تطبيقات التَفاضُل

حلول أسئلة الكتاب

أسئلة أضافية

أسئلة مقترحة

الفرع الأدبي

للأستاذ : محمد صلاح

0787412853

أنت

تطبيقات التفاضل

التفسير الهندسي للمشتقة

منهاجي
متعة التعليم الهادف

● معادلة المماس :

$(ص - ص_1) = ق(س_1)(س - س_1)$

يمكن تسمية هذة المعادلة بمعادلة المنحنى

● ميل المماس :

$ق(س_1)$

وهي جزء من معادلة المماس

يمكن تسمية هذا الميل بميل المنحنى

● ملاحظة مهمة : آنتبه على المطلوب في السؤال

← آذا طلب السؤال ميل مماس ← فقط نشتق ونعوض

نجد $ق(س_1)$

← آذا طلب السؤال المعادلة

نعوض في المعادلة

س١: إذا كان ق(س) = ٦س٢ + ١ ، جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ٢

الحل: السؤال طلب ميل المماس، فقط نشتق ونعوض النقطة المعطاة

ق'(س) = ١٢س

ق'(٢) = ١٢ × ٢ = ٢٤ ← ميل المماس = ٢٤

س٢: إذا كان ص = ٤س + ٥ ، جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ص عندما س = ١٠

الحل: السؤال طلب ميل المماس، فقط نشتق ونعوض النقطة المعطاة

ص' = ٤

ص'١ = ٤ ← ميل المماس = ٤

س = ١٠

س٣ : إذا كان ص = ق(س) = س٣ − ٦س + ٥ فجد ميل المماس لمنحنى ق عندما س = ٢ ؟

الحل : ق'(س) = ٣س٢ − ٦

ق'(٢) = ٣(٢)٢ − ٦

= ٣ × ٤ − ٦ = ١٢ − ٦ = ٦

ميل المماس = ٦

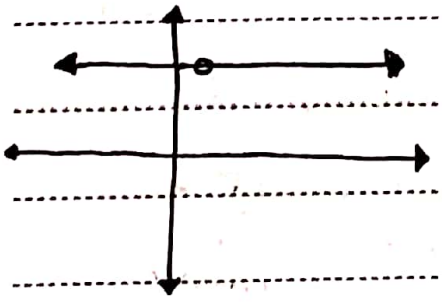
س٤ : إذا كان ق(س) = ٧ فجد ميل المنحنى ١ لمنحنى ق

ثم فسر ان ق عند س = ٥ ؟

الحل : ميل المنحنى = ميل المماس

ق'(س) = صفر

ق'(٥) = صفر ← ميل المنحنى = صفر



توضيح : عند س = ٥ ق على المستوى الديكارتي لا يوجد ميل

آذن الميل = صفر

منهاجي

٥) إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٤ب س + ٥، حيث ب عدد ثابت، وكان ميل المماس عند س = ١ يساوي ٤، جد قيمة الثابت ب؟

الحل: ميل المماس = ق'(س) = ق'(١)

ق'(س) = ٣س^{٢} + ٤ب

ق'(١) = ٤

٣ × ١ + ٤ب = ٤ ← ٣ + ٤ب = ٤

← ٤ب = ٤ − ٣

← ٤ب = ١ ← $\boxed{ب = \frac{١}{٤}}$

٦) إذا كان ق(س) = (٤س^{٢} + ٢ب)^{٢}، حيث ب عدد ثابت، وكان ميل المنحنى عند س = −٣ يساوي ٢، جد قيمة الثابت ب؟

الحل: ق'(س) = ٢(٤س^{٢} + ٢ب) × ٨س

ق'(−٣) = ٢ ← ٢(٤ × ٩ + ٢ب) × −٢٤ = ٢

← ٣٦ + ٢ب = $\frac{٢}{-٢٤}$ = $\frac{-١}{١٢}$

← ٣٦ × ١٢ + ٢ب = −٢٤ = ٠

منهاجي

← ١٥١٢ - ٤٨ ب = ١

← ٤٨ ب = ١ + ١٥١٢

← ٤٨ ب = ١٥١٣ ← ب = ١٥١٣ / ٤٨

س٧ : إذا كان ق(س) = س٢ - ٣س ، فجد ميل المماس لمنحنى الـ ق عند النقطة (٢ ، -٢) ؟

الحل : (٢ ، -٢)

س١ = ٢ ← ص١ = -٢

لا تستخدم فقط إذا طلب المعادلة

ق'(س) = ٢س - ٣

ق'(٢) = ٢×٢ - ٣ = ٤ - ٣ = ١

ميل المماس = ١

س^٨ : إذا كان ق(س) = ب س^٢ + ٣س + ٥ ، حيث ب عدد ثابت ، وكان ميل المماس عندما س = ٢ يساوي ١٨ ، فما قيمة الثابت ب ؟

الحل : ق'(س) = ٢ ب س + ٣

ق'(٢) = ١٨

٢ ب × ٢ + ٣ = ١٨ ← ٤ ب + ٣ = ١٨

٤ ب = ١٨ − ٣ = ١٥ ←

٤ ب = ١٦ ←

ب = ٤ ←

س^٩ : إذا كان ق(س) = −١/س ، س ≠ ٠ ، وكان ميل المماس عند س = ب يساوي ١/٩ جد قيمة الثابت ب ؟

الحل : ق'(س) = ١/س^٢ ، ق'(ب) = ١/ب^٢

١/ب^٢ = ١/٩ ← ب^٢ = ٩ ← ب = ٣ ، −٣

منهاجي
منصة التعليم الهادف

⊜ معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

← كيفية الحل عندما يطلب معادلة المماس :

١. نجد من س$_1$ المعطاة في السؤال في الاقتران الأصلي لنحصل على ص$_1$

٢. نجد ميل المماس عند س$_1$ بأشتقاق الاقتران الأصلي .

٣. نعوض كل القيم في خطوة ١ و ٢ بمعادلة $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

س ١ : إذا كان $ق(س) = س^3 + ١$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١ ؟

الحل : معادلة مماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

١. $ص_1 = ق(١) = (١)^3 + ١ = ٢$

٢. $س_1 = ١$

٣. ميل المماس ← $ق'(س) = ٣س^2$ ، $س_1 = ١$

← $ق'(١) = ٣$

٤. $(ص - ٢) = ٣(س - ١)$

س١١: إذا كان ق(س) = (٢س+١)(٣س-٤)

أجد معادلة المماس عند ما س = ٢

الحل:

معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

ص١ = ق(٢) = (٢×٢+١)(٣×٢-٤)

= ٥ × ٢ = ١٠

س١ = ٢

ميل المماس ← ق'(س) = (٢س+١)×٣ + (٣س-٤)×٢

عند س = ٢

ق'(٢) = (٢×٢+١)×٣ + (٣×٢-٤)×٢

= ١٥ + ٤ = ١٩

(ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

(ص - ١٠) = ١٩(س - ٢)

س١٢: إذا علمت أن ق(٥) = ٣ ، ق'(٥) = ٦ فجد

معادلة المماس عند س = ٥

الحل: معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

(ص - ٣) = ٦(س - ٥)

س١٣: إذا كان ق(س) = ٨س + س^{٢}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢، ٢٠)؟

الحل: عند طلب المعادلة عند نقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) يكون فقط باقي الأمام المعادلة

ميل المماس

(ص − ص$_{١}$) = ق′(س$_{١}$)(س − س$_{١}$)

(ص − ٢٠) = ق′(٢)(س − ٢)

← ميل المماس = ق′(س$_{١}$) ، س$_{١}$ = ٢

= ٨ + ٢س

ق′(٢) = ٨ + ٢×٢ = ٨ + ٤ = ١٢

← معادلة المماس (ص − ٢٠) = ١٢(س − ٢)

س١٤: إذا كان ق(س) = (س^{٢}+١)^{٢}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١؟

الحل: معادلة المماس ← (ص − ص$_{١}$) = ق′(س$_{١}$)(س − س$_{١}$)

١) ص$_{١}$ = ق(١) = (١+١)^{٢} = ٤

٢) س$_{١}$ = ١

٣) ق′(س) = ٢(س^{٢}+١)×٢س ← ق′(١) = ٢×٢×٢ = ٨

٤) المعادلة ← (ص − ٤) = ٨(س − ١)

س١٥: إذا كان ص = ٦ع^٢ + ١ ، ع = ٢س ، جد معادلة المماس للاقتران ق(س) عند س = ١؟

الحل:

معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

ص = ٦(٢س)^٢ + ١

ص١ = ق(١) = ٦(٢×١)^٢ + ١ = ٦×٤ + ١

= ٢٤ + ١ = ٢٥

٢س١ = ١

س١ = ١

ميل المماس ← ص'|_{س=١}

ص' = ٢×١٢ع س ← ص' = ٢٤س

ص'|_{س=١} = ٢٤

المعادلة ← (ص - ٢٥) = ٢٤(س - ١)

س٦: إذا كانت $\lim_{h \to 0} \frac{ق(1+h) - ق(1)}{h} = 2$

أوجد معادلة المماس لـ ق(س) عند (1، ع)؟

الحل: $\lim_{h \to 0} \frac{ق(1+h) - ق(1)}{h} = ق'(1) = 2$

$ق'(1) = 2$

معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

← $(ص - ع) = 2(س - 1)$

س١٧: جد معادلة المماس لمنحنى ق حيث ق(س) = $س + \sqrt{س}$ عند س = 1؟

الحل: معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

$ص_1 = ق(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$

$س_1 = 1$

ميل المماس = $ق'(س) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{س}}$ ← $ق'(1) = 1 + \frac{1}{2}$

← $ق'(1) = \frac{3}{2}$

∴ معادلة المماس $(ص - 2) = \frac{3}{2}(س - 1)$

س١٨: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{٢س-١}$ عند س = ٥ ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

ص١ = ق(٥) = $\sqrt{٢\times٥-١}$ = $\sqrt{١٠-١}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

∴ س١ = ٥

∴ ميل المماس = ق'(س١) = $\frac{٢}{\sqrt{٢س-١}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢س-١}}$

ق'(٥) = $\frac{١}{\sqrt{٢\times٥-١}}$ = $\frac{١}{٣}$

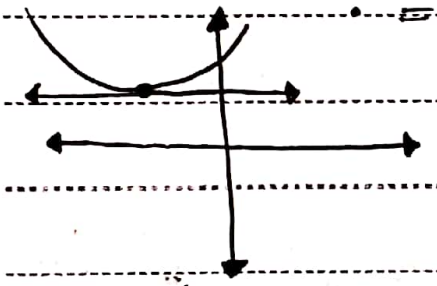
∴ معادلة المماس ← (ص - ٣) = $\frac{١}{٣}$ (س - ٥)

ملاحظة: تسمى النقطة (س١، ص١) نقطة التماس

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س١٩: جد قيم س التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٢س^٣ − ١٨س موازياً لمحور السينات ؟

الحل: موازياً لمحور السينات يعني لا يوجد ميل ، أذن ميل المماس = ٠



ق'(س) = ٦س^٢ − ١٨ = ٠

$\frac{٦س^{٢}}{٦} = \frac{١٨}{٦}$

س^٢ = ٣ ← س = ±√٣

س٢٠ أذا علمت أن ميل المماس لـ ق(س) عند النقطة (١، ٢) يساوي ٤ ، جد قيمة ق'(١) ؟

الحل:

ميل المماس عند النقطة (١، ٢)

= ق'(١) = ٤

س٢١ : إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٢س ، فجد نقطة التماس عند س = ٤

الحل : نقطة التماس ← (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

س$_{١}$ = ٤ ، ص$_{١}$ = ق(٤) = ٤^{٢} + ٢ × ٤

= ١٦ + ٨ = ٢٤

نقطة التماس ← (٤ ، ٢٤)

س٢٢ : إذا كانت معادلة المماس لعلاقة ما تساوي (ص − ٥) = ٨ (س + ٤) فما هي قيمة ميل المماس ؟

الحل : ميل المماس ← ق$'$(−٤) = ٨

س٢٣ : إذا كانت ق(س) = ٦س + ٤ ، فجد ميل المماس ؟

الحل : ميل المماس = ق$'$(س) = ٦

" حلول أسئلة الدرس "

س١: جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيمه س المبينة أمام كل منها:

أ) ق(س) = ٣س + ٥ ، س = ٢ ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق'(س١)(س − س١)

١) ص١ = ق(٢) = ٣ × ٢ + ٥ = ٦ + ٥ = ١١

٢) س١ = ٢

٣) ميل المماس = ق'(س) ، س = ٢

ق'(٢) = ٣

∴ المعادلة (ص − ١١) = ٣ (س − ٢)

ب) ق(س) = س^{٢} + ٣س − ١ ، س = ١ ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق'(س١)(س − س١)

١) ص١ = ق(١) = (١)^{٢} + ٣ × ١ − ١ = ١ + ٣ − ١ = ٣

٢) س١ = ١

٣) ميل المماس = ق'(س) = ٢س + ٣ ، س = ١

ق'(١) = ٢ + ٣ = ٥

منهاجي
منصة التعليم الهادف

.....

∴ معادلة المماس .....

..... (ص − ٣) = ٥ (س − ١) .....

.....

ب) ق(س) = (٢س − ٤)(س٢ + ١) ، س = صفر .....

.....

الحل: معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق′(س١)(س − س١)

∴ ص١ = ق(٠) = (٢ × ٠ − ٤)(٠٢ + ١) .....

= −٤ × ١ = −٤ .....

∴ س١ = صفر .....

ميل المماس ← ق′(س) ، س = صفر .....

ق′(س) = (٢س − ٤) × ٢س + (س٢ + ١) × ٢ .....

ق′(صفر) = ٠ + ٢ = ٢ .....

.....

∴ معادلة المماس ← (ص + ٤) = ٢(س − ٠) .....

ص + ٤ = ٢س .....

.....

.....

