الرياضيات

الثاني عشر العلمي

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ

محمد عبد الرحمن حميدي

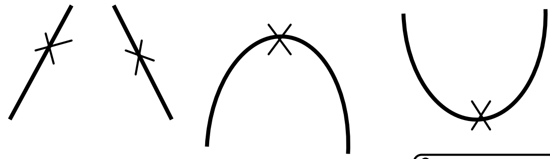
شبكة منهاجي التعليمية

منهاجي

متعة التعليم الهادف

الوحدة الأولى :- النهايات والاتصال

النهاية: هي سلوك الاقتران ق(س) عندما تقترب س من نقطة معينة.



نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) : نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب س من أ

اليمين	اليسار
نهــا$_{س \to أ^{+}}$ ق(س)	نهــا$_{س \to أ^{-}}$ ق(س)

ملاحظات هامة جداً :-

١) إذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن النهاية الأصلية موجودة وتساوي نفس الرقم .

٢) إذا كانت النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار فإن النهاية الأصلية غير موجودة .

---

١) إذا كانت نهــا$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ٧، نهــا$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ٧

جد نهــا$_{س \to ١}$ ق(س) :

الحل : اليمين= اليسار = ٧

نهــا$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = نهــا$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ٧

∴ نهــا$_{س \to ١}$ ق(س) = ٧ (موجودة)

---

٢) إذا كانت نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}^{+}}$ ل(س) = -٧

نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}^{-}}$ ل(س) = -٧ ، جد نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ ل(س)

الحل : اليمين= اليسار = -٧

نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}^{+}}$ ل(س) = نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}^{-}}$ ل(س) = -٧

∴ نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ ل(س) = -٧

---

٣) إذا كانت نهــا$_{س \to ٣^{+}}$ هـ(س) = $\frac{١٠}{٢}$

نهــا$_{س \to ٣^{-}}$ هـ(س) = ٥ ، جد نهــا$_{س \to ٣}$ هـ(س) :

الحل: اليمين = اليسار = ٥

نهــا$_{س \to ٣^{+}}$ هـ(س) = نهــا$_{س \to ٣^{-}}$ هـ(س) = ٥

∴ نهــا$_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٥ (موجودة)

---

٤) إذا كانت نهــا$_{س \to ٠^{+}}$ ل(س) = ١٧

نهــا$_{س \to ٠^{-}}$ ل(س) = -١٧ ، جد نهــا$_{س \to ٠}$ ل(س) :

الحل :

نهــا$_{س \to ٠^{+}}$ ل(س) ≠ نهــا$_{س \to ٠^{-}}$ ل(س)

∴ نهــا$_{س \to ٠}$ ل(س) (غير موجودة)

---

٥) إذا كانت نهــا$_{س \to ٥}$ ق(س) = ٢٧ جد:-

أ) نهــا$_{س \to ٥^{+}}$ ق(س) = ٢٧

ب) نهــا$_{س \to ٥^{-}}$ ق(س) = ٢٧

لأن النهاية موجودة

---

٦) إذا كانت نهــا$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ٢أ − ٥

نهــا$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ١٥، نهــا$_{س \to ١}$ ق(س) موجودة جد أ ؟

الحل : نهــا$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = نهــا$_{س \to ١^{-}}$ ق(س)

٢أ − ٥ = ١٥

٢أ = ٢٠ ⟵ $\boxed{أ = ١٠}$

---

٧) إذا كانت نهــا$_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = ٣ب + ٧ ،

نهــا$_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = ٢٣ ، جد قيم (ب) التي تجعل

نهــا$_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

---

٨) إذا كانت نهــا$_{س \to ٥^{+}}$ ق(س) = ٢أ + ٢ ،

نهــا$_{س \to ٥^{-}}$ ق(س) = أ + ٢ب ، جد (أ) ،(ب) التي تجعل

نهــا$_{س \to ٥}$ ق(س) = ١٨

الحل:

اليمين = ١٨	اليسار = ١٨
نهــا$_{س \to ٥^{+}}$ ق(س) = ١٨	نهــا$_{س \to ٥^{-}}$ ق(س) = ١٨
٢أ + ٢ = ١٨	أ + ٢ب = ١٨
٢أ = ١٦	٨ + ٢ب = ١٨
$\boxed{أ = ٨}$	٢ب = ١٠
	$\boxed{ب = ٥}$

أولاً : النهاية

هي سلوك اقتران عندما تقترب س من قيمة معينة ، وهناك عدة طرق تستخدم لإيجاد النهاية :

١) النهاية من الجدول
٢) النهاية من الرسم
٣) النهاية من النظريات

أولاً النهاية من الجداول

١ الجدول التالي يمثل قيم س و ق(س)

س	٠,٩	٠,٩٩		١,١	١,٠١
ق(س)	٧,٩	٧,٩٩		٩,١	٩,٠١

الأسئلة المحتملة :

(١) نهــا$_{س \to ١^-}$ ق(س) = ٨

(٢) نهــا$_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٩

(٣) نهــا$_{س \to ١}$ ق(س) =

$\Leftarrow$ نهــا$_{س \to ١^+}$ ق(س) $\neq$ نهــا$_{س \to ١^-}$ ق(س)

$\therefore$ نهــا$_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة

٢ الجدول التالي يمثل قيم س و ق(س) ، نهــا$_{س \to ١,٥}$ ق(س)

س	١,٤٩	١,٤٩٩		١,٥١	١,٥٠١
ق(س)	٧,١	٧,٠١		٨,٩٩	٨,٩٩٩

$\Leftarrow$ نهــا$_{س \to ١,٥^+}$ ق(س) = ٩

$\Leftarrow$ نهــا$_{س \to ١,٥^-}$ ق(س) = ٧

النهاية غير موجودة

٣ إذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، س $\neq$ ٣

كون جدولاً بين نهــا$_{س \to ٣}$ ق(س) :

الحل : قبل الحل

تذكر أن : ١) تبسط السؤال
٢) تأخذ قيم قريبة من ٣

$\Leftarrow$ تبسيط السؤال : ق(س) = $\frac{(س+٣)(س-٣)}{س - ٣}$

تتعامل مع اقتران جديد هو : ق(س) = س + ٣

س	٢,٩	٢,٩٩		٣,٠١	٣,١
ق(س)	٥,٩	٥,٩٩		٦,٠١	٦,١

نهــا$_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٦ ، نهــا$_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٦

نهــا$_{س \to ٣}$ ق(س) = ٦

فقط في نص السؤال ال(٣) وردت س $\neq$ ٣ وهي تكتب فقط لدقة السؤال

٤ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س + ٢ & ، س > ٢ \\ س + ٤ & ، س < ٢ \end{cases}$

الحل :

س	١,٩	١,٩٩		٢,٠١	٢,١
ق(س)	٥,٩	٥,٩٩		٤,٠١	٤,١

$\Leftarrow$ نعوض (١,٩ ، ١,٩٩) في قاعدة س + ٤
ونعوض (٢,٠١ ، ٢,١) في قاعدة س + ٢

نهــا$_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٦ ، نهــا$_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٤

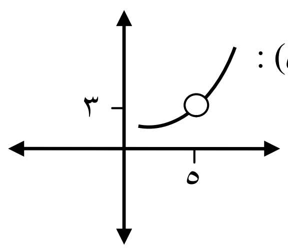
$\therefore$ نهــا$_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة لأن اليمين $\neq$ اليسار

ثانياً : النهاية من الرسم

وهي نوعان :
أ) رسم جاهز
ب) نحن نرسم

أ . رسم جاهز

٥ الشكل المجاور يمثل ق(س) :



نهــا$_{س \to ٥^-}$ ق(س) = ٣

نهــا$_{س \to ٥^+}$ ق(س) = ٣

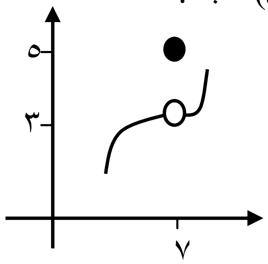
نهــا$_{س \to ٥}$ ق(س) = ٣

نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) = ٣ ، جد قيمة أ؟

$\boxed{أ = ٣}$

يجب أن نميز بين :
١) حلقة : وتكون عندها النهاية موجودة .
٢) الفقرة : النهاية غير موجودة " احذر الاتجاه "
٣) الطرف : له نهاية من جهة واحدة فقط .

⑥ الشكل المجاور يمثل ق(س) ، جد :



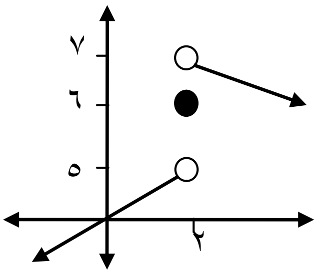
$\underset{س\leftarrow ٧^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٣

$\underset{س\leftarrow ٧^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٣

$\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نها}}$ ق(س) = ٣

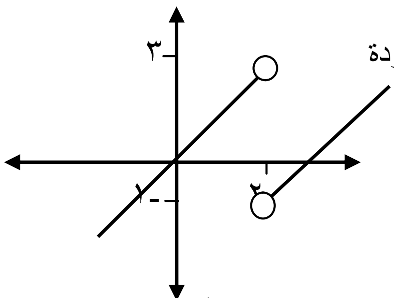
الحلقة لا تمنع وجود النهاية ، فالنهاية تكون موجودة إذا كان السمين = اليسار
ق(٧) = ٥

⑦ الشكل التالي يمثل منحنى ق(س) ، جد ما يلي :



أ) ق(٢) = ٦
ب) $\underset{س\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٧
جـ) $\underset{س\leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٥
د) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) = غير موجودة

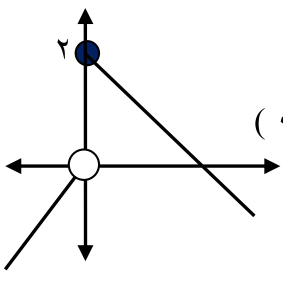
⑧ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) ، أوجد ما يلي :



أ) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) : غير موجودة
ب) $\underset{س\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = -١
جـ) $\underset{س\leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٣
د) إذا علمت أن $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة ، أوجد قيم أ

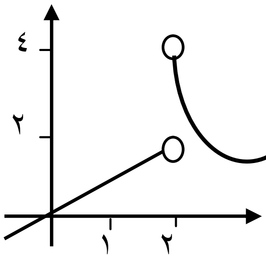
⟸ دور وين في فقرة أ = ٢

⑨ يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) ، إذا علمت أن :



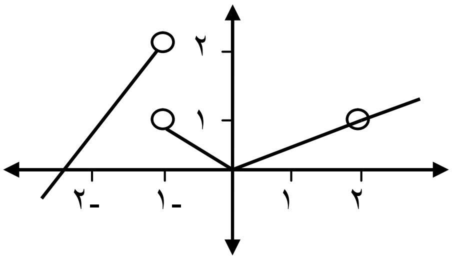
أ) $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة ، أوجد أ
⟸ أ = ٠ (يوجد قفزة عند س = ٠)
ب) $\underset{س\leftarrow ٠^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢
جـ) ب) $\underset{س\leftarrow ٠^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٠

⑩ من الشكل المجاور ، $\underset{س\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ؟



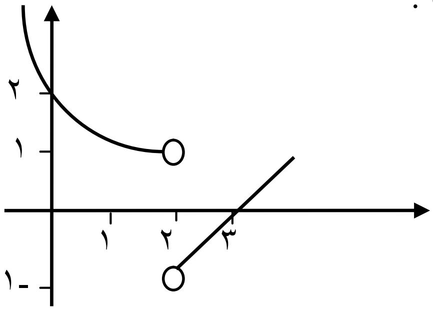
أ) ١ ب) ٢
جـ) -٣ د) ٤

⑪ من الشكل المجاور ما هي قيم أ حيث أ ∈ {-١ ، ٠ ، ٢ } والتي تكون عندها $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة :



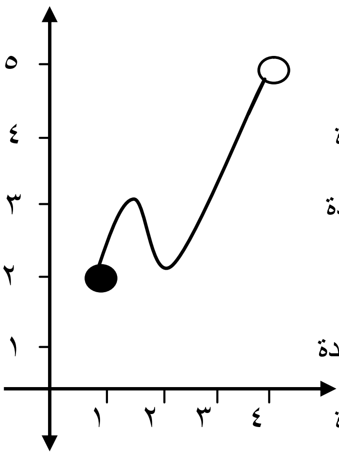
أ) ٢ ب) ٥ جـ) -١ د) -٢

⑫ الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ل(س) ، جد $\underset{س\leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ل(س) :



أ) ١ ب) -١ جـ) ٢ د) غير موجودة

⑬ اعتماداً على الشكل التالي يمثل منحنى ق(س) المعرف على [١ ، ٤) ، جد ما يلي :



$\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

$\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = غير موجودة

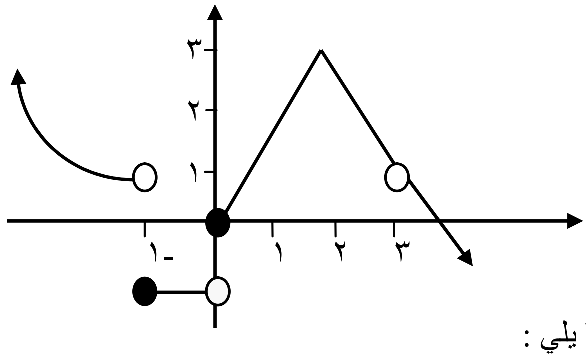
$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) = غير موجودة

$\underset{س\leftarrow ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٥

$\underset{س\leftarrow ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = غير موجودة

$\underset{س\leftarrow ٤}{\text{نها}}$ ق(س) = غير موجودة

(١٤) الشكل التالي يمثل منحنى ق(س) :



جد ما يلي :

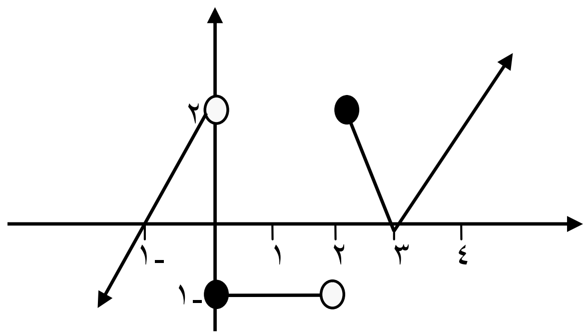
أ) نهـا$_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = ب) نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) =

ج) نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) =

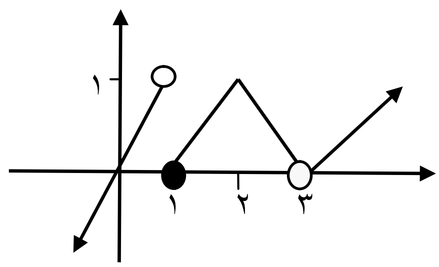
د) جد قيمة أ ، حيث أن نهـا$_{س \leftarrow أ^-}$ ق(س) = ١

هـ) مجموعة قيم أ ، حيث أن نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة

(١٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) ، جد قيمة أ بحيث أن نهـا$_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س) = ٢ :



(١٦) الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، جد كلاً مما يلي:



جد ما يلي :

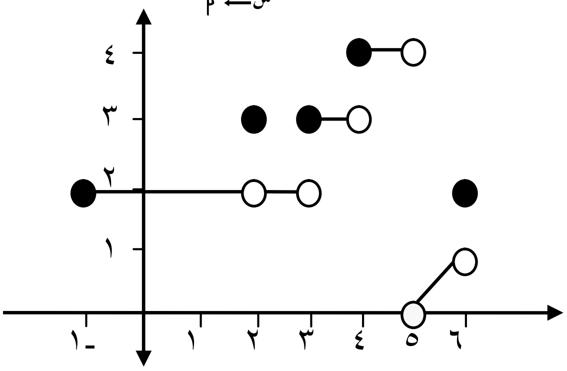
أ) نهـا$_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ب) نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) =

ج) نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = د) نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) =

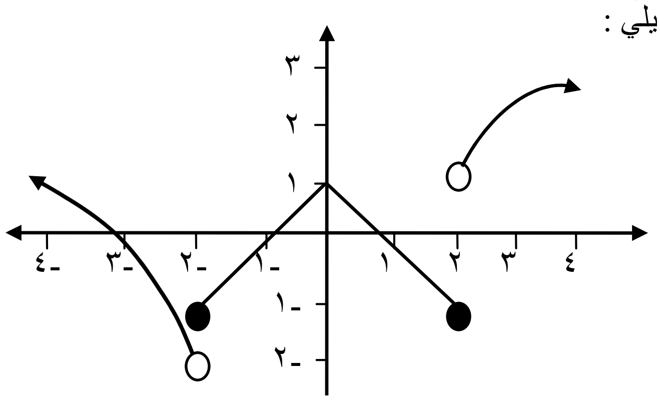
(١٧) الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [-١ ، ٦] ، جد كلاً من :

أ) مجموعة قيم أ ، حيث أن نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غر موجودة

ب) مجموعة قيم أ ، حيث أن نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ٣



(١٨) الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، جد كلاً مما يلي :



أ) نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = ب) نهـا$_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) =

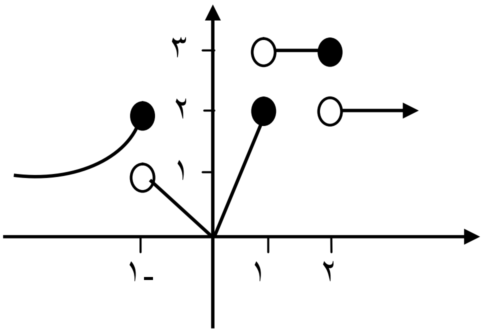
ج) قيم ب حيث نهـا$_{س \leftarrow ب^+}$ ق(س) = ١

(١٩) اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س) ، جد ما يلي :

أ) نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) = ب) نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) =

ج) قيم أ حيث نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ٣

د) ما مجموعة قيم ب ، حيث نهـا$_{س \leftarrow ب}$ ق(س) غير موجودة



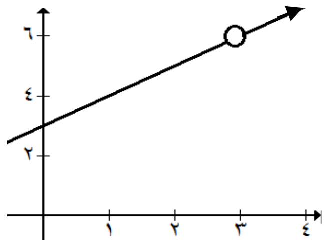
(٢٠) إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ ، س $\neq$ ٣ ، ارسم ق(س) ثم

جد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) :

الحل : للاقتران النسبي نبدأ بعملية التبسيط

ق(س) = $\frac{(س+٣)\cancel{(س-٣)}}{\cancel{س-٣}}$ = س + ٣ ، س $\neq$ ٣

$\Longleftarrow$ عندما نكون جدول ، نهتم أولاً بالعدد (٣)



س	٢	٣	٤
ق(س)	٥	٦	٧

$\lim_{س \to ٣}$ (س + ٣) = ٦

(٢١) إذا كان

ق(س) = { س + ١ ، س > ٢ ؛ ٢س ، س < ٢

أ) ارسم ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س)

د) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

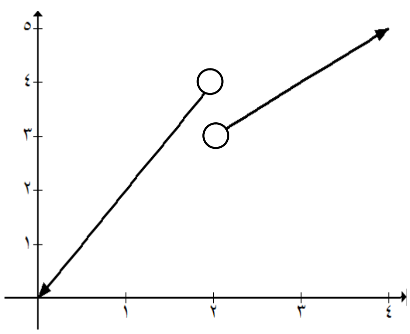
هـ) كون جدولاً وأوجد $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

الحل : أ) جدول قيم يمين (٢)

س	٢	٣	٤
ق(س)	٣	٤	٥

جدول قيم يسار (٢)

س	٢	١	٠
ق(س)	٤	٢	٠



ب) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = ٤

د) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = غير موجودة

جـ) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = ٣

هـ) جدول $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

س	١,٨	١,٩		٢,١	٢,٢
ق(س)	(٢س) ٣,٦	(٢س) ٣,٨		(س+١) ٣,١	(س+١) ٣,٢

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = ٤ $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = ٣

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = غير موجودة

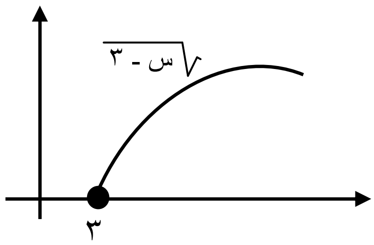
(٢٢) إذا كان ق(س) = $\sqrt{س - ٣}$ ، جد من الشكل كل من النهايات التالية :

أ) $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

د) $\lim_{س \to ١٢}$ ق(س)



الحل :

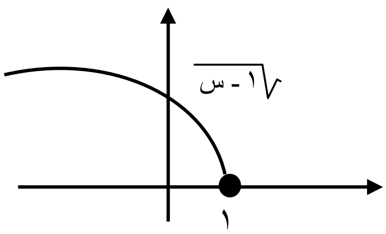
(٢٣) إذا كان ل(س) = $\sqrt{١ - س}$ ، جد من الشكل كل مما يلي :

أ) $\lim_{س \to ١^{+}}$ ل(س)

ب) $\lim_{س \to ١^{-}}$ ل(س)

جـ) $\lim_{س \to ١}$ ل(س)

د) $\lim_{س \to ١٥}$ ل(س)



الحل :

نظريات في النهايات

١) $\lim_{س \to أ}$ (الثابت) = الثابت نفسة

٢) * إذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = م$ ، فإن :

* $\lim_{س \to أ}(ق(س) \pm هـ(س)) = \lim_{س \to أ} ق(س) \pm \lim_{س \to أ} هـ(س)$

* $\lim_{س \to أ}(ق(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to أ} ق(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س)$

* $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)}$

* $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

بحيث ل > ٠ ، إذا كان ن عدد زوجي .

