7

التكامل والتوابع الأصلية

1 التوابع الأصلية

2 بعض قواعد حساب التوابع الأصلية

3 التكامل المحدّد وخواصه

4 التكامل المحدّد وحساب المساحة

التكامل أداة رياضياتية مهمّة تفيد في العديد من المجالات التطبيقية والبحتة، في الميكانيك، إذا عرّفنا القوّة المؤثرة في نقطة مادية بدلالة الزمن، يمكننا انطلاقاً من المبدأ الأساسي في التحريك معرفة تسارعها، وبإجراء مكاملة يمكننا معرفة سرعتها بدلالة الزمن، ثُمّ بإجراء مكاملة أخرى يمكننا معرفة موضعها بدلالة الزمن.

بإجراء تكامل نعيّن مركز ثقل جسم وعزم عطالته حول محور ومساحة سطحه وحجمه. وبإجراء تكامل نحسب عمل قوّة متغيرة تنتقل على مسار، وبإجراء تكامل نحلّ العديد من المعادلات التفاضلية التي تصف العديد من الظواهر الفيزيائية.

سنعتمد في دراسة التكامل مُقاربة سهلة تستند إلى مفهوم التوابع الأصلية؛ حساب التابع الأصلي هو العملية المُعاكسة لحساب المشتق، فكما نحصل على سرعة متحرك على مسار مستقيم باشتقاق تابع موضعه نحصل على تابع الموضع بحساب التابع الأصلي لتابع السرعة.

إنّ إحدى أهم إنجازات هذه النظرية في القرن التاسع عشر إثباتها وجود تابع أصلي لكل تابع مستمر على مجال، بالطبع هذا لا يعني بالضرورة إمكان حساب هذا التابع الأصلي بدلالة التوابع المألوفة الأخرى، فمثلاً يوجد للتابع $x \mapsto e^{-x^2}$ تابع أصلي Φ على مجموعة الأعداد الحقيقية ولكن نبرهن أنّه **لا** يمكن التعبير عن Φ بدلالة التوابع المألوفة، ومع ذلك، لم يمنعنا هذا من حساب قيم Φ وجدولتها.

7

التكامل والتوابع الأصلية

1 التوابع الأصلية

1.1. تعريف وقواعد

تعريف 1

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I. نقول إنَّ التابعَ F **تابعٌ أصليٌّ** للتابع f على المجال I إذا وفقط إذا كان F اشتقاقياً على I وكان $F'(x) = f(x)$ في حالة x من I.

مثال

- $F : x \mapsto 2x - 3$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto 2$ على $\mathbb{R}$.
- $F : x \mapsto x^3 + 1$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto 3x^2$ على $\mathbb{R}$.
- $F : x \mapsto \frac{1}{x}$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ على $]0,+\infty[$، وكذلك على $]-\infty,0[$.
- $F : x \mapsto \ln x$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$.
- $F : x \mapsto \ln(-x)$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]-\infty,0[$.
- $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x-1} + 3$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto e^{2x-1}$ على المجال $]-\infty,0[$.

إنّ معرفة تابعٍ أصلي لتابع على مجال كافٍ لمعرفة جميع التوابع الأصلية لهذا التابع على هذا المجال. وهذا ما توضحه المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I. وليكن F تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I، عندئذ

① كلُّ تابعٍ $G : x \mapsto F(x) + k$، حيث k ثابتٌ حقيقيٌّ، هو تابعٌ أصليٌّ للتابع f.

② أيُّ تابعٍ أصليٍّ G للتابع f، على المجال I، هو من الصيغة $G(x) = F(x) + k$ حيث k ثابتٌ حقيقي.

③ أياً كان x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$، فيوجد تابعٌ أصليٌّ وحيدٌ G للتابع f، معرّف على المجال I، ويُحقّق $G(x_0) = y_0$.

الإثبات

① إذا كان F اشتقاقياً على I وكان $F' = f$، كان من الواضح أنّ G اشتقاقي على I وأنّ $G' = f$.

② وبالعكس، إذا كان G تابعاً أصلياً للتابع f على I استنتجنا أنّ

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

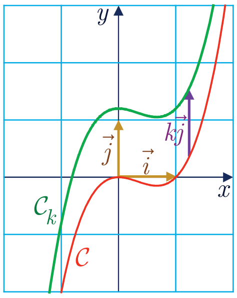
فالتابع $G - F$ تابعٌ ثابتٌ على I لأنّ مشتقه معدوم على هذا المجال، فإذا رمزنا إلى هذا الثابت بالرمز k تحققت الخاصة المطلوبة.

③ تؤول المسألة إلى تعيين الثابت k بالشرط $y_0 = G(x_0) = F(x_0) + k$ أي

$$k = y_0 - F(x_0)$$

فالتابع $G : x \mapsto F(x) - F(x_0) + y_0$ هو التابع الأصلي الوحيد للتابع f على المجال I الذي يُحقق $G(x_0) = y_0$.

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، إذا كان $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع الأصلي $F : x \mapsto F(x)$ للتابع f، أسمينا $\mathcal{C}$ **منحنياً تكاملياً** للتابع f، وعندئذ ينتج المنحني التكاملي $\mathcal{C}_k$ الموافق للتابع الأصلي $F_k : x \mapsto F(x) + k$ للتابع f من $\mathcal{C}$ بانسحاب شعاعه $k\vec{j}$.



مثال

التابع $F : x \mapsto x^3 - x^2$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$ على $\mathbb{R}$. يُبيّن الشكل المجاور المنحني التكاملي $\mathcal{C}$ للتابع f الذي يمر بالمبدأ $O(0,0)$، ومنحنياً تكاملياً آخر $\mathcal{C}_k$ ينتج من الأول بانسحاب شعاعه $k\vec{j}$.

مثال

عيّن التابع الأصلي الذي ينعدم عند $x = 1$ للتابع $f : x \mapsto 3x^2 - x + 1$ المعرّف على $\mathbb{R}$.

الحل

من السهل التيقن أنّ $F : x \mapsto x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$، إذن يأخذ كل تابع أصلي آخر G الصيغة $G(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + k$ حيث k ثابتٌ حقيقي. التابع الأصلي المنشود ينعدم عند $x = 1$ وهذا يفيد في تعيين قيمة الثابت k : $0 = G(1) = 1^3 - \frac{1}{2}1^2 + 1 + k = \frac{3}{2} + k$، أي $G(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ هو التابع الأصلي المطلوب.

2.1. المبرهنة الأساسية

تُعدُّ المبرهنة الآتية المبرهنة الأساسية في نظرية التوابع الأصلية، ولكن إثباتها خارج عن إطار هذا الكتاب.

مبرهنة 2

ليكن f تابعاً **مستمراً** على مجال I. عندئذ **يوجد تابع أصليٌّ** F للتابع f على I.

مثال: تابع اللوغاريتم النيبيري

تذكّر أنّنا عرّفنا $\ln$ بأنّه التابع الأصلي الوحيد للتابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}_+^*$ الذي ينعدم عند $x = 1$.

مثال: إثبات أنّ تابعاً تابعٌ أصليٌّ

① أثبت أنّ التابع $F : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ المعرّف على $[0,+\infty[$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ على المجال المفتوح $]0,+\infty[$.

② أيكون F تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ على $[0,+\infty[$؟

الحل

① علينا التحقّق أنّ F اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وأنّ $F'(x) = f(x)$ في حالة x من $]0,+\infty[$.
التابعان $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x$ اشتقاقيان على المجال $]0,+\infty[$، فجداء ضربهما كذلك ومنه:

$$F'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x} = f(x)$$

② لا يمكن اعتماد المناقشة السابقة في حالة المجال $[0,+\infty[$ لأنّ $x \mapsto \sqrt{x}$ ليس اشتقاقياً عند الصفر. لذلك نعود إلى تعريف العدد المشتق ونكتب:

$$t(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

إذن $\lim_{x\to 0} t(x) = 0$ فالتابع F اشتقاقي عند 0 و $F'(0) = 0 = f(0)$. نستنتج مما سبق أنّ F اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقه f على هذا المجال، فهو إذن تابع أصلي للتابع f على $[0,+\infty[$.

تكريساً للفهم

كيف نثبتُ أنّ تابعاً F تابعٌ أصلي لتابع f على مجال I؟

يكفي أن نثبت أنّ F اشتقاقي على I وأنّ $F'(x) = f(x)$ أياً كانت x من I.

تَدرَّبْ

① في كلٍ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F تابع أصلي للتابع f على المجال I.

