لا تنتظر وقتاً إضافياً .... لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .... اجعل هدفك ليس النجاح فقط بل التفوق والتميز

إهداء إلى روح والداي

غفر الله لهما وجعلهما

من أهل الجنة

الرياضيات العلامة الكاملة

المستوى الثالث - الفرع العلمي

$\frac{\text{دص}}{\text{د س}} =$

وحدة النهايات والاتصال

(الكتاب ،أسئلة مقترحة وزارة ٢٠٠٧ -٢٠١٨)

إعداد الأستاذ

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{٥ - س}] & \text{، س} > \text{ا} \\ |\text{س} - \text{١}| & \text{، س} < \text{ا} \end{cases}$$

عبد الغفار الشيخ

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ رياضيات + حاسوب ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــــا}} \frac{\text{س جا س - ظا ٢ س}}{(\text{جا ٣ س})\text{– ٥ س}}$$

مقدمة : الاقترانات الأكثر أهمية في المستوى الثالث

الاقترانات كثيرة الحدود

الصورة العامة لها

ق (س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ$_{١}$ س + أ$_{٠}$

أشهر الاقترانات كثيرة الحدود :

- الاقتران الثابت : ق (س) = جـ ، مداه جـ (الثابت)
- الاقتران الخطي : ق (س) = أ س + جـ
- الاقتران التربيعي : ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ
- الاقتران التكعيبي : ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د
- خصائص اقتران كثير الحدود .... ، مجاله ح و مداه ح
- التمثيل البياني لاقتران كثير الحدود
- إيجاد نقاط تقاطع الاقتران مع محور السينات (أصفار لاقتران)

قوانين مهمة :

س^{٢} – ص^{٢} = (س – ص) (س + ص)

(س – ص)^{٢} = س^{٢} – ٢ س ص + ص^{٢}

(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

س^{٣} – ص^{٣} = (س – ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} - س ص + ص^{٢})

(س + ص)^{٣} = س^{٣} + ٣ س^{٢} ص +٣ س ص^{٢} + ص^{٣}

(س - ص)^{٣} = س^{٣} - ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} - ص^{٣}

س^{ن}– ص^{ن} = (س– ص)(س$^{ن-١}$+ س$^{ن-٢}$ص+ س$^{ن-٣}$ص^{٢} + ... + ص$^{ن-١}$)

مثال : حلل الاقترانات التالية :

ق (س) = ٥ س^{٣} – ١٥ س^{٢} + ١٠ س

ق (س) = ٢٥ س^{٢} – ٣٦

ق (س) = ٢ س^{٣} – ١٦

ق (س) = ع^{٣} س^{٤} - س

ق (س) = س^{٢} + ٩ س + ١٨

ق (س) = س^{٢} + ٦ س - ٧

ق (س) = ٣ س^{٢} + ١٠ س - ٨

ق (س) = (س^{٣} - ٢ س^{٢} - ٥ س + ٦) على (س – ٣)

ق (س) = (س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٤ س + ١٢) على (س – ٢)

مثال : باستخدام خوارزمية القسمة جد ناتج وباقي قسمة الاقتران

ق (س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} + س + ٢ على هـ (س) = س + ٢

مثال : حلل المقادير الجبرية التالية

$\frac{١}{٢٥}$ - س^{٢}

٩ س^{٢} – ١٦ ص^{٢}

(س + ٢)^{٢} – ٩

٨ س^{٣} - ٢٧

$\frac{١}{٢٧}$ - س^{٣}

$\frac{١}{٨}$ ص^{٣} + $\frac{١}{٦٤}$ س^{٣}

١٦ س + $\frac{٢ س^{٤}}{٢٧}$

٢ س^{٣} + $\frac{١}{٤}$

٤ س - ٥

س^{٢} – ٤ س

٣ س^{٣} – ١٢ س

٥ س^{٢} - $\frac{٤ ص^{٢}}{٥}$

(٥ س + ٤)^{٢}

س^{٢} – ١٠ س + ٢٤

٣ س^{٢} + ٢ س - ٥

ق (س) = ٢ س^{٣} – س^{٢} – ٤ س + ٣ على (س – ١)

الاقترانات النسبية

الاقتران النسبي = $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ ، المقام ≠ صفر

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$ ، م(س) ≠ صفر

مجاله مجموعة الاعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ٤\,\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ٢\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٤\,\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} + ٤}{٥\,\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س} + ٥}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٢} + \frac{١}{\text{س} + ٢} - \frac{٩}{\text{س}^{٢} - ٤}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - \text{س}^{٣}} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \left(\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}\right)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{٥ + \text{س}} - \frac{١}{٥ - \text{س}}\right)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{٣\,\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٤}\left(\frac{١}{\text{س} + ١} + \frac{١}{٢\,\text{س} + ٥}\right)$$

الاقتران المتشعب : وهو الاقتران المعرف بأكثر من قاعدة

أنواعه : الصريح ، القيمة المطلقة ، أكبر عدد صحيح

مثال : إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{٣} - ١ &،\ \text{س} < ١ \\ ٤ - ٣\,\text{س} &،\ \text{س} > ١ \\ \text{س} &،\ \text{س} = ١ \end{cases}$$

نرسم كل قاعدة لوحدها مع الأخذ بعين الاعتبار التعويض في قاعدة الاقتران المطلوبة

اقتران القيمة المطلقة | | :

أعد تعريف الاقترانات التالية ومثلها بيانيا

- ق (س) = | ٥ س - ١٥ |

- ق (س) = ٥ - | ٢ – ٢ س |

- ق (س) = | ١- س | + | س | ، س ∈ [-٢ ، ٤]

- ق (س) = | س^{٢} – ٢ س | ، س ∈ [١ ، ٤]

- ق (س) = { | س | / س ، س ≠ ٠ ؛ ٣ ، س = ٠

- ق (س) = | س^{٢} + ٦ س + ٥ |

- ق (س) = ٣ | س - ٢ | + | س |

ملاحظة مهمة :

شكل آخر لاقتران القيمة المطلقة :

$\sqrt{س^{٢}}$ =

$\sqrt{(س - ٣)^{٢}}$ =

$\sqrt{(س^{٢} - ٤ س + ٤)}$ =

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة التالية :

| س – ٤ | = ١٠

| ٢ س – ٤ | = ١٢

مثال : حل المتباينة التالية :

| س – ٢ | > ٦

| س – ٥ | < ٤

اقتران أكبر عدد صحيح [ ]

قاعدة : [س] = ن

ن ≤ س < ن + ١

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة : [٣ س - ٤] = ٢

مثال : أعد تعريف الاقترانات التالية ؟

- ق (س) = [س - ٣] ، س ∋ [-١ ، ٢]
- ق (س) = [٣ – س] ، س ∋ [-١ ، ٢]
- ق (س) = س + [س + ٠.٢] ، س ∋ [١ ، ٣]
- ق (س) = $\text{س}^{\text{٢}}$ [٢ – $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$] ، س ∋ [-٣ ، ٦]

ق (س) = [$\frac{\text{س}}{\text{٢}}$] ، س ∋ [-٢ ، ٥]

ق (س) = $\text{س}^{\text{٢}}$ [س] س ∋ [-١ ، ٢]

ق (س) = [س + ٢] + ٤ | س – ٢ | ، س ∋ [٠ ، ٢)

ق (س) = $\frac{[\text{س}]}{|\text{س}|}$ س ∋ [-٤ ، ٤]

ق (س) = $\frac{\sqrt{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤ س} + \text{٤})}}{|\text{س} - \text{٢}|}$ =

النهـــايـــــات

يستخدم مفهوم النهاية في وصف سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير من عدد معين

النهاية عند نقطة : هي القيمة التي يقترب منها الاقتران ق (س) عندما تقترب س من قيمة معينة أ وتكتب على الصورة $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} = \text{ل}$

تقرأ نهاية ق (س) عندما س تقترب من أ تساوي ل

هنا س لا تساوي أ إنما قريبة جداً من أ لذا نقوم بأخذ قيمة قريبة جدا من أ من جهة اليمين وقيمة قريبة جدا من جهة اليسار

أي أنه إذا كانت

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^-} \text{ق(س)} = \text{ل}$

فإن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)}$ موجودة $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} = \text{ل}$

***طرق إيجاد النهاية (الجدول ، الرسم ، النظريات)**

<u>أولاً : الجدول :</u> تعتمد على أخذ قيم يسار ويمين العدد ومقارنتها حسب تعريف النهاية

مثال: أدرس سلوك الاقتران $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} - 5}$ عندما تقترب س من العدد ٥

س

س							
ق(س)							

ص

أوجد :

$\lim\limits_{\text{س} \to 5^+} \text{ق(س)} =$ $\lim\limits_{\text{س} \to 5^-} \text{ق(س)} =$ $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \text{ق(س)} =$

ملاحظة إذا كانت

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^+} \text{ق(س)} \neq \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^-} \text{ق(س)}$ فإن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} = \text{غ . م}$

مثال :إذا علمت أن $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{ق(س)} = 8$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{ق(س)} = 4$

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{ق(س)}$

مثال : إذا علمت أن $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{ق(س)} = 6$ فإن

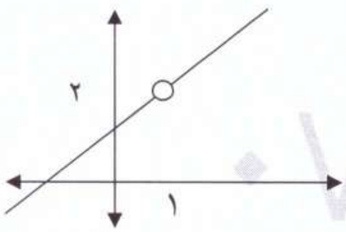
$\lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \text{ق(س)} =$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to 2^-} \text{ق (س)} =$

مثال : ليكن $\text{ق (س)} = \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1}$ حيث س $\neq 1$

أدرس قيم ق (س) عندما س تقترب من ١

س							
ق(س)							

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{ق(س)}$ $\lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{ق (س)}$



مثال : بالاعتماد على الجدول التالي أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \text{ق (س)}$

٥

س	٥.١	٥.٠١	٥.٠٠١		٤.٩٩	٤.٩٨	٤.٩
ق(س)	٢.١	٢.٠١	٢.٠٠١		٣.٩٩	٣.٩٨	٣.٩

<u>إيجاد النهاية عند نقطة أ عن طريق الرسم</u> :-

نأخذ قيمة صغيرة جداً جـ عن يمين أ وعن يسارها على **محور السينات** (أ + جـ ، أ – جـ) وليس بالضرورة أن يكون الاقتران معرف عند هذه النقطة أ ،ونجد قيم الاقتران لكل منها على **محور الصادات** وننظر إذا اقتربت القيمتان من اليمين واليسار **إلى نفس العدد** عندها تكون النهاية موجودة أما إذا اقتربت القيمتان من اليمين واليسار إلى عددين مختلفين فنقول أن النهاية غير موجودة.

