لا تنتظر وقتاً إضافياً .... لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .... اجعل هدفك ليس النجاح فقط بل التفوق والتميز

إهداء إلى روح والداي
غفر الله لهما وجعلهما
من أهل الجنة

الرياضيـــــات

العلامة
الكاملة

المستوى الرابع الفرع العلمي

وحدة التكــامل

+ تغطية الكتاب

وزارة من ٢٠٠٨ - ٢٠١٨ + مقترحة

إعداد الأستاذ

عبد الغفار الشيخ

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

التكامل

معكوس المشتقة

إذا كان ق (س) اقترانا متصلا على الفترة [أ، ب] ، فان م (س) يسمى معكوسا لمشتقة الاقتران إذا كان مَ (س) = ق (س) لكل س $\in$ (أ ، ب) حيث يسمى معكوس المشتقة بالتكامل غير المحدود

تذكر ??????

ق (س)	قَ (س)
جا س	جتا س
جتا س	- جا س
ظا س	قا^2 س
ظتا س	$-\text{قتا}^2$ س
قا س	قا س ظا س
قتا س	- قتا س ظتا س
$\text{س}^{\text{ن}}$	ن $\text{س}^{\text{ن}-1}$

ملاحظة إذا ورد في السؤال جد معكوس المشتقة للاقتران ق (س) عندها نسأل ما هو الاقتران الذي مشتقته

لكن إذا ورد بين أن الاقتران م الذي قاعدته م (س) هو معكوس المشتقة نقوم باشتقاقه ونجد ق (س)

بين أن الاقتران م (س) = $\text{س}^5 + 4\,\text{س}^2 + 2$ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق (س) = $5\,\text{س}^4 + 8$ س

بين أن الاقتران م (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}+1}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق (س) = $(\text{س}+1)^{-2}$ ، س $\neq 1$

بين أن الاقتران الذي قاعدته م (س) = $\sqrt{2\text{س}^3 + 4\text{س}}$ اقترانا بدائيا للاقتران ق حيث ق (س) = $\frac{3\text{س}^2 + 2}{\sqrt{2\text{س}^3 + 4\text{س}}}$

بين أن الاقتران م (س) = س^4 – جا س - ٣ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق (س) = $4\,\text{س}^3$ – جتا س

بين أن الاقتران م (س) = جا^2 س هو معكوس لمشتقة الاقتران ق (س) = جا ٢ س

نتيجة : الفرق بين أي معكوسين لمشتقة اقتران معين يساوي ثابتا

إذا كان الاقترانان م (س) ، هـ (س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق (س) وكان ل (س) = م (س) - هـ (س) فجد لَ (٤)

إذا كان الاقترانان م (س) ، هـ (س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق (س) وكان ل (س) = ٣ م (س) - ٥ هـ (س) فجد لَ (س) بدلالة ق (س)

إذا كان الاقترانان م (س) ، هـ (س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق (س) وكان م (س) = $3\,\text{س}^2 - 2$ س + ٥ وكان هـ (٢) = ٤ فجد قاعدة هـ (س)

جد معكوسا لمشتقة الاقترانات الآتية :

ق (س) = $\frac{-١}{س^٢}$

ق (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

ق (س) = جـا س

ق (س) = قـا س ظـا س

ق (س) = ٩ $س^٨$

ق (س) = ٤ $س^٣$ + $قا^٢$ س

ق (س) = ٣ $س^٢$ + جا س + ٧

إذا كان م (س) = $س^٣$ – $س^٢$ + ٥ س + جـ معكوس للاقتران ق (س) جد ق (٢)

إذا كان م (س) معكوسا لمشتقة الاقتران ق حيث ق (س) = ظتا س + ١ فجد مَ ($\frac{\pi}{٤}$)

إذا كان م (س) = $س^٣$ + ٥$س^٢$ – ٣ س + جـ معكوسا لمشتقة الاقتران ق فجد قَ (- ٢)

إذا كان م (س) = ٢ $س^٤$ + $\sqrt{س^٢ + ٣}$ معكوسا لمشتقة الاقتران ق فجد قَ (١)

قاعدة إذا كان م معكوسا لمشتقة الاقتران ق على الفترة [أ ، ب] فإن الصورة العامة لقاعدة أي معكوس لمشتقة الاقتران ق هي م (س) + جـ حيث جـ ثابت وذلك لأن

$\frac{د}{د س}$ (م (س) + جـ) = مَ (س) = ق (س)

ويسمى أي معكوس للمشتقة بالتكامل غير المحدود للاقتران بالنسبة إلى س ويرمز له على النحو الآتي :

∫ ق (س) د س و يكتب

م (س) = ∫ ق (س) د س أو

∫ ق (س) د س = م (س) + جـ

مثال : جد كلا مما يأتي :

ق (س) = ∫ ٣ $س^٢$ د س

ق (س) = ∫ $قتا^٢$س د س

ق (س) = ∫ جا س د س

ق (س) = ∫ قاس ظا س د س

ق (س) = ∫ $قا^٢$س + قا س ظا س د س

ق (س) = ∫ ($س^٢$ – جتـا س + ٢) د س

ق (س) = ∫ ٥ + ٥ $ظا^٢$ س د س

ق (س) = ∫ $ظتا^٢$ س د س

تعريف: الصورة العامة لقاعدة الاقتران البدائي للاقتران ق (س)

$\int$ مَ (س) د س = م (س) + جـ

$\frac{د}{دس}$ ($\int$ ق (س) د س) = ق (س)

مثال : إذا كان ق (س) = $\int$ س^{٢} – جتا س + ٢ د س

جد قَ (س)

إذا كان :

ص = $\int \sqrt[٣]{س^{٢} + ٣ س + ٥}$ د س جد صَ عند س = -١

إذا كان $\int$ (ق (س) + ٢) د س = س^{٣} + ب س^{٣} + ٩ وكان ق (١) = ٧ فجد قيمة الثابت ب

إذا كان $\int$ ق(س) د س = س^{٣} - س^{٢} + ٢ س + ١ جد قَ (- ٣)

إذا كان $\int$ قَ (س) د س = جا^{٢}س – أ جتا س + ١

وكان قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = صفر ، فجد قيمة الثابت أ

إذا كان $\int$ ق (س) د س = جا س – جتا س + ٣

أثبت أن ق ($\frac{\pi}{٢}$) - قَ ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

إذا كان $\int$ (قَ (س) + ٢ س) د س = س^{٣} + ب س^{٢} + ١ وكان قَ (١) = ٥ ، ق (٢) = ٧ جد قيمة ق (- ٢)

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند (س ، ص)
يساوي ٥ س^{٤} + ٢ س + ٣ والذي يمر بالنقطة (٢ ، ٣)
أوجد قاعدة الاقتران