❶ $f(x) = \tan^2 x$ ، $F(x) = \tan x - x,$ ، $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$

❷ $f(x) = \cos x - x\sin x$ ، $F(x) = x\cos x,$ ، $I = \mathbb{R},$

❸ $f(x) = \dfrac{2(x^4 - 1)}{x^3}$ ، $F(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2,$ ، $I = \left]0, +\infty\right[,$

❹ $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2(x - 1)^2}$ ، $F(x) = \dfrac{-1}{x(x - 1)},$ ، $I = \left]0, 1\right[,$

❺ $f(x) = \ln x$ ، $F(x) = x\ln x - x,$ ، $I = \left]0, +\infty\right[,$

❻ $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ ، $F(x) = \ln(\ln x),$ ، $I = \left]1, +\infty\right[,$

❼ $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ ، $F(x) = x - \ln(1 + e^x),$ ، $I = \mathbb{R},$

❽ $f(x) = \sqrt{e^x}$ ، $F(x) = 2\sqrt{e^x},$ ، $I = \mathbb{R},$

② في كلٍ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

❶ $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ ، $G(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 5}{x - 1},$ ، $I = \left]1, +\infty\right[,$

❷ $F(x) = \tan^2 x$ ، $G(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ، $I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[,$

❸ $F(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 7}{4x - 5}$ ، $G(x) = \dfrac{-4x^2 + 2x - 9}{10 - 8x},$ ، $I = \left]\frac{5}{4}, +\infty\right[,$

❹ $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ ، $G(x) = \dfrac{5 + 3x^2}{2(1 + x^2)}$ ، $I = \mathbb{R},$

❺ $F(x) = \sin^2 x$ ، $G(x) = 2 - \cos^2 x,$ ، $I = \mathbb{R},$

③ أيكون التابعان F و G الآتيان تابعين أصليين للتابع f ذاته على $\mathbb{R}$؟

$F(x) = \sin(3x) - 2\sin x$ و $G(x) = \sin x - 3\sin^3 x$.

بعض قواعد حساب التوابع الأصلية

1.2. التوابع الأصلية لبعض التوابع المألوفة

تفيدنا النتائج المعروفة عن اشتقاقيّة التوابع المألوفة في ملء الجدول الآتي، الذي نجد فيه التابع الأصلي F للتابع f على المجال I.

ملاحظات	I	F	f
a ثابتٌ حقيقي	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax$	$x \mapsto a$
n عدد طبيعي	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \mapsto x^n$
n عدد صحيح أصغر تماماً من -1	$]0,+\infty[$ $]-\infty,0[$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \mapsto x^n$
α عدد حقيقي لا يساوي -1	$]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x \mapsto x^\alpha$
	$]0,+\infty[$ $]-\infty,0[$	$x \mapsto \ln x$ $x \mapsto \ln(-x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x$	$x \mapsto \sin x$
	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$
k عددٌ صحيح	$\left]-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$	$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$
k عددٌ صحيح	$\left]\pi k, \pi(k+1)\right[$	$x \mapsto -\cot x$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$
$a \neq 0$، و F تابع أصلي للتابع f	I	$x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$	$x \mapsto f(ax+b)$

جدول بتوابع أصلية لبعض التوابع المألوفة

تقودنا العمليات على التوابع الاشتقاقية، وتعريف التابع الأصلي إلى الخواص البسيطة الآتية:

مبرهنة 3

① إذا كان F و G، بالترتيب، تابعين أصليين للتابعين f و g على مجال I، كان $F+G$ تابعاً أصليّاً للتابع $f+g$ على المجال نفسه I.

② إذا كان F تابعاً أصلياً للتابع f على مجال I، وكان λ عدداً حقيقيّاً كان λF تابعاً أصليّاً للتابع λf على المجال نفسه I.

تكريساً للفهم

كيف نجد تابعاً أصلياً لكثير حدود على $\mathbb{R}$ ؟

يكفي حساب تابع أصلي لكل حد من حدوده، ثم نجمع هذه التوابع الأصلية.

مثال

ليكن f كثير الحدود المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=4x^3-6x^2+2x-3$. نهدف إلى حساب تابع أصلي للتابع f . لمّا كان كل حدّ من النمط $x\mapsto ax^n$ يقبل تابعاً أصلياً على $\mathbb{R}$ من النمط $x\mapsto \dfrac{a}{n+1}x^{n+1}$، استنتجنا أنّ $F:x\mapsto x^4-2x^3+x^2-3x$ تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

مثال حساب توابع أصلية

في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $I=\left]-\infty,0\right[$	② $f(x)=\sin^2 x$, $I=\mathbb{R}$
③ $f(x)=\cos 5x\cdot\sin x$, $I=\mathbb{R}$	④ $f(x)=\dfrac{3}{x}-5$, $I=\left]0,+\infty\right[$
⑤ $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^2}$, $I=\left]0,+\infty\right[$	⑥ $f(x)=\tan^2 x$, $I=\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$

الحل

① هنا $f(x)=x^{-3}$. فيكون $F:x\mapsto \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}=\dfrac{x^{-2}}{-2}=\dfrac{-1}{2x^2}$ تابعاً أصلياً للتابع f على المجال $\left]-\infty,0\right[$.

② نكتب $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$، فيكون $F:x\mapsto \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$. ويُكتب $F:x\mapsto \dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}$.

③ كما في الحالة السابقة نستفيد من الدساتير المثلثاتية لنكتب

$$f(x)=\frac{1}{2}\big(\sin(5x+x)-\sin(5x-x)\big)=\frac{1}{2}\sin 6x-\frac{1}{2}\sin 4x$$

فيكون $F:x\mapsto -\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{8}\cos 4x$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

④ نكتب $f(x)=3\cdot\frac{1}{x}-5$، فيكون $F:x\mapsto 3\ln x-5x$ تابعاً أصلياً للتابع f على $]0,+\infty[$.

⑤ نكتب $f(x)=x^3-x^{-2}$، فيكون $F:x\mapsto \frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $]0,+\infty[$.

⑥ نكتب $f(x)=1+\tan^2 x-1$، فيكون $F:x\mapsto \tan x-x$ تابعاً أصلياً للتابع f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$.

2.2. قواعد عامّة

يلخّص الجدول الآتي حالات مختلفة لاستعمال قاعدة اشتقاق تابع مركّب في إيجاد صيغة تابع أصلي.
في كل حالة التابع u هو تابع اشتقاقي على مجال I.

f	F	ملاحظات
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	n عدد صحيح لا يساوي -1 وفي حالة كون $n<-1$ يجب ألاّ ينعدم u على I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$ على I
$u'u^{\alpha}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha\notin\{0,-1\}$ و $u>0$ على I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$ $\ln(-u)$	$u>0$ على I $u<0$ على I
$u'e^u$	e^u	
$u'\sin u$	$-\cos u$	
$u'\cos u$	$\sin u$	

بوجه عام إذا كان F تابعاً أصلياً لتابع f على مجال I وكان u تابعاً اشتقاقياً على مجال J ويأخذ قيمه في I كان $F(u)$ تابعاً أصلياً للتابع $u'f(u)$.

مثال حساب توابع أصلية

في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I=\mathbb{R},\quad f(x)=(x-2)(x^2-4x+5)^3$	② $I=\left]-\infty,-3\right[,\quad f(x)=\dfrac{2}{x+3}$
③ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+3}$	④ $I=\left]1,+\infty\right[,\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$
⑤ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=xe^{x^2}$	⑥ $I=\left]1,+\infty\right[,\quad f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

الحل

① هنا نلاحظ أنّه إذا وضعنا $u(x)=x^2-4x+5$ كان $u'(x)=2(x-2)$ ومن ثَمّ

$$f(x)=\frac{1}{2}u'(x)(u(x))^3$$

وعليه يكون $x\mapsto\dfrac{1}{2}\dfrac{(u(x))^4}{4}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$، أو $F(x)=\dfrac{1}{8}(x^2-4x+5)^4$.

② هنا نضع $u(x)=x+3$ فيكون $f(x)=2\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ولأنّ $u<0$ على $I=\left]-\infty,-3\right[$ استنتجنا أنّ $F:x\mapsto 2\ln(-x-3)=\ln\left((x+3)^2\right)$ تابع أصلي للتابع f على $\left]-\infty,-3\right[$.

③ هنا نضع $u(x)=x^2-x+3$ وهو موجبٌ دوماً، فيكون $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ولأنّ $u>0$ على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $F:x\mapsto\ln u(x)=\ln\left(x^2-x+3\right)$ تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

④ هنا نضع مجدّداً $u(x)=x-1$ فيكون $u'(x)=1$ و $x=1+u$ ومن ثَمّ

$$f(x)=\frac{2(1+u(x))+1}{u(x)}=\frac{3}{u(x)}+2=3\frac{u'(x)}{u(x)}+2$$

ولأنّ $u>0$ على $I=\left]1,+\infty\right[$ استنتجنا أنّ $F:x\mapsto 3\ln(u(x))+2x=3\ln(x-1)+2x$ تابع أصلي للتابع f على $\left]1,+\infty\right[$.

