
أتدرب وأحل المسائل

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:

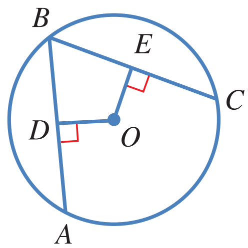


1. نصفَيْ قُطْريْنِ.
2. وتريْنِ.
3. مماسَّيْنِ.
4. قاطعًا.

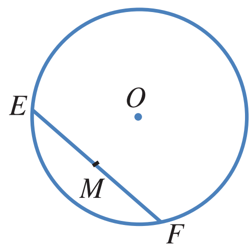
$\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ لهُما الطولُ نفسُهُ في دائرةٍ مركزُها O:



5. ما نوعُ المثلثِ AOB؟ أُبرِّرُ إجابتي.
6. هلِ المثلثانِ AOB وَ COD مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
7. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ OAB هوَ 65°، فما قياسُ الزاويةِ COD؟



8 في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ وترانِ مُتطابِقانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $OE = x + 9$ ، وَ $OD = 3x - 7$، فما قيمةُ x؟

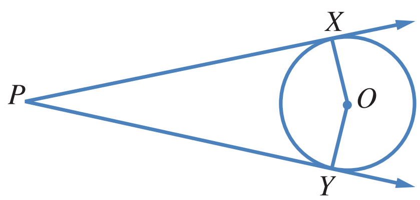


في الشكلِ المجاورِ، $\overline{EF}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها O، والنقطةُ M هيَ منتصفُ الوترِ $\overline{EF}$:

9 هلِ المثلثانِ EOM، وَ FOM مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

10 هلِ الزاويةُ EMO قائمةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

11 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ MOF هوَ 72°، فما قياسُ الزاويةِ MEO؟ أُبرِّرُ إجابتي.

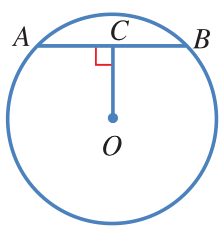


في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{PX}$ وَ $\overrightarrow{PY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

12 هلْ قياسُ الزاويةِ PXO هوَ 90°؟ أُبرِّرُ إجابتي.

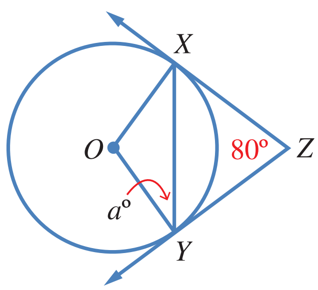
13 أُبيِّنُ أنَّ المثلثيْنِ XPO وَ YPO مُتطابِقانِ.

14 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ XPO هوَ 17°، فما قياسُ الزاويةِ XOY؟



15 في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وترٌ طولُهُ 6 cm في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ACO هوَ 90°، وَ $OC = 4$ cm، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟

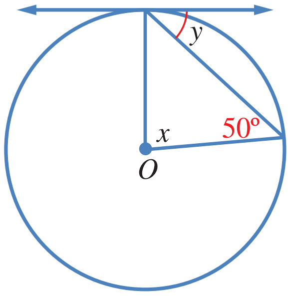
16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.



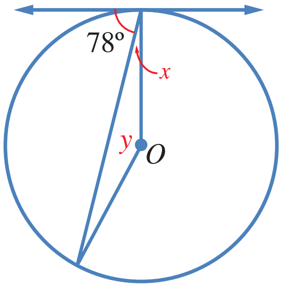
17 في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{ZX}$ وَ $\overrightarrow{ZY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ a.

يَظهرُ في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ x وَ y في كلِّ حالةٍ.

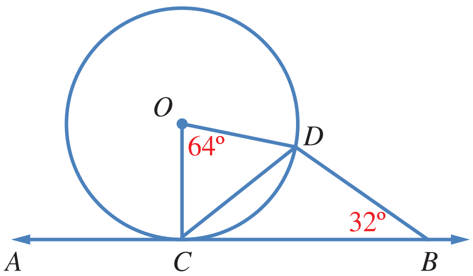
19



18



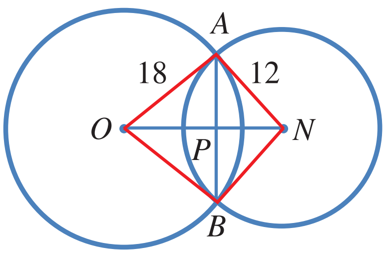
20 في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O في النقطةِ C. لماذا يُعَدُّ المثلثُ BCD مُتطابِقَ الضلعيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



21 كمْ مماسًّا يُمكِنُ أنْ يُرسَمَ للدائرةِ منْ نقطةٍ عليْها، ومنْ نقطةٍ خارجَها، ومنْ نقطةٍ داخلَها؟ أُبرِّرُ إجابتي.

مهارات التفكير العليا

22 **تحدٍّ:** $\overline{AB}$ وترٌ مشتركٌ بينَ دائرتيْنِ متقاطعتيْنِ، وهوَ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{ON}$ الواصلةِ بينَ مركزيْهِما. إذا كانَ $AB = 14$ cm، فما طولُ $\overline{ON}$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



23 **برهانٌ:** $\overline{AB}$ ، وَ $\overline{CD}$ وترانِ متساويانِ في دائرةٍ مركزُها N. أُثبِتُ أنَّ لهُما البُعْدَ نفسَهُ عنِ النقطةِ N.

24 **تبريرٌ:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها N في النقطةِ A، وطولُ نصفِ قُطْرِها 3 cm، وَ $BA = 5$ cm. قالَتْ سارةُ إنَّ $BN = 4$ cm؛ لأنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هلْ قولُ سارةَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ
Arcs and Sectors

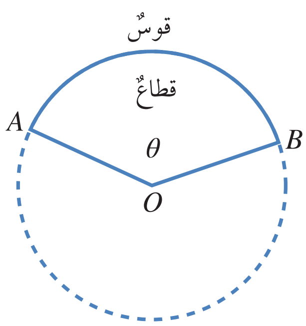
فكرةُ الدرسِ حسابُ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ، وحَلُّ مسائلَ تتعلَّقُ بهما.

المصطلحاتُ القوسُ، القطاعُ.

مسألةُ اليومِ أَعَدَّ سعيدٌ فطيرةَ بيتزا في وعاءٍ دائريٍّ طولُ قُطْرِهِ 24 cm. وبعدَ أنْ خبزَها أحدثَ فيها شَقَّيْنِ منَ المركزِ إلى الطرفِ، بحيثُ كانَ قياسُ الزاويةِ بينَهُما 45°. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ مساحةِ الجزءِ الذي قطعَهُ سعيدٌ منَ الفطيرةِ؟

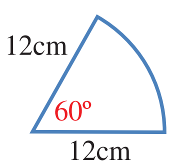
القوسُ (arc) هوَ جزءٌ منْ الدائرةِ مُحدَّدٌ بنقطتيْنِ عليْها. و**القطاعُ** (sector) هوَ الجزءُ المحصورُ بينَ قوسٍ منْها ونصفَي القُطْرَيْنِ اللذيْنِ يمرّانِ بطرفَي القوسِ.

تُمثِّلُ الزاويةُ AOB في الشكلِ المجاورِ زاويةَ القطاعِ الذي يُعَدُّ كسرًا منَ الدائرةِ. ويُمكِنُ استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لكتابةِ هذا الكسرِ، وذلكَ بقسمةِ قياسِ الزاويةِ على الدورةِ الكاملةِ؛ أيْ: $\frac{\theta}{360^\circ}$، حيثُ θ قياسُ زاويةِ القطاعِ.



مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ:

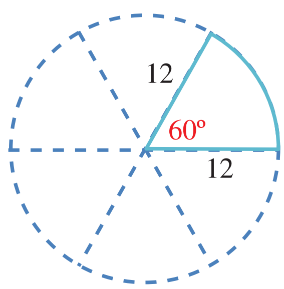


1 **طولَ القوسِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).**

القطاعُ كسرٌ منَ الدائرةِ، وهذا الكسرُ هوَ $\frac{1}{6} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$. وبما أنَّ طولَ قُطْرِ الدائرةِ 24 cm، فإنَّ طولَ محيطِها: $24 \times \pi = 24\pi$ cm

إذنْ، طولُ القوسِ يساوي $\frac{1}{6}$ طولِ محيطِ الدائرةِ؛ أيْ:

$24\pi \div 6 = 4\pi$ cm

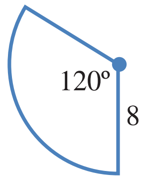


2 مساحةَ القطاعِ.

مساحةُ الدائرةِ هيَ: $\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

مساحةُ القطاعِ تساوي $\frac{1}{6}$ مساحةِ الدائرةِ؛ أيْ: $144\pi \div 6 = 24\pi \text{ cm}^2$

أتحقق من فهمي



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ طولَ القوسِ، ومساحةَ القطاعِ الدائريِّ.

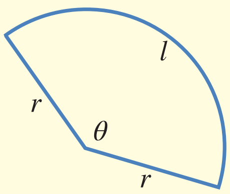
تعرَّفْنا في المثالِ الســابقِ أنَّ القطاعَ هوَ كسرٌ منَ الدائرةِ، وأنَّهُ يُمكِنُ دائمًا استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لحسابِ طولِ القوسِ ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ — طولُ قوسِ القطاعِ الدائريِّ ومساحتهِ

إذا كانَ قيــاسُ زاويــةِ القطاعِ θ^o، وطولُ نصفِ قُطْـرِ الدائرةِ r، وطولُ القوسِ l، ومساحةُ القطاعِ A، فإنَّ:

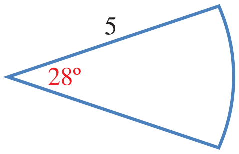
$$l = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$$



مثال 2

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 28^o، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 5 وحداتِ طولٍ:

$$l = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$$ قانونُ طولِ القوسِ

$$l = \frac{28^o}{360^o} \times \pi \times 2 \times 5$$ بتعويضِ $\theta = 28^o, r = 5$

$$\approx 2.4$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، طولُ هذا القوسِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 2.4 وحدةِ طولٍ.

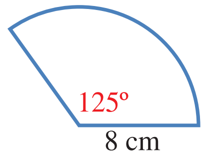
$$A = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$$ قانونُ مساحةِ القطاعِ

$$= \frac{28^o}{360^o} \times \pi \times 5^2$$ بتعويضِ $r = 5, \theta = 28^o$

$$\approx 6.1$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، مساحةُ هذا القطاعِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: 6.1 وحدةٍ مربعةٍ.

أتحقق من فهمي



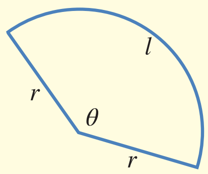
أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

محيطُ القطاعِ الدائريِّ

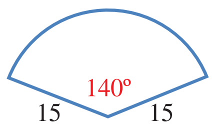
محيطُ القطاعِ الدائريِّ (L) هوَ المسافةُ حولَ القطاعِ، وهيَ تساوي طولَ قوسِ القطاعِ، مضافًا إليْهِ مِثْلا طولِ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$



مثال 3

أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ في الشكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 140°، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 15 وحدةَ طولٍ:

$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$ قانونُ محيطِ القطاعِ

$= (\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15) + 2 \times 15$ بتعويضِ $r = 15, \theta = 140^\circ$

≈ 66.6519 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، محيطُ هذا القطاعِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 66.7 وحدةِ طولٍ.

رموزٌ رياضيةٌ

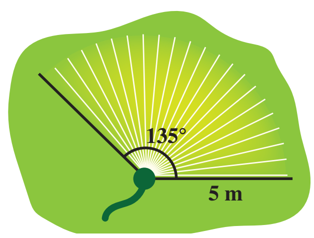
يرمزُ الحرفُ l إلى طولِ القوسِ، ويرمزُ الحرفُ L إلى محيطِ القطاعِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ محيطَ قطاعٍ دائريٍّ زاويتُهُ 225°، في دائرةٍ طولُ نصفِ قُطْرِها 50 cm، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

مثال 4: من الحياة

حديقةُ منزلٍ وُضِعَ في أحدِ أطرافِها مِرَشٌّ للماءِ، يدورُ حولَ الرأسِ بزاويةٍ مقدارُها 135°، فيصلُ الماءُ إلى مسافةِ 5 m منَ المِرَشِّ. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ التي سيرويها هذا المِرَشُّ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



تُمثِّلُ المنطقةُ التي سيرويها المِرَشُّ قطاعًا دائريًّا زاويتُهُ 135°، وطولُ نصفِ قُطْرِهِ 5 m:

قانونُ مساحةِ القطاعِ $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

بتعويضِ $r = 5, \theta = 135^\circ$ $= \frac{135^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 29.5

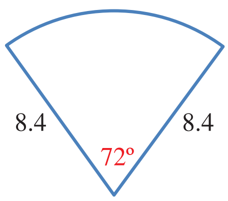
إذنْ، مساحةُ هذهِ المنطقةِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: $29.5\ \text{m}^2$

أتحقق من فهمي

طولُ عقربِ الدقائقِ في ساعةِ حائطٍ هوَ 15 cm. ما مِساحةُ المنطقةِ التي يُغطّيها العقربُ في أثناءِ حركتِهِ منَ العددِ 9 إلى العددِ 2؟

أتدرب وأحل المسائل

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا:

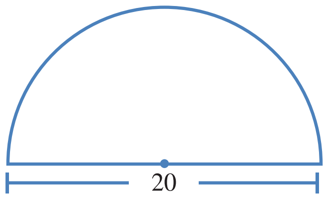


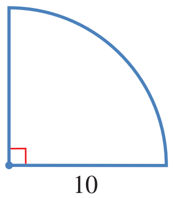
1 أُعبِّرُ بكسرٍ عنِ الجزءِ الذي يُمثِّلُهُ هذا القطاعُ منَ الدائرةِ.

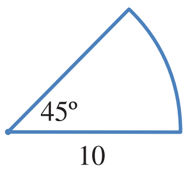
2 أَجِدُ طولَ القوسِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

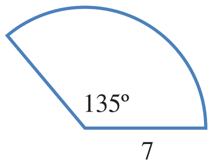
3 أَجِدُ مساحةَ القطاعِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

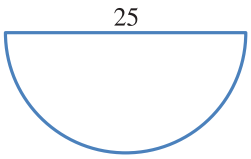
4


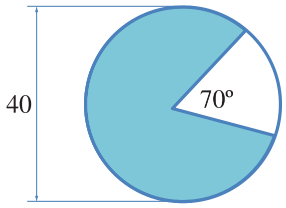
5


6


7


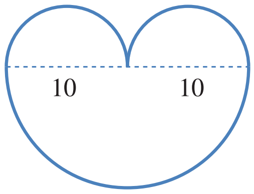
8 أَجِدُ مساحةَ نصفِ الدائرةِ المجاورةِ، ثمَّ أَجِدُ محيطَها.





9 أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ المجاورِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). أُبرِّرُ إجابتي.

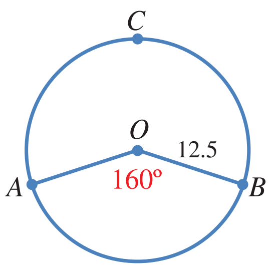
10 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.



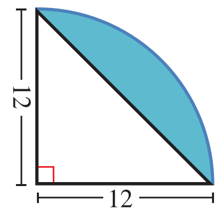
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ 3 أنصافِ دوائرَ:

11 أَجِدُ محيطَ الشكلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).

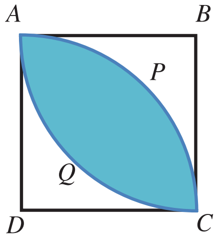
12 أَجِدُ مساحةَ الشكلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).



13 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ دائرةٍ، طولُ نصفِ قُطْرِها 12.5 وحدةِ طولٍ. أَجِدُ طولَ القوسِ ACB.



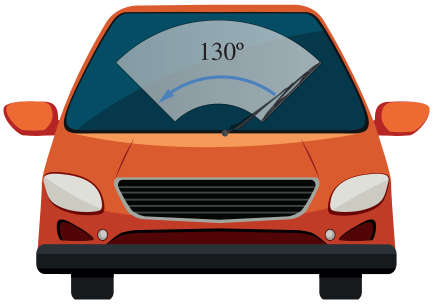
14 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ ربعَ دائرةٍ. أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).



15 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 8 cm، ويُمثِّلُ APC وَ AQC قوسَيْنِ منْ دائرتَيْنِ مركزاهُما D وَ B على التوالي. أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).

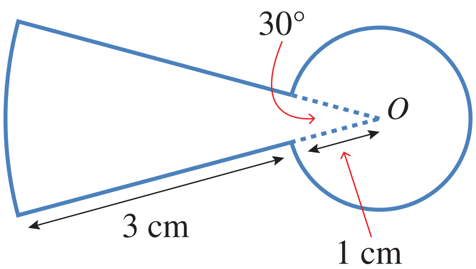
16 صمَّمَ مهندسٌ مِرَشَّ مياهٍ لريِّ منطقةٍ مساحتُها $100\ m^2$ على هيئةِ قطاعٍ دائريٍّ طولُ نصفِ قُطْرِهِ 15 m. ما زاويةُ دورانِ هذا المِرَشِّ؟

17 **سياراتٌ**: يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ ماسحةَ الزجاجِ الأماميِّ لسيارةٍ. إذا كانَ طولُ شفرةِ الماسحةِ 40 cm، وطولُ شفرةِ الماسحةِ معَ ذراعِها 66 cm، فما مساحةُ الزجاجِ التي تُنظِّفُها الماسحةُ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ؟



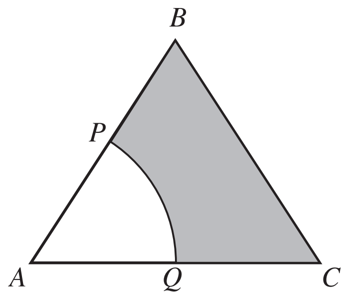
مهارات التفكير العليا

18 **تحدٍّ**: أجدُ محيطَ الشكلِ المجاورِ ومساحتَهُ.



19 **تحدٍّ**: اشترَتْ عفافُ فطيرةَ بيتزا دائريةَ الشكلِ طولُ قُطْرِها 36 cm، ثمَّ قسَّمَتْها إلى قطعٍ متساويةٍ. بعدَ ذلكَ أكلَتْ منْها قطعتيْنِ تُمثِّلانِ معًا $180\ cm^2$ منْها. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ لقطعةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ.

20 **تحدٍّ**: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ مثلثًا مُتطابقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ 6 cm. إذا كانَتِ النقطتانِ P وَ Q تُنصِّفانِ الضلعيْنِ $\overline{AB}$ وَ $\overline{AC}$ على التوالي، وكانَ APQ قطاعًا دائريًّا منْ دائرةٍ مركزُها A، فأَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ.



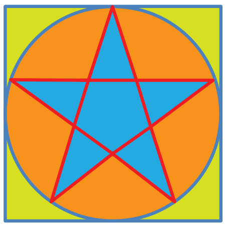
الدرسُ 3

الزوايا في الدائرةِ
Angles in a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرةِ، وتوظيفُها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ وحَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

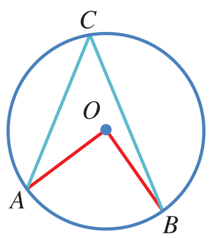
المصطلحاتُ الزاويةُ المركزيةُ، الزاويةُ المحيطيةُ، القوسُ المقابلُ، الزاويةُ المُقابِلةُ لِقُطْرِ الدائرةِ، الرباعيُّ الدائريُّ، الزاويةُ المماسيةُ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ تصميمًا مُكوَّنًا منْ نجمةٍ خماسيةٍ منتظمةٍ محاطةٍ بدائرةٍ يحيطُ بها مربَّعٌ. ماذا تُسمّى الزوايا عندِ رؤوسِ النجمةِ؟ كيفَ نجدُ قياسَ كلٍّ منْها؟



تُسمّى الزاويةُ التي يكونُ رأسُها في مركزِ الدائرةِ، وضلعاها نصفَيْ قُطْرَيْنِ للدائرةِ **زاويةً مركزيةً** (central angle). ففي الشكلِ الآتي، AOB زاويةٌ مركزيةٌ في الدائرةِ التي مركزُها O، ويُسمّى القوسُ $\overset{\frown}{AB}$ **القوسَ المقابلَ** (subtended arc).

يُسمّى $\overset{\frown}{AB}$ القوسَ الأصغرَ، ويُسمّى $\overset{\frown}{ACB}$ القوسَ الأكبرَ.

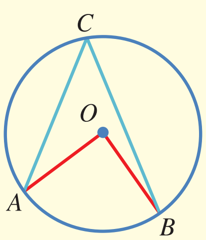


تُسمّى الزاويةُ التي يقعُ رأسُها على الدائرةِ، ويكونُ ضلعاها وترَيْنِ في الدائرةِ **زاويةً محيطيةً** (inscribed angle). ففي الشكلِ السابقِ، الزاويةُ ACB محيطيةٌ، والزاويةُ AOB مركزيةٌ، وهما مرسومتانِ على القوسِ $\overset{\frown}{AB}$. وعندَ قياسِ هاتيْنِ الزاويتيْنِ سنجدُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ AOB يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.

نظريةٌ **الزاويةُ المركزيةُ والزاويةُ المحيطيةُ**

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ:

$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$



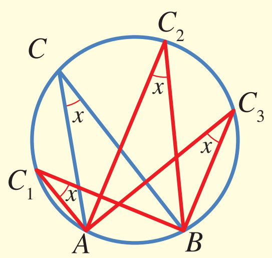
أُفكِّرُ
ما قياسُ الزاويةِ المحيطيَّةِ المقابلةِ للقطرِ؟

نظريةٌ

الزوايا المحيطيةُ المرسومةُ على قوسٍ واحدٍ

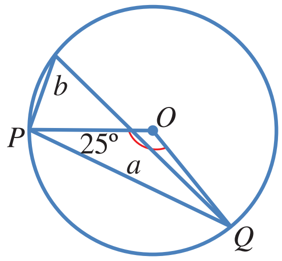
جميعُ الزوايا المحيطيةِ المرسومةِ على قوسٍ واحدٍ في دائرةٍ لها القياسُ نفسُهُ:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$



مثال 1

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قياسُ الزاويتيْنِ المشارِ إليْهِما بالحرفيْنِ a وَ b؟



المثلثُ OPQ مُتطابِقُ الضلعيْنِ؛ لأنَّ $\overline{OQ}$ وَ $\overline{OP}$ نصفا قُطْريْنِ في الدائرةِ ومجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ هوَ $180°$. إذنْ:

$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180°$ نُعوِّضُ قياساتِ الزوايا المعلومةِ:

$a + 25° + 25° = 180°$ في المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْنِ تتطابقُ زاويتا القاعدةِ

$a + 50° = 180°$ بالتبسيطِ

$a + 50° - 50° = 180° - 50°$ بطرحِ $50°$ منَ الطرفيْنِ

$a = 130°$

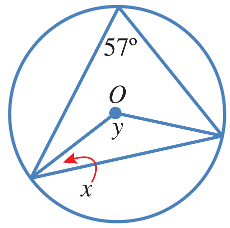
$b = 130° \div 2$ قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ نفسِهِ

$= 65°$ بالتبسيطِ

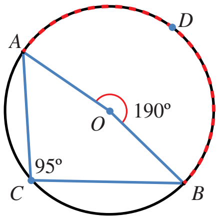
> **أَتذكَّرُ**
>
> زاويتا قاعدةِ المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْنِ متساويتانِ في القياسِ.

أتحقق من فهمي

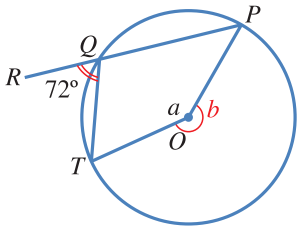
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟



قدْ يكونُ قياسُ الزاويةِ المركزيةِ أكبرَ منْ $180°$. ففي الشكلِ المجاورِ، الزاويةُ AOB مُقابِلةٌ للقوسِ $\widehat{ADB}$، وقياسُها $190°$، وهوَ ضعفُ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.



مثال 2



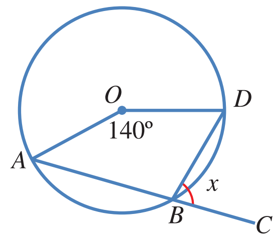
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ P, Q, R على استقامةٍ واحدةٍ، فما قياسُ الزاويةِ a؟

الزاويتانِ PQT, RQT تُشكِّلانِ زاويةً مستقيمةً	$m\angle PQT = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$
مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ 360°	$a + b = 360^\circ$
قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ	$b = 2 \times 108^\circ = 216^\circ$
بتعويضِ قيمةِ b	$a + 216^\circ = 360^\circ$
بطرحِ 216° منَ الطرفيْنِ	$a = 360^\circ - 216^\circ = 144^\circ$

أَتذكّر

- قياسُ الزاويةِ المستقيمةِ هوَ 180°.
- مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ 360°.

أتحقق من فهمي



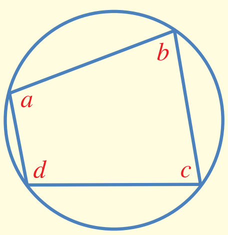
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ x؟

إذا وقعَتْ رؤوسُ مُضلَّعٍ رباعيٍّ على دائرةٍ، فإنَّهُ يُسمّى **رباعيًّا دائريًّا** (cyclic quadrilateral). وإذا حسَبْنا مجموعَ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ، فإنَّهُ يكونُ 180°.

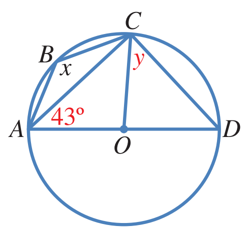
نظريةٌ — **المضلّعُ الرباعيُّ الدائريُّ**

مجموعُ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ في المُضلَّعِ الرباعيِّ الدائريِّ هوَ 180°:

$$b + d = 180^\circ , a + c = 180^\circ$$



مثال 3



إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

المثلثُ ACO مُتطابقُ الضلعيْنِ	$m\angle ACO = 43^\circ$
الزاويةُ ACD محيطيةٌ مشتركةٌ معَ الزاويةِ المركزيةِ AOD بالقوسِ نفسِهِ	$y + m\angle ACO = 90^\circ$
بالتعويضِ	$y + 43^\circ = 90^\circ$

$y = 90° - 43°$ بطرحِ $43°$ منَ الطرفيْنِ

$= 47°$

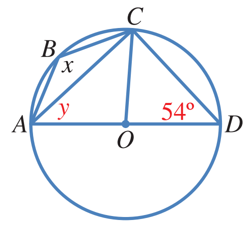
$x + m\angle ADC = 180°$ الشكلُ $ABCD$ رباعيٌّ دائريٌّ

$m\angle ADC = y = 47°$ المثلثُ OCD مُتطابِقُ الضلعيْنِ

$x + 47° = 180°$ بتعويضِ قيمةِ y

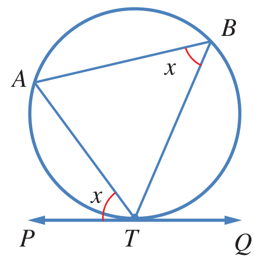
$x = 180° - 47°$ بطرحِ $47°$ منَ الطرفيْنِ

$= 133°$



أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟



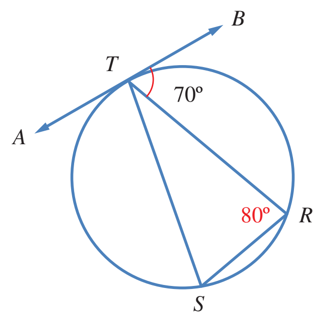
فـي الشـكلِ المجـاورِ، $\overleftrightarrow{PQ}$ هـوَ مماسٌّ للدائـرةِ عنـدَ النقطـةِ T، وَ $\overline{TA}$ هـوَ وتـرٌ للدائـرةِ. تُسـمّى الزاويـةُ المحصـورةُ بيـنَ المماسِّ والوتـرِ المـارِّ بنقطـةِ التَّمـاسِّ **الزاويـةَ المماسِّـية** (angle between a tangent and a chord). وهـذهِ الزاويـةُ تحصرُ القـوسَ $\overset{\frown}{TA}$، ويُمكِـنُ ملاحظةُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المماسِّـيةِ PTA يسـاوي قيـاسَ الزاويةِ المحيطيـةِ ABT المرسـومةِ على القوسِ $\overset{\frown}{TA}$ نفسِـهِ.

نظريةٌ: الزاويةُ المماسيةُ والزاويةُ المحيطيةُ

قياسُ الزاويةِ المماسِّيةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

مثال 4



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ ATS وَ TSR.

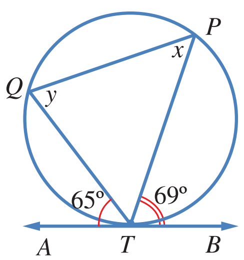
$m\angle ATS = m\angle TRS = 80°$ زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ

$m\angle TSR = m\angle BTR = 70°$ زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ

أتحقق من فهمي

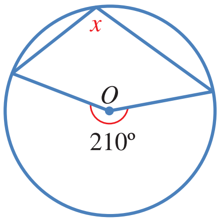
في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T.

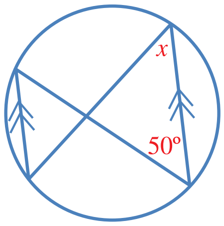
أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا: TQP، TPQ، وَ QTP.

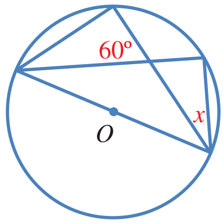


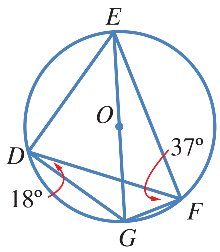
أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

1 

2 

3 



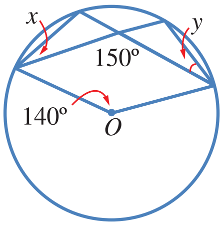
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

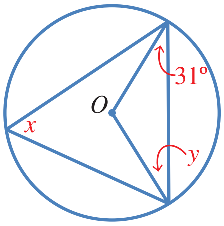
4 $m\angle EGF$.

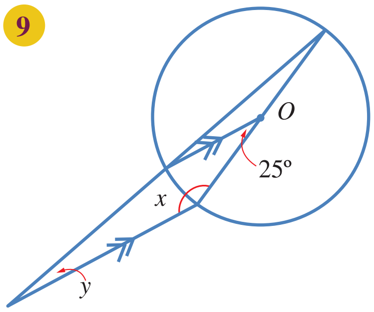
5 $m\angle DEG$.

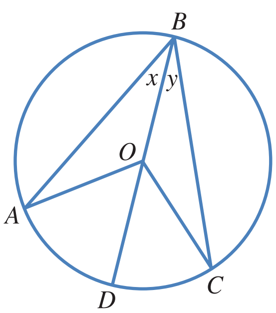
6 $m\angle EDF$.

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

7 

8 

9 



في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O، وقياسُ الزاويةِ ABO هوَ x°،

وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ y°:

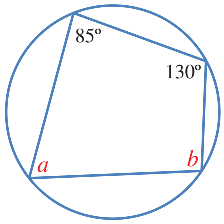
10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAO.

11 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AOD.

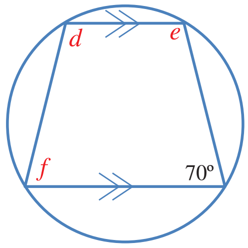
12 أُثْبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ.

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

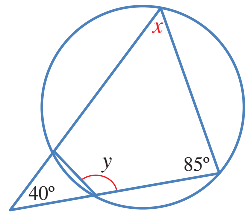
13



14



15



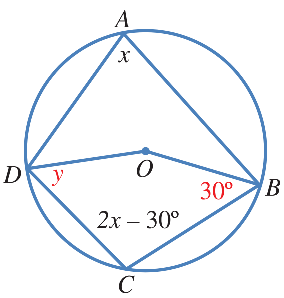
في الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ ***PQRT*** ، قياسُ الزاويةِ ***ROQ*** هوَ 38°، حيثُ ***O*** مركزُ الدائرةِ، وَ***POT*** قُطْرٌ فيها يوازي ***QR***. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

16 ROT.

17 QRT.

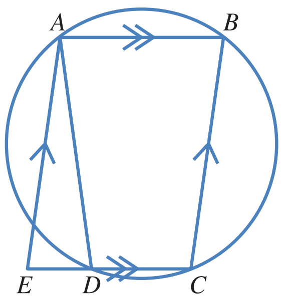
18 QPT.

