6

التابع الأسي

1. تعريف التابع الأسي النيبري
2. خواص التابع الأسي
3. دراسة التابع الأسي
4. نهايات مهمة تتعلّق بالتابع الأسي
5. دراسة التابع $x \mapsto a^x \,, (a > 0)$
6. معادلات تفاضلية بسيطة

التابع الأسّي في العلوم الأخرى

❶ **في الطب.** عند إعطاء مريض جرعة دوائية، يطرح الجسم جزءاً منها، ويتفكك جزءٌ آخر، ويبقى جزء فعّالٌ منها في الدم، لكل دواء عادة سرعة يتناقص وفقها تركيز الدواء في الدم. مثلاً إذا كان تركيز الدواء في الدم في لحظة ما مساوياً c فبعد مرور ساعة يصبح تركيز الدواء λc، حيث $(0 < \lambda < 1)$، وهكذا، إذا كان تركيز الدواء في الدم عند أخذ الجرعة هو C أصبح التركيز بعد مرور الساعة الأولى λC، وأصبح بعد مرور ساعتين $\lambda^2 C$، وبعد مرور n ساعة يصبح التركيز $\lambda^n C$. في الحقيقة، لا يجري الزمن هكذا في قفزات كلٌّ منها مدّته ساعة واحدة، بل التركيز في الدم تابعٌ مستمرٌ للزمن، هذا التابعُ هو تابعٌ أسّي، التابع الذي سيكون موضوع بحثنا في هذه الوحدة.

❷ **في الفيزياء.** يُستعمل نظير الكربون-14 في تحديد عمر بعض اللُقى الأثرية أو المستحاثات. ليكن $N(t)$ عدد ذرات الكربون-14 في اللحظة t في عيّنة من مادة عضوية. سرعان ما تتحلّل ذرات الكربون-14 لتتحوّل إلى النظير غير المشع للكربون، يبرهن الفيزيائيّون أنّ سرعة تغيّر عدد ذرات الكربون-14 متناسب مع عدد هذه الذرات في العينة، وتحديداً يُحقّق التابع N الخاصّة $N'(t) = -kN(t)$ حيث $k = 1.245 \times 10^{-4}$.

في الكائن الحي تتجدّد ذرات الكربون-14 على الدوام، ولكنها تتوقف عن ذلك عند موته، وهكذا بمقارنة نسبة الكربون-14 في قطعة من مستحاثة مع نسبته في قطعة مشابهة حديثة شاهدة، يمكننا تحديد عمر المستحاثة بدقة كبيرة. سنرى في هذه الوحدة أنّ التابع $t \mapsto N(t)$ تابعٌ أسيّ للزمن.

التابع الأسّي هو أساس جميع التوابع على الإطلاق. وسنتعرف على بعض من خواصه في هذه الوحدة.

6

التابع الأسي

1 التابع الأسي النيبري

1.1. تعريف وصلة بالتابع اللوغاريتمي

تعريف 1

التابع الأسي النيبري الذي رمزه exp، هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

« صورة كل x من $\mathbb{R}$ وفق exp هي العدد الذي لوغاريتمه النيبري يساوي x »

ولما كان e^x هو العدد الذي لوغاريتمه النيبري يساوي x، كان $\exp(x) = e^x$.

2.1. نتائج مباشرة

① وجدنا في الوحدة السابقة أنَّ e^m هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln x = m$. هذا يعني أنَّه مهما يكن $x > 0$ فالمساواة $\ln x = y$ تقتضي $x = e^y$. نرمز عادة إلى هذه الصياغة بالكتابة

$$\ln x = y \Rightarrow x = e^y$$

هذا أوّل لقاء لنا مع الرمز $\Rightarrow$ وهو رمز الاقتضاء بين خاصتين : $A \Rightarrow B$ ويعني أنّ صحة الخاصة A تقتضي صحة الخاصة B.