* $\lim_{س \to أ} جـ \times ق(س) = جـ \times \lim_{س \to أ} ق(س) = جـ \times ل$

(حيث جـ ثابت)

أسئلة متنوعة :

١) جد كلاً من النهايات الآتية :

أ) $\lim_{س \to ٢}(س^٢ + ٥س + ١) = ٤ + ١٠ + ١ = ١٥$

ب) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + ١}{س + ١} = \frac{٢٥ + ١}{٥ + ١} = \frac{٢٦}{٦}$

جـ) $\lim_{س \to ٢}(\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س + ٧}) = ١ + ٢ = ٣$

د) $\lim_{س \to -٤}(\frac{س + ٤}{س^٢ + ١}) = \frac{-٤ + ٤}{١٦ + ١} = \frac{٠}{١٧} = ٠$

هـ) $\lim_{س \to -٣}(٢^{س}) = ٢^{-٣} = \frac{١}{٣٢} = \frac{١}{٨}$

و) $\lim_{س \to -٣}(\frac{س^٣ - ٢}{س - ١} + س^٢ + ١) =$

٢) إذا كانت $\lim_{س \to أ}(س^٢ - ٢س) = ٣$ ، جد الثابت (أ) :

الحل : $أ^٢ - ٢أ = ٣ \longrightarrow أ^٢ - ٢أ - ٣ = ٠$

$(أ - ٣)(أ + ١) = ٠ \longrightarrow أ = \{٣ ، -١\}$

٣) إذا كانت $\lim_{س \to ٣}(س^٢ - ٢أس + ٥) = -٤$ ، جد الثابت (أ) :

الحل : $٩ - ٦أ + ٥ = -٤$

$-٦أ = -١٨ \longrightarrow أ = ٣$

٤) إذا كانت $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٧$ ، $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٦$ ، جد

أ) $\lim_{س \to ٥}(ق(س) + هـ(س))$

ب) $\lim_{س \to ٥}((ق(س))^٢ + ٣س + ١)$

جـ) $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س) + ٣س}{هـ(س) - ٥س}$

د) $\lim_{س \to ٥}((ق(س))^٢ - \frac{هـ(س)}{٢} - ١١)$

هـ) $\lim_{س \to ٥} \sqrt[٣]{ق(س) + ٣هـ(س) + ٢}$

الحل :

أ) $\lim_{س \to ٥} ق(س) + \lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٧ + ٦ = ١٣$

ب) $(\lim_{س \to ٥} ق(س))^٢ + \lim_{س \to ٥}(٣س + ١) = ٤٩ + ١٦ = ٦٥$

جـ) $\frac{\lim_{س \to ٥} ق(س) + \lim_{س \to ٥} ٣س}{\lim_{س \to ٥} هـ(س) - ٥ \lim_{س \to ٥} ٥س} = \frac{٧ + ١٥}{٦ - ٢٥} = \frac{٢٢}{-١٩}$

د) $(\lim_{س \to ٥} ق(س))^٢ - \frac{\lim_{س \to ٥} هـ(س)}{٢} - ١١$

$= ٤٩ - ٣ - ١١ = ٣٥$

هـ) $\sqrt[٣]{\lim_{س \to ٥} ق(س) + ٣\lim_{س \to ٥} هـ(س) + ٢} = ٣$

٥) إذا كانت $\lim_{س\to ١^-} ق(س) = \frac{١}{٢}$ ، $\lim_{س\to ١^-} هـ(س) = -٢$

جد ما يلي : أ) $\lim_{س\to ١^-}(ق(س) - \frac{١}{هـ(س)})$

ب) $\lim_{س\to ١^-}\sqrt[٣]{ق(س) - \frac{١}{٢}}$

الحل :

٦) إذا كانت $\lim_{س\to ٣}(\frac{١}{٢}هـ(س) + س^{٢} - ٤) = ١٢$

، جد $\lim_{س\to ٣}(٢هـ(س))$:

الحل :

٧) إذا كانت $\lim_{س\to ١^-}(س^{٢} + ٢ق(س) - ٧) = ١٤$

، جد $\lim_{س\to ١^-}(٣ق(س))$:

الحل :

٨) إذا كانت $\lim_{س\to ٣} ق(س) = ٤$ وكانت

$\lim_{س\to ٣}(ق^{٢}(س) + \frac{هـ(س)}{٢} - ٢) = ٢٤$ ، جد $\lim_{س\to ٣} هـ(س)$:

الحل : $(\lim_{س\to ٣} ق(س))^{٢} + \frac{\lim_{س\to ٣} هـ(س)}{٢} - ٢ = ٢٤$

$١٦ + \frac{\lim_{س\to ٣} هـ(س)}{٢} = ٢٦$

$\frac{\lim_{س\to ٣} هـ(س)}{٢} = ١٠ \longrightarrow \lim_{س\to ٣} هـ(س) = ٢٠$

٩) إذا كان $\lim_{س\to ٣}(ق^{٢}(س) - ٤ق(س) + ٤) = ٠$ ، جد

$\lim_{س\to ٣} ق(س)$:

الحل :

١٠) إذا كان ق(س) + كثير حدود ، وكان ق(٢) = ٤ ، جد

، جد $\lim_{س\to ٢}(\sqrt{ق(س)} + ٨س)$:

الحل : $= \sqrt{\lim_{س\to ٢} ق(س)} + \lim_{س\to ٢} ٨س$

$= \sqrt{٤} + ١٦ = ١٨$

١١) إذا كان ق(س) كثير حدود يمر بالنقطة (-٣ ، ٤) وكانت

$\lim_{س\to -٣}(س - ل(س)) = -١٠$

، جد $\lim_{س\to -٣}(ق^{٢}(س) - ٢ل(س))$:

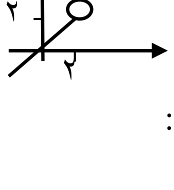
الحل :

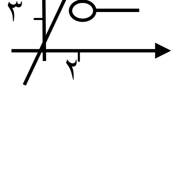
١٢) إذا كان ع(س) كثير حدود باقي قسمته على (س - ٢)

يساوي ٥ جد $\lim_{س\to ٢}(٣ع(س) + ٤س^{٢})$:

الحل :

١٣) اعتماداً على ما يلي ، جد $\lim_{س\to ٢}(ق(س) + هـ(س))$:





الحل :

قاعدة الاستبدال :

وتستخدم إذا كانت النهاية على صورة $\underset{\text{س}\leftarrow \text{م}}{\text{نها}}\ \text{ق(اقتران)}$

توضيح :

نفسي الاقتران
نفس الذيل
} نفس الجواب

$\underset{\text{س}\leftarrow \text{م}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{ص}\leftarrow \text{م}}{\text{نها}}\ \text{ق(ص)} = \underset{\text{مهاوش}\leftarrow \text{م}}{\text{نها}}\ \text{ق(مهاوش)}$

١٤) إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = ٦$ ، جد

$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}}(\text{ق}(\sqrt{\text{س}} + ١) + ٢\text{س} - ٥)$:

الحل :

١٥) إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٦}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = ٥$ ، أوجد

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}(\text{ق}^{٢}(٥\text{س}+ ١) + ٤\text{س}^{٢} + ٢)$:

أ) ٥ ب) ٣١ ج) ١٢٧ د) ١١

١٦) إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{ق}(٢\text{س} + ١) = ٥$ ، $\text{ق}(٣) = ٤$

، فإن $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}(٣\text{ق}^{٢}(\text{س}) - ٢\text{س} + ١)$ تساوي :

أ) ٧٠ ب) ٥٠ ج) ٣٠ د) ٤٠

١٧) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{ق}(٢\text{س} + ١) = ٨$ ، $\text{ق}(٣) = ٦$

، فإن $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}(\text{ق}^{٢}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٧)$ تساوي :

أ) ٦٥ ب) ٦٤ ج) ٦٣ د) ٤٠

ثالثاً : نهاية اقترانات كسرية :

* التعويض المباشر : -

$\frac{\text{عدد}\neq ٠}{\text{عدد}\neq ٠}$	$\frac{٠}{\text{عدد}\neq ٠}$	$\frac{\text{عدد}\neq ٠}{٠}$	$\frac{٠}{٠}$
يترك	صفر	غير موجود على خط الأعداد	مصيبة يجب أن تُحل

وبالمثال يتضح المقال :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٢}+٣}{\text{س}+٥} = \frac{٣}{٥}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢}+١} = \frac{٠}{١٠} = ٠$

* إذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

نلجأ إلى طرق إيجاد النهاية ومن هذه الطرق :

١- إخراج العامل المشترك & التحليل الى العوامل :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٣}+٥\text{س}}{\text{س}^{٢}-٧\text{س}} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س}^{٢}+٥)}{\cancel{\text{س}}(\text{س}-٧)} = \frac{٥}{٧-}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٣}+٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٥}+٢\text{س}^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{\text{س}^{٢}}(\text{س}+٣)}{\cancel{\text{س}^{٢}}(\text{س}^{٣}+٢)} = \frac{٣}{٢}$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٤}{\text{س}^{٢}-١} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س}-١)(\text{س}+٤)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} = \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}+٤}{\text{س}+١} = \frac{٥}{٢}$

٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-١}\right)^{١٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left(\frac{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}\right)^{١٠}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left(\frac{(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)}\right)^{١٠} = \left(\frac{(١+٢)}{(١+١)}\right)^{١٠} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{١٠}$

---

٥) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(٣\text{س}+١)^{٢}-٢٥}{\text{س}-٢} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س}+١-٥)(٢\text{س}+١+٥)}{\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س}-٤)(٢\text{س}+٦)}{\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} ٢(٢\text{س}+٦) = ٢\times ١٠ = ٢٠$

---

٦) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣)^{٢}-٩}{\text{س}} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣-٣)(٢\text{س}+٣+٣)}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}(\text{س}+٦)}{\text{س}} = ٠+٦ = ٦$

---

٧) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣}-٨}{\text{س}-٢} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)}{\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} (\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤) = ٤+٤+٤ = ١٢$

---

٨) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٣\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١٦}{٢\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٢} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-٢)(٣\text{س}+٨)}{(\text{س}-٢)(٢\text{س}-١)} = \frac{١٤}{٣}$

---

٩) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣}-٩\text{س}}{\text{س}^{٣}-٢٧} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}(\text{س}^{٢}-٩)}{\text{س}^{٣}-٢٧}$

$= \frac{\text{س}\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}+٣)}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩)} = \frac{٢}{٣}$

---

١٠) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٤}-١٦}{٢-\text{س}} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^{٢}-٤)(\text{س}^{٢}+٤)}{٢-\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\overset{-١}{\cancel{(\text{س}-٢)}}(\text{س}+٢)(\text{س}^{٢}+٤)}{\cancel{٢-\text{س}}} = -٣٢$

---

١١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٦}-٦٤}{\text{س}-٢} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^{٣}-٨)(\text{س}^{٣}+٨)}{\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)(\text{س}^{٣}+٨)}{\cancel{(\text{س}-٢)}}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} (٤+٤+٤)\times(٨+٨) = ١٢\times ١٦ = ١٩٢$

---

١٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٢)^{٣}+(\text{س}-٢)^{٣}}{\text{س}^{٢}+٤\text{س}} = \frac{٠}{٠}$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\cancel{٢}+\text{س}-\cancel{٢})((\text{س}+٢)^{٢}-(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)+(\text{س}-٢)^{٢})}{\text{س}(\text{س}+٤)}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س})((\text{س}+٢)^{٢}-(\text{س}^{٢}-٤)+(\text{س}-٢)^{٢})}{\text{س}(\text{س}+٤)}$

$= \frac{٢\times ١٢}{٤} = ٦$

١٣) $\lim_{س \to 1} \frac{س^3 - 3س - 4}{س^2 + 2س - 3} = \frac{0}{0}$

الحل :

$\lim_{س \to 1} \frac{(\cancel{س - 1})(س^2 + س + 4)}{(\cancel{س - 1})(س + 3)}$

$= \frac{6}{4}$

قسمة تركيبية

$س^3$	$س^2$	$س^1$	$س^0$
1	0	3	-4
$\boxed{1}$	1	1	4
1	1	4	0

---

١٤) $\lim_{س \to 1} \frac{س^3 - س}{س^4 - 3س^3 + 2} = \frac{0}{0}$

الحل :

$\lim_{س \to 1} \frac{س(\cancel{س - 1})(س + 1)}{(\cancel{س - 1})(س^3 - 2س^2 - 2س - 2)}$

$= \frac{2}{-5}$

قسمة تركيبية

$س^4$	$س^3$	$س^2$	$س^1$	$س^0$
1	-3	0	0	2
$\boxed{1}$	1	-2	-2	-2
1	-2	-2	-2	0

---

١٥) $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 + س^2 - 2س - 8}{س^3 + 3س^2 - 20}$

---

١٦) $\lim_{س \to -1} \frac{4س^3 - 2س + 2}{س^2 - 1}$

---

١٧) $\lim_{س \to 3} \frac{س^4 - 13س^2 + 36}{س^3 - 27}$

---

* توحيد المقامات

١٨) جد $\lim_{س \to 2} \frac{\frac{1}{س} - \frac{1}{2}}{س - 2}$

أ) $-\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) 0

---

١٩) $\lim_{س \to 5} \left(\frac{1}{س} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{س^2 - 25}\right)$

---

٢٠) $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - 1}{1 - \frac{1}{س^3}}$

---

٢١) جد $\lim_{س \to 3} \frac{\frac{1}{س + 1} - \frac{1}{4}}{س^2 - 9}$

الحل : $\lim_{س \to 3} \left(\frac{1}{س + 1} - \frac{1}{4}\right) \div (س^2 - 9)$

$= \lim_{س \to 3} \left(\frac{4 - س - 1}{4(س + 1)} \times \frac{1}{س^2 - 9}\right)$

$= \lim_{س \to 3} \left(\frac{\cancel{3 - س}^{\,-1}}{4(س + 1)} \times \frac{1}{\cancel{(س - 3)}(س + 3)}\right)$

$= \lim_{س \to 3} \frac{-1}{4(س + 1)(س + 3)} = \frac{-1}{4 \times 4 \times 6} = \frac{-1}{96}$

---

٢٢) $\lim_{س \to -1} \frac{س + \frac{3}{س + 4}}{س + 1}$

الحل : $= \lim_{س \to -1} \frac{\frac{س(س + 4) + 3}{س + 4}}{س + 1}$

$= \lim_{س \to -1} \frac{س^2 + 4س + 3}{(س + 4)(س + 1)}$

$= \lim_{س \to -1} \frac{(س + 3)(س + 1)}{(س + 4)(س + 1)} = \frac{2}{3}$

---

٢٣) $\lim_{س \to 3} \frac{\frac{س}{س + 5} - \frac{3}{8}}{س - 3}$

---

٢٤) $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{1}{(س + 1)^2} - 1\right)$

الحل : $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{1 - (س + 1)^2}{(س + 1)^2}\right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \cdot \frac{(1 - (س + 1))(1 + س + 1)}{(س + 1)^2}$

$= \frac{-2}{1} = -2$

---

٢٥) $\lim_{س \to 2} \left(\frac{1}{س - 2} - \frac{4}{س^2 - 4}\right)$

٢٦) $\underset{س \to ١}{نهــا}\left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^{٣} - ١}\right)$

الحل : $= \underset{س \to ١}{نهــا}\left(\frac{(١)(س^{٢} + س + ١) - ٣}{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}\right)$

$= \underset{س \to ١}{نهــا}\left(\frac{س^{٢} + س - ٢}{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}\right)$

$= \underset{س \to ١}{نهــا}\left(\frac{(س - ١)(س + ٢)}{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}\right) = ١$

---

٢٧) $\underset{س \to ٢}{نهــا}\left(\frac{س^{٢} + ١٢}{س^{٢} - ٤} - \frac{س + ٢}{س - ٢}\right)$

الحل: $= \underset{س \to ٢}{نهــا}\left(\frac{س^{٢} + ١٢}{(س + ٢)(س - ٢)} - \frac{(س + ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}\right)$

$= \underset{س \to ٢}{نهــا}\left(\frac{س^{٢} + ١٢ - (س^{٢} + ٤س + ٤)}{(س + ٢)(س - ٢)}\right)$

$= \underset{س \to ٢}{نهــا}\left(\frac{س^{٢} + ١٢ - (س^{٢} + ٤س + ٤)}{(س + ٢)(س - ٢)}\right)$

$= \underset{س \to ٢}{نهــا}\left(\frac{س^{٢} + ١٢ - س^{٢} - ٤س - ٤}{(س + ٢)(س - ٢)}\right)$

$= \underset{س \to ٢}{نهــا}\left(\frac{٨ - ٤س}{(س + ٢)(س - ٢)}\right)$

$= \underset{س \to ٢}{نهــا}\left(\frac{٤\cancel{(٢ - س)}^{-١}}{(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}}\right) = \frac{-٤}{٤} = -١$

---

٢٨) $\underset{س \to ٢}{نهــا}\ \frac{١}{س^{٢} - ٢س} - \frac{١}{٢س - ٤}$

الحل : $= \underset{س \to ٢}{نهــا}\ \frac{١}{س(س - ٢)} - \frac{١}{٢(س - ٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{نهــا}\ \frac{١}{س(س - ٢)} - \frac{١}{٢(س - ٢)} \times \frac{س}{س}$

$= \underset{س \to ٢}{نهــا}\ \frac{٢ - س}{٢س(س - ٢)} = \underset{س \to ٢}{نهــا}\ \frac{-١}{٢س} = \frac{-١}{٤}$

<u>رابعاً :الضرب بالمرافق :</u>

* دردشة مفيدة

المقدار	مرافق الجذر التربيعي	حاصل ضربهم
$٣ - \sqrt{س}$	$٣ + \sqrt{س}$	$٩ – س$
$\sqrt{س + ٢} - ٥$	$\sqrt{س + ٢} + ٥$	$س + ٢ – ٢٥$
$س - ٧ - \sqrt{س + ١}$	$س – ٧ + \sqrt{س + ١}$	$(س – ٧)^{٢} - (س + ١)$

---

٢٩) $\underset{س \to -٣}{نهــا}\ \frac{\sqrt{٦ - س} - ٣}{س + ٣} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{س \to -٣}{نهــا}\ \frac{\sqrt{٦ - س} - ٣}{س + ٣} = \frac{\sqrt{٦ - س} + ٣}{\sqrt{٦ - س} + ٣}$

$= \underset{س \to -٣}{نهــا}\ \frac{٦ - س - ٩}{(س + ٣)(\sqrt{٦ - س} + ٣)}$

$= \underset{س \to -٣}{نهــا}\ \frac{-\cancel{(س + ٣)}}{(س + ٣)(\sqrt{٦ - س} + ٣)} = \frac{-١}{٣ + ٣} = \frac{-١}{٦}$

---

٣٠) $\underset{س \to ٤}{نهــا}\ \frac{س - ٤}{\sqrt{س + ٥} - ٣} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{س \to ٤}{نهــا}\ \frac{س - ٤}{\sqrt{س + ٥} - ٣} = \frac{\sqrt{س + ٥} + ٣}{\sqrt{س + ٥} + ٣}$

$= \underset{س \to ٤}{نهــا}\ \frac{(س - ٤)(\sqrt{س + ٥} + ٣)}{س + ٥ - ٩}$

$= \underset{س \to ٤}{نهــا}\ \frac{\cancel{(س - ٤)}(\sqrt{س + ٥} + ٣)}{\cancel{(س - ٤)}}$

$= \sqrt{٩} + ٣ = ٣ + ٣ = ٦$

٣١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}-٣}{\text{س}-١} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}-٣}{\text{س}-١} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}+٣}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}+٣}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}+٨-٩}{(\text{س}-١)(\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}+٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١}{(\text{س}-١)(\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}+٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}+٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}+١}{(\sqrt{\text{س}^{٢}+٨}+٣)} = \dfrac{٢}{٦} = \dfrac{١}{٣}$

---

٣٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-١}{\sqrt{\text{س}+٣}-٢} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-١}{\sqrt{\text{س}+٣}-٢} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}}+١}{\sqrt{\text{س}}+١} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-١}{\text{س}+٣-٤} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}{\sqrt{\text{س}}+١}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-١}{\text{س}-١} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}{\sqrt{\text{س}}+١}$

$= \dfrac{٤}{٢} = ٢$

---

٣٣) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢-\text{س}}-\sqrt{\text{س}}}{١-\text{س}} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢-\text{س}}-\sqrt{\text{س}}}{١-\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{٢-\text{س}}+\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{٢-\text{س}}+\sqrt{\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢-\text{س}-\text{س}}{(١-\text{س})(\sqrt{٢-\text{س}}+\sqrt{\text{س}})}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\cancel{(١-\text{س})}}{\cancel{(١-\text{س})}(\sqrt{٢-\text{س}}+\sqrt{\text{س}})}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢}{\sqrt{٢-\text{س}}+\sqrt{\text{س}}} = \dfrac{٢}{\sqrt{١}+\sqrt{١}} = \dfrac{٢}{٢} = ١$

---

٣٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١}{\sqrt{١+\text{س}}} - ١\right)$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١-\sqrt{١+\text{س}}}{\sqrt{١+\text{س}}}\right) \times \left(\dfrac{١+\sqrt{١+\text{س}}}{١+\sqrt{١+\text{س}}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{\cancel{١}-\cancel{١}-\text{س}}{(\sqrt{١+\text{س}})(١+\sqrt{١+\text{س}})}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{-١}{(\sqrt{١+\text{س}})(١+\sqrt{١+\text{س}})}\right) = \dfrac{-١}{٢}$

---

٣٥) $\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{٤+\sqrt{\text{س}}}-٢}$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{٤+\sqrt{\text{س}}}-٢} \times \dfrac{\sqrt{٤+\sqrt{\text{س}}}+٢}{\sqrt{٤+\sqrt{\text{س}}}+٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\sqrt{\text{س}}}(\sqrt{٤+\sqrt{\text{س}}}+٢)}{\cancel{٤}+\cancel{\sqrt{\text{س}}}-\cancel{٤}} = ٢+٢ = ٤$

<u>خامساً : مرافق الجذر التكعيبي :</u>

الاقتران	مرافق الجذر التكعيبي	الجواب
$\sqrt[٣]{\text{س}+١}-٣$	$(\sqrt[٣]{\text{س}+١})^{٢}+٣\sqrt[٣]{\text{س}+١}+(٣)^{٢}$	$(\text{س}+١)-(٣)^{٣}$
$\sqrt[٣]{\text{س}+٢}-٥$	$(\sqrt[٣]{\text{س}+٢})^{٢}+٥\sqrt[٣]{\text{س}+٢}+(٥)^{٢}$	$(\text{س}+٢)-(٥)^{٣}$
$٢-\sqrt[٣]{\text{س}+٧}$	$٤+٢\sqrt[٣]{\text{س}+٧}+(\sqrt[٣]{\text{س}+٧})^{٢}$	$(٢)^{٣}-(\text{س}+٧)$

٣٦) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}-٢}{\text{س}-٨} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}-٢}{\text{س}-٨} \times \dfrac{(\sqrt[٣]{\text{س}})^{٢}-٢\sqrt[٣]{\text{س}}+٤}{(\sqrt[٣]{\text{س}})^{٢}-٢\sqrt[٣]{\text{س}}+٤}$

$= \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٨)}}{\cancel{(\text{س}-٨)})(\sqrt[٣]{\text{س}})^{٢}-٢\sqrt[٣]{\text{س}}+٤}$

$= \dfrac{١}{٤+٤+٤} = \dfrac{١}{١٢}$

٣٧) إذا كانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ١}{س - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - أ}{س - \sqrt{أ}}$ ، فجد قيمة أ :

الحل :

الأيمن : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ١}{س - ١} \times \dfrac{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + \sqrt[٣]{س} + ١}{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + \sqrt[٣]{س} + ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{س - ١}}{\cancel{(س - ١)}(٣)} = \dfrac{١}{٣}$

الأيسر : $\underset{س \to \sqrt{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س - \sqrt{أ})}(س + \sqrt{أ})}{\cancel{س - \sqrt{أ}}} = ٢\sqrt{أ}$

$\dfrac{١}{٣} = ٢\sqrt{أ} \longleftarrow ٦\sqrt{أ} = ١$

$\sqrt{أ} = \dfrac{١}{٦} \longleftarrow أ = \dfrac{١}{٣٦}$

---

٣٨) $\underset{س \to -٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١ - س} - ٣}{٢ + \sqrt[٣]{س}}$

الحل :

$\underset{س \to -٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١ - س} - ٣}{٢ + \sqrt[٣]{س}} \times \dfrac{\sqrt{١ - س} + ٣}{\sqrt{١ - س} + ٣} \times \dfrac{٤ - ٢\sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}{٤ - ٢\sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}$

$= \underset{س \to -٨}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ - س - ٩)(١٢)}{(٨ + س)(٦)} = \underset{س \to -٨}{\text{نهـا}} \dfrac{(-٨ - س)(١٢)}{(٨ + س)(٦)}$

$= \underset{س \to -٨}{\text{نهـا}} \dfrac{-\cancel{(٨ + س)}(١٢)}{\cancel{(٨ + س)}(٦)} = \dfrac{-١٢}{٦} = -٢$

---

٣٩) $\underset{س \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} - ٢}{س - ٨}$

الحل :

$\underset{س \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} - ٢}{س - ٨} \times \dfrac{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} + ٢}{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} + ٢}$

$= \underset{س \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ + \sqrt[٣]{س} - ٤}{(س - ٨)(\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} + ٢)}$

$= \underset{س \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{(س - ٨)(\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} + ٢)} \times \dfrac{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$

$= \underset{س \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س - ٨)}}{\cancel{(س - ٨)}(\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{س}} + ٢)((\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \dfrac{١}{٤ \times ١٢} = \dfrac{١}{٤٨}$

---

٤٠) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٤س}{\sqrt{٣س + ٤} - \sqrt{٢س + ٨}}$

---

٤١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س\sqrt{س} - ١}{٢ - \sqrt{س + ٣}} \right)$

الاستبدال : إذا كانت هنالك جذور من الدرجة الرابعة فيما فوق وناتج التعويض $\dfrac{٠}{٠}$

---

٤٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س - ٣}{\sqrt[٤]{س + ١٣} - ٢}$

الحل : $ص = \sqrt[٤]{س + ١٣}$

$ص^{٤} = س + ١٣ \longrightarrow \boxed{س = ص^{٤} - ١٣}$

$س \to ٣ \Longrightarrow \boxed{ص \to ٢}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{ص^{٤} - ١٣ - ٣}{ص - ٢} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{ص^{٤} - ١٦}{ص - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(ص - ٢)}(ص + ٢)(ص^{٢} + ٤)}{\cancel{ص - ٢}} = ٤ \times ٨ = ٣٢$

---

٤٣) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س} + ١}{س + ١}$

الحل : $ص = \sqrt[٥]{س} \longrightarrow س = ص^{٥}$ ، $س \to -١$

$ص \to -١$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص + ١}{ص^{٥} + ١}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{ص + ١}}{\cancel{(ص + ١)}(ص^{٤} - ص^{٣} + ص^{٢} - ص + ١)} = \dfrac{١}{٥}$