إذا كان $\int$ ق(س) د س = س^{٣}- س^{٢} + ٢ س + ١ جد قَ (-٣)

إذا كان قَ(س) + جتا س = ٢ س جد ق(س) حيث ق ($\frac{\pi}{٢}$) = ٤

إذا كان ق (س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث أن
قَ (س) = ٣ $س^{٢}$ – ٢ وكانت النقطة (٠ ، ١) تقع على منحناه
جد قاعدة الاقتران ق

إذا كان ق (س) = ٣ $س^{٢}$ فجد م معكوسا لمشتقة الاقتران ق ،
علما بأن م (٢) = ٥

إذا كان قَ (س) = $\frac{٦}{\sqrt{س}}$ ، ومنحنى الاقتران يمر بالنقطة (٤،٠)
وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١) فجد قاعدة ق (س)

إذا كان قً (س) = - ٤ جتا ٢ س ، وكان للاقتران قيمة صغرى
محلية قيمتها (- ٢) عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق

ملاحظة :

∫ قً(س) د س = قَ (س) + جـ

∫ قَ(س) د س = ق (س) + جـ

∫ ق(س) د س = م (س) + جـ

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة (١) :

∫ أ د س = أ س + جـ حيث أ ثابت ، جـ ثابت الكامل

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

∫ -٥ د س

∫ ٣ $ك^{٢}$ د س حيث ك ثابت

∫ $هـ^{٢}$ د س

∫ $\frac{د س}{٥}$

قاعدة (٢) :

∫ $س^{ن}$ د س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ن≠-١

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

∫ $س^{٢}$ د س =

∫ $س^{-٥}$ د س =

∫ $\sqrt{س}$ د س =

∫ $\sqrt[٣]{س}$ ($\sqrt[٣]{س}$ + $\frac{٥}{\sqrt[٣]{س}}$) د س

∫ $\sqrt[٥]{س^{٦}}$ د س =

∫ $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ د س =

قاعدة (٣) :

$$\int \text{أ}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س} = \text{أ}\int \text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\,\text{د}\text{س} =$$

$$\int \text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س} \pm \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{د}\text{س}$$

قاعدة (٤)

$$\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{د}\text{س} = \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int (٣\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٤)\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int (٦ - ٥\text{س})^{٨}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س} - ٥}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}} - ٢}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٢} - ٩\text{س}}{\sqrt{\text{س}} - ٣}\,\text{د}\text{س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int \frac{(٢ - \text{س})}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٤}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}^{٢}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س} - ٩}{\sqrt{\text{س}} + ٣}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٣} + ٤}{\text{س}^{٢}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢}\,\text{د}\text{س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$\int (٣\text{س}^{٢} - ١)^{٢}\ \text{دس} =$

$\int \frac{(\text{س} + ٣)^{٢} - ٩}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\int (\text{س} + \sqrt{\text{س}})^{٢}\ \text{دس}$

$\int \sqrt[٣]{٤\text{س} + ٢}\ \text{دس}$

$\int \text{س}^{٦} + \frac{٣}{\text{س}} - \sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \frac{٣}{(٧\text{س} + ٥)^{٤}}\ \text{دس}$

$\int \text{س}^{٤} (٥ - \frac{٣}{\text{س}})^{٤}\ \text{دس}$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$\int (١ - \text{س})(\text{س} - ١)^{٥}\ \text{دس}$

$\int \frac{٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س}^{٤} + ٢}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$\int (٤\text{س}^{٢} + ٢٠\text{س} + ٢٥)^{٥}\ \text{دس}$

$\int (٥ + ٣\text{ص})^{٤}\ \text{دص}$

$\int \text{س}^{٣} \sqrt{\frac{٥}{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}\ \text{دس}$

$\int \frac{\text{س} - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} - ١}\ \text{دس}$

$\int \frac{٥\text{س}}{\sqrt{٧\text{س} + ٣} + \sqrt{٢\text{س} + ٣}}\ \text{دس}$

المتطابقات المثلثية المهمة :

جا^٢^س + جتا^٢^س = ١

جتا ٢س = جتا^٢^س - جا^٢^س

جتا ٢س = ١ – ٢ جا^٢^س ومنه

جا^٢^س = $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا ٢س)

جتا ٢س = ٢ جتا^٢^س - ١ ومنه

جتا^٢^س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)

جا ٢ س = ٢ جا س جتا س

ظا^٢^ س = قا^٢^ س - ١

ظتا^٢^ س = قتا^٢^ س - ١

جتا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س - ص) + جتا (س + ص))

جا س جا ص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س - ص) - جتا (س + ص))

جا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$ (جا (س - ص) + جا (س +ص))

قاعدة (٤) :

∫ جا س د س = - جتا س + جـ

∫ جتا س د س = جا س + جـ

∫ قا^٢^س د س = ظا س + جـ

∫ قتا^٢^س د س = -ظتا س + جـ

∫ قا س ظا س د س = قا س + جـ

∫ قتا س ظتا س د س = - قتا س + جـ

بشكل عام : ∫جا (أ س + ب) د س= $\frac{-\text{جتا (أ س + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

وهذا ينطبق على باقي الاقترانات المثلثية

مثال : جد قيمة كل من التكاملات التالية

∫ (جا س – ٤ جتا س + ٥ قتا^٢^ س) د س

∫ (جا ٢ س + جتا ٣ س) د س

∫(قا٣ س ظا ٣ س + قا^٢^ ٥ س) د س

∫ ظا^٢^ س + ١ د س

∫ (قتا ٤ س ظتا ٤ س + قتا^٢^ ٣ س) د س

∫ جتا ٤ س ظا ٤ س + $\frac{١}{\text{جتا}^٢\ ٦\ \text{س}}$ د س

∫ ٥ جتا س + ٣ جا س – قتا $\frac{\text{س}}{٣}$ ظتا $\frac{\text{س}}{٣}$ د س

∫ $\frac{٥}{\text{جا}^٢\ ٤\text{س}}$ + $\frac{٤}{\text{قا ٢ س}}$ + $\frac{\text{ظتا س}}{\text{جا س}}$ د س

مثال : جد قيمة كل من التكاملات التالية

∫ $\frac{١}{٤ - ٤\ \text{جتا}^{٢}\text{س}}$ د س

∫ ($\frac{٤}{٣}$ س + ٤ جا س - $\frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥}$) د س