② وبالمثل، مهما كان $y > 0$، إذا كان $x = e^y$، كان $\ln(x) = \ln(e^y)$، أو $\ln x = y$. وباستعمال رمز الاقتضاء السابق ذكره، نكتب

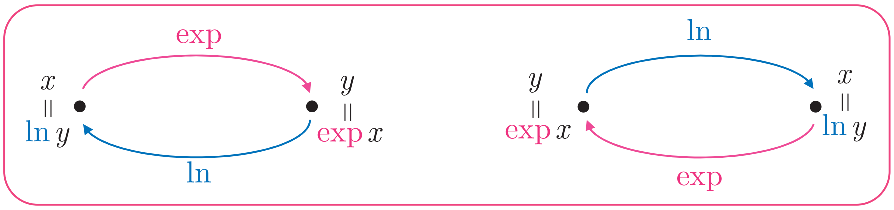
$$x = e^y \Rightarrow \ln x = y$$

نستنتج مما سبق أنَّ العلاقتين $\ln y = x$ و $y = e^x$ متكافئتان فصحّة أيٍّ منهما تقتضي صحّة الأخرى.

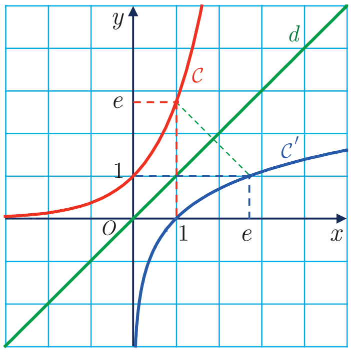
③ في حالة $x > 0$، العدد x هو العدد الذي لوغاريتمه $\ln x$ إذن $e^{\ln x} = x$. وعليه، إنّ التابع

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* : x \mapsto e^x$$

هو التقابل العكسي للتقابل $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$.



فالخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع الأسي $\exp$ هو نظير الخط البياني $\mathcal{C}'$ لتابع اللوغاريتم $\ln$ بالنسبة إلى المستقيم d منصف الربع الأوّل الذي معادلته $y = x$. كما هو مبيّن في الشكل.



مثال

- في حالة $x > 0$ لدينا $\frac{1}{x} = e^{\ln(1/x)} = e^{-\ln x}$.
- وفي حالة $x > 0$ لدينا

$$e^{|\ln x|} = \begin{cases} e^{\ln x}, & x \geq 1 \\ e^{-\ln x}, & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ \frac{1}{x}, & x < 1 \end{cases} = \max\left(x, \frac{1}{x}\right)$$

هنا $\max(u,v)$ هو أكبر العددين u و v.

④ **التابع الأسّي**، بصفته التقابل العكسي لتابع متزايد تماماً، هو بدوره **تابعٌ متزايدٌ تماماً** على $\mathbb{R}$. في الحقيقة ليكن u و v عددين حقيقيين يحققان $u > v$، إذا افترضنا جدلاً أنّ $e^u \leq e^v$ استنتجنا من تزايد التابع اللوغاريتمي أنّ $\ln(e^u) \leq \ln(e^v)$، وهذا يؤدي إلى التناقض $u \leq v$. إذن لا بُد أن يكون $e^u > e^v$.

نتيجة 1

لمقارنة عددين حقيقيّين a و b، يمكننا المقارنة بين e^a و e^b. فالتابع الأسّي $\exp$ يحافظ على المساواة ويحافظ على الترتيب. وعموماً، أياً يكن العددان a و b يكن :

$$\begin{aligned} a = b &\Leftrightarrow e^a = e^b \\ a < b &\Leftrightarrow e^a < e^b \\ a \leq b &\Leftrightarrow e^a \leq e^b \end{aligned}$$

تكريساً للفهم

لماذا للمعادلتين $\mathcal{E}_1 : e^{u(x)} = e^{v(x)}$ و $\mathcal{E}_2 : u(x) = v(x)$ مجموعة الحلول نفسها ؟