---

٤٤) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{٥} - ٣٢}{س - ١}$

سادساً : التوزيع المنتظم

فصل البسط عن المقام بين الاقترانات جمع وطرح

الطرح والإضافة بين الاقترانات حاصل ضرب

٤٥) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} + \sqrt{س} - ١٨}{س - ٤}$

الحل : $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} + \lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{(س + ٤)\cancel{(س - ٤)}}{\cancel{س - ٤}} + \lim\limits_{س \to ٤} \frac{\cancel{\sqrt{س} - ٢}}{\cancel{(\sqrt{س} - ٢)}(\sqrt{س} + ٢)}$

$= ٨ + \frac{١}{٤} = \frac{٣٣}{٤}$

٤٦) $\lim\limits_{س \to ٧} \frac{٢\sqrt[٣]{س + ١} - \sqrt{٢س + ٢}}{س - ٧} = \frac{٠}{٠}$

الحل : $\lim\limits_{س \to ٧} \frac{٢\sqrt[٣]{س + ١} - ٤}{س - ٧} - \lim\limits_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٤}{س - ٧}$

$*٢ \times \lim\limits_{س \to ٧} \frac{(\sqrt[٣]{س + ١} - ٢)((\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + (٢)\sqrt[٣]{س + ١} + ٤)}{(س - ٧)((\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + (٢)\sqrt[٣]{س + ١} + ٤)}$

$= ٢ \times \lim\limits_{س \to ٧} \frac{س + ١ - ٨}{(س - ٧)(١٢)} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$

$* \lim\limits_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٤ \times \sqrt{٢س + ٢} + ٤}{(س - ٧)(\sqrt{٢س + ٢} + ٤)}$

$= \lim\limits_{س \to ٧} \frac{٢س + ٢ - ١٦}{(س - ٧)(٨)} = \lim\limits_{س \to ٧} \frac{٢س - ١٤}{(س - ٧)(٨)} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

النهاية الكلية : $\frac{١}{٦} - \frac{١}{٤} = \frac{-١}{١٢}$

٤٧) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{\sqrt[٣]{س + ٧} - \sqrt{س + ٣}}$

٤٨) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س^{٢} + \sqrt{س} - ١٨}$

الحل : $= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{\frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}}{\frac{س^{٢} + \sqrt{س} - ١٨}{س - ٤}}$

البسط : $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = \lim\limits_{س \to ٤} \frac{\cancel{(س - ٤)}(س + ٤)}{\cancel{س - ٤}} = ٨$

المقام : $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = \lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

$= ٨ + \frac{١}{٤} = \frac{٣٣}{٤}$

النهاية الكلية : $\frac{٨}{\frac{٣٣}{٤}} = ٨ \times \frac{٤}{٣٣} = \frac{٣٢}{٣٣}$

٤٩) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢}\sqrt{س} - ٣٢}{س - ٤}$

الحل : نطرح أو نضيف : $٢س^{٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢}\sqrt{س} - ٢س^{٢} + ٢س^{٢} - ٣٢}{س - ٤}$

$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢}\sqrt{س} - ٢س^{٢}}{س - ٤} + \lim\limits_{س \to ٤} \frac{٢س^{٢} - ٣٢}{س - ٤}$

$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢}\cancel{(\sqrt{س} - ٢)}}{(\sqrt{س} + ٢)\cancel{(\sqrt{س} - ٢)}} + \lim\limits_{س \to ٤} \frac{٢\cancel{(س - ٤)}(س + ٤)}{\cancel{س - ٤}}$

$= \frac{١٦}{٤} + ١٦ = ٤ + ١٦ = ٢٠$

٥٠) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\,(س + ١)^{٢} - ٤}{س - ١}$

الحل :

الثوابت :

* إذا كانت النهاية موجودة وكان المقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر .

٥١) إذا كانت $\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٣} + \text{أ}}{\text{س} - ١} = ١٠$ ، فجد أ :

الحل : $\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٣} + \text{أ}}{\text{س} - ١} = \frac{٢٧ + \text{أ}}{٢} = ١٠$

$\Leftarrow ٢٧ + \text{أ} = ٢٠ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = -٧}$

٥٢) إذا علمت أن $\lim_{\text{س}\to ٥} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أ}}{\text{س} - ٥} = ١٠$ ، فجد أ :

الحل : ناتج تعويض المقام = صفر ، فإن تعويض البسط يساوي صفر .

$\Leftarrow ٢٥ - \text{أ} = ٠ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٢٥}$

٥٣) إذا علمت أن $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٢} + \text{ب س} - ٧}{\text{س} - ١} = \text{جـ}$ ، أوجد قيمة كل من ب ، جـ ، ٢ب + ٣جـ :

الحل : $\Leftarrow (١)^{٢} + \text{ب} - ٧ = ٠ \longrightarrow \boxed{\text{ب} = ٦}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٧}{\text{س} - ١} = \text{جـ} \longrightarrow \lim_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٧)}{\text{س} - ١}$

$\Leftarrow \text{جـ} = ٨$

$\Leftarrow ٢\text{ب} + ٣\text{جـ} = ١٢ + ٢٤ = ٣٦$

٥٤) $\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - (٣ - ٢\text{جـ})\text{س} - ٦\text{جـ}}{\text{س} - ٣} = ١١$ ، جد قيمة جـ :

الحل : $\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ٢\text{جـ})}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ١١$

$\Leftarrow ٣ + ٢\text{جـ} = ١١ \longrightarrow ٢\text{جـ} = ٨ \longrightarrow \boxed{\text{جـ} = ٤}$

٥٥) $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{أس}^{٢} + ٢\text{ب س} + ٢}{\text{س} - ١} = ١$ ، جد قيمة كل من أ ، ب :

الحل : $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{(\cancel{\text{س} - ١})(\text{أس} - ٢)}{\cancel{\text{س} - ١}} = ١$

$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ١}(\text{أس} - ٢) = ١ \longrightarrow \text{أ} - ٢ = ١ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٣}$

وحسب القاعدة : بما أن المقام صفر ، فإن البسط صفر

$\text{أ} + ٢\text{ب} + ٢ = ٠$

$٣ + ٢\text{ب} + ٢ = ٠ \longrightarrow \boxed{\text{ب} = \frac{-٥}{٢}}$

٥٦) إذا كانت $\lim_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}}}{\text{س} - \text{أ}} = \frac{١}{٦}$ ، جد أ :

الحل : $\lim_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\cancel{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}}}}{(\cancel{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}}})(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{أ}})} = \frac{١}{٦}$

$\frac{١}{٢\sqrt{\text{أ}}} = \frac{١}{٦} \longrightarrow ٢\sqrt{\text{أ}} = ٦$

$\sqrt{\text{أ}} = ٣ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٩}$

٥٧) إذا كانت $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{أس}^{٢} + \text{ب س} + ٤}{\text{س} - ٢} = ٦$ ، جد أ ، ب :

الحل :

٥٨) إذا كانت $\lim_{\text{س}\to ٥} \frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} + \text{أس} + \text{ب}}$ غير موجودة ، جد أ ، ب :

الحل :

٥٩) إذا كانت $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{أس^٣ + ب س - ٣}{س - ١} = ٥$ ، جد أ ، ب :

الحل : $أ + ب - ٣ = ٠ \Longleftarrow أ + ب = ٣$

	$س^٣$	$س^٢$	$س^١$	$س^٠$
	أ	٠	ب	-٣
$\boxed{١}$		أ	أ	أ + ب
	أ	أ	أ + ب	$٣ = أ + ب$

$\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س - ١)}(أس^٢ + أس + أ + ب)}{\cancel{س - ١}} = ٥$

$أ + أ + \boxed{أ + ب} = ٥ \longrightarrow أ + أ + ٣ = ٥$

$٢أ = ٢ \longrightarrow \boxed{أ = ١} \longrightarrow \boxed{ب = ٢}$

٦٠) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^٢ + ٩أ - ٣س(١ + ٣أس)}{س - ١} = -١٥$ ، جد أ :

الحل : $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^٢ + ٩أ - ٣س - ٩أس^٢}{س - ١} = -١٥$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ - ٩أ)س^٢ - ٣س + ٩أ}{س - ١} = -١٥$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س - ١)}((٣ - ٩أ)س - ٩أ)}{\cancel{س - ١}} = -١٥$

$٣ - ٩ - ٩أ = -١٥ \longrightarrow -١٨أ = -١٨ \longrightarrow \boxed{أ = ١}$

٦١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤٩^س - ٧^س}{١ - ٧^س}$:

الحل : $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٧^س)^٢ - ٧^س}{١ - ٧^س} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٧^س \cancel{(٧^س - ١)}}{\cancel{١ - ٧^س}} = -١$

٦٢) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٤^س - ٣\times٢^س + ٢}{٢^س - ٢}$:

الحل : $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢^س)^٢ - ٣\times٢^س + ٢}{٢^س - ٢}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(٢^س - ٢)}(٢^س - ١)}{\cancel{٢^س - ٢}} = ١$

٦٣) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٩^س - ٢٥^س}{٣^س - ٥^س}$:

الحل : $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(٣^س - ٥^س)}(٣^س + ٥^س)}{\cancel{٣^س - ٥^س}} = ٢$

٦٤) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣^{٢س} - ٥\times٣^س + ٦}{٣^{٣س} - ٩\times٣^س}$:

الحل :

٦٥) إذا كانت $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{هـ(س) + ٤}{س} = \dfrac{١}{٢}$

، جد $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} (هـ(س) - ٤)$:

الحل : بما أن النهاية موجودة وناتج تعويض المقام صفر ، لذلك ناتج تعويض البسط = ٠

$\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} (هـ(س) - ٤) = ٠ \longrightarrow \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} هـ(س) = -٤$

$\therefore \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} (هـ(س) - ٤) = -٤ - ٤ = -٨$

٦٦) إذا كانت $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ وكانت

$\underset{س\to٣}{\text{نهـا}} (ق(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$ ، جد ثابت (ب) :

الحل : $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}} ق(س) + ٥ = ٠ \longrightarrow \underset{س\to٣}{\text{نهـا}} ق(س) = -٥$

* $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}} ق(س) - \underset{س\to٣}{\text{نهـا}} (٢س) + ٣ب = ٧$

$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧ \longrightarrow ٣ب = ١٨ \longrightarrow \boxed{ب = ٦}$

٦٧) إذا كانت $\underset{س\to٥}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)}{س^٢ - ٢٥} = ٣$، جد $\underset{س\to٥}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)}{س - ٥}$:

الحل : $\underset{س\to٥}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)}{(س - ٥)(س + ٥)} = ٣$

مطلوب : $\underset{س\to٥}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)\times(س + ٥)}{س - ٥\ (س + ٥)}$

$= \underset{س\to٥}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)}{(س - ٥)(س + ٥)} \times \underset{س\to٥}{\text{نهـا}} (س + ٥) = ٣\times١٠ = ٣٠$

٦٨) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{س^{٢} - ٤} = ٨$ ، $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{س^{٢} - ٢س}$:

الحل :

---

٦٩) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ وكانت

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$ ، جد الثابت ب :

الحل : $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١}}{\frac{ق(س) - ٦}{س - ١}} + ب = \frac{٣}{٢}$

$\Longleftarrow \lim\limits_{س \to ١} \frac{\frac{(س - ١)(س + ٣)}{س - ١}}{\frac{ق(س) - ٦}{س - ١}} + ب = \frac{٣}{٢}$

$\frac{٤}{٨} + ب = \frac{٣}{٢} \longleftarrow ب = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} \longleftarrow \boxed{ب = ١}$

---

٧٠) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ٤}{س - ٣} = ٢$ ، جد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^{٢} ق(س) - ٣٦}{س - ٣}$:

الحل : $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^{٢} ق(س) - ٩ق(س) + ٩ق(س) - ٣٦}{س - ٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{ق(س)(س^{٢} - ٩)}{س - ٣} + \lim\limits_{س \to ٣} \frac{٩(ق(س) - ٤)}{س - ٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} ق(س) \times \lim\limits_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)}{\cancel{س - ٣}} + ٩ \times ٢$

$= ٤ \times ٦ + ١٨ = ٢٤ + ١٨ = ٤٢$

<u>نهاية الاقتران المتشعب :</u>

* إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، ٢ > س \geq ١ \\ ٢س + ٢ & ، ٤ > س \geq ٢ \\ ٦ - س & ، ٥ > س > ٤ \\ ١٥ & ، س = ٥ \end{cases}$

أ) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س) =$ غير موجودة

ب) $\lim\limits_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^{+}} (س^{٢} + ٢) = ٣$

ج) $\lim\limits_{س \to ٥} ق(س) =$ غير موجودة

د) $\lim\limits_{س \to ٥^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٥^{-}} (٦ - س) = ١$

هـ) $\lim\limits_{س \to ٤} ق(س) = \begin{cases} \lim\limits_{س \to ٤^{+}} ق(س) = ٦ - س = ٢ \\ \lim\limits_{س \to ٤^{-}} ق(س) = ٢س + ٢ = ١٠ \end{cases}$

$\therefore$ غير موجودة

و) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = \begin{cases} \lim\limits_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ٢س + ٢ = ٦ \\ \lim\limits_{س \to ٢^{-}} (س^{٢} + ٢) = ٦ \end{cases}$

$\therefore ٦$

ك) $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣} (٢س + ٢) = ٨$

ل) $\lim\limits_{س \to ٤,٥} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٤,٥} (٦ - س) = ١,٥$

---

٧١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، س > ٣ \\ ٣س + ٢ & ، س < ٣ \\ ١٠ & ، س = ٣ \end{cases}$

أوجد $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$:

الحل : $\lim\limits_{س \to ٣^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{+}} (٣س + ٢) = ١١$

$\lim\limits_{س \to ٣^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{-}} (س^{٢} + ٣) = ١٢$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة

٧٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ س} - ٥ & ، \text{س} > ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٧ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

أوجد أ التي تجعل $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{ق}(\text{س})$ موجودة :

الحل : $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^{+}} (\text{أ س} - ٥) = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^{-}} (\text{س}^{٢} + ٧)$

$٢\text{أ} - ٥ = ١١ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٨}$

---

٧٣) إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س} - ٧ & ، \text{س} > \text{أ} \\ ٣\text{س} + ١٥ & ، \text{س} < \text{أ} \end{cases}$

أوجد أ التي تجعل $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة :

الحل : $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}} (٥\text{س} - ٧) = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}} (٣\text{س} + ١٥)$

$٥\text{أ} - ٧ = ٣\text{أ} + ١٥ \longrightarrow ٢\text{أ} = ٢٢ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ١١}$

---

٧٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس} - ٣ & ، \text{س} > ٣ \\ ٣\text{س}^{٢} + \text{ب س} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

أوجد أ ، ب التي تجعل $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣} \text{ق}(\text{س}) = ١٢$:

الحل : * $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣^{+}} (\text{أس} - ٣) = ١٢$

$\underset{+٣}{٣\text{أ} - ٣} = \underset{+٣}{١٢} \longrightarrow ٣\text{أ} = ١٥ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٥}$

* $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣^{-}} (\text{أس}^{٢} + \text{ب س}) = ١٢$

$٩\text{أ} + ٣\text{ب} = ١٢ \longrightarrow ٤٥ + ٣\text{ب} = ١٢ \longrightarrow \boxed{\text{ب} = -١١}$

---

٧٥) إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ & ، \text{س} \neq ٢ \\ ١٧ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

أوجد ما يلي :

١) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٤} \text{ق}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٤} (٢\text{س} + ١) = ٩$

٢) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \text{ق}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} (٢\text{س} + ١) = ٣$

٣) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{ق}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} (٢\text{س} + ١) = ٥$

٤) $\text{ق}(٢) = ١٧$

---

٧٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٧ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

أوجد ما $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣} \text{ق}(\text{س})$

الحل : $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{(\text{س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٣)}}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ٦$

---

٧٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١٨} & ، \text{س} \leq \text{ع} \\ \text{س} + ٥ & ، \text{س} > \text{ع} \end{cases}$

جد قيمة الثابت ع التي تجعل $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{ع}} \text{ل}(\text{س})$ موجودة

الحل :

---

٧٨) إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٧ - \text{س}} - ٣}{\text{س} + ٢} & ، \text{س} < -٢ \\ ٢\text{أ} & ، \text{س} \geq -٢ \end{cases}$

وكانت $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow -٢} \text{ق}(\text{س})$ موجودة جد الثابت أ :

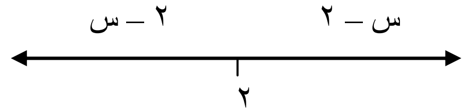
الحل :

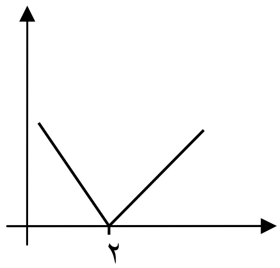
<u>نهاية المطلق :</u>

* تذكير بسيط :

٧٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ٢|$ ، اكتب $\text{ق}(\text{س})$ بصورة مجزأة :

الحل :

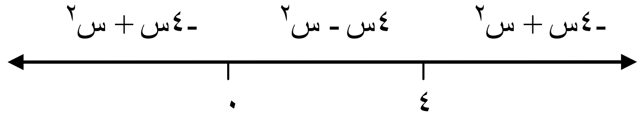




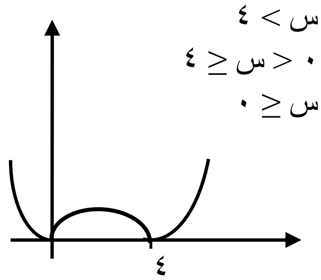
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} > ٢ \\ ٢ - \text{س} & ، \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

٨٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |٤\text{س} - \text{س}^٢|$ ، أعد تعريف $\text{ق}(\text{س})$:

الحل : $٤\text{س} - \text{س}^٢ = ٠ \longrightarrow \text{س}(٤ - \text{س}) = ٠ \longrightarrow \text{س} = ٠ ، ٤$



$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -٤\text{س} + \text{س}^٢ & ، \text{س} > ٤ \\ ٤\text{س} - \text{س}^٢ & ، ٠ < \text{س} \le ٤ \\ -٤\text{س} + \text{س}^٢ & ، \text{س} \le ٠ \end{cases}$$



* لإيجاد نهاية المطلق ننزل كل شيء كما هو إلا ما داخل المطلق ثم نعوض فيه ، فإن نتج :

أ) عدد موجب ⟵ نأخذ القاعدة كما هي

ب) عدد سالب ⟵ نأخذ القاعدة السالبة

ج) صفر ⟵ نأخذ النهاية من اليمين واليسار ونعيد التعريف

٨١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - |٣\text{س}|}{\text{س} - ٣}$:

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - (٣\text{س})}{\text{س} - ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}(\cancel{\text{س} - ٣})}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ٣$

٨٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{\text{س}^٢ - |٣\text{س}|}{\text{س} + ٣}$:

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{\text{س}^٢ - (-٣\text{س})}{\text{س} + ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{\text{س}(\cancel{\text{س} + ٣})}{\cancel{\text{س} + ٣}} = -٣$

٨٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{|٥\text{س} - ١| - ٩}{\text{س} - ٢}$:

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{٥\text{س} - ١ - ٩}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{٥\text{س} - ١٠}{\text{س} - ٢}$

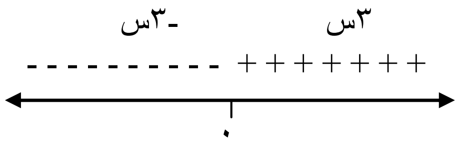
$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{٥(\cancel{\text{س} - ٢})}{\cancel{\text{س} - ٢}} = ٥$

٨٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{|\text{س} - ٦| - ٤}{\text{س} - ٢}$:

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{٦ - \text{س} - ٤}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{٢ - \text{س}}}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = -١$

٨٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}}{|٣\text{س}|}$:

الحل :



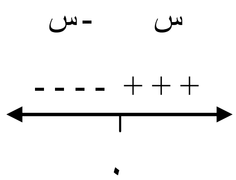
$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س}}{(٣\text{س})} = \dfrac{١}{٣}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}}{|٣\text{س}|}$: غير موجودة

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{س}}{(-٣\text{س})} = \dfrac{١}{-٣}$

٨٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^٢}{|\text{س}|}$:

الحل :



$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س}^٢}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} (\text{س}) = ٠$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{س}^٢}{-\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} (-\text{س}) = ٠$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^٢}{|\text{س}|} = ٠$

٨٧) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{|\text{س}^٢ + \text{س}|}{\text{س}} = \frac{|٠|}{٠}$

الحل : $\lim_{\text{س}\to ٠^+} \frac{\text{س}^٢ + \text{س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to ٠^+} \frac{\text{س}(\text{س} + ١)}{\text{س}} = ١$

$\lim_{\text{س}\to ٠^-} \frac{-\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to ٠^-} \frac{-\text{س}(\text{س} + ١)}{\text{س}} = -١$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س})$: غير موجودة

٨٨) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{س}^٢}}{\text{س}}$

الحل : $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{|\text{س}|}{\text{س}}$: غير موجودة

$\lim_{\text{س}\to ٠^+} \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$ ، $\lim_{\text{س}\to ٠^-} \frac{-\text{س}}{\text{س}} = -١$

٨٩) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(\sqrt{\text{س}})^٢}{\text{س}}$

الحل : $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

٩٠) $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{|\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٤|}{|\text{س} - ١|}$

الحل : $\lim_{\text{س}\to ١} \left| \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٤}{\text{س} - ١} \right| = \lim_{\text{س}\to ١} |\text{س} + ٤| = ٥$

٩١) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٩\text{س}^٣}}{\text{س}}$

الحل : $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{س}^٢(١ - ٩\text{س})}}{\text{س}}$

$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{|\text{س}|\sqrt{١ - ٩\text{س}}}{\text{س}}$

$\lim_{\text{س}\to ٠^+} \frac{\cancel{(\text{س})}\sqrt{١ - ٩\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} = ١$ ، $\lim_{\text{س}\to ٠^-} \frac{(-\cancel{\text{س}})\sqrt{١ - ٩\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} = -١$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س})$: غير موجودة

٩٢) $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}}{\text{س} - ١}$

الحل :

٩٣) $\lim_{\text{س}\to ٠} \sqrt[٣]{\frac{٤\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٣}}$

الحل : $= \lim_{\text{س}\to ٠} \text{س} \times \frac{\sqrt[٣]{٤\text{س}^٣ - ٨}}{\sqrt[٣]{\text{س}^٣}}$

$= \lim_{\text{س}\to ٠} \cancel{\text{س}} \times \frac{\sqrt[٣]{٤\text{س}^٣ - ٨}}{\cancel{\text{س}}} = -٢$

٩٤) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^٢ & ، |\text{س}| \le ٢ \\ \text{س}^٣ & ، |\text{س}| > ٢ \end{cases}$

جد $\lim_{\text{س}\to ٢} \text{ق}(\text{س})$ ، $\lim_{\text{س}\to -٢} \text{ق}(\text{س})$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^٢ & ، -٢ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^٣ & ، \text{س} > ٢ ، \text{س} < -٢ \end{cases}$

$\lim_{\text{س}\to ٢} \text{ق}(\text{س}) = ٨$

$\lim_{\text{س}\to ٢^+} \text{س}^٣ = ٨$

$\lim_{\text{س}\to ٢^-} ٢\text{س}^٢ = ٨$

$\lim_{\text{س}\to -٢} \text{ق}(\text{س})$ = غير موجودة

$\lim_{\text{س}\to -٢^+} ٢\text{س}^٢ = ٨$

$\lim_{\text{س}\to -٢^-} \text{س}^٣ = -٨$

٩٥) إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٣ - س}}{|\text{س - ٣}|} & \text{، س} \le \text{٣} \\ \text{جـ س}^{\text{٢}}\text{ - ٤} & \text{، س} > \text{٣} \end{cases}$$

وكانت $\lim_{\text{س} \to \text{٣}}$ ق(س) موجودة ، جد قيمة الثابت جـ:

الحل : $\lim_{\text{س} \to \text{٣}^+} \dfrac{\text{٣ - س}}{\text{س - ٣}} = \lim_{\text{س} \to \text{٣}^-} (\text{جـ س}^{\text{٢}}\text{ - ٤})$

-١ = ٩جـ - ٤

٩جـ = ٣

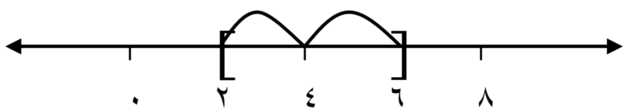
$\boxed{\text{جـ} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}}}$

<u>نهاية اقتران الأكبر عدد صحيح :</u>

* <u>تذكير خطير :</u>

٩٦) ق(س) = $\left[\dfrac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{٥}\right]$ ، س ∈ [٢، ٦] أكتب ق(س) بصورة مجزأة :

الحل : ل = $\dfrac{\text{١}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$ = ٢

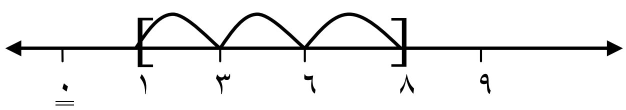


$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٦} & \text{، ٢} \le \text{س} < \text{٤} \\ \text{٧} & \text{، ٤} \le \text{س} < \text{٦} \\ \text{٨} & \text{، س} = \text{٦} \end{cases}$$

معه عدد صحيح

٩٧) ق(س) = $\sqrt{\left[\text{٨ - }\dfrac{\text{س}}{\text{٣}}\right]}$ ، س ∈ [١، ٨] أعد تعريف ق(س) :

الحل : ل = $\dfrac{\text{١}}{\left|\frac{\text{-١}}{\text{٣}}\right|} = \dfrac{\text{١}}{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}$ = ٣

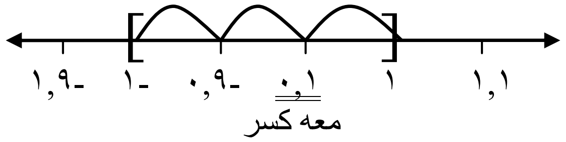


$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{٧}} & \text{، ١} \le \text{س} \le \text{٣} \\ \sqrt{\text{٦}} & \text{، ٣} < \text{س} \le \text{٦} \\ \sqrt{\text{٥}} & \text{، ٦} < \text{س} \le \text{٨} \end{cases}$$

معه عدد صحيح

٩٨) ق(س) = س [س – ٠,١] ، س ∈ [-١، ١) أعد تعريف ق(س) :

الحل : ل = ١



$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{-٢س} & \text{، -١} \le \text{س} < \text{-٠,٩} \\ \text{-١س} & \text{، -٠,٩} \le \text{س} < \text{٠,١} \\ \text{٠س} & \text{، ٠,١} \le \text{س} < \text{١} \end{cases}$$

* لإيجاد نهاية الأكبر عدد صحيح ننزل كل شيء كما هو إلا الأكبر عدد صحيح ثم نعوض فيه ، فإن كانت :

أ) الناتج كسراً فاليمين واليسار والأصل متساوي فقط نصحح الكسر .