س١ : إذا كان ق(س) = $\frac{٢س+٢}{س^٢+١}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١ ؟

الحل : معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق′(س١)(س − س١)

ص١ = ق(١) = $\frac{٢×١+٢}{(١)^٢+١}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

س١ = ١

ميل المماس ← ق′(س) ، س = ١

ق′(س) = $\frac{(س^٢+١)(٢) - (٢س+٢)×٢س}{(س^٢+١)^٢}$

= $\frac{(١+١)×٢ - (٢×١+٢)×٢}{(١+١)^٢}$ = −١

∴ معادلة المماس ← (ص − ٢) = −١(س − ١)

س٢ : إذا كان ق(س) = ب س٢ + ٤ س − ٣ ، حيث ب عدد ثابت ، وكان ميل المنحنى عندما س = ٣ يساوي ٢٢ ، فجد قيمة الثابت ب .

الحل : ميل المنحنى = ق′(٣) = ٢٢

ق′(س) = ٢ ب س + ٤

ق′(٣) = ٦ ب + ٤

٦ ب + ٤ = ٢٢ ← ٦ ب = ٢٢ − ٤

٦ ب = ١٨ ← ب = ٣

س٤ : إذا كان ق(س) = س٥ + ٤ س٢ ، فجد ميل المنحنى لـ ق عندما س = ١ .

الحل : ميل المنحنى = ق′(س) ، س = ١

ق′(س) = ٥ س٤ + ٨ س

ق′(١) = ٥ × (١)٤ + ٨ × ١ = ٥ + ٨ = ١٣

س = ١ ، إذا كان ق(س) = (٣س٢ − ٢)٤ ، فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق

عند النقطة (س١ ، ق(س١)) ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق′(س١)(س − س١)

١. ص١ = ق(١) = (٣ × (١)٢ − ٢)٤

= (٣ − ٢)٤ = (١)٤ = ١

٢. س١ = ١

٣. ميل المماس ← ق′(س) ، س = ١

ق′(س) = ٤(٣س٢ − ٢)٣ × ٦س

ق′(١) = ٤ × (٣ × (١)٢ − ٢)٣ × ٦ × ١

= ٤ × ١ × ٦ = ٢٤

٤. معادلة المماس

(ص − ١) = ٢٤(س − ١)

" أسئلة أضافية "

س١: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س٣ + ٢س٢ − ٣ عند س = ١ ؟

الجواب: (ص − ٢) = ١٨ (س − ١)

س٢: إذا علمت أن ق(س) = ٢س فأوجد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٦ ؟

الجواب: ق′(٦) = ٢

س٣: إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ فأوجد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٣ ؟

الجواب: ق′(٣) = $\frac{-١}{٣}$

س٤ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{1}{2س - 1}$ عندما س = صفر ؟

الجواب : ص + ١ = -٢س

س٥ : إذا كان ق(س) = $(2س + 1)^{2}$ ، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س = ٢ ؟

الجواب : ق′(٢) = ٢٠

س٦ : إذا كان ص = ق(س) = $(3س^{2} - 2)^{4}$ ، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١ ؟

الجواب : ق′(١) = ٤٢

س٧ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{3س^{2} + 6}$ عند (١ ، ٣) ؟

الجواب : ص - ٣ = ١(س - ١)

س٧ : إذا كان ق(س) = $\frac{٢س}{٣س+٤}$ ، جد ميل المماس

ق(س) عند س = -١ ؟

الجواب : ق`(-١) = ٨

س٨ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = $\frac{٢}{٣س-١}$ ، عند (٠ ، -٢) ؟

الجواب : ص + ٢ = -٦س

س٩ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = (س - ١)(٣س)^{٢} عندما س = ١

الجواب : ص - ٤ = ١٦(س - ١)

س١٠ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢س}$

عند س = -١

الجواب : ص - ١ = $\frac{١}{٢}$(س + ١)

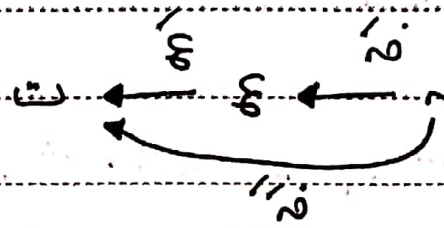
التفسير الفيزيائي للمشتقة

منهاجي
متعة التعليم الهادف

● إذا تحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن)
حيث ف : المسافة بالأمتار
ن : الزمن بالثواني فإن

← السرعة اللحظية ع(ن) = ف'(ن)
أي أن السرعة مشتقة المسافة

← التسارع اللحظي ت(ن) = ع'(ن)
أو ت(ن) = ف''(ن)
أي أن التسارع المشتقة الأولى للسرعة
أو التسارع هو المشتقة الثانية للمسافة



منهاجي
منصة التعليم الذكي

⑤ هناك ثلاث حالات لحل مثل هذا النوع من الأسئلة:

← الحالة الأولى:

الزمن معطى في السؤال ويطلب السرعة أو التسارع

س١: إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة ف(ن) = ن³ + ٣ن² + ٥

فأحسب سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثوان

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

= ٣ن² + ٦ن

بعد ٣ ثواني ← ع(٣) = ٣(٣)² + ٦×٣

= ٢٧ + ١٨ = ٤٥ م/ث

ملاحظة: السرعة م/ث، التسارع م/ث²

س٢: إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطه الأصل بالأمتار بعد ن ثانيه معطى بالعلاقه ف(ن) = ٣ن^٣ - ٣ن^٢ + ٢ ، فأحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من حركته ؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

= ٦ن - ٣

ع(٢) = ٦×٢ - ٣ = ١٢ - ٣ = ٩ م/ث

س٣: يتحرك جسم على خط مستقيم حيث كان بعده عن نقطه الأصل معطى بالعلاقه ف(ن) = √ن + ١ ، فأحسب سرعة الجسيم بعد مرور ١٦ ثانيه من حركته ؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

= $\frac{١}{٢\sqrt{ن}}$ ← ع(١٦) = $\frac{١}{٢\sqrt{١٦}}$

= $\frac{١}{٤×٢}$ = $\frac{١}{٨}$

س٤: يتحرك جسيم وفق العلاقه: ف(ن) = (٢ن + ١)^٢
حيث ف المسافه التي يقطعها الجسيم بالأمتار
ن الزمن بالثواني, جد تسارع الجسيم بعد مرور
ثانيه واحده من بدء الحركه؟

الحل: يريد التسارع ت(ن) عند ن = ١

أ. ع(ن) = ف'(ن) = ٢(٢ن + ١) × ٢ × ع ن

ب. ت(ن) = ع'(ن) = ٢(٢ن + ١) × ٤ × ٤ ن

ت(١) = ٢(٢ + ١) × ٤ × ٤ × ١ × ٨ × ١

= ٢٤ م/ث^٢ = ٣٢ + = ٥٦ جـ/ث^٢

س٥: يتحرك جسيم حسب العلاقه ف(ن) = ن^٢ / (ن + ١)
جد السرعه والتسارع لهذا الجسيم بعد مرور
ثانيتين من بدء الحركه؟

الحل:

١- ع(ن) = ف'(ن)

$= \frac{(ن+1)^2 \times 2ن - ن^2 \times 1}{(ن+1)^2} = \frac{ن^2 + 2ن}{(ن+1)^2}$

ع(٢) $= \frac{(2+1)^2 \times 2 \times 2 - (2)^2 \times 3}{(2+1)^2} = \frac{12 - 4}{9}$

$= \frac{12-4}{9} = \frac{8}{9}$ م/ث

٢- ت(ن) = ع'(ن)

$= \frac{(ن+1)^4 \times (2ن+2) - (ن^2+2ن) \times 2(ن+1)}{(ن+1)^4}$

ت(٢) $= \frac{9 \times 6 - 8 \times 6}{81} = \frac{54 - 48}{81} = \frac{6}{81}$ م/ث^2

س٦: يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٢} حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني

أحسب كل مما يلي:

١. السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١، ٤]

٢. السرعة اللحظية للجسيم بعد مرور ٢ من الثواني

الحل:

١. السرعة المتوسطة = ع̄ = $\frac{\Delta ل}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

= $\frac{ف(٤) - ف(١)}{٤ - ١}$ = $\frac{١٦ - ١}{٣}$

= $\frac{١٥}{٣}$ = ٥ م/ث

٢. السرعة اللحظية = ع(ن) = ف′(ن)

= ٢ن

ع(٢) = ٢ × ٢ = ٤ م/ث

منهاجي
منصة التعليم الهادف

سؤال: يتحرك جسيم وفق العلاقة: $ف(ن) = ٢ن^٣ + ٤ن^٢ + ٦$ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني. جد تسارع هذا الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء حركته؟

الحل: التسارع $ت(ن) = ع'(ن) = ف''(ن)$

$ع(ن) = ف'(ن)$

$= ٦ن^٢ + ٨ن$

$ت(ن) = ع'(ن) = ١٢ن + ٨$

$ت(ن) = ١٢ن + ٨$

$ت(٢) = ١٢ \times ٢ + ٨ = ٢٤ + ٨ = ٣٢ م/ث^٢$

منهاجي
منصة التعليم الحقيقي

● الحالة الثانية :

الزمن مجهول و يطلب السرعة أو التسارع

لكن سيكون هناك معطى في السؤال لإيجاد الزمن

● ملاحظات :

١. تنعدم سرعته ع (ن) = ٠

٢. ينعدم تسارعه ت (ن) = ٠

٣. التسارع عندما تكون سرعته ٩ م/ث ← ع(ن) = ٩

٤. السرعة عندما يكون التسارع ٩ م/ث^{٢} ← ت(ن) = ٩

"من خلال المعطى في السؤال نخرج الزمن"

٥. لا يوجد زمن سالب : مثلاً" ن = -٤ ✗

٦. سرعته المتوسطة تساوي سرعته اللحظية

$\overline{ع} = ع(ن)$

س: إذا كانت ف(ن) = ن^{3} − ٩ن^{2} + ١٥ن ..... هي المسافة التي يقطعها جسيم حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فأحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته؟

الحل: أولاً: الزمن مجهول لكن هنا معلومة لأن مفاجأ الزمن ← ع(ن) = ٠ ← تنعدم سرعته

ع(ن) = ف′(ن) = ٣ن^{2} − ١٨ن + ١٥

← ع(ن) = ٠ ← ٣ن^{2} − ١٨ن + ١٥ = ٠

بالقسمة على ٣ ← ن^{2} − ٦ن + ٥ = ٠

← (ن − ٥)(ن − ١) = ٠

ن = ٥ ، ن = ١

ثانياً: مطلوب التسارع ت(ن) = ع′(ن)

= ٦ن − ١٨

نعوض الزمن:

ن = ١ ← ت(١) = ٦ × ١ − ١٨ = −١٢ م/ث^{2}

ن = ٥ ← ت(٥) = ٦ × ٥ − ١٨ = ٣٠ − ١٨ = ١٢ م/ث^{2}

س٢ : يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = ٢ن^٣ - ٣ن^٢ + ٢

٢) حسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه ؟

الحل : ينعدم تسارعه ؟؟ ت(ن) = ٠

ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن^٢ - ٦ن

ت(ن) = ع'(ن) = ١٢ن - ٦

ت(ن) = ٠ ← ١٢ن - ٦ = ٠ ← ١٢ن = ٦

ن = ١/٢ ←

مطلوب السرعة عند ن = ١/٢

ع(ن) = ٦ن^٢ - ٦ن ← ع(١/٢) = ٦ × ١/٤ - ٦ × ١/٢ = ٦/٤ - ٣/٢

= ٣/٢ - ٦/٤ = -٣/٤ م/ث

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س٣: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ن^{٢} + ٤

أوجد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ١٠ م/ث^{٢}؟

الحل: الزمن غير معلوم لكن ت(ن) = ١٠

ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^{٢} − ٢ن ←

ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن − ٢

ت(ن) = ١٠ ← ٦ن − ٢ = ١٠ ←

٦ن = ١٢ ← ن = ٢

∴ مطلوب السرعة ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٢ن

ع(٢) = ٣(٢)^{٢} − ٢×٢ = ٤×٣ − ٤ = ٨ م/ث

س٤: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٦ن − ٧

أوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١٨ م/ث.

الحل: السؤال غير مباشر لكن ع(ن) = ١٨

ع(ن) = ف′(ن) = ٦ن^{٢} − ٦

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ٦

ع(ن) = ١٨ ← ٦ن^{٢} − ٦ = ١٨

ن^{٢} − ١ = ٣ ←

ن^{٢} − ٤ = ٠ ← (ن − ٢)(ن + ٢) ←

ن = ٢ ، ن = −٢

∴ مطلوب ت(ن) عند ن = ٢ ... زمن سالب ✗

ت(ن) = ١٢ن ← ت(٢) = ٢٤ م/ث^{٢}

س٥: تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطه الأصل بالأمتار بعد ن ثانيه من بدء الحركه معطى بالعلاقه ف(ن) = ع ن^٣ إذا كانت سرعته المتوسطه في الفتره الزمنيه [٠ ، ٤ ρ] تساوي سرعته اللحظيه بعد ٣ ثوان فجد قيمة الثابت ρ ؟

الحل: سرعته المتوسطه = سرعته اللحظيه ← $\bar{ع}$ = ع(ن)

أولاً: نجد السرعه المتوسطه

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{ف(٤ρ) - ف(٠)}{٤ρ - ٠} = \frac{٦٤ ρ^{٣}}{٤ρ}$$

$$= ١٦ ρ^{٢}$$

ثانياً: نجد السرعه اللحظيه ← ع(ن) = ف'(ن) = ٨ن

ن = ٣ ← ع(٣) = ٢٤

∴ المعطى $\bar{ع}$ = ع(ن) ← ١٦ ρ^٢ = ٢٤

$$ρ^{٢} = \frac{٢٤}{١٦} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

$$ρ = \sqrt{\frac{٣}{٢}}$$

س٦: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = م(ن-١)٢
حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني
م، ن ثابتان إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثواني
تساوي ١٢ م/ث فجد قيمة الثابت م ؟

الحل: ع(٤) = ١٢

ع(ن) = ٢م(ن-١) ←

ع(٤) = ١٢

١٢ = ٣×٢م ← ١٢ = ٢م(٤-١)

٦م = ١٢ ← م = ٢

س٧: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن٢ + ١
جد المسافة التي يقطعها الجسم عندما تكون
سرعته ٢ م/ث ؟