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O:



19 لماذا $3x - 30° = 180°$؟

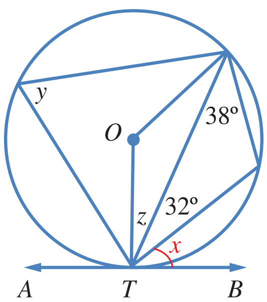
20 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشارِ إليْها بالحرفِ y، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.



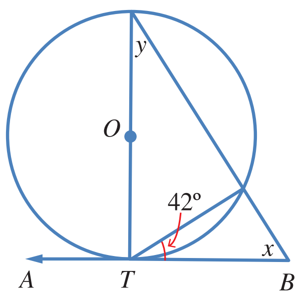
21 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $ABCE$ متوازيَ أضلاعٍ. أُبيِّنُ أنَّ قياسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

22

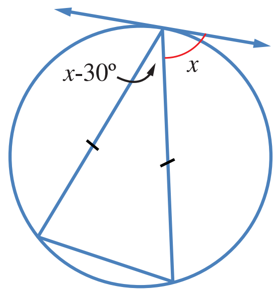


23

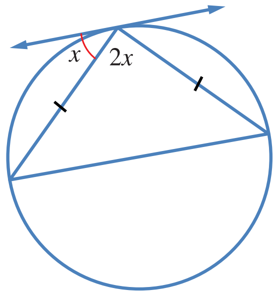


أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ:

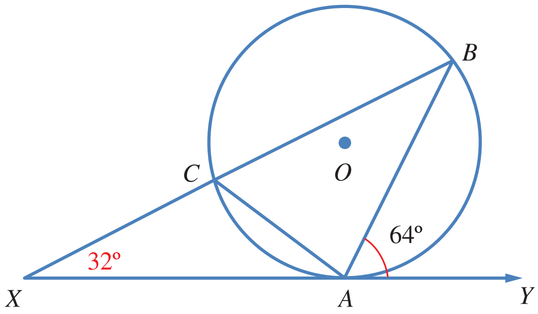
25



24



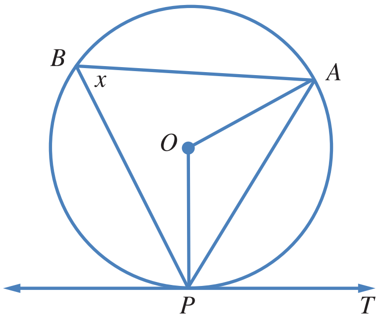
26 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ في الشكلِ الآتي، ويُمثِّلُ $\overleftrightarrow{XY}$ مماسًّا للدائرةِ عندَ A. إذا كانَتِ النقاطُ B وَ C وَ X تُمثِّلُ خطًّا على استقامةٍ واحدةٍ، فأُثبِتُ أنَّ المثلثَ ACX مُتطابِقُ الضلعيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي.



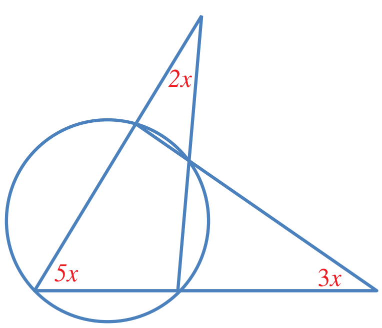
مهارات التفكير العليا

27 **تبريرٌ**: قالَتْ فاتنُ إنَّ الزاويةَ المحيطيةَ المرسومةَ على قُطْرِ الدائرةِ زاويةٌ قائمةٌ. هلْ قولُ فاتنَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

28 **تبريرٌ**: في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PT}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ PBA هوَ x^o، فأُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ APT يساوي قياسَ الزاويةِ ABP، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.



29 **تحدٍّ**: أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ.



الدرسُ 4

معادلةُ الدائرةِ
Equation of a Circle

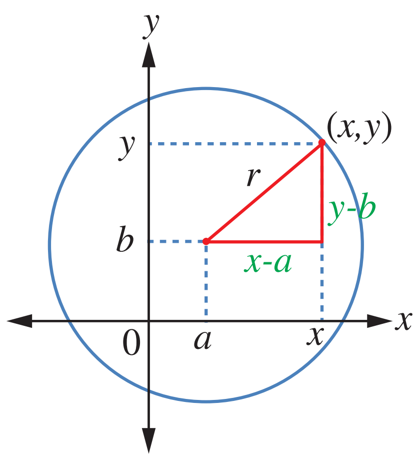
فكرةُ الدرسِ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ، وإيجادُ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.

المصطلحاتُ معادلةُ الدائرةِ، الصورةُ القياسيةُ، الصورةُ العامةُ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ النقطةُ $(7, 4)$ موقعَ محطةِ إذاعةٍ يُلتقَطُ بثُّها في دائرةٍ نصفُ قُطْرِها 224 km. إذا كانَ فوّازٌ يقيمُ في بيتٍ تُمثِّلُهُ النقطةُ $(-75, 95)$ على مستوًى إحداثيٍّ وحدتُهُ 1 km، فكيفَ يستطيعُ معرفةَ إنْ كانَ بثُّ هذهِ الإذاعةِ يصلُ بيتَهُ أمْ لا؟

معادلةُ الدائرةِ (equation of the circle) هيَ العلاقةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيِّ x والإحداثيِّ y لكلِّ نقطةٍ واقعةٍ على الدائرةِ. فإذا عُوِّضَ إحداثيّا نقطةٍ في المعادلةِ، وكانَتِ النتيجةُ عبارةً صحيحةً، فهذا يعني أنَّ تلكَ النقطةَ تقعُ على الدائرةِ.

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r. والنقطةُ (x, y) تقعُ على الدائرةِ. أُلاحِظُ أنَّهُ يُمكِنُ تكوينُ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي طولُ ضلعِهِ الأفقيِّ $(x-a)$، وطولُ ضلعِهِ الرأسيِّ $(y-b)$، وطولُ وترِهِ r. وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس تنتجُ المعادلةُ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ التي تُسمّى **الصورةَ القياسيةَ** (standard form) لمعادلةِ الدائرةِ.



مفهومٌ أساسيٌّ — **معادلةُ الدائرةِ**

1. الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
2. معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $(0, 0)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ:
$$x^2+y^2=r^2$$

مثال 1

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 المركزُ هوَ النقطةُ $(-2, 7)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ 6 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$(a, b)=(-2, 7), r=6$ $(x-(-2))^2+(y-7)^2=6^2$

$(x+2)^2+(y-7)^2=36$

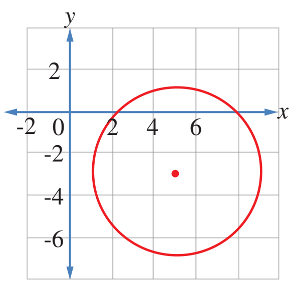
2 المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ القُطْرِ 5 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $x^2+y^2=r^2$

بتعويضِ $r=5$ $x^2+y^2=5^2$

$x^2+y^2=25$

3 الدائرةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ.



عنـدَ النظرِ إلى الدائرةِ يَتبيَّـنُ أنَّ مركزَها النقطـةُ $(5, -3)$، وأنَّ طولَ نصفِ قُطْرِها 4 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$(a, b)=(5, -3), r=4$ $(x-5)^2+(y-(-3))^2=4^2$

$(x-5)^2+(y+3)^2=16$

أتحقق من فهمي

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

a) المركزُ هوَ النقطةُ $(0, 4)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ 9 وحداتٍ.

b) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ القُطْرِ 8 وحداتٍ.

إذا عُلِمَ مركزُ الدائرةِ ونقطةٌ واقعةٌ عليْها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ، ثمَّ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ.

مراجعةُ المفهومِ **طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْنِ**

إذا كانَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْنِ $A(x_1, y_1)$، وَ $B(x_2, y_2)$، هوَ d فإنَّ:

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

مثال 2

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(-7, 13)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 4)$.

أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ قانونُ المسافةِ بينَ نقطتينِ

$r^2 = (5 - (-7))^2 + (4 - 13)^2$ بالتعويضِ

$= 144 + 81$ بالتبسيطِ

$= 225$

$r = \sqrt{225} = 15$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ

والآنَ، أُعوِّضُ إحداثيَّي المركزِ وقيمةَ r^2 في الصورةِ القياسيةِ لمعادلةِ الدائرةِ، فأَجِدُ أنَّ معادلةَ هذهِ الدائرةِ هيَ:

$$(x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 225.$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(4, -3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(2, 0)$.

إذا علمْنا معادلةَ دائرةٍ بالصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، حيثُ $r > 0$ فإنَّهُ يُمكِنُ فكُّ الأقواسِ وإعادةُ الترتيبِ، فتنتجُ المعادلةُ: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

يُمكِنُ أيضًا كتابةُ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ الآتيةِ:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيثُ: $f = -a, g = -b, c = a^2 + b^2 - r^2$، وهيَ تُسمّى **الصورةَ العامةَ** (general form) لمعادلةِ الدائرةِ.

إذا علمْنا الصورةَ العامةَ لمعادلةِ أيِّ دائرةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحويلُها إلى الصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، وذلكَ بإكمالِ المربَّعِ.

مراجعةُ المفهومِ

إكمالُ المربّعِ

لإكمالِ المربَّعِ للحدَّيْنِ $x^2 + ax$، يضافُ $\left(\frac{a}{2}\right)^2$، ثمَّ يُطرَحُ، فينتجُ مربَّعٌ كاملٌ هوَ $(x + \frac{a}{2})^2$ وبذلكَ يتحوَّلُ $x^2 + ax$ إلى $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

مثال 3

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$.

بإكمــالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحـوي x ينتـجُ: $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$ ، وبإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي y ينتجُ: $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$.

وبذلكَ يُمكِنُ تحويلُ المعادلةِ $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$ إلى:

$$(x-4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 - 56 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 81$$

بمقارنةِ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$، نجدُ أنَّ:

$a = 4\ ,\ b = -3,\ r = 9$.

إذنْ، مركزُ هذهِ الدائرةِ هوَ النقطةُ $(4, -3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 9 وحداتٍ.

أتحقق من فهمي

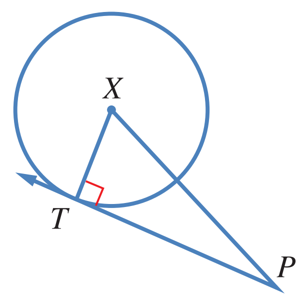
أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$.

تعلَّمْتُ في درسٍ ســابقٍ أنَّ مماسَّ الدائرةِ يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وأنَّهُ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ. وهذا يفيدُ في التحقُّقِ منْ أنَّ مســتقيمًا معطًى هوَ مماسٌّ لدائرةٍ معطاةٍ، وحسابِ طولِ قطعةٍ مماسِّيةٍ كما في المثالَيْنِ الآتييْنِ.

مثال 4

أَجِدُ طولَ القطعةِ المماسّيةِ المرسومةِ منَ النقطةِ $P\,(6, -6)$، التي تمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها

$$(x+5)^2 + (y-4)^2 = 25$$



أَرسمُ مُخطَّطًا، ولتكنِ النقطةُ X مركزَ الدائرةِ، وَ T نقطةَ التَّماسِّ.

لحســابِ طولِ القطعةِ المماســيةِ $\overline{PT}$، ثُم أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ القائمِ XTP، الذي يُمكِنُ إيجادُ طولَيْ ضلعيْنِ فيهِ، هما: نصفُ القُطْرِ $\overline{XT}$، والوترُ $\overline{XP}$.

طــولُ نصفِ القُطْرِ XT هوَ 5. ولحســابِ XP، أَجِدُ المســافةَ بينَ مركــزِ الدائرةِ $X(-5, 4)$ والنقطةِ $P\,(6, -6)$ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$(XP)^2 = (6- (-5))^2 + (-6-4)^2 = (11)^2 + (-10)^2 = 221$.

وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس على المثلثِ XTP :

$(PT)^2 = (XP)^2 - (XT)^2$ نظريةُ فيثاغورس

بالتعويضِ $= 221 - 25$

بالتبسيطِ $= 196$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $PT = \sqrt{196} = 14$

إذنْ، طولُ القطعةِ المماسّيةِ 14 وحدةً.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ القطعةِ المماسّيةِ المرسومةِ منَ النقطةِ $P(7, 4)$، التي تمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$$

مثال 5

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 2x + 3$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$

أَحُلُّ النظامَ المُكوَّنُ منَ المعادلتيْنِ: $y = 2x + 3$، وَ $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$؛ لإيجادِ عددِ نقاطِ تقاطعِ المستقيمِ والدائرةِ. فإذا كانَ عددُ نقاطِ التقاطعِ واحدًا فقطْ، فإنَّ المستقيمَ يكونُ مماسًّا للدائرةِ.

بتعويضِ $y = 2x + 3$ في معادلةِ الدائرةِ $(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45$

بالتبسيطِ $(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45$

بفكِّ الأقواسِ $x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، وجعلِ الطرفِ الأيمنِ صفرًا $5x^2 - 40x + 80 = 0$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 5 $x^2 - 8x + 16 = 0$

بالتحليلِ $(x - 4)^2 = 0$

$x = 4$

بتعويضِ قيمةِ x في إحدى المعادلتيْنِ لإيجادِ قيمةِ y $y = 2(4) + 3 = 11$

بما أنَّ هذا المستقيمَ يقطعُ الدائرةَ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ هيَ $(4, 11)$، فإنَّهُ مماسٌّ للدائرةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 4x - 5$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها

$$(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$$

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 7 وحداتٍ.

2 المركزُ هوَ النقطةُ $(-1, 3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 5 وحداتٍ.

3 المركزُ هوَ النقطةُ $(-3, -2)$، وطولُ قُطْرِها 10 وحداتٍ.

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركزُها وإحداثيّا نقطةٍ تمرُّ بها في كلٍّ ممّا يأتي:

4 المركزُ $(-1, 2)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(3, 5)$.

5 المركزُ نقطةُ الأصلِ، وتمرُّ بالنقطةِ $(-9, -4)$.

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

6 $(x+5)^2 + (y-8)^2 = 36$

7 $(x-19)^2 + (y-33)^2 = 400$

8 $x^2 + (y+4)^2 = 45$

9 $(x-3)^2 + (y+10)^2 = 28$

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

10 $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

11 $x^2 + y^2 + 8x = 9$

12 $2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$

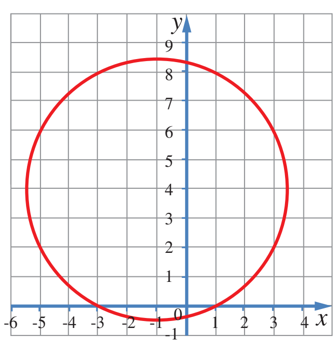
13 $x^2 + y^2 - 18x + 14y = 14$

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ بالصورتينِ: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ، $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$، حيثُ: f، g، وَ c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

14 المركزُ $(-11, -1)$، وطولُ القُطْرِ 26 وحدةً.

15 المركزُ $(3, 0)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ.

16 المركزُ $(-4, 7)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(1, 3)$.



17 أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنةِ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ.

18 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

19 أجدُ إحداثيّي المركزِ وطولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي معادلتُها: $(2x-4)^2+(2y+6)^2=100$.

20 دائــرةٌ معادلتُها $x^2+y^2+px+6y=96$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 11 وحــدةً، وَ p عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أَجِدُ بُعْدَ مركزِ الدائرةِ عنْ نقطةِ الأصلِ.

تُمثِّلُ النقطتانِ D (2, 9)، وَ E (14, −7) نهايتَيْ قُطْرٍ لدائرةٍ مركزُها C:

21 أَجِدُ إحداثيّي المركزِ C.

22 أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ.

23 أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ.

24 أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y=3x-2$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2+y^2+4x-24y+108=0$.

25 رُسِمَ مماسٌّ منَ النقطةِ P (8, 5) للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2+y^2+8x-6y-75=0$. أَجِدُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ النقطةَ P بنقطةِ التَّماسِّ.

مهارات التفكير العليا

26 **تبريرٌ**: قالَ عبدُ الرحمنِ إنَّ $x^2+y^2-14x+6y+59=0$ ليسَتْ معادلةَ دائرةٍ. هلْ قولُ عبدِ الرحمنِ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

27 **تحــدٍّ**: ممرٌّ دائريٌّ محصورٌ بينَ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُــهُ، وهــوَ النقطةُ (7, 3). إذا كانَــتِ الدائرةُ الكبرى تمسُّ المحــورَ y، والصغرى تمسُّ المحورَ x، فأَكتبُ معادلتَيِ الدائرتيْنِ اللتيْنِ تُشــكِّلانِ المحيــطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثمَّ أَجِدُ مساحةَ الممرِّ بالوحداتِ المربَّعةِ.

28 **تحدٍّ**: رُسِمَ منَ النقطةِ A (8, 21) مماسّانِ للدائرةِ التي مركزُها C، فمسّاها عندَ النقطتيْنِ D، وَ B. إذا كانَتْ معادلةُ الدائرةِ هيَ $(x-9)^2+(y+4)^2=49$، فما مساحةُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟

29 **تحدٍّ**: أَكتبُ الصورةَ القياسيةَ لمعادلةِ الدائرةِ $x^2+y^2+8x-10y+24=0$ منْ دونِ استعمالِ طريقةِ إكمالِ المربَّعِ.

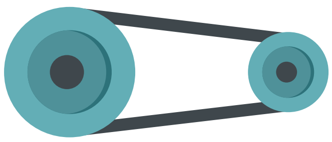
الدرسُ 5

الدوائرُ المتماسَّةُ
Tangent Circles

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ العلاقةِ بينَ دائرتيْنِ، وتعرُّفُ المماسّاتِ المشتركةِ، وتوظيفُ ذلكَ في حَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحاتُ الدائرتانِ المتماسَّتانِ، المماسُّ المشتركُ الخارجيُّ، المماسُّ المشتركُ الداخليُّ.

مسألةُ اليومِ يدورُ حزامٌ مطّاطيٌّ حولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَيْ قُطْرَيْهما 8 cm، وَ 3 cm على التوالـي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَي التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

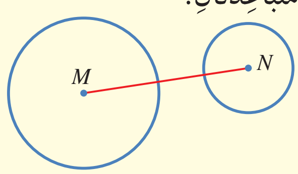


يُمكِنُ أنْ تتقاطعَ الدائرتانِ المرسومتانِ في مستوًى واحدٍ في نقطةٍ واحدةٍ، أوْ نقطتيْنِ، وقدْ لا تتقاطعانِ أبدًا. وتُسمّى الدائرتانِ المُتقاطِعتانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ **دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ** (tangent circles).

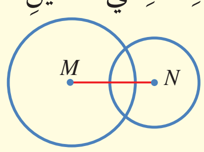
مفهومٌ أساسيٌّ — الدائرتانِ المرسومتانِ في مستوًى واحدٍ

إذا رُسِمَتْ دائرتانِ في مستوًى واحدٍ، فإنَّ وضعَهُما بالنسبةِ إلى بعضِهِما ينحصرُ في الحالاتِ الآتيةِ:

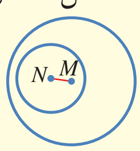
1 مُتباعِدتانِ.



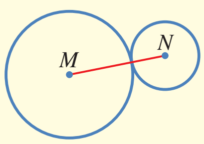
2 مُتقاطِعتانِ في نقطتيْنِ.



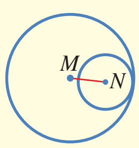
3 إحداهُما داخلَ الأُخرى.



4 مُشتركتانِ في نقطةٍ واحدةٍ؛ أيْ إنَّهما متماسَّتانِ. ولهذا الوضعِ صورتانِ:



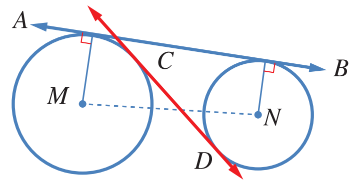
متماسَّتانِ منَ الخارجِ.



متماسَّتانِ منَ الداخلِ.

إذا كانَ المستقيمُ مماسًّا لكلٍّ منْ دائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **مماسًّا مشتركًا** (common tangent).

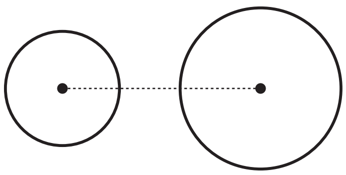
وإذا قطعَ المماسُّ المشتركُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الداخليَّ** (common internal tangent)، وإلّا فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الخارجيَّ** (common external tangent). ففي الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ مشتركٌ خارجيٌّ، وَ $\overleftrightarrow{CD}$ مماسٌّ مشتركٌ داخليٌّ.



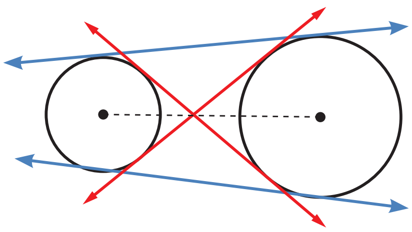
يُمكِنُ رسمُ مماسٍّ واحدٍ فقطْ للدائرةِ عندَ نقطةٍ عليْها، ويُمكِنُ أيضًا رسمُ مماسَّيْنِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، فما عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها للدائرتيْنِ؟ تعتمدُ إجابةُ هذا السؤالِ على وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

مثال 1

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.



أرسمُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، ثمَّ أرسمُ المماسّاتِ التي تقطعُها بلونٍ أحمرَ، والمماسّاتِ التي لا تقطعُها بلونٍ أزرقَ.

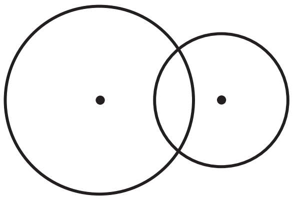


ألاحِظُ أنَّهُ يوجدُ للدائرتيْنِ مماسّانِ داخليانِ، وآخرانِ خارجيانِ.

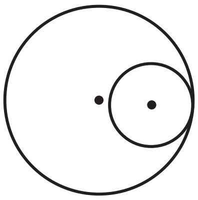
أتحقق من فهمي

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

a)



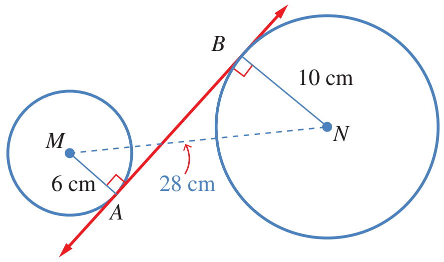
b)



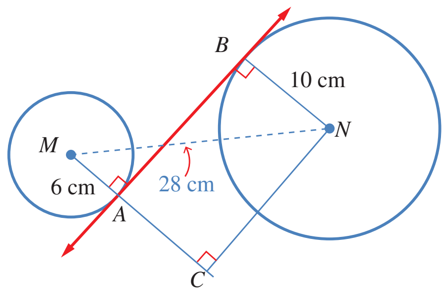
يُمكِنُ حسابُ طولِ القطعةِ المماسّيةِ المشتركةِ (المسافةُ بينَ نقطتَي التّماسِّ على الدائرتيْنِ) بطريقةٍ مُماثِلةٍ لحسابِ طولِ القطعةِ المماسّيةِ المرسومةِ منْ نقطةٍ خارجَ الدائرةِ إلى نقطةٍ عليْها.

مثال 2

أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.



أمدُّ $\overline{MA}$ على اســتقامتِهِ، ثمَّ أرسمُ منْ N عمودًا على امتدادِ $\overline{MA}$، ثمَّ أُســمّي نقطةَ تقاطعِ العمودِ معَها C.



أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ إيجادُ طولِ $\overline{AB}$ باستعمالِ تشــابُهِ المثلّثاتِ أيضًا؟

$m\angle NBA = m\angle BAC = 90^\circ$ المماسُّ عموديٌّ على نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التّماسِّ

$m\angle ACN = 90^\circ$ $\overline{NC}$ عموديٌّ على $\overline{MA}$

$m\angle BNC = 90^\circ$ مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ 360°

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $ACNB$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

$AB = NC$ ضلعانِ مُتقابِلانِ في المستطيلِ

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MCN لأَجِدَ CN:

$(CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$= 28^2 - (6 + 10)^2$ بالتعويضِ

$(CN)^2 = 784 - 256 = 528$ بالتبسيطِ

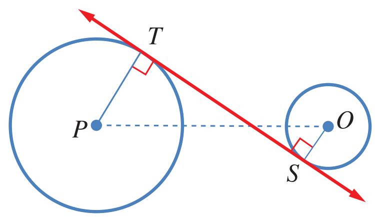
$CN = \sqrt{528} \approx 23$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

$AB = CN \approx 23\text{ cm}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ $\overline{ST}$ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ:

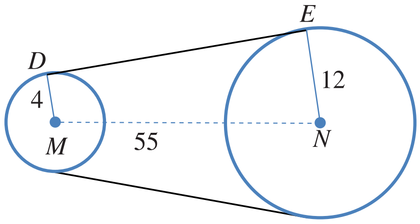
$PT = 12\text{ cm},\ OS = 4\text{ cm},\ PO = 34\text{ cm}$



مثال 3: من الحياة

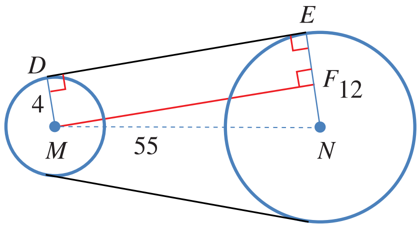
لركوبِ الدرّاجةِ الهوائيةِ فوائدُ صحيةٌ وبيئيةٌ كثيرةٌ، منْها: تقويةُ عضلاتِ الجسمِ، والتقليلُ منَ التلوُّثِ الناجمِ عنِ استعمالِ وسائلِ النقلِ التقليديةِ.

درّاجاتٌ: تلتفُّ في درّاجةٍ هوائيةٍ سلسلةٌ معدنيةٌ على عجلتيْنِ مُسنَّنتيْنِ دائريتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغرى 4 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبرى 12 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 55 cm. أَجِدُ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنَّنتيْنِ.



المطلوبُ هوَ حسابُ طولِ $\overline{DE}$.

أرسمُ منْ M عمودًا على $\overline{NE}$، ثمَّ أُسمّي نقطةَ تقاطعِهِ معَها F كما في الشكلِ المجاورِ.



المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ $\quad m\angle NED = m\angle MDE = 90^\circ$

$\overline{MF}$ عموديٌّ على $\overline{NE}$ $\quad m\angle MFE = 90^\circ$

مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ 360° $\quad m\angle DMF = 90^\circ$

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $MDEF$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MFN لأَجِدَ طولَ $\overline{MF}$:

نظريةُ فيثاغورس $\quad (MF)^2 = (MN)^2 - (FN)^2$

بالتعويضِ $\quad = 55^2 - (12-4)^2$

بالتبسيطِ $\quad (MF)^2 = 3025 - 64 = 2961$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $\quad MF = \sqrt{2961} = 54.4$

$$DE = MF = 54.4 \text{ cm}$$

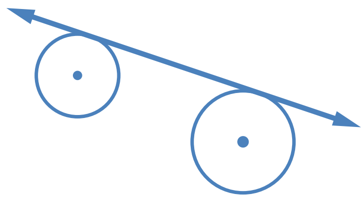
أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الكبرى في درّاجةٍ، علمًا بأنَّ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنَّنتيْنِ 40 cm، وطولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الصغرى 5 cm، والمسافةَ بينَ مركزَيِ العجلتيْنِ المُسنَّنتيْنِ 41 cm.

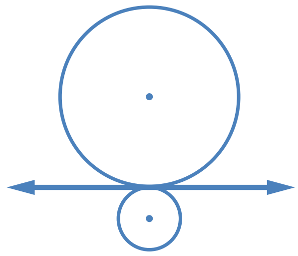
أتدرب وأحل المسائل

أُحدِّدُ إذا كانَ المماسُّ داخليًّا أمْ خارجيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

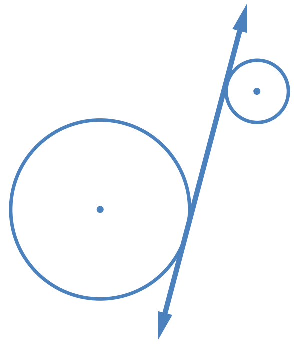
1



2

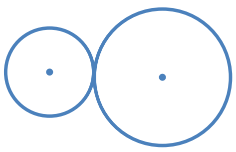


3

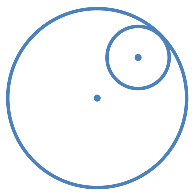


كمْ مماسًّا مشتركًا يُمكِنُ رسمُهُ لكلٍّ منْ أزواجِ الدوائرِ الآتيةِ؟ أرسمُها، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

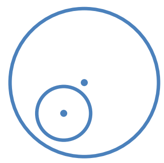
4



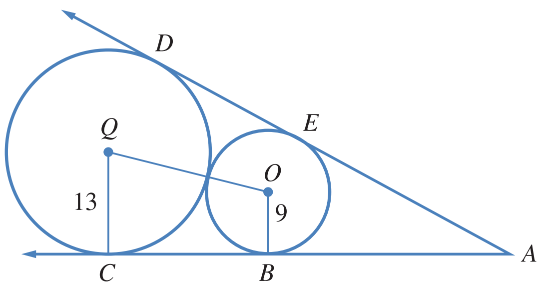
5



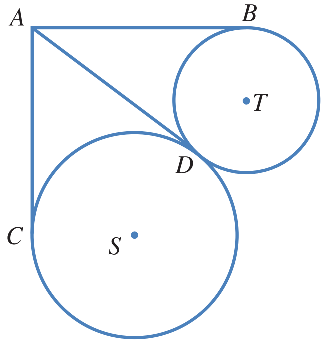
6



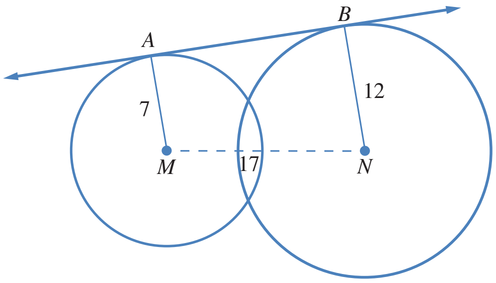
7 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسَّيْنِ منَ النقطةِ A لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ. أَجِدُ طولَ $\overline{CB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ.



8 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، والمماسّاتِ: $\overline{AB}$، وَ $\overline{AC}$، وَ $\overline{AD}$. إذا كانَ $AC = 2x + 5$، وَ $AB = 3x - 2$، فما قيمةُ x؟

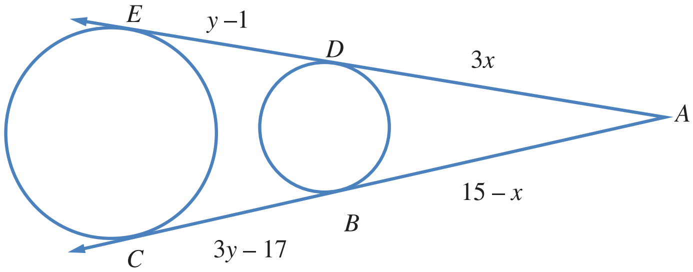


9 أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ.



10 **حـــزامٌ ناقلٌ:** يمرُّ حزامٌ حولَ دولابيْنِ دائريّيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغيرِ منْهُما 15 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبيرِ 25 cm. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَي التَّماسِّ معَ الدولابيْنِ 2 m، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدولابيْنِ؟

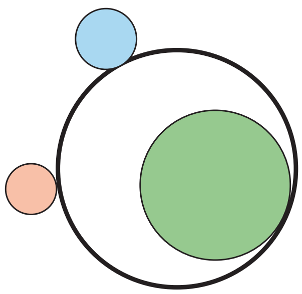
11 أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما إذا كانَتْ معادلتاهُما: $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.

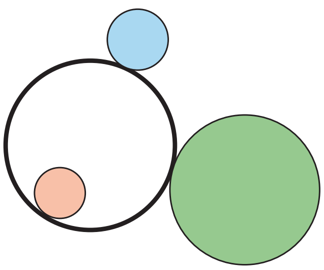


12 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.