ب) الناتج صحيحاً نجد النهاية من اليمين واليسار وذلك بإعادة التعريف في قترة تحوي ذيل النهاية .

٩٩) جد $\lim_{\text{س} \to \text{١,٥}}$ [س + ٣] :

الحل : = [٤,٥] = ٤

١٠٠) جد $\lim_{\text{س} \to \text{٤}}$ [س + ٣] :

الحل : $[\text{س + ٣}] = \begin{cases} \text{٦} & \text{، ٣} \le \text{س} < \text{٤} \\ \text{٧} & \text{، ٤} \le \text{س} < \text{٦} \end{cases}$

$\lim_{\text{س} \to \text{٤}^+} [\text{س + ٣}] = \text{٧}$

$\lim_{\text{س} \to \text{٤}^-} [\text{س + ٣}] = \text{٦}$

← $\lim_{\text{س} \to \text{٤}} [\text{س + ٣}]$ غير موجودة

١٠١) جد $\lim_{\text{س} \to \text{٤}}$ [٠,٥ س] :

الحل : $[\text{٠,٥ س}] = \begin{cases} \text{١} & \text{، ٢} \le \text{س} < \text{٤} \\ \text{٢} & \text{، ٤} \le \text{س} < \text{٦} \end{cases}$

$\lim_{\text{س} \to \text{٤}^+} [\text{٠,٥ س}] = \text{٢}$

$\lim_{\text{س} \to \text{٤}^-} [\text{٠,٥ س}] = \text{١}$

← $\lim_{\text{س} \to \text{٤}} [\text{٠,٥ س}]$ غير موجودة

١٠٢) جد $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - [س + ٦]}{س - ٣}$:

الحل : $= \underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - (٩)}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)\cancel{(س - ٣)}}{\cancel{س - ٣}} = ٦$

---

١٠٣) جد $\underset{س \leftarrow ٥^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - س[س]}{س - ٥}$:

الحل : $= \underset{س \leftarrow ٥^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٥(س)}{س - ٥} = \underset{س \leftarrow ٥^+}{\text{نهـا}} \frac{س\cancel{(س - ٥)}}{\cancel{س - ٥}} = ٥$

---

١٠٤) جد $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - [٦ - س]}{س - ٢}$:

الحل : $= \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - (٤)}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}} = ٤$

---

١٠٥) جد $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - [١٣ - س]}{س - ٣}$:

الحل : $= \underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - (٩)}{س - ٣} = ٦$

---

١٠٦) جد $\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - [س + ١٢,٧]}{س - ٤}$:

الحل : $= \underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

$= \underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهـا}} (س + ٤) - ٨$

---

١٠٧) جد $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - [س + ١,٠]س}{س - ٥}$:

---

١٠٨) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (س^٢ + ١)^{[س]}$

الحل : $\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}} (س^٢ + ١)^{(٠)} = ١$

$= \underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} (س^٢ + ١)^{(-١)} = (١)^{-١} = ١$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (س^٢ + ١)^{[س]} = ١$

---

١٠٩) $\underset{س \leftarrow ٠,٨}{\text{نهـا}} [\sqrt{٢س + ٠,٢}] = \underset{س \leftarrow ٠,٨}{\text{نهـا}} (١) = ١$

---

١١٠) جد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} [س - ٢] - [٣ - س]$

الحل : $\underset{س \leftarrow ٤^+}{\text{نهـا}} (٢) - (-٢) = ٤$

$\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهـا}} (١) - (-١) = ٢$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} [س - ٢] - [٣ - س]$: غير موجودة

---

١١١) $ق(س) = \begin{cases} |س - ١| & ، س \le ٣ \\ [س - ١] & ، س > ٣ \end{cases}$

جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} ق(س)$:

---

١١٢) جد $ق(س) = [س + ٥]$ ، $هـ(س) = [٤ - س]$ جد :

أ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ق(س)$ ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} هـ(س)$

جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ق(س) + هـ(س)$

---

١١٣) جد $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{[\frac{٢س}{٣} + ٤] + س}{|س| - ٢}$:

الحل : $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{٢ + س}{-س - ٢} = -١$

---

١١٤) جد قيمة م التي تجعل $\underset{س \leftarrow م}{\text{نهـا}} [٢س] = ٣$

الحل : نعوض مباشرة مع اختبار أطراف المتباينة الناتجة

$[٢م] = ٣$ $٣ < ٢م < ٤$

$\frac{٣}{٢} < م < ٢$

* $م = \frac{٣}{٢}$ تهمل $\underset{س \leftarrow \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} [٢س]$ غير موجودة

* $م = ٢$ تهمل $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} [٢س]$ غير موجودة

$م \in (\frac{٣}{٢} ، ٢)$

---

١١٥) $\underset{س \leftarrow م^-}{\text{نهـا}} [٢س] = ٣$ ، جد قيمة م :

الحل : $[٢م] = ٣$ $\frac{٣}{٢} < م < ٢$

* $م = \frac{٣}{٢} \longleftarrow \underset{س \leftarrow \frac{٣}{٢}^-}{\text{نهـا}} [٢س] = ٢$ تُهمل

* $م = ٢ \longleftarrow \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} [٢س] = ٣$ تُقبل

قيم $م \in (١,٥ ، ٢]$

---

١١٦) إذا كان $ق(س) = [٢ - س]$ ، أجب عن كل مما يلي :

١. جد قيم م التي تجعل $\underset{س \leftarrow م}{\text{نهـا}} ق(س)$ غير موجودة

٢. جد قيم جـ التي تجعل $\underset{س \leftarrow جـ}{\text{نهـا}} ق(س) = -١$

* نهاية الجذور

جذور فردية : مسالم

موجب سالب صفر

موجب سالب صفر

- سيتم توحيد وتوزيع الجذر الفردي على الضرب ، القسمة دائماً .

جذور زوجية : خبيث

موجب سالب صفر

موجب غير موجودة غير موجودة

$\underbrace{\text{غير موجودة}}_{\text{يمين يسار}}$

- لا يتم توحيد وتوزيع الجذر الزوجي إلا إذا كان ناتج التعويض موجب أو ناتج تعويض الجهة موجب .

* الأمثلة :

١) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣٣} \sqrt[٥]{١ - \text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣٣} \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$

٢) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣} \sqrt[٧]{\text{س} - ٣} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣} \sqrt[٧]{٠} = ٠$

٣) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢٩} \sqrt[٣]{\text{س} - ٢} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢٩} \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

٤) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\sqrt[٩]{\text{س}^٢ - ٩}}{\sqrt[٩]{\text{س}^٢ - ٢٧}} =$

$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣} \sqrt[٩]{\dfrac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ٣)}{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}} = \sqrt[٩]{\dfrac{٦}{٢٧}}$

٥) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥} \sqrt{\text{س}^٢ - ٩} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٥} \sqrt{١٦} = ٤$

٦) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٥} \sqrt{١ - \text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٥} \sqrt{-٤} =$ غير موجودة

٧) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢} \sqrt{\text{س} - ٢} = \sqrt{٠} =$ غير موجودة

- - - - - - - -   + + + + + +

غير موجودة ٢ صفر

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^+} \sqrt{\text{س} - ٢} = \sqrt{٠} = ٠$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \sqrt{\text{س} - ٢} =$ غير موجودة

٨) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣} \sqrt{٣ - \text{س}} = ٠$ (غير موجودة)

+ + + + + + + +   - - - - - - - - -

صفر ٣ غير موجودة

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣^+} \sqrt{٣ - \text{س}} =$ غير موجودة

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣^-} \sqrt{٣ - \text{س}} = ٠$

٩) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣^+} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٩}}{\sqrt{\text{س} - ٣}} =$

$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣^+} \sqrt{\dfrac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٣}}} = \sqrt{٦}$

١٠) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \dfrac{\sqrt{٢ - \text{س}}}{\sqrt{٤ - \text{س}^٢}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \dfrac{\cancel{٢ - \text{س}}}{(\cancel{٢ - \text{س}})(٢ + \text{س})} = \dfrac{١}{٢}$

١١) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٧} \dfrac{\sqrt{\text{س} - ٧}}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤٩}} =$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٧^+} \sqrt{\dfrac{\text{س} - ٧}{\text{س}^٢ - ٤٩}} = \sqrt{\dfrac{١}{١٤}}$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٧^-} \sqrt{\dfrac{\text{س} - ٧}{\text{س}^٢ - ٤٩}}$

غير موجودة

الأمثلة متنوعة :

١. $\text{نهـا}_{\text{س}\to م} [\text{س} + ٥] - [\text{س} - ٣]$

$= \text{نهـا}_{\text{س}\to م} [م] + ٥ - [م] - ٣ = ٢$

٢. $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٥}{\text{س} - ٢} = \dfrac{\sqrt{٠} - ٥}{٠ - ٢}$ غير موجودة

- - - - - - - -   + + + + + +

٠

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^+} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٥}{\text{س} - ٢} = \dfrac{٠ - ٥}{٠ - ٢} = \dfrac{٥}{٢}$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^-} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٥}{\text{س} - ٢} =$ غير موجودة

* اختبار نهاية الاقتران النسبي :

١) جد $\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{٦}}{\sqrt{\text{س}}} - \text{٣}}{\text{س} - \text{٤}}$:

الحل : $= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٦} - \text{٣}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{س} - \text{٤}} = \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٦} - \text{٣}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}\,(\text{س} - \text{٤})}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٦} - \text{٣}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}\,(\text{س} - \text{٤})} \times \dfrac{\text{٦} + \text{٣}\sqrt{\text{س}}}{\text{٦} + \text{٣}\sqrt{\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣٦} - \text{٩س}}{\sqrt{\text{س}}\,(\text{س} - \text{٤})(\text{٦} + \text{٣}\sqrt{\text{س}})}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٩}(\text{٤} - \cancel{\text{س}})^{\text{-١}}}{\sqrt{\text{س}}\,(\cancel{\text{س} - \text{٤}})(\text{٦} + \text{٣}\sqrt{\text{س}})}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{-٩}}{\sqrt{\text{س}}\,(\text{٦} + \text{٣}\sqrt{\text{س}})} = \dfrac{\text{-٩}}{(\text{١٢})\text{٢}} = \dfrac{\text{-٩}}{\text{٢٤}} = \dfrac{\text{-٣}}{\text{٨}}$

---

٢) جد $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٥س} - \sqrt{\text{س}} - \text{٤}}{\sqrt{\text{س}} - \text{١}}$:

الحل : $= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\sqrt{\text{س}} - \text{١}})(\text{٥}\sqrt{\text{س}} + \text{٤})}{\cancel{\sqrt{\text{س}} - \text{١}}} = \text{٥} + \text{٤} = \text{٩}$

---

٣) جد $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{٢}} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}}}{\text{س} - \text{٢}}$:

الحل : $= \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \underbrace{\dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{٢}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٢}}}_{\text{①}} - \underbrace{\dfrac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٢}}}_{\text{②}}$

① $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{٢}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٢}} - \dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{٢}} + \text{٢}}{\sqrt{\text{س} + \text{٢}} + \text{٢}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \text{٢}}{(\text{س} - \text{٢})(\sqrt{\text{س} + \text{٢}} + \text{٢})} = \dfrac{\text{١}}{\text{٤}}$

② $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + \text{٦} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٢}} - \dfrac{(\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}})^{\text{٢}} + \text{٢}\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}} + \text{٤}}{(\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}})^{\text{٢}} + \text{٢}\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}} + \text{٤}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \text{٢}}{(\text{س} - \text{٢})((\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}})^{\text{٢}} + \text{٢}\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٦}} + \text{٤})}$

$= \dfrac{\text{١}}{\text{٤}\times\text{٤}\times\text{٤}} = \dfrac{\text{١}}{\text{١٢}}$

∴ النهاية : $\dfrac{\text{١}}{\text{٤}} - \dfrac{\text{١}}{\text{١٢}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{١٢}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٦}}$

---

٤) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{س} + \text{١}] & \text{،}\ \text{أ} > \text{س} \\ \text{١٠} - [\text{س}] & \text{،}\ \text{أ} < \text{س} \end{cases}$

$\text{أ} \in \text{ص}$ ، وكانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}$ موجودة ، جد أ :

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{أ}^{+}}{\text{نها}}\ \text{١٠} - [\text{س}] = \underset{\text{س}\to\text{أ}^{-}}{\text{نها}}\ [\text{س} + \text{١}]$

$\text{١٠} - (\text{أ}) = (\text{أ} + \text{١} - \text{١})$

$\text{١٠} = \text{٢أ}$

$\text{أ} = \text{٥}$

---

٥) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{س}] & \text{،}\ \text{أ} < \text{س} \\ \text{٦} - [\text{س}] & \text{،}\ \text{أ} > \text{س} \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}$ موجودة ، $\text{أ} \notin \text{ص}$ ، جد أ :

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{أ}^{+}}{\text{نها}}\ [\text{س}] = \underset{\text{س}\to\text{أ}^{-}}{\text{نها}}\ \text{٦} - [\text{س}]$

$[\text{أ}] = \text{٦} - [\text{أ}]$

$\text{٢}[\text{أ}] = \text{٦}$

$[\text{أ}] = \text{٣}$

$\text{٣} < \text{أ} < \text{٤}$

٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٦س^٤ + ١٨س^٢}{٢س^٢ - ٣س^٣} \longrightarrow \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢(٦س^٢ + ١٨)}{س^٢(٢ - ٣س)}$

أ) -٦ ب) -٢ ج) ٣ د) ٩

---

٧) إذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س) - ٩}{س - ٣} = ٤$ ، جد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س) - س^٢}{س - ٣}$:

---

٨) إذا كانت $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$ وكان ق(س) كثير حدود

، جد $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} (ق(س) + ٢س)$:

---

٩) جد كلاً من النهايات التالية :

أ) $\underset{س \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^٢ - ٨١}{٨ - س}$

ب) $\underset{س \to }{\text{نهـا}} \dfrac{٨س^٣ - ١}{\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}}$

ج) $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س - ٥} + ٢}{س^٣ + ٢٧}$

---

١٠) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٢س^٢ - ٣س + ١} & ، س > ١ \\ ب & ، س \le ١ \end{cases}$

فجد قيمة ب ، علماً $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة :

---

١١) جد كلاً من النهايات التالية :

أ) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{|س - ٣| - ١}{س - ٢}$

ب) $\underset{س \to \frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س - [س]}{٤س^٢ - ٢٥}$

ج) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤ - ٤س + س^٢}}{٢ - س}$

د) $\underset{س \to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س - ٧}}{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}$

هـ) $\underset{ص \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^٢ - ١}$

---

١٢) $\underset{س \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{س\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨}$:

---

١٣) إذا كان $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{س + ٢} & ، س > ك \\ ٣س & ، س < ك \end{cases}$

ما مجموعة قيم ك التي تجعل $\underset{س \to ك}{\text{نهـا}} د(س)$ موجودة :

الحل :

---

١٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س}{٩ - س^٢} - \dfrac{٣س}{س^٣ - ٩س} \right)$

---

١٥) إذا كان أ ، ب $\in$ ح ، وكان :

$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ - أس + ٣}{س - ١} & ، س > ١ \\ ب س - ٥ & ، س < ١ \end{cases}$

فجد قيم أ ، ب التي تجعل $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة :

---

١٦) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{أس^٢ - ب س - ٦}{س - ٢} = ٥$

فجد قيم كل من أ ، ب :

---

١٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥^{س+١} - ٥}{٢٥^{س} - ١}$:

نهاية الاقترانات الدائرية :

١) الأصل في إيجاد نهاية الدائري هو التعويض المباشر

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \text{جا}(\text{س}) + \text{س} = \text{جا}\,\frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٢} = ١ + \frac{\pi}{٢}$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٣}} (\text{ظا س} + \text{قا س}) = \text{ظا}\,\frac{\pi}{٣} + \text{قا}\,\frac{\pi}{٣}$$

$$= \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{٣}}{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣}} + \frac{١}{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣}} = \sqrt{٣} + ٢$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\pi}$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} (٢\text{جا س} - \text{ظا}\,\frac{١}{٢}\text{س}) = ٢ \times ١ - ١ = ١$$

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا س}}{\text{س}} = \frac{١}{٠} = \text{غير موجودة}$$

المبادئ الأساسية :

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$$

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$$

حيث س زاوية بالتقدير الدائري

الأسئلة السريعة :

١) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

٢) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

توضيح :

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{جا أ س}}{\text{أ س}} \times \text{أ س}}{\text{ب س}} = ١ \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

٣) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{٣ س}} =$

أ) $\frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٥}$ ج) ٥ د) ٣

٤) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا ٧ س}}{\text{٢ س}} =$

أ) ٧ ب) ٢ ج) $\frac{٢}{٧}$ د) $\frac{٧}{٢}$

٥) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{جا}(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} =$

أ) ٠ ب) ١ ج) س د) ٢

٦) $\lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{جا}(\pi - \text{س})}{\pi - \text{س}} =$

أ) π ب) ٠ ج) ١ د) س

٧) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{جا}(\text{س} - ١)}{\text{س}^٢ - ١}$

الحل : $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\frac{\text{جا}(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} \times (\text{س} - ١)}{\text{س}^٢ - ١}$

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س} - ١}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

$$= ١ \times \lim_{\text{س} \to ١} \frac{١}{\text{س} + ١} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

٨) $\lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{جا}(\pi - \text{س})}{\pi^٢ - \text{س}^٢}$

الحل : $\lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\frac{\text{جا}(\pi - \text{س})}{\pi - \text{س}} \times (\pi - \text{س})}{\pi^٢ - \text{س}^٢}$

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\pi - \text{س}}{\pi^٢ - \text{س}^٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\pi - \text{س}}{(\text{س} + \pi)(\pi - \text{س})} = \frac{١}{٢\pi}$$

٩) $\underset{\text{س}\to\text{٩}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,(\sqrt{\text{س}}-\text{٣})}{\text{س}-\text{٩}} = \dfrac{\text{٠}}{\text{٠}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٩}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا}\,(\sqrt{\text{س}}-\text{٣})}{\sqrt{\text{س}}-\text{٣}} \times \sqrt{\text{س}}-\text{٣}}{\text{س}-\text{٩}}$

$= \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \underset{\text{س}\to\text{٩}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-\text{٣}}{(\sqrt{\text{س}}-\text{٣})(\sqrt{\text{س}}+\text{٣})}$

$= \text{١} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٦}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٦}}$

---

١٠) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,(\text{ظا ٥ س})}{\text{س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا}\,(\text{ظا ٥ س})}{\text{ظا ٥ س}} \times \text{ظا ٥ س}}{\text{س}}$

$= \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٥ س}}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{ظا ٥ س}}{\text{٥ س}} \times \text{٥ س}}{\text{س}} = \dfrac{\text{٥ س}}{\text{س}} = \text{١} \times \text{٥} = \text{٥}$

---

١١) جد $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})}{\text{ظا}\,(\text{س}^{\text{٣}}-\text{٨})}$

الحل :

---

١٢) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٥ س} + \text{ظا ٧س}}{\text{٣س} + \text{جا ١٢س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا ٥ س}}{\text{٥ س}} \times \text{٥ س} + \dfrac{\text{ظا ٧س}}{\text{٧ س}} \times \text{٧ س}}{\text{٣س} + \dfrac{\text{جا ١٢س}}{\text{١٢س}} \times \text{١٢ س}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٥ س} + \text{٧س}}{\text{٣س} + \text{١٢س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١٢س}}{\text{١٥س}} = \dfrac{\text{١٢}}{\text{١٥}}$

<u>تذكير</u> :

$\text{جا}^{\text{٢}}\,\text{م س} = \text{جا م س} \times \text{جا م س}$

$\text{م س}^{\text{٢}} = \text{م س} \times \text{س}$

---

١٣) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\,\text{٥ س}}{\text{٣ س}^{\text{٢}}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا٥ س}}{\text{٥ س}} \times \text{٥ س} \times \dfrac{\text{جا٥ س}}{\text{٥ س}} \times \text{٥ س}}{\text{٣ س}^{\text{٢}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢٥ س}^{\text{٢}}}{\text{٣ س}^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{٢٥}}{\text{٣}}$

<u>تزويدي</u> :

١٤) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\,\text{٣ س}}{\text{٥ س}^{\text{٢}} + \text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{٢ س}}$

الحل :

---

١٥) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٦س جا س} + \text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جا}^{\text{٣}}\,\text{٢ س}}$

الحل :

١٦) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٥ س}}{\text{س}^{\text{٣}}\text{ - ٣ س}^{\text{٢}}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا٥ س}}{\text{٥ س}} \times \text{٥ س} \times \dfrac{\text{جا٥ س}}{\text{٥ س}} \times \text{٥ س}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{(س - ٣)}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢٥ س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{(س - ٣)}} = \dfrac{\text{٢٥}}{\text{-٣}} = \dfrac{\text{-٢٥}}{\text{٣}}$

<u>أسئلة المتطابقات</u> :

$\text{١ - جتا}^{\text{٢}}\text{س = جا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\text{١ - جا}^{\text{٢}}\text{س = جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

١٧) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا}^{\text{٢}}\text{ ٣ س}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ ٣ س}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا٣ س}}{\text{٣ س}} \times \text{٣ س} \times \dfrac{\text{جا٣ س}}{\text{٣ س}} \times \text{٣ س}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٩ س}^{\text{٢}}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{٩}}{\text{٥}}$

١٨) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١ - جتا س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{(١ - جتاس) (١ + جتاس)}}{\text{١ - جتا س}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \text{(١ + جتاس) = ١ + ١ = ٢}$

<u>تزويدي</u> :

١٩) $\underset{\text{س}\to\pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١ + جتا س}}$