الحل: سرعته ٢ م/ث ← ع(ن) = ٢

ع(ن) = ٢ن ← ٢ = ٢ن ← ن = ١

∴ المطلوب المسافة عند ن = ١ ، ف(١) = ٢(١)٢ + ١ = ٢ م

" حلول أسئلة الكتاب "

س١: إذا كانت ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} هي المسافة التي يقطعها الجسم بالأمتار بعد ن ثانية فجد:

أ. السرعة بعد مرور ثانيتين على بدء الحركة؟

الحل:

ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن

ع(٢) = ٣×٤ + ٦×٢ = ١٢ + ١٢ = ٢٤ م/ث

ب. التسارع عندما تكون السرعة ٩ م/ث؟

الحل: ت(ن) = ع'(ن) = ف''(ن)

ت(ن) = ٦ن + ٦

التسارع عندما تكون ع(ن) = ٩

٣ن^{٢} + ٦ن = ٩

٣ن^{٢} + ٦ن − ٩ = ٠

ن^{٢} + ٢ن − ٣ = ٠ ← (ن + ٣)(ن − ١)

ن = −٣ ✗ ، ن = ١ ←

∴ ت(ن) = ٦ن + ٦

ت(١) = ٦×١ + ٦ = ١٢ م/ث^{٢}

س٢: تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢ن٢ + ٣ن إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، ٢ع] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثوان من بدء، فجد قيمة ع؟

الحل: السرعة المتوسطة = السرعة اللحظية

$\bar{ع} = ع(ن)$

$\bar{ع} = \frac{ف(٢ع) - ف(٠)}{٢ع - ٠} = \frac{٢ع٢}{ع} = ٢ع$

ع(ن) = ف'(ن) = ٤ن

ع(٣) = ٤ × ٣ = ١٢ م/ث

$\bar{ع} = ع(ن)$

٢ع = ١٢ ← ع = ٦

س٣: إذا كان ف(ن) = (٢ن - ٢)^{٣} + ع يمثل المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية فجد السرعة المقطوعة بعد ع ثواني من بدء الحركة؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن) = ٣(٢ن - ٢)^{٢} × ٢

= ٦(٢ن - ٢)^{٢}

ع(٤) = ٦(٢×٤ - ٢)^{٢} = ٦(٦)^{٢}

= ٦ × ٣٦ = ٢١٦ م/ث

س٤: إذا مثل الاقتران ف(ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته، وكان ف(ن) = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥ فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^{٢}؟

الحل: الزمن مجهول ولكن ت(ن) = ع

ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٢ن

ت(ن) = ٦ن - ٢ ← ت(ن) = ع

← ٦ن - ٢ = ع

← ٦ن = ٦ ← ن = ١

ن: طلاق السرعة ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٢ن

ع(١) = ٣ − ٢ = ١ م/ث

س٥: حل السؤال الوارد في بداية الدرس:

إذا تحركت سيارة وكان موقعها في اللحظة ن

معرفاً بالاقتران ف(ن) = ٣ن^{٢} − ٤ن + ٦

حيث ف المسافة التي تقطعها السيارة بالأمتار

ن الزمن بالثواني فجد سرعة السيارة بعد مرور

٤ ثوان من بدء الحركة؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن − ٤

ع(٤) = ٦ × ٤ − ٤ = ٢٠ م/ث

" أسئلة أضافية "

س١: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٩ن + ١
حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم عندما
سرعته ١٢ م/ث جد تسارعه ؟

الحل: الجواب: ن = ١
ت(١) = ٦ م/ث^{٢}

س٢: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٦ن + ٣
حيث ف المسافة المقطوعة بالأمتار ن الزمن
بالثواني ما تسارع الجسيم بالدقيقة ن ؟

الجواب: ت(ن) = ١٢ن

س٣: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٤ حيث ف المسافة بالأمتار
ن الزمن بالثواني جد سرعة الجسم بعد مرور ٤
ثواني من بدء الحركة ؟

الجواب: ع(٤) = ٢٤ م/ث

س٤: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن³ − ٤ن² + ٨ن حيث ن المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني، جد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث²

الجواب: ن = ٢

ف(٢) = ٨ م

س٥: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران ف(ن) = ٢ن³ − ن² + ٨ جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث²؟

الجواب: ن = ½

ع(½) = ٢½ م/ث

س٦: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران
ف(ن) = ن^٣ − ٦ن^٢ + ٩ن + ٦ ، ن ≥ ١
جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١ م/ث ؟

الجواب: ن = ٤ ، ن = ٢/٣ تهمل ن = ١
ت(٤) = ١٠ م/ث^٢

س٧: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^٣ − ٣ن^٢
ن ≥ ٠ جد المسافة التي يقطعها الجسم عندما
يكون تسارعه ٣٠ م/ث^٢ ؟

الجواب: ن = ٣
ف(٣) = ٢٧ م

تطبيقات الاشتقاق

منهاجي
منصة التعليم الهادف

● القيم أو الأعداد الحرجة : هي قيم س التي يكون عندها المشتقة الأولى تساوي صفر "أصفار المشتقة الأولى"

● النقاط الحرجة : هي ناتج تعويض أصفار المشتقة الأولى في الاقتران الأصلي وتكون عبارة عن أزواج مرتبة (س ، ق(س))

س١: إذا كان ق(س) = س٢ - س جد القيم الحرجة ؟

الحل:

ق'(س) = ٢س - ١

ق'(س) = ٠ ← ٢س - ١ = ٠

← ٢س = ١ ← س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = { $\frac{١}{٢}$ }

س٢: إذا كان ق(س) = ٢س٣ - ٨س + ٤ جد الأعداد الحرجة؟

الحل: ق'(س) = ٤س - ٨

ق'(س) = ٠ ← ٤س - ٨ = ٠

← ٤س = ٨ ← س = ٢

∴ س = {٢} عدد حرج

س٣: إذا كان ق(س) = س٣ - ١٢س + ٣ جد النقاط الحرجة؟

الحل: نقاط حرجة ← أزواج مرتبة

أولاً: نشتق لإيجاد القيم الحرجة

ق'(س) = ٣س٢ - ١٢

ق'(س) = ٠ ← ٣س٢ - ١٢ = ٠ ← س٢ - ٤ = ٠

← (س - ٢)(س + ٢)

← س = ٢ ، س = -٢

ثانياً: نكون القيم الحرجة في ق(س) لاً يجاد

ق(٢)، ق(-٢) النقاط الحرجة

← ق(٢) = (٢)^{٣} - ١٢(٢) + ٣ = ٨ - ٢٤ + ٣

= -١٦ + ٣ = -١٣

← ق(-٢) = (-٢)^{٣} - ١٢(-٢) + ٣ = -٨ + ٢٤ + ٣

= ١٦ + ٣ = ١٩

∴ النقاط الحرجة (٢، -١٣)، (-٢، ١٩)

س٥: إذا كان ق(س) = س^{٣} + س^{٢} جد القيم الحرجة؟

الحل:

ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢س

ق'(س) = ٠ ← ٣س^{٢} + ٢س = ٠

← س(٣س + ٢) = ٠

← س = ٠، ٣س + ٢ = ٠

← ٣س = -٢ ← س = $\frac{-٢}{٣}$

∴ القيم الحرجة س = {٠، $\frac{-٢}{٣}$}

منهاجي
منصة التعليم الذكي

● عندما يطلب السؤال قيمة مجهول ، ويكون مكتوب في السؤال أحد هذه الكلمات : قيم حرجة ، عد حرج ، نقطة حرجة ، تشتق ونساوي بالصفر لإيجاد قيمة المجهول .

س٦ : إذا كان ق(س) = $أ س^{٢} - ٣س$ وكان للاقتران نقطة حرجة عند س = ١ ، جد قيمة الثابت أ ؟

الحل : نقطة حرجة عند س = ١ ← ق'(١) = صفر

ق'(س) = ٢أ س − ٣

ق'(١) = صفر ← ٢أ × ١ − ٣ = صفر

٢أ = ٣ ← $\boxed{أ = \frac{٣}{٢}}$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س٧: إذا كان ق(س) = (٥س + ب)^{٢}، وكان للاقتران ق(س) قيمة حرجة عند س = ٣ جد قيمة الثابت ب؟

الحل: قيمة حرجة ← ق'(٣) = صفر

ق'(س) = ٢(٥س + ب) × ٥

ق'(٣) = صفر ←

٢(٥ × ٣ + ب) × ٥ = صفر ←

(١٥ + ب) = صفر ← ١٥ + ب = صفر ←

ب = −١٥ ←

منهاجي
منصة التعليم الهادف

فترات التزايد و التناقص :

طريقة ٢ لإيجاد فترات التزايد و التناقص :

١. نجد القيم الحرجة و نعينها على خط الأعداد

٢. نأخذ قيمة أقل من القيمة الحرجة و نعوض في الاقتران المشتق فإذا كانت القيمة الناتجة موجبة يكون الاقتران متزايد , سالبة يكون متناقص

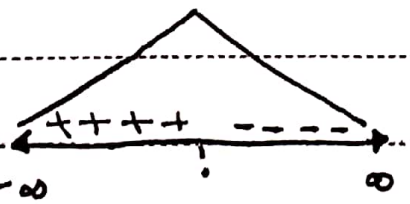
٣. نأخذ قيمة أكبر من القيمة الحرجة و نعوض في الاقتران المشتق فإذا كانت القيمة الناتجة موجبة يكون الاقتران متزايد , سالبة يكون متناقص

س١ : جد فترات التزايد و التناقص فإذا كان ق(س) = ٣ - ٤س٢ ؟

الحل :

١. ق'(س) = -٨س ← -٨س = ٠ ← س = ٠

٢. نعين على خط الاعداد



٣. ١ > ٠ ← ق'(١) = -٨ / -١ < ٠ ← ق'(-١) = ٨

ج: فترات التزايد من $(-\infty, 0]$

فترات التناقص من $[0, \infty)$

س٢: إذا كان $ق(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$

جد فترات التزايد والتناقص؟

الحل:

١. $ق'(س) = ١٢س^{٢} - ١٢س$

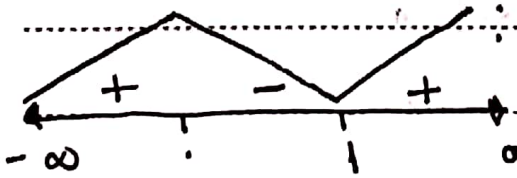
$ق'(س) = ٠ \leftarrow ١٢س^{٢} - ١٢س = ٠$

$\leftarrow س(١٢س - ١٢) = ٠$

$س = ٠ \quad ، \quad ١٢س - ١٢ = ٠$

$س = ١$

٢. نبين على خط الأعداد:



٣. $٠ < ١ \leftarrow ق'(٠) = ١٢ \times ٠ - ١٢ \times ٠ = ٠ - ٠ = ٠$

$\frac{١}{٢} < ١ \leftarrow ق'(\frac{١}{٢}) = ١٢ \times \frac{١}{٤} - ١٢ \times \frac{١}{٢} = ٣ - ٦ = -٣$

$-١ < ٠ \leftarrow ق'(-١) = ١٢ - ١٢ \times -١ = ١٢ + ١٢ = ٢٤$

ع. فترات التزايد : $(-\infty, 0]$

$[1, \infty)$

أو $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

فترات التناقص : $[0, 1]$

س٣. إذا كان $ق(س) = س^3 - 3س^2 - 9س$ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة ؟

١. القيم الحرجة ← $ق'(س) = 3س^2 - 6س - 9$

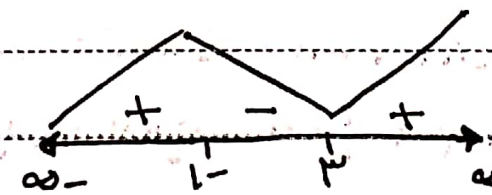
$ق'(س) = 0$ ← $3س^2 - 6س - 9 = 0$

← $س^2 - 2س - 3 = 0$

← $(س - 3)(س + 1) = 0$

← القيم الحرجة $س = \{3, -1\}$

٢.