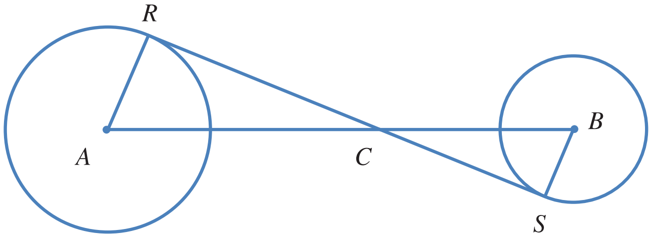
مهارات التفكير العليا

13 **تحـدٍّ:** يُمثِّلُ الشـكلانِ الآتيانِ طريقتيْنِ لرسـمِ دائرةٍ تُلامِـسُ كلًّا منَ الدائـرةِ الزرقاءِ، والخضـراءِ، والحمراءِ. أَجِدُ 6 طرائقَ أُخرى لرسمِ هذهِ الدائرةِ.





14 **برهـانٌ:** تُمثِّلُ $\overline{RS}$ في الشـكلِ المجاورِ مماسًّـا داخليًّا مشـتركًا لدائرتيْنِ مركزاهُما A، وَ B على التوالي. أُثبِتُ أنَّ: $\frac{AC}{BC} = \frac{RC}{SC}$.



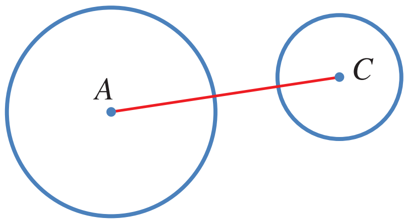
معمل برمجيةِ جيوجبرا

توسعٌ: الدوائرُ المتماسةُ

Extension: Tangent Circles

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لرسمِ دائرتيْنِ، أنصافُ أقطارِهِما مُحدَّدةٌ، وإيجادِ البُعْدِ بينَ مركزيهِما.

نشاط 1 أرسمُ الشكلَ الآتيَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أَجِدُ AC.



الخطوةُ 1: أختارُ أيقونةَ Circle: Center & Radius منْ شريطِ الأدواتِ.

الخطوةُ 2: أنقرُ زرَّ الفأرةِ الأيسرَ معَ السحبِ لرسمِ دائرةٍ مركزُها A. ستظهرُ معادلةُ الدائرةِ بالصورةِ القياسيةِ في شريطِ الإدخالِ، وسيظهرُ مركزُها على شكلِ زوجٍ مرتبٍ.

الخطوةُ 3: أُكرِّرُ الخطوتيْنِ (1) وَ(2) لرسمِ دائرةٍ مركزُها C، وإيجادِ نصفِ قُطْرِها.

الخطوةُ 4: لأَجِدَ البُعْدَ بينَ مركزِ كلٍّ منَ الدائرتيْنِ، أختارُ Segment منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على المركزِ A، ثمَّ المركزِ C، وأقرأُ البُعْدَ بينَ المركزيْنِ منْ شريطِ الإدخالِ.

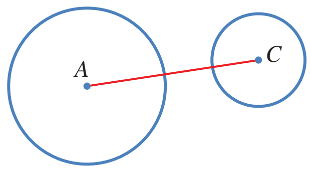
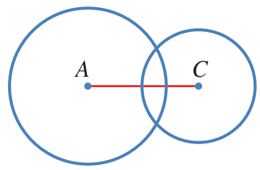
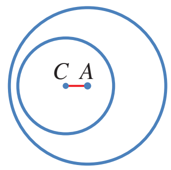
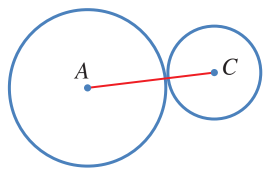
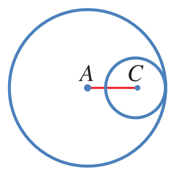
يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ العلاقةِ بينَ نصفَيْ قُطْرَيِ الدائرتيْنِ، وموقعِ كلٍّ منْهُما بالنسبةِ إلى الأُخرى.

نشاط 2

1. أرسمُ كلًّا من الدوائرِ المُبيَّنةِ في الجدولِ الآتي باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

2. إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ الكبيرةِ r_1، وطولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ الصغيرةِ r_2، فأستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لأُكمِلَ الجدولَ الآتيَ.

3 أُقارنُ بينَ قيمِ $r_1 + r_2$، و $r_1 - r_2$ و AC، ثمَّ أستنتجُ العلاقةَ بينَها وبينَ وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

وضعُ الدائرتيْنِ	r_1	r_2	AC	$r_1 - r_2$	$r_1 + r_2$	الاستنتاجُ
						
						
						
						
						

أتدرب

أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ دونَ رسمِهِما:

1 $r_1 = 9,\ r_2 = 5\ , AC = 3$

2 $r_1 = 11,\ r_2 = 5\ , AC = 6$

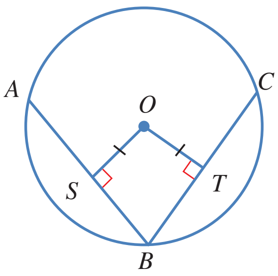
3 $r_1 = 6,\ r_2 = 3\ , AC = 17$

4 $r_1 = 8,\ r_2 = 5\ , AC = 3$

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

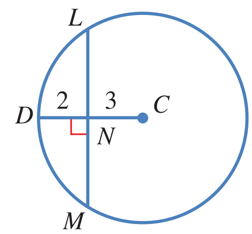
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ في الشكلِ الآتي وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $AS = 4\text{ cm}$، و $OT = 3\text{ cm}$، فـإنَّ طولَ $\overline{BC}$ بالسنتيمتراتِ هوَ:



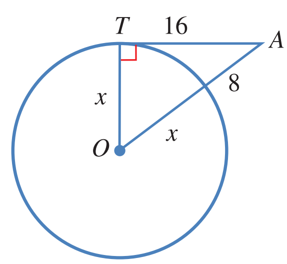
a) 6 **b)** 7
c) 8 **d)** 10

2 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ $\overline{LM}$ هوَ:



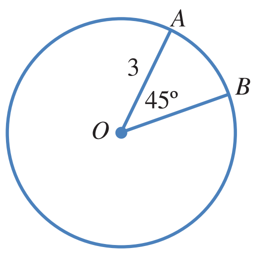
a) 5 **b)** 8
c) 10 **d)** 13

3 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ نصفِ قُطرِ الدائرةِ هوَ:



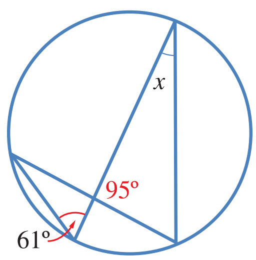
a) 5.75 **b)** 12
c) 4 **d)** 8

4 طولُ القوسِ الأصغرِ $\overset{\frown}{AB}$ بدلالةِ π في الشكلِ الآتي هوَ:



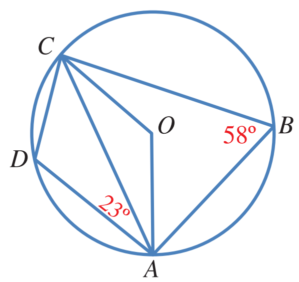
a) $\frac{9\,\pi}{8}$ **b)** $\frac{3\,\pi}{2}$
c) $\frac{9\,\pi}{2}$ **d)** $\frac{3\,\pi}{4}$

5 قيمةُ x في الشكلِ الآتي هيَ:



a) 61° **b)** 24°
c) 34° **d)** 95°

6 قياسُ الزاويةِ DCA في الشكلِ الآتي هوَ:



a) 55° **a)** 41°
b) 35° **c)** 45°

7 النقطـةُ التي لا تقـعُ علـى الدائـرةِ التـي معادلتُها $(x+2)^2+(y-4)^2=25$ هيَ:

a) $(-2, -1)$ b) $(1, 8)$

c) $(3, 4)$ d) $(0, 5)$

8 عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ هوَ:

a) 3 b) 2

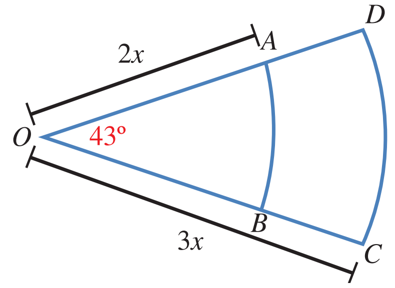
c) 1 d) 0

9 أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التـي تُمثِّلُ النقطتيْنِ $A(4, -3)$، وَ $B(6, 9)$ طرفا قُطْرٍ فيها.

يُمثِّلُ الشـكلُ التالي قطاعيْنِ دائريّيْنِ منْ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُـهُ O. إذا كانَ نصفُ قُطْرِ الدائـرةِ الصغرى $2x$، ونصفُ قُطْـرِ الدائرةِ الكبـرى $3x$، وقياسُ الزاويـةِ AOB هوَ $43°$، ومساحةُ المنطقةِ $ABCD$ هيَ $30\ cm^2$، فأَجِدُ:

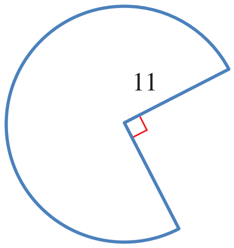
10 قيمةَ x.

11 الفرقَ بينَ طولَي القوسيْنِ CD، وَ AB.

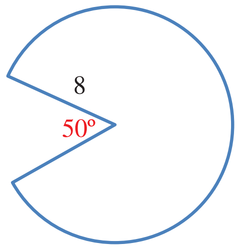


أَجِدُ المساحةَ والمحيطَ لكلٍّ منَ القطاعيْنِ الآتييْنِ:

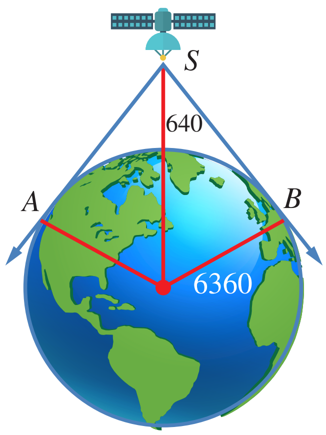
12



13



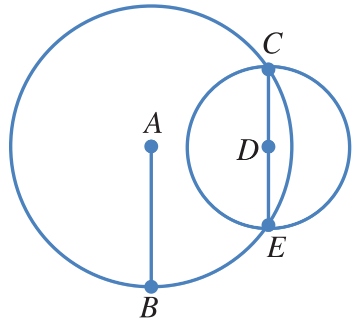
14 **أقمارٌ صناعيـةٌ:** يرتفعُ قمرٌ صناعيٌّ مسـافةَ 640 km عنْ سـطحِ الأرضِ التـي نصفُ قُطْرِهـا 6360 km، ويُمكِنُ منْهُ مشاهدةُ المنطقةِ الواقعةِ بينَ المماسَّيْنِ $\overrightarrow{SB}$ وَ $\overrightarrow{SA}$ منْ سطحِ الأرضِ. ما المسافةُ بينَ القمرِ الصناعيِّ وأبعدِ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدتُها منْهُ على سطحِ الأرضِ؟



15 **حـزامٌ مطّاطيٌّ:** يـدورُ حـزامٌ مطّاطيٌّ حـولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَـيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالـي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بيـنَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

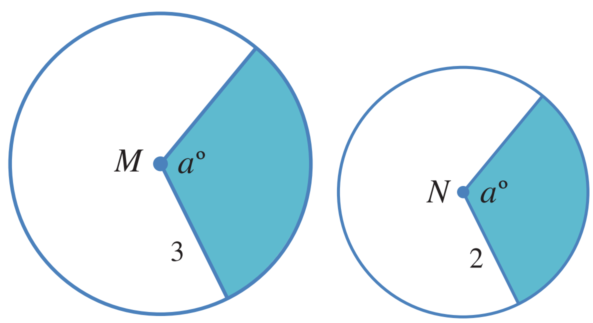
تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

16 تتقاطعُ دائرتانِ مركزاهُما A, D في النقطتيْنِ E وَ C. إذا كانَ $AB = EC = 10\text{ cm}$، فما طولُ $\overline{AD}$ بالسنتيمتراتِ؟



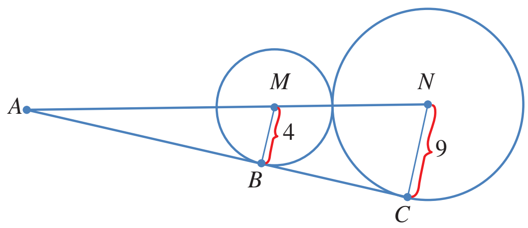
a) $5\sqrt{2}$
b) $10\sqrt{3}$
c) $10\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{3}$

17 النقطتانِ N وَ M هما مركزا الدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي. إذا كانَتْ مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الكبرى 9 وحداتٍ مربَّعةٍ، فما مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الصغرى بالوحداتِ المربَّعةِ؟



a) 3
b) 4
c) 5
d) 7

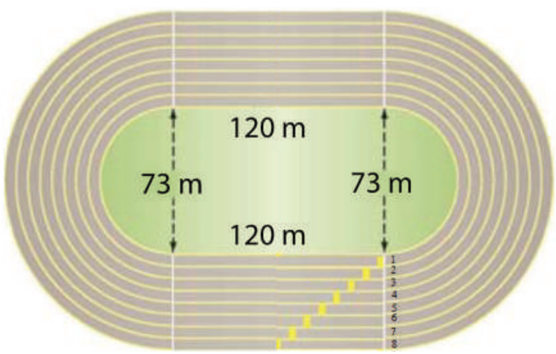
18 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، رُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ منَ النقطةِ A الواقعةِ على المستقيمِ المارِّ بالمركزيْنِ N وَ M. إذا كانَ نصفا قُطْرَيِ الدائرتيْنِ 4 وحداتٍ وَ 9 وحداتٍ، فأيُّ العباراتِ التاليةِ صحيحةٌ:



a) طولُ $\overline{AN}$ يساوي طولَ $\overline{AC}$.
b) طولُ $\overline{BC}$ يساوي 13 وحدةً.
c) $AC = \frac{9}{4} AB$.
d) $AC = \frac{4}{9} AB$.

19 أَجِدُ طولَ $\overline{AM}$ في السؤالِ السابقِ مُبيِّنًا خطواتِ الحَلِّ.

20 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي مضمارًا للجري منْ ثمانيةِ مساربَ، كلٌّ منْها يتكوَّنُ منْ جزأيْنِ مستقيميْنِ متوازييْنِ، ونصفَيْ دائرتيْنِ متصلتيْنِ بهِما. إذا كانَ عرضُ كلِّ مسربٍ 1 m، فبكمْ يزيدُ طولُ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الثالثِ على طولِ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الأولِ؟



الوحدةُ 3

حسابُ المثلثاتِ
Trigonometry

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ دراسةُ العلاقاتِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ (أوْ ما يُسمّى علمَ المثلثاتِ) أحدَ أهمِّ فروعِ الرياضياتِ وأقدمِها؛ إذْ ساعدَ هذا العلمُ قدماءَ المصريينَ على بناءِ الأهراماتِ ودراسةِ الفَلَكِ، وقدِ استمرَّ الاهتمامُ بِهِ حتّى اليومِ؛ فكانَ أساسًا لكثيرٍ منَ العلومِ الأُخرى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ مفهومَ جيبِ الزاويةِ الحادَّةِ، وجيبَ تمامِها، وظلِّها بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ.

✓ استخدامَ العلاقةِ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.

✓ حَلَّ معادلاتٍ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ ضمنَ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◂ ماهيةَ دائرةِ الوحدةِ، ووضعَ الزاويةِ القياسيَّ.

◂ إيجادَ النسبِ المثلثيةِ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.

◂ تمثيلَ الاقتراناتِ المثلثيةِ في المستوى الإحداثيِّ، واستنتاجَ خصائصِها.

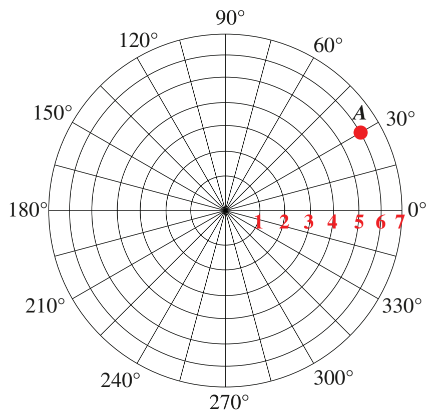
◂ حَلَّ معادلاتٍ مثلثيةٍ، بحيثُ تكونُ مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.

مشروعُ الوحدةِ

إنشاءُ نظامٍ إحداثيٍّ جديدٍ

فكرةُ المشروعِ إنشاءُ نظامٍ إحداثيٍّ جديدٍ، يعتمدُ البُعْدَ عنْ نقطةٍ مرجعيةٍ، وقياسَ زاويةِ الميلِ على الخطِّ الأفقيِّ.

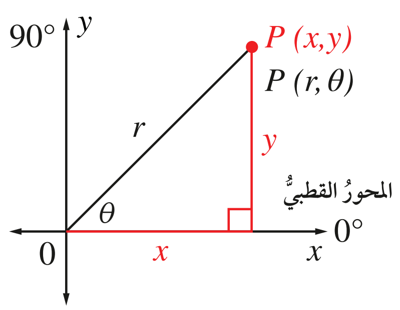
الموادُّ والأدواتُ أوراقٌ، مسطرةٌ، منقلةٌ، فرجارٌ، آلةٌ حاسبةٌ.



نظامُ الإحداثياتِ القطبيةِ: يُمكِنُ تحديدُ موقعِ أيِّ نقطةٍ في المستوى باستعمالِ الزوجِ المُرتَّبِ (r, θ)، حيثُ:

r: بُعْدُ النقطةِ عنْ نقطةٍ مرجعيةٍ تُسمّى القطبَ.

θ: الزاويةُ بينَ الشعاعِ المارِّ بالنقطةِ والقطبِ، والمحورِ القطبيِّ، وهوَ الشعاعُ الأفقيُّ منَ القطبِ باتجاهِ اليمينِ. يُلاحَظُ منَ الشكلِ المجاورِ أنَّ إحداثيَّي النقطةِ A هما: $(6, 30^\circ)$. تُسمّى هذهِ الطريقةُ نظامَ الإحداثياتِ القطبيةِ.



تحويلُ الإحداثياتِ القطبيةِ إلى إحداثياتٍ ديكارتيةٍ: لتحويلِ الإحداثياتِ القطبيةِ إلى إحداثياتٍ ديكارتيةٍ، أرسمُ عمودًا منَ النقطةِ التي يُرادُ تحويلُ إحداثيَّيْها إلى المحورِ الأفقيِّ، ثمَّ أستعملُ النسبَ المثلثيةَ لحسابِ طولَيْ ضلعَيِ المثلثِ الناتجِ، كما في الشكلِ المجاورِ، للحصولِ على الإحداثيَّيْنِ x وَ y لتلكَ النقطةِ. للتحويلِ منَ النظامِ الديكارتيِّ إلى النظامِ القطبيِّ، أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ r وَ θ بطريقةٍ عكسيةٍ، وذلكَ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أستعملُ مسطرةً وفرجارًا لرسمِ نسخةٍ مُكبَّرةٍ للمستوى القطبيِّ أعلاهُ، مُحدِّدًا عليْهِ مواقعَ 6 نقاطٍ تمثلُ رؤوسَ سُداسيٍّ منتظمٍ، ثمَّ أَجِدُ إحداثياتِها القطبيةِ (r, θ)، والديكارتيةِ (x, y).

2. أَصِلُ بينَ النقاطِ الستةِ بلونٍ مختلفٍ، ثمَّ أستعملُ قانونَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ لإيجادِ محيطِ الشكلِ السداسيِّ.

عرضُ النتائجِ:

أُصمِّمُ معَ أفرادِ مجموعتي مجلةً أوْ لوحةً تتضمَّنُ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ.
- وصفٌ لتطبيقٍ حياتيٍّ تُستعمَلُ فيهِ الإحداثياتُ القطبيةُ.

الدرسُ 1

النسبُ المثلثيةُ
Trigonometric Ratios

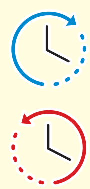
فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الوضعِ القياسيِّ للزاويةِ، وربطُ النسبِ المثلثيةِ بدائرةِ الوحدةِ، وإيجادُها للزوايا الربعيةِ، وإيجادُ النسبتيْنِ المثلثيتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في حالِ معرفةِ إحدى النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ.

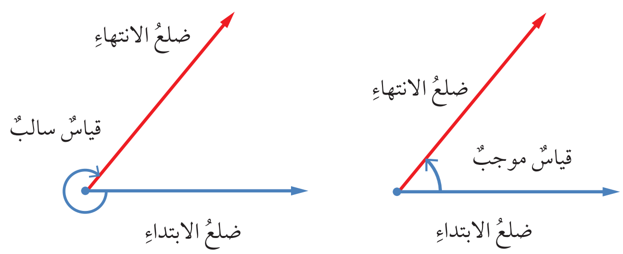
المصطلحاتُ ضلعُ الابتداءِ، ضلعُ الانتهاءِ، الوضعُ القياسيُّ، دائرةُ الوحدةِ، الزاويةُ الربعيةُ.

مسألةُ اليومِ تعلَّمْتُ سابقًا إيجادَ النسبِ المثلثيةِ لزوايا حادَّةٍ، مثلِ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ. ولكنْ، كيفَ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ أكبرَ منْ 90°، مثلِ الزاويةِ بينَ شفراتِ مروحةِ توليدِ الطاقةِ الكهربائيةِ؟

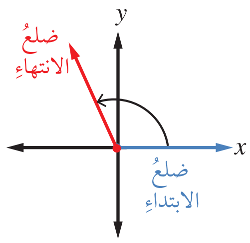
الزاويةُ هيَ اتحادُ شعاعيْنِ لهُما نقطةُ البدايةِ نفسُها. والنقطةُ المشتركةُ تُعرَفُ برأسِ الزاويةِ، أمّا الشعاعانِ فيُسمّى أحدُهُما **ضلعَ الابتداءِ** (initial side)، والآخرُ **ضلعَ الانتهاءِ** (terminal side). يوجدُ قياسانِ لأيِّ زاويةٍ؛ أحدُهُما موجبٌ عندما يدورُ ضلعُ الانتهاءِ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، والآخرُ سالبٌ حينَ يدورُ ضلعُ الانتهاءِ معَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

إرشادٌ

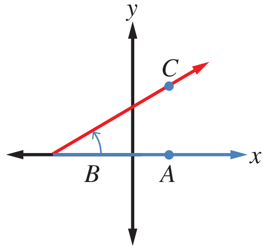




تكونُ الزاويةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position) إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصلِ $(0, 0)$، وضلعُ ابتدائِها مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ.



زاويةٌ في الوضعِ القياسيِّ.



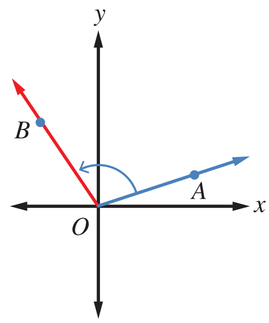
زاويةٌ ليست في الوضعِ القياسيِّ.

مثال 1

أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أمْ لا، مُبيِّنًا السببَ:

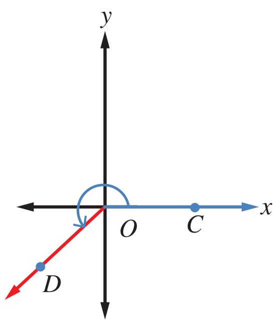
1

الزاويــةُ AOB ليسَــتْ في وضعٍ قياســيٍّ؛ لأنَّ ضلــعَ ابتدائِها لا ينطبــقُ على محورِ x الموجبِ.



2

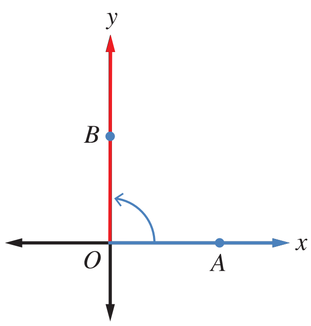
الزاويةُ COD في وضعٍ قياســيٍّ؛ لأنَّ ضلعَ ابتدائِهــا ينطبقُ علــى محــورِ x الموجبِ، ورأسُها على نقطةِ الأصلِ O.



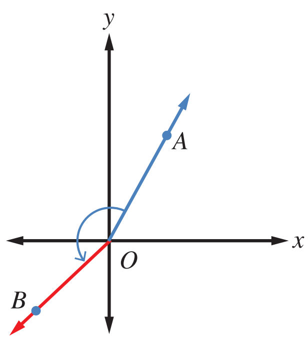
أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أمْ لا، مُبيِّنًا السببَ:

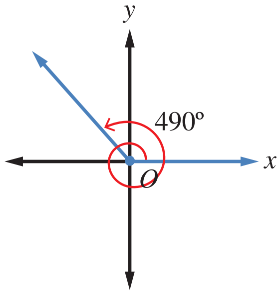
1



2



إذا دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ في الوضعِ القياسـيِّ دورةً كاملةً عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها بينَ 0° وَ 360°. وإذا استمرَّ في دورانِهِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها أكبرُ منْ 360°.

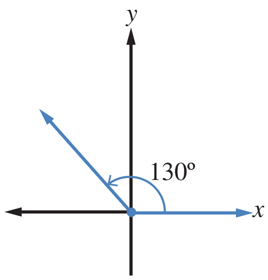


مثال 2

أرسمُ في الوضعِ القياسيِّ الزاويةَ المعطى قياسُها في ما يأتي، مُحدِّدًا مكانَها:

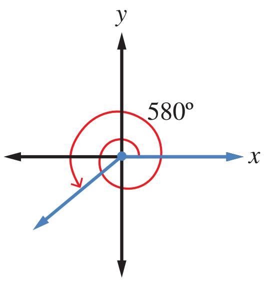
1 **130°**

أرسمُ المحوريْنِ الإحداثيينِ، ومنْ نقطةِ الأصلِ أرسمُ ضلعَ الابتداءِ مُنطبِقًـا على محورِ x الموجبِ، ثمَّ أضعُ مركـزَ المنقلةِ على نقطةِ الأصلِ، وتدريجَ المنقلةِ 0° على ضلعِ الابتداءِ، ثمَّ أُعيِّنُ نقطةً مقابلَ التدريجِ 130°. بعدَ ذلكَ أرسـمُ ضلعَ الانتهاءِ منْ نقطةِ الأصلِ إلى النقطةِ التي عيَّنْتُها، فأجِدُ أنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ يقعُ في الربعِ الثاني.



2 **580°**

بمـا أنَّ $580^\circ = 360^\circ + 220^\circ$، فإنَّ ضلـعَ انتهاءِ الزاويةِ 580° هوَ نفسُهُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ 220° الذي يقعُ في الربعِ الثالثِ.



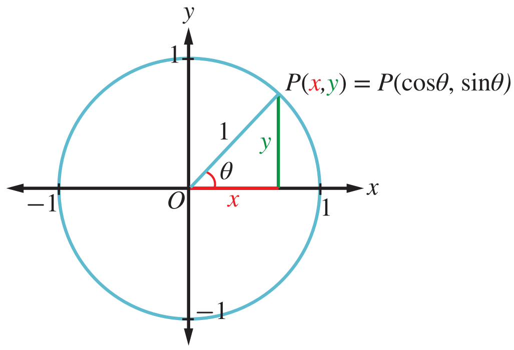
إرشادٌ

المنقلةُ ذاتُ شـكلِ نصفِ الدائـرةِ لهـا تدريجـانِ متعاكسـانِ، يبدأُ كلٌّ منْهُما منْ 0°، وينتهي عندَ 180°؛ لـذا يجـبُ دائمًـا وضعُ التدريجِ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ عندَ قياسِها، أوْ رسمِها.

أتحقق من فهمي

أرسمُ زاويةً قياسُها 460° في الوضعِ القياسيِّ، مُحدِّدًا مكانَها.

دائرةُ الوحدةِ (unit circle) هيَ دائرةٌ مركزُها نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها وحدةٌ واحدةٌ. إذا رُسِمَتِ الزاويةُ θ في الوضعِ القياسيِّ، فإنَّ ضلعَ انتهائِها يقطعُ دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ وحيدةٍ هيَ $P(x, y)$. ومعَ تغيُّرِ قياسِ الزاويةِ يتغيَّرُ موقعُ النقطةِ P على الدائرةِ، ويتغيَّرُ إحداثيّاها.



يُمكِنُ تعريفُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ θ بدلالةِ إحداثيَّيْ P كما يأتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \qquad \sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

لغة الرياضيات

الحرف اليوناني θ يُقرَأُ: ثيتا، وهو يُستعمَل للدلالة على قياسِ الزاويةِ.

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ الرمزُ $\sin\theta$ على نسبةِ جيبِ الزاويةِ θ، والرمزُ $\cos\theta$ على نسبةِ جيبِ التمامِ، والرمزُ $\tan\theta$ على نسبةِ ظلِّ الزاويةِ θ.

مثال 3

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ الواردةِ في ما يأتي:

1) $P(-0.6, 0.8)$

$\sin\theta = y = 0.8, \qquad \cos\theta = x = -0.6, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$

2) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$\sin\theta = y = -\frac{12}{13}, \qquad \cos\theta = x = \frac{5}{13}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$

إرشادٌ

النسبُ المثلثيةُ الأساسيةُ للزاويةِ θ هيَ: $\sin\theta$، $\cos\theta$، وَ $\tan\theta$.

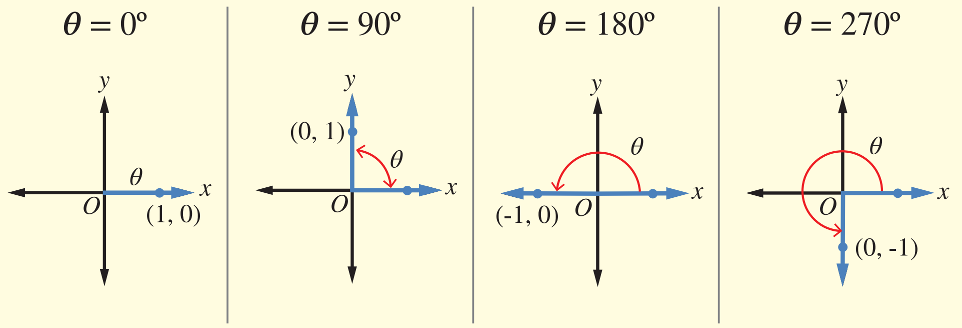
أتحقق من فهمي

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ النقطةِ $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

عندَ رسـمِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسـيِّ، قدْ يقعُ ضلـعُ انتهائِها في أحدِ الأربـاعِ الأربعةِ، فيقـالُ عندئذٍ إنَّ الزاويةَ θ واقعةٌ في الربعِ كذا، وقـدْ ينطبقُ ضلعُ انتهائِها على أحدِ المحورَيْنِ الإحداثيَّيْنِ، فتُسمّى الزاويةُ θ في هذهِ الحالةِ **زاويةً ربعيةً** (quadrantal angle).

مفهومٌ أساسيٌّ **الزوايا الربعيةُ**

الزوايا الربعيةُ في دائرةِ الوحدةِ:



يُمكِـنُ تحديـدُ النسـبِ المثلثيـةِ للزوايـا الربعيةِ مـنْ إحداثيـاتِ نقـاطِ تقاطـعِ دائرةِ الوحـدةِ مـعَ المحوريْـنِ الإحداثييْـنِ. فمثـلًا، يتقاطـعُ ضلـعُ انتهـاءِ الزاويـةِ $90°$ في الوضعِ القياسـيِّ مـعَ دائرةِ الوحـدةِ في النقطـةِ $P(0, 1)$. وبذلـكَ، فـإنَّ: $\sin 90° = 1$، $\cos 90° = 0$، ويكونُ $\tan 90°$ غيرَ مُعرَّفٍ لأنَّهُ لا تجوزُ القسمةُ على صفرٍ.

مثال 4

أينَ يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُـها $180°$ دائرةَ الوحدةِ إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ؟ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ لها.

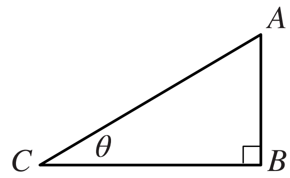
يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُها $180°$ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $C(-1, 0)$، إذنْ:

$$\sin 180° = y = 0, \quad \cos 180° = x = -1, \quad \tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويتيْنِ اللتيْنِ قياسُ كلٍّ منْهُما $270°$، وَ $360°$ على الترتيبِ.

إذا كانَتْ θ زاويةً حادَّةً، فإنَّهُ يُمْكِنُ رسمُ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ تكونُ θ إحدى زواياهُ.