الحل :

٢٠) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{١ - جتا س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{(١ - جتاس)(١+ جتاس+ جتا}^{\text{٢}}\text{س)}}{\text{١ - جتا س}} = \text{٣}$

٢١) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١ - جا}^{\text{٣}}\text{س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{(١ - جاس)(١+ جاس)}}{\text{(١ - جاس)(١+ جاس + جا}^{\text{٢}}\text{س)}}$

$= \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$

٢٢) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س - ١}}{\text{٤جتا}^{\text{٢}}\text{س - ٣}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س - ١}}{\text{٤(١- جا}^{\text{٢}}\text{س) - ٣}}$

$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س - ١}}{\text{٤- ٤جا}^{\text{٢}}\text{س - ٣}} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س - ١}}{\text{١- ٤جا}^{\text{٢}}\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٦}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س - ١}}{\text{(١- ٢جاس) (١+ ٢جاس)}} = \dfrac{\text{-١}}{\text{٢}}$

<u>المتطابقات</u>

$\text{١ - جتا ٢ س = ٢جا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\text{١ - جتا ٦ س = ٢جا}^{\text{٢}}\text{٣ س}$

$\text{١ + جتا ٢ س = ٢ جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\text{١ + جتا ٤ س = ٢ جتا}^{\text{٢}}\text{٢ س}$

٢٣) جد قيمة $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ + جتا ٢ س}}{\text{١ - جا س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢ جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١ - جا س}} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢(١ - جا}^{\text{٢}}\text{س)}}{\text{١ - جا س}}$

$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢(١ - جاس) (١ + جاس)}}{\text{١ - جا س}}$

$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \text{٢(١ + جاس) = ٢(١ + جا } \frac{\pi}{\text{٢}} \text{) = ٢×٢ = ٤}$

٢٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}٦س}{٧\, س^{٢}}$

الحل : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{جا}^{٢}٣س}{٧\, س^{٢}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{جا}\,٣س \times \text{جا}\,٣س}{٧\, س \times س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢ \times \dfrac{\text{جا}\,٣س}{٣\,س} \times ٣س \times \dfrac{\text{جا}\,٣س}{٣\,س} \times ٣\,س}{٧\, س \times س} = \dfrac{١٨}{٧}$

٢٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}\,س}{س^{٢}}$

الحل :

__المتطابقات__ :

$\text{جا}\,س - \text{جا}\,ص = ٢\,\text{جتا} \dfrac{س + ص}{٢}\ \text{جا} \dfrac{س - ص}{٢}$

$\text{جتا}\,س - \text{جتا}\,ص = -٢\,\text{جا} \dfrac{س + ص}{٢}\ \text{جا} \dfrac{س - ص}{٢}$

__تمهيد__ :

$\Longleftarrow \underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,(س - م)}{س - م} = ١$

$\Longleftarrow \underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{جا}\,٣س - ٣م}{٢}}{س - م} = \dfrac{٣}{٢}$

٢٦) أوجد $\underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,٧س - \text{جا}\,٧م}{س - م}$

الحل :

$\underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{٢\,\text{جتا}\left(\dfrac{٧س + ٧م}{٢}\right) \times \dfrac{\text{جا}\left(\dfrac{٧س - ٧م}{٢}\right)}{\dfrac{٧س - ٧م}{٢}} \times \dfrac{٧س - ٧م}{٢}}{س - م}$

$= \underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\left(\dfrac{٧س + ٧م}{٢}\right) \times ٧\,(س - م)}{س - م}$

$= \text{جتا}\,(٧م) \times ٧ = ٧\,\text{جتا}\,(٧م)$

٢٧) $\underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\,٢س - \text{جتا}\,٢م}{س - م}$

الحل :

$\underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{-٢\text{جا}\left(\dfrac{٢س + ٢م}{٢}\right) \times \dfrac{\text{جا}\left(\dfrac{٢س - ٢م}{٢}\right)}{\dfrac{٢س - ٢م}{٢}} \times \dfrac{٢س - ٢م}{٢}}{س - م}$

$= \underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{-\,\text{جا}\left(\dfrac{٢س + ٢م}{٢}\right) \times ٢(س - م)}{س - م} = -\,\text{جا}\,(٢م) \times ٢$

٢٨) جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\,٦س - \text{جتا}\,٢س}{٥\, س^{٢}}$

الحل :

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-٢\,\text{جا}\left(\dfrac{٦س + ٢س}{٢}\right) \text{جا}\left(\dfrac{٦س - ٢س}{٢}\right)}{٥\, س^{٢}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-٢\,\text{جا}\,(٤س)\ \text{جا}\,(٢س)}{٥\, س^{٢}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-٢ \times \dfrac{\text{جا}\,(٤س)}{٤س} \times ٤س \times \dfrac{\text{جا}\,(٢س)}{٢س} \times ٢س}{٥\, س^{٢}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-١٦\, س^{٢}}{٥\, س^{٢}} = \dfrac{-١٦}{٥}$

٢٩) أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\,س - \text{جا}\,س}{س^{٣}}$

الحل :

٣٠) أوجد $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٢س - ٢جا س}}{\text{س}^{٣}}$

الحل : $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س جتا س - ٢جا س}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س (جتا س - ١)}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا س} \times (-\text{٢ جا}^{٢} \, \frac{١}{٢}\text{س})}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{-٤\,\frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{س} \times \left(\frac{\text{جا} (\frac{١}{٢}\text{س})}{\frac{١}{٢}\text{س}} \times \frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٢}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{-٤\,\text{س} \times \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}} = -١$

٣١) $\underset{\frac{\pi}{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٢ س - جتا ٢ س - ١}}{\text{جا س - جتا س}}$

الحل : $\underset{\frac{\pi}{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢ جاس جتا س - (٢ جتا}^{٢}\text{س - ١) - ١}}{\text{جا س - جتا س}}$

$= \underset{\frac{\pi}{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢ جا س جتا س - ٢ جتا}^{٢}\text{س + ١ - ١}}{\text{جا س - جتا س}}$

$= \underset{\frac{\pi}{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢ جتاس (جا س - جتاس)}}{\text{جا س - جتا س}}$

$= ٢ \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}} = \dfrac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

٣٢) $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س - جتا}^{٢}\text{ ٤س}}{\text{س}^{٢}}$

الحل: $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{ ٤س}}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} \times \text{س}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{جا٤س}}{\text{٤ س}} \times \text{٤س}\right)^{٢}}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{١٦س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١٧س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = ١٧$

٣٣) $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س - جتا ٤س}}{\text{س}^{٢}}$

الحل: $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{ س + ٢جا}^{٢}\text{ ٢س}}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} \times \text{س}\right)^{٢} + ٢\left(\frac{\text{جا٢س}}{\text{٢ س}} \times \text{٢س}\right)^{٢}}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{٨ س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٩س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = ٩$

٣٤) $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{ ٤س - جتا}^{٢}\text{ ٥س}}{\text{س}^{٢}}$

الحل:

٣٥) $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ + جتا٤س - ٢جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

الحل: $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا ٤س - جتا ٢س}}{\text{س}^{٢}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{-٢ جا ٣س جا س}}{\text{س} \times \text{س}} = -٢ \times ٣ \times ١ = -٦$

٣٦) جد $\underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (س + ٢}\pi\text{)}}{\text{س}}$

الحل : $= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س جتا ٢}\pi\text{ + جتا س جا ٢}\pi}{\text{س}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س} \times ١ + \text{جتا س} \times ٠}{\text{س}}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

٣٧) جد $\underset{\pi\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س - }\pi}$

الحل : $\underset{\pi\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (}\pi\text{ - س)}}{\text{س - }\pi}$

$= \underset{\pi\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا (}\pi\text{ - س)}}{\pi\text{ - س}} \times (\pi\text{ - س})}{\text{س - }\pi}$

$= \underset{٠\leftarrow\text{ص}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \underset{\pi\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi\text{ - س}}{\text{س - }\pi} = ١ \times -١ = -١$

٣٨) أوجد $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا س}}{\frac{\pi}{2}-\text{س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,(\frac{\pi}{2}-\text{س})}{\frac{\pi}{2}-\text{س}} = \underset{\text{ص}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = 1$

٣٩) أوجد $\underset{\text{س}\to2}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}\,\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س}-2}$

الحل : $\underset{\text{س}\to2}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س}-2}$

$$\underset{\text{س}\to2}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\text{س}})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\text{س}}}\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\text{س}}\right)}{\text{س}-2}$$

$$= \underset{\text{ص}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \underset{\text{س}\to2}{\text{نها}}\ \frac{\pi\,(\text{س}-2)}{(2\text{س})\,(\text{س}-2)}$$

$$= 1 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

الحالة المباشرة :

٤٠) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

أ) 1 ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{2}{\pi}$ د) 0

٤١) $\underset{\text{س}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا س}}{\text{س}+\pi}$

أ) $\frac{1}{\pi}$ ب) π ج) 1 د) $\frac{-1}{\pi}$

❖ لاحظ أن $\underset{\text{س}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ في الحالة العادية تقسم إلى ثلاث حالات:

أ) $\underset{\text{س}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1 \longrightarrow \underset{\text{س}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

ب) إذا كانت س بالدرجات :

$\underset{\text{س}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{\pi}{180}$

$\underset{\text{س}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\pi}{801}$

$\underset{\text{س}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{أس}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{180}{\pi}$

ج) التعويض المباشر :

$\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

$\underset{\text{س}\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{0}{\pi} = 0$

٤٢) $\underset{\text{س}\to1}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,(\frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س}-1}$

الحل : ا

$$\underset{\text{س}\to1}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جا}(\pi-\frac{\pi}{\text{س}})}{\pi-\frac{\pi}{\text{س}}}\times\left(\pi-\frac{\pi}{\text{س}}\right)}{(\text{س}-1)}$$

$$= \underset{\text{ص}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \underset{\text{س}\to1}{\text{نها}}\ \frac{\pi\,(\text{س}-1)}{(\text{س})\,(\text{س}-1)} = 1\times\pi = \pi$$

٤٣) $\underset{\text{س}\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظتا}(\frac{\text{س}}{2})}{\pi-\text{س}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}(\frac{\text{س}}{2})}{\text{جا}(\frac{\text{س}}{2})\,(\pi-\text{س})}$

$$= \underset{\text{س}\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{\text{س}}{2})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\text{س}}{2}}\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\text{س}}{2}\right)}{\text{جا}(\frac{\text{س}}{2})\,(\pi-\text{س})}$$

$$= \underset{\text{ص}\to0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times \underset{\text{س}\to\pi}{\text{نها}}\ \frac{(\pi-\text{س})^{2}}{2\,(\text{جا}\,\frac{\text{س}}{2})\,(\pi-\text{س})}$$

$$= 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

٤٤) $\underset{\text{س}\to2}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}-2}{\text{ظا}(\pi\,\text{س})}$

الحل :

٤٥) $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{س - \frac{\pi}{٤}}$

الحل : $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{س - \frac{\pi}{٤}} \times \dfrac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جا س} + \text{جتا س})}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{- \text{جتا ٢ س}}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جا س} + \text{جتا س})}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{- \text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جا س} + \text{جتا س})}$

$= - \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا ص}}{ص} \times \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\frac{\pi}{٢} - ٢س}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جا س} + \text{جتا س})}$

$= -١ \times \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{-٢(س - \frac{\pi}{٤})}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جا س} + \text{جتا س})}$

$= -١ \times \dfrac{-٢}{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}} = \dfrac{٢\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٢}$

---

٤٦) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{١ + \text{جتا ٢س}}{(\pi - ٢س)^{٢}}$

الحل :

---

٤٧) جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{قا س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}$

الحل : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{قا س}}{\text{قا}^{٢}\text{س} - ١}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{قا س}}{(\text{قاس} - ١)(\text{قاس} + ١)} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-١}{\text{قاس} + ١}$

$= \dfrac{-١}{\frac{١}{\text{جتا س}} + ١} = \dfrac{-١}{٢}$

---

٤٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا ٦س}}}{س}$

الحل : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا ٦س}}}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢\text{جا}^{٢}\text{٣س}}}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢}\,|\text{جا ٣س}|}{س}$

$= \underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}} \dfrac{+\sqrt{٢}\,\text{جا ٣س}}{س} = \sqrt{٢} \times ٣$

$= \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}} \dfrac{-\sqrt{٢}\,\text{جا ٣س}}{س} = -\sqrt{٢} \times ٣$

$\therefore \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا ٦س}}}{س}$ غير موجودة

---

٤٩) $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{١ - \sqrt{٢}\,\text{جا س}}{١ - \sqrt{٢}\,\text{جتا س}}$

الحل :

$\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{١ - \sqrt{٢}\,\text{جا س}}{١ - \sqrt{٢}\,\text{جتا س}} \times \dfrac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جا س}}{١ + \sqrt{٢}\,\text{جا س}} \times \dfrac{١ + \sqrt{٢}\,\text{جتا س}}{١ + \sqrt{٢}\,\text{جتا س}}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{(١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س})\,(٢)}{(١ - ٢\text{جتا}^{٢}\text{س})\,(٢)} = \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا ٢س}}{- \text{جتا ٢س}} = -١$

---

٥٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \sqrt{\text{جتا س}}}{\text{س جا س}}$

الحل : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \sqrt{\text{جتا س}}}{\text{س جا س}} \times \dfrac{١ + \sqrt{\text{جتا س}}}{١ + \sqrt{\text{جتا س}}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(١ - \text{جتاس})}{\text{س جا س}\,(١ + \sqrt{\text{جتا س}})}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}{\text{س جا س}} \times \dfrac{١}{١ + \sqrt{\text{جتا س}}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\,\text{جا}\frac{س}{٢}\,\text{جا}\frac{س}{٢}}{\text{س جا س}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= ٢ \times \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{١}{٤}$

٥١) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\,\text{جاس} - \sqrt{3}}{2\,\text{جتاس} - 1}$

أ) $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ د) $-\sqrt{3}$

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\,\text{جاس} - \sqrt{3}}{2\,\text{جتاس} - 1} \times \dfrac{2\,\text{جاس} + \sqrt{3}}{2\,\text{جاس} + \sqrt{3}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{4\,\text{جا}^2\text{س} - 3}{(2\,\text{جتاس} - 1) \times 2\sqrt{3}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{4 - 4\,\text{جتا}^2\text{س} - 3}{(2\,\text{جتاس} - 1) \times 2\sqrt{3}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 4\,\text{جتا}^2\text{س}}{(2\,\text{جتاس} - 1) \times 2\sqrt{3}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{(1 - 2\,\text{جتاس})\,(1 - 2\,\text{جتاس})}{(2\,\text{جتاس} - 1) \times 2\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

❖ **متطابقة** :

$1 - \text{جا}\,2\text{س} = (\text{جتاس} - \text{جاس})^2$

$1 - \text{جا}\,2\text{س} = (\text{جاس} - \text{جتاس})^2$

٥٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \text{جا}\,2\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^2}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \text{جاس} - \text{جتاس} = \text{جا}\,\dfrac{\pi}{4} - \text{جتا}\,\dfrac{\pi}{4} = 0$

٥٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{س}\,(\text{ظتا}\,5\text{س} - \text{قتا}\,3\text{س})$

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{س} \left(\dfrac{1}{\dfrac{\text{ظا}\,5\text{س}}{5\text{س}} \times 5\text{س}} - \dfrac{1}{\dfrac{\text{جا}\,3\text{س}}{3\text{س}} \times 3\text{س}} \right)$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{س} \left(\dfrac{1}{5\text{س}} - \dfrac{1}{3\text{س}} \right)$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \left(\dfrac{\text{س}}{5\text{س}} - \dfrac{\text{س}}{3\text{س}} \right) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{-2}{15}$

٥٤) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{قاس} - 1}{\text{س}^2}$

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{قاس} - 1}{\text{س}^2} \times \dfrac{\text{قاس} + 1}{\text{قاس} + 1}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{قا}^2\text{س} - 1}{\text{س}^2\,(\text{قاس} + 1)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ظا}^2\text{س}}{\text{س}^2\,(\text{قاس} + 1)} = 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

٥٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{قا}^2\text{س} - \text{جتا}^2\,4\text{س}}{\text{س}^2}$

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{1 + \text{ظا}^2\text{س} - \text{جتا}^2\,4\text{س}}{\text{س}^2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا}^2\,4\text{س} + \text{ظا}^2\text{س}}{\text{س}^2} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{17\,\text{س}^2}{\text{س}^2} = 17$

٥٦) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا}\,\text{أ}\,\text{س}}{2\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ظا}\,3\text{س}}{\text{ب}\,\text{س} - 2\,\text{س}} = 6$

جد قيمة الثابتين أ ، ب :

الحل : $\dfrac{\text{أ}}{2} = 6 \longleftarrow \text{أ} = 12$

$\dfrac{3}{\text{ب} - 2} = 6 \longleftarrow 3 = 6\,\text{ب} - 12$

$15 = 6\,\text{ب} \longleftarrow \text{ب} = \dfrac{15}{6} \longleftarrow \text{ب} = \dfrac{5}{6}$

٥٧) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \text{جاس}}{(2\,\text{س} - \pi)^2}$

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \text{جاس}}{(2\,\text{س} - \pi)^2} \times \dfrac{1 + \text{جاس}}{1 + \text{جاس}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جتا}^2\text{س}}{(2\text{س} - \pi)^2\,(2)} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\text{جتاس}}{2\,\text{س} - \pi} \right)^2 \times \dfrac{1}{2}$

$= \left(\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}{(\frac{\pi}{2} - \text{س})2} \right)^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

الاتصال ... وله أربعة أشكال :

١- الاتصال من الرسم .
٢- الاتصال عند نقطة .
٣- الاتصال بشكل عام .
٤- نظريات في الاتصال .

أولا : الاتصال من الرسم .

ونعتبر الرسمة لاقتران متصل إذا كانت خالية من الحلقة .. والقفزة .. واللعنة ،، أي أن الرسمة سليمة .

ثانياً : الاتصال عند نقطة .

ويجب أن نفرق بين النقطة إذا كانت طرف .. ونقطة التحول .. والنقطة العادية .. ولكل منهم شروط خاصة ..

ويكون الاقتران متصل عند نقطة .. إذا كان معرفاً عندها ونهايته

١- معرفاً عندها .
٢- تكون النهاية عندها موجودة .
٣- نقارن قيمة النهاية بقيمة الصورة ونقول أنه متصل عند التساوي وغير متصل عند الاختلاف .

أما بالنسبة للاتصال عند بداية الفترة .. فيكون الاقتران متصل إذا كانت الصورة تساوي النهاية من اليمين .. ويكون متصل عند نهاية الفترة إذا كانت الصورة تساوي النهاية من اليسار .

ثالثاً : الاتصال بشكل عام .

وهذا لا بد من أن نميز بين الاقتران المعرف على فترة .. فإذا كان متصل في جميع النقاط داخل الفترة وعند طرف البداية متصل من اليمين وعند طرف النهاية متصل من اليسار وعند ذلك يدعى الاقتران متصل على فترة أو على مجاله .

ويدعى الاقتران متصل على ح إذا كان متصل عند كل النقاط التي تنتمي لها .. وهناك اقترانات متصلة دائما منها ..

١- كثيرات الحدود.
٢- اقتران القيمة المطلقة .
٣- الجذور الفردية .
٤- اقتران الجيب والجتا (باقي الاقترانات الدائرية تكتب على صورة جيب وجتا على صورة اقتران نسبي) .

نقاط عدم الاتصال ..

١- في الاقتران الكسري نهتم بأصفار المقام .
٢- أكبر عدد صحيح نهتم بنقاط التحول .
٣- الجذور الزوجية يكون اتصالها حسب المجال .

في الاقترانات المتشعبة ندرس الاتصال في

١- القواعد : ونهتم بها بدون يساوي أو فترة مفتوحة .
٢- التحول : ونقارن بين الصورة والنهاية .
٣- عند الأطراف : نهتم بالاتجاه .

ملاحظة : نهمل الطرف في حالة الفترة المفتوحة

رابعاً : نظريات الاتصال .

إذا كان كلا الاقترانيين متصل .. فإن جمعهم وطرحهم وضربهم متصل .. وتعتبر القسمة أيضا متصلة حيث يتم استثناء صفر المقام .

ملاحظات :

١- لا تعكس النظرية .. فقد يكون اقترانا ناتجاً عن جمع اقترانيين غير متصلين .. متصلاً .
٢- لا نستطيع الحكم على اتصال مجموع غير متصلين إلا بعد جمعهم وكذلك الحال بالنسبة للطرح الضرب .

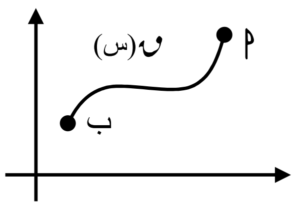
متصل + متصل = متصل
غير متصل + غير متصل = لا نحكم إلا بعد الجمع

شروط الاتصال :

١) ق (م) موجودة لها صورة معرفة
٢) نهـا س←م ق(س) موجودة
٣) نهـا س←م ق(س) = ق (م)

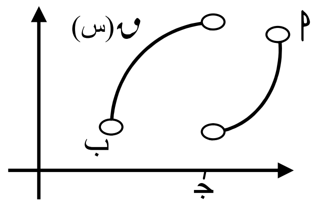
* الاتصال من الرسم :

١)



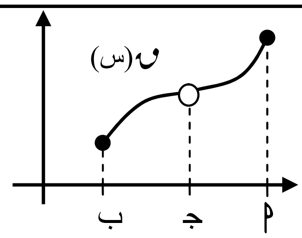
- ق(س) متصل على الفترة [أ ، ب] .
- في هذا الشكل إذا وضعنا القلم عند أ فإننا نصل الى النقطة ب دون رفع القلم ، أي أن الاقتران متصل على الفترة [أ ، ب] .

٢)



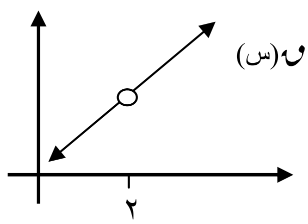
- ق(س) ليس متصل عند س = جـ .
- في هذا الشكل لا نستطيع أن نصل من أ الى ب إلا إذا رفعنا القلم عند جـ فيكون الاقتران غير متصل (منفصل) عند جـ .

٣)



- ق(س) ليس متصل وغير معرف عند س = جـ .
- في هذا الشكل يعتبر ق غير متصلاً عند جـ كذلك تعتبر قيمة جـ غير معرفة للاقتران .