تزايد $(-\infty, -1]$

$[3, \infty)$

تناقص $[-1, 3]$

س٤: إذا كان ق(س) = س٣ − ٦س ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة؟

الحل:

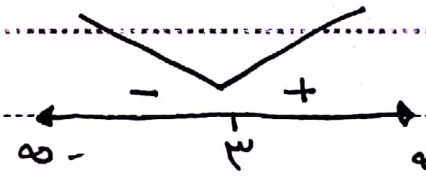
١. قيم حرجة ← ق'(س) = ٣س٢ − ٦

ق'(س) = ٠ ← ٣س٢ − ٦ = ٠

٣س٢ = ٦ ← س = ٣ قيمة حرجة

٢. متناقص على [−∞ ، ٣]

متزايد على [٣ ، ∞)



س٥: إذا كان ق(س) = ١ − ٣س ، جد القيم الحرجة وفترات التزايد والتناقص؟

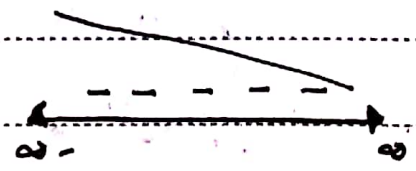
الحل:

١. قيم حرجة ← ق'(س) = −٣

ق'(س) = ٠ ← −٣ = ٠ ؟؟ −٣ ≠ ٠ لا يوجد قيم حرجة

٢. تزايد لا يوجد

تناقص على (−∞ ، ∞)

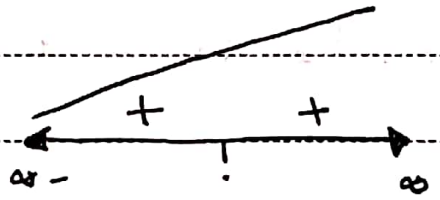


س٦: إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢ جد فترات الإتزايد والإتناقص والقيم الحرجة؟

الحل: قيم حرجة ← ق'(س) = ٣س^{٢}

ق'(س) = ٠ ← ٣س^{٢} = ٠ ← س = ٠

قيمة حرجة



٢

تزايد: (-∞, ∞)

تناقص لا يوجد

س٧: بين أن الدالة ق(س) = س^{٣} + ٣س متزايدة على مجموعة الأعداد الحقيقية؟

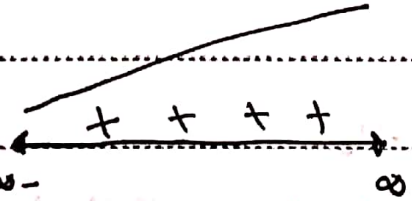
الحل: ق'(س) = ٣س^{٢} + ٣

ق'(س) = ٠ ← ٣س^{٢} + ٣ = ٠ ← س^{٢} + ١ = ٠

س^{٢} = -١ معقول ؟؟

مستحيل قيمة تربيعية

تناقص سالب



∴ ق(س) ← متزايدة على ح ← لا يوجد قيم حرجة

س٨ : آ ذا كان ق(س) = أ س^{٢} + ب س وكان ق(١) = ٢

وكان لـ ق(س) نقطة حرجة عند س = ١ ، جد قيمة كل

من الثابتين أ ، ب ؟

الحل : ← ق(١) = ٢

← أ + ب = ٢ ـــ ①

ق(س) نقطة حرجة عند س = ١ ← قَ(١) = ٠

قَ(س) = ٢ أ س + ب

قَ(١) = ٠ ← ٢ أ + ب = ٠ ـــ ②

← -١ × (أ + ب = ٢) = ـــ أ ـــ ب = -٢ ـــ ①

= أ ـــ ب = -٢ ـــ ③

٢ أ + ب = ٠ ـــ ②

① + ② ـــــــــــــــــــــــــــ

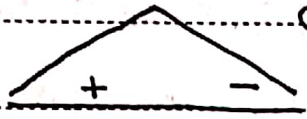
أ = -٢ وبتعويض بالمعادلة ②

← ٢ × -٢ + ب = ٠ ← ب = ٤

منهاجي
منصة التعليم الهادف

⑭ القيم القصوى نوعين :

١. عظمى ← تنتج من تغويض صفر المشتقة في الاقتران الداخلي

يكون شكل العظمى ← 

رأس مدبب للأعلى

٢. صغرى ← تنتج من تغويض صفر المشتقة في الاقتران الداخلي

يكون شكل الصغرى ←

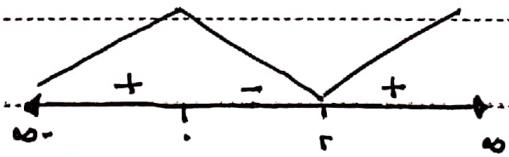
رأس مدبب للأسفل

س١ : إذا كان ق(س) = $\frac{1}{3}$ س^{3} − س^{2} جد القيم القصوى ؟

الحل :

ق′(س) = ٣ × $\frac{1}{3}$ س^{2} − ٢س = س^{2} − ٢س

← س^{2} − ٢س = ٠ ← س(س − ٢) = ٠ ← س = ٠ ، س = ٢



∴ قيمة عظمى عند س = ٠ ← (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)

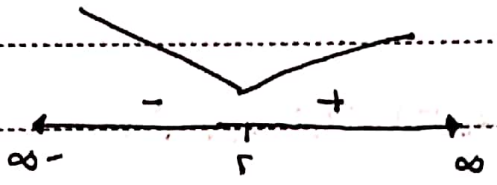
∴ قيمة صغرى عند س = ٢ ← (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، $\frac{-4}{3}$)

س٢: إذا كان ق(س) = س٢ − ٤س + ١، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة؟

الحل: ق'(س) = ٢س − ٤

ق'(س) = ٠ ← ٢س − ٤ = ٠ ← ٢س = ٤ ← س = ٢

قيمة حرجة



∴ فترات التزايد]٢، ∞[/ ∴ عظمى لا يوجد

فترات التناقص]−∞، ٢[/ ∴ صفر ق عند س = ٢

(٢، ق(٢)) = (٢، −٣)

س٣: إذا كان ق(س) = س٣ − ٦س٢ + ٥س − ٦، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة؟

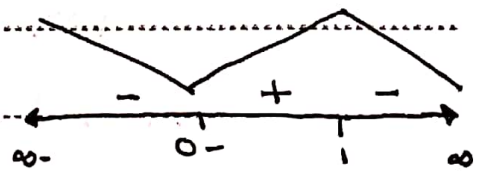
الحل: ق'(س) = ٣س٢ − ١٢س + ٥

ق'(س) = ٠ ← ٣س٢ − ١٢س + ٥ = ٠ ← ب٢ − ٣

س٢ + ٤س + ٥ = ٠ ← (س + ٥)(س − ١)

س = −٥ ، س = ١

القيم الحرجة



منهاجي
منصة التعليم الحادث

.....

.....

∴ فترات التزايد : $[-\infty, -1]$

∴ فترات التناقص : $(-\infty, -5] , [-1, \infty)$

∴ عظمى عند $س = -1 \leftarrow (-1, ق(-1)) = (-1, 2)$

∴ صغرى عند $س = -5 \leftarrow (-5, ق(-5)) = (-5, -36)$

.....

س٣ : إذا كان $ق(س) = س(س^2 - 3س^2)$ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

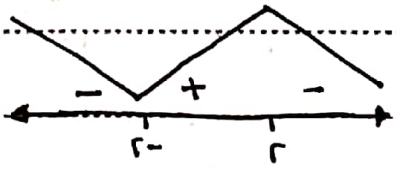
الحل : $ق'(س) = س(3س^2 - 6س) + (س^3 - 3س^2)$

$= 3س^3 - 6س^2 + س^3 - 3س^2 = 4س^3 - 9س^2$

$ق'(س) = صفر \leftarrow 4س^3 - 9س^2 = 0 \div س^2 \leftarrow 4س - 9 = 0$

$\leftarrow (س - 2)(4س + 9)$

$\leftarrow س = 2 , س = -\frac{9}{4}$



قيم حرجة

.....

∴ فترات التزايد : $[-\frac{9}{4}, 2]$

∴ فترات التناقص : $(-\infty, -\frac{9}{4}] , [2, \infty)$

∴ عظمى عند $س = -\frac{9}{4} \leftarrow (-\frac{9}{4}, ق(-\frac{9}{4})) = (-\frac{9}{4}, \frac{243}{64})$

∴ صغرى عند $س = 2 \leftarrow (2, ق(2)) = (2, -20)$

منهاجي
منصة التعليم الذكية

س٤ : إذا كان ق(س) = ١ - ٢س ، جد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى و القيم الحرجة ؟

الحل : ق'(س) = -٢ ← -٢ ≠ ٠ ، لا يوجد قيم حرجة

∴ فترات التزايد لا يوجد

متناقص دائماً

∴ فترات التناقص (-∞ ، ∞)

∴ عظمى لا يوجد ، صغرى لا يوجد

س٥ : إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢ ، جد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى و القيم الحرجة ؟

الحل : ق'(س) = ٣س^{٢} ← ٣س^{٢} = ٠ ← س = ٠

قيمة حرجة

∴ فترات التزايد : (٠ ، ∞)

∴ فترات التناقص : لا يوجد متناقص دائماً

∴ عظمى لا يوجد ، صغرى لا يوجد

س٦ : إذا كان ق(س) = ٦س - ٣س٢ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

الحل : لاحظ ان مشتقتو جاهزه

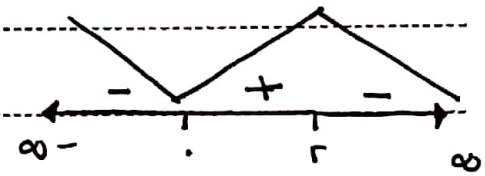
ق'(س) = ٦س - ٣س٢ ← ق'(س) = ٠

٦س - ٣س٢ = ٠ ← ب = -٣

-٣س٢ + ٦س = ٠

-٣س(س - ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢



∴ فترات تزايد : [٠ ، ٢]

∴ فترات تناقص : (-∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

∴ عظمى عند س = ٢ ← (٢ ، ق(٢)) لا يوجد ق(س) عشان يخوض

∴ صغرى عند س = ٠ ← (٠ ، ق(٠))

س٧ : إذا كان ق(س) = (٥ - س)^٣ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

الحل : ق'(س) = ٣(٥ - س)^٢ ← ق'(س) = ٠

٣(٥ - س)^٢ = ٠ ← ب = ٣

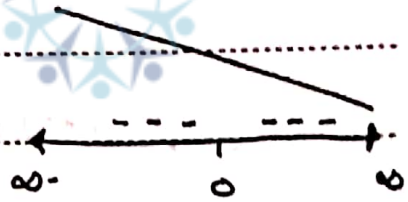
(٥ - س)^٢ = ٠ ←

س = ٥ ← قيمة حرجة

منهاجي

فترات التزايد: لا يوجد

فترات التناقص: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



قيمة عظمى: لا يوجد

قيمة صغرى: لا يوجد

في إيجاد المجاميل عندما يقول السؤال أوجد كل

١. قيمة قصوى ← نشتق ونساوي بالصفر

٢. قيمة عظمى ← نشتق ونساوي بالصفر

٣. قيمة صغرى ← نشتق ونساوي بالصفر

٤. قيمة درجة أو نقطة درجة أو عدد حرج ← نشتق ونساوي بالصفر "مشروحة سابقاً"

إذا كان $ق(س) = س^3 - ٦س^2 + ٩س$ وكان للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى عند $س = ١$ جد قيمة الثابت ٩؟

الحل: قيمة عظمى ← $ق'(١) = صفر$

$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢س + ٩$

$ق'(١) = صفر \leftarrow ٣ - ١٢ + ٩ =$

$٩ = ١٠$

س٢: إذا كان ق(س) = س٣ + ٤ ب س٢ وكان للاقتران ق(س) قيمة قصوى عند س = ٣ جد قيمة الثابت ب؟

الحل: قيمة قصوى ← ق'(٣) = ٠

ق'(س) = ٣س٢ + ٢ ب س ← ق'(٣) = صفر

← ٣×٣ + ٢ ب = صفر

← ٢٧ + ٦ ب = صفر

← ٦ ب = -٢٧ ← ب = $\frac{-٢٧}{٦}$

← $\boxed{ب = \frac{-٩}{٢}}$

س٣: إذا كان ق(س) = (س + ب)٤ وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى عند س = ١ جد قيمة الثابت ب؟

الحل: قيمة صغرى ← ق'(١) = ٠

ق'(س) = ٤(س + ب)٣ ← ق'(١١) = صفر

← ٤(١ + ب)٣ = صفر ÷ ٤

← (١ + ب)٣ = صفر ٣√ للطرفين

← ١ + ب = صفر

← $\boxed{ب = -١}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٤: إذا كانت ق(١) = -٢ ، ق َ(١) = ٠ ، ق(٣) = ٢
ق َ(٣) = ٠ ، ق(٢) = ٠ ، ق َ(٢) = ٥ ؟

١- جد القيم الحرجة ؟

الحل: القيم الحرجة هي أصفار المشتقة الأولى
← س = {١ ، ٣}

٢- جد القيم القصوى ؟

الحل: عظمى عند س = ٣ لأن ق(٣) > ق(١)
← (٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ٢)

صغرى عند س = ١ لأن ق(١) < ق(٣)
← (١ ، ق(١)) = (١ ، -٢)

س٥: إذا كانت ق َ(٤) = ٣ ، ق َ(٠) = ٠ ، ق َ(٢) = ٥
جد القيم الحرجة ؟

الحل: القيم الحرجة هي أصفار المشتقة الأولى
← س = {٠}

منهاجي
منصة التعليم الذكي

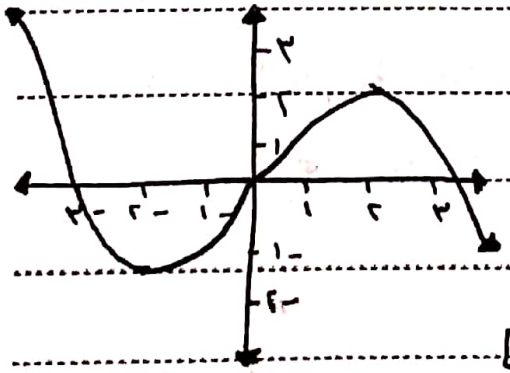
⑤ أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة من الرسم:

ورسمته قم اسد:

ملاحظات: ↗ متزايد، ↘ متناقص، → ثابت

ملاحظة مهمة: القيم الحرجة في الرسم هي القيم التي يتغير فيها الاقتران من تزايد إلى تناقص أو من تناقص إلى تزايد

س: بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى قم اسد جد:



١. جد فترات التزايد والتناقص؟

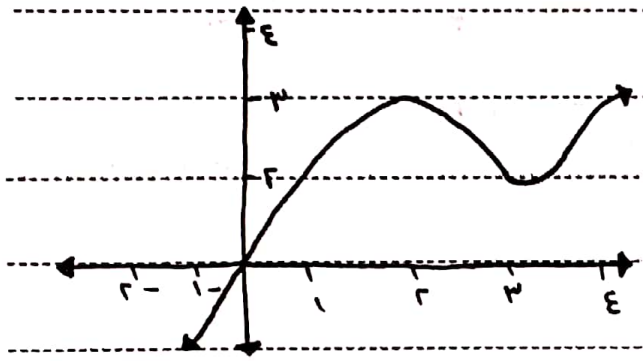
∴ فترات التناقص: $(-\infty, -2]$

$[2, \infty)$

∴ فترات التزايد: $[-2, 2]$

٢. جد القيم الحرجة ق س = $\{-2, 2\}$

س٢: جا بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) جد؟



١- أ) جد القيم الحرجة؟

س = {٠، ٢، ٣}

٢- أ) جد فترات التزايد والتناقص؟

∴ فترات التزايد: (-∞، ٢] ، [٣، ∞)