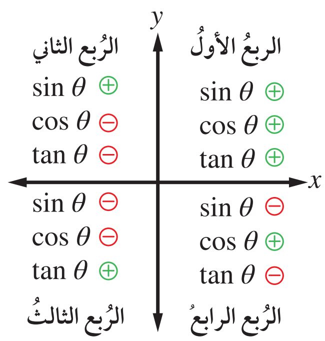
نظريةُ فيثاغورس $$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

بقسمةِ الطرفيْنِ على $(AC)^2$ $$\frac{(BC)^2}{(AC)^2} + \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{(AC)^2}{(AC)^2}$$

بتطبيقِ قوانينِ الأسسِ $$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

بالتعويضِ $$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

تظلُّ هذهِ النتيجةُ صحيحةً بقطعِ النظرِ عنْ قياسِ الزاويةِ θ، وهيَ تُستعمَلُ لإيجادِ إحدى هاتيْنِ النسبتيْنِ إذا عُلِمَتِ الأُخرى ولكن يجبُ مراعاةُ إشاراتِ النسبِ المثلثيةِ؛ فهيَ تختلفُ بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ في الوضعِ القياسيِّ كما هوَ مُوضَّحٌ في الشكلِ المجاورِ.



مثال 5

أَجِدُ قيمةَ النسبتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ إذا كانَ:

1 $\sin\theta = -\frac{1}{5}$ ، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثالثِ.

نتيجةً لنظريةِ فيثاغورس $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$ $$\cos^2\theta + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 = 1$$

بطرحِ $\frac{1}{25}$ منَ الطرفيْنِ $$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$$

في الربعِ الثالثِ يكونُ $\cos\theta$ سالبًا $$\cos\theta = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/5}{-\sqrt{24}/5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

2 $\tan\theta = -3.5$ ، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثاني.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -3.5$$ بالتعويضِ

$$\sin\theta = -3.5\cos\theta$$ بضربِ الطرفيْنِ في $\cos\theta$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$ نتيجةً لنظريةِ فيثاغورس

$$\cos^2\theta + (-3.5\cos\theta)^2 = 1$$ بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$

$$\cos^2\theta + 12.25\cos^2\theta = 1$$ بالتربيعِ

$$13.25\cos^2\theta = 1$$ بالتبسيطِ

$$\cos^2\theta = \frac{1}{13.25}$$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 13.25

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{13.25}} \approx \pm 0.2747$$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\cos\theta = -0.2747$$ في الربعِ الثاني يكونُ $\cos\theta$ سالبًا

$$\sin\theta = -3.5 \times -0.2747$$ بتعويضِ قيمةِ $\cos\theta$

$$= 0.96145 \approx 0.96$$

برعَ عالِمُ الفَلَكِ والرياضياتِ المُسْلِمُ محمدُ بنُ جابرٍ البتانيُّ في علمِ المثلثاتِ، واكتشفَ العديدَ منَ العلاقاتِ المُهمَّةِ بينَ النسبِ المثلثيةِ، مثلَ:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ $\sin\theta$ وَ $\tan\theta$ إذا كانَ $\cos\theta = 0.8$، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الرابعِ.

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ:

4 240° **3** 330° **2** 160° **1** 225°

أُحدِّدُ الربعَ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممّا يأتي إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ:

8 265° **7** 100° **6** 75° **5** 285°

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

9 $\sin\theta > 0$ **10** $\cos\theta > 0$ **11** $\tan\theta < 0$ **12** $\sin\theta < 0$ و $\cos\theta < 0$

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

13 $\sin\theta = -0.7$ **14** $\tan\theta = 2$ **15** $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ **16** $\tan\theta = -1$

17 $\cos\theta = 0.45$ **18** $\sin\theta = 0.55$ **19** $\sin\theta = 0.3, \cos\theta < 0$ **20** $\tan\theta = -4, \sin\theta > 0$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

21 $P(0, -1)$ **22** $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$ **23** $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$ **24** $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثيتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ:

25 $\sin\theta = \frac{3}{4}$, $90° < \theta < 180°$ **26** $\tan\theta = 0.78$, $-1 < \sin\theta < 0$

27 $\cos\theta = -0.75$, $\tan\theta < 0$ **28** $\sin\theta = -0.87$, $270° < \theta < 360°$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

29 **تبريرٌ:** ما أكبرُ قيمةٍ لجيبِ الزاويةِ؟ ما أصغرُ قيمةٍ لهُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

30 **أكتشــفُ الخطأَ:** حَلَّ كلٌّ منْ أمجدَ وزينةٍ المســألةَ الآتيةَ. إذا كانَ $\tan x = 0.75$، وكانَتْ x بينَ $180°$ وَ $360°$، فما قيمةُ $\sin x + \cos x$؟

زينةُ:
$\sin x + \cos x = -1.4$

أمجدُ:
$\sin x + \cos x = 0.2$

أُحدِّدُ أيُّهُما كانَتْ إجابتُهُ صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرسُ 2

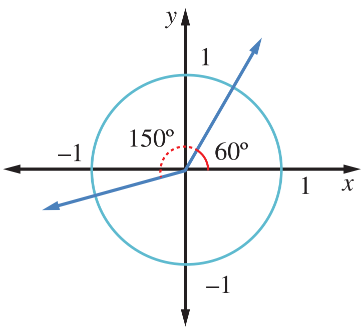
النسبُ المثلثيةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ

Trigonometric Ratios for Angles between 0º and 360º

فكرةُ الدرسِ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ لأيِّ زاويةٍ بينَ 0º وَ360º، وإيجادُ الزاويةِ إذا عُرِفَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ.

المصطلحاتُ الزاويةُ المرجعيةُ، معكوسُ النسبةِ المثلثيةِ.

مسألةُ اليومِ دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها 60º في الوضعِ القياسيِّ بزاويةِ 150º عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. كيفَ نجدُ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ الانتهاءِ معَ دائرةِ الوحدةِ في موقعِهِ الجديدِ؟



تعرَّفْنا في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ مرسومةٍ في الوضعِ القياسيِّ باستعمالِ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ انتهائِها معَ دائرةِ الوحدةِ، وستتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ إذا عُلِمَ قياسُ الزاويةِ بالدرجاتِ.

إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الربعِ الأولِ (أيْ كانَتْ $0º < \theta < 90º$)، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لهذهِ الزاويةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ بما نحفظُهُ منْ نسبٍ مثلثيةٍ للزوايا الخاصةِ: (30º, 45º, 60º).

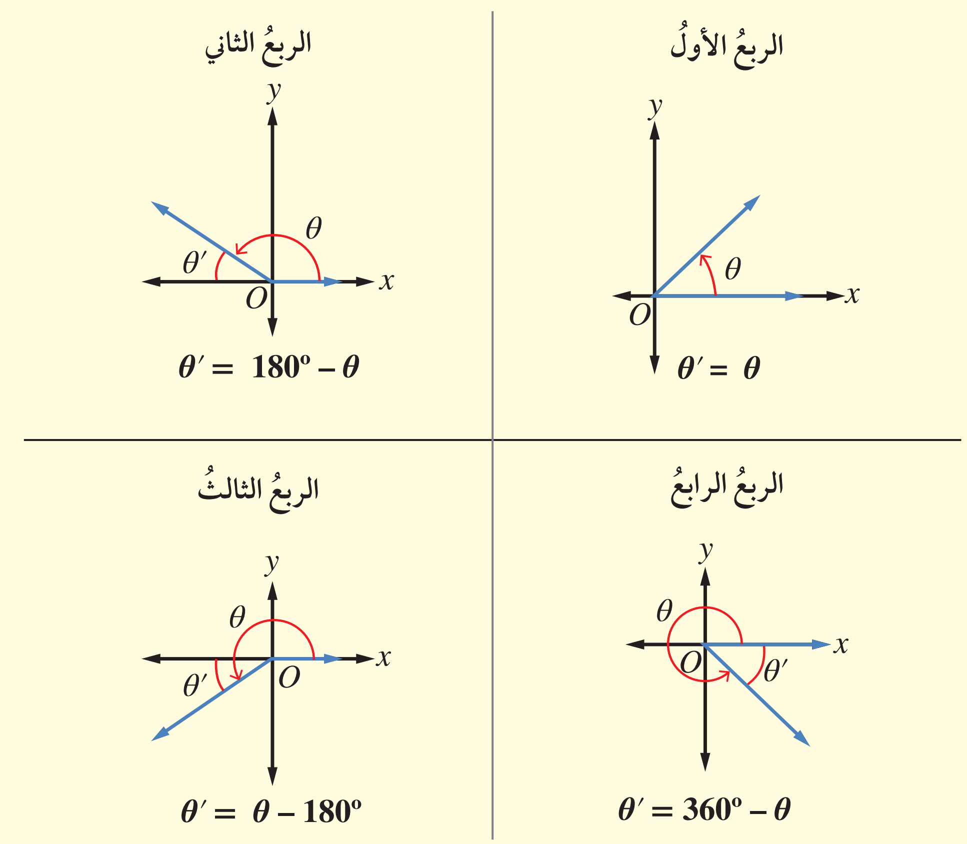
مراجعةُ المفاهيمِ

النسبُ المثلثيةُ للزوايا الخاصةِ

θ	0º	30º	45º	60º	90º
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غيرُ مُعرَّفٍ

أمّا إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ في أيٍّ منَ الأرباعِ الثلاثةِ الأُخرى، فإنَّ نسبَها المثلثيةَ تكونُ مُرتبطةً بالنسبِ المثلثيةِ **للزاويةِ المرجعيةِ** (reference angle) θ'، وهيَ الزاويةُ الحادَّةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ θ والمحورِ x.

مفهومٌ أساسيٌّ | **الزاويةُ المرجعيةُ**



النسبُ المثلثيةُ للزاويةِ θ تساوي النسبَ المثلثيةَ لزاويتِها المرجعيةِ θ' معَ اختلافِ الإشارةِ أحيانًا بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ.

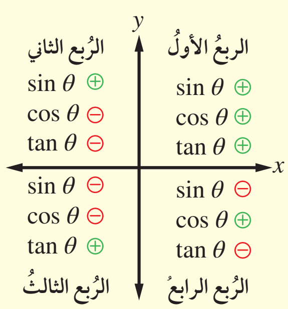
لإيجادِ النسبِ المثلثيةِ لأيِّ زاويةٍ θ، فإنَّنا نتَّبعُ الخطواتِ الثلاثَ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: إيجادُ الزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوةُ 2: إيجادُ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوةُ 3: تحديدُ إشارةِ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ θ بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهائِها.

أتذكَّرُ

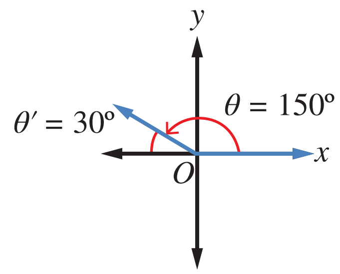


مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 150^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 150° في الربعِ الثاني؛ لذا أَستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = 180^\circ - \theta$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

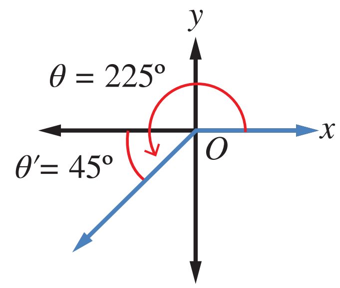
$= 180^\circ - 150^\circ$ $\theta = 150^\circ$

$= 30^\circ$ بالتبسيطِ

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0.5$ الجيبُ موجبٌ في الربعِ الثاني

2 $\cos 225^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 225° في الربعِ الثالثِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = \theta - 180^\circ$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$= 225^\circ - 180^\circ$ $\theta = 255^\circ$

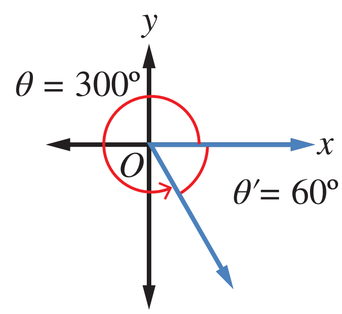
$= 45^\circ$ بالتبسيطِ

$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$ جيبُ التمامِ سالبٌ في الربعِ الثالثِ

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

3 $\tan 300^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 300° في الربعِ الرابعِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = 360^\circ - \theta$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta' = 360^\circ - 300^\circ$ $\theta = 300^\circ$

$= 60^\circ$ بالتبسيطِ

$\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ$ الظلُّ سالبٌ في الربعِ الرابعِ

$= -\sqrt{3}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 120^\circ$

b) $\tan 240^\circ$

c) $\cos 315^\circ$

d) $\sin 210^\circ$

جميعُ الزوايا في المثالِ السابقِ مُرتبِطةٌ بزوايا مرجعيةٍ مألوفةٍ، مثلِ: 30°، أوْ 45°، أوْ 60°، وهيَ زوايا خاصةٌ عرفْنا قيمَ النسبِ المثلثيةِ لها. ولكنْ، كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ لأيِّ زوايا أُخرى؟ يُمكِنُ إيجادُ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، ثمَّ تحديدِ الإشارةِ المناسبةِ تبعًا للربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ.

انتبهْ

يجبُ ضبطُ الآلةِ الحاسبةِ على خيارِ درجاتٍ (DEGREES) قبلَ استعمالِها. أسألُ مُعلِّمي/ مُعلِّمتي.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

1 $\sin 255^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 255° في الربعِ الثالثِ؛ لذا أستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

$\theta' = \theta - 180^\circ$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta' = 255^\circ - 180^\circ$ $\theta = 255^\circ$

$= 75^\circ$ بالتبسيطِ

$\sin 255^\circ = -\sin 75^\circ$ الجيبُ سالبٌ في الربعِ الثالثِ

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin 75^\circ$ كما يأتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 75، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 7 5 = 0.965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ: 0.966

إذنْ، $\sin 255^\circ \approx -0.966$

يُمكِنُ أيضًا إيجادُ $\sin 255^\circ$ مباشــرةً باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ منْ دونِ إيجادِ الزاويةِ المرجعيةِ على النحوِ الآتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 255 ، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 2 5 5 = -0.965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشــريةٍ، تكونُ النتيجةُ -0.966 ، وهيَ النتيجةُ نفسُها التي توصَّلْتُ إليْها آنفًا.

2 **$\tan 168^\circ$**

أضغطُ على مفتاحِ tan ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 168، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 1 6 8 = -0.212556561

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ: -0.213

إذنْ، $\tan 168^\circ \approx -0.213$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

a) $\sin 320^\circ$ **b)** $\cos 175^\circ$ **c)** $\tan 245^\circ$

يُمكِنُ اســتعمالُ الآلةِ الحاســبةِ لإيجادِ قياسِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ (في الربعِ الأولِ) عُلِمَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ، وذلكَ باستعمالِ **معكوسِ النسبةِ المثلثيةِ** (inverse trigonometric ratio). فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ الجيبِ ($\sin^{-1}$)، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامَ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ جيبِ التمــامِ ($\cos^{-1}$)، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ اســتُعمِلَ معكــوسُ الظلِّ ($\tan^{-1}$) . وبالطريقةِ نفســها، يُمكِنُ إيجادُ قيــاسِ أيِّ زاويةٍ في الأرباعِ الثلاثةِ الباقيةِ باســتعمالِ مفهومِ الزاويةِ المرجعيةِ وإشاراتِ النسبِ المثلثيةِ في الأرباعِ الأربعةِ.

لغةُ الرياضياتِ

- نقرأُ معكوسَ الجيبِ sine inverse.
- نقرأُ معكوسَ جيبِ التمامِ cosine inverse.
- نقرأُ معكوسَ الظلِّ tan inverse.

مثال 3

أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في ما يأتي، علمًا بأنَّ $0° \leq \theta \leq 360°$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1 $\sin\theta = 0.98$

$\theta = \sin^{-1}(0.98)$ — θ هيَ الزاويةُ التي نسبةُ الجيبِ لها 0.98

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}(0.98)$ كما يأتي:

SHIFT sin 0 . 9 8 = 78.521659

وبالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، تكونُ النتيجةُ: $78.5°$، وهيَ زاويةٌ مرجعيةٌ لزاويةٍ أُخرى؛ لأنَّها تقعُ في الربعِ الأولِ. وبما أنَّ الجيبَ موجبٌ في ربعيْنِ (الأولُ والثاني فقطْ)، فإنَّ الزاويةَ الأُخرى θ تكونُ في الربعِ الثاني، ويُمكِنُ إيجادُها باستعمالِ العلاقةِ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني التي تعرَّفْتُها آنفًا.

$\theta' = 180° - \theta$ — العلاقةُ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني

$\theta' = 78.5°$

$78.5° = 180° - \theta$

$\theta = 101.5°$ — بحَلِّ المعادلةِ

إذنْ، $\theta = 78.5°$، أوْ $\theta = 101.5°$

2 $\tan\theta = -1.2$

$\theta = \tan^{-1}(-1.2)$ — θ هيَ الزاويةُ التي نسبةُ الظلِّ لها تساوي -1.2

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}(-1.2)$ كما يأتي:

SHIFT tan 1 . 2 = 50.1944289

وبالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، تكونُ النتيجةُ: $50.2°$؛ ولأنَّ الظلَّ يكونُ سالبًا في ربعيْنِ فقطْ (الثاني والرابعُ)؛ فإنَّ الزاويةَ $50.2°$ ليسَتْ منَ الحلولِ، وإنَّما زاويةٌ مرجعيةٌ لها.

إرشادٌ

بعضُ الآلاتِ الحاسبةِ تحوي المفتاحَ 2ND بدلَ المفتاحِ SHIFT .

أُفكِّرُ

أتجاهلُ الإشارةَ السالبةَ. لماذا؟

إذا اســتعملْنا العلاقةَ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزوايا المناظرةِ فــي الربعيْنِ الثاني والرابعِ، فإنَّنا سنجدُ هاتيْنِ الزاويتيْنِ:

زاويةُ الربعِ الثاني: $180^\circ - 50.2^\circ = 129.8^\circ$

زاويةُ الربعِ الرابعِ: $360^\circ - 50.2^\circ = 309.8^\circ$

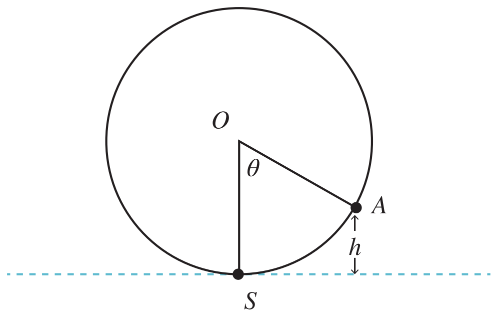
أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمــةَ (أوْ قيمَ) θ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بــأنَّ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

a) $\cos\theta = -0.4$ **b)** $\tan\theta = 5.653$ **c)** $\sin\theta = -0.5478$

مثال 4: من الحياة

نواعيرُ: يُمثِّلُ الشــكلُ الآتي ناعورةَ ماءٍ تدورُ بســرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثِّلُ S في الشكلِ أخفضَ نقطةٍ تبلغُهــا الناعورةُ تحتَ المــاءِ، في حينِ تُمثِّلُ النقطــةُ O مركزَ الناعــورةِ. إذا دارتِ الناعورةُ بزاويةِ θ؛ فإنَّ ارتفــاعَ صندوقِ الماءِ الذي موقعُهُ النقطةُ A عنْ أخفــضِ نقطةٍ تبلغُها الناعورةُ يُعطى بالعلاقةِ: $h = 7.5 - 7.5\cos\theta$ حيثُ (h) الارتفاعُ بالأمتارِ. أَجِدُ طولَ قُطرِ الناعورةِ.



الناعــورةُ آلــةٌ مائيَّــةٌ دائريَّةٌ تتحــرَّكُ بفعلِ جريــانِ مياهِ الأنهارِ، وترفعُ الماءَ بوساطةِ صناديــقَ إلى حوضٍ علويٍّ؛ فينســابُ فــي قنــواتٍ نحوَ البساتينِ على ضفَّةِ النهرِ.

عندَمــا يصلُ الصندوقُ إلى النقطةِ الواقعةِ فوقَ S مباشــرةً، فإنَّ ارتفاعَــهُ عنْ أخفضِ موقعٍ لهُ يُساوي طولَ قُطرِ الناعورةِ، ويكونُ قياسُ θ في تلكَ اللحظةِ 180°:

$$h = 7.5 - 7.5\cos 180^\circ$$ بتعويضِ قيمةِ θ

$$= 7.5 - 7.5(-1)$$ $\cos 180^\circ = -1$

$$= 7.5 + 7.5 = 15$$ بالتبسيطِ

إذنْ، طولُ قُطْرِ الناعورةِ هوَ: 15 m

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ارتفاعَ صندوقَ الماءِ الذي موقعُهُ النقطةُ A عندما تصبحُ $\theta = 235^\circ$

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\cos 270^\circ$

2 $\tan 120^\circ$

3 $\tan 315^\circ$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

4 $\sin 130^\circ$

5 $\sin 325^\circ$

6 $\cos 250^\circ$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

7 325°

8 84°

9 245°

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

10 280°

11 150°

12 215°

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الظلِّ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

13 75°

14 300°

15 235°

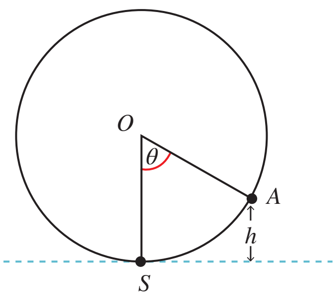
أَجِدُ في ما يأتي قيمةَ (أوْ قيمَ) θ، علمًا بـأنَّ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ (إنْ لَزِمَ):

16 $\sin \theta = 0.55$

17 $\cos \theta = -0.05$

18 $\tan \theta = 0$

19 **ترفيهٌ:** يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دولابًا دوّارًا في مدينةِ ألعابٍ يدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثِّلُ S في الشكلِ نقطةَ صعودِ الراكبِ الذي موقعُهُ الآنَ عندَ النقطةِ A، في حينِ تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدولابِ. إذا دارَ الدولابُ بزاويةِ θ، فإنَّ ارتفاعَ الراكبِ عنِ الأرضِ (h) بالأمتارِ يُعطى بالعلاقةِ: $h = 12.5 - 12.5 \cos \theta$. أَجِدُ ارتفاعَ الراكبِ عن سطحِ الأرضِ عندما تصبحُ $\theta = 345^\circ$.



20 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

21 **تحدٍّ:** أَجِدُ مجموعةَ قيمِ θ التي تجعلُ المتباينةَ الآتيةَ صحيحةً، علمًا بأنَّ $90^\circ < \theta < 180^\circ$:

$$\cos \theta + \sin \theta < 0$$

22 **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَتْ سندسُ نسبةَ جيبِ إحدى الزوايا في الربعِ الثاني، فكانَتْ قيمتُها 1.4527 هلْ إجابةُ سندسَ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

23 **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمةَ ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots\ldots + \cos 357^\circ + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ + \cos 360^\circ$$

الدرسُ
3

تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ
Graphing Trigonometric Functions

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ اقترانات مثلثيةٍ مجالُها الفترةُ $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$ بيانيًّا.

مسألةُ اليومِ يرتبطُ عمقُ الماءِ عندَ نقطةٍ مُعيَّنةٍ في أحدِ الموانئِ بالزمنِ حسبَ العلاقةِ:

$$y = \sin x, x \geq 0$$

حيثُ: y عمقُ الماءِ بالأمتارِ، وَ x الزمنُ بالساعاتِ بعدَ منتصفِ الليلِ. هلْ يُمكِنُ رسمُ منحنى يُبيِّنُ تغيُّرَ عمقِ الماءِ في الميناءِ معَ مرورِ الوقتِ؟

تُستخدَمُ الاقتراناتُ المثلثيةُ في تمثيلِ مواقفَ حياتيةٍ مرتبطةٍ بالحركةِ الدوريةِ، مثلِ: موجاتِ الصوتِ، وضغطِ الدمِ في جسمِ الإنسانِ، وارتفاعِ مقعدٍ في دولابٍ دوّارٍ، وتغيُّرِ عددِ ساعاتِ النهارِ خلالَ عامٍ، وغيرِ ذلكَ. ولكنْ، هلْ يُمكِنُ رسمُ منحنى اقترانٍ يُبيِّنُ كيفَ تبدو الحركةُ الدوريةُ التي تُمثِّلُها هذهِ الاقتراناتُ؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ تمثيلِ اقتراناتٍ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ في المستوى الإحداثيِّ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ للمُتغيِّريْنِ x وَ y، وتمثيلِ كلِّ زوجٍ (x, y) بنقطةٍ في المستوى، ثمَّ رسمِ المنحنى الذي يصلُ هذهِ النقاطَ ببعضِها. وفي هذا السياقِ، يُمكِنُ اتِّباعُ الطريقةِ نفسِها لتمثيلِ الاقتراناتِ المثلثيةِ.

مثال 1

أرسمُ منحنى كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ ثم أَصِفُهُ، علمًا بأنَّ $0^{\circ} \leq x \leq 360^{\circ}$:

1 $y = \sin x$

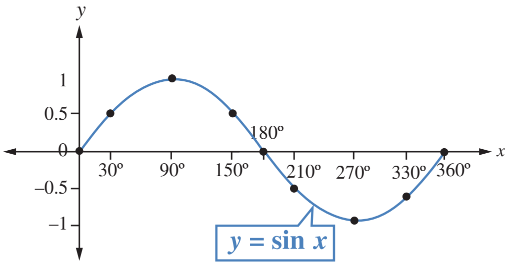
الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً، نسبُها المثلثيةُ معروفةٌ، مثلَ: الزوايا الربعيةِ، والزوايا التي زاويتُها المرجعيةُ 30°.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\sin x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

x	0º	30º	90º	150º	180º	210º	270º	330º	360º
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبةَ: (0º, 0), (30º, 0.5), (90º, 1), ……(360º, 0) في المستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 4: أَصِلُ بمنحنًى أملسَ بينَ النقاطِ، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ المجاورِ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\sin x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\sin x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ –1
- $\sin x$ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ $0º < x < 180º$، وسالبًا إذا كانَتْ $180º < x < 360º$.

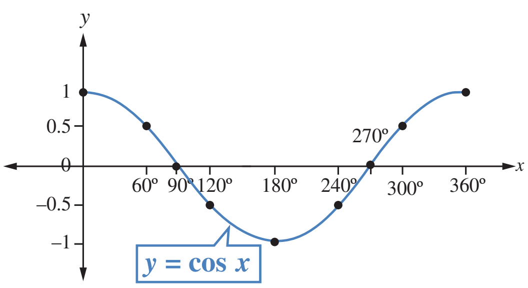
2 $y = \cos x$.

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أجِدُ قيمةَ $\cos x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

x	0º	60º	90º	120º	180º	240º	270º	300º	360º
$y = \cos x$	1	0.5	0	–0.5	–1	– 0.5	0	0.5	1

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبةَ: (0º, 1), (60º, 0.5), (90º, 0),……(360º, 1) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ بمنحنًى أملسَ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\cos x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\cos x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ –1

أُفكِّرُ

ما العلاقةُ بينَ منحنى اقترانِ الجيبِ والزوايا المرجعيةِ التي تعلَّمْتُها في الدرسِ السابقِ؟

إرشادٌ

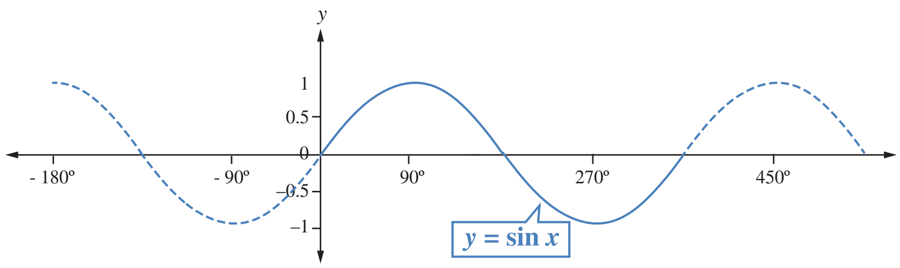
يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لتمثيلِ الاقترانِ $\cos x$، وملاحظةِ أكبرِ قيمةٍ لهُ، وأصغرِ قيمةٍ لهُ أيضًا.

- $\cos x$ يكـونُ موجبًـا إذا كانَتْ $0^\circ \le x < 90^\circ$، وَ $270^\circ < x \le 360^\circ$، وسـالبًا إذا كانَتْ $90^\circ < x < 270^\circ$.

أتحقق من فهمي

أرسـمُ منحنى الاقترانِ $y = \sin x$، علمًا بأنَّ $90^\circ \le x \le 360^\circ$، مُسـتعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الجيبِ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

تعرَّفْتُ أنَّهُ توجدُ زوايا أكبرُ منْ 360°. فإذا دارَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ (في الوضعِ القياسـيِّ) أكثرَ مـنْ دورةٍ واحدةٍ عكسَ اتجاهِ عقاربِ السـاعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا أكبـرَ من 360°، وإذا دارَ معَ اتجاهِ عقاربِ السـاعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا قياسُـها سـالبٌ؛ ولهذا، فقدْ يكونُ قياسُ الزاويةِ أيَّ عددٍ حقيقيٍّ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ للأعدادِ الحقيقيةِ جميعِها، وليسَ فقطْ للزوايا الواقعةِ بينَ 0° وَ 360°، أُلاحِظُ منحنى اقترانِ الجيبِ الآتي.




كاشفُ الاهتزازِ (الأوسيليسكوبُ) هوَ جهازٌ يرسـمُ جُهْدَ الإشـاراتِ الإلكترونيةِ على شكلِ مُخطَّطٍ يُشْبِهُ التمثيـلَ البيانيَّ لاقتـرانِ الجيبِ، ويُسـتعمَلُ لاكتشـافِ أعطـالِ الأجهزةِ الكهربائيةِ.

والآنَ، سأرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، مُلاحِظًا الفرقَ بينَهُ وبينَ منحنيَي الاقترانيْنِ $\sin x$، وَ $\cos x$.

مثال 2

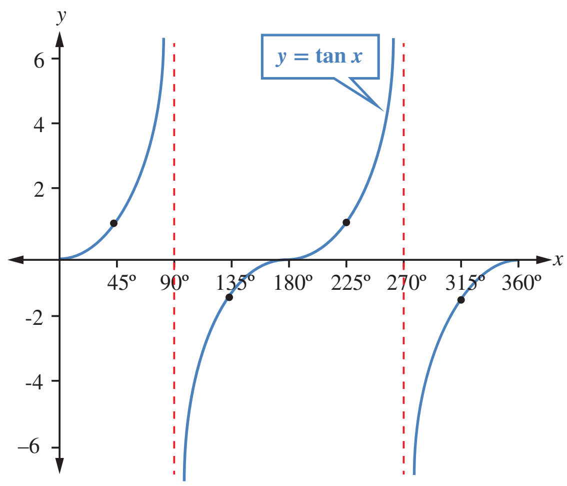
أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$ ، ثمَّ أَصِفُهُ علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا، ثمَّ أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\tan x$ لكلِّ زاويةٍ x ، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\tan x$	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	-1	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	-1	0

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا صعوبةَ التوصيلِ بينَ النقاطِ بمنحنًى واحدٍ؛ لأنَّ قيمةَ $\tan x$ غيرُ مُعرَّفةٍ للزاويتيْنِ $90°$ وَ $270°$؛ لـذا أَصِلُ النقاطَ قبلَ الزاويةِ $90°$ ببعضِها، والنقاطَ بينَ الزاويتيْنِ $90°$ وَ $270°$ ببعضِها، والنقاطَ بعدَ الزاويةِ $270°$ ببعضِها، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ الآتي.



أَتعلَّمُ

يُسمّى كلٌّ منَ المستقيميْنِ $x = 90°$ وَ $x = 270°$ خطَّ تقاربٍ رأسيٍّ لمنحنى $\tan x$؛ لأنَّ المنحنى يقتربُ كثيرًا منْهُما، لكنَّهُ لا يقطعُهُما.

يُبيِّنُ الشكلُ أنَّ منحنى $\tan x$ غيرُ متصلٍ؛ فهوَ مُكوَّنٌ منْ عِدَّةِ قطعٍ، وأنَّ الظلَّ موجبٌ بينَ الزاويتيْنِ $0°$ وَ $90°$، وبينَ الزاويتيْنِ $180°$ وَ $270°$، وأنَّهُ يكونُ سالبًا بينَ الزاويتيْنِ $90°$ وَ $180°$، وبينَ الزاويتيْنِ $270°$ وَ $360°$.