∫ ظا^{٢}س د س =

∫ جا^{٢}س د س =

∫ جا^{٤}س د س =

∫ جتا^{٤}س – جا^{٤}س د س

∫ جتا^{٢} س د س

مثال : جد قيمة كل من التكاملات التالية

∫ (٦ - ظا^{٢} س) د س

∫ (٥ - ٢ جا^{٢} س) د س

∫ جا ٤ س + جتا ٥ س د س

∫ جا ٤ س جتا ٥ س د س

∫ جتا ٤ س جا ٥ س د س

∫ جتا ٤ س جتا ٥ س د س

∫ جا ٤ س جا ٥ س د س

∫ (٤ جا^{٢} ٢س + ٤ جتا^{٢} ٢س) د س

مثال : جد قيمة كل من التكاملات التالية

∫ (٣جتا^{2} ٢س - ٣جا^{2} ٢س) دس

∫ جتا^{2} ٢س - جا^{2} ٢س دس

∫ جا^{2} $\frac{\text{س}}{٢}$ - جتا^{2} $\frac{\text{س}}{٢}$ دس

∫ جاس جتاس دس

∫ (جاس جتاس)^{2} دس

∫ ٤ جا^{3}س جتا^{3}س دس

∫ جا٥س جتا٣س دس

مثال : جد قيمة كل من التكاملات التالية

∫ جا٦س جا٤س دس

∫ جتا٣س جا٧س دس

∫ جتا٣س جتا٥س دس

∫ $\frac{١}{\text{١ + جاس}}$ دس

∫ $\frac{١}{\text{قاس - ١}}$ دس

∫ جا $\frac{\text{س}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س}}{٢}$ دس

∫ $\frac{\text{جا}^{2}\text{س + جتا}^{2}\text{س}}{\text{١ + جتا٢س}}$ دس

مثال : جد قيمة كل من التكاملات التالية

$\int \frac{\text{جا س} + \text{جتا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}} \text{ د س}$

$\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}} \text{ د س}$

$\int \frac{٥}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{٣}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \text{ د س}$

$\int \frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س جتا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س}} \text{ د س}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س د س}$

$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}} \text{ د س}$

جد قيمة التكاملات الاتية :

$\int (\text{قا س} + \text{ظا س})^{٢} \text{ د س}$

$\int (\text{ظتا س} - \text{قتا س})^{٢} \text{ د س}$

$\int (\text{جتا س} + \text{جا س})^{٢} \text{ د س}$

$\int \text{ظا}^{٢}\text{ ٤ س} + ٧ \text{ د س}$

$\int \text{قا٣س ظا٣س د س}$

$\int \text{ظا}(٣\text{س} - ٢)\,\text{قا}(٣\text{س} - ٢) \text{ د س}$

جد قيمة التكاملات الاتية :

$\int \text{قتا}^{٢}\ \text{٥ س}\ \text{د س}$

$\int \text{ظتا}^{٢}\ (\text{٣ س} + ١)\ \text{د س}$

$\int \left(\text{س}^{٥} + \dfrac{١}{\text{س}^{٤}} - \sqrt[٤]{\text{س}^{٣}}\right) \text{د س}$

$\int (\text{٥} + \text{٢ س})^{٢}\ \text{د س}$

$\int \dfrac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س}$

جد قيمة التكاملات الاتية :

$\int \dfrac{١}{١ - \text{جتا ٢ س}}\ \text{د س}$

$\int \dfrac{١}{١ - \text{جا٢ س}}\ \text{د س}$

$\int \dfrac{١ - \text{جا ٢ س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}\ \text{د س}$

$\int \dfrac{٣}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س} =$

$\int \dfrac{١}{\text{جتا ٢ س} + \text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س}$

جد قيمة التكاملات الاتية :

$\int \frac{١}{(\text{جتا س} + \text{جا س})^{٢}}\ \text{د س}$

$\int \text{قا س}\ (\text{ظا س} + \text{جتا س})\ \text{د س}$

$\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س}$

$\int \frac{\text{جتا ٣ س}}{\text{جتا س}}\ \text{د س}$

$\int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س}}\ \text{د س}$

جد قيمة التكاملات الاتية :

$\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س} =$

$\int \frac{\text{جتا ٣ س}}{\text{جا٣ س}}\ \text{د س} =$

$\int \frac{١ - \text{جا}^{٣}\text{س}}{١ - \text{جا س}}\ \text{د س} =$

$\int \frac{\text{جا س}}{١ - \text{جا س}}\ \text{د س}$

مثال : إذا كان ق (س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث أن قَ (س) = ٣ س^{٢} – ٢ ، وكانت النقطة (١ ، ٠) تقع على منحناه ، جد قاعدة الاقتران ق

مثال : إذا كان قَ (س) = س^{٣} - س^{٢} + ١

جد ق (٣) – ق (١)

التكامل المحدود

إذا كان ق (س) اقترانا متصلا على [أ ، ب] ، م (س) معكوسا لمشتقة الاقتران ق ، يسمى

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق (س) د س بالتكامل المحدود حيث :

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) د س = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ مَ (س) د س = ق (ب) − ق (أ)

مثال : إذا كان ق (- ٢) = - ٨ ، ق (١) = ١ جد

$\int_{-٢}^{١}$ قَ (س) د س

إذا كان ق اقترانا متصلا ، ق (١) = ٤ ، ق (٢) = ١٢

$\int_{-٢}^{١}$ أ قَ (س) د س = ١٦ فجد قيمة الثابت أ

مثال : إذا كان ق (س) = ٣ $\text{س}^{٢}$ + ٢ فإن :

$\int$ ق (س) د س =

$\int_{-٢}^{٣}$ ق (س) د س =

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$\int_{١}^{٥}$ ٦ س د س

$\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ جتا س د س

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$ $\text{قا}^{٢}$ س د س

قواعد التكامل المحدود :

قاعدة (١)

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ جـ د س = جـ (ب − أ)

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$\int_{٢}^{٦}$ ٥ د س

$\int_{٠}^{٢}$ جتا π د س =

فيما يلي جد قيمة الثابت إذا كان :

$\int_{١}^{\text{٢أ}}$ ٥ د س = ١٠ جد قيمة أ

$\int_{\text{ب} + ١}^{\text{٢ + ٣ ب}}$ ٥ د س = ٤٠ جد قيمة ب

$\int_{-٢}^{٤}$ ٣ ب د س = ٤٨ جد قيمة ب

قاعدة (٢)

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ $\text{س}^{\text{ن}}$ د س = $\left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} \right]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

خاصية التكامل عند نقطة

$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}}$ ق (س) د س = صفر

خاصية قلب الحدود

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق (س) د س = - $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}}$ ق (س) د س

$\int_{٢}^{٢}$ ($\frac{٥}{\sqrt{\text{س}}}$ + ٤ $\text{س}^{-٣}$) د س

الخاصية الخطية

$$\int_{أ}^{ب} \text{جـ ق(س) دس} = \text{جـ} \int_{أ}^{ب} \text{ق(س) دس}$$

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س)} \pm \text{هـ(س) دس} =$$

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س) دس} \pm \int_{أ}^{ب} \text{هـ(س) دس}$$