مثال : إذا كان ق (س) = $\frac{٤ - س^{٢}}{س - ٢}$ ، س $\neq$ ٢

ارسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد

١) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) =

٢) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) =

٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) =

إذا كان

$$ل (س) = \begin{cases} ٢ س + ١ & ، \quad س \in ص \\ س^{٢} + ٤ & ، \quad س \notin ص \end{cases}$$

حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة

جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) =

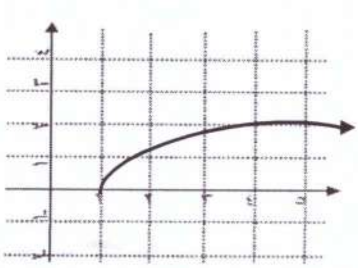
إذا كان ق (س) = $\sqrt{س - ١}$ جد مجاله ثم

ارسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد إن أمكن ما يلي :

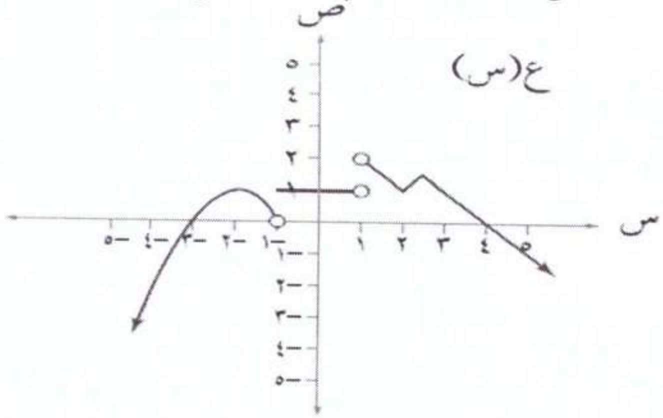
١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ ق(س) =

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ ق(س) =

٣) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـــا}}$ ق(س) =



معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ع ،جد كلا مما يأتي



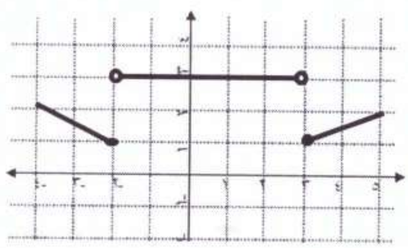
أ) مجموعة قيم أ حيث $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ ع (س) = ١

ب) مجموعة قيم جـ حيث $\underset{س \to جـ^{+}}{\text{نهـــا}}$ ع (س) = ١

جـ) مجموعة قيم ك حيث $\underset{س \to ك}{\text{نهـــا}}$ ع (س) غير موجودة

د) مجموعة قيم ل حيث $\underset{س \to ل}{\text{نهـــا}}$ ع (س) = صفر

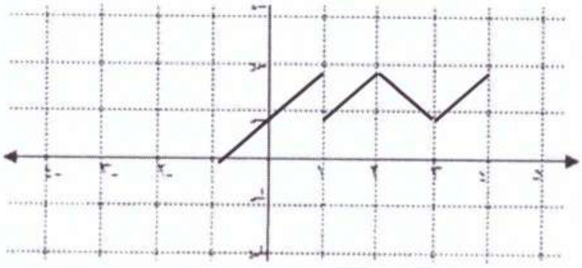
إذا كانت $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٣ جد قيمة أ



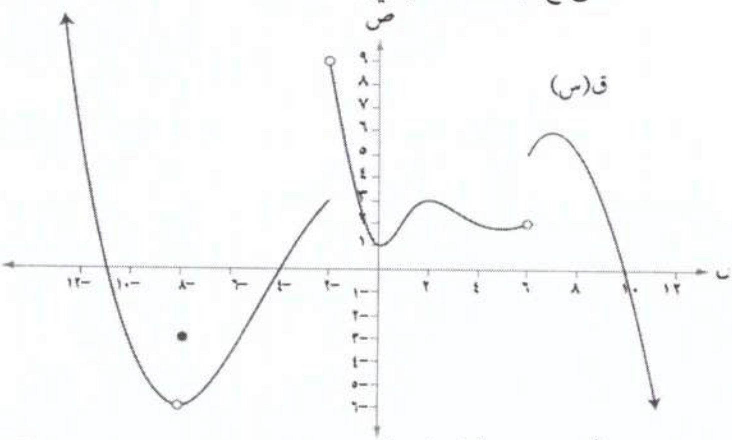
اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ق (س) جد

$\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ ق (س) =

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) =



مثال: اعتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)المعرف على ح جد كلا مما يأتي :



١) نهـــا ق (س) =
س ← ٦^+

٢) نهـــا ق (س) =
س ← ٦^-

٣) نهـــا ق (س) =
س ← ٠

٤) نهـــا ق (س) =
س ← ٢^-

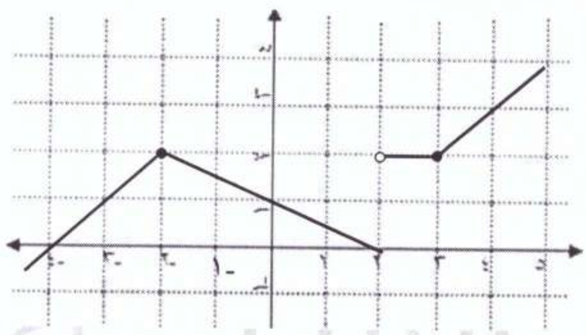
٦) نهـــا ق (س) =
س ← -٨^+

٧) نهـــا ق (س) =
س ← -٨^-

٨) نهـــا ق (س) =
س ← ١٠

اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ق (س) جد

مجموعة قيم أ حيث أن نهـــا ق (س) = ٢
س ← أ



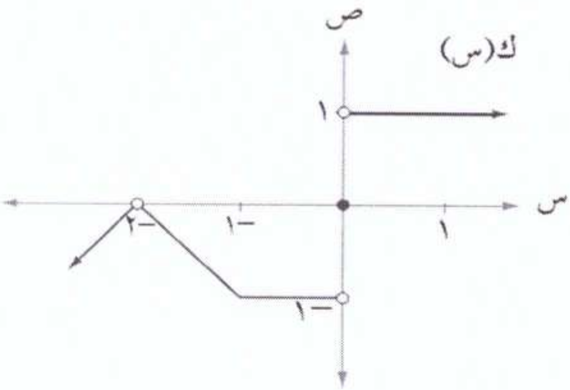
اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ك (س) جد

نهـــا ك (س) =
س ← -٢

نهـــا ك (س) =
س ← -١

نهـــا ك (س) =
س ← ٠

نهـــا ك (س) =
س ← ١

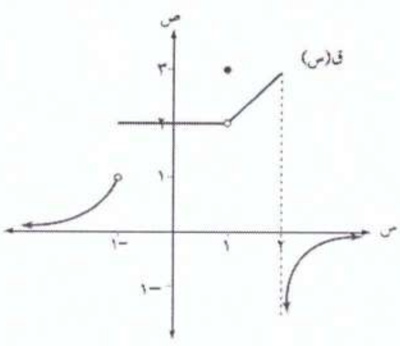


اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ق (س) جد

نهـــا ق (س) =
س ← ١

نهـــا ق (س) =
س ← -١

نهـــا ق (س) =
س ← ٠



نهـــا ق (س) + ٢ $س^٢$ + ٥ س =
س ← -٢

نظريات في النهايات

١) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ جـ = جـ   نهاية الثابت = الثابت نفسه

٢) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ س = أ ، نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ $س^{ن}$ = $أ^{ن}$

٣) تتوزع النهاية على جميع العمليات

إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) $\pm$ $\times$ $\div$ هـ (س) فإن

نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) $\pm$ $\times$ $\div$ نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ هـ (س)

حيث المقام لا يساوي صفر

٤) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ م ق (س) = م × نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ م ق (س)

٥) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ $\sqrt{ق (س)}$ = $\sqrt{نهـــا_{س \leftarrow أ} م ق (س)}$

٦) إذا كان ق (س) اقتران كثير حدود فإن

نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) = ق (أ)

جد قيمة ١) نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ($س^{٢}$ + ٤ س – ٢)

٢) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ ٢ $س^{٣}$ + $٣س^{٢}$ + ٤س - ٦

إذا كان ق (س) = ٢ س ، هـ (س) = $س^{٣}$ + س

جد كل مما يأتي :

١) نهـــا$_{س \leftarrow -٢}$ (ق (س) + هـ (س) × س)

٢) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\dfrac{ق (س)}{هـ (س)}$

٣) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ ($\sqrt{ق (س)}$ + $\sqrt[٣]{هـ (س)}$) + ١٥