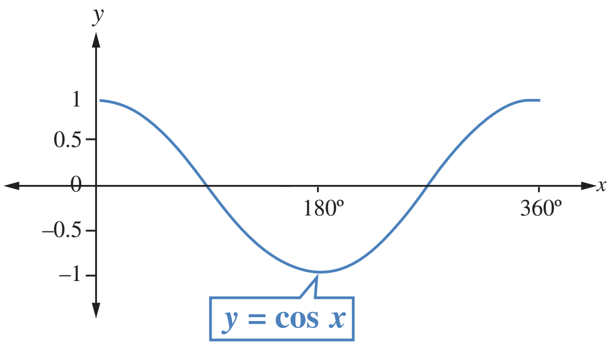
أتحقق من فهمي

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، علمًا بأنَّ $90° < x < 270°$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الظلِّ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

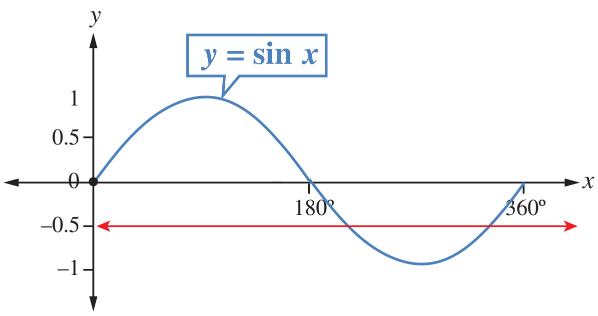
أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، ثمَّ أَصِفُهُ:

1. $y = \sin x \quad 0° \le x \le 270°$
2. $y = \cos x \quad 0° \le x \le 180°$
3. $y = \sin x \quad 0° \le x \le 180°$
4. $y = \tan x \quad 0° \le x \le 180°$



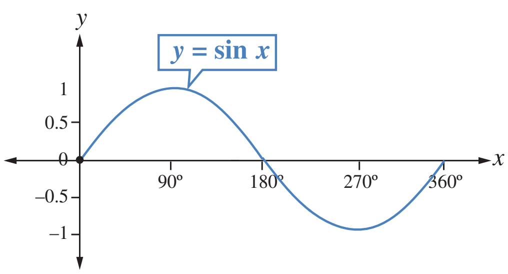
5 يُبيِّنُ الشـكلُ المجاوِرُ جزءًا منَ التمثيـلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\cos x = -0.5$



6 يُبيِّنُ الشـكلُ المجاوِرُ جزءًا منَ التمثيـلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \sin x$. بناءً على هذا الشـكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\sin x = -0.5$

أستعملُ التمثيلاتِ البيانيةَ الآتيةَ لأَجِدَ جميعَ القيمِ الممكنةِ لكلٍّ مِن: *a, b, c, d, e, f, g, h*.

7



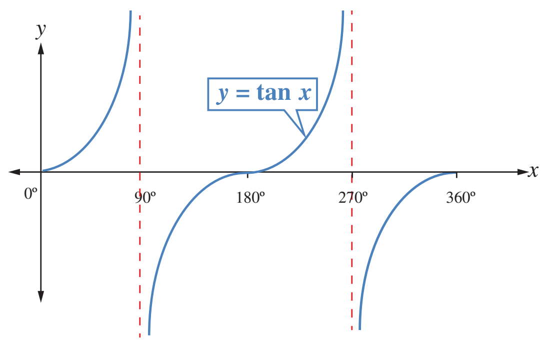
$\sin 0° = \sin a° = \sin b°$

$\sin 30° = \sin c°$

$\sin 60° = \sin d°$

$\sin 210° = \sin e°$

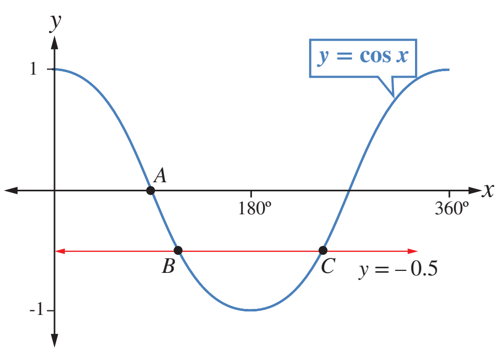
8



$\tan 0° = \tan e° = \tan f°$

$\tan 45° = \tan g°$

$\tan 60° = \tan h°$



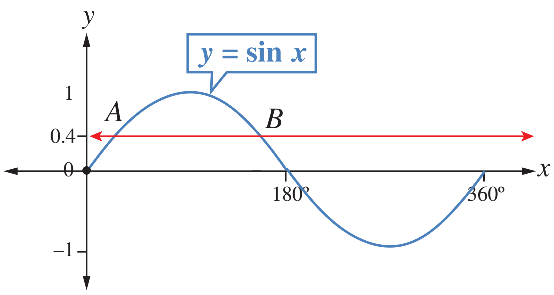
يُبيِّنُ الشـكلُ المجاوِرُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = -0.5$ في النقطتيْنِ B, C:

9 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A.

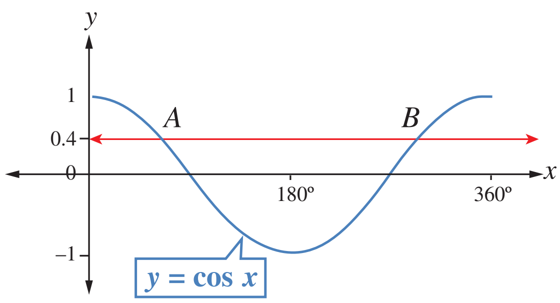
10 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ B, C باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ A و B في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

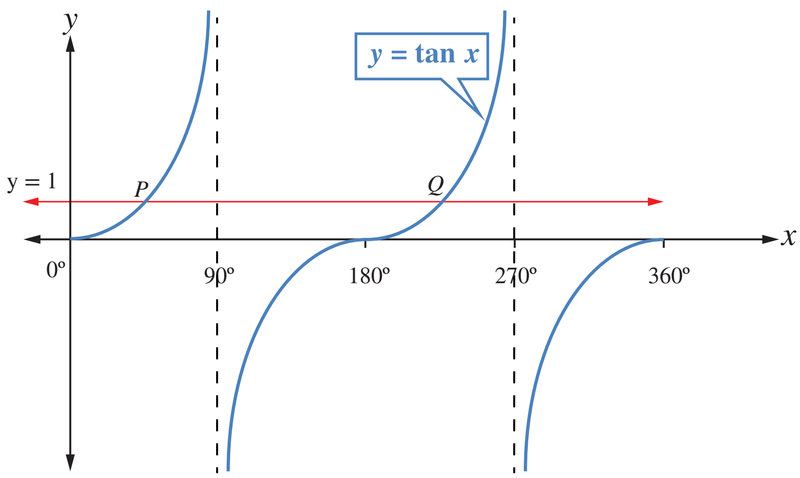
11



12



13 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \tan x$، حيثُ يقطعُ المستقيمُ $y = 1$ منحنى $y = \tan x$ في النقطتيْنِ: P، وَQ. أَكتبُ الإحداثيَّ x لكلٍّ منَ النقطتيْنِ: P، وَQ.



مهارات التفكير العليا

14 **تحدٍّ**: أرسمُ منحنيَي الاقترانيْنِ $y = \cos x$ وَ $f = 2\cos x$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، في الفترةِ $0° \leq x \leq 360°$، ثمَّ أُقارِنُ بينَهُما.

15 **أكتبُ**: ما الفرقُ بينَ منحنيَي الجيبِ وجيبِ التمامِ؟

الدرسُ 4

حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ
Solving Trigonometric Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ تتضمَّنُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ، وتكونُ فيها مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ دورةٍ واحدةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ المثلثيةُ.

مسألةُ اليومِ ساعةُ حائطٍ كبيرةٌ مُعلَّقةٌ على جدارِ غرفةٍ. إذا كانَ طولُ عقربِ الساعاتِ فيها 16 cm، وبُعْدُ رأسِ العقربِ عنْ سقفِ الغرفةِ يُمثَّلُ دائمًا بالعلاقةِ: $d = -60 \cos (30x) + 110$، حيثُ: d البُعْدُ بالسنتيمترِ، وَ x الوقتُ بالساعاتِ، فما الوقتُ الذي يبعدُ فيهِ رأسُ عقربِ الساعاتِ 118 cm عنِ السقفِ؟

المعادلةُ المثلثيةُ (trigonometric equation) هيَ معادلةٌ مُتغيِّراتُها نسبٌ مثلثيةٌ لزاويةٍ مجهولةٍ. وحَلُّ المعادلةِ المثلثيةِ يعني إيجادَ الزاويةِ (أوِ الزوايا) التي تُحقِّقُ هذهِ المعادلةَ، وتجعلُ منْها عبارةً صحيحةً.

منَ الأمثلةِ على المعادلاتِ المثلثيةِ:

$\sin x = 0.5$ $\qquad$ $\tan x = 2.435$ $\qquad$ $2 + \cos x = 3 - 2\cos x$ $\qquad$ $2\sin^2 x = 3$

يُمكِنُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ، مثلِ: $\sin x = a$، وَ $\cos x = a$، باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوِ استعمالِ ما نتذكَّرُهُ منْ نسبِ الزوايا الخاصةِ.

مثال 1

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

1 $\mathbf{2 \sin x = 1}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$180° - 30° = 150°$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: $30°$، وَ $150°$.

أَتذكَّرُ

يكونُ جيبُ الزاويةِ موجبًا في الربعيْنِ: الأولِ، والثاني.

2 $3\cos x - 1 = 2$

$3\cos x = 3$ بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = 1$ بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 3

$x = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 0°، وَ 360°

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

a) $2\cos x = \sqrt{3}$

b) $2\tan x + 3 = 1$

يتطلَّبُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ مزيدًا منَ التبسيطِ والمعالجةِ قبلَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 2

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1 $2(\tan x - 3) + 4 = 12,\ 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$2\tan x - 6 + 4 = 12$ باستعمالِ الخاصيةِ التوزيعيةِ

$2\tan x = 14$ بالتبسيطِ

$\tan x = 7$ بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 2

$x = \tan^{-1}(7)$ تعريفُ معكوسِ الظلِّ

$x \approx 81.9^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الظلَّ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثالثِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$$180^\circ + 81.9^\circ \approx 261.9^\circ$$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 81.9°، وَ 261.9°

أَتذكَّرُ

الزاويةُ المرجعيةُ هيَ الزاويةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ θ الحادةِ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ والمحورِ x.

2 $1 + 4\sin(3x) = 2.5\ ,\ 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

بطرحِ 1 منَ الطرفيْنِ $4\sin(3x) = 2.5 - 1$

بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 4 $\sin(3x) = \frac{1.5}{4}$

باستعمالِ الرمزِ θ بدلًا منْ $3x$ ، حيثُ: $0^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ $\sin\theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$

تعريفُ معكوسِ الجيبِ $\theta = \sin^{-1}(0.375)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\theta \approx 22.0^\circ$

$22^\circ \approx 3x \Rightarrow x \approx 7.3^\circ$

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

الزاويةُ في الربعِ الثاني $180^\circ - 22^\circ \approx 158^\circ$

بالتعويضِ $\theta = 3x \approx 158^\circ$

بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 3 $x \approx 52.7^\circ$

إذنْ، للمعادلـةِ $1 + 4\sin(3x) = 2.5$ حَـلّانِ ضمـنَ الفتـرةِ المعطاةِ في المسـألةِ، هما: 7.3°، وَ 52.7°

معلومةٌ أساسيةٌ

إذا كانَتْ $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$،

فإنَّ $0^\circ \leq 3x \leq 270^\circ$

أتحقق من فهمي

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

a) $3(\sin x + 2) = 3 - \sin x\ ,\ 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

b) $3\cos(2x) - 1 = 0\ ,\ 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

يُمكِنُ حَلُّ المعـادلاتِ المثلثيةِ التربيعيةِ بطرائقَ مشـابهةٍ لطرائقِ حَلِّ المعـادلاتِ التربيعيةِ الجبريةِ، أبرزُها: إيجادُ العاملِ المشـتركِ، والتحليلُ إلى ناتجِ ضربِ قوسـيْنِ، وغيرُ ذلكَ منَ الطرائقِ التي تعرَّفْناها سابقًا.

مثال 3

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0° \leq x < 360°$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ (إنْ لَزِمَ):

1) $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحوي هذهِ المعادلةُ نسبتيْنِ مثلثيتيْنِ، ويُلاحَظُ أنَّ $\sin x$ تكرَّرَ في حَدَّيِ المعادلةِ، ما يعني أنَّها تُشْبِهُ المعادلةَ $3yz - 2y = 0$؛ لذا يُمكِنُ تحليلُها بإخراجِ عاملٍ مشتركٍ:

$\sin x\,(3 \cos x - 2) = 0$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ $\sin x$

$3 \cos x - 2 = 0\,,\ \sin x = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

وبذلكَ أَتوصَّلُ إلى معادلتيْنِ بسيطتيْنِ، ثمَّ أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ على حِدَةٍ:

$\sin x = 0$ المعادلةُ الأولى

$x = 0°, x = 180°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الخاصةِ

$3 \cos x - 2 = 0$ المعادلةُ الثانيةُ

$3 \cos x = 2$ بإضافةِ 2 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = \frac{2}{3}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 3

$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ تعريفُ معكوسِ جيبِ التمامِ

$x \approx 48.2°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ جيبَ التمامِ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الرابعِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$x \approx 360° - 48.2° \approx 311.8°$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $0°, 180°, 48.2°, 311.8°$

أَتذكَّرُ

يكونُ جيبُ تمامِ الزاويةِ موجبًا في الربعيْنِ: الأولِ، والرابعِ.

2) $3 \sin^2 x = 2 \sin x + 1$

أجعلُ الطرفَ الأيمنَ منَ المعادلةِ صفرًا بطرحِ $(2 \sin x + 1)$ منَ الطرفيْنِ:

$3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

هذهِ المعادلةُ تُشْبِهُ المعادلةَ الجبريةَ $3y^2 - 2y - 1 = 0$؛ لذا يُمكِنُ حَلُّها بالتحليلِ إلى العواملِ:

$(3\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ بالتحليلِ إلى العواملِ

$3 \sin x + 1 = 0\,,\ \sin x - 1 = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

المعادلةُ الأولى $3\sin x + 1 = 0$

بطرحِ 1 منَ الطرفيْنِ $3\sin x = -1$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 3 $\sin x = -\frac{1}{3}$

تعريفُ معكوسِ الجيبِ $x = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، وتجاهلِ الإشارةِ السالبةِ $x \approx 19.5^\circ$

يُمثِّلُ ما سبقَ الزاويةَ المرجعيةَ للحَلِّ، لا الحَلَّ نفسَهُ؛ لأنَّ الجيبَ سالبٌ في الربعيْنِ: الثالثِ، والرابعِ.

حَلُّ هذهِ المعادلةِ في الربعِ الثالثِ هوَ: $180^\circ + 19.5^\circ \approx 199.5^\circ$

وحَلُّها في الربعِ الرابعِ هوَ: $360^\circ - 19.5^\circ \approx 340.5^\circ$

والآنَ، أَحُلُّ المعادلةَ $\sin x - 1 = 0$:

بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ $\sin x = 1$

تعريفُ معكوسِ الجيبِ $x = \sin^{-1}(1)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الخاصةِ $x = 90^\circ$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $90^\circ, 199.5^\circ, 340.5^\circ$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $4\sin x \tan x + 3\tan x = 0$

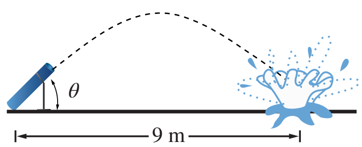
b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

مثال 4: من الحياة

مِدْفعُ هواءٍ يميلُ عنِ الأرضِ بزاويةٍ قياسُها θ. انطلقَ منْ فُوَّهتِهِ بالونٌ مملوءٌ بالماءِ بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 12 m/s، فسقطَ على بُعْدِ 9 m منَ المِدْفعِ. إذا كانَتِ العلاقةُ التي تُمثِّلُ المسافةَ الأفقيةَ d التي يقطعُها البالونُ هيَ:

$$d = \frac{1}{10} v^2 \sin 2\theta$$

حيثُ v سرعةُ البالونِ الابتدائيةُ، فما قيمةُ θ؟ أقرّبُ إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ.



الخطوةُ 1: أُعوِّضُ القيمَ المعطاةَ في المسألةِ في المعادلةِ المعطاةِ، ثمَّ أَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ.

عندَ تعويضِ القيمِ المعطاةِ، أتوصَّلُ إلى المعادلةِ: $9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin 2\theta$

الخطوةُ 2: لتسهيلِ الحساباتِ، أفترضُ أنَّ $x = 2\theta$، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ:

$9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin x$ المعادلةُ

$90 = 144 \sin x$ بضربِ الطرفيْنِ في 10، والتبسيطِ

$\sin x = \frac{90}{144}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 144

$x = \sin^{-1}\frac{90}{144} = 38.7^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، والتقريبِ إلى أقربِ عُشْرٍ درجةٍ

الخطوةُ 3: أَجِدُ الحَلَّ الآخرَ في الربعِ الثاني، وهوَ: $180^\circ - 38.7^\circ = 141.3^\circ$

الخطوةُ 4: أَجِدُ الآنَ قيمةَ θ:

$x = 2\theta$ العلاقةُ بينَ x وَ θ

$\theta = \frac{38.7^\circ}{2} = 19.4^\circ$ أو $\theta = \frac{141.3^\circ}{2} = 70.7^\circ$ بالقسمةِ على 2، والتعويضِ

إذنْ، يصنعُ المِدْفعُ معَ الأرضِ زاويةً قياسُها 19.4°، أوْ 70.7° تقريبًا.

الكهرباءُ موجودةٌ في جسمِ الإنسانِ أيضًا؛ فعضلاتُ القلبِ مثلًا تنقبضُ بتأثيرِ تياراتٍ كهربائيةٍ تصلُ إليها عبرَ العُقدِ والوصلاتِ العصبيةِ.

أتحقق من فهمي

فيزياءُ: فرقُ الجهدِ E (بالفولت) في دارةٍ كهربائيةٍ يُعطى بالعلاقةِ: $E = 20 \cos (180t)$، حيثُ t الزمنُ (بالثواني):

a) أفترضُ أنَّ $x = 180\,t$، وأَحُلُّ المعادلةَ $12 = 20 \cos x$، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ.

b) أَجِدُ الزمنَ t (حيثُ $0 \leq t \leq 2$) عندما يكونُ فرقُ الجهدِ 12 volt، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ منَ الثانيةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ (إنْ لَزِمَ):

1) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $7 + 9 \cos x = 1$

5) $2 \sin x + 1 = 0$

6) $1 - 2 \tan x = 5$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ (إنْ لَزِمَ):

7) $5 - 2 \cos (4x) = 4$

8) $3 + 4 \tan (2x) = 6$

9) $13 \sin (3x) + 1 = 6$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ]$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْـرِ درجةٍ (إنْ لَزِمَ):

10) $2 (\sin x - 2) + 1 = 3 \sin x$

11) $\tan x - 3 (2 \tan x - 1) = 10$

12) $15 \tan x - 7 = 5 \tan x - 3$

13) $5 (\cos x - 1) = 6 + \cos x$

14) $\tan^2 x - 9 \tan x + 20 = 0$

15) $2 \cos^2 x - \cos x = 0$

16) $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 1$

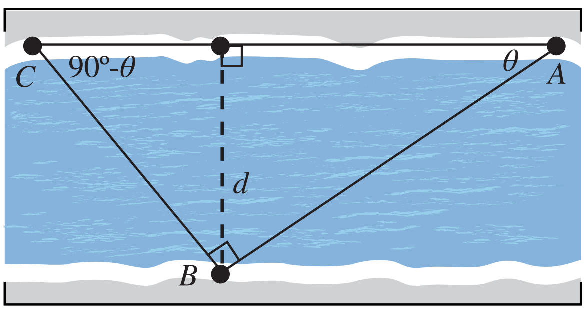
17) $2 \sin^2 x - 1 = 0$

18) $4 \cos^2 x - 4 = 15 \cos x$

19) $\cos x = \sin x$

20) **ساعاتٌ:** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

21) **سِباحةٌ:** سبحَ حامدٌ مسافةَ 90 m منَ النقطةِ A على الضفةِ الشـماليةِ لنهرٍ إلى النقطةِ B على الضفةِ المقابلةِ، ثمَّ دارَ بزاويةٍ قائمةٍ، وسبحَ مسافةَ 60 m إلى نقطةٍ أُخرى C على الضفةِ الشـماليةِ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CAB هوَ θ، وقياسُ الزاويةِ ACB هوَ $(90^\circ - \theta)$، وطولُ العمودِ منَ B إلى CA يساوي عرضَ النهرِ d، فأُعبِّرُ عنْ d بدلالةِ θ مرَّةً، وبدلالةِ $(90^\circ - \theta)$ مرَّةً أُخرى، ثمَّ أكتبُ معادلةً وأَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ، ثمَّ أَجِدُ عرضَ النهرِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ.



22 **دولابٌ:** يُعطى ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ في دولابٍ دوّارٍ بالمعادلةِ: $h = 27 - 25\cos\theta$ ، حيثُ h الارتفاعُ بالأمتارِ، وَ θ قياسُ الزاويةِ التي دارَها الدولابُ. متى يكونُ ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ 49 m؟

23 **حركةُ مقذوفاتٍ:** المسافةُ الأفقيةُ التي تقطعُها مقذوفةٌ في الهواءِ (منْ دونِ افتراضِ وجودٍ لمقاومةِ الهواءِ) تُعطى بالمعادلةِ: $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ ، حيثُ: v_0 السرعةُ الابتدائيةُ، وَ θ الزاويةُ التي تُطلَقُ بها المقذوفةُ، وَ g تسارعُ الجاذبيةِ الأرضيةِ (9.8 m/s^2). إذا قُذِفَتْ كرةُ بيسبول بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 40 m/s، فما الزاويةُ التي تُوجَّهُ بها الرميةُ لكيْ تقطعَ الكرةُ مسافةً أفقيةً مقدارُها 110 m قبلَ سقوطِها على الأرضِ؟ ما أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ أنْ تصلَها الكرةُ إذا قُذِفَتْ بهذهِ السرعةِ الابتدائيةِ؟ أقرّبُ إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ.

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّ كلٌّ منْ علياءَ وسميرٍ المعادلةَ: $2\sin x \cos x = \sin x$، حيثُ: $0° \le x < 360°$:

علياءُ

الحلولُ هيَ: $0°, 60°, 180°, 300°$ لأنَّ:

$\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0°\ ,\ 180°$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 60°\ ,\ 300°$

سميرٌ

الحَلّانِ هما: $60°, 300°$ لأنَّ:

$\frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x}$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 60°\ ,\ 300°$

أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

25 **تحدٍّ:** أَحُلُّ المعادلةَ: $2\sin x\cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$.

26 **تحدٍّ:** أُحدِّدُ عددَ حلولِ المعادلةِ: $\cos x - \sin x - 1 = 0$، حيثُ: $0° \le x < 360°$.

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كانَ $\cos\theta = -0.5$، فـإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ يقعُ في:

a) الربعِ الأولِ.
b) الربعيْنِ: الثاني، والثالثِ.
c) الربعِ الرابعِ.
d) الربعيْنِ: الثاني، والرابعِ.

2 إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $P\left(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$، فإنَّ قيمةَ $\sin\theta$ هيَ:

a) $-\frac{40}{41}$
b) $\frac{9}{40}$
c) $-\frac{9}{41}$
d) $\frac{9}{41}$

3 قياسُ الزاويةِ المرجعيةِ للزاويةِ 230° هوَ:

a) 130°
b) 40°
c) 50°
d) 140°

4 إذا كانَـتْ $90^\circ < x < 180^\circ$، وكانَ $\sin x = \frac{8}{17}$، فإنَّ قيمةَ $\tan x$ هيَ:

a) $-\frac{8}{15}$
b) $\frac{8}{15}$
c) $\frac{15}{17}$
d) $-\frac{15}{8}$

5 حَلُّ المعادلةِ $x = \sin^{-1}(-1)$ هوَ:

a) 0°
b) 90°
c) 270°
d) 360°

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ x المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ:

6 $(0.6, 0.8)$

7 $\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

8 $(-1, 0)$

9 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

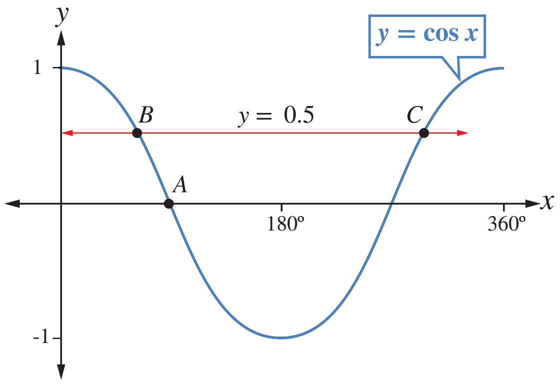
10 $(0, 1)$

11 $(-0.96, 0.28)$

يُبيِّنُ الشكلُ التالي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ المثلثيِّ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = 0.5$ في النقطتيْنِ B وَ C:

12 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A.

13 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ: B، وَ C.



أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $\sin x = \frac{-1}{2}, 270^\circ \leq x \leq 360^\circ$

15 $\cos x = 0.4 , 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

16 $\tan x = 3 , 180^\circ \leq x \leq 360^\circ$

17 $\sin x = -\cos x , 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\sin 140^\circ$

19 $\cos 173^\circ$

20 $\tan 219^\circ$

21 $\sin 320^\circ$

22 $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$

23 $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ$

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ(إنْ لَزِمَ):

24 $3\cos^2 x - 1 = 0$

25 $\sin x = -1.3212 \cos x$

26 $4 + 5\sin^2 x = 9\sin x$

27 $\tan x = 4\sin x$

28 $3\tan^2 x \cos x = 3\tan^2 x$

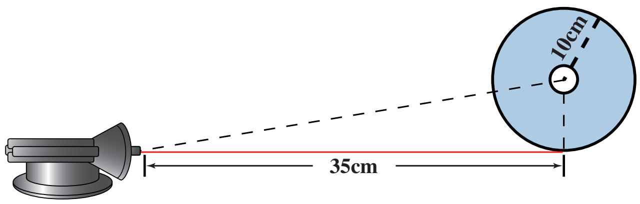
29 إذا كانَتْ x زاويةً في الربعِ الأولِ، وكانَ $\sin x + \sin(180^\circ - x) = 1.4444$ فأَجِدُ قياسَ الزاويةِ x، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ.

30 **لعبةُ مِدفعٍ:** يُطلِقُ مِدفعٌ قذائفَ بالوناتٍ مائيةً في مسابقةٍ للتسليةِ. إذا كانَ البُعْدُ الأفقيُّ لقذيفةٍ أُطلِقَتْ منَ المِدفعِ بزاويةٍ قياسُها x معَ المستوى الأفقيِّ، وبسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها $7\ m/s$، يُعطى بالأمتارِ حسبَ العلاقةِ: $d = 7 + 2\sin\left(\frac{3x}{5}\right)$، فما المسافةُ الأفقيةُ التي قطعَتْها قذيفةٌ أُطلِقَتْ بزاويةٍ مقدارُها 50°؟

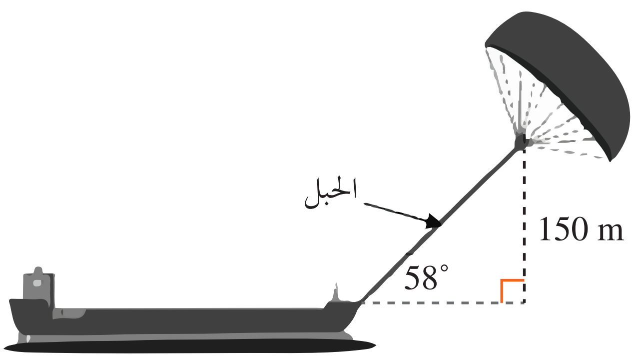
31 أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $y = 4(\sin x)^2 - 3$، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

32 في تجربةِ علومٍ لاكتشافِ خصائصِ الضوءِ، وُضِعَ مصدرٌ ضوئيٌّ ليزريٌّ على بُعْدِ 35 cm منْ قرصٍ دائريٍّ مثقوبٍ منْ مركزِهِ، وكانَ طولُ نصفِ قُطْرِهِ 10 cm كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ زاويةَ الشعاعِ الذي يمرُّ خلالَ ثقبِ مركزِ هذا القرصِ.



33 لاستغلالِ طاقةِ الرياحِ وخفضِ استهلاكِ الوقودِ؛ رُبِطَ شراعٌ طائرٌ بسفينةٍ. ما الطولُ المناسبُ لحبلِ الشراعِ كيْ يسحبَ السفينةَ بزاويةِ 58°، ويكونَ الشراعُ على ارتفاعٍ رأسيٍّ مقدارُهُ 150 m كَما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ الآتي؟



a) 177 m

b) 283 m

c) 160 m

d) 244 m

الوحدةُ
4

تطبيقاتُ المثلثاتِ
Triangle Applications

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

للنسبِ المثلثيةِ استعمالاتٌ كثيرةٌ في العلومِ، والهندسةِ، والإلكترونياتِ، مثلُ حسابِ ارتفاعاتِ قممِ الجبالِ والمباني، وتحديدِ اتجاهاتِ تحليقِ الطائراتِ على الخريطةِ وغيرِها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ النسبِ المثلثيةِ (الجيبُ، جيبُ التمامِ، الظلُّ) في الأرباعِ الأربعةِ.
- ✓ استخدامَ العلاقةِ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ نمذجةَ مسائلَ حياتيةٍ باستعمالِ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ، تتضمَّنُ قياساتِ الزوايا والأطوالِ لأضلاعٍ مجهولةٍ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

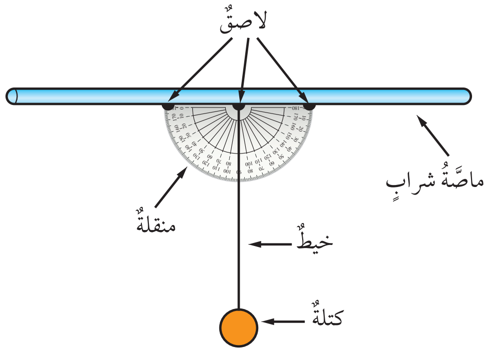
- ◄ تفسيرَ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادَهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ مُعيَّنةٍ.
- ◄ حَلَّ المثلثِ باستخدامِ قانونَي الجيوبِ، وجيوبِ التمامِ.
- ◄ استعمالَ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ.
- ◄ إيجادَ أطوالٍ وزوايا مجهولةٍ في أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ.

صنعُ كلينومترٍ واستعمالُهُ

فكرةُ المشروعِ صنعُ جهازٍ بسيطٍ لإيجادِ قياساتِ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ، ثمَّ استعمالُهُ.

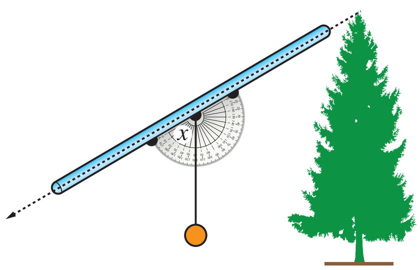
الموادُّ والأدواتُ ماصَّةُ شرابٍ، منقلةٌ، خيطٌ، كتلةٌ (مفتاحٌ، أوْ ممحاةٌ)، لاصقٌ شفّافٌ، شريطُ قياسٍ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

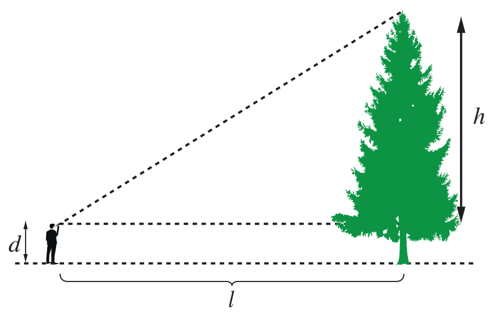


1 **صنعُ الكلينومترِ:** أُثبِّتُ ماصَّةَ الشرابِ على الحافةِ المستقيمةِ للمنقلةِ باستعمالِ لاصقٍ شفّافٍ، ثمَّ أُثبِّتُ طرفَ الخيطِ في مركزِ المنقلةِ، وأربطُ بطرفِهِ الآخرِ كتلةً صغيرةً، مثلَ: المفتاحِ، أوِ المشابكِ المعدنيةِ؛ على أنْ تتدلّى رأسيًّا إلى أسفلَ مثلَ خطِّ الشاقولِ.