مثال: جد قيمة كل من االتكاملات التالية

$$\int_{١}^{٤} ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س دس} =$$

$$\int_{١}^{٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}}\ \text{دس} =$$

إذا كان

$$\int_{٣}^{جـ} ٣\text{س}^{٢}\ \text{دس} = -٣٥$$ جد قيمة جـ

إذا كان

$$\int_{١}^{أ} (٢\text{س} + ١)\ \text{دس} = ١٠$$ جد قيمة أ

مثال: جد قيمة

$$\int_{١}^{٢} \left(٣\text{س}^{٢} + ٢\int_{١}^{٢} \text{ص دص} \right) \text{دس}$$

مثال: إذا كان

$$\int_{-١}^{٣} \left(٣\text{س}^{٢} + ٢\int_{١}^{جـ} \text{ص دص} \right) \text{دس} = ٢٨$$ جد قيمة جـ

مثال: جد قيمة :

$$\int_{\pi/٦}^{\pi/٤} (\text{قاس} - \text{ظاس})^{٢}\ \text{دس}$$

مثال: جد قيمة كلا من التكاملات التالية

$$\int_{١}^{٢} ٤\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٢\ \text{دس}$$

$$\int_{١}^{٤} \frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$$

$$\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}}\ (\text{س} + ١)\ \text{دس}$$

مثال : جد قيمة كلا من التكاملات التالية

$\int_{1}^{4}$ $\frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س}}$ د س

إذا كان

$\int_{1}^{5}$ $\frac{1}{2}$ ق(س) د س= - ٣ ، $\int_{5}^{1}$ ٣ هـ (س) د س= ١٨

فجد $\int_{1}^{5}$ (٤ ق (س) - ٥ هـ (س)) د س

إذا كان

$\int_{1}^{3}$ (٤ ق(س) + ٧ هـ (س)) د س = ١٩، $\int_{1}^{3}$ ٣ق (س) د س = ٩

فاحسب قيمة $\int_{1}^{3}$ ٥ هـ (س) د س

إذا كان ق (س) = $\int_{-1}^{2}$ (٦ س^{2} + س) د س جد قَ (س)

خاصية الإضافة

تستخدم بشكل عام في الاقترانات المتشعبة

تعريف : إذا كان أ ، ب ، جـ ∋ ح فإن

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = $\int_{أ}^{جـ}$ ق (س) د س + $\int_{جـ}^{ب}$ ق (س) د س

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

إذا كان

$\int_{1}^{4}$ ق (س) د س = ٨ ، وكان $\int_{4}^{6}$ ق (س) د س = ٥ جد

$\int_{1}^{6}$ ق (س) د س

إذا كان

$\int_{3}^{5}$ ($\frac{ق(س)}{2}$ - ٣) د س=٤ ، وكان $\int_{8}^{5}$ ق(س) د س = ٦ فجد

$\int_{3}^{8}$ (ق (س) + ٤ س) د س

$\int_{9}^{2}$ ٢ ق(س) د س = - ١٨، $\int_{2}^{5}$ $\frac{ق (س)}{3}$ د س = - ٢ جد

$\int_{5}^{9}$ (٤ ق (س) - ١) د س

إذا كان

$\int_{-١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$ ، وكان $\int_{٢}^{٣} ٢\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٨$

$\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

حالة خاصة : تكامل الاقتران المتشعب :

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} - ٢ & -١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٣\text{س}^٢ - ٦ & ٢ < \text{س} \le ٣ \end{cases}$ جد

$\int_{-١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٦$ ، وكان $\int_{٤}^{٢} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٢}\,\text{دس} = ٣$ جد

$\int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٥ & ١ \le \text{س} \le ٤ \\ ٣\text{س}^٢ - ٦ & ٤ < \text{س} \le ٥ \\ ٨ - ٤\text{س} & ٥ < \text{س} \le ٧ \end{cases}$ جد

$\int_{١}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

إذا كان

$\int_{-١}^{٢} (٣\,\text{ق}(\text{س}) - ٤)\,\text{دس} = ٣$ وكان

$\int_{٤}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٦$ جد $\int_{-١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

مثال : إذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{أ} & \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س}^٢ + ٢ & \text{س} \ge ٢ \end{cases}$ وكان

$\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -١٢$ جد قيمة الثابت أ

مثال : إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فما هي مجموعة قيم ن التي تجعل المساواة التالية صحيحة دائماً

$\int_{-١}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = ٢ \int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس}$

مثال : انطلق جسيم في خط مستقيم من النقطة أ ، فإذا كانت سرعته ع بعد زمن قدره ن ثانية تعطى بالعلاقة

$$ع = \begin{cases} ٣ن^{٢} & ٠ \leq ن \leq ٢ \\ ١٦ - ٢ن & ٢ < ن \leq ٨ \end{cases}$$

جد بعد الجسيم عن النقطة أ عندما ن = ٥ ثانية

مثال : جد قيمة

$$\int_{٠}^{٢} \frac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س - ١} \, دس$$

مثال : إذ كان

$$ق(س) = \begin{cases} |٢س - ٢| & ٠ \leq س \leq ٤ \\ ٢أ & ٤ < س \leq ٥ \end{cases}$$

وكان $\int_{٠}^{٥} ق(س) \, دس = ٢$ جد قيمة أ

مثال : جد قيمة

$$\int_{-٣}^{٣} |٢س| \, دس$$

$$\int_{٠}^{٣} \sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤} \, دس$$

مثال : جد قيمة

$$\int_{٠}^{٣} [\frac{١}{٢}س + ٤] \, دس$$

$$\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - جتا ٢س}{٢}} \, دس$$

مثال : جد قيمة

$$\int_{١}^{٤} [س + ١] \, دس$$

مثال : جد قيمة

$$\int_{٠}^{٥} |٢س - ٤| \, دس$$

مثال : جد قيمة

$\int_{١}^{٢} [\,٢\text{س} + ١\,]\ \text{د س}$

مثال : إذا كان

$\int_{١}^{\text{ك}} [\,٢\text{س}\,]\ \text{د س} = ٢.٥$ جد قيمة ك

مثال : جد قيمة

$\int_{-١}^{٢} |\text{س}| + \left[\frac{\text{س}}{٢}\right]\ \text{د س}$

مثال : إذا كان

$\int_{١}^{\text{جـ}} \left[\frac{١}{٣}\text{س} + ١\right] \text{د س} = ١٢$ جد قيمة جـ حيث جـ > ١

مثال : جد قيمة

$\int_{٠}^{٤} |\,\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢}\,|\ \text{د س}$

إذا كان $\int_{١}^{\text{ب}} (\,٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س}\,)\ \text{د س} = $ صفر جد قيمة ب