مثال : إذا علمت أن

- نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ ق (٢ س + ١) = ٤ أوجد

نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ ٣ $ق^{٢}$ (س) – ٢س + ١

إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ٢ ع (س) = ١٠

وكانت نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ٣ ل (س) + ١ = ٧ أوجد

١. نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ (٢ ع (س) + ل (س))

٢. نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ($ع^{٣}$(س) - $ل^{٢}$(س))

٣. نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\dfrac{\sqrt{ل (س)}}{ع (س)}$

٤. نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ($ع^{٢}$(س) - $ل^{٢}$(س))

إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\dfrac{ق (س) – ٦}{س – ١}$ = ٨ جد قيمة

نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\dfrac{س^{٢} + ٢ س – ٣}{ق (س) – ٦}$ =

إذا كانت هـ كثير حدود وكانت نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\dfrac{هـ (س) + ٥}{س}$ = ٨

وكانت نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ (هـ (س) – ٥ + ٣ جـ) = ٢جد قيمة جـ

نهاية إقترانات كسرية

الاقتران النسبي : نقوم بالتعويض المباشر للنقطة فإذا كان :

١) ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ فالنهاية موجودة وهي نفس الناتج

٢) إذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ فالنهاية موجودة وتساوي ٠

٣) إذا كان ناتج التعويض صفر أو عدد نجهز

٤) إذا كانت $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ل}$ حيث ل عدد حقيقي ، $\text{ل} \neq 0$

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{هـ}(\text{س}) =$ صفر فإن $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ غير موجودة

جد قيمة النهايات التالية :

$$\lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^2 + 5}{\text{س}^4 + 1}$$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2 + 5)}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}$

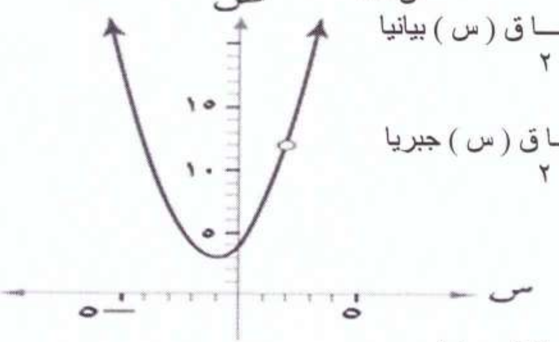
جد قيم أ التي تجعل $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

جد قيمة $\lim_{\text{س} \to -5} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 10}{\text{س} + 5}$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^3 - 8)}{\text{س} - 2}$ جد كلّ مما يأتي

١) $\lim_{\text{س} \to 2} \text{ق}(\text{س})$ بيانيا

٢) $\lim_{\text{س} \to 2} \text{ق}(\text{س})$ جبريا



مثال : جد قيمة كل مما يلي :

- $\lim_{\text{س} \to 8} \frac{(\text{س} + 1)^2 - 81}{\text{س} - 8}$

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 1)^4 - 16}{\text{س} - 3}$$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{س}} \left(\frac{1}{(2 + \text{س})^2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 5} \left(\frac{2}{\text{س}} - \frac{2}{5} \right) \left(\frac{1}{\text{س}^2 - 25} \right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \left(\frac{\text{س}^4 - 2\text{س}^2 + 1}{\text{س}^3 - 1} \right)$$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 - \text{س} - 6$ ،

$\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^3 - 2\text{س} - 3$ جد كلا من الآتي :

١) $\lim_{\text{س} \to 1} \text{ق}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})$

٢) $\lim_{\text{س} \to 1} \text{ق}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س})$

٣) $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$

٤) $\lim_{\text{س} \to 2} (\text{ل}(\text{س}))^4$

٥) $\lim_{\text{س} \to 2} \sqrt[3]{1 - \text{ل}(\text{س})}$

٦) $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$

جد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$\text{نهــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٣ س - ٢}{س^٣ - ٨}$$

$$\text{نهــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٨^س - ٥ \times ٢^س - ٢٤}{٤^س - ٨} =$$

$$\text{نهــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س}{س - ٣} - \frac{١٨}{س^٢ - ٩}$$

اذا كانت $\text{نهــا}_{س \leftarrow ١} \frac{م س^٢ + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$

أوجد قيمة الثابتين م ، ب

$$\text{نهــا}_{س \leftarrow -٢} \frac{١}{٣ س^٢ - س - ١٤} \left(\frac{١}{س + ١} + \frac{١}{٢ س + ٥} \right)$$

جد قيمة النهايات في كل مما يلي :

- $\text{نهــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^٣ - ٣ س^٢ + ٤)}{س^٣ - ٤ س + ٤}$

إذا كانت $\text{نهــا}_{س \leftarrow ١} \frac{أ س^٢ + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

- $\text{نهــا}_{س \leftarrow ١} \frac{(س^٤ - ٢ س^٢ + ١)}{س^٣ - ١}$

$$\text{نهــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٢^{س + ٢} - ١٦}{٤^س - ١٦} =$$

- $\text{نهــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^٣ + ٣ س - ٤}{س^٢ - ١}$

$$\text{نهــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٧^س - ٤٩^س}{١ - ٧^س} =$$

- $\text{نهــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦٤^س - ٨^س}{١ - ٨^س} =$

حالة توزيع البسط على المقام

اوجد قيمة النهايات فيما يلي :

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{٢}{س + ٣}}{س - ١} =$$

$$\text{نها}_{س \to ٦} \left(\frac{١}{٧} - \frac{١}{س + ١} \right) \left(\frac{١}{٦ - س} \right)$$

$$\text{نها}_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}} =$$

$$\text{نها}_{س \to ٣} \left(\frac{س}{٩ - س^{٢}} + \frac{٣س}{س^{٣} - ٩س} \right)$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٢}}{س^{٢} - ١} =$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{(٢س + ١)^{٣} - ١٢٥}{٢ + س^{٢}(س - ٢) - س} =$$

جد قيمة النهايات التالية :

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}}{س - ٢} =$$

إذا كانت $\text{نها}_{س \to م} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{ب}{جـ}$

فهل من الضروري أن يكون

$\text{نها}_{س \to م} ق(س) = ب$ ، $\text{نها}_{س \to م} ق(س) = جـ$

وضح إجابتك بأمثلة

- $\text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{س + هـ} - \frac{١}{س}}{هـ} =$

$\sqrt[n]{\text{ق}(\text{س})}$ **الاقتران الجذري** : وهو نوعان

الدليل فردي : يكون معرف دائما عند جميع الأعداد الحقيقية سواء كان ناتج تعويض ما داخل الجذر سالبة أو موجبة أو صفر دائما النهاية موجودة

الدليل زوجي :إذا كان ناتج تعويض ما داخل الجذر موجب فالنهاية موجودة ، سالب النهاية غير موجودة ، صفر بحاجة إلى أخذ النهاية من يمين الصفر ويساره

مثال : جد النهايات التالية

$\underset{\text{س} \to 5}{\text{نها}} \sqrt[3]{\text{س}+3}$

$\underset{\text{س} \to -8}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}-7}$

$\underset{\text{س} \to 5^-}{\text{نها}} \sqrt{5-\text{س}}$

جد قيم جـ التي تجعل $\underset{\text{س} \to \text{جـ}}{\text{نها}} \sqrt{6-\text{س}}$ غير موجوده

$\underset{\text{س} \to 3^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2+\text{س}+12}{2+\sqrt{\text{س}-3}} =$

$\underset{\text{س} \to 1^+}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}^2-2} + 5\text{س}$

$\underset{\text{س} \to 1^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2+5\text{س}-2}{4+\sqrt{\text{س}-1}} =$

جد $\underset{\text{س} \to 5^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}+5}{\sqrt{\text{س}-5}+2\text{س}}$ $\quad \text{س} \neq 5$

- $\underset{\text{س} \to 4^+}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^2-16}{\text{س}-4}} =$

- جد $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^2-1}{\text{س}-1}}$ $\quad \text{س} \neq 1$

- $\underset{\text{س} \to 5}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}^2-25} =$

- $\underset{\text{س} \to 7}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}^2-25} =$

- جد $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{4-4\text{س}+\text{س}^2}{\text{س}^2+\text{س}-6}}$

حالة الضرب بالمرافق

مثال : أوجد

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ٦} - ٣}{\text{س} - ٣} =$$

مثال : جد قيمة النهاية إذا كانت

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}} - \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}}$$

مثال : أوجد

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{٦ - \text{س}\sqrt{\text{س} + ١}}{٩ - ٣\text{س}} =$$

مثال : أوجد

$$\lim_{\text{س} \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨} =$$

مثال : أوجد

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}{٢ - \sqrt{\text{س} + ١}} =$$

مثال : أوجد

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ١} =$$

مثال : أوجد

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١}{٢ - \sqrt{\text{س} + ٣}} =$$

$$\lim_{\text{س} \to ٨} \frac{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{\text{س}}} - ٢}{\text{س} - ٨} =$$

مثال : أوجد

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ١} - ٢}{١ - \sqrt{\text{س}}} =$$

$$\lim_{\text{س} \to -٨} \frac{\sqrt{١ - \text{س}} - ٣}{٢ + \sqrt[٣]{\text{س}}}$$

- $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٩} + \sqrt[٣]{٢\text{س}} - ٧}{\text{س} - ٤} =$

- $\underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٢} + \sqrt{\text{س} + ٣} - ٥}{\text{س} - ٦} =$

- $\underset{\text{س} \to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٧} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٤\sqrt{\text{س}} + ٣}{\text{س}^{٢} - ١} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - \sqrt{\text{س} + ٣} + ١}{\text{س} - ١} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}\,\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١} =$

- $\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\frac{\text{س}}{٢} - ٤} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} + \sqrt{\text{س} + ٣} - ٣} =$

- $\underset{\text{س} \to ٨^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ + \sqrt[٣]{\text{س}}}{٣ - \sqrt{١ - \text{س}}} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٣} - \sqrt[٣]{\text{س} + ٧}}{\text{س} - ١} =$

الاقتران المتشعب : وهو الاقتران المعرف بأكثر من قاعدة ونعتمد في هذه الحالة على النقطة المراد إيجاد النهاية عندها فإذا كانت

- نقطة عادية : نعوض مباشرة في القاعدة المقابلة لها
- نقطة تشعب :نجد النهاية من اليمين ومن اليسار ثم نحكم على وجود النهاية .