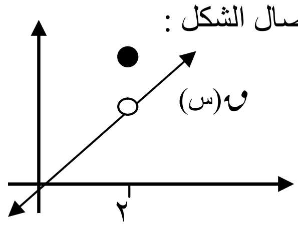
٤) اذكر سبب عدم اتصال الشكل :



حلقة عند س = ٢

ق غير معرفة عند س = ٢

٥) اذكر سبب عدم اتصال الشكل :



غير متصل لأن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) ≠ ق(٢)

كل كثيرات الحدود متصلة وتحقق شروط الاتصال

كل نسبي غير متصل عند صفر المقام

٦) إذا كان ق(س) = $\frac{٧}{س - ٣}$ ، أوجد جميع قيم س التي تجعل ق متصلاً :

الحل :

٧) ق(س) = $\frac{٦ س + ١}{س^٢ - ٤}$ ، أوجد جميع قيم س التي تجعل ق غير متصلاً :

الحل : $س^٢ - ٤ = ٠$ ⟵ $س^٢ = ٤$ ⟵ س = ± ٢

∴ ق غير متصل عند س = ± ٢

٨) إذا كانت ق(س) = $\frac{٧ س + ١}{|س| - ٤}$ ، أوجد جميع قيم س التي تجعل هذا الاقتران غير متصل :

الحل : يكون ق غير متصل عند صفر المقام

$|س| - ٤ = ٠$ ⟵ $|س| = ٤$ ⟵ س = ± ٤

∴ ق غير متصل عند س = ± ٤

٩) إذا كان ق(س) = $\frac{٢ س + ٨}{س^٢ + ٩}$ ، ابحث في اتصال ق(س):

الحل : ق(س) اقتران نسبي متصل ما عدا أصفار المقام :

$س^٢ + ٩ = ٠$ ⟵ $س^٢ \cancel{=} -٩$ ∴ ق(س) متصل على ح

١٠) إذا كان ق(س) = $\frac{15}{س^2 + ب س + 9}$ ، أوجد ب التي تجعل ق(س) متصل على ح :

الحل : المقام لا يحلل (المميز سالب)

ب^2 – ٤ ﺃ جـ < ٠

ب^2 – ٤ × ١ × ٩ < ٠

ب^2 – ٣٦ < ٠

+ + + + - - - - - - + + + +

-∞   -٦   ٦   ∞

ب ∋ (-٦ ، ٦)

١١) إذا كان ق(س) = $\frac{س}{س^2 - 4 س + جـ}$ ، أوجد قيم جـ التي تجعل ق(س) متصل على ح :

الحل : ١٦ – ٤ × ١ × جـ < ٠

١٦ – ٤ جـ < ٠

+ + + + + + - - - - - - - -

-∞   ٤   ∞

جـ ∋ (٤ ، ∞)

١٢) إذا كان ق(س) = $\frac{18}{ﺃ س^2 + 2 ب س + 5}$ ، أوجد قيم ﺃ، ب التي تجعل ق(س) متصل على ح ما عدا س = ١ ، س = ٣ :

الحل :

الجذور

- فردي: $\sqrt[فردي]{متصل (خاوة)}$
- زوجي:
  - تحته سالب
  - صفر المقام

١٣) أمثلة على اتصال الجذور الفردية :

ق(س) = $\sqrt[5]{س + 5}$: متصل

ق(س) = $\sqrt[3]{س^2 + 1}$: متصل

ق(س) = $\sqrt[7]{\frac{1}{س - 2}}$: متصل عدا س = ٢

١٤) أوجد أكبر فترة يكون فيها ق متصل

ﺃ) ق(س) = $\sqrt{س - 5}$

س – ٥ = ٠   س = ٥

- - - - + + +

٥

ق متصل حيث س ∋ (٥ ، ∞) أكبر فترة

ب) ق(س) = $\sqrt{7 - س}$

٧ – س = ٠   س = ٧

+ + + - - - -

٧

أكبر فترة يكون فيها ق متصل (- ∞، ٧)

١٥) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\pi - س}$

١- ابحث في اتصال ق عند س = π^+ ؟

غير متصل عند س = π^+ لأن الجذر سالب

٢- عند س = π^- : متصل

٣- أكبر فترة للاتصال (- ∞، π)

+ + + + + + + + - - - - - - - - - -

-∞   مخالف   π   مشابه   ∞

١٦) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\frac{س - 1}{س - 7}}$ ،جد أكبر فترة اتصال

+ + + + - - - - - - + + + +

-∞   ١   ٧   ∞

ق(س) متصل على (- ∞ ، ١) ∪ (٧ ، ∞)

الاتصال عند أطراف الفترة الكلية :

إذا كان ق(س) معرف على الفترة [ɑ ، ب] فهناك شروط خاصة للاتصال عند ɑ ، ب :

١- ق(س) معرف عند س = ɑ
٢- $ق(ɑ) = \lim_{س \to ɑ^+} ق(س)$
} الاقتران متصل عند س = ɑ من اليمين

١ - ق(س) معرف عند س = ب
٢ - $ق(ب) = \lim_{س \to ب^-} ق(س)$
} الاقتران متصل عند س = ب من اليسار

١٧) إذا كان ق(س) معرف على [١ ، ٤] وكان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، ١ \le س \le ٢ \\ ٣\,س & ، ٢ < س < ٤ \\ ٥ & ، س = ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ١ ، س = ٤ ، س = ٢

الحل :

* س = ١

١) $ق(١) = ١^{٢} + ١ = ٢$

٢) $\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^+} (س^{٢} + ١) = ٢$

ق(س) متصل عند س = ١ من جهة اليمين

لأن $ق(١) = \lim_{س \to ١^+} ق(س)$

* س = ٤

١) ق(٤) = ٥

٢) $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = \lim_{س \to ٤^-} (٣س) = ١٢$

ق(س) غير متصل عند س = ٤

لأن $ق(٤) \ne \lim_{س \to ٤^-} ق(س)$

* س = ٢

١) $ق(٢) = ٢^{٢} + ١ = ٥$

٢) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = $ غ . م

$\lim_{س \to ٢^-} (س^{٢} + ١) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^+} (٣\,س) = ٦$

ق(س) غير متصل عند س = ٢

لأن $ق(٢) \ne \lim_{س \to ٢} ق(س)$

الاتصال عند نقاط التحول :

١- ق(ɑ) معرفة
٢- النهاية موجودة عند س = ɑ

$$\lim_{س \to ɑ^+} ق(س) = \lim_{س \to ɑ^-} ق(س)$$

٣- $\lim_{س \to ɑ} ق(س) = ق(ɑ)$

١٨) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س < ٢ \\ ٣\,س & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

الحل : ق(٢) = ٣ (معرف)

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^{٢} + ١) = ٥$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٣\,س) = ٦$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) \ne \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

∴ النهاية غير موجودة عندما س ← ٢

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

١٩) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٥\,س & ، س < ٢ \\ س^{٣} + ٢ & ، س \ge ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٢

الحل : ١) $ق(٢) = س^{٣} + ٢ = ٨ + ٢ = ١٠$

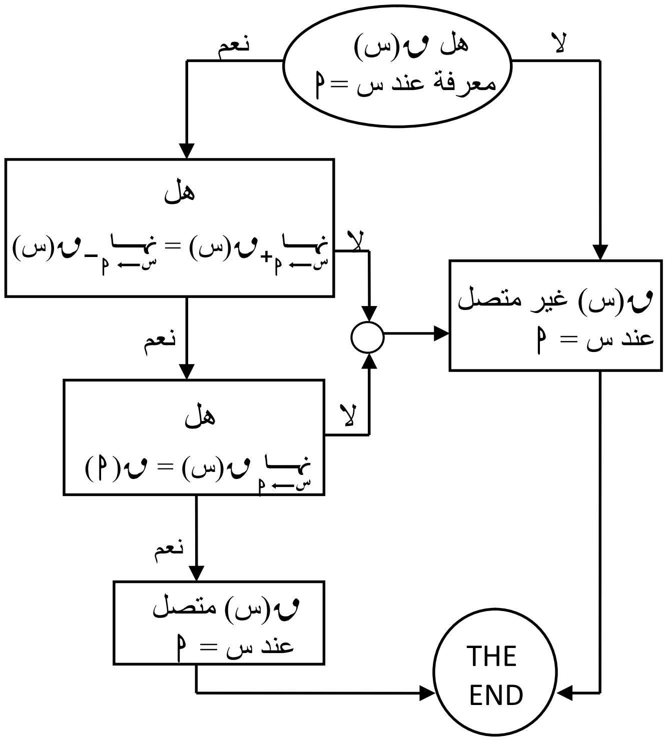
٢) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

$\lim_{س \to ٢^+} (٥\,س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-} (س^{٣} + ٢) = ١٠$

∴ $ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$

∴ ق(س) متصل عند س = ٢



٢٠) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & ،\ س \neq ٣ \\ ٦ & ،\ س = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٣ :

الحل : ق(٣) = ٦ ، معرف عند س = ٣

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} (س + ٣) = ٣ + ٣ = ٦$$

$$\therefore ق(٣) = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ق(س) = ٦$$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٣

٢١) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{ظا ٧س}{٥س} & ،\ س \neq ٠ \\ ٩ & ،\ س = ٠ \end{cases}$$

أوجد قيم (٩) التي تجعل ق(س) متصل عند س = ٠

الحل :

٢٢) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٩ & ،\ س > ٢ \\ ب س & ،\ س < ٢ \\ ٧ & ،\ س = ٢ \end{cases}$$

أوجد قيم ٩ ، ب علما بأن ق متصل عند س = ٢

الحل : $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا} ق(س) = ق(٢)$

$$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا} (س^٢ + ٩) = \underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا} (ب س) = ٧$$

$$\therefore \underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا} (س^٢ + ٩) = ٧ \leftarrow ٤ + ٩ = ٧ \leftarrow ٩ = ٣$$

$$\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا} (ب س) = ٧ \leftarrow ٢ ب = ٧ \leftarrow ب = \frac{٧}{٢}$$

٢٣) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} س قتا ٥ س & ،\ س \neq ٠ \\ ٥ ٩ & ،\ س = ٠ \end{cases}$$

وإذا علمت أن ق متصل عند س = ٠ فإن قيمة ٩ = :

أ) -٢٥ ب) ٢٥ ج) $\frac{١}{٢٥}$ د) $\frac{-١}{٢٥}$

٢٤) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} ٩ س^٣ - ب س + ١ & ،\ س > ١ \\ س^٢ - (٩ + ب) س + ٢ & ،\ س < ١ \\ ٥ & ،\ س = ١ \end{cases}$$

جد قيم ٩ ، ب التي تجعل ق (س) متصل عند س = ١

الحل : ق(١) = ٥

$$\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا} ق(س) = ٩ - ١ - ب + ٢ = ٣ - ٩ - ب$$

$$\underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا} ق(س) = ٩ - ب + ١ = ٩ - ب + ١$$

$$٣ - ٩ - ب = ٥ \leftarrow ٩ + ب = -٢$$

$$٩ - ب + ١ = ٥ \leftarrow ٩ - ب = ٤$$

$$٩ = ١ \quad ،\quad ب = -٣$$

٢٥) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ + ٤ س - م}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ب & ، س = ٢ \end{cases}$$

أوجد قيم م، ب علماً أن ق(س) متصل عند س = ٢ :

الحل : $ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$

$$ب = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٤ س - م}{س - ٢}$$

بما أن النهاية موجودة فإن البسط يساوي صفر لأن المقام يساوي صفر .

$\therefore$ $س^٣ + ٤ س - م = ٠$

$٨ + ٨ - م = ٠ \longrightarrow \boxed{م = ١٦}$

$$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٤ س - ١٦}{س - ٢} = ب$$

بالقسمة التركيبية :

$ب = \lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٢ س + ٨) \longrightarrow \boxed{ب = ١٦}$

٢٦) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} م س - ب & ، س \leq ١ \\ ٣ س & ، ١ < س < ٢ \\ ب س^٢ - م & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً على ح ، فجد قيمة م ، ب :

الحل : ق متصل عند س = ١

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س) \longrightarrow \boxed{م - ب = ٣} ...(١)$

ق متصل عند س = ٢

$ق(٢) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

$\boxed{٤ ب - م = ٦} ...(٢) \longrightarrow$ بجمع (١) + (٢)

$٣ ب = ٩ \longrightarrow \boxed{ب = ٣}$

$م - ٣ = ٣ \longrightarrow \boxed{م = ٦}$

٢٧) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - (٣ - ٢ج) س - ٦ج}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٤س - ١ & ، س = ٣ \end{cases}$$

متصلاً عند س = ٣ ، فما قيمة ج :

الحل : بما أن ق متصل عند س = ٣ فإن

$$ق(٣) = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - (٣ - ٢ج) س - ٦ج}{س - ٣}$$

$$(٤ \times ٣) - ١ = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢ج)}{س - ٣}$$

$١١ = \lim_{س \to ٣} (س + ٢ج) \longrightarrow ١١ = ٣ + ٢ج$

$٢ج = ٨ \longrightarrow ج = \frac{٨}{٢} \longrightarrow \boxed{ج = ٤}$

٢٨) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|٦ - ٢س|}{٣ - س} & ، س \neq ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣ :

الحل : ق(٣) = ٢

$\lim_{س \to ٣} \dfrac{|٦ - ٢س|}{٣ - س}$ (نعرف المطلق)

٦ – ٢س | ٢س – ٦

٣

$$\lim_{س \to ٣^+} \frac{٢س - ٦}{٣ - س} = -٢$$

$$\lim_{س \to ٣^-} \frac{٦ - ٢س}{٣ - س} = ٢$$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س)$: غير موجودة

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند س = ٣

٢٩) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|\text{ظا } س|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - ٢ \text{ جتا } س & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠ :

الحل : $ق(٠) = ١ - (٢ \times ١) = ١ - ٢ = -١$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} ق(س)$:

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نها}} (١ - ٢ \text{ جتا } س) = ١ - ٢ = -١$

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{-\text{ظا } س}{س} = -١$

ظا س   -ظا س

- - - - ٠ + + +

$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} ق(س) = -١$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٠ لأن $ق(٠) = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} ق(س)$

---

٣٠) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\sqrt{س^٢})}{س} & ، س \neq ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠ :

الحل : $ق(٠) = ١$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا} |س|}{س}$

س   -س

- - - - ٠ + + +

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا } س}{س} = ١$

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(-س)}{س} = -١$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} ق(س)$: غ . م

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند س = ٠

---

٣١) إذا كان $ق(س) = (س - ١)^٢$ ، $ل(س) = [٢ - س]$ ، ابحث في اتصال $(ق \times ل)(س)$ عند س = ٣ :

الحل : $(ق \times ل)(س) = (س - ١)^٢ [٢ - س]$

<u>نعرف حول</u> : س = ٣

$$م(س) = \begin{cases} -١(س - ١)^٢ & ، ٢ < س \leq ٣ \\ -٢(س - ١)^٢ & ، ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$$

$م(٣) = -١ \times ٤ = -٤$

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} م(س)$:

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نها}} م(س) = -٢ \times ٤ = -٨$

$\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نها}} م(س) = -١ \times ٤ = -٤$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} م(س)$: غير موجودة

$\therefore$ م(س) = ق(س) × ل(س) غير متصل عند س = ٣

---

٣٢) $ق(س) = \dfrac{س - ٣}{[س]}$ ،ابحث في اتصال ق(س)عند س = ٣:

الحل :

---

٣٣) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س - ٣|}{س - ٣} & ، س < ١ \\ ٢أ & ، س \geq ١ \end{cases}$$

متصلاً عند س = ١ ، أوجد قيمة أ :

الحل : $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} ق(س)$

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نها}} (٢أ) = \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \dfrac{|س - ٣|}{س - ٣}$

$٢أ = -١ \longrightarrow \boxed{أ = \dfrac{-١}{٢}}$

٣٤) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٤ - س}{|س - ٤|} & ،\ س > ٤ \\ أ\,س - ٩ & ،\ س < ٤ \\ ب & ،\ س = ٤ \end{cases}$$

أوجد قيمة أ ، ب ، علماً أن ق متصل عند س = ٤ :

الحل : $ق(٤) = \text{نهـا}_{س \to ٤^+} ق(س) = \text{نهـا}_{س \to ٤^-} ق(س)$

$ب = \text{نهـا}_{س \to ٤^+} \frac{٤ - س}{|س - ٤|} = \text{نهـا}_{س \to ٤^-} (أ\,س^٢ - ٩)$

$ب = -١ = ١٦أ - ٩ \longleftarrow \boxed{ب = -١}$

$١٦أ - ٩ = -١ \longleftarrow ١٦أ = ٨ \longleftarrow \boxed{أ = \frac{١}{٢}}$

---

٣٥) $ق(س) = \begin{cases} [س] + أ & ،\ س \geq ٢ \\ أ\,س & ،\ س < ٢ \end{cases}$

أوجد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصل عند س = ٢ :

الحل : $\text{نهـا}_{س \to ٢^+} ([س] + أ) = \text{نهـا}_{س \to ٢^-} (أ\,س)$

$٢ + أ = ٢أ \longleftarrow \boxed{أ = ٢}$

---

٣٦) $ق(س) = \begin{cases} ٨ - [س] & ،\ س \geq أ \\ [س] - ٤ & ،\ س < أ \end{cases}$

ما قيمة أ $\notin$ ص والتي تجعل ق(س) متصل عند س = أ :

الحل : $\text{نهـا}_{س \to أ^+} (٨ - [س]) = \text{نهـا}_{س \to أ^-} ([س] - ٤)$

$٨ - [أ] = [أ] - ٤$

$٨ - [أ] = [أ] - ٤ \longleftarrow ٢[أ] = ١٢$

$[أ] = ٦ \longleftarrow ٦ < أ < ٧$

<u>هام جداً :</u>

في الاقتران النسبي .. نقاط عدم الاتصال هي أصفار المقام .. أو القيم التي تجعل المقام يساوي صفر .

---

٣٧) جد نقاط عدم الاتصال لكل من الاقترانات التالية :

الحل : $ق(س) = \frac{٧}{س - ١}$ ، ق غير متصل عند س = ١

---

٣٨) $ق(س) = \frac{س^٢}{|س| - ٥}$ ، ق غير متصل حيث

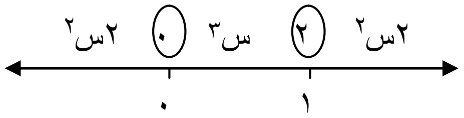
$|س| - ٥ = ٠ \longleftarrow |س| = ٥ \longleftarrow س = \pm ٥$

---

٣٩) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ & ،\ ٠ < س < ١ \\ ٢س^٢ & ،\ س \geq ١ ،\ س \leq ٠ \end{cases}$

أوجد نقاط عدم الاتصال :

الحل : نهتم فقط بالنقاط المكررة (التحول)



عند س = ٠

$ق(٠) = ٠$

$\text{نهـا}_{س \to ٠^+} ق(س) = ٠$ ، $\text{نهـا}_{س \to ٠^-} ق(س)$

∴ ق متصل عند س = ٠

عند س = ١

$ق(١) = ٢$

$\text{نهـا}_{س \to ١^+} ق(س) = ٢$ ، $\text{نهـا}_{س \to ١^-} ق(س) = ١$

∴ ق غير متصل عند س = ١

---

٤٠) إذا كان $ق(س) = |س - [س]| + [س]$ ، أثبت أن ق متصل دائماً :

الحل : $ق(س) = س - [س] + [س] = س$

وذلك لأن $[س] \leq س$ دائماً (خطي متصل دائماً)

<u>النظرية :</u>

إذا كان ق(س) ، هـ(س) متصلين عند س = أ فإن :

١) ق(س) + هـ(س) متصل عند س = أ

٢) ق(س) − هـ(س) متصل عند س = أ

٣) جـ ق(س) متصل س = أ حيث جـ $\in$ ح

٤) ق(س) × هـ(س) متصل عند س = أ

٥) $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متصل عند س = أ ، هـ(أ) $\neq$ ٠

أسئلة الاتصال

مباشر ق متصل — مش متصل

مش متصل: أحداهما غير متصل — كلاهما غير متصل

٤١) إذا كان ق(س) = { س^{٢} + ٢ ، س < ٢ ؛ ٣س ، س ≥ ٢ }

وكان هـ(س) = { س^{٢} ، س ≠ ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ }

ابحث في اتصال (ق + هـ)(س) عند س= ٢ :

الحل : أولا: نبحث في اتصال ق عند س= ٢

ق(٢) = ٦ (معرف)

نها$_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = نها$_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = ٦

نها$_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) = ٦

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

ثانياً : نبحث في اتصال هـ عند س = ٢

هـ (٢) = ٤ (معرف)

نها$_{س \to ٢^{+}}$ هـ(س) = نها$_{س \to ٢^{-}}$ هـ(س) = ٤

نها$_{س \to ٢}$ هـ(س) = هـ (٢) = ٤

∴ هـ (س) متصل عند س = ٢

بما أن ق(س) متصل عند س = ٢ & هـ (س) متصل عند س = ٢، لذلك فإن (ق + هـ) (س) متصلة عند س = ٢

(حسب نظرية جمع متصلين)

٤٢) ق(س) = { (س^{٢} − ٩)/(س − ٣) ، س ≠ ٣ ؛ ٦ ، س = ٣ }

وكان هـ (س) = ٥س + ١ ، ابحث في اتصال (ق × هـ) (س) عند س = ٣ :

الحل : أولا: نبحث في اتصال ق عند س= ٣

ق(٣) = ٦ (معرف)

نها$_{س \to ٣}$ ق(س) = نها$_{س \to ٣}$ (س − ٣)(س + ٣)/(س − ٣) = ٦

نها$_{س \to ٣}$ ق(س) = ق(٣) = ٦

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

ثانياً : نبحث في اتصال هـ عند س = ٣

هـ (س) متصل لأنه كتير حدود

∴ (ق × هـ)(س) متصل عند س = ٣

(حسب نظرية ضرب متصلين)

٤٣) ق(س) = { س^{٢} ، س < ٢ ؛ ٣س − ٢ ، س ≥ ٢ }

هـ (س) = س^{٣} − ١ ، بين أن ق × هـ متصل عند س = ٢ :

الحل : هـ (س) كثير حدود متصل عند س = ٢

ق(٢) = ٦ − ٢ = ٤

نها$_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = نها$_{س \to ٢^{+}}$ (٣س − ٢) = ٤

نها$_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = نها$_{س \to ٢^{-}}$ (س^{٢}) = ٤

نها$_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) = ٤

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

ق(س) × هـ (س) متصل عند س = ٢ ، لأنه يتكون من حاصل ضرب اقترانين متصلين .

<u>نظرية هامة</u> :

إذا كان أحد الاقترانين ق ، هـ ، أو أكلاهما غير متصل فإن :

(ق + هـ)، (ق − هـ) ، (ق × هـ)، (ق/هـ) يمكن أن يكون متصل أو أن يكون غير متصل .