إذا كان

$\int_{٣}^{٥} ٢\,\text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = ٢٤$ فإن

$\int_{٥}^{٣} ٤\,\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س}\ \text{د س} = $

مثال : جد قيمة

$\int_{-٢}^{٢} |\,\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤\,|\ \text{د س}$

مثال : جد قيمة

$\int_{١}^{٣} [\,\text{س} + ٠.١\,]\ \text{د س}$

اذا كان

$\int_{1}^{4} (3 - 4\,\text{ق}(\text{س}) + 6\,\text{س})\,\text{د س} = 34$ وكان

$\int_{1}^{4} 2\,\text{هـ}(\text{س})\,\text{د س} = -8$ جد

$\int_{1}^{4} \text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) + 3\,\text{د س}$

مثال : جد قيمة :

$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \text{جتا}^2\,\text{س}}\,\text{د س}$

مثال : جد قيمة :

$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \text{جا}^2\,\text{س}}\,\text{د س}$

خاصية المقارنة

إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، وكان

ق (س) $\leq$ هـ (س) لكل س $\ni$ [أ ، ب] فإن

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \leq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س}$

نتيجة :

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ ، ب] ، وكان

ق (س) $\leq$ صفر لكل س $\ni$ [أ ، ب] فإن

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \leq$ صفر

وأنه إذا كان

ق (س) $\geq$ صفر لكل س $\ni$ [أ ، ب] فإن

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \geq$ صفر

مثال : دون حساب قيمة التكامل ما إشارة

$\int_{1}^{2} \text{س}^3\,\text{د س}$

مثال : دون حساب قيمة التكامل ما إشارة

$\int_{1}^{3} (\text{س}^2 - 4)\,\text{د س} \geq \int_{1}^{3} 3\,\text{س}\,\text{د س}$ دون حساب قيمة كل من التكاملين

مثال : بين أن

$0 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \text{س}^2}\,\text{د س} \leq 2$

مثال : دون حساب قيمة التكامل بين أن

$\int_{\cdot}^{\pi ٢}$ ١ + جا س د س ≤ صفر

مثال : دون حساب قيمة التكامل بين أن

٠ ≤ $\int_{\cdot}^{\pi}$ جا^{٢} س د س ≤ π

مثال : دون حساب قيمة التكامل بين أن

$\int_{\cdot}^{\pi ٢}$ (٣ + جتا^{٢} س) د س ينحصر بين ٦ π ، ٨ π

مثال : إذا كان ق (س) اقترانا محدداً على [١ ، ٥]

وكان -٢ ≤ ق (س) ≤ ٤ وكان

م ≤ $\int_{١}^{٥}$ ق (س) د س ≤ ن نجد قيمة م ، ن

مثال : ما إشارة

$\int_{١}^{٢} \frac{٥ س + ٢}{س^{٢} + ٤}$ د س

مثال : إذا كان ق (س) إقتراناً محدداً على [٢ ، ٤]

وكان ٣ ≤ ق (س) ≤ ٧ وكان

م ≤ $\int_{٢}^{٤}$ (٢ ق (س) + ٣) د س ≤ ن جد قيمة م ، ن

مثال : ما إشارة

$\int_{-٣}^{-١} \frac{س}{س^{٤} + ٢}$ د س

مثال : ما إشارة

$\int_{-٣}^{-١} \frac{- س}{س^{٤} + ٢}$ د س

مثال :

إذا كان $\int_{١}^{٥}$ ق (س) د س ≤ ٥

جد أصغر قيمة ممكنة للتكامل

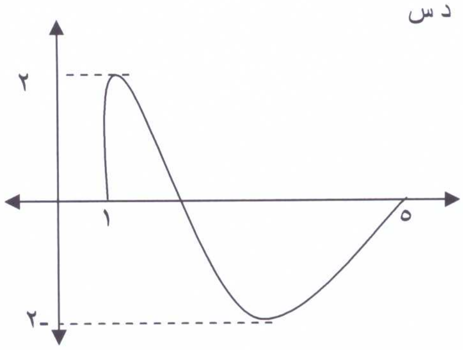
$\int_{١}^{٥}$ ٣ ق (س) + ٤ س – ١١ د س

إذا كان ق (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ متصلاً على [-٢ ، ٢]

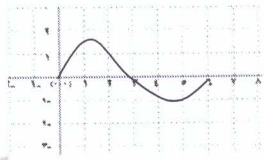
وكان م ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) د س ≤ ن نجد قيمة م ، ن

مثال : في الشكل المجاور جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار

$\int_{1}^{5}$ ق(س) دس



اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المتصل على الفترة [٠ ، ٦] أجب عما يأتي :

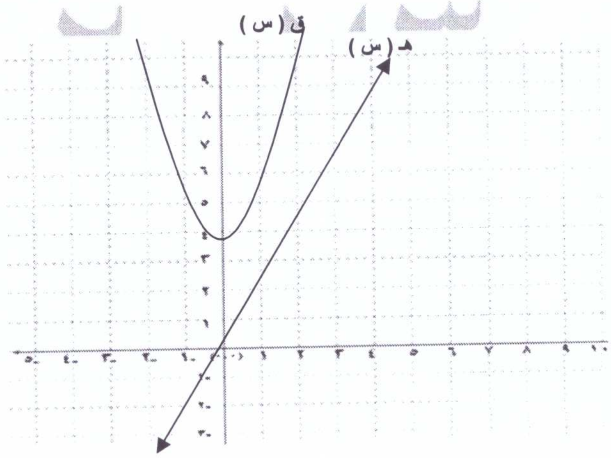


ما اشارة $\int_{1}^{3}$ ق(س) دس

ما اشارة $\int_{3}^{6}$ ق(س) دس

ادرس الشكل المجاور وفسر ما يأتي :

$\int_{-2}^{5}$ ق(س) دس $\le$ $\int_{-2}^{5}$ هـ(س) دس



احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :

$\int_{2}^{8} \frac{1}{س^{2}}$ دس

$\int_{0}^{3}$ س^{2} - | س - ١ | دس

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا٢س دس

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}$ (س + جتا س) دس

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{١ + جا٢س}}{جا س + جتا س}$ دس

$\int_{2}^{2}$ (٩س - ٧)^{5} دس

$\int_{-١}^{٣} (س - ١)(س^{٢} + س + ١)\ دس$

إذا كان $\int_{ب}^{٢} ٢ب\ دس = -٣٠$ فجد قيمة الثابت ب

$\int_{٠}^{١} \sqrt{س}\,(\sqrt{س} + ٢)^{٢}\ دس$

إذا كان $\int_{٠}^{جـ} س(١ - س)\ دس = ٠$ فجد قيمة الثابت جـ

$\int_{١}^{٣} \frac{٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\ دس$

إذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢\int_{٠}^{جـ} ٣م\ دم)\ دس = -٢٠$