⑤ نضع $u(x)=x^2$ فيكون $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)\cdot e^{u(x)}$، إذن $F:x\mapsto\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$ تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

⑥ نضع $u(x)=\ln x$ فيكون $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$، و $u>0$ على $\left]1,+\infty\right[$، إذن $F:x\mapsto\ln(\ln x)$ تابع أصلي للتابع f على $\left]1,+\infty\right[$.

تَدرَّبْ

① في كلٍ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I .

❶ $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$ ، $I = \mathbb{R}$

❷ $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ ، $I =]0, +\infty[$

❸ $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{x^2}$ ، $I =]-\infty, 0[$

❹ $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x + x^2}$ ، $I =]1, +\infty[$

❺ $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x^2 + x)^2}$ ، $I =]-\infty, -1[$

❻ $f(x) = \dfrac{4x - 2}{\sqrt{x^2 - x}}$ ، $I =]1, +\infty[$

❼ $f(x) = \dfrac{5}{4x - 3}$ ، $I =]-\infty, \frac{3}{4}[$

❽ $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x}$ ، $I =]0, +\infty[$

❾ $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ ، $I =]-\infty, 2[$

❿ $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x - 1}$ ، $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

② في كلٍ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I .

❶ $f(x) = \cos^2 3x$ ، $I = \mathbb{R}$

❷ $f(x) = \cos^4 x$ ، $I = \mathbb{R}$

❸ $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$ ، $I = \mathbb{R}$

❹ $f(x) = \cot^2 x$ ، $I =]0, \pi[$

❺ $f(x) = \tan x$ ، $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

❻ $f(x) = \cot x$ ، $I =]0, \pi[$

❼ $f(x) = \sqrt{(2x - 1)^3}$ ، $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

❽ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$ ، $I =]-\infty, \frac{3}{2}[$

❾ $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$ ، $I = \mathbb{R}$

❿ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3 - x^2}}$ ، $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

3 التكامل المحدد وخواصه

1.3. تعريف التكامل المحدّد لتابع مستمر على مجال

مبرهنة وتعريف 4

ليكن f تابعاً مستمراً على مجالٍ I، وليكن F أحد توابعه الأصلية على هذا المجال، وليكن a و b عددين من I. عندئذ لا يتعلّق العدد $F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$ بالتابع الأصلي المُختار للتابع f. نسمّي هذا العدد **التكامل المحدّد للتابع f من a إلى b**، ونرمز إليه بالرمز

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{أو} \quad \int_a^b f$$

إذن

$$\int_a^b f = F(a)-F(b)=\left[F(x)\right]_a^b$$

حيث F تابع أصلي ما للتابع f على I.

الإثبات

إذا كان G تابعاً أصلياً آخر للتابع f على I، وُجِد عددٌ حقيقي k يحقّق $G(x)=F(x)+k$ أياً كانت x من k. وعندئذ

$$\begin{aligned}\left[G(x)\right]_a^b &= G(b)-G(a)=\big(F(b)+k\big)-\big(F(a)-k\big)\\ &= F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b\end{aligned}$$

فقيمة $\left[F(x)\right]_a^b$ لا تتعلّق بالتابع الأصلي المُختار للتابع f، لذلك يمكن اعتمادها تعريفاً للتكامل المحدّد للتابع f من a إلى b.

فَكِّرْ

- عندما نكتب $\int_a^b f(x)dx$ فإنّ هذا المقدار لا يتعلّق بالمتحول x، ولذلك يمكن أيضاً أن نرمز إليه $\int_a^b f(t)dt$ أو $\int_a^b f(s)ds$ أو $\cdots$، ومنه جاء الترميز $\int_a^b f$ عند غياب الحاجة لذكر صيغة قاعدة ربط التابع f.
- إذا كان f تابعاً مستمراً على مجالٍ I، وكان a عدداً من I. كان التابع $F : x \mapsto \int_a^x f$ المعرّف على I هو التابع الأصلي للتابع f على I الذي ينعدم عند $x=a$.

مثال

① $$\int_{-1}^{2}(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_{-1}^{2}=(4-2)-(1+1)=0$$

② $$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x)dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

③ $$\int_{2}^{4}\frac{3}{x-1}dx=\left[3\ln(x-1)\right]_{2}^{4}=3\ln 3-3\ln 1=3\ln 3$$

④ $$\int_{0}^{1}2xe^{x^2}\,dx=\left[e^{x^2}\right]_{0}^{1}=e^1-e^0=e-1$$

2.3. خواص التكامل المحدّد لتابع مستمر على مجال

نجد في المبرهنة الآتية بعض الخواص البسيطة والمهمة من الناحية العملية.

مبرهنة 5

ليكن f و g تابعين مستمرين على مجال I، وليكن a و b عددين من I، و λ عددٌ حقيقي.

عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

① $\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

② $\int_a^b (\lambda f)=\lambda\int_a^b f$.

③ $\int_b^a f=-\int_a^b f$.

الإثبات

① في الحقيقة، إذا كان F و G بالترتيب تابعين أصليين للتابعين f و g على I، كان $F+G$ تابعاً أصلياً للتابع $f+g$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)&=\left[F+G\right]_a^b=\big(F(b)+G(b)\big)-\big(F(a)+G(a)\big)\\&=\big(F(b)-F(a)\big)+\big(G(b)-G(a)\big)\\&=\left[F\right]_a^b+\left[G\right]_a^b=\int_a^b f+\int_a^b g\end{aligned}$$

ونبرهن بالمثل النقطتين ② و ③، وهذا أمرٌ نتركه تمريناً للقارئ.

ملاحظة : يمكن بسهولة تعميم الخاصة ① على مجموع أي عدد منته من التوابع.

مبرهنة 6 (علاقة شال Chasles)

ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I، ولتكن a و b و c ثلاثة أعداد من I، عندئذ تتحقّق الخاصة الآتية:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

الإثبات

إذا كان F تابعاً أصليّاً للتابع f على I، كان

$$\begin{aligned}\int_a^c f + \int_c^b f &= \Big[F\Big]_a^c + \Big[F\Big]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)\\ &= F(b) - F(a) = \Big[F\Big]_a^b = \int_a^b f\end{aligned}$$

ملاحظة : يمكن تعميم علاقة شال بسهولة على مجموع أي عددٍ منتهٍ من نقاط المجال I.

مثال حساب تكاملات محدّدة

في كلٍّ حالة من الحالات الآتية، احسب التكامل المحدّد I:

① $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{(x+1)^3}\,dx$ ② $I = \displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/6} \cos^2 x\,dx$

③ $I = \displaystyle\int_{0}^{2} \left|x^2 - 1\right|dx$ ④ $I = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2}{x-3}\,dx$

الحل

① نلاحظ أنّ التابع المُكامَل f يُكتَب بالصيغة $f(x) = \sqrt{(x+1)^3} = (x+1)^{3/2}$ فله تابعٌ أصلي $F : x \mapsto \frac{2}{5}(x+1)^{5/2}$، ومن ثَمّ

$$I = \int_{-1}^{1} (x+1)^{3/2}dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}2^{5/2} - 0 = \frac{8}{5}\sqrt{2}$$

② نلاحظ أنّ التابع المُكامَل f يُكتَب بالصيغة $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ فله تابعٌ أصلي $F : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}I &= \int_{\pi/12}^{\pi/6} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_{\pi/12}^{\pi/6}\\ &= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sin(\pi/3)}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\sin(\pi/6)}{4}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}\end{aligned}$$

③ هذه هي المرّة الأولى التي نصادف فيها تكامل تابع يتضمّن قيمة مطلقة. نلاحظ أنّ $x^2-1\leq 0$ على المجال $[0,1]$ وأنّ $x^2-1\geq 0$ على المجال $[1,2]$ إذن

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left|x^2-1\right|dx = \int_0^1 \left|x^2-1\right|dx + \int_1^2 \left|x^2-1\right|dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx \\ &= \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 = 2 \end{aligned}$$

④ التابع المُكامَل f هو $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ و $x-3<0$ على المجال $[0,2]$. إذن هو يقبل تابعاً أصلياً $F: x\mapsto 2\ln(3-x)$ على المجال $[0,2]$، وعليه

$$I = \int_0^2 \frac{2}{x-3}dx = \Big[2\ln(3-x)\Big]_0^2 = -2\ln 3$$

3.3. حساب التكامل بالتجزئة

مبرهنة 7

نتأمّل تابعين u و v قابلين للاشتقاق على مجال I. نفترض أنَّ المشتقَّين u و v مستمرَّان على I. عندئذ، أيّاً كان العددان a و b من I كان

$$\int_a^b (u\cdot v') = \Big[u\cdot v\Big]_a^b - \int_a^b (u'\cdot v)$$

الإثبات

في الحقيقة، لمّا كان $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ استنتجنا أنّ $u\cdot v$ تابعٌ أصلي للتابع $u'\cdot v + u\cdot v'$ على المجال I، وعليه

$$\int_a^b (u\cdot v' + u'\cdot v) = \Big[u\cdot v\Big]_a^b$$

وبالاستفادة من المبرهنة 5 نستنتج أنّ

$$\int_a^b (u\cdot v') + \int_a^b (u'\cdot v) = \Big[u\cdot v\Big]_a^b$$

وهذه تُكافئ العلاقة المنشودة.