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ١ &، س > ٢ \\ ٥ + س &، س < ٢ \\ س^{٣} + ٥ &، س = ٢ \end{cases}$

فما قيمة كل من النهايات التالية

١) $\lim_{س \to ٢} ق(س) =$

٢) $\lim_{س \to ٤} ق(س) =$

٣) $\lim_{س \to -١} ق(س) =$

$ق(٢) =$

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢٧س^{٣} + ١}{٣س + ١} & س \neq \dfrac{-١}{٣} \\ ٣ & س = \dfrac{-١}{٣} \end{cases}$

احسب $\lim_{س \to \frac{-١}{٣}} ق(س) =$

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ &، س > -١ \\ ٢س - ١ &، س \leq -١ \end{cases}$

فما قيمة كل مما يأتي :-

١) $\lim_{س \to -١} ق(س) =$

٢) $\lim_{س \to ١} ق(س) =$

٣) $\lim_{س \to -٢} ق(س) =$

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س^{٢} + م &، س > ٢ \\ م س - ٢ &، س \leq ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة ، فما قيمة الثابت م ؟

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٤ &، س > ٢ \\ ١٠ &، س = ٢ \\ ل س + ٦ &، س < ٢ \end{cases}$

فما قيمة الثابت ل التي تجعل $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة ؟

مثال :

إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{٢س^{٢} + ٦س + ١٨} &، س \leq ع \\ س + ٥ &، س > ع \end{cases}$

فما قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim_{س \to ع} ل(س)$ موجودة ؟

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٨أ - ٦ب س &، س \leq ٣ \\ ٤أ + ١٠ &، س > ٣ \end{cases}$

فما قيمة أ ، ب علما أن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ١٤$

نهاية اقتران القيمة المطلقة

عند نقطة تحل بالتعويض المباشر فإذا كان ناتج التعويض :

- موجب أو سالب : تحسب النهاية والجواب موجب
- صفر : إعادة تعريف القيمة المطلقة إجباري
  وحساب النهاية من اليمين ومن اليسار

مثال : جد قيمة النهايات التالية :

- $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ٤ \right| =$
- $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \left| \text{س} - ٥ \right| =$
- $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ١ \right| =$
- $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} \left| ٤ - \text{س} \right| =$
- $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \left| \text{س}^{٢} - ٢٥ \right| =$

إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ \ ، & \left|\text{س} - ١\right| < ٣ \\ ٠ \ ، & \left|\text{س} - ١\right| > ٣ \end{cases}$$

أوجد

$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) =$

$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) =$

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) =$

- $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|٢\text{س} - ٤\right| + \text{س}}{\text{س} + ١} =$
- $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٢٥}}{\text{س} - ٥} =$
- $\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}}{٣ - \text{س}} =$
- $\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right|}{\text{س}^{٢} - ٩} =$
- $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right|}{\left|٦ - ٣\text{س}\right|} =$
- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}}}{\text{س}} =$

إقتران أكبر عدد صحيح [ق (س)]

إذا كان ناتج التعويض

- عدد صحيح تكون النهاية غير موجودة
- ليست عدد صحيح النهاية موجودة = [ق (أ)]

خصائص هامة لاقتران اكبر عدد صحيح

- [س + أ] = [س] + أ ، أ ∋ ص
- $[أ]^+$ = أ ، أ ∋ ص
- $[أ]^-$ = أ - ١ ، أ ∋ ص

مثال : اوجد قيمة

- نهـــا (س ← -٤) [س - ٢] =
- نهـــا (س ← ٢) [١/٢ س + ٤] =
- نهـــا (س ← ٠) [٤ - ٢س] =
- نهـــا (س ← ١/٣) [٢ س - ١] =
- نهـــا (س ← ١) [٠.٤ - ٢ س] =

إذا كان ق (س) = [٢ - س] فأجب عما يلي :

١) جد قيم أ التي تجعل نهـــا (س ← أ) ق (س) غير موجودة

٢) جد قيم جـ التي تجعل نهـــا (س ← جـ) ق (س) = - ١

إذا كان ق (س) = [٠.٢ س]

جد قيم جـ التي تجعل نهـــا (س ← جـ) [٠.٢ س] = - ١

لكن في حالة وجود [ ] مع اقتران آخر وكان الناتج ∋ ص يجب إعادة التعريف وعكس ذلك لا ضرورة لإعادة التعريف

مثال : اوجد قيمة

نهـــا (س ← ٠) ([٢ س + ١] - [٢ س- ١]) =

نهـــا (س ← ٠) $س^٢$ [س] - ٢ =

نهـــا (س ← ١) (س [س] + | س |) =

نهـــا (س ← +٣) $\frac{[٣ - س]}{| ٣ - س |}$ =

مثال : إذا كان ق (س) = { [٢ س + ١] ، س < ٣ ؛ | ١٠ - ٢ س | ، س ≥ ٣ }

جد قيمة نهـــا (س ← ٢) ق (س)

نهـــا (س ← ٥) ق (س)

نهـــا (س ← ٢.٥) ق (س)

* جد نهـــا (س ← ٠) $\frac{[س]}{س}$ =

جد نهـا (س ← ٢.٥) (٢ س - [٢ س]) / (٤ س^٢ - ٢٥) =

• نهـا (س ← -٢) (٥ - | ٣ س + ١ |) / (س^٣ + ٨) =

• نهـا (س ← ٣+) √((س - ٣)^٢) / (س - ٣) =

• نهـا (س ← ٠) √(س^٢ - ٤ س^٣) / س =

نهـا (س ← ٠-) س × √(١ / س^٢ - ٣) =

نهـا (س ← ٣) [س/٣ + ١] =

نهـا (س ← ٢+) (س - [س]) / (س - ٢) =

إذا كان ق (س) = { | س - ٢ | ، س ≥ ٢ ؛ [٦ - س] ، س < ٢ } أوجد

نهـا (س ← ٢) ق(س)

إذا كان ق (س) = [س + ٥] ، ل (س) = [٤ - س] جد

نهـا (س ← ١) ق (س)

نهـا (س ← ١) ل (س)

نهـا (س ← ١) (ق (س) + ل (س))

جد نهـا (س ← ٠.٨) س [س + ٠.٢] - ٢ س =

ق (س) = { | س | ، س ≥ ٠ ؛ √(- س) ، س < ٠ }

أوجد

نهـا (س ← ٠) ق (س) ، ثم جد ق (٠)

• ق (س) = { (٣ - س) / | س - ٣ | ، س ≥ ٣ ؛ جـ س^٢ - ٤ ، س < ٣ }

ما قيمة الثابت جـ علما بأن النهاية موجودة عند س = ٣

• ق (س) = { [س + ٣] ، س > أ ؛ ٩ - [س] ، س < أ }

ما قيمة الثابت أ علما بأن النهاية موجودة

• $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤\,\text{أ} & \text{س} \le ٣ \\ [\,٦ - \text{س}\,] & \text{س} > ٣ \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ موجودة ، فجد قيمة الثابت أ

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\,٥ - \text{س}\,] & \text{، س} < \text{أ} \\ |\,\text{س} - ٢\,| & \text{، س} > \text{أ} \end{cases}$

ما قيمة الثابت أ علما بأن النهاية موجودة

• ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٤ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{س} \ne ٢$

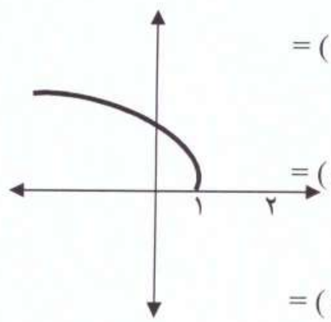
أرسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد كلا مما يلي :

$\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) =$

$\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) =$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) =$

• إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{١ - \text{س}}$ اعتمد على الشكل المجاور لإيجاد ما يلي :



$\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) =$

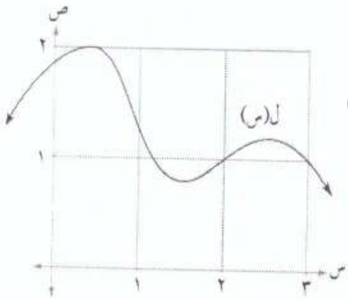
$\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) =$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) =$

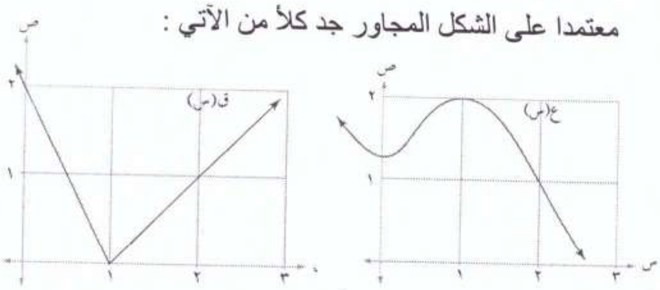
معتمدا على الشكل المجاور جد كلاً من الآتي :

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(٣\text{س} - ٣)$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ (\text{س} + \text{ل}(\text{س}))$



معتمدا على الشكل المجاور جد كلاً من الآتي :



$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) + \text{ع}(\text{س}))$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) \times \text{ع}(\text{س}))$

إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (- ٣ ، ٤) وكانت

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ (\text{س} - \text{ل}(\text{س})) = -١٠$ فجد

$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}^{٢}(\text{س}) - ٢\,\text{ل}(\text{س}))$

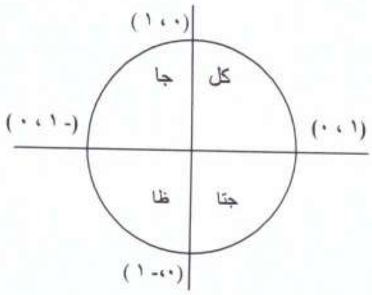
إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س − ٢) يساوي ٥

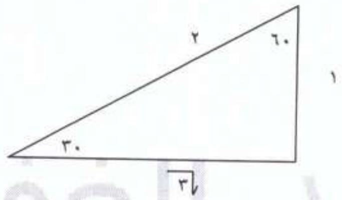
فجد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ (٣\,\text{ع}(\text{س}) + ٤\,\text{س}^{٢})$

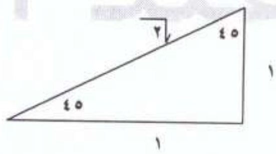
نهاية الاقترانات المثلثية

مراجعة :

دائرة الوحدة







جا س = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{جا س}}$ = قتا س

جتا س = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{جتا س}}$ = قا س

ظا س = $\frac{\text{المقابل}}{\text{االمجاور}}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{ظا س}}$ = ظتا س

جا (- س) = - جا س ، جتا (- س) = جتا س

- جا س = جا (π − س)
- جتا س = حا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ - س)

	جـــا	جتـــا	ظـــا
٣٠			
٤٥			
٦٠			

المتطابقات المثلثية :

- جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١
- ظا^{٢} س = قا^{٢} س - ١
- ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س − ١

- جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب
- جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب
- جا (أ − ب) = حا أ جتا ب - جتا أ جا ب
- جا (أ + ب) = حا أ جتا ب + جتا أ جا ب

- ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$
- ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$

- جا س + جا ص = ٢ جا $\frac{\text{س + ص}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{س − ص}}{\text{٢}}$
- جا س - جا ص = ٢ جتا $\frac{\text{س + ص}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{س − ص}}{\text{٢}}$
- جتا س + جتا ص = ٢ جتا $\frac{\text{س + ص}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{س − ص}}{\text{٢}}$
- جتا س - جتا ص = - ٢ جا $\frac{\text{س + ص}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{س − ص}}{\text{٢}}$

- جتا ٢س = جتا^{٢}س - جا^{٢}س
  = ١ − ٢ جا^{٢}س
  = ٢ جتا^{٢}س - ١
- جا ٢ س = ٢ جا س حتا س
-
- ظا ٢ س = $\frac{\text{٢ ظا س}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ س}}$

- جا $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ = ± $\sqrt{\frac{\text{١ − جتا س}}{\text{٢}}}$
- جتا $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ = ± $\sqrt{\frac{\text{١ + جتا س}}{\text{٢}}}$
- ظا $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ = ± $\sqrt{\frac{\text{١ - جتا س}}{\text{١ + جتا س}}}$

نظريات نهاية الاقترانات المثلثية :

- $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ \text{جاس} = \text{جا أ}$ ، أ ∈ ح
- $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ \text{جتاس} = \text{جتا أ}$ ، أ ∈ ح
- $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ \text{ظاس} = \text{ظا أ}$ ، أ ∈ ح - $\left\{\frac{\text{ن}\,\pi}{٢} : \text{ن} = ١ ، ٣ ..\right\}$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$ س بالتقدير الدائري

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{أ س}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا أ س}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$ س بالتقدير الدائري

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا أ س}}{\text{ب س}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{أ س}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا أ س}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

ملاحظة : نعوض مباشرة وفي حال كان الناتج :

- عدد : النهاية موجودة وتساوي هذا العدد
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ النهاية غير موجودة
- $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$: نستخدم القسمة ، المتطابقات ...

مثال :جد كلا من النهايات الآتية:

- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{جتا س}} =$
- $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ (٢\ \text{جا س} - \text{ظا}\ \frac{١}{٢}\ \text{س}) =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{جا س}} =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ٣س}}{\text{٥س}} =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{٩ س}}{\text{جا ٤ س}} =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا ٢ س}}{\text{٣ س}} =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س جا س} - \text{ظا ٥ س}}{(\text{جا ٤ س}) - ٢\ \text{س}} =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س} - \text{جا ٣ س} + \text{ظا ٥س}}{٣\ \text{س} - \text{ظا}^{٢}\ \text{س}} =$
- $\underset{س \to ٤}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,(\text{س} - ٤)}{\text{س} - ٤} =$
- $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,(٢\text{س} - ٦)}{٣ - \text{س}} =$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ٣ س}}{٢\ \text{س} + \text{ظا ٥ س}} =$

مثال :جد كلا من النهايات الآتية :

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا ٨ س + جا ٤ س}}{\text{س}} =$
- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \to \text{-أ}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا س + جا أ}}{\text{س + أ}} =$
- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{١ - جتا٢ س}}{\text{س جا س}} =$
- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا س – جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} =$
- $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا (س} - \pi)}{(\text{س} - \pi)} =$
- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{ س} - \text{جا}^{٢}\text{ س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} =$
- $\underset{\text{س} \to \pi/٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{١ + جتا ٢ س}}{\text{١ – جا س}} =$
- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \text{س}^{٢} \text{ ظتا (٣ س) قتا (س)} =$
- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{١ – جتا ٢ س}}{\text{٣ س}^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \to \pi/٦}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا ٢ س}}{\text{٣ س}}$
- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{قا (٢س) - ١}}{\text{س}^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جتا ٦ س - جتا ٤ س}}{\text{س}^{٢}} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{٢ س} - \pi} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\pi - \text{٢ س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{-٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا} (\text{س} + \text{٤})}{\text{س}^{٢} - \text{١٦}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا} \left(\frac{\pi}{٢} \text{س} \right)}{\text{س} - \text{١}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - \text{جا ٣ س} + \text{ظا ٥ س}}{\text{٢ س} - \text{ظا}^{٢} \text{س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جا} \left(\frac{\pi}{\text{س}} \right)}{\text{س} - \text{١}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١} - \text{حتا ٦ س}}{\text{جتا ٨ س} - \text{١}} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{ظا س} - \text{٢ س})^{٢}}{\text{١} - \text{جتا ٣ س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \text{قا س} + \text{ظا ٤ س} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا س} - \text{جا س}}{\text{٨ س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢} \text{س}}{\text{١} + \text{جتا}^{٣} \text{س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢} \text{٣ س}}{\text{س}^{٢}} =$

- $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٢ س}^{٢}}{\text{٤ س}^{٢}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}\,|\text{س}|}{\text{س}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} ٣\,\text{س}\,(\text{قتا}\,٣\,\text{س} + \text{ظتا}\,٢\,\text{س}) =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{قا}\,(٢\,\text{س}) - ١}{\text{س}^{٢}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\,٢\,\text{س}}{\text{س}^{٣} - ٢\,\text{س}^{٢}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا}\,(٢\pi - ٢\,\text{س})}{-٥\,\text{س}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{جا}\,٣\,\text{س}\,\text{ظا}\,٥\,\text{س}}{\text{س}^{٢}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{جا}\,(\pi\,\text{س})}{\text{س} - ١} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س} + \text{ظا}\,٢\,\text{س} - \text{جا}\,\text{س}}{\text{س}} =$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا}\,\text{أ}\,\text{س}}{٢\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا}\,٣\,\text{س}}{\text{ب}\,\text{س} - \text{س}} = ٦$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{جا}\,٥\,\text{س} - \text{ظا}\,٣\,\text{س}}{٢\,\text{س} + \text{جا}\,٧\,\text{س}} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٣\pi} \dfrac{\text{جا}\,\text{س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{جتا}\,٨\,\text{س}\,\text{ظا}\,٣\,\text{س}\,\text{قتا}\,٧\,\text{س} =$

- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{قا}\,\text{س} + \text{ظا}\,٥\,\text{س} =$

- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{حتا س}}{\text{س}^2} =$

- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } 2\text{ س} - 2 \text{ جا س}}{\text{س}} =$

- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{حتا س}}{\text{س جا س}} =$

- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{7 - 7\text{جتا}^2 \text{ س}}{\text{س}^2 - \text{س}^3} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{حا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{2}} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \sqrt{2} \text{ حا س}}{1 - \sqrt{2} \text{ جتا س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{حا س}}{(\pi - 2\text{ س})^2} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \dfrac{2 \text{ حا س} - 1}{4 \text{ جتا}^2 \text{ س} - 3} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{-\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 + \text{حتا } 2 \text{ س}}{(2\text{ س} + \pi)^2} =$

- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{جتا } 8 \text{ س} - 2 \text{ جا}^2 \text{ س}}{10 \text{ س}^2} =$

- $\underset{\text{س} \to \pi^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{1 + \text{جتا س}}}{\text{جا س}} =$

- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 + \text{جتا } 4 \text{ س} - 2 \text{ جتا}^2 \text{ س}}{\text{س}^2} =$

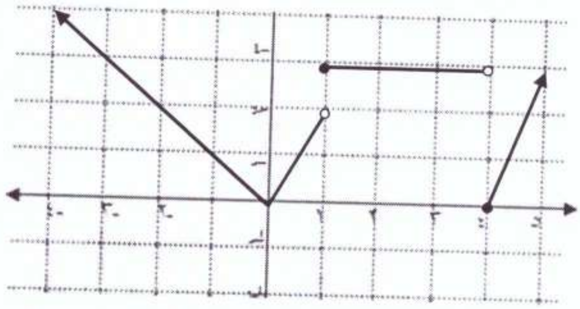
- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - 3 \text{ س جا س} - \text{جتا } 2 \text{ س}}{\text{س ظا } 2 \text{ س}} =$