٤٤) إذا كان ق(س) = س، هـ (س) = $\begin{cases} ٥س + ١ & ، س \geq ٠ \\ ٣س - ١ & ، س < ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران (ق × هـ)(س) عند س = ٠ :

الحل : ندرس ق(س) :

ق(٠) = س = ٠

نهـا ق(س) = نهـا س = ٠ (س ← ٠)

ق(س) متصل عند س = ٠ أو ق(س) كثير حدود متصل عند س = ٠

ندرس هـ (س) :

هـ (٠) = ٥ س + ١ = ١

نهـا هـ(س) = غ . م (س ← ٠)

نهـا (س ← ٠+) (٥س + ١) = ١ ، نهـا (س ← ٠-) (٣س – ١) = -١

∴ هـ (س) غير متصل

ندرس اتصال م(س) :

م(٠) = ٠ × ١ = ٠

نهـا (س ← ٠+) م(س) = ٠ ، نهـا (س ← ٠-) م(س) = ٠

∴ م(س) متصل عند س= ٠

---

٤٥) ابحث في اتصال الاقتران

ق(س) = (س – ٢)^{٣} [$\frac{١}{٢}$ س + ٣] عند س = ٢ :

الحل : ق(س) = $\begin{cases} ٤(س - ٢)^{٣} & ، س \geq ٢ \\ ٣(س - ٢)^{٣} & ، س < ٢ \end{cases}$

١) ق(٢) = (٢ – ٢)^{٣} [$\frac{١}{٢}$ × ٢ + ٣] = ٠ × ٤ = ٠

٢) نهـا (س ← ٢) ق(س) = نهـا (س ← ٢) (س – ٢)^{٣} [$\frac{١}{٢}$ س + ٣]

نهـا (س ← ٢+) (س – ٢)^{٣} (٤) ، نهـا (س ← ٢-) (س – ٢)^{٣} (٤ – ١)

نهـا (س ← ٢+) ٤(س – ٢)^{٣} ، نهـا (س ← ٢-) ٣(س – ٢)^{٣}

= ٤ × ٠ = ٠ ، = ٣ × ٠ = ٠

∴ ق(س) متصل عند س = ٢ لأن الصورة = النهاية

---

٤٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥ - ٣س^{٢} & ، س < -١ \\ ٢س + ١ & ، س \geq -١ \end{cases}$

هـ (س) = $\begin{cases} ٤س + ٣ & ، س < -١ \\ س^{٢} + ١ & ، س \geq -١ \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ (س) فابحث في اتصال ل(س) عند س = -١ :

الحل : ندرس ق (س) :

ق (-١) = ٢س + ١ = -١

نهـا (س ← -١) ق(س) = غ . م

نهـا (س ← -١+) (٢س + ١) = -١ ، نهـا (س ← -١-) (٥ - ٣س^{٢}) = ٢

ق(س) غير متصل عند س = -١

ندرس هـ (س) :

هـ(-١) = س^{٢} + ١ = ٢

نهـا (س ← -١) هـ (س) = غ . م

نهـا (س ← -١+) (س^{٢} + ١) = ٢ ، نهـا (س ← -١-) (٤س + ٣) = -١

هـ (س) غير متصل عند س= -١

ندرس اتصال ل(س) عند س = -١

ل(-١) = ق(-١) +هـ(-١) = -١ + ٢ = ١

نهـا (س ← -١) ل(س) = ١

نهـا (س ← -١+) ل(س) = -١ + ٢ = ١ ، نهـا (س ← -١-) ل(س) = ٢ + -١ =١

∴ ل(س) متصل عند س = -١

٤٧) إذا كان

ى(س) = { (١/٨ س^٣ + ١) / (س + ٢) ، س > -٢
         ٣/٢ ، س ≤ -٢

هـ (س) = جتا(π/٤ س) / س

ابحث في اتصال (ى + هـ) عند س = -٢ :

الحل : ندرس اتصال ى(س) عند س = -٢

ى(-٢) = ٣/٢

نهــا س ← -٢^- ى(س) = ٣/٢

نهــا س ← -٢^+ ى(س) = نهــا س ← -٢^+ ((١/٨ س^٣ + ١) / (س + ٢)) = ٣/٢

ى (س) متصل عند س = -٢

ندرس اتصال هـ (س) عند س= -٢

هـ (س) متصل عند س = -٢ لأنه قسمة متصلين

∴ (ى + هـ) متصل عند س = -٢

---

٤٨) ى(س) = [٢س] ، هـ (س) = [٢س + ١٥] ، ابحث في اتصال ى(س) – هـ (س) عند س = ٢

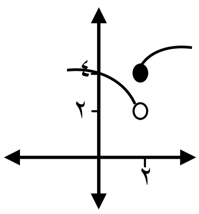
الحل : ى(س) – هـ (س) = [٢س] - [٢س] - ١٥

ى(س) – هـ (س) = - ١٥

∴ ى(س) – هـ (س) متصل عند س = ٢ ،لانه كثير حدود

---

٤٩) ى(س) = { ٤س ، س ≤ ٢
             س^٢ ، س > ٢



والشكل المجاور يمثل منحنى هـ (س) ، ابحث في اتصال ى(س)/هـ(س) عند س = ٢ :

الحل : ندرس اتصال ى(س) عند س = ٢

ى(س) = ٨

نهــا س ← ٢ ى(س) : غير موجودة

نهــا س ← ٢^+ ى(س) = ٨ ، نهــا س ← ٢^- ى(س) = ٤

ى(س) غير متصل عند س = ٢

ندرس اتصال هـ(س) عند س = ٢

هـ(٢) = ٤

نهــا س ← ٢ هـ(س) : غير موجودة

نهــا س ← ٢^+ هـ(س) = ٤ ، نهــا س ← ٢^- هـ(س) = ٢

هـ(س) غير متصل عند س = ٢

نفرض أن م(س) = ى(س) / هـ(س)

م(٢) = ى(٢) / هـ(٢) = ٨/٤ = ٢

نهــا س ← ٢^+ م (س) = ٨/٤ = ٢

نهــا س ← ٢^- م (س) = ٨/٤ = ٢

∴ م(س) متصل عند س = ٢

---

٥٠) إذا كان

ى(س) = { ٤س ، س ≤ ١
          ٢ ، س > ١

هـ (س) = { ١ ، س ≤ ١
            س ، س > ١

ابحث في اتصال ى(س) × هـ (س) عند س = ١ :

الحل : ندرس اتصال ى(س) عند س = ١ :

ى(١) = ٤

نهــا س ← ١^+ ى(س) = ٤ ، نهــا س ← ١^- ى(س) = ٢ ← نهــا س ← ١ ى(س) : غير موجودة

∴ ى(س) غير متصل عند س = ١

ندرس اتصال هـ (س) عند س = ١ :

هـ (١) = ١ ، نهــا س ← ١ هـ (س) = ١ ← هـ (س) متصل عند س = ١

نفرض ل(س) = م(س) × هـ (س)

ل(١) = ٤ × ١ = ٤

نهـا (س ← ١+) ل(س) = ٤×١ = ٤

نهـا (س ← ١-) ل(س) = ٢×١ = ٢

نهـا (س ← ١) ل(س) : غير موجودة

∴ ل(س) = ق(س) × هـ(س) غير متصل عند س = ١

---

٥١) أعط مثالاً الاقترانين مثل ق ، هـ بحيث يكونان غير متصلين عند س = ٣ والاقتران (ق + هـ) متصل عند س = ٣ :

الحل :

ق(س) = { ٥ ، س ≤ ٣ ؛ ٣ ، س > ٣ } غير متصل عند س = ٣

هـ(س) = { ٣ ، س ≤ ٣ ؛ ٥ ، س > ٣ } غير متصل عند س = ٣

ق + هـ = { ٨ ، س ≤ ٣ ؛ ٨ ، س > ٣ }

ق(س) + هـ(س) متصل عند س = ٣ لأن الصورة = النهاية

<u>الاتصال على فترة</u> :

تعريف : نقول ق(س) متصل على [أ ، ب]

إذا كان : ١) ق متصل على (أ ، ب)

٢) ق(س) متصل عند س = أ من جهة اليمين

٣) ق(س) متصل عند س = ب من جهة اليسار

☒ الاتصال على المجال

[أ ، ب]　　　　(- ∞ ، ∞)

---

٥٢) إذا كان

ق(س) = { ٥ س – ١ ، ١ < س < ٢ ؛ ٤ س + ١ ، ٢ ≤ س ≤ ٤ ؛ ١ ، س = ١ }

ابحث عن اتصال ق(س) على مجاله (على [١ ، ٤])

الحل : * القواعد : النقاط العادية

٥ س – ١ ، كثير حدود متصل على ١ < س < ٢

٤ س + ١ ، كثير حدود متصل على ٢ < س < ٤

* <u>عند س = ١</u>

١) ق(١) = ١

٢) نهـا (س ← ١+) ق(س) = نهـا (س ← ١+) ٥ س – ١ = ٤

ق(س) غير متصل عند س = ١ جهة اليمين

* <u>عند س = ٢</u>

١) ق(٢) = ٩

٢) نهـا (س ← ٢) ق(س) = ٩

نهـا (س ← ٢+) ٤ س + ١ = ٩　　　نهـا (س ← ٢-) ٥ س - ١ = ٩

ق(س) متصل عند س = ٢

* <u>عند س = ٤</u>

١) ق(٤) = ٤ × ٤ + ١ = ١٧

٢) نهـا (س ← ٤-) ق(س) = نهـا (س ← ٤-) ٤ س + ١ = ١٧

ق(س) متصل عند س = ٤

∴ ق(س) متصل على مجاله على [١ ، ٤] عدا س = ١

---

٥٣) ق(س) = { ١/(س - ١) ، ١ < س < ٢ ؛ ٥ س ، ٢ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٧ ، س = ١ }

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله ..

الحل : : * القواعد

١/(س - ١) ، متصل على ١ < س < ٢

٥ س ، متصل على ٢ < س < ٣

* عند الأطراف :

عند س = ١+

ق(١) = ٧

نهـا (س ← ١+) ق(س) = نهـا (س ← ١+) ١/(س - ١) = ١/٠ = + ∞

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١+

عند س = ٣-

ق(٣) = ١٥ ، معرف عند س = ٣

نهـا (س ← ٣-) ق(س) = نهـا (س ← ٣-) ٥ س = ١٥

∴ ق(س) متصل عند س = ٣-

* عند أطراف التحول : س = ٢

ق(٢) = ١٠ معرف

نهـا (س ← ٢+) ق(س) = نهـا (س ← ٢+) ٥ س = ١٠

نهـا (س ← ٢-) ق(س) = نهـا (س ← ٢-) ١/(س - ١) = ١

∴ نهـا (س ← ٢) ق(س) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

∴ ق(س) متصل على مجاله عدا س = { ١+ ، ٢ }

٥٤) إذا كان ق(س) = [$\frac{س}{٢}$ + ١] حيث س ∈ [٦،٢] ابحث في اتصال ق على مجاله :

الحل :

---

٥٥) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س + ٣ & ، ٠ \le س < ١ \\ [س + ١] & ، ١ \le س < ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على [٠،٣)

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س + ٣ & ، ٠ \le س < ١ \\ ٢ & ، ١ \le س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

القواعد $س^٢ - ٢س + ٣$ كثير حدود متصل على (٠ ، ١)

٢ ثابت متصل على (١ ، ٢)

٣ ثابت متصل على (٢ ، ٣)

عند س = ١ :

ق(١) = ٢

$\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = ٢ ، $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = ٢

∴ ق(س) متصل عند س = ١

عند س = ٢ :

ق(٢) = ٣

$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = ٣ ، $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = ٢

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢ ، لأن النهاية غير موجودة من اليمين .

عند س = ٠ :

ق(٠) = ٣

$\lim_{س \leftarrow ٠^+}$ ق(س) = ٣ ،

∴ ق(س) متصل عند س = ٠

ق(س) متصل على [٠، ٣) عدا س = ٢

---

٥٦)

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س < ٠ \\ [س + ٢] & ، ٠ \le س < ٢ \\ \sqrt{س + ٧} + \frac{٤}{س} & ، س \ge ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) ، لكل س ∈ ح :

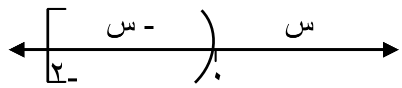
الحل :

٥٧)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt[3]{\text{س}} + |\text{س}| & \text{، } -٢ \le \text{س} < ٠ \\ \dfrac{٤}{\text{س} + ١} & \text{، } ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٦ & \text{، س} = ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على [-٢،٣]:

الحل : نعيد تعريف |س| على -٢ ≤ س < ٠



$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt[3]{\text{س}} - \text{س} & \text{، } -٢ \le \text{س} < ٠ \\ \dfrac{٤}{\text{س} + ١} & \text{، } ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٦ & \text{، س} = ٣ \end{cases}$$

<u>عند س = -٢</u>

$$\begin{cases} \text{ق}(-٢) = \sqrt[3]{-٢} + ٢ \\ \lim_{\text{س} \to -٢^+} \text{ق(س)} = \sqrt[3]{-٢} + ٢ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = -٢ جهة اليمين لأن ق(-٢) = نهـا س←-٢⁺ ق(س)

<u>عند س = ٣</u>

$$\begin{cases} \text{ق}(٣) = ٦ \\ \lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق(س)} = ١ \end{cases}$$

ق(س) غير متصل عند س = ٣ جهة اليسار لأن ق(٣) ≠ نهـا س←٣⁻ ق(س)

<u>عند س = ٠</u>

ق(٠) = ٤

$$\begin{cases} \lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق(س)} = ٤ \\ \lim_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق(س)} = ٠ \end{cases}$$

نهـا س←٠ ق(س) غير موجودة ، ق(س) غير متصل عند س = ٠

$\sqrt[3]{\text{س}} - \text{س}$ ، متصل على (-٢ ، ٠)

$\dfrac{٤}{\text{س} + ١}$ ، نسبي متصل على (٠ ، ٣)

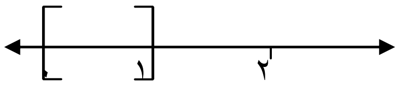
ق(س) متصل على [-٢ ، ٣] ما عدا {٣ ، ٠}

٥٨)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + \sqrt{-\text{س}} & \text{، } -١ \le \text{س} < ٠ \\ [\text{س}] + ٥\text{س} - ٢ & \text{، } ٠ \le \text{س} \le ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) ، على [-١،١]:

الحل : نعيد تعريف [س] على ٠ ≤ س ≤ ١



$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + \sqrt{-\text{س}} & \text{، } -١ \le \text{س} < ٠ \\ ٥\text{س} - ٢ & \text{، } ٠ \le \text{س} \le ١ \\ ٥\text{س} - ١ & \text{، س} = ١ \end{cases}$$

<u>عند س = -١</u>

$$\begin{cases} \text{ق}(-١) = ٢ \\ \lim_{\text{س} \to -١^+} \text{ق(س)} = ٢ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = -١ جهة اليمين

<u>عند س = ١</u>

$$\begin{cases} \text{ق}(١) = ٤ \\ \lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = ٣ \end{cases}$$

ق(س) غير متصل عند س = ١ جهة اليسار

<u>عند س = ٠</u>

ق(٠) = -٢

$$\begin{cases} \lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق(س)} = -٢ \\ \lim_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق(س)} = ٠ \end{cases}$$

نهـا س←٠ ق(س) غير موجودة ق(س) غير متصل عند س = ٠

$\text{س}^٢ + \sqrt{-\text{س}}$ متصل على (-١ ، ٠)

$٥\text{س} - ٢$ متصل على (٠ ، ١)

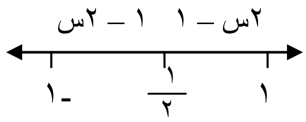
ق(س) متصل على [-١،١] ما عدا { ٠،١ }

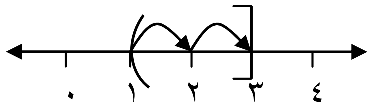
٥٩) $ق(س) = \begin{cases} |٢س - ١| & ، |س| \le ١ \\ [\frac{١}{٢}س + ٢] & ، ١ < س \le ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) ، على [-١ ، ٣]:

الحل : $ق(س) = \begin{cases} |٢س - ١| & ، -١ \le س \le ١ \\ [\frac{١}{٢}س + ٢] & ، ١ < س \le ٣ \end{cases}$

نعيد تعريف |٢س - ١| نعيد تعريف [$\frac{١}{٢}$ س + ٢]





$ق(س) = \begin{cases} ١ – ٢س & ، -١ \le س \le \frac{١}{٢} \\ ٢س – ١ & ، \frac{١}{٢} < س \le ١ \\ ٢ & ، ١ < س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \le س \le ٣ \end{cases}$

عند س = -١

$\begin{cases} ق(-١) = ٣ \\ \lim_{س \to -١^+} ق(س) = ٣ \end{cases}$ ق(س) متصل عند س = -١

عند س = ٣

$\begin{cases} ق(٣) = ٣ \\ \lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٣ \end{cases}$ ق(س) متصل عند س = ٣

عند س = $\frac{١}{٢}$

$\begin{cases} ق(\frac{١}{٢}) = ٤ \\ \lim_{س \to \frac{١}{٢}^+} ق(س) = ٠ \\ \lim_{س \to \frac{١}{٢}^-} ق(س) = ٠ \end{cases}$ ق(س) متصل عند س = $\frac{١}{٢}$

عند س = ١

$\begin{cases} ق(١) = ١ \\ \lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٢ \\ \lim_{س \to ١^-} ق(س) = ١ \end{cases}$ ق(س) غير متصل عند س = ١

عند س = ٢

$ق(٢) \ne \lim_{س \to ٢} ق(س)$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

(١- ٢س) ، (٢س – ١) ، (٢) ، (٣)

كثيرات حدود متصل على (-١، $\frac{١}{٢}$)، ($\frac{١}{٢}$ ، ١)،(١، ٢)

(٢، ٣) على الترتيب

ق(س) متصل على [-١،٣] ما عدا { ١، ٢ }

---

٦٠) $ق(س) = \begin{cases} ٣جتا س & ، \frac{-\pi}{٦} < س < ٠ \\ \frac{ظا ٣س}{س} & ، ٠ \le س < \frac{\pi}{٦} \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) على ($\frac{-\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٦}$)

الحل : عند س = ٠

ق(٠) = ٣

$\begin{cases} \lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ٣ \\ \lim_{س \to ٠^-} ق(س) = ٣ \end{cases}$ $\lim_{س \to ٠} ق(س) = ق(٠) = ٣$

∴ ق(س) متصل عند س = ٠

٣جتا س ، متصل لأنه جيب تمام على ($\frac{-\pi}{٦}$ ، ٠)

$\frac{ظا ٣س}{س}$ ، متصل نسبي معرف على (٠، $\frac{\pi}{٦}$)

ق(س) متصل على ($\frac{-\pi}{٦}$، $\frac{\pi}{٦}$)

---

٦١) ابحث في اتصال $\sqrt{[س] + س}$ على (١، ٢]

الحل : $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{١ + س} & ، ١ < س < ٢ \\ \sqrt{٢ + س} & ، س = ٢ \end{cases}$

عند س = ٢

$\begin{cases} ق(٢) = ٢ \\ \lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \sqrt{٣} \end{cases}$ ق(س) غير متصل عند س = ٢

∴ ق(س) غير متصل على (١ ، ٢]

مدارس سكاي الوطنيه	ورقة عمل على الاتصال	محمد عبد الرحمن حميدي

٦٢)
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} & \text{، س} < ١ \text{ ، س} = ٠ \\ \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢} & \text{، س} \geq ١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) ، على ح :

الحل :
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ١ & \text{، } ٠ < \text{س} < ١ \\ -١ & \text{، س} < ٠ \\ \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢} & \text{، س} \geq ١ \end{cases}$$

عند س = ١

$$\left.\begin{array}{l} \text{ق}(١) = ١ \\ \lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = ١ \\ \lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = ١ \end{array}\right\} \lim_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)} = ١$$

∴ ق(س) متصل عند س = ١

عند س = ٠ ق(س) غير متصل لأن غير معروف عند س = ٠

١ ، -١ ،$\left(\frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢}\right)$ كثيرات حدود متصلة على (٠ ، ١)

،(-∞ ، ٠) ، (١ ، ∞) على الترتيب

∴ ق(س) متصل على ح ما عدا { ٠ }

---

٦٣)
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{٥\text{س} - \text{س}^٢} + \frac{٨}{٥} & \text{، س} < ٥ \\ \sqrt{٥ - \text{س}} & \text{، س} \geq ٥ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على ح :

الحل : عند س = ٥

$$\text{ق}(٥) = \sqrt{٠} = ٠$$

$$\lim_{\text{س} \to ٥^+} \text{ق(س)} = \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{\text{س}\,(٥ - \text{س})} + \frac{٨}{٥}$$

$$= \frac{-٨}{٥} + \frac{٨}{٥} = ٠$$

$$\lim_{\text{س} \to ٥^-} \text{ق(س)} = \sqrt{٠} = ٠$$

ق(س) متصل عند س = ٥

$\frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{٥\text{س} - \text{س}^٢} + \frac{٨}{٥}$ ، نسبي وكثير حدود متصل على س < ٥

$\sqrt{٥ - \text{س}}$ ، متصل على س < ٥

∴ ق(س) متصل على ح

---

٦٤) ق(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ٢}$ ، هـ(س) = [س] ،ابحث في اتصال ل(س) = ق(س) × هـ(س) على [٠ ، ٢] :

الحل : نعيد تعريف هـ(س) = [س] على [٠ ، ٢]

$$\text{هـ(س)} = \begin{cases} ٠ & \text{، } ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ١ & \text{، } ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$$

$$\text{ل(س)} = \begin{cases} ٠ & \text{، } ٠ \leq \text{س} < ١ \\ \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ٢} & \text{، } ١ \leq \text{س} < ٢ \\ \frac{٣}{٢} & \text{، س} = ٢ \end{cases}$$

عند س = ٠

$$\text{ل}(٠) = \lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ل(س)} = ٠$$

ل(س) متصل عند س = ٠ جهة اليمين

عند س = ٢

$$\text{ل}(٢) \neq \lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ل(س)}$$

ل(س) غير متصل عند س = ٢ جهة اليسار

عند س = ١

$$\text{ل}(١) = \lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ل(س)} = \lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ل(س)} = ٠$$

ل(س) متصل عند س = ١

٠ ، متصل على ٠ ≤ س < ١

$\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ٢}$ ، متصل على ١ < س < ٢

ل(س) متصل على [٠ ، ٢)

---

٦٥)
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{جا أ س}}{\text{س}^٣} & \text{، } -\pi \leq \text{س} < ٠ \\ \text{ب}\,(٢ + \text{س}) & \text{، } ٠ \leq \text{س} < \pi \end{cases}$$

متصل على [-π ، π)جد أ ، ب :

الحل : $\text{ق}(٠) = \lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق(س)}$

$$\frac{\text{أ}}{٣} = ٢\text{ب} = ٢$$

$$٢\text{ب} = ٢ \longrightarrow \boxed{\text{ب} = ١}$$

$$\frac{\text{أ}}{٣} = ٢ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٦}$$

٦٦)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ س + ظا ب س}}{\text{٥ س}} & \text{، س} > ٠ \\ \text{ب} & \text{، س} = ٠ \\ \dfrac{\text{س}}{(\text{س} + ٢)^{٣} - ٨} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$

أوجد قيم أ ، ب علماً بأن ق متصل عند س = ٠

الحل : $\lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٠)$

$$\lim_{\text{س} \to ٠^+} \frac{\text{أ س + ظا ب س}}{\text{٥ س}} = \lim_{\text{س} \to ٠^-} \frac{\text{س}}{(\text{س} + ٢)^{٣} - ٨} = \text{ب}$$

* $\lim_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{١}{(\text{س} + ٢)^{٢} + ٢(\text{س} + ٢) + ٤} = \dfrac{١}{١٢}$

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{أ س}}{\text{٥ س}} + \dfrac{\text{ظا ب س}}{\text{٥ س}} = \dfrac{١}{١٢} = \text{ب}$

$\Leftarrow$ ينتج أن . . . ب $= \dfrac{١}{١٢}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\dfrac{\text{أ س}}{\text{٥ س}} + \dfrac{\text{ظا ب س}}{\text{٥ س}} \right) = \dfrac{١}{١٢}$

$\Leftarrow \dfrac{\text{أ}}{٥} + \dfrac{\text{ب}}{٥} = \dfrac{١}{١٢} \Leftarrow \dfrac{\text{أ}}{٥} + \dfrac{\frac{١}{١٢}}{٥} = \dfrac{١}{١٢}$

$\Leftarrow \dfrac{\text{أ}}{٥} = \dfrac{١}{١٢} - \dfrac{١}{٦٠} \Leftarrow \text{أ} = \dfrac{٥}{١٢} - \dfrac{٥}{٦٠}$

$\Leftarrow \text{أ} = \dfrac{٢٠}{٦٠} = \dfrac{١}{٣}$

---

٦٧)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| + ٤ & \text{، س} \leqslant \text{أ} \\ [\text{س}] + ٢\text{أ} & \text{، س} > \text{أ} \end{cases}$$

متصل عند س = أ جد قيم أ $\in$ ص

الحل : $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^+} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow |\text{أ}| + ٤ = [\text{أ}]^{+} + ٢\text{أ}$

$\Leftarrow |\text{أ}| + ٤ = \text{أ} + ٢\text{أ}$

$\Leftarrow |\text{أ}| + ٤ = ٣\text{أ} \Leftarrow \pm\text{أ} + ٤ = ٣\text{أ}$

*) $\text{أ} + ٤ = ٣\text{أ} \Leftarrow ٤ = ٢\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ٢$

*) $-\text{أ} + ٤ = ٣\text{أ} \Leftarrow ٤ = ٤\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ١$

---

٦٨) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} - ٢)^{٣}}{\left[\frac{\text{س}}{٢} + ٤\right]}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

الحل : $\text{ق}(٢) = \dfrac{(٢ - ٢)^{٣}}{\left[\frac{٢}{٢} + ٤\right]} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{صفر}}{٥} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$

$\therefore \lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٢) = \text{صفر}$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٢

**)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٢}{١ - \text{س}} & \text{، س} \neq ١ \\ ٥ & \text{، س} = ١ \end{cases}$$

وكان $\text{هـ}(\text{س}) = (\text{س} - ١)^{٢}$

ابحث في اتصال ق × هـ عند س = ١

الحل :

نبدأ أولاً في البحث في اتصال ق عند س = ١

$\Leftarrow$ ق(١) = ٥ عند اليساوي

$\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٢}{١ - \text{س}}$

$= \lim_{\text{س} \to ١} \dfrac{٢(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}{١ - \text{س}} = -٦$

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند س = ١

<u>ثانياً</u> :

$\text{هـ}(١) = (١ - ١)^{٢} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ١} \text{هـ}(\text{س}) = \text{صفر}$

<u>ثالثاً</u> :

ل = ق × هـ عند س = ١

$\Leftarrow \text{ل}(١) = \text{ق}(١) \times \text{هـ}(١) = ٥ \times ٠ = ٠$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ١} \text{ل}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) \times \lim_{\text{س} \to ١} \text{هـ}(\text{س}) = ٠$

$\Leftarrow \text{ل}(١) = \lim_{\text{س} \to ١} \text{ل}(\text{س})$

$\therefore$ ل = ق × هـ متصل عند س = ١

٦٩) $ق(س) = \begin{cases} \left[\frac{س}{٢}+٣\right] & ، ٣ \leqslant س \leqslant ٥ \\ \frac{س^{٢} - ٥س}{٢س - ١٠} & ، ٥ < س < ١٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق في الفترة [٣ ، ١٠)