2 **استعمالُ الكلينومترِ:** أستعملُ أنا وأفرادُ مجموعتي الكلينومترَ لإيجادِ ارتفاعِ بنايةٍ أوْ شجرةٍ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:



- أختارُ شيئًا لأقيسَ ارتفاعَهُ، وليكنْ شجرةً.
- أقفُ على مسافةٍ منْ قاعدةِ الشجرةِ، مُمسكًا بماصَّةِ الشرابِ.
- أنظرُ منْ فتحةِ ماصَّةِ الشرابِ إلى قمَّةِ الشجرةِ، ثمَّ أطلبُ إلى زميلي/ زميلتي أنْ يقرأَ الزاويةَ x التي يشيرُ إليْها الخيطُ، مُلاحِظًا أنَّ هذهِ الزاويةَ تقعُ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الرأسيِّ. وبذلكَ، تكونُ زاويةُ ارتفاعِ قمَّةِ الشجرةِ: $(90° - x)$.



- أقيسُ المسافةَ بينَ المكانِ الذي أقفُ عندَهُ وقاعدةِ الشجرةِ.
- أستعملُ القياساتِ التي دوَّنْتُها لإيجادِ ارتفاعِ الشجرةِ فوقَ مستوى عيني، باستعمالِ العلاقةِ الآتيةِ:

$$\tan(90° - x) = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \tan(90° - x)$$

- أُضيفُ المسافةَ بينَ الأرضِ ومستوى عيني إلى القيمةِ التي توصَّلْتُ إليْها لإيجادِ ارتفاعِ الشجرةِ فوقَ سطحِ الأرضِ.

عرضُ النتائجِ:

أكتبُ معَ أفرادِ مجموعتي تقريرًا يتضمَّنُ ما يأتي:

- صورةٌ لجهازِ الكلينومترِ المصنوعِ.
- صورٌ لجميعِ الأشياءِ التي قيسَتْ ارتفاعاتُها، وتدوينُ الحساباتِ التي تمَّتْ في أثناءِ القياسِ بجانبِ كلٍّ منْها.

الدرسُ 1

الاتجاهُ منَ الشمالِ

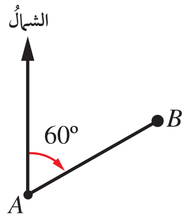
Bearing

فكرةُ الدرسِ تفســيرُ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادُهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ أُخرى بالرسمِ، والقياسِ، والحسابِ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

المصطلحاتُ الاتجاهُ منَ الشمالِ.

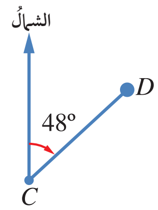
مسألةُ اليومِ حلَّقَتْ طائرةٌ منْ عمّانَ إلى العقبةِ، وقدْ صنعَ مســارُها المستقيمُ زاويةً قياسُها 200° معَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ. ما قياسُ الزاويةِ بينَ مسارِ عودةِ الطائرةِ إلى عمّانَ وخطِّ الشمالِ الجغرافيِّ؟

الاتجاهُ منَ الشمالِ (bearing) للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوَ قياسُ الزاويةِ التي ضلعُ ابتدائِها خطُّ الشــمالِ الجغرافيِّ المرسومِ منَ النقطةِ A، وضلعُ انتهائِها المســتقيمُ AB، وذلكَ عندَ قياسِ الزاويةِ في اتجاهِ حركةِ عقاربِ الســاعةِ. يُكتَبُ الاتجاهُ منَ الشــمالِ باستعمالِ عددٍ منْ ثلاثةِ أرقامٍ (منازلُ) بينَ 000° وَ 360°.

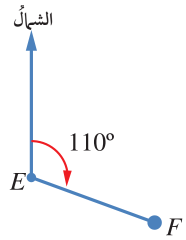


يُبيِّــنُ الشــكلُ المجــاورُ أنَّ الاتجاهَ مــنَ الشــمالِ للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوَ 060°.

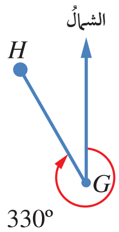
يُستخدَمُ الاتجاهُ منَ الشمالِ كثيــرًا فــي تحديــدِ خطوطِ الملاحةِ البحريةِ والجويةِ.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ D منَ النقطةِ C هوَ 048°.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ F منَ النقطةِ E هوَ 110°.

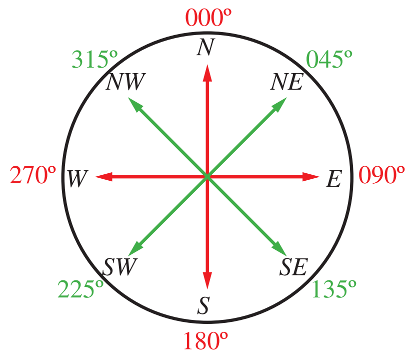


الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ H منَ النقطةِ G هوَ 330°.

اعتمـدَ الإنسـانُ قديمًا على الشمسِ والقمرِ والنجومِ في معرفةِ الاتجاهـاتِ، ثمَّ أخذَ يعتمـدُ اليومَ علـى البوصلةِ التـي تُحدِّدُ اتجاهَ الشـمالِ، ومنْهُ تُحدَّدُ بقيةُ الاتجاهاتِ.

توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ رئيسةٍ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

1. الشمالُ (N)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($000°$).
2. الشرقُ (E)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($090°$).
3. الجنوبُ (S)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($180°$).
4. الغربُ (W)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($270°$).



توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ أُخرى مشهورةٍ تقعُ بينَ الاتجاهاتِ الأربعةِ الرئيسةِ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

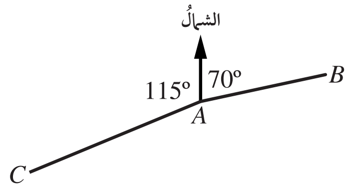
1. الشمالُ الشرقيُّ (NE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($045°$).
2. الجنوبُ الشرقيُّ (SE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($135°$).
3. الجنوبُ الغربيُّ (SW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($225°$).
4. الشمالُ الغربيُّ (NW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ ($315°$).

أتعلَّمُ

سنستعملُ في بقيةِ الدرسِ كلمةَ (اتجاهٌ) وحدَها للدلالةِ على الاتجاهِ منَ الشمالِ.

مثال 1

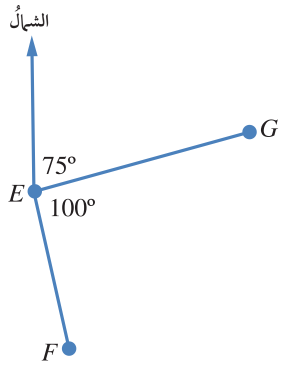
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ مدنٍ، هيَ: A، B، وَ C. أكتبُ اتجاهَ المدينةِ B منَ المدينةِ A، واتجاهَ المدينةِ C منَ المدينةِ A.



اتجاهُ المدينةِ B منَ المدينةِ A هوَ $070°$، واتجاهُ المدينةِ C منَ المدينةِ A هوَ $360° - 115° = 245°$

أتحقق من فهمي

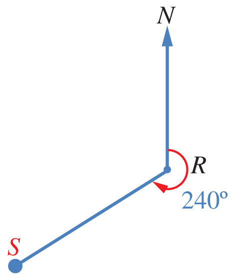
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ سفنٍ، هيَ: E، وَ F، وَ G. أكتبُ اتجاهَ السفينةِ G منَ السفينةِ E، واتجاهَ السفينةِ F منَ السفينةِ E.



إذا عُلِمَ اتجاهُ النقطةِ S منَ النقطةِ R، فيُمكِنُ حسابُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S .

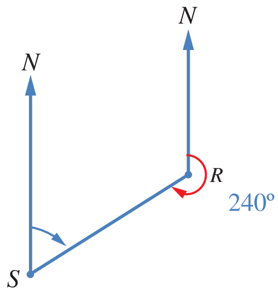
مثال 2

أَجِدُ اتجاهَ النقطةِ R منَ النقطةِ S في الشكلِ المجاورِ.



الطريقةُ الأولى: استعمالُ الرسمِ.

أرسمُ خطًّا رأسيًّا يُبيِّنُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيِّ عندَ النقطةِ S، ثمَّ أستعملُ منقلةً لأقيسَ الزاويةَ التي رأسُها S، وضلعاها خطُّ الشمالِ (SN) والمستقيمُ SR.



سأجدُ أنَّ قياسَ هذهِ الزاويةِ هوَ 60°، إذنْ، اتجاهُ النقطةِ R منَ النقطةِ S هوَ 060°.

الطريقةُ الثانيةُ: استعمالُ الجبرِ.

يُمكِنُ إيجادُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

$$m\angle NRS = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

مجموعُ قياسِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ 360°

$$m\angle NSR = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

خطّا الشمالِ متوازيانِ؛ لذا، فالزاويتانِ الداخليتانِ NRS ، وَ NSR متكاملتانِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ X منَ النقطةِ Z هوَ 295°، فما اتجاهُ النقطةِ Z منَ النقطةِ X؟

مريمُ الجيليُّ هيَ عالِمةُ رياضياتٍ وفلكٍ مُسْلِمةٌ عاشتْ في حلبَ زمنَ الدولةِ العباسيةِ، واخترعَتِ الأسطرلابَ المُعقَّدَ؛ وهوَ آلةٌ فلكيةٌ مُهِمَّةٌ بُنِيَتْ عليْها آليةُ عملِ أنظمةِ الملاحةِ الحديثةِ (GPS).

أتذكَّرُ

الزاويتانِ المتكاملتانِ هُما زاويتانِ مجموعُ قياسَيْهِما 180°

مثال 3: من الحياة

تُعَدُّ مدينةُ القدسِ واحدةً منْ أقدمِ مدنِ العالَمِ؛ فتاريخُها يرجعُ إلى أكثرَ منْ خمسةِ آلافِ سنةٍ. وللقدسِ أسماءٌ عديدةٌ، منْها: بيتُ المقدسِ، وأُولى القِبلتيْنِ، والقدسُ الشريفُ.

أَستعملُ الخريطةَ المجاورةَ لتحديدِ اتجاهِ العاصمةِ عمّانَ منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

الخطوةُ 1: أرسمُ قطعةً مستقيمةً بينَ مدينتَيِ القدسِ الشريفِ وعمّانَ.

الخطوةُ 2: أرسمُ خطًّا رأسيًّا يُبيِّنُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيَّ عندَ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

الخطوةُ 3: أَستعملُ المنقلةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ بينَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ والقطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ المدينتيْنِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. سأجِدُ أنَّ قياسَ هذهِ الزاويةِ هوَ 78°

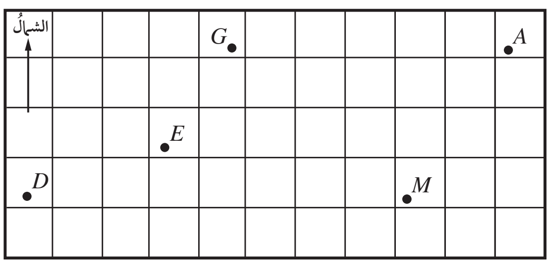
إذنْ، اتجاهُ العاصمةِ عمّانَ منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ هوَ 078°.

أتحقق من فهمي

أستعملُ الخريطةَ في المثالِ السابقِ لتحديدِ اتجاهِ مدينةِ حيفا منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ كلًّا منَ الاتجاهاتِ الآتيةِ باستعمالِ المنقلةِ:



1. اتجاهُ النقطةِ D منَ النقطةِ E.
2. اتجاهُ النقطةِ G منَ النقطةِ A.
3. اتجاه النقطةُ M منَ النقطةِ D.

أرسمُ شكلًا يُوضِّحُ كلَّ موقفٍ ممّا يأتي:

4 اتجاهُ النقطةِ C منَ النقطةِ H هوَ 170°.

5 اتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ W هوَ 310°.

أرسمُ شكلًا لحَلِّ المسائلِ الآتيةِ:

6 اتجاهُ A منْ B هوَ 070°. أَجِدُ اتجاهَ B منْ A.

7 اتجاهُ X منْ Y هوَ 324°. أَجِدُ اتجاهَ Y منْ X.

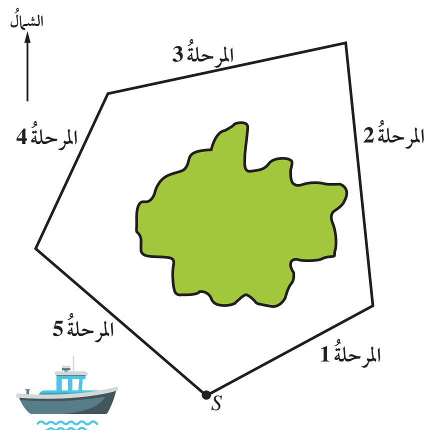
8 تقعُ النقطةُ A شماليَّ النقطةِ C، وتقعُ النقطةُ B شرقيَّ النقطةِ A، واتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ C هوَ 045°. أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ الثلاثِ.

ملاحظةٌ بحريةٌ: أبحرَ قاربٌ حولَ الأضلاعِ الأربعةِ لمربَّعٍ مساحتُهُ كيلو مترٍ مربَّعٌ واحدٌ:

9 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ الشمالِ، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

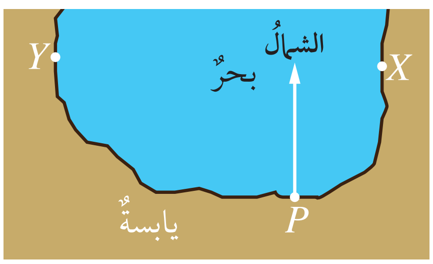
10 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ 090°، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ بعكسِ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

11 **خرائطُ:** تُبيِّنُ الخريطةُ الآتيةُ رحلةَ قاربٍ حولَ إحدى الجُزرِ، بدأَتْ منَ الموقعِ S، وانتهَتْ عندَهُ. إذا كانَ كلُّ 1 cm على الخريطةِ يُمثِّلُ 20 km، فما طولُ كلِّ مرحلةٍ منْ مراحلِ الرحلةِ واتجاهُها؟ أنسخُ الجدولَ الآتيَ، ثمَّ أُكمِلُهُ:



المرحلةُ	المسافةُ الحقيقيةُ	الاتجاهُ
1		
2		
3		
4		
5		

موانئُ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ الميناءَ P والمرفأيْنِ X وَ Y على الساحلِ:



12 أبحرَ قاربُ صيدٍ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ X. ما اتجاهُ المرفأِ X منَ الميناءِ P؟

13 أبحرَ يختٌ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ Y. ما اتجاهُ المرفأِ Y منَ الميناءِ P؟

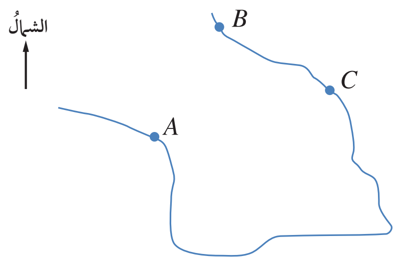
مواقعُ جغرافيةٌ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ موقعَ بيتِ أريجَ عندَ النقطةِ H والناديَ الرياضيَّ الذي ترتادُهُ عندَ النقطةِ C:

14 أَستعملُ مقياسَ الرسمِ المعطى لإيجادِ المسافةِ الحقيقيةِ بينَ بيتِ أريجَ والنادي الرياضيِّ.

15 أَستعملُ منقلةً لإيجادِ اتجاهِ النادي منْ بيتِ أريجَ.

16 يبعدُ السوقُ التجاريُّ S مسافةَ 600 m عنْ بيتِ أريجَ، وباتجاهِ 150° منْ بيتِها. أُعيِّنُ موقعَ السوقِ التجاريِّ S على نسخةٍ منَ المُخطَّطِ.

17 **ملاحةٌ جويةٌ:** في أثناءِ تحليقِ طائرةٍ باتجاهِ 072°، طُلِبَ إلى قائدِها التوجُّهُ إلى مطارٍ صوبَ الجنوبِ. ما الزاويةُ التي سيستديرُ بها؟



18 **خرائطُ:** تُمثِّلُ A وَ B وَ C ثلاثَ قرًى تقعُ على رؤوسِ مربَّعٍ في خليجٍ ما. إذا كانَ اتجاهُ القريةِ B منَ القريةِ A هوَ 030°، فما اتجاهُ القريةِ A منَ القريةِ C؟

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ مثلثًا ذا قاعدةٍ أفقيةٍ أُسمّيهِ ABC، ثمَّ أقيسُ زواياهُ، ثمَّ أَجِدُ اتجاهَ A منْ B، واتجاهَ C منْ A، واتجاهَ C منْ B.

تحدٍّ: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P مسافةَ 57 km باتجاهِ الشمالِ، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ 045°، وقطعَتْ مسافةَ 38 km. إذا كانَ موقعُ السفينةِ الحاليُّ هوَ S، فأَجِدُ:

21 SP.

22 اتجاهَ موقعِ السفينةِ منَ الميناءِ P.

الدرسُ

2

قانونُ الجيوبِ
Law of Sines

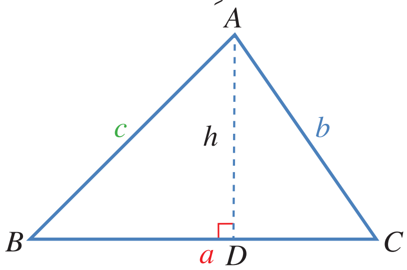
فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ، عُلِمَ فيهِ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما، أوْ زاويتانِ وضلعٌ.

المصطلحاتُ حَلُّ المثلثِ، قانونُ الجيوبِ.

مسألةُ اليومِ إذا كانَتْ جرشُ والزرقاءُ ومأدبا تُشكِّلُ رؤوسَ مثلثٍ على الخريطةِ، والمسافةُ بينَ مدينتَي الزرقاءِ وجرشَ 44 km، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ جرشَ 52°، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ الزرقاءِ 93°، فهلْ يُمكِنُ بهذهِ المعلوماتِ حسابُ المسافةِ بينَ مدينتَيْ جرشَ ومأدبا؟

يوجدُ في أيِّ مثلثٍ ستةُ قياساتٍ، هيَ: ثلاثةُ أضلاعٍ، وثلاثُ زوايا. وإيجادُ هذهِ القياساتِ يُعرَفُ باسمِ **حَلِّ المثلثِ** (solving a triangle)؛ إذْ تساعدُ قياساتُ الزوايا على حَلِّ المثلثاتِ في حالِ كانَتْ بعضُ قياساتِها معروفةً، وذلكَ باستعمالِ نسبةِ الجيبِ لإيجادِ علاقاتٍ بينَ أطوالِ الأضلاعِ.

ففي المثلثِ ABC المرسومِ جانبًا، يُمثِّلُ h الارتفاعَ منَ النقطةِ A؛ لذا فهوَ عموديٌّ على القاعدةِ $\overline{BC}$.



رموزٌ رياضيةٌ

تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ A, B, C إلى رؤوسِ المثلثِ وزواياهُ، في حينِ تشيرُ الصغيرةُ منْها a, b, c إلى أطوالِ الأضلاعِ. فمثلًا، طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ A يشارُ إليْهِ بالحرفِ a، وهكذا.

يُمكِنُ الاستفادةُ منْ تعريفِ الجيبِ في استنتاجِ بعضِ العلاقاتِ كما يأتي:

$$\sin B = \frac{h}{c}$$ تعريفُ الجيبِ

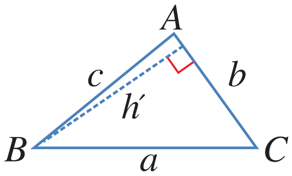
$$h = c\sin B$$ بالضربِ التبادليِّ

$$\sin C = \frac{h}{b}$$ تعريفُ الجيبِ

$$h = b\sin C$$ بالضربِ التبادليِّ

$$c\sin B = b\sin C$$ بالمساواةِ $h = h$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$ بقسمةِ الطرفيْنِ على $\sin B$، ثمَّ على $\sin C$



وبالمثلِ، يُمكِنُ استنتاجُ العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ عندَ رسمِ ارتفاعِ المثلثِ منَ النقطةِ B بشكلٍ عموديٍّ على AC، أوْ رسمِ ارتفاعِهِ منَ النقطةِ C عموديًّا على AB.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

عندَ دمجِ هذهِ العلاقاتِ الثلاثِ معًا، ينتجُ **قانونُ الجيوبِ** (law of sines).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

إرشادٌ

توجدُ صيغةٌ أُخرى لقانونِ الجيوبِ هيَ:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يُستعمَلُ قانونُ الجيوبِ لحَلِّ المثلثِ الذي عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ، وذلكَ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1. ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA).
2. ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما (SSA).

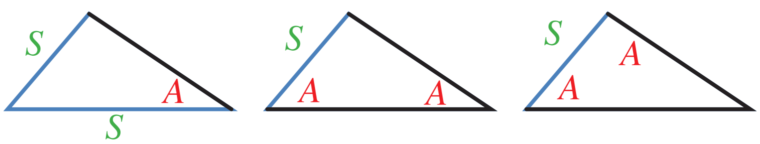
أفكر

لماذا يتعذَّرُ حَلُّ المثلثِ الذي عُلِمَتْ فقطْ قياساتُ زواياهُ جميعًا؟

إرشادٌ

- الحرفُ S هوَ اختصارٌ لكلمةِ Side، وتعني الضلعَ.
- الحرفُ A هوَ اختصارٌ لكلمةِ Angle، وتعني الزاويةَ.

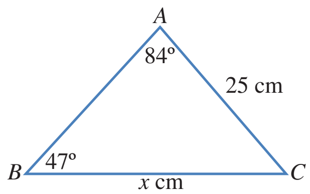
يُبيِّنُ الشكلُ الآتي هاتيْنِ الحالتيْنِ:



الحالةُ 1 ASA الحالةُ 1 SAA الحالةُ 2 SSA

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC.



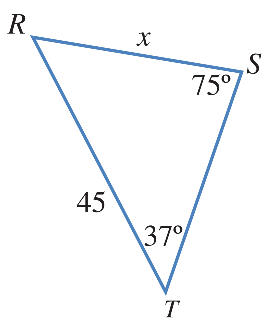
$$\frac{x}{\sin 84^\circ} = \frac{25}{\sin 47^\circ}$$ قانونُ الجيوبِ

$$x = \frac{25 \sin 84^\circ}{\sin 47^\circ}$$ بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 84^\circ$

$$\approx 34 \text{ cm}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

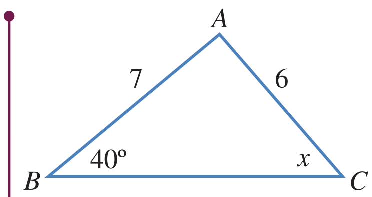
أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المُبيَّنِ جانبًا.



يُمكِنُ أيضًا استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC.



قانونُ الجيوبِ

$$\frac{\sin x}{7} = \frac{\sin 40^\circ}{6}$$

بضربِ الطرفيْنِ في 7

$$\sin x = \frac{7\sin 40^\circ}{6}$$

$$\approx 0.7499$$

معكوسُ الجيبِ

$$x = \sin^{-1}(0.7499)$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

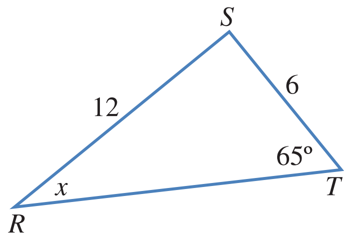
$$\approx 48.6^\circ$$

أَتعلَّمُ

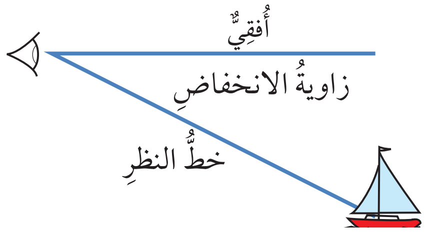
توجدُ قيمتانِ لـ $\sin^{-1} 0.7499$ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ هُما 48.6° و 131.4°، نختارُ مِنهما القيمةَ 48.6°؛ لأنَّ الزاويةَ x تبدو حادَّةً في الشكلِ المُعطى.

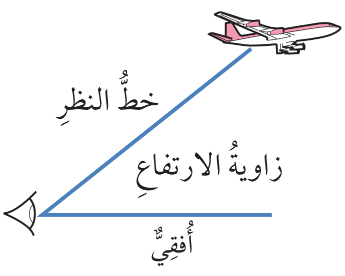
أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST.



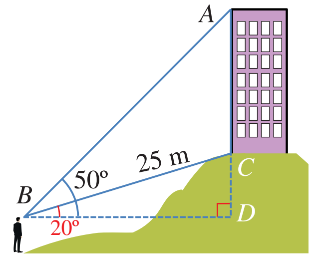
عندما أنظرُ إلى طائرةٍ في السماءِ، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والطائرةِ وخطٍّ نظري أفقيًّا تُسمّى **زاويةَ الارتفاعِ**. وإذا وقفْتُ على تَلَّةٍ ساحليةٍ، ثمَّ نظرْتُ إلى قاربٍ أسفلَ منّي، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والقاربِ وخطٍّ نظري أفقيًّا تُسمّى **زاويةَ الانخفاضِ**. ولهاتيْنِ الزاويتيْنِ أهميةٌ كبيرةٌ عندَ حَلِّ المسائلِ الحياتيةِ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.

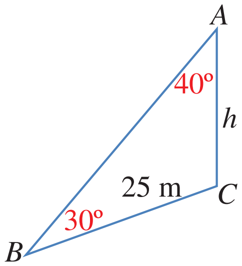




مثال 3: من الحياة

يقعُ برجٌ ارتفاعُهُ h مترٌ على تلَّةٍ، وقدْ رُصِدَتْ قمَّةُ البرجِ A منَ النقطةِ B التي تبعدُ عنْ قاعدةِ البرجِ 25 m فكانَ قياسُ زاويةِ ارتفاعِها 50°، ثمَّ رُصِدَتْ قمَّةُ التلَّةِ منَ النقطةِ B نفسِها بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها 20°. ما ارتفاعُ البرجِ h؟





أَجِدُ أولًا قياسَ الزاويةِ ABC:

$m\angle ABC = 50° - 20° = 30°$

ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAD:

$m\angle BAC = 180° - 90° - 50° = 40°$

ارتفاعُ البرجِ هوَ طولُ الضلعِ AC في المثلثِ BAC. أَستعملُ قانونَ الجيوبِ لحَلِّ هذا المثلثِ.

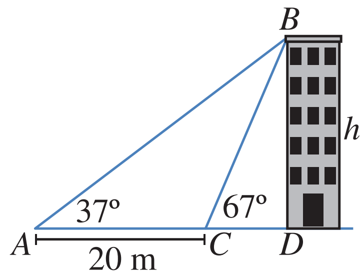
بعدَ ذلكَ أَستعملُ قانونَ الجيوبِ في المثلثِ BAC لإيجادِ ارتفاعِ البرجِ:

$\frac{h}{\sin 30°} = \frac{25}{\sin 40°}$ قانونُ الجيوبِ

$h = \frac{25 \sin 30°}{\sin 40°}$ بضربِ الطرفَيْنِ في $\sin 30°$

$h \approx 19.45$ m باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

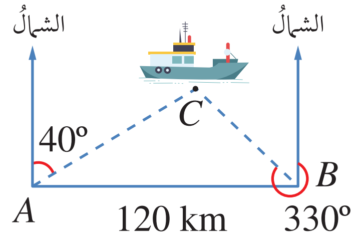
إذنْ، ارتفاعُ البرجِ هوَ: 19.45 m



أتحقق من فهمي

رصدَ ليثٌ زاويةَ قمَّةِ بنايةٍ منَ النقطةِ A، فكانَتْ $37°$، ثمَّ سارَ مسافةَ 20 m باتجاهِ البنايةِ حتّى النقطةِ C، ثمَّ رصدَ زاويةَ قمَّةِ البنايةِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها $67°$. أَجِدُ ارتفاعَ البنايةِ.

مثال 4: من الحياة



التقطَتْ محطَّتا خفرِ السواحلِ A وَ B نداءَ استغاثةٍ منْ سفينةٍ عندَ النقطةِ C في البحرِ، وقدْ حدَّدَتِ المحطَّةُ A اتجاهَ السفينةِ عندَ $040°$، وحدَّدَتِ المحطَّةُ B اتجاهَ السفينةِ عندَ $330°$. إذا كانَتِ B شرقيَّ A وكانتِ المسافةُ بينَ المحطَّتَيْنِ 120 km، فكمْ تبعدُ السفينةُ عنِ المحطَّةِ A؟

يجبُ أولًا إيجادُ قياسِ الزاويةِ C:

قياسُ الزاويةِ BAC هوَ $50°$ (لأنَّها مُتمِّمةٌ للزاويةِ التي قياسُها $40°$).

وقياسُ الزاويةِ ABC هوَ $60°$ (لأنَّ $330° - 270° = 60°$). إذنْ:

$m\angle ACB = 180° - 60° - 50° = 70°$

ثمَّ استعمالُ قانونِ الجيوبِ:

قانونُ الجيوبِ
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

بالتعويضِ
$$\frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{120}{\sin 70^\circ}$$

بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 60^\circ$
$$b=\frac{120\times\sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$

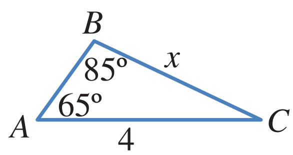
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ
$$\approx 110.59 \text{ km}$$

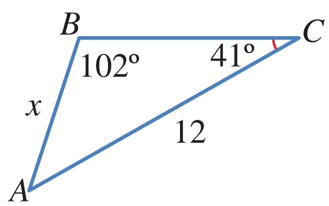
أتحقق من فهمي

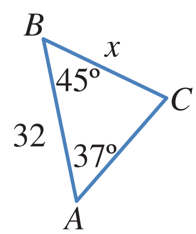
أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ المحطَّةِ B في المثالِ السابقِ.

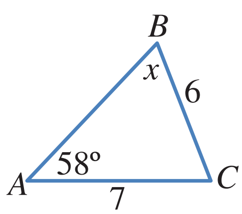
أتدرب وأحل المسائل

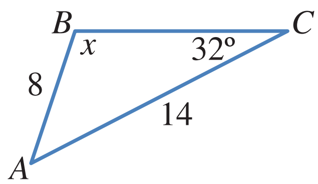
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

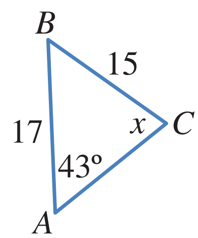
1


2


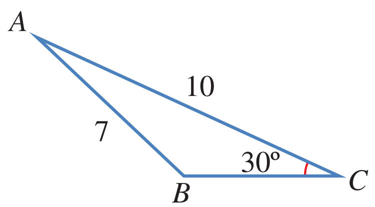
3


4


5


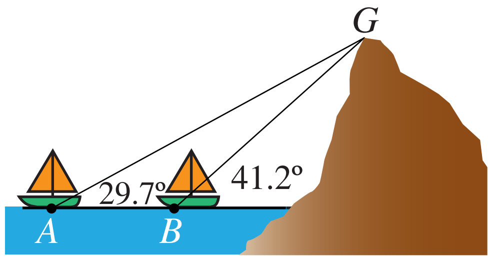
6


7 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المنفرجةِ CBA في الشكلِ المجاورِ.



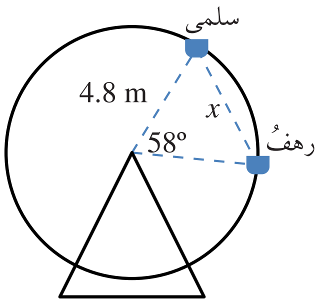
8 **خرائطُ:** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

9 **بحارٌ:** ترصدُ سفينتانِ في البحرِ قمَّةَ جبلٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ السفينتيْنِ 1473 m، فما ارتفاعُ الجبلِ منْ مستوى سطحِ البحرِ؟

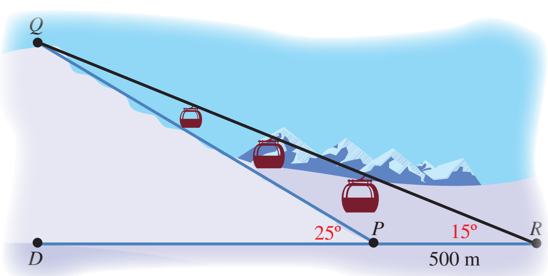


10 **علمُ الفَلَكِ:** رصدَ عامرٌ وهشامٌ منْ منزليْهِما نجمًا في السماءِ في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَتْ زاويةُ رصدِ هشامٍ للنجمِ 49.8974°، وزاويةُ رصدِ عامرٍ لهُ 49.9312°، والمسافةُ بينَ منزليْهِما 300 km، فأُقدِّرُ بُعْدَ النجمِ عنِ الأرضِ.