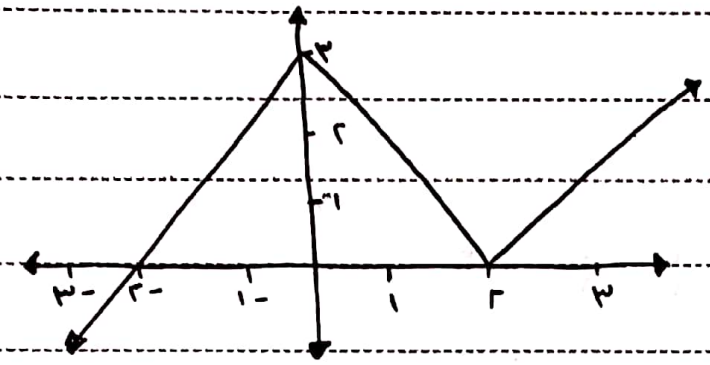
∴ فترات التناقص: [٢، ٣]

ب) جد القيم القصوى؟

← عظمى عند س = ٢ ← (٢، ق(٢)) = (٢، ٣)

← صغرى عند س = ٣ ← (٣، ق(٣)) = (٣، ٢)

س٣: باعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ف(س)؟



١. جد فترات التزايد والتناقص؟

∴ فترات التزايد: $(-\infty, 0] , [2, \infty)$

∴ فترات التناقص: $[0, 2]$

٢. جد القيم الحرجة؟

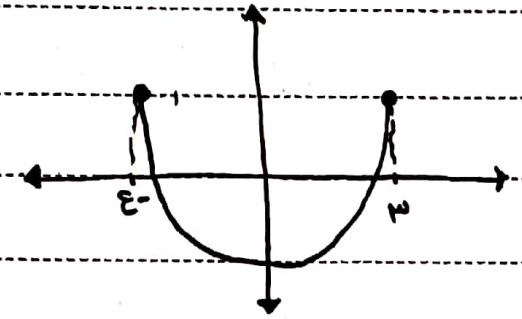
$س = \{0, 2\}$

٣. جد القيم القصوى؟

∴ عظمى عند $س = 0 \leftarrow (0, ق(0)) = (0, 3)$

∴ صغرى عند $س = 2 \leftarrow (2, ق(2)) = (2, 0)$

س٤ : معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدقتران ق(س) جد الفترات التي يكون فيها الدقتران متناقصاً ؟

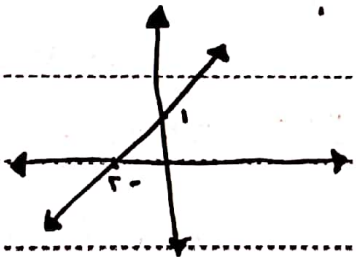


الحل :

∴ فترات التناقص

$[-\infty, -4]$

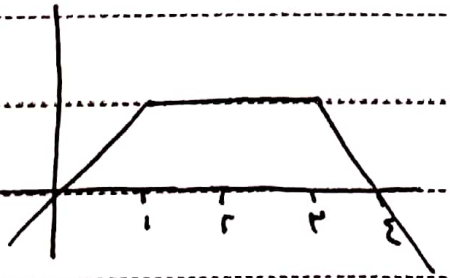
س٥ : معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) فأين ق(س) يكون متزايداً على الفترة ؟



أ) $[-\infty, -2]$ ب) $(-\infty, 1]$

ج) $(-\infty, \infty)$ د) $[-\infty, -2]$

س٦ : جد فترات التزايد والتناقص حسب الشكل الآتي الذي يمثل منحنى ق(س) ؟

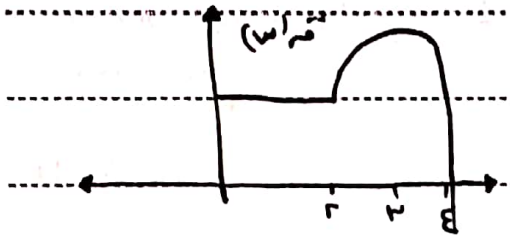


الحل : فترات التزايد $(-\infty, 1]$

فترات التناقص $[3, \infty)$

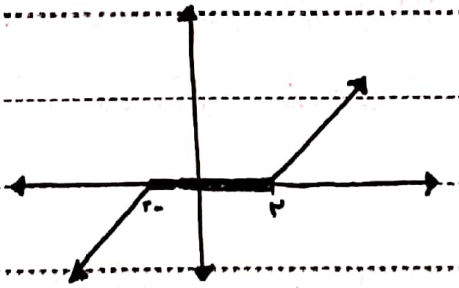
يكون ثابت $[1, 2]$

س٧: إذا كان $f'(x)$ يمثل مدخن الاقتران المرسوم
جد فترات التزايد؟



الحل:
∴ فترات التزايد
$[2,3]$

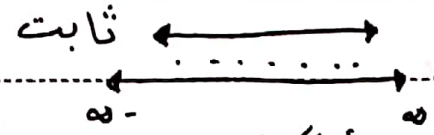
س٨: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل مدخن الاقتران
$f(x)$ جد؟



١. ما هي فترات التزايد؟
$[-2,2]$
٢. ما هي فترات التقاعر؟
$(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$
٣. متى يكون $f(x)$ = صفر؟
$x=-2,2$ لان في هذه الفترة يكون الاقتران ثابت
ومشتقه الثابت صفر

س٩: بين أن الاقتران ق(س) = ٧ ثابت لجميع قيم س؟

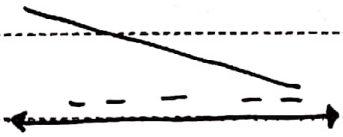
الحل: ق(س) = ٠



ق(س) ثابت لجميع قيم س دائماً عند التعويض في المشتقه يكون الناتج صفر

س١٠: بين أن الاقتران ق(س) = -١ متناقص على مجموعة الاعداد الحقيقيه؟

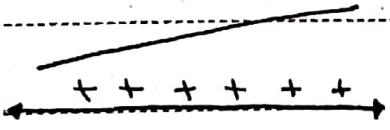
الحل: ق(س) = -١



متناقص على ح

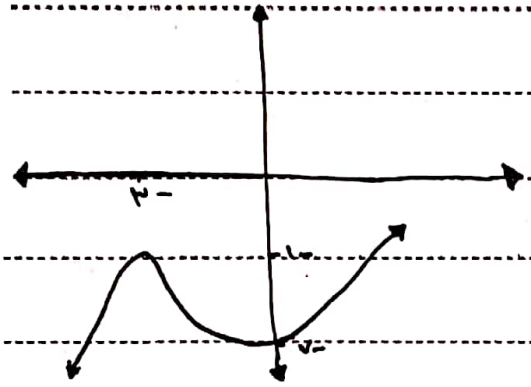
س١١: بين أن الاقتران ق(س) = ٣ متزايد على مجموعة الاعداد الحقيقيه؟

الحل: ق(س) = ٣



متزايد على ح

س١٢: باستخدام الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) جد؟



١. النقط الحرجة ؟

∴ النقاط الحرجة

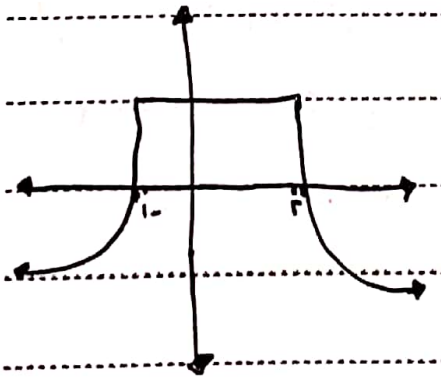
ص ن ح تحوي القيم الحرجة

في الاقتران الأصلي ← (-٣، -١)، (٠، -٧)

٢. القيم القصوى ؟ عظمى عند س = -٣ ← (-٣، ق(-٣)) = (-٣، -١)

صغرى عند س = ٠ ← (٠، ق(٠)) = (٠، -٧)

س١٣: باستخدام الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد



١. فترات التزايد والتناقص ؟

∴ فترات التزايد]-∞، -١[

∴ فترات التناقص]-١، ٢[∪]٢، ∞[

∴ ثابت]-١، ٢[

؟ يمكن أن تكون ق(س) = صفر

منهاجي
منصة التعليم الهادف

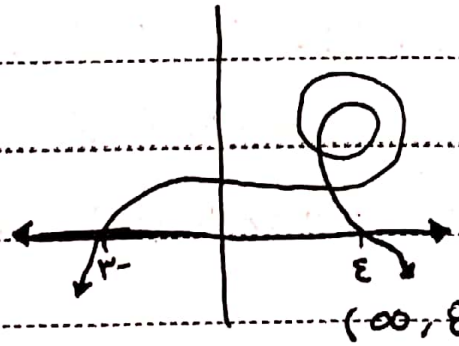
- تجد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة من الرسم:

- رسمة $f'(x)$:

- ملاحظات مهمة:

1. في رسمة $f'(x)$ نقاط التقاطع مع محور السينات هي القيم الحرجة
2. في رسمة $f'(x)$ يكون الرسم فوق محور السينات "متزايد"
3. في رسمة $f'(x)$ يكون الرسم تحت محور السينات "متناقص"

س1: اعتماداً على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f'(x)$ جد:



1. فترات التزايد والتناقص؟

∴ فترات التزايد: $[-6, -3] \cup [4, \infty)$

∴ فترات التناقص: $(-\infty, -3] \cup [3, 4]$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

٢) القيم الحرجة ؟

س = {-٣ ، ٤}

ملاحظة مهمة جداً :

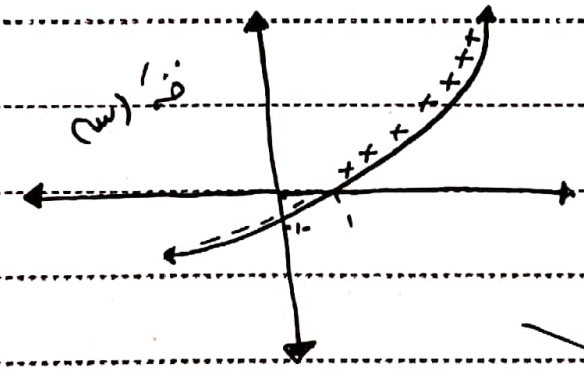
سهل على حالك بس تشوف قَ(س)

ترجم على خط الإشارات

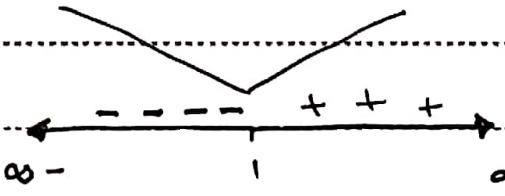
س٢ : آعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل قَ(س)

جد :

١) فترات التزايد والتناقص ؟



نترجم قَ(س)

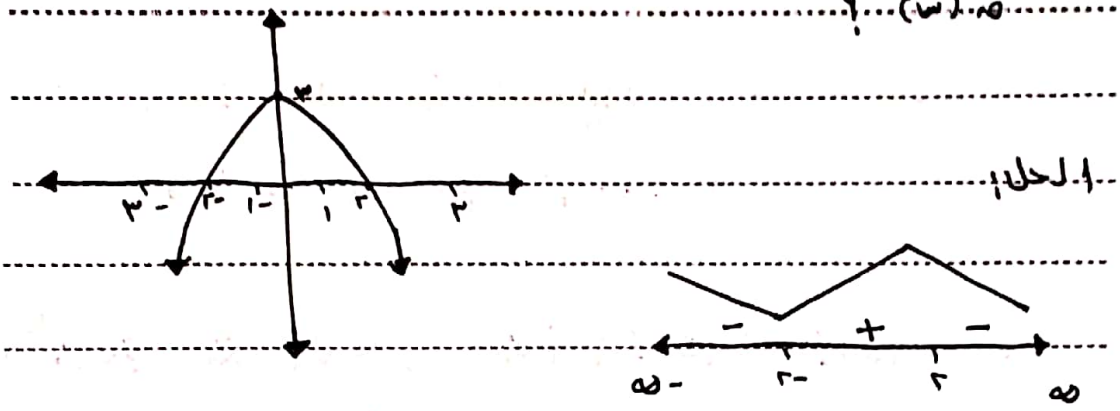


∴ فترات التزايد : [١ ، ∞)

∴ فترات التناقص : (-∞ ، ١]

٢) القيم الحرجة ؟ س = {١}

س٣: إذا اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل الاقترانين ق(س) ؟



الحل:

١. جد القيم الحرجة؟ س = {-٢، ٢}

٢. فترات التزايد والتناقص ؟

∴ متزايد:]-∞، -٢] ، [٢، هـ[

∴ متناقص: [-هـ، -٢] ، [-٢، ٢]

٣: القيم القصوى؟ القيم القصوى في ق(س) هي ناتج نقاط التقاطع مع محور السينات

∴ عظمى عند س = -٢ ← (-٢، ق(-٢))

لما عندي ق(س) عشان التعويض بنفس مثل ما هي

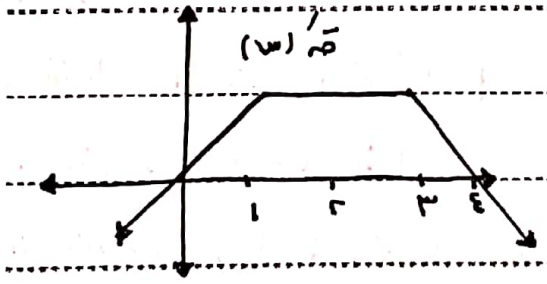
∴ صغرى عند س = ٢ ← (٢، ق(٢))

ع: جد $\lim_{h \to 0} \frac{ق(0+h) - ق(0)}{h}$ ؟

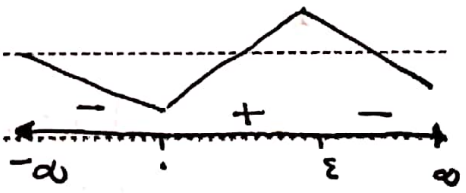
الحل: لا نخليه يضحك عليك نفس ق'(0)

ومن خلال الرسم ق'(0) = 3

س٤: يمثل الشكل المجاور منحنى الدالة ق'(س) أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة ق(س):



الحل:



∴ فترات التزايد: [٠، ٤]

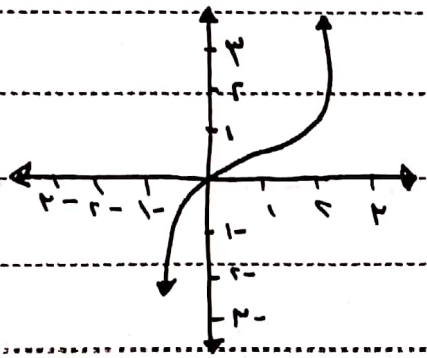
∴ متناقص: $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

س٥: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)

أ) اسم: .....