مثال

احسب التكامل المحدّد $I=\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$.

الحل

بوجه عام لحساب تكامل تابع مكوّن من جداء ضرب تابع أسي وكثير حدود نلجأ إلى التكامل بالتجزئة، حيث نسعى إلى اشتقاق كثير الحدود بهدف تخفيض درجته. لنوضّح هذا الأمر: هنا للتابع المُكامل f الصيغة $f(x) = xe^{-x}$ وعلينا أن نكتبه بشكل جداء ضرب تابعين: $u(x)v'(x)$. فنضع

$u(x) = x$	$v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$	$v(x) = -e^{-x}$

اشتقاق ، تابع أصلي

وعندئذ استناداً إلى عبارة التكامل بالتجزئة يكون لدينا $\int_a^b (u \cdot v') = \left[u \cdot v\right]_a^b - \int_a^b (u' \cdot v)$ أي

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left[x(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx$$

$$= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

4.3. حساب تكامل بعض التوابع الكسرية

سنكتفي بدراسة مثال التوابع الكسرية $f : x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$ حيث A كثير حدود، و B كثير حدود من الدرجة الثانية، **واحدي** (أي إنّ حدّه المُسَيْطر يساوي x^2)، وله صفران حقيقيّان **مختلفان**. أي يوجد عددان حقيقيان مختلفان r_1 و r_2 بحيث $B(x) = (x - r_1)(x - r_2)$. نهدف إلى حساب $I = \int_a^b f$ حيث a و b عددان من أحد مجالات المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{r_1, r_2\}$.

الحالة الأولى: نفترض أنّ $\deg A \leq 1$. هنا نعبّر عن كثير الحدود $A(x)$ بدلالة كثيري الحدود $x - r_1$ و $x - r_2$ عن طريق تعيين ثابتين λ و μ يحققان

$$A(x) = \lambda(x - r_1) + \mu(x - r_2)$$

نعوّض مثلاً $x = r_1$ فنجد μ ، ثُمّ نعوّض $x = r_2$ فنجد λ .عندئذ يُكتب f بالصيغة

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\lambda(x - r_1) + \mu(x - r_2)}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{\lambda}{x - r_2} + \frac{\mu}{x - r_1}$$

وتؤول مسألة حساب $I = \int_a^b f$ إلى حساب تكاملات مألوفة لدينا.

الحالة الثانية: $\deg A \geq 2$. نُجري قسمة إقليدية لكثير الحدود A على B ، فنجد

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) \quad \text{حيث} \quad \deg R(x) \leq 1$$

وعندها $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ ، ولكنّ حساب $\int_a^b Q$ أمر يسير لأنّ Q كثير حدود، وحساب $\int_a^b \frac{R}{B}$ يؤول إلى الحالة السابقة.

مثال

لنتأمل التابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$، لمّا كان $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ استنتجنا أنّ التابع f تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$. لنفترض أننا نرغب بحساب التكامل المحدّد

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx$$

لنبحث عن ثابتين λ و μ يحققان : $1 = \lambda(x+1) + \mu(x-2)$. بتعويض $x = -1$ فنجد $\mu = -\dfrac{1}{3}$،

ثُمّ نعوّض $x = 2$ فنجد $\lambda = \dfrac{1}{3}$. عندئذ يُكتب f بالصيغة

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

وعليه، لأنّ $x + 1 > 0$ على $[0,1]$ و $x - 2 < 0$ على $[0,1]$، استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\ln(2-x)\Big]_0^1 - \frac{1}{3}\Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(-\ln 2) - \frac{1}{3}\ln 2 = -\frac{2}{3}\ln 2 \end{aligned}$$

مثال

نهدف إلى حساب

$$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$$

هنا نتأمل التابع $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$، لمّا كان $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ استنتجنا أنّ التابع f تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$.

لحساب I نبحث عن ثابتين λ و μ يحققان : $2x + 1 = \lambda(x+1) + \mu(x+2)$. بتعويض $x = -1$ نجد $\mu = -1$، ثُمّ بتعويض $x = -2$ نجد $\lambda = 3$. عندئذ يُكتب f بالصيغة

$$f(x) = \frac{3(x+1)-(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

وعليه، لأنّ $x + 1 > 0$ و $x + 2 > 0$ على المجال $[0,1]$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx = 3\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= 3\Big[\ln(2+x)\Big]_0^1 - \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln\frac{27}{16} \end{aligned}$$

مثال

نهدف إلى حساب

$$I = \int_0^1 \frac{4x^3 - 3x}{2x^2 - 3x - 2}\,dx$$

هنا نتأمل التابع $f : x \mapsto \dfrac{4x^3 - 3x}{2x^2 - 3x - 2}$، لمّا كان $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)$ استنتجنا أنّ f مستمرٌّ على $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}, 2\}$ وخصوصاً هذا التابع مستمرٌّ على $[0,1]$. ولمّا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام أمكننا إجراء قسمة إقليدية للبسط على المقام لنجد

$$4x^3 - 3x = (2x+3)(2x^2 - 3x - 2) + 10x + 6$$

إذن $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{10x+6}{2x^2 - 3x - 2}$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2x+3)dx + \int_0^1 \frac{10x+6}{2x^2 - 3x - 2}\,dx \\ &= \Big[x^2 + 3x\Big]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 \frac{5x+3}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1}\,dx}_{J} = 4 + J \end{aligned}$$

لحساب J نبحث عن ثابتين λ و μ يحقّقان: $5x + 3 = \lambda(x + \frac{1}{2}) + \mu(x - 2)$. بتعويض $x = -\frac{1}{2}$ نجد $\mu = -\dfrac{1}{5}$، ثُمّ بتعويض $x = 2$ نجد $\lambda = \dfrac{26}{5}$. عندئذ

$$\frac{5x+3}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1} = \frac{\frac{26}{5}(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{5}(x-2)}{(x + \frac{1}{2})(x - 2)} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x + \frac{1}{2}}$$

وعليه، لأنّ $x + \frac{1}{2} > 0$ و $x - 2 < 0$ على المجال $[0,1]$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{5x+3}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1}\,dx = \frac{26}{5}\int_0^1 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{26}{5}\Big[\ln(2-x)\Big]_0^1 - \frac{1}{5}\Big[\ln(x + \tfrac{1}{2})\Big]_0^1 = -\frac{26}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\ln 3 \end{aligned}$$

وبالعودة إلى I نجد $I = 4 - \dfrac{26}{5}\ln 2 - \dfrac{1}{5}\ln 3$.

تكريساً للفهم

لماذا افترضنا المقام واحدياً في حالة التوابع الكسرية المدروسة؟

- أوّلاً يمكن دوماً الرجوع إلى هذه الحالة بالقسمة على أمثال x^2 في المقام $B(x)$.
- عندما يكون المقام $B(x)$ واحدياً يمكننا أن نكتب $B(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ حيث r_1 و r_2 هما صفراه الحقيقيّان.

كيف نستفيد من طرائق حساب التكامل المحدّد لحساب تابع أصلي؟

- إذا كان f تابعاً مستمراً على مجال I، عندئذ نحسب $x \mapsto F(x)$ حيث

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$$

حيث a عددٌ مثبّتٌ (ولكن كيفي) من I. فيكون F تابعاً أصلياً للتابع f على I.

مثال

ليكن التابع $f : x \mapsto \ln x$ المعرّف والمستمر على $I =]0,+\infty[$. عيّن تابعاً أصلياً للتابع f.

الحل

نختار على سبيل المثال العدد $a = 1$ من I. ونحسب $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x (\ln t)dt$. نعلم أنّ مشتق التابع اللوغاريتمي تابع بسيط لذلك نفكّر باستعمال المُكاملة بالتجزئة بحيث يجري اشتقاق هذا التابع فنضع

$u(t) = \ln t$	$v'(t) = 1$
$u'(x) = 1/t$	$v(t) = t$

وعندئذ استناداً إلى عبارة التكامل بالتجزئة يكون لدينا $\int_1^x (u \cdot v') = \left[u \cdot v\right]_1^x - \int_1^x (u' \cdot v)$ أي

$$F(x) = \int_1^x (\ln t)dt = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt$$

$$= x \ln x - \int_1^x dt = x \ln x - x + 1$$

إذن $x \mapsto x \ln x - x$ تابعٌ أصليٌّ للتابع $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$.