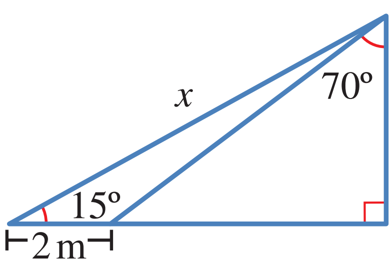
11 **مدينةُ الألعابِ:** في مدينةِ الألعابِ، جلسَتْ سلمى ورهفُ على مقعديْنِ منفصليْنِ في لعبةِ الدولابِ الدوّارِ كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسافةَ x بينَهُما.



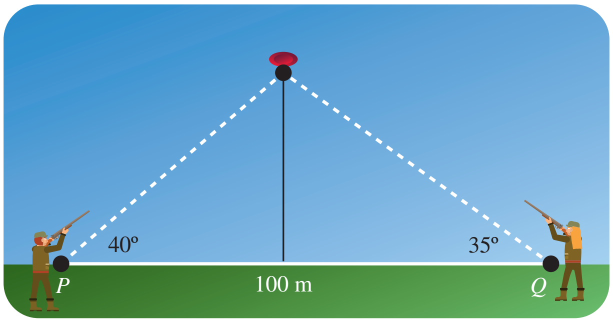
12 **رياضةُ التزلُّجِ:** يتكوَّنُ مسارُ تزلُّجٍ منْ جزءٍ مائلٍ، وآخرَ مستقيمٍ. إذا تزلَّجَ محمودٌ منَ النقطةِ Q إلى النقطةِ P، ثمَّ وصلَ خطَّ النهايةِ عندَ النقطةِ R، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِ مسارِ التزلُّجِ عنِ الأرضِ 25°، والمسافةُ بينَ النقطتيْنِ P وَ R هيَ 500 m، وزاويةُ رصْدِ الحَكَمِ منْ نقطةِ النهايةِ للمُتزلِّجِ الذي يقفُ عندَ نقطةِ البدايةِ 15°، فما طولُ QP؟



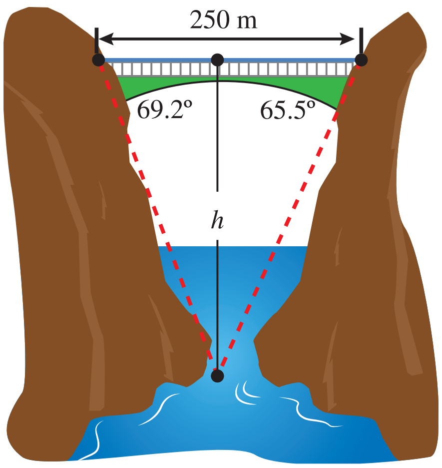
13 أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



مهارات التفكير العليا

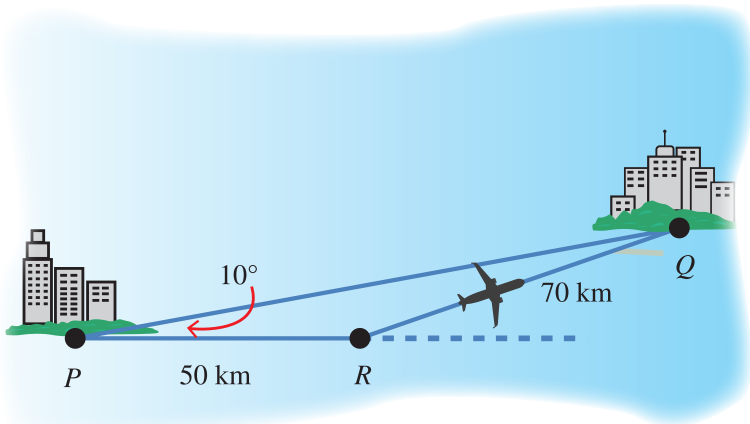


14 **تبريرٌ:** أطلقَ قنّاصٌ وقنّاصةٌ النارَ على هدفٍ مُتحرِّكٍ في السماءِ في لحظةٍ ما. إذا كانَتْ زاويةُ إطلاقِ القنّاصِ 40º، وزاويةُ إطلاقِ القنّاصةِ 35º، والمسافةُ بينَهُما 100 m، فأيُّهُما سيصيبُ الهدفَ أولًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.



15 **تحدٍّ:** مرَّ قاربٌ أسفلَ جسرٍ طولُهُ 250 m. وقدْ رصدَ الشخصُ الذي في القاربِ الزاويتيْنِ اللتيْنِ تقعانِ عندَ طرفَيِ الجسرِ، فكانَتا 69.2º وَ 65.5º، أَجِدُ ارتفاعَ الجسرِ عنِ القاربِ.

16 **تبريرٌ:** توجَّهَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ P إلى المدينةِ Q، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 50 km أدركَ الطيّارُ وجودَ خطأٍ في زاويةِ الانطلاقِ مقدارُهُ 10º، فاستدارَ في الحالِ، وقطعَتِ الطائرةُ مسافةَ 70 km حتّى وصلَتِ المدينةَ Q. إذا كانَتْ سرعةُ الطائرةِ ثابتةً وتساوي 250 km/h، فما الوقتُ الإضافيُّ الذي استغرقَهُ الطيّارُ بسببِ خطئِهِ في زاويةِ الانطلاقِ؟



الدرسُ 3

قانونُ جيوبِ التمامِ
Law of Cosines

فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ.

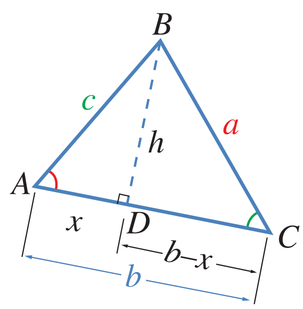
المصطلحاتُ قانونُ جيوبِ التمامِ.

مسألةُ اليومِ انطلقَتْ حافلتانِ منْ محطَّةٍ واحدةٍ في الوقتِ نفسِهِ، وقدِ اتَّجهَتِ الأولى شرقًا بسرعةِ 60 km/h ، وانطلقَتِ الثانيةُ في مسارٍ يَصنعُ زاويةَ $30°$ معَ مسارِ الحافلةِ الأولى بسرعةِ 50 km/h. هلْ يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ الحافلتيْنِ بعدَ مُضِيِّ 3 ساعاتٍ على انطلاقِهِما؟

تعرَّفْتُ في الدرسِ السابقِ قانونَ الجيوبِ، وكيفَ يُستعمَلُ لحَلِّ مثلثاتٍ عُلِمَ فيها ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA)، أوْ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما (SSA).

تُستعمَلُ أيضًا نسبةُ جيبِ التمامِ لإيجادِ علاقاتٍ أُخرى بينَ أطوالِ الأضلاعِ وقياساتِ الزوايا؛ ما يساعدُ على حَلِّ بعضِ المثلثاتِ التي لا يُمكِنُ حَلُّها باستعمالِ قانونِ الجيوبِ.

ففي الشكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ h الارتفاعَ المرسومَ منْ B عموديًّا على AC. وباستعمالِ نظريةِ فيثاغورس وتعريفِ جيبِ التمامِ، يُمكِنُ استنتاجُ بعضِ العلاقاتِ على النحوِ الآتي:



باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس في المثلثِ ADB $\quad h^2 = c^2 - x^2$

باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس في المثلثِ BDC $\quad h^2 = a^2 - (b-x)^2$

بمساواةِ المعادلتيْنِ $h^2 = h^2$ $\quad c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$

بفكِّ القوسِ $\quad c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2xb - x^2$

بالتبسيطِ $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$

لإدخالِ جيبِ التمامِ في المعادلةِ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$ ، فإنَّنا نكتبُ x بدلالةِ $\cos A$:

تعريفُ جيبِ التمامِ $\quad \cos A = \frac{x}{c}$

بالضربِ التبادليِّ $\quad x = c \times \cos A$

بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

وبذلكَ، نتوصَّلُ إلى العلاقةِ الآتيةِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ باستعمالِ جيبِ التمامِ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

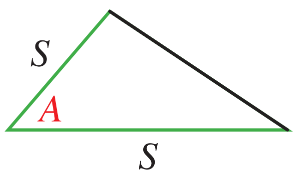
وبطريقةٍ مشابهةٍ، يُمكِنُ التوصُّلُ إلى العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

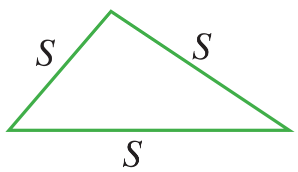
تُسمّى هذهِ العلاقاتُ الثلاثُ **قانونَ جيوبِ التمامِ** (Law of Cosines)، ويُستعمَلُ هذا القانونُ لحَلِّ أيِّ مثلثٍ عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1. ضلعانِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهُما (SAS).
2. ثلاثةُ أضلاعٍ (SSS).



الحالةُ (1)

SAS



الحالةُ (2)

SSS

أتعلَّمُ

يُمكِنُ كتابةُ قانونِ جيوبِ التمامِ كما يأتي:

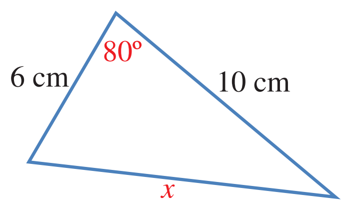
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.

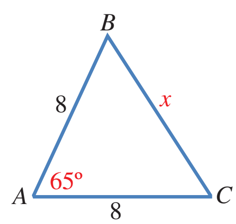


$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80^\circ$	قانونُ جيوبِ التمامِ
$x^2 = 115.16$	باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ
$x = \pm\sqrt{115.16}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ
$x = \pm 10.7$ cm	باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذن، $x = 10.7$ ؛ لأنَّ قيمةَ x لا يمكنُ أنْ تكونَ سالبةً.

أتحقق من فهمي

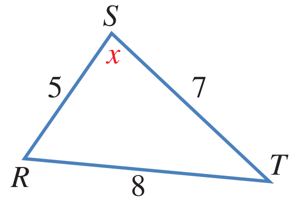
أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.



يُستعمَلُ قانونُ جيوبِ التمامِ أيضًا لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المجاورِ.



قانونُ جيوبِ التمامِ $8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos x$

بكتابةِ $\cos x$ موضوعِ القانونِ $\cos x = \dfrac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\cos x = 0.1428$

معكوسُ جيبِ التمامِ $x = 81.8°$

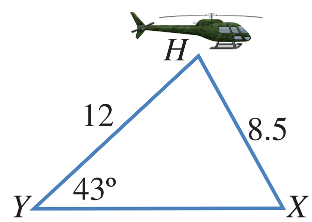
أتحقق من فهمي

في المثلّثِ ABC، إذا كانَ $AB = 16, BC = 12, AC = 20$ فأُثبتُ أنَّ الزاويةَ B قائمةٌ.

قدْ نحتاجُ في بعضِ المسائلِ إلى استعمالِ قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا لإيجادِ القياساتِ المطلوبةِ.

مثال 3: من الحياة

شوهِدَتْ طائرةٌ مروحيةٌ تُحلِّقُ في السماءِ منَ القريتيْنِ X وَ Y في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَ بُعْدُ الطائرةِ عنِ القريةِ X هوَ 8.5 km، وعنِ القريةِ Y هوَ 12 km، وكانَتِ القريتانِ في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ، وزاويةُ ارتفاعِ الطائرةِ منَ القريةِ Y هيَ $43°$، فما المسافةُ بينَ هاتيْنِ القريتيْنِ؟



لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ، يجبُ معرفةُ قياسِ الزاويةِ بينَ الضلعيْنِ اللذيْنِ يُمثِّلانِ بُعْدَيِ الطائرةِ عنِ القريتيْنِ كما يأتي:

الخطوةُ 1: استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ X في المثلثِ HYX.

قانونُ الجيوبِ $\dfrac{\sin 43°}{8.5} = \dfrac{\sin X}{12}$

بضربِ الطرفيْنِ في 12 $\sin X = \dfrac{12 \sin 43°}{8.5}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\sin X \approx 0.963$

معكوسُ sin $X = \sin^{-1} 0.963$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\approx 74.3°$

الخطوةُ 2: إيجادُ قياسِ الزاويةِ H.

> **أَتعلَّمُ**
>
> توجدُ قيمتانِ لـ $\sin^{-1} 0.963$ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ هُما $74.3°$ و $105.6°$، نختارُ مِنهما القيمةَ $74.3°$؛ لأنَّ الزاويةَ x تبدو حادَّةً في الشكلِ المُعطى.

مجموعُ قياسِ زوايا المثلثِ 180° $\quad m\angle H = 180^\circ - 43^\circ - 74.3^\circ = 62.7^\circ$

الخطوةُ 3: استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ.

قانونُ جيوبِ التمامِ $\quad (XY)^2 = 12^2 + 8.5^2 - 2\,(12)\,(8.5)\cos 62.7^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\quad (XY)^2 = 122.7$

بحسابِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $\quad XY = \pm\sqrt{122.7} = \pm\, 11.1$

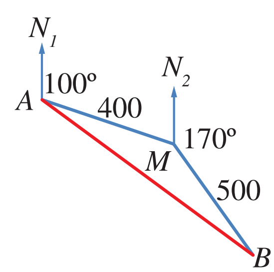
إذنْ، المسافةُ بينَ المدينتيْنِ 11.1 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي

سفنٌ: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A باتجاهِ الشمالِ، فقطعَتْ مسافةَ 240 km، ثمَّ انحرفَتْ بزاويةِ 50°، وقطعَتْ مسافةَ 160 km حتّى وصلَتْ إلى الميناءِ B. ما المسافةُ بينَ الميناءِ A والميناءِ B؟

مثال 4: من الحياة

أقلعَتْ طائرةٌ بزاويةِ 100° عنِ الشمالِ منَ المدينةِ A، فقطعَتْ مسافةَ 400 km، ثمَّ انعطفَتْ يمينًا، فأصبحَتِ الزاويةُ بينَ خطِّ مسارِها الجديدِ والشمالِ 170°، ثمَّ قطعَتْ مسافةَ 500 km لتصلَ إلى المدينةِ B. ما المسافةُ بينَ هاتيْنِ المدينتيْنِ؟



يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ المدينتيْنِ (طولُ القطعةِ المستقيمةِ AB) بإيجادِ قياسِ الزاويةِ AMB.

منَ المُلاحَظِ أنَّ الزاويةَ AMN_2 مُكمِّلةٌ للزاويةِ MAN_1، وهيَ تساوي 80°.

مجموعُ الزوايا حولَ نقطةٍ $\quad m\angle AMB = 360^\circ - (80^\circ + 170^\circ) = 110^\circ$

قانونُ جيوبِ التمامِ $\quad (AB)^2 = (400)^2 + (500)^2 - 2 \times 400 \times 500 \cos 110^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\quad (AB)^2 = 546808.0573$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ $\quad AB = \sqrt{546808.0573} \approx 739.5$

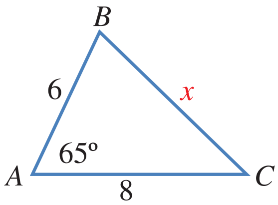
إذنْ، المسافةُ بينَ المدينتيْنِ 739.5 km تقريبًا.

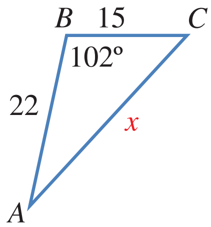
أتحقق من فهمي

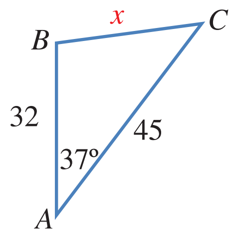
سارَ قطارٌ منَ المحطَّةِ A في اتجاهِ 080° إلى المحطَّةِ B التي تبعدُ عنْها 120 km، ثمَّ تَحوَّلَ إلى اتجاهِ 070°، وسارَ مسافةَ 90 km إلى المحطَّةِ C. ما المسافةُ بينَ المحطَّةِ A والمحطَّةِ C؟

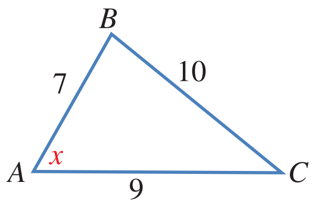
أتدرب وأحل المسائل

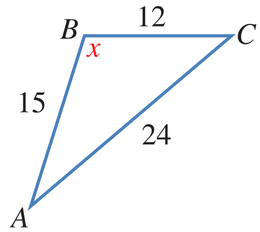
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

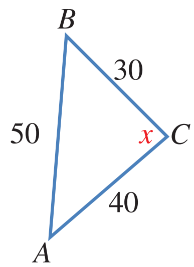
1


2


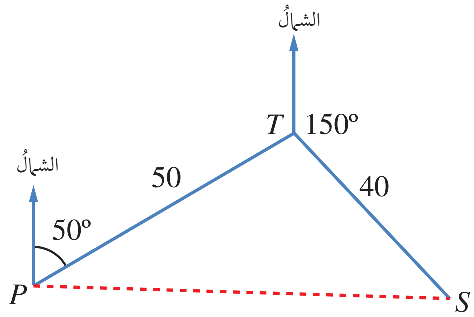
3


4


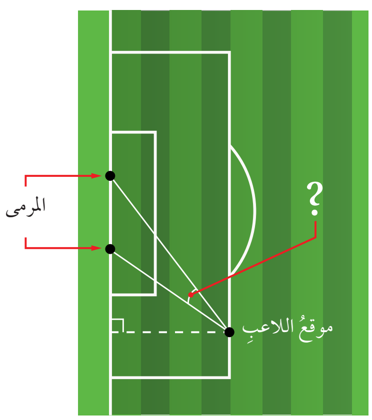
5


6


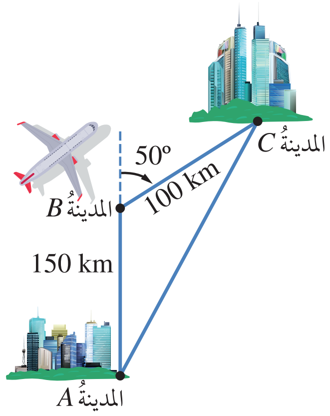
7 **ملاحةٌ جويةٌ:** أبحرَتْ سفينةٌ منْ أحدِ الموانئِ مسافةَ 50 km في اتجاهِ 050º، ثمَّ غيَّرَ القبطانُ خطَّ سيرِها إلى اتجاهِ 150º وقطعَتْ مسافةَ 40 km، ثمَّ توقَّفَتْ بسببِ إصابةِ أحدِ أفرادِ الطاقمِ. ما المسافةُ التي ستقطعُها مروحيةُ الإنقاذِ منَ الميناءِ لتصلَ إلى السفينةِ في أقصرِ وقتٍ مُمكِنٍ؟



8 **كرةُ قدمٍ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ موقعَ لاعبِ كرةِ قدمٍ يركلُ الكرةَ نحوَ مرمًى عرضُهُ 5 m. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ التي يستطيعُ منْها اللاعبُ أنْ يركلَ الكرةَ لتسديدِ هدفٍ، علمًا بأنَّهُ يبعدُ عنْ طرفَيِ المرمى مسافةَ 26 m و 23 m.

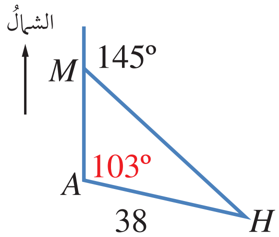


9 **خرائطُ طيرانٍ**: أقلعَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ A في اتجاهِ 000° مسافةَ 150 km، ثمَّ اتَّجهَتْ إلى 050°، وسارَتْ مسافةَ 100 km حتّى وصلَتِ المدينةَ C كما في الشكلِ المجاورِ. ما أقصرُ مسافةٍ ممكنةٍ بينَ المدينتيْنِ إذا كانَ مسموحًا للطائرةِ اتّخاذُ المسارِ الذي تريدُ؟



10 **ساعاتٌ**: طولُ عقربَيْ ساعةٍ 3 cm، وَ 4 cm. أَجِدُ المسافةَ بينَ رأسَيِ العقربيْنِ عندما يشيرانِ إلى الساعةِ 4 تمامًا.

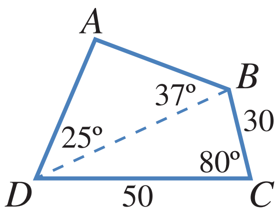
11 **مروحيةُ إنقاذٍ**: أُرسِلَتْ مروحيةُ إنقاذٍ منَ القاعدةِ A لإسعافِ رجلٍ على جبلٍ عندَ النقطةِ M إلى الشمالِ منْ هذهِ القاعدةِ، ثمَّ أوصلَتْهُ إلى المستشفى H الذي يبعدُ عنِ القاعدةِ مسافةَ 38 km كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسافةَ منَ الجبلِ إلى المستشفى بطريقتيْنِ.



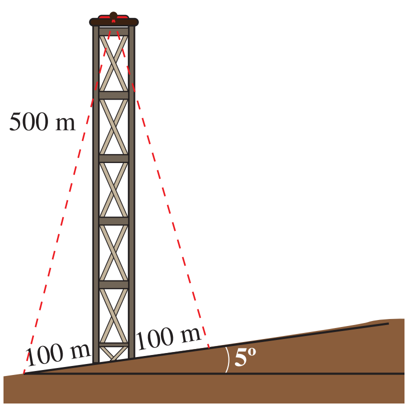
مهارات التفكير العليا

12 **تحدٍّ**: أَجِدُ قياسَ أصغرِ زاويةٍ في مثلثٍ أطوالُ أضلاعِهِ $3a, 5a, 7a$ ، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ.

13 **تحدٍّ**: يُمثِّلُ الشكلُ $ABCD$ المجاورُ حقلَ نخيلٍ تريدُ مالكتُهُ إحاطتهُ بسياجٍ. أَجِدُ طولَ السياجِ.



14 **تحدٍّ**: يرتفعُ برجٌ 500 m على تلَّةٍ تميلُ بزاويةِ 5° عنِ المستوى الأفقيِّ كما في الشكلِ المجاورِ. أرادَتِ المهندسةُ صفاءُ تثبيتَ البرجِ بسلكيْنِ منْ قمَّتِهِ إلى نقطتيْنِ على الأرضِ، تبعدُ كلٌّ منْهُما مسافةَ 100 m عنْ قاعدةِ البرجِ. أَجِدُ طولَ السلكيْنِ.



الدرسُ 4

استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ
Using Sine to Find the Area of a Triangle

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَ فيهِ طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما.

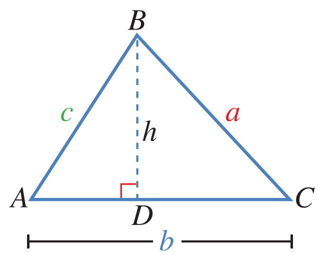
مسألةُ اليومِ لدى مُزارِعٍ قطعةُ أرضٍ مثلثةُ الشكلِ، طولُ أحدِ أضلاعِها 84 m، وطولُ ضلعٍ آخرَ 110 m، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما $145°$، وقدْ أرادَ زراعتَها بالبطاطا، فلَزِمَهُ 0.15 kg منْ درناتِ البطاطا لكلِّ مترٍ مربَّعٍ. كيفَ يستطيعُ المُزارِعُ حسابَ كميةِ درناتِ البطاطا اللازمةِ لزراعةِ أرضِهِ؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ مساحةِ المثلثِ بضربِ نصفِ طولِ قاعدتِهِ في ارتفاعِهِ، غيرَ أنَّهُ يتعذَّرُ استعمالُ هذهِ الطريقةِ إذا كانَ الارتفاعُ مجهولًا؛ لذا يُمكِنُ استخدامُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ قانونٍ آخرَ لحسابِ مساحةِ المثلثِ باستعمالِ أطوالِ أضلاعِهِ وقياساتِ زواياهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، نُلاحِظُ أنَّ BD هوَ ارتفاعُ المثلثِ ABC، وأنَّهُ عموديٌّ على القاعدةِ AC.

فإذا كانَ $AC = b$، وَ $BD = h$، فإنَّ مساحةَ هذا المثلثِ هيَ:

$$K = \frac{1}{2} AC \times BD$$

$$= \frac{1}{2} bh$$



نُلاحِظُ أيضًا منَ المثلثِ BDC ما يأتي:

$\sin C = \frac{h}{a}$ تعريفُ جيبِ الزاويةِ

$h = a \sin C$ بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في a

$K = \frac{1}{2} b (a \sin C)$ بالتعويضِ عنْ h في قانونِ مساحةِ المثلثِ بـ $a \sin C$

$= \frac{1}{2} ab \sin C$

يُمكِنُ رسمُ العمودِ منَ الرأسِ A إلى الضلعِ الذي يقابِلُهُ BC، ومنَ الرأسِ C إلى الضلعِ الذي يقابِلُهُ AB، لبيانِ أنَ مساحةَ هذا المثلثِ تساوي $\frac{1}{2} ac \sin B$، وأنَّها تساوي أيضًا $\frac{1}{2} bc \sin A$.

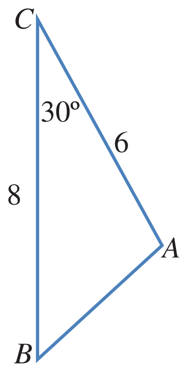
مساحةُ المثلثِ

مفهومٌ أساسيٌّ

مساحةُ المثلثِ تساوي نصفَ ناتجِ ضربِ طولَيْ أيِّ ضلعيْنِ فيهِ مضروبًا في جيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

$K=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad K=\frac{1}{2}ac\sin B \qquad K=\frac{1}{2}ab\sin C$

مثال 1



أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.

قانونُ مساحةِ المثلثِ $K=\frac{1}{2}ab\sin C$

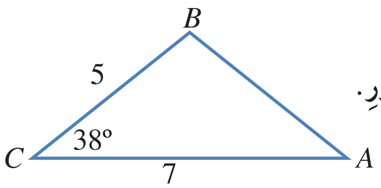
بالتعويضِ $=\frac{1}{2}\times 8\times 6\times \sin 30^\circ$

$=12$

إذنْ، مساحةُ المثلثِ 12 وحدةً مربعةً.

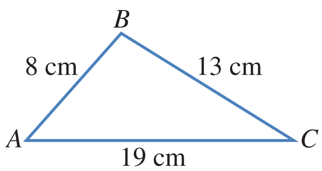
أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.



تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ كيفَ أَجِدُ مساحةَ مثلثٍ عُلِمَ فيه طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما، وسأتعلَّمُ الآنَ كيفيةَ حسابِ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَتْ فيهِ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ.

مثال 2



أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC في الشكلِ المجاورِ.

يتعيَّنُ أولًا إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، ثمَّ حسابُ المساحةِ.

إذنْ، أَستعملُ قانونَ جيوبِ التمامِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ C:

قانونُ جيوبِ التمامِ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

بالتعويضِ $=\frac{13^2+19^2-8^2}{2\times 13\times 19}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $=0.9433$

معكوسُ cos ، واستعمالُ الآلةِ الحاسبةِ $C=\cos^{-1}0.9433=19.4^\circ$

أُطبِّقُ قانونَ المساحةِ:

قانونُ مساحةِ المثلثِ $K = \frac{1}{2} ab \sin C$

بالتعويضِ $= \frac{1}{2} \times 13 \times 19 \times \sin 19.4°$

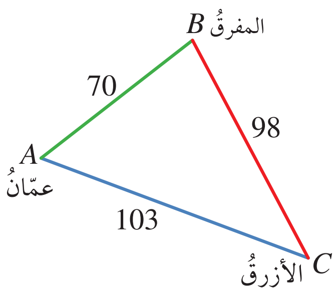
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 41.0 \text{ cm}^2$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF، علمًا بأنَّ $DE = 10$ cm، وَ $DF = 12$ cm، وَ $EF = 9$ cm.

مثال 3: من الحياة

المسافةُ بينَ عمّانَ والأزرقِ 103 km، وبينَ عمّانَ والمفرقِ 70 km، وبينَ المفرقِ والأزرقِ 98 km. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ الذي تقعُ عندَ رؤوسِهِ هذهِ المدنُ الثلاثُ.



الخطوةُ 1: إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا، ولتكنْ B، باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمام.

قانونُ جيوبِ التمامِ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

بالتعويضِ $= \frac{98^2 + 70^2 - 103^2}{2 \times 98 \times 70}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 0.2839$

معكوسُ جيبِ التمامِ، واستعمالُ الآلةِ الحاسبةِ $B = \cos^{-1}(0.2839) = 73.5°$

الخطوةُ 2: تطبيقُ قانونِ المساحةِ.

قانونُ مساحةِ المثلثِ $K = \frac{1}{2} ac \sin B$

بالتعويضِ $= \frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times \sin 73.5°$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 3288.8 \text{ km}^2$

التخزينُ في ذاكرةِ الآلةِ الحاسبةُ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ B في هذا السؤالِ، ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ (بالترتيبِ منَ اليسارِ): SHIFT → RCL → B فتُحفَظُ الزاويةُ في الذاكرةِ. ولاستعمالِها في حسابِ مساحةِ المثلثِ، أُدخِلُ: $\frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times$ ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ: sin → ALPHA → B → =، فتظهرُ النتيجةُ: 3288.8

أتحقق من فهمي

قطعةُ رخامٍ مثلثةُ الشكلِ، أبعادُها: 50 cm، وَ 85 cm، وَ 70 cm. ما مساحتُها؟

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 المثلثُ ABC الذي فيهِ $BC = 7$ cm ، وَ $AC = 8$ cm ، وقياسُ الزاويةِ ACB فيهِ 59° .

2 المثلثُ ABC الذي قياسُ الزاويةِ BAC فيهِ 85° ، وَ $AC = 6.7$ cm ، وَ $AB = 8$ cm .

3 المثلثُ PQR الذي فيهِ $QR = 27$ cm ، وَ $PR = 19$ cm ، وقياسُ الزاويةِ QRP فيهِ 109° .

4 المثلثُ XYZ الذي فيهِ $XY = 231$ cm ، وَ $XZ = 191$ cm ، وقياسُ الزاويةِ YXZ فيهِ 73° .

5 المثلثُ LMN الذي فيهِ $LN = 63$ cm ، وَ $LM = 39$ cm ، وقياسُ الزاويةِ NLM فيهِ 85° .

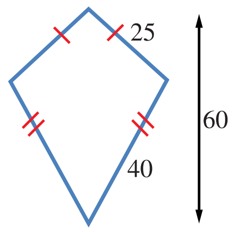
6 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ ABC هيَ 27 cm^2 ، وَ $BC = 14$ cm ، وقياسُ الزاويةِ BCA فيهِ 115°، فما طولُ AC؟

7 إذا كانَتْ مســاحةُ المثلثِ LMN هيَ 133 cm^2 ، وَ $LM = 16$ cm ، وَ $MN = 21$ cm ، والزاويةُ LMN حادَّةً، فما قياسُ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ: LMN ، وَ MNL؟

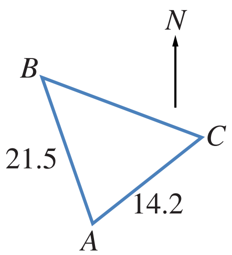
9 لوحةٌ على شكلِ مثلثٍ، أطوالُ أضلاعِهِ: 60 cm ، وَ 70 cm، وَ 80 cm. أَجِدُ مساحةَ اللوحةِ.

10 دائرتــانِ، مركزُ إحداهُما P ومركزُ الأُخرى Q ، وطولُ نصفِ قُطْــرِ إحداهُما 6 cm والأخرى 7 cm. إذا تقاطعَتا في النقطتيْنِ X وَ Y، وكانَ $PQ = 9$ cm، فما مساحةُ المثلثِ PXQ؟

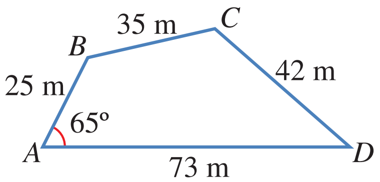
11 **طائرةٌ ورقيةٌ:** صنعَ ســليمٌ طائرةً ورقيةً كما في الشــكلِ المجاورِ. أَجِدُ مســاحةَ المادةِ اللازمةِ لصنعِ الطائرةِ بالوحداتِ المربعةِ.