فجد قيمة الثابت جـ

$\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩س^{٢} - ١٢س + ٤}\ دس$

$\int_{٠}^{\pi} جتا س - جا س\ دس$

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} -س & -٣ < س \le ٠ \\ س & ٠ < س \le ٤ \end{cases}$

$\int_{-٢}^{٤} ق(س)\ دس$

إذا كان ق (س) = $\int (\int_{٠}^{-٢} ٤س - ٣س^{٢}\ دس$ فجد قَ (-١)

إذا كان $\int_{٢}^{ب} (٢س - ٣)\,دس = ٢٠$ فجد قيمة الثابت ب

إذا علمت أن $م \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^٢}\,دس \le ك$

فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دون حساب قيمة

$\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^٢}\,دس$

$\int_{١}^{٣} \left(٢ق(س) + \frac{١}{س^٢} - ٦\right)دس = ١٢$ فجد

$\int_{١}^{٣} \left(\frac{ق(س)}{٢} - س^٢\right)دس$

إذا كان ق (س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية وكان

ق (٠) = ٥ ، قً (س) = ٤

$\int_{٠}^{١}$ قَ (س) دس = ٣ فجد قاعدة الاقتران ق

$\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣)\,دس = -١٧$ ، $\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢$

فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس$

جد كثير حدود ق (س) من الدرجة الاولى بحيث

$\int_{-١}^{١} ق(س)\,دس = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٢$

دون حساب تكامل المقدار $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس$

$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس \le \frac{\pi}{٢}$

اقتران اللوغاريتم الطبيعي (مشتقته وتكامله)

لـوهـ س يقرأ اللوغاريتم الطبيعي

تعريف : الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران غير ثابت قابل للاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة يحقق

ق (أ ب) = ق (أ) + ق (ب) لكل أ > ٠ ، ب > ٠

إذا كانت س ∋ (٠ ، ∞) فإن الاقتران

$\int_{١}^{س}$ ١ / ع دع = لـوهـ س

نظرية : إذا كان

ق (س) = لـوهـ س ، س > صفر ، فإن قَ (س) = ١ / س

ق (س) = لـوهـ ل (س) ، وكان ل (س) قابلاً للاشتقاق فإن

قَ (س) = لَ (س) / ل (س) حيث ل (س) > صفر

نظريات في اقتران اللوغاريتم الطبيعي :

لـوهـ س × ص = لـوهـ س + لـوهـ ص

لـوهـ س / ص = لـوهـ س - لـوهـ ص

لـوهـ س^{ن} = ن لـوهـ س

لـوهـ هـ = ١

لـوهـ ١ = صفر

مثال : اوجد المشتقة الأولى فيما يلي :

ص = لـو٥

ص = لـوهـ (س^{٢} + ٥)

ص = لـوهـ (س^{٢} + ٤ س – ٥)

مثال : اوجد المشتقة الأولى فيما يلي :

ص = لـوهـ (س^{٢} + ٥ س + ٣)

ص = لـوهـ جا ٢ س

ص = لـوهـ جا^{٢} س

ق (س) = س^{٣} لـوهـ س

ق (س) = لـوهـ (٢ + √س)

ق (س) = لـوهـ (√(س^{٢} + ٧))

ق (س) = لـوهـ ∛(٥ س^{٢} + ٤ س)

ص = لـوهـ س^{٣} ظا س

ق (س) = لـوهـ جا^{٣} ٥ س

مثال : اوجد المشتقة الأولى فيما يلي :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٤|$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{س} + ٥|$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}|$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{(٤\text{س}^٢ + ٥)^٦}{(٧ - ٢\text{س})^٥}\right)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}\right)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} (٢ - \text{جتا س})$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{\text{جتاس}}{\sqrt{٤ - ٣\text{س}^٢}}\right)$

$\text{ق}(\text{س}) = (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^٣ \text{ ، س} > ٠$

مثال : اوجد المشتقة الأولى فيما يلي :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + \sqrt{\text{س}^٢ - ١})$

أثبت أن $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}$

جد معكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الاتية :

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣ + ٧}$

نظرية :

$\int \frac{١}{\text{س}} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ} \text{ ، س} \neq \text{صفر}$

$\int \frac{\text{قَ}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

مثال : جد قيمة كل مما يلي :

$\int \frac{٣}{\text{س}} \, \text{دس}$

$\int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ٣} \, \text{دس}$

مثال : جد قيمة كل مما يأتي :

$$\int \frac{\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٢س} + \text{١}} \, \text{دس}$$

$$\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \frac{\text{٦س}}{\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٥}} \, \text{دس}$$

نتيجة :

$$\int \frac{\text{ثابت}}{\text{خطي}} \, \text{دس} = \frac{\text{ثابت}}{\text{معامل س}} \text{ لـــو } |\text{المقام}| + \text{جـ}$$

$$\int \frac{\text{ك}}{\text{أس} + \text{ب}} \, \text{دس} = \frac{\text{ثابت}}{\text{أ}} \text{ لـــو } |\text{أس} + \text{ب}| + \text{جـ}$$

مثال : جد قيمة كل مما يأتي :

$$\int \frac{\text{٥}}{\text{٤س} - \text{٢}} \, \text{دس}$$

$$\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{\text{١}}{\text{٩} - \text{٢س}} \, \text{دس}$$

$$\int \text{ظتاس دس}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{٢} + \text{ظاس}} \, \text{دس}$$

إذا كان $\int (\text{قَ(س)} - \text{س}) \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{س}^{\text{٢}}$

فأثبت أن قَ (س) = ٣ س + قـا س

بين أن الاقتران م (س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ جـا س هو معكوس لمشتقة الاقتران ق (س) = ظتا س

جد قيمة كل مما يأتي :

$$\int \frac{\text{١} + \text{جتاس}}{\text{س} + \text{جاس}} \, \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{٥} + \text{٥ظتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{ظتاس}} \, \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٥}} \, \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{س} + \text{٥}}{\text{س}} \, \text{دس}$$

$$\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}} \, \text{دس}$$

الاقتران الأسي الطبيعي (مشتقته وتكامله)

نظرية : إذا كان ق (س) = هـ^س^ فإن قَ(س) = هـ^س^

إذا كان ق (س) = هـ^ل (س)^ فإن قَ (س) = مَ (س) × هـ^ل (س)^

اذا كان ق (س) = هـ^لو ل(س)^ فإن ق (س) = ل (س)

جد قيمة كل مما يأتي :

$\int_{-1}^{2} \frac{|2س|}{س^2 + 1}$ د س

$\int \frac{جا ٣ س}{١ + جتا ٣ س}$ د س

مثال : جد المشتقة فيما يأتي :