لأنَّ هذا تماماً ما تنص عليه النتيجة 1. فإذا كان x_0 حلاً للمعادلة $\mathcal{E}_1$ كان $e^{u(x_0)} = e^{v(x_0)}$ وعملاً بالنتيجة المشار إليها نستنتج أنّ $u(x_0) = v(x_0)$ أي إنّ x_0 حلٌ للمعادلة $\mathcal{E}_2$، وبالمثل إذا كان x_0 حلاً للمعادلة $\mathcal{E}_2$ كان $u(x_0) = v(x_0)$، ومن ثَمّ $e^{u(x_0)} = e^{v(x_0)}$، إذن x_0 حلٌ للمعادلة $\mathcal{E}_1$. ونبرهن بالمثل أنّ للمتراجحتين $e^{u(x)} \leq e^{v(x)}$ و $u(x) \leq v(x)$ مجموعة الحلول نفسها.

مثال حلُّ معادلات ومتراجحات

حل المعادلات أو المتراجحات الآتية

① $e^{1/x} = e^{x+1}$ ② $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$ ③ $e^{3x+1} \geq 2$.

الحل

① المعادلة $e^{1/x} = e^{x+1}$ تكافئ المعادلة $\frac{1}{x} = x+1$ أو $x^2 + x - 1 = 0$، وهي معادلة من الدرجة الثانية لها جذران $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. إذن مجموعة حلول المعادلة ① هي

$$\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

② المتراجحة $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$ تكافئ $2x+1 < -x^2+4$ أو $x^2+2x-3<0$، وهي محققة عند قيم x المحصورة تماماً بين جذري المعادلة $x^2+2x-3=0$. أي بين 1 و -3، فمجموعة حلول المتراجحة ② هي $]-3,1[$.

③ المتراجحة $e^{3x+1} \geq 2$ ليست من النمط المدروس $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$، ولكن يمكن كتابتها وفق هذا النمط باستعمال المساواة $a = e^{\ln a}$. فنضع $2 = e^{\ln 2}$ لتصبح المتراجحة $e^{3x+1} \geq e^{\ln 2}$ ومجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $3x+1 \geq \ln 2$ أو $x \geq \frac{1}{3}(-1+\ln 2)$. فمجموعة حلول المتراجحة ③ هي

$$\left[\frac{-1+\ln 2}{3}, +\infty\right[.$$

تَدرَّبْ

① اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$

❷ $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

❸ $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$

❹ $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من العبارات الآتية، مبيّناً المجموعة التي تكون معرّفة عليها:

❶ $A = e^{\ln x} - \ln(2e^{x})$

❷ $B = e^{\ln(x-1)-\ln x} + \dfrac{1}{x}$

❸ $C = \ln(e^{1/x}) + e^{-\ln x}$

③ حلّ المعادلات أو المتراجحات الآتية:

❶ $e^{3-x} = 1$

❷ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

❸ $\dfrac{e^{x}}{1-2e^{x}} = 5$

❹ $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}+2}$

❺ $\ln(e^{x}-2) = 3$

❻ $\ln(2-e^{x}) \geq 3$

❼ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$

❽ $(e^{x}-1)(e^{x}-4) < 0$

❾ $e^{2x^2-1} \geq 3$

④ اشرح لماذا تتفق إشارة $e^{x} - \dfrac{4}{e^{x}}$ مع إشارة $(e^{x}-2)$ ؟ ثُمّ حل المتراجحة $e^{x} - \dfrac{4}{e^{x}} < 0$.

2 خواص التابع الأسي

1.2. خواص جبرية للتابع الأسي

مبرهنة 2

① $e^0 = 1$، و $x = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $e^x = 1$.

② أياً يكن العددان الحقيقيان a و b يكن $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

③ أياً يكن العدد الحقيقي a فلدينا $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

④ أياً يكن العددان الحقيقيان a و b يكن $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

⑤ أياً تكن الأعداد الحقيقية a_1 و a_2 و $\cdots$ و a_n: $e^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = e^{a_1} \times e^{a_2} \times \cdots \times e^{a_n}$.