جـ) فترات التزايد والتناقص؟

الحل: .....



فترات التزايد:]-∞، ٥[

فترات التناقص:]٥، +∞[

ب) القيم الحرجة؟

الحل: س = ٥، ٢

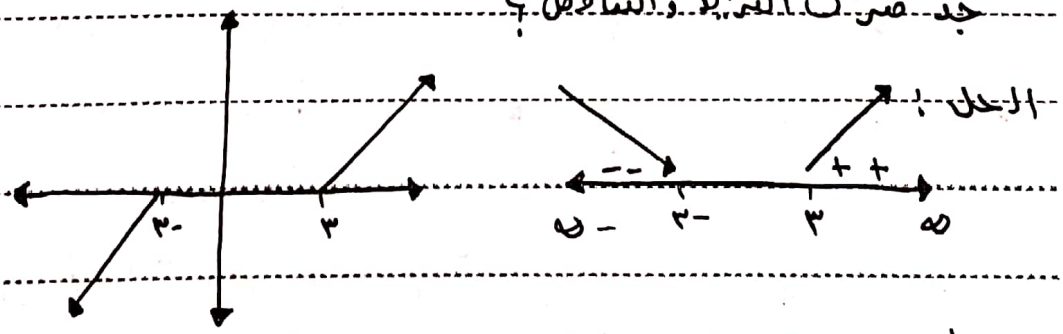
د) جـ $\lim_{ه \to ٠} \frac{ق(٢+ه) - ق(٢)}{ه}$؟

الحل: ق'(٢) = ١

س٦: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق'(س)

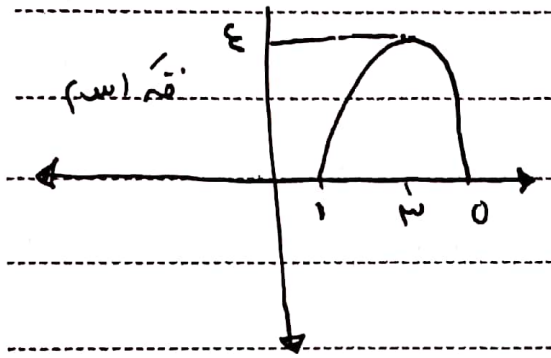
جـ) فترات التزايد والتناقص؟

الحل:

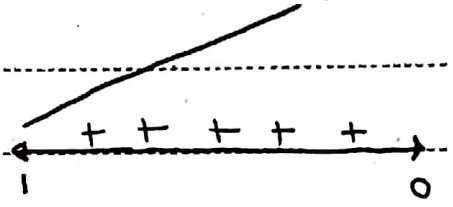


متزايد:]-٣، ٣[∪]٥، +∞[، متناقص:]-∞، -٣[∪]٣، ٥[، ثابت: {-٣، ٣، ٥}

س٧: ٢ عتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق' اسم جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى



الحل:

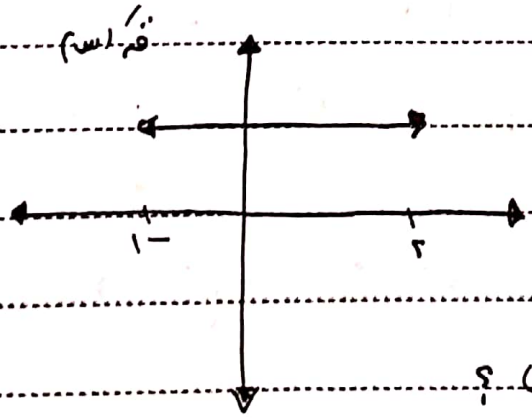


∴ فترات التزايد:]١، ٥[

∴ عظمى عند س = ٥ ← (٥، ق(٥))

∴ صغرى عند س = ١ ← (١، ق(١))

س٨: باعتماد على الشكل المجاور جد:



١. القيم القصوى؟

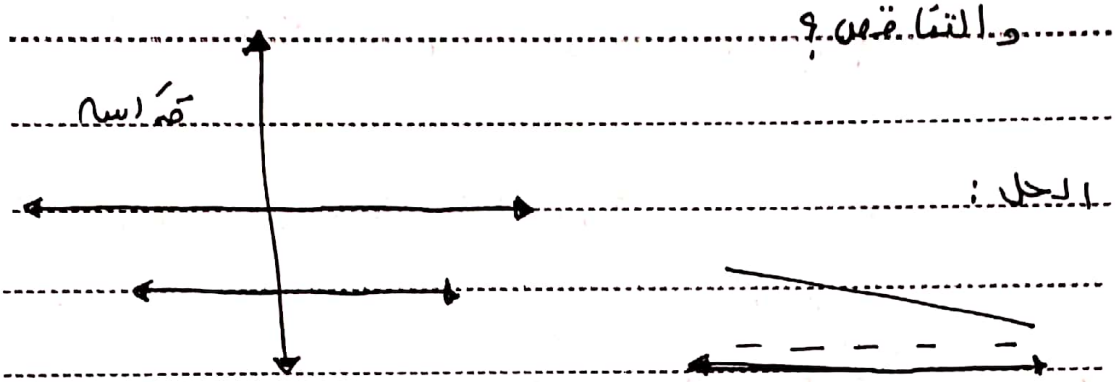
الحل: لا يوجد تقاطع مع محور السينات

∴ لا يوجد قصوى

٢. فترات التزايد والتناقص؟

متزايد على ح = (-∞، ∞)

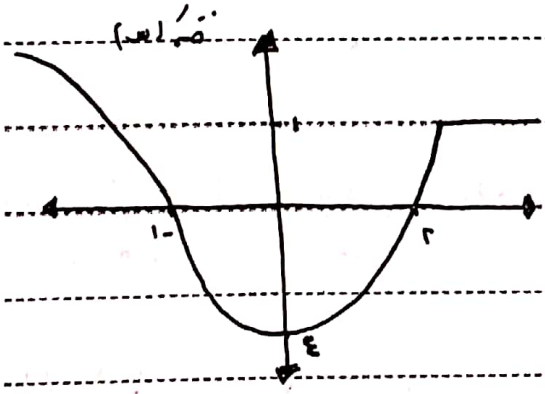
س٩: باستخدام الشكل المجاور جد فترات التزايد والتناقص؟



الحل:

متناقص على ح

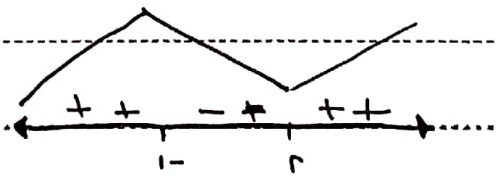
س١٠: باستخدام الشكل المجاور جد:



١. جد قيم س الحرجة؟

س = {-١، ٢}

٢. فترات التزايد والتناقص؟



∴ متزايد:]-∞، -١[

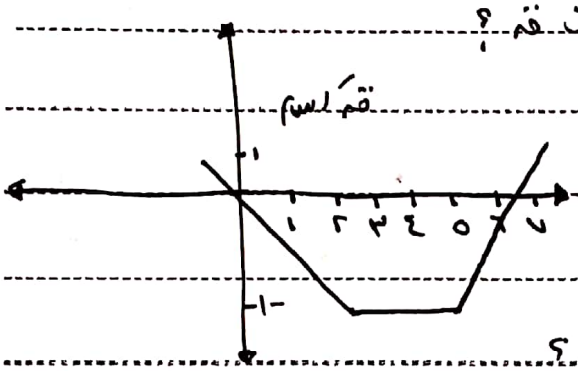
(٢، ∞[

∴ متناقص:]-١، ٢[

٣. جد ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران عندما س = ٠ إذا ق(٠) = ٤

س١١: يعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) جد كلاً مما يلي:

١. قيم س الحرجة للاقتران ق ؟



الحل: س = {٠، ٥، ٦}

٢. $\lim_{h \to 0} \frac{ق(٠+h) - ق(٠)}{h}$ ؟

الحل: ق'(٠) = ٠

٣. $\lim_{h \to 0} \frac{ق(٢+h) - ق(٢)}{h}$ ؟

الحل: ق'(٢) = -١

٤. ميل المماس المرسوم عند س = ٧ ؟

الحل: ميل مماس ؟؟ ← ق'(٧) = ١

" أسئلة الدرس "

س١: جد القيم القصوى "العظمى والصغرى" المحلية (إن وجدت):

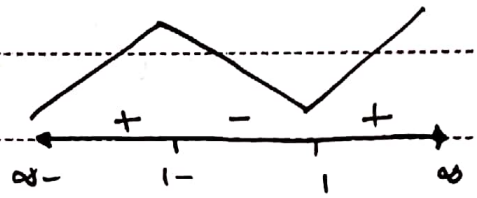
أ) ق(س) = $س^3 - 3س + 1$ ؟

الحل: ق'(س) = $3س^2 - 3$ ← $3س^2 - 3 = 0$ ÷ 3

$س^2 - 1 = 0$ ←

(س - 1)(س + 1) = 0 ←

س = 1 ، س = -1



∴ عظمى عند س = -1 ← (-1، ق(-1)) = (-1، 3)

∴ صغرى عند س = 1 ← (1، ق(1)) = (1، -1)

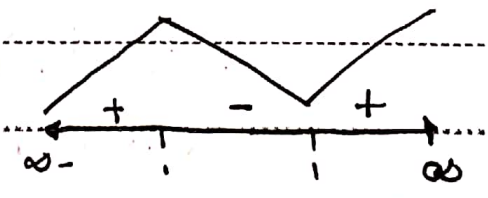
ب) ق(س) = $س^4 - 6س^2 + 1$ ؟

الحل: ق'(س) = $4س^3 - 12س$ ← $4س^3 - 12س = 0$ ÷ 4

$س^3 - 3س = 0$ ←

س(س - 1) = 0 ←

س = 0 ، $س^2 - 3 = 0$ ← $س^2 = 3$ ← س = ±√3



∴ عظمى عند س = 0 ← (0، ق(0)) = (0، 1) / ∴ صغرى عند س = ±1 ← (±1، ق(±1))

← (1، -3) ، (-1، -3)

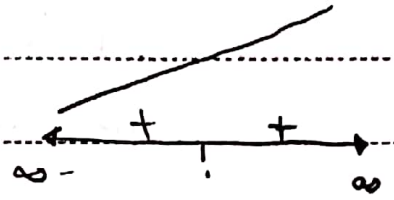
جـ) ق(س) = $س^3$ + ٤ ؟

الحل:

ق'(س) = $٣س^2$ ← $٣س^2$ = ٠ ÷ ٢

$س^2$ = ٠ ← س = ٠

∴ لا يوجد قيم قصوى



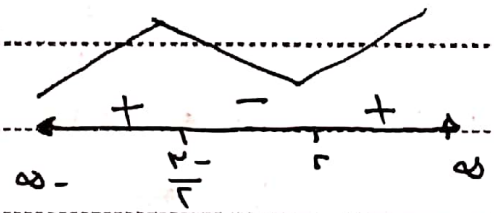
د) ل(س) = $س^3$ − $٣س^2$ − ٤س + ٨ ؟

الحل:

ل'(س) = $٣س^2$ − ٦س − ٤ ← $٣س^2$ − ٦س − ٤ = ٠

(٣س + ٢)(س − ٢) = ٠

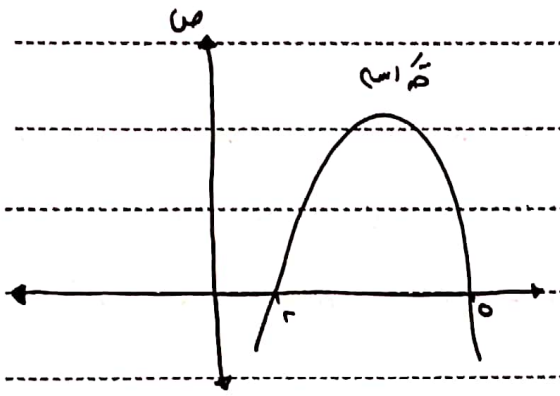
س = $\frac{-٢}{٣}$ ، س = ٢



∴ عظمى عند س = $\frac{-٢}{٣}$ ← (−$\frac{٢}{٣}$ ، ق(−$\frac{٢}{٣}$)) = ...

∴ صغرى عند س = ٢ ← (٢ ، ق(٢)) = ...