الحل :

$ق(س) = \begin{cases} \left[\frac{س}{٢}+٣\right] & ، ٣ \leqslant س < ٤ \\ \left[\frac{س}{٢}+٣\right] & ، ٤ \leqslant س \leqslant ٥ \\ \frac{س^{٢} - ٥س}{٢س - ١٠} & ، ٥ < س < ١٠ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} ٤ & ، ٣ \leqslant س < ٤ \\ ٥ & ، ٤ \leqslant س \leqslant ٥ \\ \frac{س^{٢} - ٥س}{٢س - ١٠} & ، ٥ < س < ١٠ \end{cases}$

❖ الأطراف :-

عند $س = ٣^{+}$

ق متصل عند س = ٣ لأن $ق(٣) = \underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}} ق(س)$

❖ التحول :-

** عند س = ٤

$ق(٤) = ٥$ معرف

$\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نها}} ق(س) = ٤$ ، $\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نها}} ق(س) = ٥$

النهاية غير موجودة ⟸ ق غير متصل عند س = ٤

** عند س = ٥

$ق(٥) = ٥$ معرف

$\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٥^{+}}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٥س}{٢س - ١٠}$

$= \underset{س \to ٥^{+}}{\text{نها}} \frac{س(س - ٥)}{٢(س - ٥)} = \frac{٥}{٢}$

⟸ النهاية غير موجودة ⟸ ق غير متصل عند س = ٥

❖ العادية :-

٤ : ثابت متصل $٣ < س < ٤$

٥ : ثابت متصل $٤ < س < ٥$

$\frac{س^{٢} - ٥س}{٢س - ١٠}$ متصل $٥ < س < ١٠$

∴ ق(س) متصل على مجاله عدا { س = ٤ ، س = ٥ }

٧٠) $ق(س) = \begin{cases} \frac{|جاس|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - ٢ جتاس & ، س \geqslant ٠ \end{cases}$

وكان $هـ(س) = ٥س^{٢} + ظاس$

ابحث في اتصال ق + هـ عند س = ٠

الحل :

نبدأ أولاً في اتصال ق عند س = ٠

⟸ $ق(٠) = ١ - ٢ جتا ٠ = ١ - ٢ = -١$ معرف

$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}} (١ - ٢ جتاس) = -١$

$\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}} \frac{|جاس|}{س} = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}} \frac{-جاس}{س} = -١$

ق(س) متصل عند س = ٠

⟸ نبحث في اتصال $هـ(س) = ٥س^{٢} + ظاس$ عند س = ٠

$هـ(٠) = ٠ + ظا ٠ =$ صفر معرف

$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}} هـ(س) =$ صفر ، $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}} هـ(س) =$ صفر

ق + هـ متصل عند س = صفر (حسب نظرية جمع متصلين)

---

٧١) $ق(س) = \begin{cases} \frac{\frac{١}{٣}س^{٢} - س}{س - ٣} & ، س < ٣ \\ ٥ جتا \frac{\pi}{٣}س + ٢س & ، س \geqslant ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق على ح

الحل :

❖ التحول :-

** عند س = ٣

$ق(٣) = ٥ جتا \frac{\pi}{٣} \times ٣ + ٢ \times ٣$

$= ٥ جتا \pi + ٦ = -٥ + ٦ = ١$ معرف

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}} (٥ جتا \frac{\pi}{٣}س + ٢س) = ١$

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٣}س^{٢} - س}{س - ٣}$

$= \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٣}س(س - ٣)}{س - ٣} = ١$

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

❖ العادية :-

$\frac{\frac{١}{٣}س^{٢} - س}{س - ٣}$ متصل حيث $س < ٣$

$٥ جتا \frac{\pi}{٣}س + ٢س$ متصل حيث $س > ٣$

∴ ق(س) متصل متصل على ح

٧٢) $\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{٢س}] + \text{١} & \text{، ١} \leqslant \text{س} \leqslant \text{٢} \\ \dfrac{\text{جا} \pi \text{س}}{\text{س - ٢}} & \text{، ٢} < \text{س} \leqslant \text{٤} \end{cases}$

ابحث في اتصال ق في الفترة [١ ، ٤]

الحل :

$\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{٢س}] + \text{١} & \text{، ١} \leqslant \text{س} < \text{١,٥} \\ [\text{٢س}] + \text{١} & \text{، ١,٥} \leqslant \text{س} < \text{٢} \\ [\text{٢س}] + \text{١} & \text{، س = ٢} \\ \dfrac{\text{جا} \pi \text{س}}{\text{س - ٢}} & \text{، ٢} < \text{س} \leqslant \text{٤} \end{cases}$

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٣} & \text{، ١} \leqslant \text{س} < \text{١,٥} \\ \text{٤} & \text{، ١,٥} \leqslant \text{س} < \text{٢} \\ \text{٥} & \text{، س = ٢} \\ \dfrac{\text{جا} \pi \text{س}}{\text{س - ٢}} & \text{، ٢} < \text{س} \leqslant \text{٤} \end{cases}$

❖ الأطراف :-

عند س = ١^{+}

ق متصل عند س = ١^{+} لأن ق(١) = $\lim_{\text{س} \to \text{١}^{+}} \text{ق(س)}$

عند س = ٤^{-}

ق متصل عند س = ٤^{-} لأن ق(٤) = $\lim_{\text{س} \to \text{٤}^{-}} \text{ق(س)}$

❖ التحول :-

*) عند س = ١,٥ : ق(١,٥) = ٤ معرف

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{١,٥}^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س} \to \text{١,٥}^{-}} \text{ق(س)}$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١,٥

*) عند س = ٢ : ق(٢) = ٥ معرف

$\lim_{\text{س} \to \text{٢}^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to \text{٢}^{+}} \dfrac{\text{جا} \pi \text{س}}{\text{س - ٢}} = \pi$

بالاستبدال ص = س – ٢

$\lim_{\text{س} \to \text{٢}^{-}} \text{ق(س)} = \text{٤}$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

❖ العادية :-

٣ متصل ١ < س < ١,٥

٤ متصل ١,٥ < س < ٢

$\dfrac{\text{جا} \pi \text{س}}{\text{س - ٢}}$ متصل ٢ < س < ٤

∴ ق(س) متصل على مجاله عدا س = ١,٥، س = ٢

٧٣) $\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{٢س - ١}] & \text{، - ١} \leqslant \text{س} < \text{٠} \\ [\dfrac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{٥}] & \text{، ٠} \leqslant \text{س} \leqslant \text{١} \end{cases}$

ابحث في اتصال ق في الفترة [- ١ ، ١]

الحل :

$\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{٢س - ١}] & \text{، - ١} \leqslant \text{س} < \text{-٠,٥} \\ [\text{٢س - ١}] & \text{، - ٠,٥} \leqslant \text{س} < \text{٠} \\ [\dfrac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{٥}] & \text{، ٠} \leqslant \text{س} \leqslant \text{١} \end{cases}$

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{- ٣} & \text{، - ١} \leqslant \text{س} < \text{- ٠,٥} \\ \text{- ٢} & \text{، - ٠,٥} \leqslant \text{س} < \text{٠} \\ \text{٥} & \text{، ٠} \leqslant \text{س} \leqslant \text{١} \end{cases}$

❖ الأطراف :-

عند س = - ١^{+}

ق متصل عند س = - ١^{+} لأن ق(- ١) = $\lim_{\text{س} \to \text{-١}^{+}} \text{ق(س)}$

عند س = ١^{-}

ق متصل عند س = ١^{-} لأن ق(١) = $\lim_{\text{س} \to \text{١}^{-}} \text{ق(س)}$

❖ التحول :-

عند س = - ٠,٥ :

ق(- ٠,٥) = - ٢ معرف

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{-٠,٥}^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س} \to \text{-٠,٥}^{-}} \text{ق(س)}$

∴ ق(س) غير متصل عند س = - ٠,٥

عند س = صفر :

ق(٠) = ٥ معرف

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{٠}^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س} \to \text{٠}^{-}} \text{ق(س)}$

∴ ق(س) غير متصل عند س = صفر

❖ العادية :-

- ٣ متصل - ١ < س < - ٠,٥

- ٢ متصل - ٠,٥ < س < صفر

٥ متصل ٠ < س < ١

∴ ق(س) متصل على مجاله عدا { س = - ٠,٥ ، س = ٠ }

__النهاية:__ هي سلوك الاقتران ق(س) عندما تقترب س من نقطة معينة = نهــا (س←م) ق(س)

اليمين: نهــا (س←م⁺) ق(س)   اليسار: نهــا (س←م⁻) ق(س)

* إذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن النهاية الأصلية موجودة وتساوي نفس الرقم .

نهــا (س←م⁺) ق(س) = نهــا (س←م⁻) ق(س) ⟸ نهــا (س←م) ق(س) = نفس الرقم

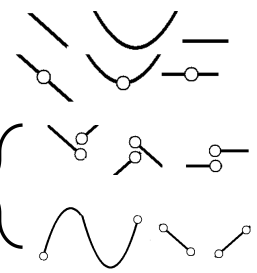
* إذا كانت النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار
(أو إذا أحد الجهتين أو كليهما غير موجودة)
فإن النهاية الأصلية غير موجودة .

__طرق إيجاد النهاية__

من الرسم — من الجداول — نظريات وقوانين

* __من الرسم :__

(١) نقاط
(٢) حلقات
(٣) قفزات
(٤) أطراف



(١) و (٢): النهاية موجودة
(٣) و (٤): النهاية غير موجودة (حذار من الاتجاه)

* السلوك من س والجواب دائماً من ص (ق(س))

* الأصل في إيجاد النهاية هو التعويض المباشر ما لم يذكر غير ذلك

* لكي تتوزع النهاية على الجمع و الطرح والضرب والقسمة يجب أن تكون النهاية

منفردة — موجودة — غير مضطربة

* فإذا __لم تكن منفردة__ نجعلها منفردة عن طريق النقل أو القسمة أو الضرب التبادلي

* إذا كان مقام المعطى صفر لن نستطيع أن نجعل المعطى منفرد لذلك نجعل المطلوب مثل معطى السؤال عن طريق :

هام جداً (حصري)

التحليل — الضرب بالبسط والمقام — طرح وإضافة

* إذا كانت نهــا (س←م) ق(س) (أو ، و) نهــا (س←م) هـ(س) __غير موجودة__ نجد اليمين واليسار لكل اقتران ثم نجري العملية (الجمع ، الطرح ، الضرب ، القسمة)

* إذا كانت النهاية مضطربة نستبدلها برمز جديد وليكن (م) ثم نغير ذيل النهاية

* __نهاية الاقتران النسبي__ : (زبون دائم)

تعويض مباشر

$\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$	$\frac{\text{٠}}{\text{عدد}}$	$\frac{\text{عدد}}{\text{٠}}$	$\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$	$\infty + \infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، رقم ÷ ، ×
يترك	صفر	غير موجودة	مصيبة	مصيبة

إذا كان ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ ، $\infty + \infty$ ، رقم ÷ × يجب أن تحل بإحدى الطرق

---

١ __التحليل إلى العوامل__ :

* فرق بين مربعين :

س² - ص² = (س – ص) (س + ص)
س⁴ - ص⁴ = (س² - ص²) (س² + ص²)
= (س – ص) (س + ص) (س² + ص²)
(س – ١)² - ٢٥ = (س – ١ – ٥) (س – ١ + ٥)

** فرق بين مكعبين ومجموع مكعبين :

س³ - ص³ = (س – ص) (س² + س ص + ص²)
س³ + ص³ = (س + ص) (س² - س ص + ص²)

*** عامل مشترك : كله سينات ← معامل الزعيم (س الأقل قوة)

* س¹⁰⁰ + س⁹⁹ = س⁹⁹ (س + ١)
* س¹⁰⁰ - س⁹⁸ = س⁹⁸ (س² - ١)
= س⁹⁸ (س – ١) (س + ١)
* ٢س² + ٨ = ٢ (س² + ٢)

**** العبارة التربيعية :

أحد الحلول ذيل النهاية س ← م (س – م) (قسمة) قسمة)

٢ __القسمة التركيبية__ :

إذا باءت جميع محاولات التحليل بالفشل نستخدم القسمة التركيبية ولا ننسى أن نقسم البسط والمقام على ذيل النهاية

٣ __توحيد مقامات__ : رقم ± كسر ، كسر ± رقم ، كسر ± كسر

* يوجد __نمطين__ لتوحيد المقامات الأول ضرب مباشر والثاني تحليل المقام ثم الضرب

* مقام البسط مقام $\dfrac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}{\text{جـ}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب جـ}}$

* مقام المقام بسط $\dfrac{\text{أ}}{\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}} = \dfrac{\text{أ جـ}}{\text{ب}}$

٤ __الضرب بمرافق الجذر التربيعي__ :

√ ± مقدار ، مقدار ± √ ، √ - √

مربع الأول – مربع الثاني

* $\sqrt{\text{فلاح}} - ٣ \times \dfrac{\sqrt{\text{فلاح}} + ٣}{\sqrt{\text{فلاح}} + ٣} = \dfrac{\text{فلاح} - ٩}{\times ٦}$

٥ __الضرب بمرافق الجذر التكعيبي__:

∛ ± رقم ، رقم ± ∛ ، ∛ ± ∛

مربع الأول عكس الإشارة الأول في الثاني + مربع الثاني

$\sqrt[3]{\text{فلاح}} - ٣ \times \dfrac{(\sqrt[3]{\text{فلاح}})^2 + ٣\sqrt[3]{\text{فلاح}} + ٩}{(\sqrt[3]{\text{فلاح}})^2 + ٣\sqrt[3]{\text{فلاح}} + ٩}$

$= \dfrac{\text{فلاح} - ٢٧}{\times ٢٧}$ (مكعب الأول ± مكعب الثاني)

٦ __التوزيع المنتظم__ : تعدد الإقترانات

فصل البسط عن المقام بين الاقترانات جمع و طرح — طرح وإضافة بين الاقترانات ضرب

* إيجاد الثوابت :

❖ تعويض مباشر

إذا كانت النهاية موجودة والمقام صفر يجب أن يكون البسط = صفر

❖

❖ إذا سدت الطرق ، انزنقت ، فشلت النظرية على الأصل دور

---

* المتشعب الصريح : نفحص ذيل النهاية

١) طرف : نرى عند الرقم ≤ أو ≥ فقط

والنهاية الأصلية موجودة لكن احذر الاتجاه

٢) تحول : نرى عند الرقم > و < ونجد النهاية من اليمين واليسار

٣) النقطة العادية : لا نرى عندها متباينة ونعوض في موقعها

شاء من شاء وأبى من أبى النهاية تعشق اللايساوي

* النهاية موجودة : ⟸ اليمين = اليسار

---

* النهاية الأصلية = رقم ، نهــا $_{س \leftarrow م}$ ق(س) = ب

اليمين = الرقم ، نهــا $_{س \leftarrow م^+}$ ق(س) = ب

اليسار = الرقم ، نهــا $_{س \leftarrow م^-}$ ق(س) = ب

---

* القيمة المطلقة C.V :

١) يكره السالب : يحول السالب إلى موجب

| −١ | = ١ ، | $\frac{-١}{٢}$ | = $\frac{١}{٢}$ ، | ٥ | = ٥ ، | ٠ | = ٠

٢) محرمات رياضية : التخلص منها ثم حل السؤال

م) مطلق مخفي : حصري على الجذر الزوجي فقط

$\sqrt{س^٢}$ = | س | ، $\sqrt[٤]{س^٤}$ = | س |

* حذاري من الجذر الزوجي وبدخلة عبارة تربيعية

$\sqrt{س^٢ - س + ١}$ = $\sqrt{(س - ١)^٢}$ = | س - ١ |

$\sqrt[٣]{س^٣}$ = س ، $(\sqrt{س})^٢$ = س

ب) توحيد المطلق على الضرب والقسمة فقط :

| س | | ص | = | س ص | ، $\frac{| س |}{| ص |}$ = | $\frac{س}{ص}$ |

جـ) هدم المطلق :

* | س | = م : س = م ، س = - م

* | س | ≥ م : س ≥ م ، س ≤ - م

* | س | < م ⟸ - م < س < م

د) التربيع أقوى :

| س |^٢ = س^٢ ، | س^٢ | = س^٢ ، | (س – ١)^٢ | = (س – ١)^٢

---

٣) نقطة الضعف هي صفر الحشوة

وتستخدم لإعادة التعريف ، الرسم ، كتابة الاقتران بصورة مجزأة

❖ نهاية المطلق :

ننزل كل شيْ كما هو ما عدا المطلق ثم تعويض في المطلق فإذا كان ناتج التعويض في المطلق

موجب : ينزل كما هو

سالب : ننزله عكس الإشارة

صفر : يمين ، يسار

---

* الأكبر عدد صحيح [ ] C.V :

١) يكره الكسر

[٢,٥] = ٢ ، [١,٨] = ١ ، [٠,٩] = صفر

[- ٢,٥] = - ٣ ، [- ١,٨] = - ٢ ، [- ٠,٩] = - ١

[١] = ١ ، [- ١] = - ١ ، [٠] = ٠

---

٢) محرمات رياضية :

م) [س] = ن ⟸ ن ≤ س < ن + ١

ب) س ≤ [س] الحشوة اكبر من الجواب

جـ) [س + ٥] = [س] + ٥

[س + ٠,١] ⟸ ✗ ⟸ [س + ١,١] = [س + ٠,١] + ١

نقاط الضعف :

١. طول الدرجة = $\frac{١}{| معامل س |}$

٢. البداية : أما من الصفر الصحيح ⟸ معه صحيح

أو صفر الحشوة ⟸ معه كسر

٣. اليساوي :

- معامل س موجب نضع اليساوي عند بداية الفترة الجزئية
- معامل س سالب نضع اليساوي عند نهاية الفترة الجزئية

❖ نهاية الأكبر عدد صحيح :

كل شيْ ينزل كما هو ما عدا الأكبر عدد صحيح ثم نعوض فيه

كسر

لا داعي لليمين واليسار

اليمين = اليسار = الأصل

م ∄ ص (كسر)

[م$^+$] = [م$^-$]

صحيح

نجد النهاية من اليمين و اليسار ونستخدم

الجهة ومعامل نفس الإشارة يبقى نفس الجواب

الجهة ومعامل س عكس الإشارة نطرح ١من الجواب

❖ نهاية الجذور :

فردي : موجب ← موجب ، سالب ← سالب ، صفر ← صفر

زوجي : موجب ← موجب ، سالب ← غير موجودة ، صفر ← يمين يسار على خط الأعداد

---

* نوحد الجذور الفردية دائماً

$\frac{\sqrt[٣]{م}}{\sqrt[٣]{ب}}$ = $\sqrt[٣]{\frac{م}{ب}}$

* لا نوحد الجذر الزوجي

إلا إذا كان ناتج التعويض موجب أو ناتج تعويض الجهة موجبة

$\frac{\sqrt{م}}{\sqrt{ب}}$ = $\sqrt{\frac{م}{ب}}$ ، م ، ب > ٠

نهاية الاقترانات الدائرية

الزاوية (درجات)	الزاوية (دائري)	جا	جتا	ظا
٠	٠	٠	١	٠
٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غ،م
١٨٠	π	٠	١ -	٠
٢٧٠	$\frac{٣\pi}{٢}$	١ -	٠	غ،م
٣٦٠	٢π	٠	١	٠

قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$ ؛ قتا س = $\frac{١}{\text{جا س}}$ ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ = $\frac{١}{\text{ظا س}}$

(١) الأصل في إيجاد نهاية الدائري التعويض المباشر

(٢) ترويض الجيب والظل

لا يروض الجيب والظل إلا إذا كان ناتج التعويض في (الزاوية) صفر فقط

* $\underset{\text{مراد}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا (مراد)}}{\text{مراد}}$ × مراد ، $\underset{\text{فلاح}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{ظا (فلاح)}}{\text{فلاح}}$ × فلاح

(٣) محور الشر التربيعي

جا^{٢}( ) + جتا^{٢} ( ) = ١ ،،، جا^{٢}( ) = ١ - جتا^{٢} ( )

جتا^{٢} ( ) = ١ - جا^{٢}( )

(٤) محور الشر الخطي

١ – جتا ( ) = ٢ جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ( ) ، ١ + جتا ( ) = ٢ جتا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ( )

(٥) قاعدة الطرح

جا س – جا ص = ٢ جتا $\frac{\text{س + ص}}{٢}$ جا $\frac{\text{س - ص}}{٢}$

جتا س – جتا ص = - ٢ جا $\frac{\text{س + ص}}{٢}$ جا $\frac{\text{س - ص}}{٢}$

(٦) على الأصل دور

قا ( ) = $\frac{١}{\text{جتا ( )}}$ ؛ قتا ( ) = $\frac{١}{\text{جا ( )}}$

ظتا ( ) = $\frac{١}{\text{ظا ( )}}$

قا^{٢} ( ) - ظا^{٢} ( ) = ١

ظا^{٢} ( ) = قا^{٢} ( ) – ١

قا^{٢} ( ) = ظا^{٢} ( ) + ١

(٧) ضعف الزاوية

جا ( ) = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ ( ) جتا $\frac{١}{٢}$ ( )

جتا ( ) = جتا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ( ) – جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ( )

= ٢ جتا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ( ) – ١ = ١ – ٢ جا^{٢} ( )

(٨) المكملة والمتممة

(جا ، جتا ، ظا) ⟸ لوحدهم

جا = جا (تعويض الزاوية – الزاوية الأصلية) لكن إحذر
ظا = ظا (تعويض الزاوية – الزاوية الأصلية) الربع
جتا = جا (تعويض الزاوية – الزاوية الأصلية) ثم الترويض

(٩) الجوكر : الإستبدال

س ← أ ، ص = س – أ

ص ← ٠ ، س = ص + أ

جا (س + ص) = جا س جتا ص + جتا س جا ص

جا (س - ص) = جا س جتا ص - جتا س جا ص

جتا (س - ص) = جتا س جتا ص + جا س جا ص

جتا (س + ص) = جتا س جتا ص - جا س جا ص

التعويض المباشر
الترويض
طرق هبله مع اختصار
المتطابقات
هام جداً وخطير

* الاتصال *

(١) الاتصال من الرسم : نعتبر الرسمة متصلة دائماً عدا عند : قفزة + لعنة + حلقة

(٢) كل كثير حدود هو متصل دائماً لأنه يحقق شروط الاتصال

(٣) * كل نسبي متصل عدا أصفار المقام

* حتى نجعل الاقتران النسبي متصل دائماً يجب أن
لا يحلل المقام (المميز سالب) (ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠)

(٤) اتصال الجذور :

فردي	زوجي
$\sqrt[\text{فردي}]{\text{متصل}}$ = متصل	$\sqrt{\text{موجب}}$: متصل
$\sqrt[\text{فردي}]{\text{غير متصل}}$ = غير متصل	$\sqrt{\text{سالب}}$: غير متصل

(٥) الاتصال عند نقطة (س = أ)

١) ق (أ) معرف عند إشارة اليساوي

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة عند > ، < ، ≠ أو بينهم

٣) ق (أ) = $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ∴ ق(س) متصل عند س = أ

(٦) نظريات الاتصال:-

* إذا كان الاقترانات ق (س) ، هـ (س) متصلين فإن :
جمع و طرح و ضرب ق و هـ متصل
قسمة ق على هـ متصل بشرط هـ ≠ ٠
* إذا كان أحد الاقترانيين أو كليهما غير متصل

نعود للأصل : (الصورة ، اليمين ، اليسار) لكل اقتران ثم نجرب العملية المطلوبة

(٧) الاتصال على المجال :

على فترة ، على ح ، على مجاله

* أولاً : هناك عداء تاريخي بين المجال من جهة والمطلق والأكبر عدد صحيح من جهة أخرى لذلك يجب إعادة تعريفهم أولاً
* ثانياً : القواعد : متصلة دائماً لكن بدون إشارة المساواة
* ثالثاً : التحول : نقارن بين الصورة والنهاية
* رابعاً : الطرف : نهتم بالاتجاه

*** لا نبحث في الاتصال عند أطراف الفترة المفتوحة ***

إيجاد نهاية الاقتران النسبي الأسي : ١) نوحد الأساسات إن استطعنا

٢) نفصل القوة أ$^{\text{ن}+٣}$ = أ$^{\text{ن}}$ × أ^{٣} نعامل معاملة التحليل