⑥ أياً يكن العدد الحقيقي a وأياً يكن العدد الصحيح p يكن $(e^a)^p = e^{pa}$.

الإثبات

① في الحقيقة، إنّ المساواة $e^x = 1$ تُكافئ $x = \ln(1) = 0$.

② بملاحظة أنّ $\ln(e^a e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b = \ln(e^{a+b})$ نستنتج $e^a e^b = e^{a+b}$.

③ باختيار $b = -a$ في $e^a e^b = e^{a+b}$. نستنتج $e^a e^{-a} = e^0 = 1$ منه $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

④ باستبدال $-b$ بالعدد b في $e^a e^b = e^{a+b}$ والاستفادة من ③. نستنتج $e^{a-b} = e^a e^{-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

⑤ تنتج هذه بالتدريج على العدد n والاستفادة من ②.

⑥ في حالة $p = 0$ هذه هي ①. وفي حالة $p > 0$ نختار $n = p$ و $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ في الخاصة ⑤، وفي حالة $p < 0$ يكون $q = -p > 0$ ومن ثَمّ نكتب

$$e^{pa} = e^{q(-a)} = (e^{-a})^q = \left(\frac{1}{e^a}\right)^q = (e^a)^{-q} = (e^a)^p.$$

مثال تبسيط الكتابة

بسِّط كلاً من العبارات الآتية، علماً أنّ x عدد حقيقي.

① $A = e^{2+\ln 8}$ ② $B = \dfrac{e^2}{e^{1+\ln 2}}$ ③ $C = (e^{2x})(e^{-x})^3$.

الحل

① $e^{2+\ln 8}$ هو من النمط e^{a+b} الذي يساوي $e^a \times e^b$، إذن

$A = e^2 \times e^{\ln 8} = e^2 \times 8 = 8e^2$.

② على غرار ①، $e^{1+\ln 2} = e^{\ln 2} \times e^1 = 2e$، إذن $B = \frac{e^2}{2e} = \frac{e}{2}$.

③ لمّا كان $(e^{-x})^3 = e^{-3x}$، استنتجنا أنّ $C = e^{2x} \cdot e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$.

2.2. القوى الحقيقيّة

تعريف 2

في حالة عدد حقيقي موجب تماماً a وعدد حقيقي ما x، نعرّف a^x (a مرفوعاً إلى الأس x) بأنّه العدد الحقيقي $e^{x\ln a}$ أي $a^x = e^{x\ln a}$، أو $\ln(a^x) = x\ln a$.

فعلى سبيل المثال : $\pi^\pi = e^{\pi\ln\pi} \approx 36.46216$، و $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2} \approx 2.6651$.

3.2. خواص القوى الحقيقية

مبرهنة 3

أياً يكن العددان الحقيقيّان الموجبان تماماً a و b، والعددان الحقيقيّان u و v كان:

① $1^u = 1$ ② $a^u \times a^v = a^{u+v}$ ③ $(a\cdot b)^u = a^u \times b^u$

④ $(a^u)^v = a^{u\cdot v}$ ⑤ $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$ ⑥ $\frac{a^u}{b^u} = \left(\frac{a}{b}\right)^u$

الإثبات

هذه نتائج مباشرة من خواص التابع الأسي:

① $1^u = e^{u\times\ln 1} = e^{u\times 0} = e^0 = 1$.

② $a^u \times a^v = e^{u\ln a} \times e^{v\ln a} = e^{u\ln a + v\ln a} = e^{(u+v)\ln a} = a^{u+v}$.

③ $(ab)^u = e^{u\ln(ab)} = e^{u(\ln a+\ln b)} = e^{u\ln a+u\ln b} = e^{u\ln a}\times e^{u\ln b} = a^u \times b^u$.

④ $(a^u)^v = e^{v\ln(a^u)} = e^{v\cdot u\ln a} = a^{u\cdot v}$.