س٣ : أعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) حيث ق'(١) = ق'(٥) = ٠

جـ / 

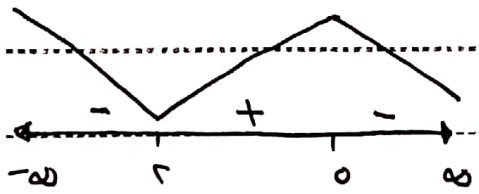
م/ قيم س الحرجة ؟

الحل :

س = ٢ ، ٥ ؟

ب/ فترات التزايد والتناقص ؟

الحل :



∴ فترات التزايد : [٢ ، ٥]

∴ فترات التناقص : (-∞ ، ٢] ، [٥ ، ∞)

جـ/ نقط القيم القصوى محددا" (نوعها) ؟

الحل :

∴ عظمى عند س = ٥ ← (٥ ، ق(٥))

∴ صغرى عند س = ٢ ← (٢ ، ق(٢))

س٤ + ٢أ ، أ كل ∈ ح فترات ق(س) = ٣س٢ − ٩س + ٤

قيمة حرجة عند س = ٢ ، جد قيمة الثابت ٩ ؟

الحل : قيمة حرجة عند س = ٢ ⟵ ق'(٢) = ٠

ق'(س) = ٦س − ٩

ق'(٢) = ٠ ⟵ ٦ × ٢ − ٩ = ٠ ⟵ ١٢ − ٩ = ٠

− ١ ÷ − ١٢ = ٩ ⟵

٩ = ١٢ ⟵

تطبيقات أقتصادية

منهاجي
متعة التعليم الهادف

- قوانين و قواعد مهمة :

أ-

١- التكلفة الكلية ← ك (س)

٢- التكلفة الحدية ← كَ (س)

ب-

١- الإيراد الكلي ← د (س)

٢- الإيراد الحدي ← دَ (س)

جـ-

١- الربح الكلي ← ر (س)

٢- الربح الحدي ← رَ (س)

- الربط بين التكلفة الكلية و الإيراد الكلي و الربح الكلي

← ر (س) = د (س) - ك (س) مهم جداً

- الربط بين التكلفة الحدية و الإيراد الحدي و الربح الحدي

← رَ (س) = دَ (س) - كَ (س)

منهاجي

مهم جداً "ممكن سؤال فيه بائرة"

← إذا كان الربح الكلي ← ر(س) = د(س) − ك(س)

← الربح الحدي ← ر'(س) = د'(س) − ك'(س)

فإن:

① ← التكلفه الكليه ← ك(س) = د(س) − ر(س)

← التكلفه الحديه ← ك'(س) = د'(س) − ر'(س)

②

← الايراد الكلي ← د(س) = ر(س) + ك(س)

← الايراد الحدي ← د'(س) = ر'(س) + ك'(س)

③

إذا كانت كل معطيات السؤال مجهولة

وطلب ايراد وكان يوجد في السؤال فقط سعر

وساعة فإن:

← الايراد ← د(س) = س × سعر الساعة

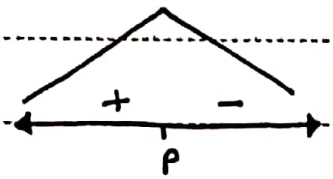
منهاجي
منصة التعليم الهادف

ملاحظة: عندما يكون المتغير مجهول في السؤال

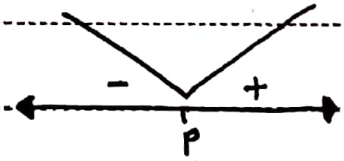
← ر(س) = س × سعر السلعة

عندما يذكر السؤال:

1. أكبر ما يمكن ←



2. أقل ما يمكن ←



س1: إذا كان المتغير الكلي للمبيعات هو ر(س) = ٦س − س² والمتغير الكلي لتكلفة المنتج ك(س) = ٢ + ٨س جد:

1. المتغير الحدي؟

الحل: المتغير الحدي ← ر'(س) = ٦ − ٢س

2. التكلفة الحدية؟

الحل: التكلفة الحدية ← ك'(س) = ٨

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س: أ) قتن ان الربح الكلي ؟

الحل: الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفه الكليه

ر(س) = ح(س) - ك(س)

= ٤٠ س - ٨ س^٢ - (٢٠ + ٦ س)

= ٤٠ س - ٨ س^٢ - ٢٠ - ٦ س

= ٣٤ س - ٨ س^٢ - ٢٠

ج) الربح الحدي ؟

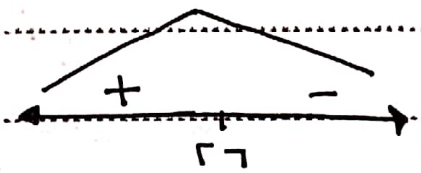
الحل: الربح الحدي ← ر'(س) = ٣٤ - ١٦ س

ه) ما قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

الحل: ر'(س) = ٠

٣٤ - ١٦ س = ٠ ← ١٦ س = ٣٤ ÷ ٢

← س = ٢٦



← الربح أكبر ما يمكن

س٢: لاحظت إحدى الشركات التي تصنع ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي ك(س) = ٠,٠٠٣ س٢ + ٠,٠٢ س + ١٠٠ دينار، وأن الربح الناتج من بيع س لعبة هو ر(س) = ٤ س. جد كل مما يأتي:

١. أقترن التكلفة الحدية؟

الحل: التكلفة الحدية = ك'(س) = ٠,٠٠٦ س + ٠,٠٢

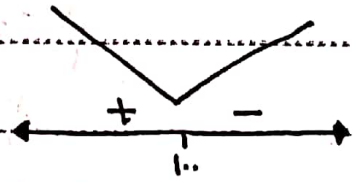
٢. عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن؟

الحل: ك'(س) = ٠ ← ٠,٠٠٦ س + ٠,٠٢ = ٠

← ٠,٠٠٦ س = -٠,٠٢ ÷ ٠,٠٠٦

← س = $\frac{-٠,٠٢}{٠,٠٠٦}$

س = $\frac{٢}{\frac{٦}{١٠٠٠}}$ = $\frac{٢٠}{٦}$ × $\frac{١٠٠٠}{٦}$ = ١٠٠٠



لأن اقترن ك قيمة صغرى عند س = ١٠٠٠ لذا فإن التكلفة أقل

منهاجي
منصة التعليم الهادف

ما يمكن عندما س = ١ لعبه

س/ إذا يراد الحدي الناتج من بيع ١٠٠ لعبه ؟

الحل:

لأجل يجاد الإيراد الحدي يجب أن يكون

لدينا الإيراد الكلي

← الإيراد الكلي = التكلفه الكليه + الربح الكلي

← ك(س) = ت(س) + ر(س)

= ٣ - ٠,٢ س + ٠,٠١ س٢ + ٤٠ س

= ٣ + ٠,٢ س + ٠,٠١ س٢

∴ الإيراد الحدي = ك'(س) = ٠,٢ + ٠,٠٢ س

ك'(١٠٠) = ٠,٢ + ٠,٠٢ × ١٠٠ = ٠,٢ + ٢ = ٢,٢ دينار

س٣ : إذا كان إقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو ر(س) = ٥٠س + ٢س^{٢} دينار ، وإقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٣س + ٤س^{٢} + ٢٠ دينار ، حيث س عدد الوحدات المباعة ، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

الحل : نكتب أولاً إقتران الربح الكلي :

ر(س) = ر(س) − ك(س)

= ٥٠س + ٢س^{٢} − (٣س + ٤س^{٢} + ٢٠)

= ٥٠س + ٢س^{٢} − ٣س − ٤س^{٢} − ٢٠

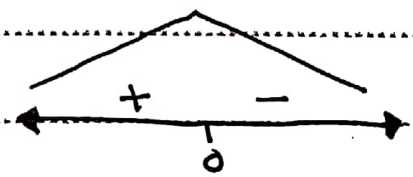
= −٢س^{٢} + ٤٧س − ٢٠

ر$'$(س) = −٤س + ٤٧ ← ر$'$(س) = ٠

← −٤س + ٤٧ = ٠

← ٤س = ٤٧ ، ÷ ٤

← س = ٤٧/٤ ← س = ٥



← الربح أكبر ما يمكن

س٤: وجد مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالقانون ك(س) = ٠٫٠٠٢ س٢ + ٠٫٦ س + ٥٠٠٠ أنا بيع الجهاز الواحد بمبلغ ٨٠ ديناراً، فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

الحل: الإيراد الكلي ← د(س) = س × ٨٠ = ٨٠ س

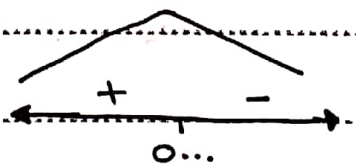
الربح الكلي = ر(س) = د(س) − ك(س)

= ٨٠ س − (٠٫٠٠٢ س٢ + ٠٫٦ س + ٥٠٠٠)

= ٨٠ س − ٠٫٠٠٢ س٢ − ٠٫٦ س − ٥٠٠٠

= −٠٫٠٠٢ س٢ + ٧٩٫٤ س − ٥٠٠٠

ر′(س) = −٠٫٠٠٤ س + ٧٩٫٤ ← ٤س / ١٠٠٠ = ٧٩٫٤ ← ٤س = ٧٩٤٠٠



س = ٥٠٠٠ ← الربح أكبر ما يمكن

س٥: وجد مصنع لانتاج أجهزة إلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لانتاج س من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالاقتران ك(س) = ٥س + ٣ أذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ - س) دينار فجد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن؟

الحل: أقتران الربح الكلي ← ر(س) = د(س) - ك(س)

لكن د يوجد أيضاً ← د(س) = س × (٢٠٠ - س)

= ٢٠٠س - س٢

← ر(س) = ٢٠٠س - س٢ - (٥س + ٣)

= ٢٠٠س - س٢ - ٥س - ٣

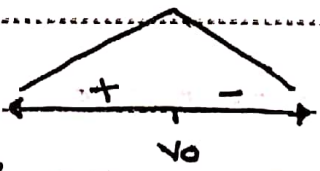
= ١٩٥س - س٢ - ٣

← ر'(س) = ١٩٥ - ٢س ← ر'(س) = ٠

← ١٩٥ - ٢س = ٠

← ٢س = ١٩٥

← س = ٩٧.٥



← الربح أكبر ما يمكن

س٦: ينتج مصنع س من أجهزة الحاسوب في الشهر ويبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٦٠ - س) دينار، إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س من الأجهزة تعطى بالعلاقة ك(س) = ٤٠٠ + ٦٠س + س² دينار، فما عدد الأجهزة التي يجب أن ينتجها ويبيعها المصنع شهرياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن؟

الحل: أ) نعلم أن الربح الكلي ← ر(س) = د(س) - ك(س)

لكن لا يوجد أي إيراد ← د(س) = س × (٢٦٠ - س)

= ٢٦٠س - س²

ر(س) = (٢٦٠س - س²) - (٤٠٠ + ٦٠س + س²)

= ٢٦٠س - س² - ٤٠٠ - ٦٠س - س²

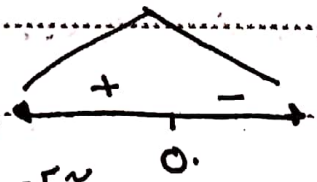
= -٢س² + ٢٠٠س - ٤٠٠

ر'(س) = -٤س + ٢٠٠ ← ر'(س) = ٠

-٤س + ٢٠٠ = ٠

-٤س = -٢٠٠

س = ٥٠



ب) أكبر ربح ممكن

منهاجي
منصة التعليم الذكي

س٧: ينتج مصنع ثلاجات س ثلاجة أسبوعياً فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقة ك(س) = س٢ + ٨س + ٣٥ وكان سعر الثلاجة ٤٠ ديناراً فما عدد الثلاجات التي يجب إنتاجها أسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل: نفترض الربح الكلي ← ر(س) = ك(س) − ك(س)

لكن لا يوجد أي بيع ← ك(س) = س × ٤

← ك(س) = ٤س

← ر(س) = ٤س − (س٢ + ٨س + ٣٥)

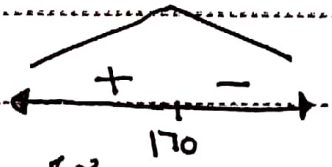
= ٤س − س٢ − ٨س − ٣٥

= −س٢ + ٣٣س − ٣٥

← ر′(س) = −٢س + ٣٣ ← ر′(س) = ٠

← −٢س + ٣٣ = ٠

← −٢س = −٣٣ ← س = ١٦٫٥



← أكبر ربح ممكن

" أسئلة الكتاب "

س١: إذا كان إقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو ر(س) = ٨٠ س + س٢ دينار، وإقتران التكلفه الكليه هو ك(س) = ٤ + ١٦ س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجه من سلعة ما فجد الربح الحدي؟

الحل: إقتران الربح الكلي ← ر(س) = ا(س) - ك(س)

← ر(س) = ٨٠ س + س٢ - (٤ + ١٦ س)

= ٨٠ س + س٢ - ٤ - ١٦ س

= - ٨٠ س + س٢ - ٤

الربح الحدي ← ر'(س) = - ٨٠ + ٢ س

س٢: ينتج مصنع الحواسيب س جهاز إسبوعياً، فإذا كانت تكلفه الإنتاج الكلي الإسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقه ك(س) = ٣٠٠ + ٥ س + س٢ وكان سعر الجهاز الواحد ٢٥٠ ديناراً، فما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع إسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل: نفترض ان الربح الكلي ← ر(س) = ب(س) − ك(س)

← ر(س) = ٥٢٥ س ← الايراد الكلي

← ر(س) = ٥٢٥ س − (٣٠٠ + ٥٠ س + س٢)

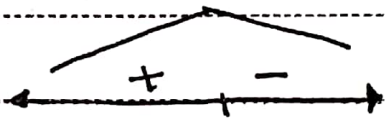
= ٥٢٥ س − ٣٠٠ − ٥٠ س − س٢

= ٤٧٥ س − ٣٠٠ − س٢

← ر´(س) = ٤٧٥ − ٢ س ← ر´(س) = ٠

← ٢ س = ٤٧٥ ÷ ٢

س = ١٠٠



← أكبر ربح ممكن

س٣: إذا كان نفترض ان الايراد الكلي للمبيعات هو

ب(س) = ٦٠ س − س٢ و نفترض ان التكلفه الكلية

هو ك(س) = ٢٠٠ + ٨ س دينار، حيث س عدد الوحدات

المنتجه من سلعة ما، فجد الربح الحدي؟

الحل: ر(س) = ب(س) − ك(س) = ٦٠ س − س٢ − ٢٠٠ − ٨ س

ر´(س) = ٥٢ − ٢ س #

س٤ : إذا كان ل(س) = ٦ اس − س٢ + ٢ ، بيّن أن

ل(س) = −٢س٢ + ٨س + ١٥ ، ثم أوجد س من

وحدات سلعة معينة وتكلفتها ، فجد س التي تجعل

الربح أكبر ما يمكن ؟

الحل : ر(س) = ل(س) − ك(س)

= ٦اس − س٢ − ٢ − (−٢س٢ + ٨س + ١٥)