- $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2 \text{ س} - \text{جا س}}{\sqrt{1 - \text{جتا } 2 \text{ س}}} =$

الاتصال عند نقطة

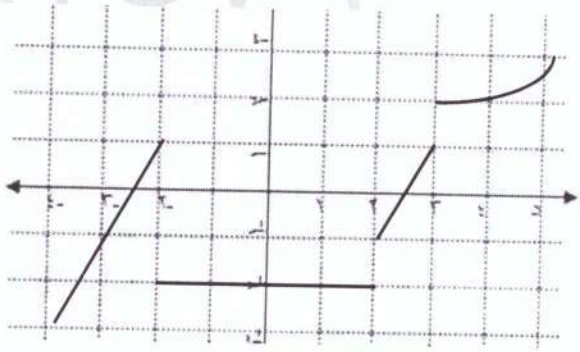
من خلال الرسم : يكون الاقتران متصلا عند نقطة ،إذا كان الاقتران ليس فيه حلقة أو قفز أو انقطاع (هو رسم المنحنى دون رفع القلم عن الورقة)

مثال : في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، جد مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل

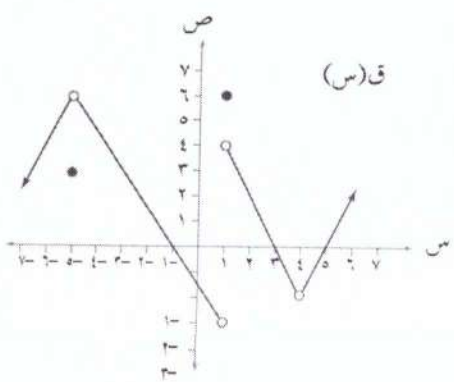


مثال : في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، ابحث في اتصال ق (س) عندما

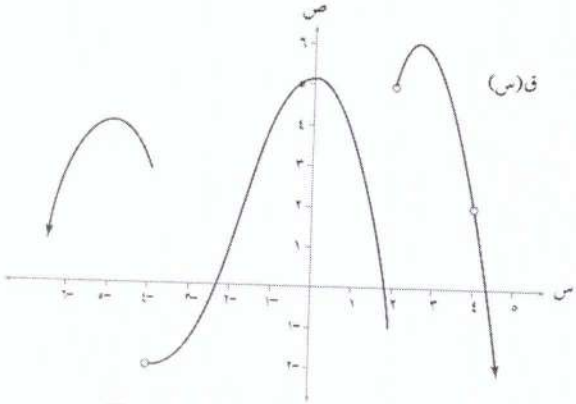
س = ـ ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤



في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، جد مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل مع ذكر السبب ؟



في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، جد مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل مع ذكر السبب ؟



الاتصال : يكون الاقتران متصل عند النقطة (أ) إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة :

١) $\underset{س \to أ}{\text{نهــــا}}$ ق (س) النهاية موجودة

٢) ق (س) معرف عند س = أ الصورة موجودة

٣) $\underset{س \to أ}{\text{نهــــا}}$ ق(س) = ق (أ)

- كل اقتران كثير الحدود متصل عند نقطة
- يكون الاقتران النسبي متصل عند جميع النقاط ما عدا أصفار المقام (التي تجعل المقام = صفر)
- في المتشعب نبحث عن الأطراف الداخلية وعند نقاط التحول

إذا كان ق (س) = [س + ١] - [س]

ابحث في اتصال ق عندما س = ٣

ق (س) = [س] + ١ - [س] = ١

متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود (ثابت)

- ق (س) = $س^{٢}$ + ٣س – ٤ عند س = ١

مثال : ما نقط عدم الاتصال للاقترانات

- ق(س) = $\frac{س^{٢} + ٤}{س - ٢}$

- ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س + ٥}$

اذا كان ق (س) = [٤ س - ٤] فابحث في اتصال الاقتران عند س = ١.٢٥

ابحث في اتصال الاقتران ق (س) = (١ - س^{٢}) ÷ (س - ١) عند س = ١

مثال : إذا كان ك(س) =
- ٣س + ١ ، س ≠ ٢
- ٩ ، س = ٢

ابحث في اتصال ك(س) عند س=٢

إذا كان ق (س) =
- س^{٢} + س ، س < ٢
- [س + ٤] ، س = ٢
- √(س^{٢} + ٥) + ٦ ÷ س ، س > ٢

ابحث في اتصال ق (س) عند س = ٢

إذا كان ل (س) =
- (س^{٣} + س^{٢} + ٢ س - ٤) ÷ (س - ١) ، س ≠ ١
- ٥ س – ١ ، س = ١

ابحث في اتصال ل (س) عند س = ١

نظريات على الاتصال : إذا كان ق (س) ، ل (س) اقترانيين متصلين عند س ← أ فإن :

ق (س) + ل (س) ، ق (س) - ل (س)
ق (س) × ل (س) ، ق (س) ÷ ل (س)
} تكون متصلة عند س ← أ

البرهان : (حالة الجمع)

المعطيات : الاقترانان ق ، ل متصلان عند س = أ

المطلوب إثبات أن الاقتران ق + ل متصل عند س = أ

البرهان :

نفرض أن هـ = ق + ل

هـ (أ) = ق (أ) + ل (أ) من تعريف الاقتران هـ

وحيث أن ق ، ل اقترانان متصلان عند س = أ فإن

نهـــا$_{س ← أ}$ هـ (س) = نهـــا$_{س ← أ}$ ق (س) + نهـــا$_{س ← أ}$ ل (س)

ق (أ) + ل (أ)

وعليه فإن الاقتران هـ (س) متصل عند س = أ

إذا كان ق (س) =
- س^{٢} + ٤ ، س < ٢
- س + ٦ ، س ≥ ٢

وكان ع (س) =
- س^{٣} - ٣ ، س < ٢
- ٣ س ، س ≥ ٢

ابحث في اتصال (ق + ع) عند س = ٢

إذا كان ق (س) =
- ١ + ٢ س ، س < ١
- ٣ س^{٢} ، س ≥ ١

وكان ع (س) =
- س^{٢} ، س < ١
- |س| ، س ≥ ١

ابحث في اتصال (ق × ع) عند س = ١

إذا كان ق (س) = (س – ١)^{٢} ، ل (س) = [٢ – س]

فابحث في اتصال (ق × ل) عند س = ٣

مثال : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ ٣\text{س} - \text{س}^{٢} & ، \text{س} \le ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س= ٣

إذا كان ق (س) = (س – ٥)^{٢} ، هـ (س) = [س + ٢]

فابحث في اتصال (ق × ل) عند س = ٥

مثال : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{س}| - ٢}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \ne ٢ \\ ٥ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق عند س = ٢

مثال : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \ne ٢ \\ \dfrac{٣}{\text{ب س}} & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

متصلا عند س = ٢ ، ما قيمة الثابت ب

ملاحظة ليس شرطا انه إذا كان إحدى الاقترانيين غير متصل أن يكون حاصل ضربهما غير متصل لذا يجب ايجاد قاعدة الاقتران (نضرب ق(س) ×هـ (س) ثم نبحث في الاتصال)

مثال : إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٣ & ، \text{س} < ٣ \\ ٥\text{س} - ١ & ، \text{س} \ge ٣ \end{cases}$

وكان هـ (س) = س^{٢} - ٩

هل ق(س) ×هـ (س) متصل أم لا عند س = ٣

مثال : إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} - ٨\text{س} & ، \text{س} > ٢ \\ ٨ & ، \text{س} = ٢ \\ ٢\text{س}^{٢} - \text{ب س} + ٤ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

متصلا عند س = ٢ ، ما قيمة الثابت أ ، ب

مثال : إذا كان هـ(س) =
- أ س^{٢} + ب ، س < ٣
- ٦ ، س = ٣
- أ س − ٢ ب ، س > ٣

متصلا عند س = ٣ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

إذا كان ق (س) =
- $\frac{|٦ - ٢ س|}{٣ - س}$ ، س ≠ ٣
- ٢ ، س = ٣

ابحث في اتصال ق عندما س = ٣

- إذا كان ق (س) = [٠.٥ س - ٤]
  ابحث في اتصال ق عندما س = ٧

مثال : إذا كان ق(س) =
- أ س^{٣} + ب س^{٢} ، س < ٢
- ٦ ، س = ٢
- ٣ أ + ٥ ب ، س > ٢

جد قيمة أ ، ب علما بأن الاقتران متصل عند س = ٢

- إذا كان ق (س) = س [س + ١]
  ابحث في اتصال ق عندما س =١

إذا كان ق (س) = $\frac{|س - ٤|}{س + ٤}$ ، س ≠ -٤
فابحث في اتصال ق عند س = ٤

- إذا كان ق (س) = [س] فما مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل

إذا كان ق (س) = { جا ٣ س / س ، س ≠ ٠ ؛ ٣ ، س = ٠ }

ابحث في اتصال ق عندما س = ٠

متصل

إذا كان ق (س) = { |ظا س| / س ، س > ٠ ؛ ١ − جتا س ، س ≥ ٠ }

ابحث في اتصال الاقتران ق عندما س = ٠

مثال : إذا كان ق(س) = { أ س^٣ - ب س + ١ ، س < ١ ؛ ٥ ، س = ١ ؛ س^٢ − (أ + ب) س + ٢ ، س > ١ }