⑤ $\frac{a^u}{a^v} = \frac{e^{u\ln a}}{e^{v\ln a}} = e^{u\ln a - v\ln a} = e^{(u-v)\ln a} = a^{u-v}$.

⑥ $\frac{a^u}{b^u} = \frac{e^{u\ln a}}{e^{u\ln b}} = e^{u\ln a - u\ln b} = e^{u(\ln a-\ln b)} = e^{u.\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)^u$.

مثال حل معادلات ومتراجحات أسيّة

حل المعادلات والمتراجحات الآتية.

① $e^{x^2} = (e^x)^3 e$ ② $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ ③ $e^x + 4e^{-x} \le 5$.

الحل

① نعلم أنَّ $(e^x)^3 e = e^{3x} \cdot e^1 = e^{3x+1}$، فالمعادلة $e^{x^2} = (e^x)^3 e$ تكافئ $e^{x^2} = e^{3x+1}$ وهي معادلة من النمط $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ التي حلولها هي حلول المعادلة $u(x) = v(x)$ نفسها، أي $x^2 = 3x + 1$ أو $x^2 - 3x - 1 = 0$. ولهذه الأخيرة جذران:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

إذن مجموعة حلول المعادلة ① هي $\left\{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

② لحل ② نجري تغييراً في المقدار المجهول : $e^x = X$ فتصبح المعادلة $X^2 - 5X + 4 = 0$ أو $(X - 1)(X - 4) = 0$، إذن إمّا أن يكون $X = 1$ أو $X = 4$، أي إما أن يكون $e^x = 1$ من ثَمّ $x = 0$ ، أو $e^x = 4$، ومن ثَمّ $x = \ln 4$. فمجموعة حلول المعادلة ② هي $\{0, \ln 4\}$.

③ لمّا كان $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ كُتبتْ المتراجحة بالشكل $e^x - 5 + \frac{4}{e^x} \le 0$، ولأنّ $e^x > 0$ لاتتغير المتراجحة عند ضرب طرفيها بالمقدار e^x، فهي إذن تُكافئ $e^{2x} - 5e^x + 4 \le 0$، ولحلها نضع $e^x = X$ فنجد $X^2 - 5X + 4 \le 0$، وهذه المتراجحة تتحقق بين جذري ثلاثي الحدود $X^2 - 5X + 4$، وهما 1 و 4، إذن مجموعة حلول المتراجحة هي التي تحقق $1 \le X \le 4$ أو $1 \le e^x \le 4$ أو $0 \le x \le \ln 4$ فمجموعة حلول المتراجحة ③ هي $[0, \ln 4]$.

تكريساً للفهم

كيف نحل معادلة من النمط $ae^{2x} + be^x + c = 0 \quad (E)$؟

نضع $e^x = X$، ونحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0 \quad (E')$. وحلول المعادلة (E)، إن وجدت، هي الأعداد x_0 التي تحقق $x_0 = \ln X_0$ و X_0 حل موجب تماماً للمعادلة (E').

تَدرَّبْ

① أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين على $\mathbb{R}$.

❶ $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$ ❷ $\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A=\ln\sqrt{e^5}$ ❷ $B=\dfrac{e}{e^{2+\ln 3}}$ ❸ $C=\dfrac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

❹ $D=\dfrac{e^{4x}}{e\times(e^x)^2}$ ❺ $E=(e^{2x})^3\times(e^{-x})^6$ ❻ $F=\dfrac{e^{3\pi}-e^{2\pi}}{e^{2\pi}-e^{\pi}}$

❼ $G=(32)^{\frac{3}{2}}$ ❽ $H=3^{\frac{-1}{\ln 3}}$ ❾ $I=\sqrt[6]{27}\times 3^{\frac{1}{2}}$

③ أثبت أنَّ التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ تابعٌ ثابتٌ.