تَدرَّبْ

① احسب التكاملات الآتية:

❶ $I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx$

❷ $J = \int_{-1}^{2} x\left|x - 1\right| dx$

❸ $K = \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x})\, dx$

❹ $L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x - 1}{x - 1} dx$

❺ $M = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x\, dx$

❻ $N = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

② احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

❶ $I = \int_{1}^{e} x \ln x \, dx$

❷ $J = \int_{0}^{\pi} (x-1)\cos x \, dx$

❸ $K = \int_{0}^{1} (x+2)e^{x} \, dx$

❹ $L = \int_{0}^{\pi/3} x \sin(3x) \, dx$

❺ $M = \int_{0}^{\pi} e^{x} \cos x \, dx$

❻ $N = \int_{0}^{\pi} e^{x} \sin x \, dx$

مساعدة: احسب M و N في آن معاً.

③ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \cos x$

❷ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \sin 2x$

❸ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cdot e^{x}$

❹ $I = \left]0, +\infty\right[, \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x$

❺ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cdot \sin 2x$

❻ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cdot \cos 3x$

④ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I = \left]1, +\infty\right[, \quad f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$

❷ $I = \left]-\infty, -2\right[, \quad f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

❸ $I = \left]-2, 3\right[, \quad f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-6}$

❹ $I = \left]-1, 0\right[, \quad f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x}$

❺ $I = \left]2, +\infty\right[\quad f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$

❻ $I = \left]-\infty, -2\right[\quad f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$

ملاحظة: التكامل الأخير ليس من النوع الذي درسناه بل هو أبسط من ذلك!

4 التكامل المحدد وحساب المساحة

مبرهنة 8

ليكن f و g تابعين مستمرين على مجال I، وليكن a و b عددين من I.

① إذا كان $a < b$، وكان $f \geq 0$ على المجال $[a,b]$ كان $\int_a^b f \geq 0$.

② إذا كان $a < b$، وكان $f \geq g$ على المجال $[a,b]$ كان $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

الإثبات

① ليكن F تابعاً أصلياً للتابع f على I. التابع $x \mapsto F(x)$ تابعٌ متزايدٌ على I لأنّ مشتقه f موجبٌ على هذا المجال، نستنتج من تزايد F أنّ $F(b) \geq F(a)$، أي $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq 0$.

② بتطبيق الخاصة ① على التابع $(f-g)$ نستنتج أنّ $\int_a^b (f-g) \geq 0$، $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g) \geq 0$، وهي النتيجة المرجوّة.

مثال

في حالة $b \geq 0$ تتحقّق المتراجحات

$$b - \frac{b^3}{6} \leq \sin b \quad \text{و} \quad 1 - \frac{b^2}{2} \leq \cos b \quad \text{و} \quad \sin b \leq b$$

الحل

في الحقيقة، نعلم أنّ $\cos t \leq 1$ أياً كانت t، إذن عملاً بالمبرهنة السابقة يكون لدينا في حالة $0 \leq b$ ما يأتي

$$\sin b = \int_0^b \cos t \, dt \leq \int_0^b 1 \, dt = b$$

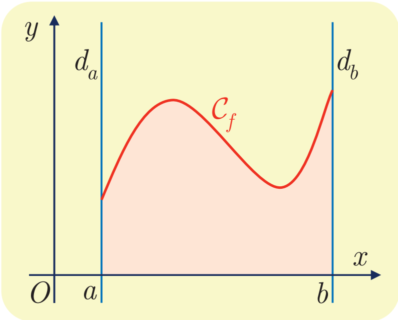
وبتطبيق ثان للمبرهنة السابقة نجد المتراجحة الثانية

$$1 - \cos b = \int_0^b \sin t \, dt \leq \int_0^b t \, dt = \frac{b^2}{2}$$

ثُمّ بتطبيق ثالث للمبرهنة ذاتها نجد المتراجحة الثالثة

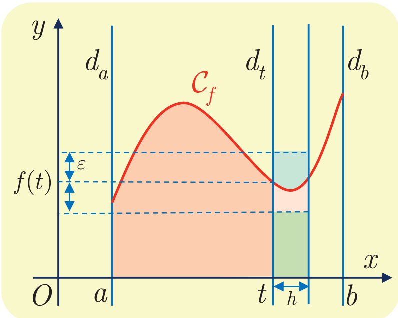
$$b - \sin b = \int_0^b (1 - \cos t) \, dt \leq \int_0^b \frac{t^2}{2} dt = \frac{b^3}{6}$$

مبرهنة 9



ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I، وليكن a و b عددين من I. نفترض أنّ $b > a$ وأنّ $f \geq 0$ على $[a,b]$. عندئذ $\int_a^b f$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f للتابع f والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$.

الإثبات (يترك لقراءة ثانية)



في الحقيقة، لنعرّف التابع $S : t \mapsto S(t)$ المعرّف على $[a,b]$ ويقرن بكل عدد t من $[a,b]$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_t الذي معادلته $x = t$.

ليكن $\varepsilon > 0$ عندئذ نظراً إلى استمرار التابع f عند t من $[a,b[$ يوجد عددٌ $\delta > 0$ بحيث يكون $f(t) - \varepsilon \leq f(u) \leq f(t) + \varepsilon$ في حالة $0 \leq u - t < \delta$. وهذا يقتضي أنّه في حالة $0 < h < \delta$ يكون المقدار $S(t+h) - S(t)$ الذي يمثل مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيمين d_t و d_{t+h} **أكبر** من مساحة المستطيل الذي يعينه محور الفواصل والمستقيم الذي معادلته $y = f(t) - \varepsilon$ والمستقيمين d_t و d_{t+h} أي $(f(t) - \varepsilon)h$، و**أصغر** من مساحة المستطيل الذي يعينه محور الفواصل والمستقيم الذي معادلته $y = f(t) + \varepsilon$ والمستقيمين d_t و d_{t+h} أي $(f(t) + \varepsilon)h$.

إذن في حالة $0 < h < \delta$ يكون

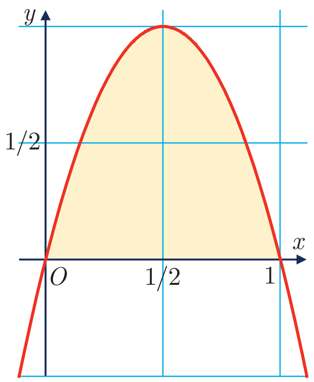
$$(f(t) - \varepsilon)h \leq S(t+h) - S(t) \leq (f(t) + \varepsilon)h$$

أو

$$\left| \frac{S(t+h) - S(t)}{h} - f(t) \right| \leq \varepsilon$$

هذا يبرهن أنّ $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{S(t+h) - S(h)}{h} = f(t)$. ونبرهن بالمثل أنّ $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{S(t+h) - S(h)}{h} = f(t)$ عند كل t من $]a,b[$. إذن S اشتقاقي على $[a,b]$ و $S' = f$ على هذا المجال. نستنتج إذن أنّ S تابعٌ أصليٌّ للتابع f على $[a,b]$، ومن ثَمّ $\int_a^b f = S(b) - S(a)$ وهذه هي النتيجة المرجوّة.

مثال



يتقاطع الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع $f : x \mapsto 4x(1-x)$ مع محور الفواصل عند $x = 0$ و $x = 1$. عيّن مساحة السطح المحدود المحصور بين $\mathcal{C}_f$ ومحور الفواصل.

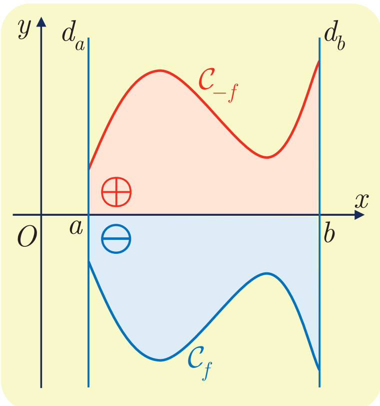
الحل

نلاحظ أنّ التابع f موجب على المجال $[0,1]$، إذن مساحة السطح المطلوبة تساوي

$$\mathcal{A} = \int_0^1 4x(1-x)dx = \int_0^1 (4x - 4x^2)dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

نتيجة 10



ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I، وليكن a و b عددان من I. نفترض أنّ $b > a$ وأنّ $f \leq 0$ على $[a,b]$. عندئذ $\int_a^b (-f)$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$.

الإثبات

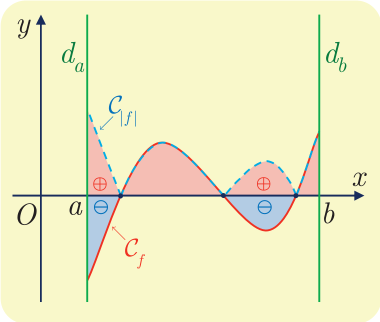
نلاحظ أنّ السطح المطلوبة مساحته هو نظير السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني $\mathcal{C}_{-f}$ للتابع $-f$ والمستقيمين d_a و d_b بالنسبة إلى محور التراتيب. لذلك لهذين السطحين المساحة ذاتها، ومنه الخاصة المطلوبة.