متصلا عند س = ١ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

إذا كان ق (س) = { √(س − ٣) ، س > ٣ ؛ | س^٢ - ٩ | ، س ≥ ٣ }

ابحث في اتصال ق عند س = ٣

إذا كان

ق (س) = { [س/٢ - ١] ، -١ ≤ س ≤ ٢ ؛ (١/س - ١/٢) × ١ / | س − ٢ | ، ٢ < س ≤ ٥ }

ابحث في اتصال ق عندما س = ٢

إذا كان ق (س) = (س − ٢)^٣ ، هـ (س) = [س + ١]

ابحث في اتصال الاقتران ق × هـ عند س = ٢

إذا كان

$$\text{ك}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^{٢} &، \quad ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ [\text{س}] + \text{س}^{٢} &، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ & \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٢ فجد قيمة الثابت أ

مثال : إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - (٣ - ٢\text{جـ})\,\text{س} - ٦\text{جـ}}{\text{س} - ٣} &، \quad \text{س} \neq ٣ \\ ٤\text{س} - ١ & \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٣ ، ما قيمة الثابت جـ

مثال : إذا كان ق (س) = $[\,٥ - \dfrac{\text{س}}{٣}\,]$

ابحث في اتصال ق عندما س = ٦ ، −٢

مثال : إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,\text{ب س} - \text{س}^{٢}}{\text{س جا ٢س}} &، \quad \dfrac{-\pi}{٤} \leq \text{س} < ٠ \\ ٢ &، \quad \text{س} = ٠ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} + (١ - \text{أ})\,\text{س}}{\text{أ س}} &، \quad ٠ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

متصلا جد قيمة أ ، ب

$$\text{إذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\sqrt{\text{س}^{٢}}}{\text{س}} &، \quad \text{س} \neq ٠ \\ ١ &، \quad \text{س} = ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عندما س = ٠

$$\text{مثال : إذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ب} &، \quad ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ |\text{س}| - ٥ &، \quad ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران متصلا عند س = ٢

مثال : إذا كان ق (س) = $(\text{س}^{٢} - ١)\,[\,\text{س} + ٤\,]$

ابحث في اتصال ق عندما س = ١

$$\text{إذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} + ٥ &، \quad \text{س} \in \text{ص} \\ ٢\text{س}^{٢} - ٤ &، \quad \text{س} \notin \text{ص} \end{cases}$$

حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة
فابحث في اتصال الاقتران عند س = ٣

الاتصال على فترة

ملاحظات :

- كل اقتران كثير الحدود متصل على ح (- ∞ ، ∞)
- يكون الاقتران النسبي الذي بسطه ومقامه كثير حدود أو بسطه ومقامه متصلاً عند جميع النقاط ما عدا أصفار المقام ، ح – صفر المقام وبشكل عام يكون متصل حسب القاعدة (مجال البسط ∩ مجال المقام – أصفار المقام)
- الجذور : الجذور الفردية متصلة على الفترة التي يكون ما داخل الجذر متصل عليها
  أما الجذر الزوجي متصلة على الفترة التي تجعل ما داخل الجذر قيمته موجبة
- اقتراني الجيب وجيب التمام متصلة على الفترة التي تكون الزاوية متصلة عليها ، وباقي الاقترانات المثلثية تعامل معاملة جا ، جتا بعد تحويلها إلى كسرية
- القيمة المطلقة : متصلة على الفترة التي يكون ما داخل المطلق متصل عليها
- اكبر عدد صحيح متصل على جميع الأعداد الحقيقية التي تجعل ما داخ اكبر عدد صحيح عددا غير صحيح بشرط أن يكون لوحده
- دراسة الفترات
- الأطراف الداخلية للفترة

تعريف :

ليكن ق إقترانا معرفا على [أ ، ب] فإن الاقتران يكون متصلا

- عند س = أ من اليمين ، إذا كانت نها$_{+}$ ق(س) = ق (أ)
- عند س= ب من اليسار ، اذا كانت نها$_{-}$ ق(س) = ق (ب)
- على (أ ، ب) إذا كان متصلا عند كل س ∋ (أ ، ب)
- على [أ ، ب] إذا كان متصلا عند كل س ∋ (أ ، ب) و عند س = أ من اليمين و عند س = ب من اليسار

مثال : ابحث في اتصال الاقتران لجميع قيم س ∋ ح

ق (س) = جتا ٢ س

ق (س) = جا $\frac{١}{س}$

ابحث في اتصال ق (س) = ظا س في الفترة [٠ ، ٢ π]

ابحث في اتصال ق (س) = قتا ٢س ، س تنتمي للفترة [٠ ، π]

مثال : إذا كان هـ(س) =
$$\begin{cases} \text{٢ س + ٢} & \text{، -٢} \le \text{س} < \text{١} \\ \text{س + ٤} & \text{، ١} \le \text{س} \le \text{٥} \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق في الفترة [- ٢ ، ٥]

إذا كان ع (س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣}\text{ - ٢٧}}{\text{س - ٢}} & \text{، س} < \text{٣} \\ \text{س + ٥} & \text{، س} \ge \text{٣} \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ع على ح

إذا كان هـ (س) =
$$\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، ٣} \le \text{س} < \text{٥} \\ \text{س + ٢٠} & \text{، ٥} \le \text{س} < \text{٧} \\ \text{٩} & \text{، س = ٧} \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران على الفترة [٣ ، ٧] ، [٣ ، ٧) ، [٣ ، ٧]

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٦٤}{س - ٤} & ، \quad ٣ \geq س \\ - س & ، \quad ٣ < س \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) على مجاله

إذا كان ق (س) = | ٢ س – ١٠ | ابحث في اتصال ق (س)

في الفترة [- ١٠ ، ٨]

مثال : إذا كان ق (س) = $\dfrac{س}{|س - ٣| - ٤}$

ابحث في اتصال ق (س) على ح

إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٢} - س - ٣٠}{|س - ٦|} & ، \quad ٦ < س \\ ١ & ، \quad ٦ = س \\ ب\ س & ، \quad ٦ > س \end{cases}$

متصلا على ح فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \sqrt{٤ - س} & \quad ٤ > س \\ |س^{٢} - ١٦| & \quad ٤ \leq س \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران على مجاله

مثال : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ س + ٥ & ، \quad ١ > س \\ ٨ & ، \quad ٤ \geq س \geq ١ \\ \dfrac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} & ، \quad ٤ < س \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران لجميع قيم س ∈ ح

مثال : إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} ٥ & ، \quad ٣ = س \\ [س] + ٥ & ، \quad ٤ > س > ٣ \\ ٤ & ، \quad ٤ = س \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ع (س) في الفترة [٣ ، ٤]

إذا كان ق (س) = | ٣ س – ٩ | ابحث في اتصال ق (س)

في الفترة [١ ، ٥]

مثال : إذا كان

ق(س) = $\begin{cases} س + ٢ & ، \quad ٢ \geq |س| \\ س^{٢} & ، \quad ٢ < |س| \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) في مجاله

إذا كان ق (س) = | ٠.١ – س | ابحث في اتصال ق (س)

في الفترة [٠.١ ، ٠.٩]

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا أس}}{\text{٥ س}} & ، \ -\pi \le س < ٠ \\ ٢ & س = ٠ \\ \text{ب}\,(٢ + س) & ٠ < س \le \pi \end{cases}$$

وكان متصلا على الفترة [- π ، π] جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

مثال : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \text{أ - ب ظا س} & ٠ < س < \pi / ٤ \\ ٣ & س = \pi / ٤ \\ \text{ب} + \dfrac{٤}{\pi}\,|س| & \pi / ٤ < س \le \pi / ٢ \end{cases}$$

وكان متصلا على الفترة [٠، π/٤] جد قيمة أ ، ب

مثال : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} + ٢ س}{س - ٣} & ، \ -٢ \le س < ٠ \\ ٢ & ، \ س = ٠ \\ [\, س + ٢ \,] & ، \ ٠ < س \le ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [-٢ ، ١]

مثال :
إذا كان ق (س) = س | س − ٢ | + ٤س^{٢} ، ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [٠، ٤]

مثال :
إذا كان ق (س) = [٠.٥ س - ٢] ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [- ٢، ٤]

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، \ ٠ \le س < ٣ \\ [\, ٠.٢٥ س + ٢ \,] & ، \ ٣ \le س < ٦ \\ |\, ٩ - س \,| & س = ٦ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق (س) في الفترة [٠ ، ٦]

مثال : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ س & ، \ -٢ \le س < ١ \\ [\, س + ٢ \,] & ، \ ١ \le س \le ٣ \\ |\, ٨ - س \,| & ، \ ٣ < س \le ٨ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [-٢ ، ٨]

إذا كان ع (س) =

$$\begin{cases} ٢\text{س} & \text{، } \text{س} < ٢ \\ [٠.٥\,\text{س} + ٢] & \text{، } ٢ \le \text{س} < ٤ \\ \dfrac{٥\,\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣٦} & \text{، } \text{س} \ge ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ع (س) لجميع قيم س الحقيقية

مثال : ق (س) =

$$\begin{cases} ٣\ \text{جتا}\ \text{س} & -\frac{\pi}{٦} < \text{س} \le ٠ \\ \dfrac{\text{ظا}\ ٣\,\text{س}}{\text{س}} & ٠ < \text{س} \le \frac{\pi}{٦} \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) على $[-\frac{\pi}{٦} \text{ ، } \frac{\pi}{٦}]$

إذا كان ع (س) =

$$\begin{cases} [\text{س}] + \text{س} & \text{، } -١ \le \text{س} < ٠ \\ \dfrac{\sqrt{٣\,\text{س}^{٢}}}{٥} + \text{س} & ٠ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق (س) في الفترة [- ١ ، ٢]