= ٦اس − س٢ − ٢ + ٢س٢ − ٨س − ١٥

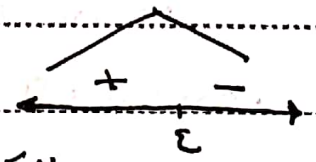
= ٤س٢ − ٢س − ٣٥

← ر′(س) = ٨س − ٦ ← ر′(س) = ٠

← ٨س − ٦ = ٠

← ٨س = ٦ ÷ ٦

← س = ٤



∴ الربح أكبر ما يمكن

س٥ : ينتج مصنع الثلاجات س ثلاجة شهرياً , فإذا كانت تكلفة انتاجها تعطى بالعلاقة

ك(س) = ٣٦٠٠ + ٤س + س٢ وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار , فجد عدد الثلاجات التي يجب أن ينتجها المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

الحل :

أ- قانون الربح الكلي ← ر(س) = ك(س) - ك'(س)

ك'(س) = ٥٠٠ س ← ك(س) = ٥٠٠ س

ر(س) = ٥٠٠ س - (٣٦٠٠ + ٤س + س٢)

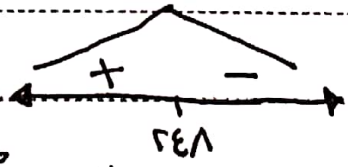
= ٥٠٠ س - ٣٦٠٠ - ٤س - س٢

= ٤٩٦ س - ٣٦٠٠ - س٢

ر'(س) = ٤٩٦ - ٢س ← ر'(س) = ٠

٤٩٦ - ٢س = ٠

٢س = ٤٩٦ ← س = ٢٤٨



ب- الربح أكبر ما يمكن

س٦: يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينه بمبلغ ٩٠ دينارًا فاذا كانت التكلفه الكليه لانتاج س وحده من هذه السلعة آسبوعيًا تعطى بالعلاقه:

ك(س) = ٠,٢ س٢ + ٤ س + ١٠٠ فجد الربح الحدي؟

الحل: ← الربح الكلي ← ر(س) = ح(س) − ك(س)

الايراد ← ر(س) = ٩٠ س

← ر(س) = ٩٠ س − (٠,٢ س٢ + ٤ س + ١٠٠)

= ٩٠ س − ٠,٢ س٢ − ٤ س − ١٠٠

= ٨٦ س − ٠,٢ س٢ − ١٠٠

← الربح الحدي ← ر'(س) = ٨٦ − ٠,٤ س #

" أسئلة أضافية "

س١: إذا كان ك قيراط التكلفه الكليه لإنتاج س .....

متعهد ما منتج معين يعطي بالعبارة ك(س) = ٣ س٢ + ٣٥ س

فأن التكلفه الحديه عندما س = ١٠ تساوي ؟

.....

الجواب : ك'(١٠) = ١٥

.....

س٢: يدنج مصنع الحواسيب س جهاز أسبوعياً فإذا كانت

تكلفه الإنتاج الكلي الأسبوعي ك(س) = ٠٠٠ ٣ + ٥٠ س + س٢

وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ ٥٢ دينار

فجد :

١. ق١ قيراط الإيراد الكلي ؟ الجواب : ر(س) = ٥٢ س

٢. ق٢ قيراط الربح الكلي ؟ الجواب : ر(س) = ٠٠٠ ٣ + ٤٧ س + س٢

٣. عدد الأجهزه التي يجب أن

يبيعها المصنع أسبوعياً لتحقيق

أكبر ربح ممكن ؟ الجواب : س = ٢٣ جهاز

.....

س٢: إذا كان المدير المالي لبيع س وحدة من منتج ما يعطى بالعلاقة ر(س) = ٦س - س٢ فأن المدير المالي عندما س = ١ يسأل؟

الجواب: ر'(١) = ٢

س٣: إذا كان ر(س) هو أقتران الربح الكلي ر(س) هو أقتران المدير المالي فجد أقتران التكلفه الحديه؟

الجواب: ك'(س) = ر'(س) - ر(س)

س٥: إذا كان ك'(س) أقتران التكلفه الكلية ر(س) أقتران المدير المالي لمصنع حيث س عدد الوحدات المنتجه أسبوعياً يكون الربح المدير أكبر ما يمكن عندما؟

الجواب: ر'(س) = ك'(س)

" أسئلة الوحدة "

س١: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٣} - ١٢ن + ٣ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم عندما تساوي سرعته ٤٢ م/ث؟

الحل: الزمن مجهول ولكن ع(ن) = ٤٢

ع(ن) = ف'(ن)

= ٦ن^{٢} - ١٢

ع(ن) = ٤٢ ← ٦ن^{٢} - ١٢ = ٤٢ ÷ ٦

ن^{٢} - ٢ = ٧

ن^{٢} = ٧ + ٢ = ٩ ← ن^{٢} = ٩

ن = ٣ ، ن = -٣

تهمل X

∴ المطلوب التسارع ت(ن) = ع'(ن)

= ١٢ن

عندما ن = ٣ ← ت(٣) = ١٢ × ٣ = ٣٦ م/ث^{٢}

س٢: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = م(ن-١)٢ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ن الزمن بالثواني إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثواني تساوي ١٢ م/ث فجد قيمة الثابت م ؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

= ٢م(ن-١)

ع(٤) = ١٢ ← ٢م(٤-١) = ١٢

← ٢م × ٣ = ١٢ ← ٦م = ١٢ ÷ ٦

← م = ٢

ع س: إذا كان ق(س) = س٢(٦-س) فجد:

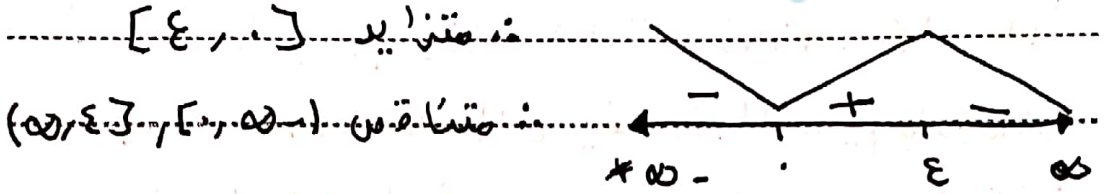
١) فترات التزايد والتناقص ؟

الحل: ق'(س) = س٢ × -١ + (٦-س) × ٢س

= -س٢ + ١٢س - ٣س٢

= -٣س٢ + ١٢س = -٣س(س-٤)

∴ ق'(س) = ٠ ← -٣س(س-٤) = ٠ ← س = ٠ ، س = ٤



∴ متزايد $[0, 4]$

∴ متناقص من $(-\infty, 0]$ ، $[4, \infty)$

∴ عند $س = 0$ قيمة صغرى ← $ق(0) = 0$ ← $(0, 0)$

∴ عند $س = 4$ قيمة عظمى ← $ق(4) = 32$ ← $(4, 32)$

س٩ : يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة بـ ساعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينار $ك(س) = س^3 - 3س^2 + 4س + 10$ دينار ، جد الربح الحدي ؟

الحل : ∵ ق(ن) الربح ← $ر(س) = ح(س) - ك(س)$

∵ الإيراد ← $ح(س) = 100س$

$ر(س) = 100س - (س^3 - 3س^2 + 4س + 10)$

$= 100س - س^3 + 3س^2 - 4س - 10$

الربح الحدي

$ر'(س) = -3س^2 + 6س + 96$

$= -3(س^2 - 2س - 32)$ #

س٧ : إذا كان ق(س) = س(٣س - ١)^{٢} فجد معادلة .....

..... المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١ ؟

الحل :

معادلة المماس

(ص - ص$_{١}$) = ق'(س$_{١}$)(س - س$_{١}$)

س$_{١}$ = ١

ص$_{١}$ = ١(٣×١ - ١)^{٢} = ٤

ق'(س) = س × ٢(٣س - ١) × ٣ + (٣س - ١)^{٢}

ق'(١) = ١ × ٢(٣ × ١ - ١) × ٣ + (٣ × ١ - ١)^{٢}

= ٢(٢) × ٣ + (٢)^{٢} = ٦ × ٣ + ٤ = ١٨ + ٤ = ٢٢

∴ معادلة المماس

(ص - ٤) = ٢٢(س - ١)

س٩: إذا كان ك(س) = ٤ + ٣س٢ يمثل اقتران التكلفة الحدية لإنتاج س قطعة من سلعة ما. جد التكلفة الحدية لإنتاج ٢ قطعة من هذه السلعة؟

الحل: ك'(س) = ٦س

ك'(٢) = ٦ × ٢ = ١٢

س١٠: إذا كان ق(س) = (٣س − ٤)^٣ فجد قيمة س التي تجعل ق'(س) = ٣٦؟

الحل: ق'(س) = ٣(٣س − ٤)^٢ × ٣

ق'(س) = ٣٦

٩(٣س − ٤)^٢ = ٣٦ ← ÷٩ ← (٣س − ٤)^٢ = ٤

بالطرفين ← ٣س − ٤ = ± ٢

٣س − ٤ = ٢	٣س − ٤ = −٢
٣س = ٦ ÷ ٣	٣س = −٢ + ٤ = ٢ ÷ ٣
س = ٢	س = ٢/٣

س١١: يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٢} − ١٢ س + ١ قيمة حرجة عند س = ٣ جد قيمة أ:

(أ) ٢ ب) ٦ ج) ١٢ د) ٢

٢. إذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٢ − س)^{٤} عند النقطة (س، ص) يساوي ٤ فإن قيمة س تساوي:

أ) −٣ ب) −٢ ج) ٢ (د) ٣

٣. إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٤ س فإن للاقتران قيمة حرجة عندما س تساوي:

أ) صفر، ١ (ب) ٢ ج) −٤ د) ٤

٤. فترة التزايد لـ ق حيث ق(س) = س٣ − ٣س٢ − ٢ هي :

أ. [٢,٣] ب. [٠,١] ج. [١,٢] د. [١-,١]

٥. يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = ٦ن٢ − ن٣
حيث ف المسافة بالأمتار التي يقطعها الجسيم
ن زمن بالثانية المسافة التي يقطعها الجسيم
بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفراً هي :

أ. ١٢ ب. ١٦ ج. ٢٤ د. ٣٢

٦. إذا كان لـ ق حيث ق(س) = أس٣ − ٣س٢ + ٢
قيمة صغرى محلية عند س = ١ فإن قيمة الثابت
أ تساوي :

أ. ٢ ب. −٢ ج. ٣ د. −٣

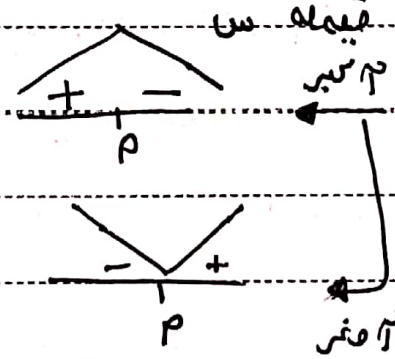
٧. إذا كان ق(س) = س٢ + ١ فإن أحد قيم المقوس
عند س = :

أ. ٠ ب. ١ ج. ٢ د. ٤

مثال: مثل في شرط تكون أ أكبر ما يمكن أ و أ أقل ما يمكن متعلقة فقط بالربح و التكلفة و الإيراد ممكن يجيبلك أي أ قترن:

خطوات الحل:

1. أشتق الاقتران
2. ساوي بالصفر
3. لحلي قيمة س
4. أرسم



قواعد وقوانين الوحدة

الدرس الأول: التفسير الهندسي للمشتقة

- معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$
- ميل المماس ← $ق'(س_1)$
- نقطة التماس ← $(س_1 ، ص_1)$

الدرس الثاني: التفسير الفيزيائي للمشتقة

- $ف(ن)$ ← المسافة ← تقاس بوحدة م
- $ع(ن)$ ← السرعة ← تقاس بوحدة م/ث
- $ت(ن)$ ← التسارع ← يقاس بوحدة م/ث^2

$ع(ن) = ف'(ن)$ ، $ت(ن) = ع'(ن)$

$ت(ن) = ف''(ن)$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

الدرس الثالث: تطبيقات الاشتقاق

- قيمة مرجة ← نشتق ونساوي بالصفر
- نقطة مرجة ← هي ناتج تعويض صفر المشتقة بالاقتران الأصلي
- تزايد ← $+$
- تناقص ← $-$
- قيمة عظمى ← هي ناتج تعويض صفر المشتقة في الاقتران الأصلي

شكل: $+$ | $-$ عند P ← $(P, f(P))$

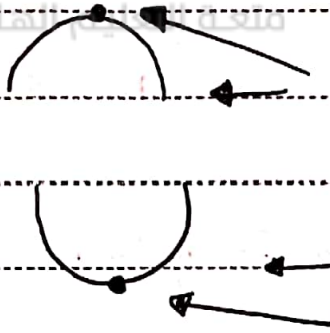
- قيمة صغرى ← هي ناتج تعويض صفر المشتقة في الاقتران الأصلي

شكل: $-$ | $+$ عند P ← $(P, f(P))$

- الرسم: $f'(x)$: متناقص ← متزايد
- $f(x)$: فترة محور السينات متزايد، تحت متناقص

منهاجي

ⓐ الرسم : عظمى ← ق(س)



صغرى ←

ⓑ الرسم : عظمى ق(س) وصغرى هي نقاط التقاطع مع محور السينات وناتجها المقابل على محور الصادات في رسمة ق(س)

ⓒ دائماً في حل السؤال من الرسم ترجم السؤال عن خط آختبار المشتقة

المدرس الرابع : خطيئات آقتصاديه :

← آذا كان الدين د مجهول ← د(س) = س × سعر السلعه

← الربح ر(س) = د(س) − ك(س)

← تكلفه ك(س) = ك(س) − ر(س)

← آيراد د(س) = ر(س) + ك(س)

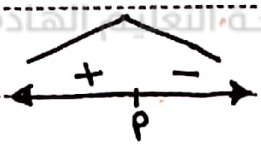
← ربح حدي ر'(س) = د'(س) − ك'(س)

← تكلفه حديه ك'(س) = د'(س) − ر'(س)

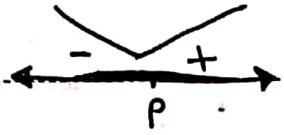
← آيراد حدي د'(س) = ر'(س) + ك'(س)

منهاجي
منصة التعليم الهادف

- أكبر ما يمكن



- أقل ما يمكن



تطبيقات التفاضل