ص = $س^4$ + ٣ $هـ^س$ − ٥ س + لـو~هـ~ ($س^3$ + ٥)

ص = ٣ $س^2$ + ٢ $هـ^{٧ - ٢ س^3}$

$\int \frac{جاس}{جتاس}$ د س = $\int$ ظاس د س

ص = ٣ لـو~هـ~ س - ٦هـ^س^ + جتـاس− ظـاس + ٥

جد معكوسا لمشتقة كل من الاقترانات الاتية :

ق (س) = ($\frac{٢ س}{س^2 + ٤}$)

ص = $هـ^{\frac{1}{س}}$ + لـو~هـ~ $\sqrt{س}$

ق (س) = ($\frac{٣ جتـا ٣ س}{٥ + جـا ٣ س}$)

ص = هـ^جتاس^ - لـو~هـ~ جا س

جد المشتقة فيما يأتي :

$ص = لو_{هـ} هـ^{س^{٣}}$

$ص = هـ^{٥} + لو_{هـ} قاس$

$ص = هـ^{٢} + س^{٣} هـ^{جاس}$

$ص = هـ^{لو_{هـ} س^{٤}}$

$ص = س لو_{هـ} هـ^{س^{٢}}$

$ص = \sqrt{هـ^{٣س} + ٣س}$

$ص = هـ^{٣ لو_{هـ} (١ + جاس)}$

$ص = هـ^{٤ لو_{هـ} (س^{٣} + ٢)}$

جد المشتقة فيما يأتي :

$ق(س) = س^{٤} هـ^{٢س}$

$ص = س + هـ^{٩س}$

جد المشتقة فيما يأتي :

$ص = س^{٣} + هـ^{٦ - ٥س^{٤}}$

$ص = جا هـ^{٢س}$

$ص = \frac{١ + هـ^{٢س}}{هـ^{٥س}}$

$ص = \sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

$ص = هـ^{(٤س + ٥)^{٦}}$

تكامل الاقتران الاسي

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

$\int \text{هـ}^{\text{أس}}\,\text{د س} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{أس}}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

مثال : جد قيمة التكاملات الاتية:

$\int \left(\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{\text{س}}\right)\text{د س}$

$\int ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{د س}$

$\int -٣\,\text{هـ}^{١-٣\text{س}}\,\text{د س}$

$\int \text{هـ}^{٣-٤\text{س}}\,\text{د س}$

$\int_{٠}^{١} ٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{د س}$

$\int_{٠}^{١} \left(١ + \text{هـ}^{\text{س}}\right)^{٢}\text{د س}$

$\int \text{هـ}^{٣\text{س}}\left(١ + \text{هـ}^{٢\text{س}}\right)\text{د س}$

$\int \dfrac{٤\,\text{هـ}^{٤\text{س}} - ٣}{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ٣\text{س}}\,\text{د س}$

$\int \dfrac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٢٧}{\text{هـ}^{\text{س}} - ٣}\,\text{د س}$

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظا س}} + \text{أ لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا س} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \dfrac{\text{د س}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

وكان $\left.\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}} = ٢\,\text{هـ} + ١$ فجد قيمة الثابت أ

إذا كان $\text{قَ}(\text{س}) = \text{جا س} + \text{هـ}^{٢\text{س}}$ ، $\text{ق}(٠) = \dfrac{١}{٤}$ ،

$\text{قَ}(٠) = \dfrac{١}{٢}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق

إذا كان $\text{هـ}^{\text{ص س}} = \text{س} - \text{ص}$ فأثبت أن

$\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \dfrac{\text{ص}^{٢} - \text{ص س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س ص} + ١}$

إذا كان $هـ^{س ص} = س + ص$ أثبت أن

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - س ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س ص - ١}$$

$$\int هـ^{(٢س + ٥)^{٢}} \, د س$$

$$\int ٣س \; هـ^{٢ + لو_{هـ} س^{٢}} \, د س$$

إذا كان $ص = هـ^{(أس)}$ جد قيمة (قيم) الثابت أ التي تحقق

$ص'' - ٥ ص' + ٦ ص = صفر$

$$\int_{١}^{هـ^{٢}} \frac{١}{هـ - ١} \, د س$$

إذا كان $ق (س) = ٣^{ل (س)}$ ، حيث ل (س) قابل للاشتقاق

فأثبت أن $ق' (س) = ٣^{ل (س)} \times ل' (س) \; لو_{هـ} ٣$

$$\int هـ^{٥س} \sqrt{هـ^{٢س} + ٤ هـ^{س} + ٤} \, د س$$

إذا كان $\int ق' (س) \, د س = هـ^{١ - س^{٢}} + ٤هـ$ ، $ق' (ب) = -٢ب$

فجد قيمة (قيم) الثابت أ

طرائق التكامل

التكامل بالتعويض

في حال عدم القدرة على إجراء عملية التكامل بالطريقة المباشرة نستخدم طرق أخرى منها طريقة التعويض والتي من خلالها يتم فرض ما داخل المركب = ص ، ثم نشتق الطرفين ، ونعوض ، ومن ثم نكامل

الحالات التي من الممكن استخدام طريقة التعويض :

$\int ق(هـ(س))\,هـَ(س)\,د س = \int ق(ص)\,د ص$
حيث ص = هـ (س) ، د ص = هـَ (س) د س

$\int (أ س + م)^{ن}\,د س$

$\int (\text{اقتران مركب})^{ن}\,د س$

$\int \dfrac{(\text{اقتران مركب})^{ن}}{\sqrt{\text{اقتران مركب}}}\,د س$

$\int (\text{اقتران مركب})\,(\text{اقتران مركب})\,د س$

$\int (\text{اقتران مركب}) \times جا\,(\text{اقتران مركب})\,د س$

طريقة التكامل بالتعويض:

١. نفرض ص ما داخل المركب
٢. نجد المشتقة $\dfrac{د ص}{د س}$
٣. نجد ص في حال التكامل المحدود أو حسب الرغبة
٤. نعوض في التكامل الأصلي قيمة ص ، د س
٥. نختصر
٦. نجري التكامل (مع الحدود الجديدة)
٧. نجد قيمة التكامل

نتيجة : برهن أن

$\int (أ س + م)^{ن}\,د س = \dfrac{(أ س + م)^{ن+١}}{أ\,(ن+١)}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية باستخدام طريقة التعويض

$\int س^{٢}\,(٦ س^{٣} + ٥)^{٣}\,د س$

$\int ٦ س^{٥}\,(س^{٦} + ٤)^{٧}\,د س$

$\int ٥ س^{٤}\,(س^{٥} + ٢)^{٣}\,د س$

$\int (س^{٢} - ٦ س + ٩)^{٤}\,د س$

$\int س^{٣}\,\sqrt[٣]{(٣ س^{٤} + ٤)}\,د س$

$\int \dfrac{س + ٢}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤ س}}\,د س$