مثال : ق (س) =

$$\begin{cases} \frac{١}{٨}\text{س}^{٣} + ١ & \text{س} > -٢ \\ \frac{٣}{٢} & \text{س} \le -٢ \end{cases}$$

$$\text{م}(\text{س}) = \frac{\text{جتا}\ \frac{\pi}{٤}\,\text{س}}{\text{س}}$$

ابحث في اتصال ق (س) + م (س) عند س = ٢-

إذا كان هـ(س) =

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢(\text{هـ} - ١)\,\text{س} - ٤\,\text{هـ}}{\text{س} - ٢} & \text{س} \ne ٢ \\ ٥ + \text{س} & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

متصلا على ح جد قيمة الثابت أ

إذا كان ل (س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٢}{\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ٣}$ فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلا على مجموعة الاعداد الحقيقية ح

مثال :

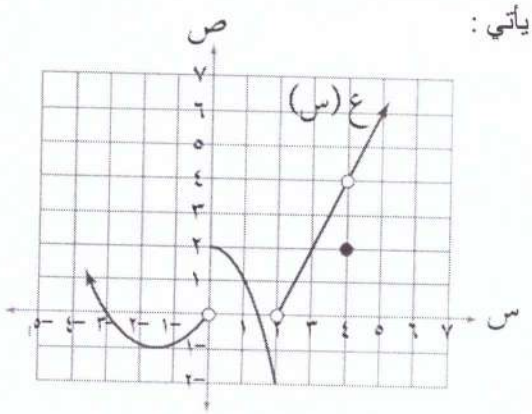
إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} [٢\text{س}]\,|٢\,\text{س} - ٣| & \text{، } [\text{س}] = ١ \\ \text{س}\,[\text{س} + ٢] & \text{، } [\text{س} + ١] = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) على مجاله

اسئلة الوحدة

١) معتمدا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ع ، جد كلا مما يأتي :



أ) $\lim_{س \to ٠^{+}} ع(س) =$

ب) $\lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) =$

جـ) $\lim_{س \to ٣} ع(س) =$

د) $\lim_{س \to ٤} ع(س) =$

هـ) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ} ع(س) =$ غير موجودة

و) مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند س = ب

٢) إذا كان $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ ، ق (٣) = ٦ فجد قيمة

$\lim_{س \to ١} \left(ق^{٢}(٢س + ١) - س + ٢ \right)$

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ - س & ، س > ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة ، فما قيمة الثابت جـ؟

٤) إذا كان ق (س) = $\dfrac{س^{٢} + (أ + ١٣) س + أ}{س - ٢}$

فجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

٥) ق (س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^{٢} - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} & ، س > ٥ \\ أ \, جتا \dfrac{\pi}{٥} س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٥} ق(س)$ موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟

٦) جد كلا من النهايات الآتية :

أ) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س - جا س}{\sqrt{١ - جتا س}}$

ب) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س + جا ٢س}{٣س}$

جـ) $\lim_{س \to ١} \dfrac{١}{س - ١} \left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

د) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}}{\text{س} - \sqrt{\text{س} + ١} - ١}$

ط) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{قا}\,٢\,\text{س} - ١}{\text{س}^{٢}} =$

هـ) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٣} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س}} + \dfrac{١}{٣}}{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣}$

ي) $\text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٢} - \text{جتا}\left(\dfrac{\pi}{٣} + \text{هـ}\right)}{\text{هـ}}$

و) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٤} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢\,|\text{س}|}{٢\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} - ١٢}$

ك) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جتا}\,٣\,\text{س} - \text{جتا}\,٥\,\text{س}}{٢\,\text{س}^{٢}}$

٧) إذا كان $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{٤\,\text{س}^{٢} - \text{جا}\,\text{ب}\,\text{س}}{\text{ب}\,\text{س} - \text{ظا}\,٤\,\text{س}} = \dfrac{١}{٤}$

فجد قيمة الثابت ب

ز) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{جا}\,٢\,\text{س}}{٣\,\text{س}}$

٨) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}^{٢} - ٤|}{\text{س} - ٢} & ،\ \text{س} \neq ٢ \\ ٢ + \text{س} & ،\ \text{س} = ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

ح) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٦}} \dfrac{\text{جتا}\,\text{س} - \sqrt{٣}\,\text{جا}\,\text{س}}{٦\,\text{س} - \pi} =$

٩) إذا كان

$$\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} \left|\left\lfloor \dfrac{\text{س}}{2} \right\rfloor - 1\right| & ، \; -1 \le \text{س} < 3 \\ [\,0.5\,\text{س} + 3\,] & ، \; 3 \le \text{س} < 4 \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ٣

١٢) إذا كان

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^3 & ، \; \text{س} < 1 \\ 2\,\text{س}\sqrt{\text{س}} - 1 & ، \; \text{س} \ge 1 \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران هـ لجميع قيم س الحقيقية

١٠) إذا كان

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{9\,\text{س}^2 - 1}{\sqrt{1 - 6\,\text{س} + 9\,\text{س}^2}} & ، \; -\dfrac{1}{3} \le \text{س} < \dfrac{1}{3} \\ -2 & ، \; \text{س} = \dfrac{1}{3} \\ -6\,\text{س} - [\,\text{س}\,] & ، \; \dfrac{1}{3} \le \text{س} < \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س = $\dfrac{1}{3}$

١٣) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1} & ، \; -2 \le \text{س} < -1 \\ \text{س}\,[\,\text{س}\,] & ، \; -1 < \text{س} \le 1 \end{cases}$$

ف ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [-٢ ، ١)

١٤) إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 2}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = [\,\text{س}\,]$

فابحث في اتصال ل × هـ في الفترة [٠ ، ٢]

١١) ابحث في اتصال $\text{ع}(\text{س}) = \sqrt{[\,\text{س}\,] + \text{س}}$ في الفترة (١ ، ٢]

١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة أربعة بدائل مختلفة ، واحدة منها فقط صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح فيما يأتي :

(١) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{ق}(\text{س}) = 4$ ، $\text{ق}(4) = 6$

فإن قيمة $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \left(\text{ق}^2(2\,\text{س} + 1) - \text{س} + 7\right)$

أ) ١٧ ب) ١٣ جـ) ٢٠ د) ٣٧

(٢) إذا كان ق اقترانا متصلا عند س = ٤ وكان ٣ ق (٤) = ٦

وكانت $\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ٤ ب فإن قيمة الثابت ب =

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) -٢

(٣) إذا كان ق اقتران كثير حدود وكانت

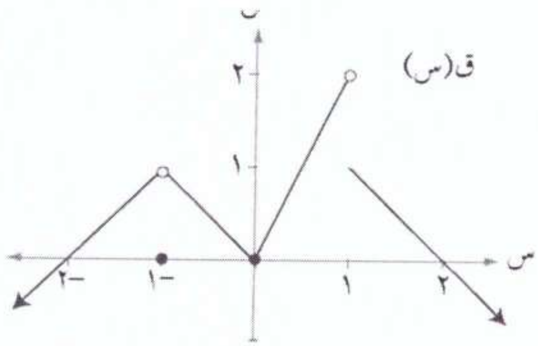
$\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س)}{س} = ٣$ فإن $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{ق^{٢}(س)}{س} =$

أ) ٩ ب) ١٨ جـ) ٦ د) ٣٦

(٤) معتمدا الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح فإن مجموعة قيم أ حيث

$\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = صفراً هي :

أ) {-٢ ، ٠} ب) {٠} جـ) {٠ ، ٢} د) {-٢ ، ٠ ، ٢}



(٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ تساوي

أ) -١ ب) صفر جـ) -٣ د) ٣

(٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٦ س^{٤} + ١٨ س^{٢}}{٢ س^{٢} - ٣ س^{٣}}$ تساوي

أ) -٦ ب) -٢ جـ) ٣ د) ٩

(٧) إذا كان ق اقترانا متصلا عند س = ١ وكان ق(١) = ٤ فإن

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـــا}} \left(\frac{|س - ١|}{س - ١} + ق(س) \right)$ تساوي

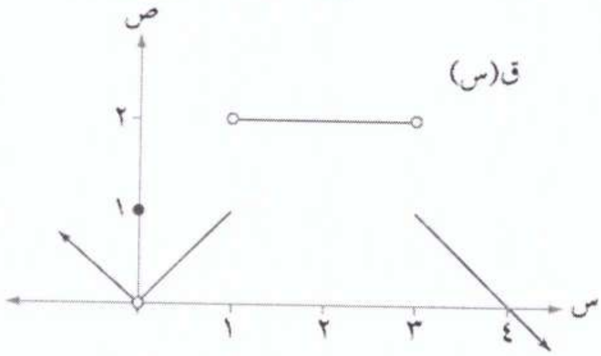
أ) -٣ ب) ١ جـ) ٥ د) غير موجودة

(٨) معتمدا الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح فإن مجموعة قيم أ حيث

$\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = غير موجودة هي :

أ) {٠ ، ١ ، ٣} ب) {١ ، ٣ ، ٤}

جـ) {٠ ، ١ ، ٣ ، ٤} د) {١ ، ٣}



٩) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} ٢ \text{ جتا}^{٢} س & ، \quad س < \frac{\pi}{٢} \\ أ \, س^{٢} + \pi^{٢} & ، \quad س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلا عند س = $\frac{\pi}{٢}$ هي :

أ) -٢ ب) صفر جـ) -٤ د) ٤

(١٠) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ & ، \quad س = ١ \\ [\,س\,] & ، \quad ١ < س < ٢ \\ ٤ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

فإن الاقتران متصل على الفترة :

أ) [١ ، ٢] ب) (١ ، ٢) جـ) [١ ، ٢) د) (١ ، ٢]

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق
عبد الغفار الشيخ