12 **مُتنزَّهٌ وطنيٌّ:** يرادُ إنشــاءُ مُتنــزَّهٍ وطنيٍّ على قطعةِ أرضٍ مثلثةِ الشــكلِ ABC . إذا كانَتِ النقطــةُ B في اتجاهِ 324° منَ النقطةِ A ، والنقطةُ C فــي اتجاهِ 042° منَ النقطةِ A ، فما مساحةُ المُتنزَّهِ بالوحداتِ المربعةِ؟



حقولٌ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ أبعادَ حقلٍ رباعيِّ الأضلاعِ:



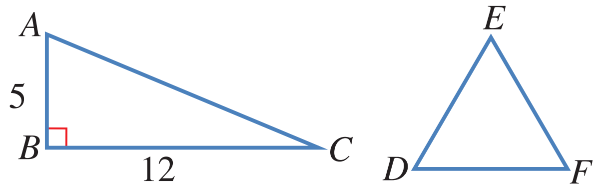
13 أُثبِتُ أنَّ طولَ BD هوَ 66 m ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ مترٍ.

14 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ C.

15 أحسُبُ مساحةَ الحقلِ.

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

17 المثلثُ ABC قائمُ الزاويةِ، والمثلثُ DEF مُتطابِقُ الأضلاعِ وللمثلثيْنِ المحيطُ نفسُهُ. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF.



18 **جغرافيا:** برمودا منطقةٌ مثلثةُ الشكلِ، تقعُ في الجزءِ الغربيِّ منَ المحيطِ الأطلسيِّ، رؤوسُها مدينةُ ميامي، وبرمودا، وسان خوان. وقدْ شهدَ مثلثُ برمودا وقوعَ عددٍ منْ حوادثِ اختفاءِ السفنِ والطائراتِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ ميامي وسان خوان 1674 km تقريبًا، وبينَ ميامي وبرمودا نحوَ 1645 km، وبينَ سان خوان وبرمودا قرابةَ 1544 km، فما مساحةُ مثلثِ برمودا منْ دونِ اعتبارٍ لتقوُّسِ الأرضِ؟

مهارات التفكير العليا

19 **تحدٍّ:** أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC الذي قياسُ الزاويةِ A فيهِ $70°$، وقياسُ الزاويةِ B فيهِ $60°$، وطولُ الضلعِ AB فيهِ 4 cm.

20 **أكتشفُ الخطأَ:** ABC مثلثٌ فيهِ $BC = 8\text{cm}$، $AB = 9\text{cm}$، وقياسُ الزاويةِ A فيهِ $30°$. أرادَتْ نورُ إيجادَ مساحتِهِ إلى أقربِ عُشْرٍ، فكانَ حَلُّها كما يأتي:

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30°$$
$$= 18\text{ cm}^2$$

أكتشفُ الخطأَ في حَلِّ نورَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

الدرسُ 5

حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ
Solving Problems in Three Dimensions

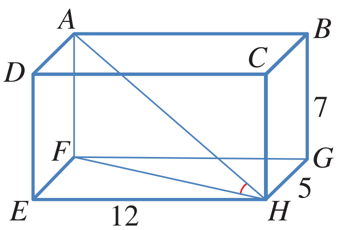
فكرةُ الدرسِ إيجادُ أطوالٍ وقياساتٍ لزوايا مجهولةٍ في أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس والنسبِ المثلثيةِ.

مسألةُ اليومِ شُيِّدَ الهرمُ الأكبرُ في مدينةِ الجيزةِ بمصرَ عامَ 2500 قبلَ الميلادِ تقريبًا، وتُمثِّلُ قاعدتُهُ مربَّعًا طولُ ضلعِهِ 232.6 m، وطولُ الضلعِ الواصلِ بينَ قمَّةِ الهرمِ وأيٍّ منْ رؤوسِ المربَّعِ 221.2 m. أَجِدُ ارتفاعَ هذا الهرمِ.

تشتملُ المسائلُ ثلاثيةُ الأبعادِ (في الفضاءِ) على ثلاثةِ مستوياتٍ؛ أفقيٍّ، ورأسيٍّ، ومائلٍ. ويتطلَّبُ حَلُّ هذهِ المسائلِ رسمَ مُخطَّطٍ يُوضِّحُ المسألةَ، ويُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ فيها، ثمَّ البحثَ عنْ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ فيها. وإذا لمْ توجدْ هذهِ المثلثاتُ، فإنَّنا نرسمُ بعضَها، بحيثُ تكونُ بعضُ عناصرِها معلومةً، فضلًا عنْ تحديدِ العنصرِ المطلوبِ إيجادُهُ فيها؛ على أنْ نرسمَ كلًّا منْها بمنأى عنِ المُخطَّطِ المذكورِ آنفًا، ليسهلَ علينا معرفةُ العلاقةِ التي نستخدمُها في الحَلِّ.

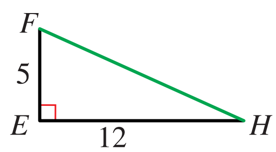
مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ متوازي مستطيلاتٍ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AHF، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



المثلثُ AFH قائمُ الزاويةِ في F، ومعلومٌ فيهِ طولُ AF؛ لذا يجبُ معرفةُ عنصرٍ آخرَ لإيجادِ القياسِ المطلوبِ.

الخطوةُ 1: إيجادُ طولِ FH منَ المثلثِ قائمِ الزاويةِ FEH ؛ المرسومِ وحدَهُ جانبًا.

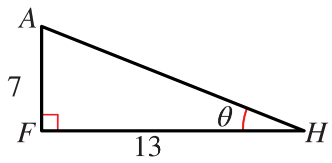


$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$= 5^2 + 12^2$ بالتعويضِ

$(FH)^2 = 169$ بالتبسيطِ

$FH = \sqrt{169} = 13$ بحسابِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ



الخطوةُ 2: رسمُ المثلثِ AFH وحدَهُ، ثمَّ استعمالُ الظلِّ (tan) لإيجادِ قياسِ الزاويةِ AHF.

$$\tan\theta = \frac{7}{13} = 0.5385$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.5385) = 28.3^\circ$$ بالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ BE، وقياسَ الزاويةِ EBG في المثالِ السابقِ.

يُمكِنُ نمذجةُ كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ باستعمالِ المثلثاتِ، ثمَّ إيجادُ قياساتٍ مجهولةٍ فيها باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.

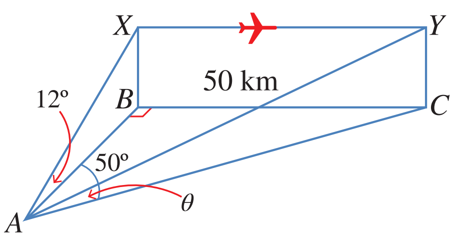
مثال 2: من الحياة

تقعُ النقاطُ A، وَ B، وَ C في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ على الأرضِ، وتقعُ النقطةُ C على بُعْدِ 50 km شرقيَّ النقطةِ B التي تقعُ شماليَّ النقطةِ A، وتقعُ النقطةُ C في اتجاهِ 050° منَ النقطةِ A. رُصِدَتْ منَ النقطةِ A حركةُ طائرةٍ في موقعيْنِ مختلفيْنِ على الارتفاعِ نفسِهِ عنِ الأرضِ؛ الأولِ: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ B مباشرةً، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 12°. والثاني: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C. أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C.

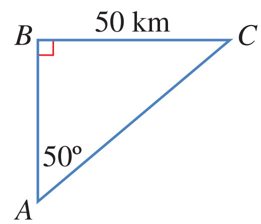
أتذكّر

تُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ خطِّ البصرِ والخطِّ الأفقيِّ المارِّ بعينِ الناظرِ زاويةَ الارتفاعِ.

الخطوةُ 1: أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ.



الخطوةُ 2: أرسمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ AB، وَ AC.



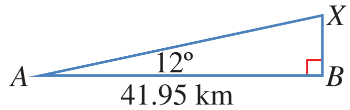
$$\tan 50^\circ = \frac{50}{AB}$$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$$AB = \frac{50}{\tan 50^\circ} = 41.95 \text{ km}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\sin 50^\circ = \frac{50}{AC}$$ تعريفُ جيبِ الزاويةِ

$$AC = \frac{50}{\sin 50^\circ} = 65.27 \text{ km}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

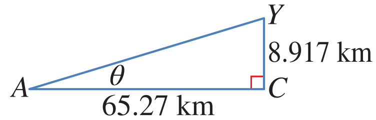
الخطوةُ 3: أرسـمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABX، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ BX، ومنْهُ يُمكِنُ إيجادُ CY، فهما متساويانِ؛ لأنَّ الشكلَ $BXYC$ مستطيلٌ.



$$\tan 12^\circ = \frac{BX}{41.95}$$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$$BX = 41.95 \tan 12^\circ = 8.917 \text{ km}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوةُ 4: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ACY لإيجادِ زاويةِ الارتفاعِ θ.



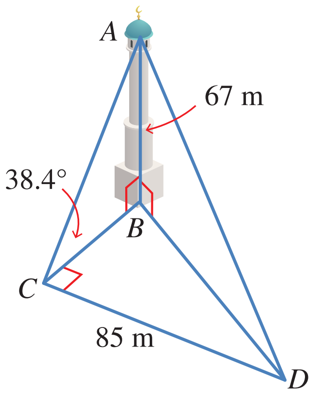
$$\tan \theta = \frac{8.917}{65.27} = 0.1366$$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$$\theta = \tan^{-1} 0.1366 = 7.8^\circ$$ معكوسُ الظلِّ

إذنْ، زاويةُ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C هيَ: 7.8°، مُقرَّبةً إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أتحقق من فهمي

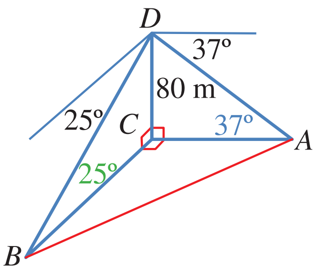
رصدَ أحمدُ قمَّةَ مئذنةٍ منْ نقطةٍ على الأرضِ تقعُ جنوبَ المئذنةِ، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 38.4°، ثمَّ سارَ شرقًا مسافةَ 85 m، ورصدَ قمَّةَ المئذنةِ مرَّةً أُخرى. إذا كانَ ارتفاعُ المئذنةِ 67 m، أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المئذنةِ في المرَّةِ الثانيةِ.



مثال 3: من الحياة

رُصِدَ المنزلُ A في اتجاهِ الشرقِ منْ قمَّةِ برجٍ يرتفعُ 80 m، وكذلكَ المنزلُ B في اتجاهِ الجنوبِ. إذا كانَتْ زاويةُ انخفاضِ المنزلِ A منْ قمَّةِ البرجِ 37°، وزاويةُ انخفاضِ المنزلِ B منْ قمَّتِهِ 25°، فما المسافةُ بينَ المنزليْنِ؟

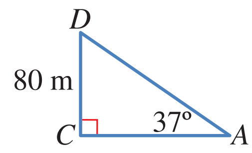
الخطوةُ 1: أرسمُ مُخطَّطًا، علمًا بأنَّ البرجَ DC يَصنعُ زاويةً قائمةً معَ الأرضِ، وأنَّ اتجاهَ كلٍّ منَ الشرقِ والجنوبِ يَصنعانِ معًا زاويةً قائمةً.



بما أنَّ زاويةَ انخفاضِ المنزلِ A هيَ 37°، فإنَّ الزاويةَ DAC هيَ 37°، وبما أنَّ زاويةَ انخفاضِ المنزلِ B هيَ 25°، فإنَّ الزاويةَ DBC هيَ 25° .

الخطوةُ 2: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC لإيجادِ AB، وهذا يُحتِّمُ معرفةَ AC، وَ BC.

الخطوةُ 3: أرسمُ المثلثَ ADC . ولإيجادِ AC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ 37°.

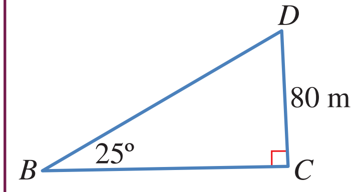


$$\tan 37^\circ = \frac{80}{AC}$$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$$AC = \frac{80}{\tan 37^\circ}$$ بالتبسيطِ

$$AC = 106.2 \text{ m}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوةُ 4: أرسمُ المثلثَ BCD. ولإيجادِ BC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ 25°.

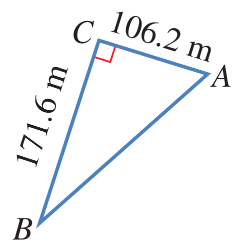


$$\tan 25^\circ = \frac{80}{BC}$$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$$BC = \frac{80}{\tan 25^\circ}$$ بالتبسيطِ

$$BC = 171.6 \text{ m}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوةُ 5: أستعملُ نظريةَ فيثاغورس في المثلثِ ACB لإيجادِ AB.



$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$ نظريةُ فيثاغورس

$$= (106.2)^2 + (171.6)^2 = 40725$$ بالتعويضِ

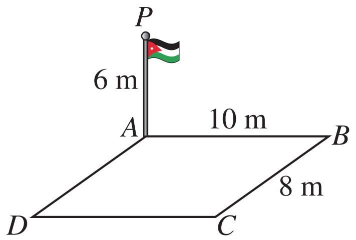
$$AB = \sqrt{40725} = 201.8$$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ

إذنْ، المسافةُ بينَ المنزليْنِ هيَ: 201.8 m، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

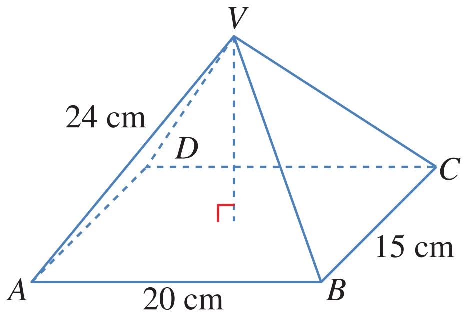
أتحقق من فهمي

أبحرَتِ السفينتانِ A وَ B منَ الميناءِ P في اتجاهيْنِ مُتعامِديْنِ. وقدْ رصدَتْ طائرةٌ عموديةٌ تُحلِّقُ فوقَ الميناءِ هاتيْنِ السفينتيْنِ في اللحظةِ نفسِها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 40°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 54°. إذا كانَ ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ البحرِ 600 m، فما المسافةُ بينَ السفينتيْنِ لحظةَ رصدِهِما؟

أتدرب وأحل المسائل



1 **ســاريةُ العَلَمِ**: نُصِبَتْ ســاريةُ عَلَمٍ عموديًّا عندَ رُكنِ ساحةٍ مستطيلةِ الشكلِ $ABCD$. أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الساريةِ P منَ النقطةِ C.

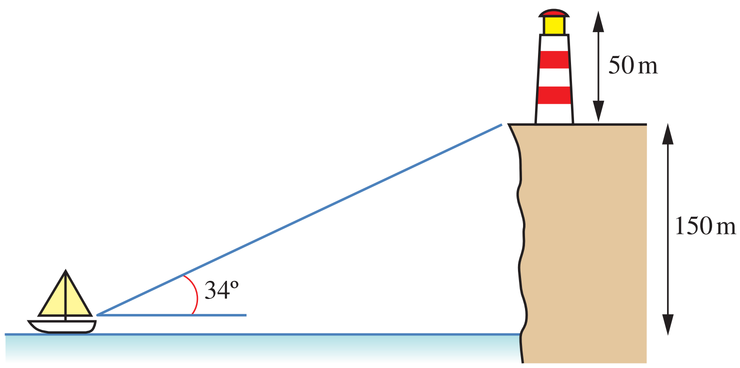


يُمثِّلُ الشــكلُ المجاورُ هرمًا قائمًا قاعدتُهُ $ABCD$ مســتطيلةُ الشكلِ، بُعْداهــا: 20 cm، وَ 15 cm. إذا كانَ طولُ كلٍّ منَ الأحرفِ الواصلةِ بينَ قمَّةِ الهــرمِ ورؤوسِ القاعدةِ 24 cm، وكانَتِ القمَّةُ V تقعُ رأســيًّا فوقَ مركزِ القاعدةِ المستطيلةِ، فأَجِدُ:

2 طولَ القُطْرِ AC.

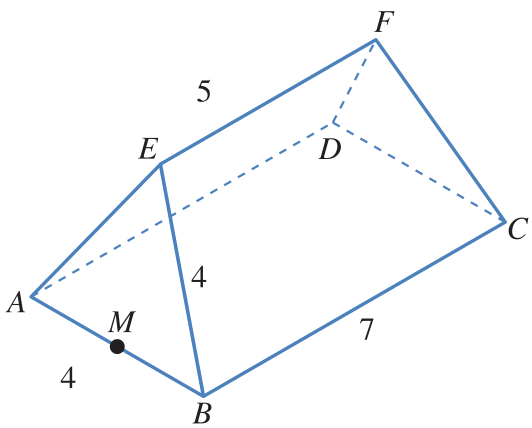
3 قياسَ الزاويةِ VAC.

4 ارتفاعَ الهرمِ.



5 **منارةٌ**: شاهدَ صيّادٌ منْ قاربِهِ قاعدةَ مَنارةٍ على حافةٍ صخريةٍ بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُــها °34. إذا كانَ ارتفاعُ قاعدةِ المَنارةِ عنْ مســتوى عينَيِ الصيّادِ 150 m، فكمْ يبعدُ الصيّادُ عنْ هذهِ القاعدةِ؟

6 إذا كانَ ارتفاعُ المَنارةِ 50 m، فما زاويةُ ارتفاعِ نظرِ الصيّادِ نحوَ قمَّةِ المَنارةِ؟

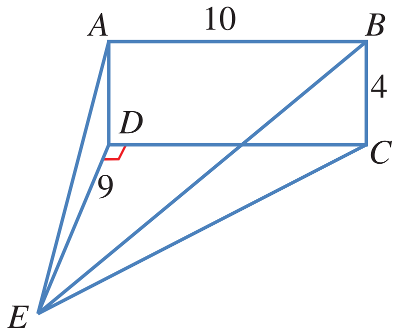


يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سقفَ بنايةٍ، قاعدتُهُ المستطيلُ الأفقيُّ $ABCD$ الــذي بُعْــداه: 7 m، وَ 4 m. وتُمثِّلُ نهايتا الســقفِ مثلثيْنِ متطابقَيِ الأضلاعِ، في حينِ يُمثِّلُ كلٌّ منْ جانبَيِ الســقفِ شبهَ منحرفٍ متطابقَ الساقيْنِ. إذا كانَ طولُ الحافةِ العلويةِ EF هوَ 5 m، فأَجِدُ:

7 طولَ EM، حيثُ M نقطةُ منتصفِ AB.

8 قياسَ الزاويةِ EBC.

9 قياسَ الزاويةِ بينَ EM والقاعدةِ $ABCD$.



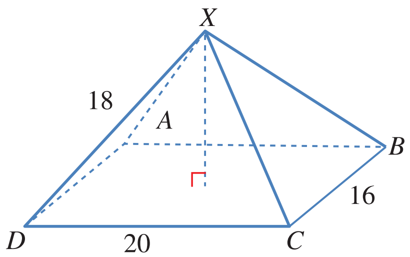
$ABCD$ مستطيلٌ رأسـيٌّ، وَ EDC مثلثٌ أفقيٌّ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CDE هوَ 90^o، وَ $AB = 10\ cm$، وَ $BC = 4\ cm$، وَ $ED = 9\ cm$، فأَجِدُ:

10 قياسَ الزاويةِ AED.

11 قياسَ الزاويةِ DEC.

12 طولَ $\overline{EC}$.

13 قياسَ الزاويةِ BEC.

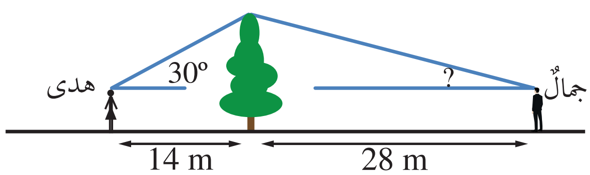


14 يُمثِّلُ الشـكلُ المجاورُ الهرمَ $XABCD$ الذي لهُ قاعدةٌ مستطيلةُ الشكلِ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقُطْرِ القاعدةِ DB.

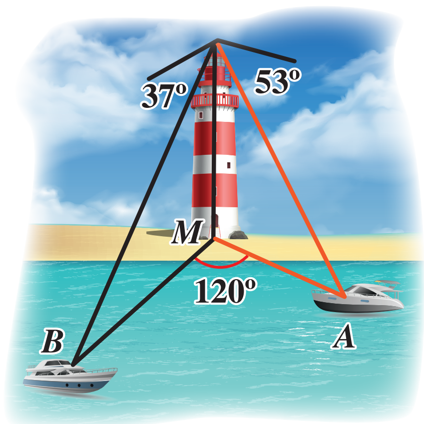
15 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

16 **أكتشفُ الخطأَ:** تقفُ هدى على بُعْدِ $14\ m$ شرقيَّ شجرةٍ، زاويةُ ارتفاعِ قمَّتِها بالنسبةِ إليْهِ 30^o، ويقفُ جمالٌ على بُعْدِ $28\ m$ غربيَّ الشـجرةِ، وهوَ يرى أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الشـجرةِ بالنسبةِ إليْهِ يجبُ أنْ تكونَ 15^o؛ لأنَّهُ يبعدُ عنِ الشجرةِ مِثْلَي المسافةِ التي تبعدُها هدى. هلْ رأيُ جمالٍ صحيحٌ؟ إذا لمْ يكنْ رأيُهُ صحيحًا، فما زاويةُ الارتفاعِ؟



17 **تحـدٍّ:** رُصِدَ القاربانِ A وَ B فـي البحرِ منْ قمَّةِ مَنارةٍ على الشـاطئِ، ارتفاعُها $44\ m$، في اللحظةِ نفسِـها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ A هيَ 53^o، وزاويةُ انخفـاضِ القاربِ B هيَ 37^o، وقياسُ الزاويةِ AMB هوَ 120^o، حيثُ M قاعدةُ المَنارةِ. أَجِدُ المسافةَ بينَ القاربيْنِ.



أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ زواياهُ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ. **b)** قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.

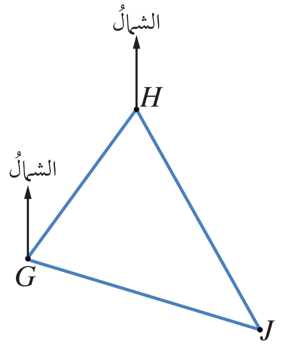
c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا. **d)** لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

2 يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ أضلاعِهِ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ. **b)** قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.

c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا. **d)** لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

3 إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ H منَ النقطةِ G في الشكلِ الآتي هوَ 045°، واتجاهُ النقطةِ J منَ النقطةِ H هوَ 164°، فإنَّ قياسَ الزاويةِ GHJ هوَ:



a) 16° **b)** 045°

c) 29° **d)** 61°

4 إحدى الصيغِ الآتيةِ تُستعمَلُ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ ABC:

a) $\frac{1}{2}bc\sin C$ **b)** $\frac{1}{2}ab\sin C$

c) $\frac{1}{2}ab\sin A$ **d)** $\frac{1}{2}ab\sin B$

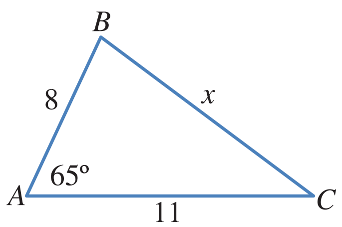
5 إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ R منَ النقطةِ Z هوَ 070°، فإنَّ اتجاهَ النقطةِ Z منَ النقطةِ R هوَ:

a) 070° **b)** 110°

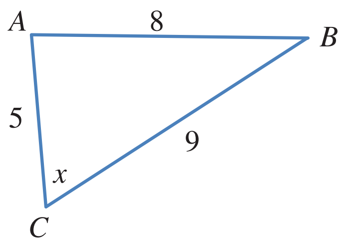
c) 250° **d)** 290°

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

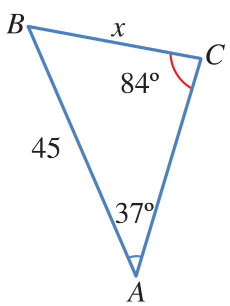
6



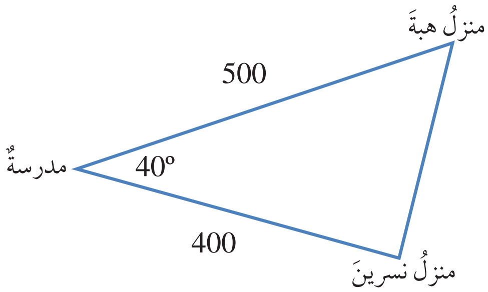
7



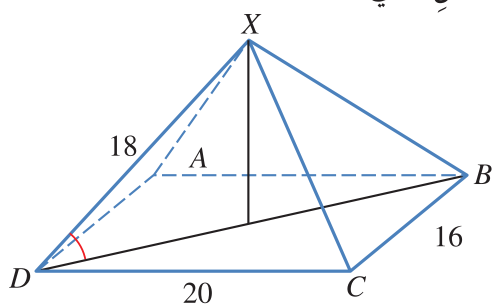
8



9 يبعدُ منزلُ نسرينَ عنِ المدرسةِ مسافةَ 400 m، ويبعدُ منزلُ هبةَ عنِ المدرسةِ نفسِها مسافةَ 500 m، كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ المسافةَ بينَ منزلَيْهِما.

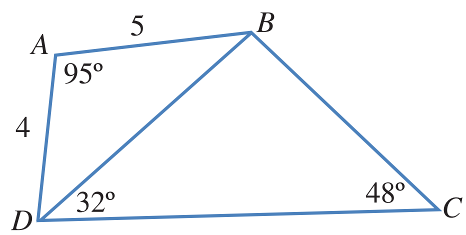


10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقاعدةِ الهرمِ في الشكلِ الآتي.



11 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ PQR هيَ $68\ cm^2$، وكانَ $PQ = 18\ cm, RQ = 15\ cm$، فما قياسُ الزاويةِ الحادَّةِ PQR؟

مستعينًا بالشكلِ الآتي، أَجِدُ:



12 طولَ $\overline{DB}$.

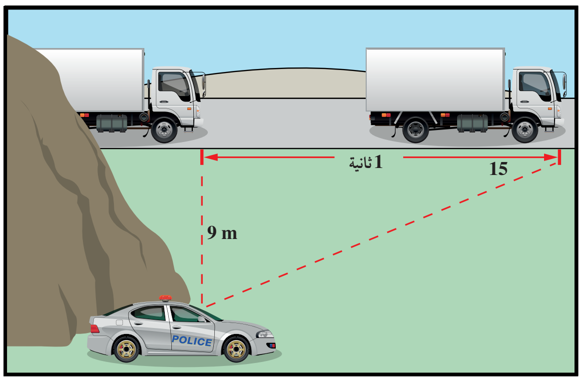
13 قياسَ الزاويةِ DBC .

14 طولَ $\overline{CD}$.

15 مساحةَ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$.

16 **موانئُ:** أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P باتجاهِ الغربِ مسافةَ 16 km، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ الجنوبِ، وقطعَتْ مسافةَ 9 km حتّى وصلَتِ الميناءَ S. أَجِدُ اتجاهَ الميناءِ S منَ الميناءِ P.

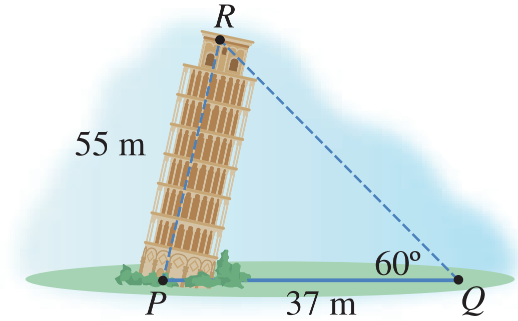
17 **رادارٌ:** رَصدَ رادارٌ شاحنةً بعدَ ثانيةٍ منْ مرورِها بمحاذاتِهِ، فصنعَ الخطُّ الواصلُ بينَ الرادارِ والشاحنةِ وحافةِ الطريقِ زاويةً مقدارُها 15° كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ سرعةَ الشاحنةِ بوحدةِ km/h.



18 **عواصفُ بحريةٌ:** أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A بسرعةِ 28 km/h مُتوجِّهةً إلى الميناءِ B على بُعْدِ 1100 km شرقَ الميناءِ A. ولتجنُّبِ العواصفِ الشديدةِ التي هبَّتْ عندَ انطلاقِ السفينةِ؛ فقدْ سلكَ القبطانُ مسارًا ينحرفُ 20° جنوبًا عنْ خطِّ الملاحةِ المباشرِ بينَ الميناءيْنِ حتّى هدأَتِ العواصفُ بعدَ إبحارٍ استمرَّ 10 ساعاتٍ. كمْ تبعدُ السفينةُ عنِ الميناءِ B بعدَ هذهِ المدَّةِ منَ الإبحارِ؟ ما قياسُ الزاويةِ الذي سيجعلُ السفينةَ تتوجَّهُ مباشرةً إلى الميناءِ B؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

بـــرجُ بيزا: طولُ برجِ بيزا المائلِ نحــوَ 55 m، وزاويةُ ارتفاعِ أعلى البرجِ منْ نقطةٍ على بُعْدِ 37 m هيَ 60° كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ:

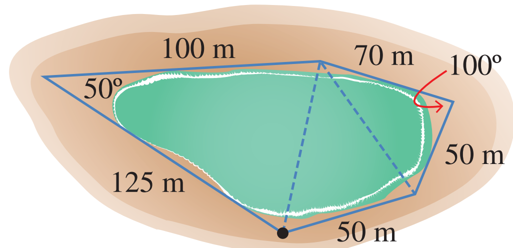


19 قياسَ الزاويةِ RPQ.

20 ارتفاعَ قمَّةِ البرجِ R عنِ الأرضِ.

21 **ملاحةٌ بحريـــةٌ:** انطلقَ قاربٌ منَ النقطـــةِ A منَ الميناءِ نحوَ سفينةٍ مُتوقِّفةٍ في عُرْضِ البحرِ باتجاهِ 030°، وتبعدُ مســـافةَ 2 km عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، ثمَّ تحرَّكَ القاربُ إلى النقطةِ B التي تقعُ باتجاهِ 000° عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، وكانَتِ المسافةُ بينَهُما 3 km. أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ النقطةِ B.

22 **زراعةٌ:** لتقديرِ مســـاحةِ حقلٍ منَ القمحِ، رســـمَ خالدٌ مُضلَّعًا خماســـيًّا حولَهُ، ثـــمَّ حدَّدَ قياســـاتِهِ المُبيَّنَةَ في الشكلِ الآتي. ما مساحةُ الحقلِ التقريبيةُ؟



23 **ملاحةٌ بحريةٌ:** تبعدُ سفينةٌ عنْ قاعدةِ منارةٍ واقعةٍ غربَها مســـافةَ 80 km، وقدْ رصدَ قبطانُ السفينةِ قمَّةَ المَنارةِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها 60°، ثمَّ ســـارَتِ الســـفينةُ بخطٍّ مستقيمٍ في اتجاهِ الشـــرقِ، فوجدَ أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المَنارةِ هيَ 45°. أَجِدُ المسافةَ التي قطعَتْها السفينةُ.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

ركب شـــخصٌ طائرةً عموديةً ترتفعُ 700 m عنْ ســـطحِ البحرِ، فشاهدَ الســـفينتيْنِ A وَ B عندَ مرورِ الطائرةِ فوقَ نقطةٍ بينهما. إذا كانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 45°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 40°، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 24، 25، 26.

24 اعتماداً على زوايا الانخفاضِ، أختارُ العبارةَ الصحيحةَ:

a) موقعُ السفينةِ A بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ B.

b) موقعُ السفينةِ B بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ A.

c) بُعْدُ السفينتيْنِ عنِ الطائرةِ متساوٍ.

d) لا يُمكِنُ معرفةُ أيُّ السفينتيْنِ أبعدُ منْ زوايا الانخفاضِ.

25 المسافةُ بينَ السفينتيْنِ A وَ B مُقرَّبةً إلى أقربِ مترٍ هيَ:

b) 700   a) 134

d) 1534   c) 834

26 أُوضِّحُ كيفَ أجبْتُ عنِ السؤالِ 24.