يمكن جمع المبرهنة 9 والنتيجة 10 في صياغة واحدة بوضع $\int_a^b |f|$ في الحالتين، إذ عند حساب المساحة يجب أن يكون التابع المُكامَل موجباً لأنّ المساحة عددٌ موجبٌ. أمّا إذا غيّر التابع إشارته في المجال $[a,b]$ فعندئذ نستعين بعلاقة شال، ونحسب مساحة كل جزء يحافظ فيه التابع على إشارة ثابتة عليه، وبعدئذ نجمع مساحات الأجزاء لنحصل على المساحة المطلوبة.

تلخص النتيجة الآتية هذه المناقشة.

نتيجة 11

ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I، وليكن a و b عددين من I. نفترض أنّ $a < b$. عندئذ $\int_a^b |f|$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$.



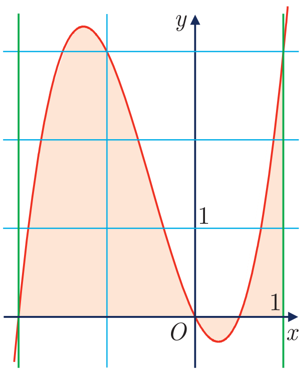
تكريساً للفهم

ما العلاقة بين المساحة والتكامل المحدّد؟

يمكن اعتبار $\int_a^b f$ **قياساً جبرياً** لمساحة السطح بين الخط البياني للتابع f ومحور الفواصل على المجال المدروس، فإذا أعطينا قياساً جبرياً موجباً لمساحات السطوح فوق محور الفواصل وقياساً جبرياً سالباً لتلك الواقعة تحت هذا المحور، كان $\int_a^b f$ المجموع الجبري لهذه المساحات. أمّا إذا أردنا المساحة الفعلية للسطح المحصور بين الخط البياني للتابع f ومحور الفواصل على المجال $[a,b]$ فعلينا جعل القياس الجبري لجميع هذه المساحات موجباً ومن ثَمّ أخذ $\int_a^b |f|$.

مثال
حساب مساحة

ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 2x$. ولنحسب $\mathcal{A}$، مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}$ ومحور الفواصل والمستقيمين d_1 و d_2 اللذين معادلتاهما بالترتيب $x = 1$ و $x = -2$.



الحل

نلاحظ أنّ $f(x) = x(x+2)(2x-1)$ فنجد أنَّ $f(x) \le 0$ على $\left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,1/2\right]$ و $f(x) \ge 0$ على $\left[-2,0\right] \cup \left[1/2,+\infty\right[$. كما إنّ $F : x \mapsto \dfrac{x^4}{2} + x^3 - x^2$ تابعٌ أصلي للتابع f. إذن

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1/2} \big(-f(x)\big)\,dx + \int_{1/2}^{1} f(x)dx \\ &= F(0) - F(-2) - \big(F(1/2) - F(0)\big) + F(1) - F(1/2) \\ &= -F(-2) + 2F(0) - 2F(1/2) + F(1) = \frac{75}{16}\end{aligned}$$

أفكارٌ يجب تَمثُّلُها

- لكل تابع مستمرٍ f على مجال I تابعٌ أصلي F على هذا المجال. وعندها يكون لكل تابع أصلي للتابع f على هذا المجال الصيغة $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي. وهناك تابع أصلي وحيد للتابع f يأخذ قيمة معطاة y_0 عند x_0 من I.
- عملية إيجاد التابع الأصلي لتابع مستمر هي العملية العكسية للاشتقاق.
- بمعرفة التابع الأصلي F لتابع f على مجال يكون لدينا $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ مهما كان a و b عددان من I.
- إذا كان $\mathcal{C}_f$ الخط البياني لتابع مستمر f على مجال I، وكان a و b عددين من I يحقّقان $a < b$. فإنّه عندما يكون f موجباً على $[a,b]$ يكون $\int_a^b f$ مساوياً مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$.
- علاقة شال $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ صحيحة أياً كانت الأعداد a و b و c من I. وتذكّرنا بعلاقة شال بين الأشعة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
- التكامل المحدّد خطّي أي إنّ $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ أياً كانت الأعداد λ و μ.
- تمكن مُكاملة المتراجحات على مجال، فإذا كان $f \le g$ على مجال $[a,b]$ كان $\int_a^b f \le \int_a^b g$.
- في حالة تابع مستمرٍ f على مجال I ونقطة a من I يكون $F : x \mapsto \int_a^x f$ التابع الأصلي للتابع f الذي ينعدم عند $x = a$. إذن تفيد طرائق حساب التكامل المحدّد في حساب التوابع الأصلية.
- علاقة التكامل بالتجزئة $\int_a^b uv' = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'v$ هي نتيجة مباشرة من خاصة اشتقاق جداء ضرب تابعين.

منعكسات يجب امتلاكُها.

- عند حساب مساحة باستعمال التكامل، فكر بتجزئة مجال التكامل إلى مجالات جزئية يحافظ f على إشارة ثابتة على كل منها، وخذ هذه الإشارات في الحسبان.
- عند حساب تابع أصلي تيقّن من صحة حسابك بحساب مشتقه.

أخطاء يجب تجنّبها.

- المتراجحة $f \le g$ لا تقتضي $\int_a^b f \le \int_a^b g$ إلا إذا كان $a \le b$.

أنشطة

نشاط 1 حساب مساحة سطح مستو

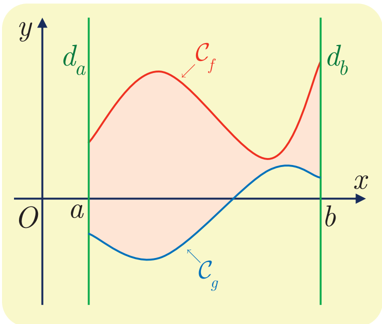
❶ مساحة السطح المحصور بين منحنيين

لنتأمّل الخطين البيانيّيْن $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ للتابعين $f : x \mapsto e^x$ و $g : x \mapsto e^{-x}$ المعرّفين على $\mathbb{R}$.

① ارسم الخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

② احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي. (ناقش تبعاً لإشارة λ).

نقبل عموماً أنّه إذا كان $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ الخطين البيانيين لتابعين مستمرين f و g على مجال I، وكان a و b عددين من I يحقّقان $a < b$. عندئذ $\int_a^b |f - g|$ يساوي مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$.
يتطلّب هذا الحساب دراسة إشارة الفرق $f - g$ على $[a,b]$.



❷ منحن ومقارب مائل

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x(1 + e^{-x})$. وليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني المُمثّل للتابع f. الهدف من هذا النشاط دراسة مساحة السطح المحصور بين الخط البياني $\mathcal{C}_f$ ومُقاربه.

① a. ادرس نهايات التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$. واكتب جدول تغيرات f. (استعمل f'' لدراسة إشارة المشتق f').

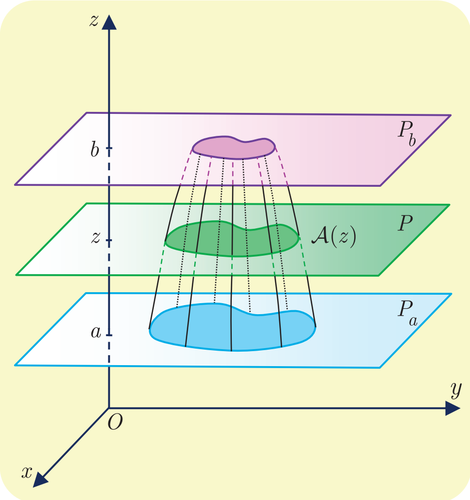
b. تحقّق أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب للخط $\mathcal{C}_f$ في جوار $+\infty$. وادرس وضع $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المقارب Δ.

c. ارسم Δ و $\mathcal{C}_f$.

② a. ليكن λ عدداً حقيقياً موجباً تماماً. احسب $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و Δ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$.

b. ما نهاية $\mathcal{A}(\lambda)$ عندما تسعى λ إلى $+\infty$؟

نشاط 2 حساب حجم مجسم



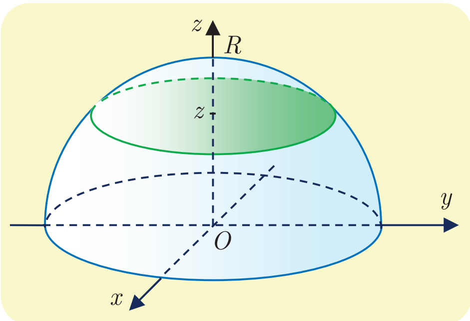
ليكن $\mathbb{S}$ مجسماً يحدّده مستويان P_a و P_b معادلتاهما بالترتيب $z=a$ و $z=b$ في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نرمز بالرمز $\mathcal{V}$ إلى حجم هذا المجسم، وبالرمز $\mathcal{A}(z)$ إلى مساحة مقطع هذا المجسم بالمستوي P الذي يوازي كلاً من P_a و P_b وراقمه يساوي z $(a \leq z \leq b)$.