$\int_{١}^{٢} (٢ س - ٣)^{٤}\,د س$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$$\int_{\cdot}^{٤} \frac{١}{\sqrt{٢\,\text{س} + ١}}\ \text{د س}$$

$$\int (٤\,\text{س} + ٢)\,(٢\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س})^{٣}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{-٢}{(٣ - ٦\,\text{س})^{٥}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{٦\,\text{س} - ٩}{(\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٩)^{٣}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{١٠\,\text{س} - ٥}{\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)^{٧٢}}}\ \text{د س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية باستخدام طريقة التعويض

$$\int (\text{س} + ٣)\,\sqrt[٥]{\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} - ٤}\ \text{د س}$$

$$\int \text{س}^{٣}\,(\text{س}^{٢} + ٤)^{٦}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{(\sqrt{\text{س}} + ٥)^{٩}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س}$$

$$\int \text{س}^{٧}\,\sqrt{(\text{س}^{٤} + ٤)}\ \text{د س}$$

$$\int ٢\,\text{س}^{٥}\,(\text{س}^{٢} + ٥)^{٤}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{(\text{س} + ١)^{٩}}{\text{س}^{١١}}\ \text{د س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \frac{(٥س + ٣)^{٥}}{س^{٧}} \, دس$

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧} - ٥س^{٣}} \, دس$

$\int \sqrt[٣]{٤س^{٥} + ٢س^{٣}} \, دس$

$\int (٧س^{٥} - ٢س)^{٣} \, دس$

مثال جد قيمة $\int ١٠س \, قَ(س^{٢} + ٥) \, دس$

إذا كان $\int_{١}^{٢} ق(س - ١) \, دس = ٦$ جد

$\int_{-١}^{٠} ٢ق(س + ٢) + ٤س \, دس$

إذا كان $\int_{١}^{٨} ق(س) \, دس = ١٨$ جد

$\int_{١}^{٢} س^{٢} ق(س^{٣}) \, دس$

بشكل عام :

$\int جا(أس + ب) \, دس = \frac{-١}{أ} جتا(أس + ب) + جـ$

$\int جتا(أس + ب) \, دس = \frac{١}{أ} جا(أس + ب) + جـ$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int جا(أس + ب) \, دس$

$\int جا(٥س + ٤) \, دس$

$\int ٤س \times قا^{٢}(س^{٢} + ٨) \, دس$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \text{قا}^{٢}\text{س ظا ٢س} \; \text{د س}$

$\int (\text{س} + ٣) \times \text{قتا}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤) \; \text{د س}$

$\int (\text{س}^{٢} + ١) \times \text{جا}(\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١) \; \text{د س}$

$\int \text{س ظا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٥) \; \text{د س}$

$\int_{٠}^{\pi/٢} \frac{\text{جا ٢س}}{\sqrt{١ + \text{جتا}^{٢}\text{س}}} \; \text{د س}$

$\int \frac{\text{جا ٢س}}{\sqrt{(١ + \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٥}}} \; \text{د س}$

$\int \frac{٢\text{س} + ١}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + \text{س})} \; \text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \frac{\text{جا س جتا س}}{(١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س})^{٣}} \; \text{د س}$

$\int^{٤} \text{س} \sqrt{\text{س}^{٣} + ٥} \; \text{د س}$

$\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س} + ١)^{٥}}{\text{س}^{٧}} \; \text{د س}$

$\int \frac{٣\text{س}^{٢} + ١}{(\text{س}^{٣} + \text{س} + ٧)^{٥}} \; \text{د س}$

$\int_{١}^{٣} \frac{٢}{(\text{س} + ٢)} \; \text{د س}$

$\int^{٢} (\text{س} + ٣) \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}} \; \text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \frac{٢س - ٣}{٢س^{٢} - ٦س - ٥} \, دس$

$\int \frac{٢}{(٤س^{٢} - ٢٠س + ٢٥)^{٧}} \, دس$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{س^{٢} - ٤س + ٤} \, دس$

$\int جا٤س \, جتا٨س \, دس$

$\int جا٦س \, جا٤س \, دس$

$\int جتا٣س \, جتا٧س \, دس$

$\int قا^{٢}٢س \times هـ^{ظا٢س} \, دس$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int_{١}^{٢} \frac{(هـ)^{\frac{٣}{س}}}{س^{٢}} \, دس$

$\int جا٢س \times هـ^{جتا٢س} \, دس$

$\int جا^{٥}س \, دس$

$\int جا^{٣}س \, دس$

$\int جا^{٤}س \, دس$

$\int جتا^{٤}س \, دس$

$\int جا^{٣}٢س \, جتا^{٥}٢س \, دس$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int$ جا^{4} س جتـا^{3} س د س

$\int$ جا^{4} ٥س جتـا^{3} ٥س د س

$\int$ جتا^{2} س جـا^{4} س د س

$\int$ قا^{4} س د س

$\int$ جا^{5} س جتاس د س

$\int$ جتاس جا^{2} (جاس) د س

$\int$ جد قيمة ظا^{4} س قا^{2} س د س

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int$ ظا^{3} س قا^{2} س د س

$\int$ ظا^{5} ٣س قا^{2} ٣س د س

$\int$ ظاس قا^{2} س د س

$\int$ قا^{5} س ظاس د س

$\int$ قا^{5} س جاس د س

$\int \frac{\text{جتـا ٢س}}{\text{قتـا}^{5}\text{ ٢س}}$ د س

$\int$ قتا^{3} س ظتا^{3} س د س

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \text{قتا}^{٤}\ ٦\text{س}\ \text{ظتا}^{٣}\ ٦\text{س}\ \text{د س}$

$\int \dfrac{\text{ظتا}^{٢}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$

$\int \text{س قا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\ \text{ظا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\ \text{د س}$

$\int \dfrac{(٥ + \sqrt{\text{س}})^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س}$

$\int \dfrac{١}{\text{س}^{٢}} \sqrt{\dfrac{٢\text{س} + ١}{\text{س}}}\ \text{د س}$

$\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \dfrac{١}{\text{س}\sqrt{١ + \text{لوس}}}\ \text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int (\text{هـ})^{(\text{س}^{٣} + ٢\text{لوس})}\ \text{د س}$

$\int \dfrac{\text{س}^{٣}}{(\text{س} + ١)^{٥}}\ \text{د س}$

$\int \sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{-٣}{٤}} + ١}\ \text{د س}$

$\int \text{جا}\ ٢\text{س}\ \sqrt{٢\text{جتاس}}\ \text{د س}$

$\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{جا س}\ \text{د س}$

$\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ (١ + \text{جا س})^{٧}\ \text{د س}$