نقبل أنّ $\mathcal{V}$ يُحسب بالعلاقة:

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(z)\,dz \qquad (*)$$

نجد فيما يأتي عدداً من الأمثلة على استعمال هذه العلاقة.

❶ حجم كرة نصف قطرها R



يكفي حساب حجم نصف الكرة ثُمّ نضرب الناتج بالعدد 2.

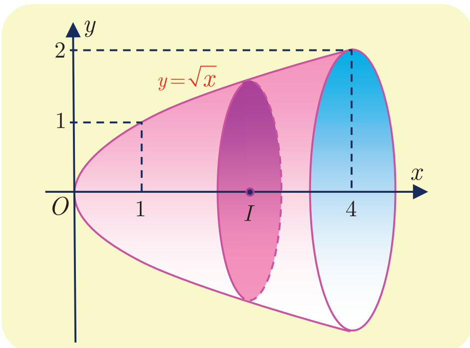
① اشرح باستعمال رموزالشكل، لماذا

$\mathcal{A}(z) = \pi(R^2 - z^2)$ ؟

② استنتج مجدداً العبارة

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

❷ حجم مجسم دوراني



نجد في الشكل المجاور الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على المجال $[0,4]$ بالصيغة $f(x)=\sqrt{x}$. عندما يدور $\mathcal{C}$ دورة كاملة حول محور الفواصل، يولّد مجسماً دورانياً $\mathcal{S}$.

① ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ $(0 \leq x \leq 4)$؟

② عبّر عن $\mathcal{A}(x)$، مساحة هذا المقطع، بدلالة x.

③ استنتج $\mathcal{V}$ حجم المجسم $\mathcal{S}$.

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I = \left]0,+\infty\right[,\quad f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x}$ ② $I = \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[,\quad f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$

③ $I = \left]1,+\infty\right[,\quad f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ ④ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = (2x-1)^3$

⑤ $I = \left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,\quad f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$ ⑥ $I = \left]-1,3\right[,\quad f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$

2 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I = \mathbb{R},\quad f(x) = \cos x(\sin^2 x - 3\sin x)$ ② $I = \left]4,+\infty\right[,\quad f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

③ $I = \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\quad f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1$ ④ $I = \left]-\infty,4\right[,\quad f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

⑤ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = 2e^{3x-1}$ ⑥ $I = \left]-1,+\infty\right[,\quad f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

3 في كلٍ من الحالات الآتية، هاتِ تابعاً أصلياً F للتابع f على مجالٍ I يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى.

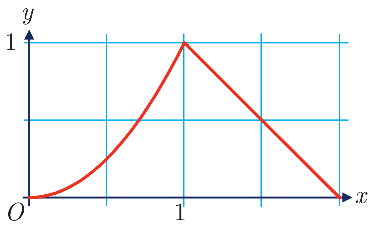
① $F(1) = 0,\quad f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x$ ② $F(0) = 0,\quad f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

③ $F(\frac{\pi}{2}) = 0,\quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ ④ $F(\frac{\pi}{2}) = 0,\quad f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$

⑤ $F(1) = 1,\quad f(x) = \dfrac{-1}{3-x}$ ⑥ $F(0) = 0,\quad f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$

4 نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b.

تحقّق أنّ الخط البياني C_f للتابع f المعرّف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x) = \min(x^2, 2-x)$، هو الخط المرسوم في الشكل المجاور. احسب التكامل $\int_0^2 f(x)dx$، وقلْ ماذا يمثل هذا العدد ؟



احسب بالمثل $\int_0^2 g(x)dx$ و $\int_0^1 h(x)dx$ في حالة

$g(x) = 1 - \left|1-x\right|$ و $h(x) = \min(x^2,(x-1)^2)$

بعد رسم خطيهما البيانيين على مجال المُكامَلة.

5 احسب التكاملات الآتية:

① $I=\int_{2}^{-1}(x^2-4x+3)\,dx$ 　　② $I=\int_{2}^{-1}(x-2)(x^2-4x+3)\,dx$

③ $I=\int_{1}^{2}\left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)dt$ 　　④ $I=\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

⑤ $I=\int_{1}^{2}\frac{x^3}{x^4+2}dx$ 　　⑥ $I=\int_{0}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{4})\,dx$

⑦ $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-3}{x}dx$ 　　⑧ $I=\int_{0}^{1}te^{t^2-1}dt$

⑨ $I=\int_{0}^{2}\sqrt{2x+1}\,dx$ 　　⑩ $I=\int_{0}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

6 ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق $f(x)=\dfrac{4x^2-5x+1}{x+3}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a\,x+b+\dfrac{c}{x+3}$، أياً يكن x من D.

② احسب $J=\int_{2}^{0}f(x)\,dx$.

7 ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$، أياً يكن x من D.

② احسب $J=\int_{-3}^{0}f(x)\,dx$.

8 أثبت أنّ $\dfrac{1}{1+e^x}=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$، واستنتج قيمة $I=\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+e^x}dx$.

9 باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$، أو بأية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$، ثُمَّ احسب $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\sin^4 x\,dx$.

10 احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

① $I=\int_{1}^{e}(x-1)\ln x\,dx$ 　　② $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}(x^2-1)e^x\,dx$

③ $I=\int_{0}^{1}(2x+1)e^{-x}\,dx$ 　　④ $I=\int_{1}^{2}(t-2)e^{2t}\,dt$

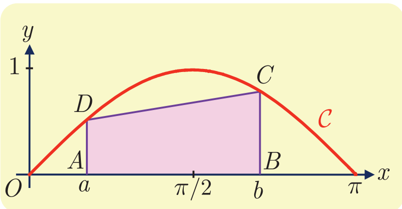
لنتعلّم البحث معاً

11 إثبات متراجحة

نفترض أنَّ a و b عددان حقيقيان وأنَّ $0 \leq a < b \leq \pi$. أثبت صحة المتراجحة $\cos a - \cos b \geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b$.

نحو الحلّ

- قد نفكر في دراسة تابع، كأنْ نفترض b ثابتاً ونبرهن أنَّ التابع g المعرف وفق الصيغة الآتية موجب على المجال $[0,b]$: $g(x) = \cos x - \cos b - \frac{1}{2}(b-x)\sin b$، ولكن سرعان ما نقتنع أنّ هذا الطريق لا يؤدي إلى إثبات سهل للمتراجحة فإشارة المشتق الأوّل ليست سهلة التعيين.
- ولكنّ المقدار $\cos a - \cos b$ يدفعنا إلى التفكير بالتكامل $\cos a - \cos b = \int_b^a f(t)\,dt$ حيث $f(t) = \cos' t = -\sin t$ أو $\cos a - \cos b = -\int_b^a \sin t\,dt = \int_a^b \sin t\,dt$.



1. ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto \sin x$ على المجال $[0,\pi]$. برِّر كون $\int_a^b \sin t\,dt$ هو مساحة منطقة عليك تحديدها. نرمز إلى تلك المساحة بالرمز A.
علل كون A أكبر من مساحة شبه المنحرف $ABCD$ المبيّن في الشكل.
2. احسب مساحة شبه المنحرف $ABCD$ وتحقّق أنها أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$.
3. تيقّن أنّ المتراجحة صحيحة في حالة $a = 0$ و $b = \pi$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرفٌ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{2x}\sin x$. عيّن تابعاً أصلياً F للتابع f.

نحو الحلّ

- التابع المدروس مستمر فله تابع أصلي، ولكننا لانتعرّف على صيغته بين الصيغ المألوفة لدينا، لذلك نسعى لكتابته بالشكل $F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$، آملين أن تفيدنا مُكاملة بالتجزئة لأنّ للتابع المُكامل شكل جداء ضرب.

أثبت أنّ

$$F(x)=\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt$$

التكامل في الطرف الأيمن يشبه التكامل المطلوب ولكن استبدل فيه تابع التجيب بتابع الجيب. ومنه تأتي فكرة إجراء مُكاملة بالتجزئة ثانية، إذ نتوقّع أن يظهر التابع F مجدداً.

1. أثبت أنّ

$$\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt=\frac{1}{2}e^{2x}\cos x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(x)$$

2. استنتج عبارة F.

طريقة ثانية. قد يخطر لنا أن نقحم المشتقات المتتالية للتابع f ونبحث عن علاقة بين f و f' و f''.

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.
2. جد العددين الحقيقيّين a و b اللذين يحققان $f(x)=af'(x)+bf''(x)$.
3. استنتج عبارة $F(x)$ حيث F تابعٌ أصلي للتابع f.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرفُ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-x}$. أيوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F:x\mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

نحو الحلّ

التحليل: لنفترض وجود كثير الحدود P هذا.

1. أثبت أنّ كون F تابعاً أصلياً للتابع f يقتضي أن يكون

$$P'(x)-P(x)=1+x+x^2+x^3 \qquad (*)$$

2. لماذا يجب أن يكون $\deg P=3$؟
3. بوضع $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ عيّن اعتماداً على $(*)$ الأمثال a و b و c و d.

التركيب: أثبتنا أنّه إذا كان P موجوداً فمن الواجب أن يكون له الصيغة التي وجدناها أعلاه. وبالعكس تحقّق أنّ التابع F الذي وجدته تابعٌ أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $f(x)=\dfrac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}$, $I=\mathbb{R}$
② $f(x)=\cot x$, $I=\left]-\pi,0\right[$
③ $f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $I=\mathbb{R}$
④ $f(x)=\dfrac{1}{\sin(2x)}$, $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
⑤ $f(x)=(1-2x)^4$, $I=\mathbb{R}$
⑥ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\times e^{-\frac{2}{x}}$, $I=\mathbb{R}_+^*$
⑦ $f(x)=2e^{2-3x}$, $I=\mathbb{R}$
⑧ $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2}$, $I=\mathbb{R}_+^*$
⑨ $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$, $I=\mathbb{R}_+^*$
⑩ $f(x)=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$, $I=\left]-1,+\infty\right[$

14 في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المعطى.

① $I=\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-1}dx$
② $I=\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{4x-5}{2x+1}dx$
③ $I=\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-9}dx$
④ $I=\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{x+2}{(x+1)^4}dx$
⑤ $I=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{2x^3-3x-4}{x-2}dx$
⑥ $I=\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{8x^2-4}{4x^2-1}dx$

15 في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

① $f(x)=\cos^3 x$ ② $f(x)=\sin x+\sin^3 x$ ③ $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x$

16 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sin^4 x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$. واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 4x$.
② استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

17 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3e^{2x}$، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x)=P(x)e^{2x}$، حيث P تابع كثير حدود.

18 نريد حساب $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$. احسب $J=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$، ثُمَّ $I+J$، واستنتج I.

19 نريد حساب $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$. احسب $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$، ثُمَّ $I+J$، واستنتج I.

20 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{2x}\cos x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

② عيّن عددين a و b يحققان المساواة $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ أياً كان x .

③ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

21 F و G تابعان أصليّان للتابعين $f : x \mapsto \cos(\ln x)$ و $g : x \mapsto \sin(\ln x)$ على $]0,+\infty[$ ، ينعدمان عند $x = 1$. انطلاقاً من الصيغتين $F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt$ و $G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt$

① أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أنَّ:

$F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$ و $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$.

② استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$.

22 إثبات متراجحة

① تيقّن أنّه في حالة $0 < x < a$ يكون $\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{1+x} \le 1$.

② استنتج أنّ $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$ في حالة $a > 0$.

23 فيما يأتي، ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ الذي يُمثّل التابع f ، ثُمّ احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$.

① $f(x) = 2 + x - x^2$ ، $a = 0,\ b = 1,$

② $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ ، $a = 1,\ b = 4,$

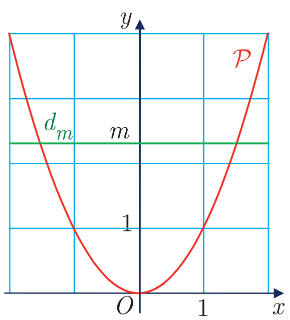
③ $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ، $a = 0,\ b = \frac{\pi}{4},$

④ $f(x) = (x+1)e^{-x}$ ، $a = -1,\ b = \ln 2,$

24 ارسم في جملة متجانسة الخطين البيانيين للتابعين $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto x\sin x$ على المجال $[0,\pi]$. ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على المجال $[0,\pi]$.

25 ليكن $\mathcal{P}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto x^2$ مرسوماً على المجال $[-2,2]$. المستقيم d_m الذي معادلته $y = m$ $(0 \le m \le 4)$ يقسم داخل جزء القطع المكافئ $\mathcal{P}$ إلى منطقتين.

عند أية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟



26 ليكن f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (2-x)e^x$. وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني في جملة متجانسة.

① ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

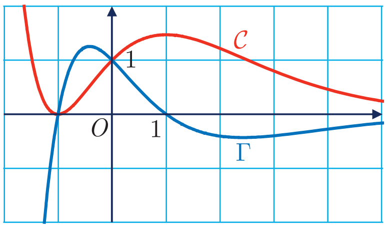
② ليكن $\mathcal{C}_1$ الجزء من الخط البياني $\mathcal{C}$ المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 2$ ، وليكن $\mathcal{S}$ السطح المحصور بين $\mathcal{C}_1$ ومحور الفواصل. احسب مساحة $\mathcal{S}$.

③ عندما يدور السطح $\mathcal{S}$ حول محور الفواصل فإنّه يولّد مجسماً دورانياً حجمه $\mathcal{V}$.

a. عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $G : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x \mapsto (f(x))^2$.

b. استنتج قيمة $\mathcal{V}$.

27 مسألة مركّبة



❶ في معلم متجانس رسمنا الخطّين البيانيَّيْن $\mathcal{C}$ و Γ لتابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$. نعلم أنّ أحدهما مشتقٌ للآخر، لذلك يمكن أن نرمز إليهما g و g'.

① بيّن مُعلّلاً أيُّ هذين الخطّين هو الخط البياني للتابع g وأيُّهما لمشتقه.

② ما ميل المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 ؟

❷ نتأمّل المعادلة التفاضلية : $(E) : y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

① أثبت أنّ $f_0 : x \mapsto (x^2 + 2x)e^{-x}$ هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E).

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$. أثبت أنّ « f حلٌّ للمعادلة (E)» يُكافئ « $u = f - f_0$ حلٌّ للمعادلة (E')». ثُمّ حلّ (E') واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E).

③ إذا علمتَ أنّ التابع g من الجزء ❶ هو حلٌّ للمعادلة (E)، فأعط صيغة $g(x)$ بدلالة x.

④ عيّن h حلّ المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$.

❸ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

① ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيّناً نهاياته عند $+\infty$ و $-\infty$.

② ليكن $\mathcal{C}'$ الخط البياني الذي يمثّل f في معلم متجانس. اكتب معادلة للمماس T للخط $\mathcal{C}'$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1. وارسم $\mathcal{C}'$ و T.

③ عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$. ثُمّ احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و $\mathcal{C}'$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \alpha$.

مسرد المصطلحات العلمية

الانكليزية	العربية
Proof by mathematical induction	إثبات بالتدريج أو بالاستقراء الرياضي
Monotonicity	اطراد
Remainder	باقي القسمة
Function	تابع (دالة)
Primitive function	تابع أصلي
Exponential function	التابع الأسي
Cosine function	تابع التجيب
Sine function	تابع الجيب
Tangent function	تابع الظل
Logarithmic function	التابع اللوغاريتمي
Affine function	تابع تآلفي
Periodic function	تابع دوري
Even function	تابع زوجي
Inverse function	تابع عكسي
Odd function	تابع فردي
Continuous function	تابع مستمر
Homographic function	تابع هوموغرافي
Composition of functions	تركيب التوابع
Bijective function	تقابل
Affine approximation	تقريب تآلفي
Integral	تكامل
Definite integral	تكامل محدد
Integration by parts	تكامل بالتجزئة
Volume	حجم
Upper bound	حدّ راجح
Lower bound	حدّ قاصر
Quotient	خارج القسمة
Graph of a function	خط بياني لتابع
Image of an interval	صورة مجال
Indetermination	عدم تعيين
Euclidean division	قسمة إقليدية
Hyperbola	قطع زائد

الانكليزية	العربية
Parabola	قطع مكافئ
Local minimum	قيمة صغرى محلياً
Local maximum	قيمة كبرى محلياً
Polynomial	كثير الحدود
Sphere	كرة
Infinity	اللانهاية
Adjacent sequences	متتاليات متجاورة
Sequence	متتالية
Recurrence sequence, Recursive sequence	متتالية تدريجية
Arithmetic sequence	متتالية حسابية
Divergent sequence	متتالية متباعدة
Convergent sequence	متتالية متقاربة
Bounded sequence	متتالية محدودة
Geometric sequence	متتالية هندسية
Inequality	متراجحة
Increasing	متزايد (تابع، متتالية)
Decreasing	متناقص (تابع، متتالية)
Interval	مجال
Solid of revolution	مجسم دوراني
Domain	مجموعة تعريف (تابع)
Axis of symmetry	محور تناظر
Center of symmetry	مركز تناظر
Area	مساحة
Derivative	مشتق
Higher order derivatives	مشتقات من مراتب عليا
Equation	معادلة
Differential equation	معادلة تفاضلية
Coordinate system	معْلَم
Asymptote	مُقارب
Oblique asymptote	مُقارب مائل
Observation	ملاحظة
Tangent	مُماس
Discriminant	مُميّز
Limit	نهاية