④ حل المعادلات الآتية:

❶ $e^{2x}-5e^x+4=0$ ❷ $e^{2x}-e^x-6=0$

❸ $4e^{2x}-e^x+2=0$ ❹ $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

⑤ حل المتراجحات الآتية:

❶ $e^x-4e^{-x}\leq 0$ ❷ $(e^x-2)e^x>2(e^x-2)$

❸ $e^{x+2}\geq\dfrac{3}{e^x}$ ❹ $e^{2x}-2e^{-x}-3<0$

❺ $e^{x+\ln 4}>\dfrac{2}{3}$ ❻ $e^x+4e^{-x}\leq 5$

3 دراسة التابع الأسي

1.3. نهاية التابع الأسي عند $+\infty$ وعند $-\infty$

مبرهنة 4

① $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

الإثبات

① رأينا عند دراسة التابع اللوغاريتمي أنّ $\ln y \le y-1$ أياً يكن العدد الحقيقي الموجب y. فإذا اخترنا $y = e^x$ استنتجنا أنّه مهما كان العدد الحقيقي x كان $\ln e^x \le e^x - 1$ أو $1 + x \le e^x$. ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

② لنضع $u(x) = -x$ عندئذ

$$e^x = e^{-u(x)} = \frac{1}{e^{u(x)}}$$

ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{e^u} = 0$.

2.3. مشتق التابع الأسي

تمهيد

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

الإثبات

نقبل أنّ التابع الأسي مستمرٌ عند الصفر، عندئذ، إذا عرّفنا $u(x) = e^x - 1$ كان

$$\lim_{x\to0} u(x) = e^0 - 1 = 0$$

ومن جهة أخرى المساواة $u = e^x - 1$ تقتضي $e^x = 1 + u$ ومن ثَمّ $x = \ln(1+u)$ إذن

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{u(x)}{\ln(1+u(x))}$$

إذن لما كان $\lim\limits_{x\to0} u(x) = 0$ و $\lim\limits_{u\to0}\frac{u}{\ln(1+u)} = 1$، استنتجنا من مبرهنة نهاية التابع المركّب أنّ

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{u\to0}\frac{u}{\ln(1+u)} = 1.$$

مبرهنة 5

التابع الأسي $\exp$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وهو يساوي تابعه المشتق، أي $\exp' = \exp$.

الإثبات

لإثبات أنّ $\exp$ اشتقاقي عند x_0 نحسب تابع نسبة التغير:

$$t(h) = \frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \times \frac{e^h - 1}{h}$$

واستناداً إلى التمهيد السابق

$$\lim_{h\to 0} t(h) = e^{x_0} \times \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^{x_0} = \exp(x_0)$$

فالتابع الأسي $\exp$ اشتقاقي عند x_0 ومشتقه عندها يساوي $\exp(x_0)$.

3.3. مشتق التابع الأسي لتابع

لما كان $\exp$ معرفاً على $\mathbb{R}$، كانت مجموعة تعريف $x \mapsto e^{u(x)}$ هي نفسها مجموعة تعريف u. وعليه بالاستفادة من قاعدة اشتقاق تابع مركب نجد ما يأتي:

مبرهنة 6

إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على مجالٍ I، فإنَّ التابع $f : x \mapsto e^{u(x)}$ اشتقاقي على I وعند كل x من I لدينا $f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.

مثال

احسب مشتقات التوابع الآتية:

① $f(x) = e^{x^2-x}$ ② $f(x) = \pi^{x^2-x}$.

الحل

① هنا $f(x) = e^{u(x)}$ مع $u(x) = x^2 - x$، إذن $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x-1)e^{x^2-x}$.

② في هذه الحالة $f(x) = \pi^{x^2-x} = e^{(x^2-x)\ln\pi}$، إذن $f'(x) = (\ln\pi)(2x-1)e^{(x^2-x)\ln\pi}$.

تكريساً للفهم

كيف يتوضع الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع $f : x \mapsto e^x$ بالنسبة إلى مماساته؟

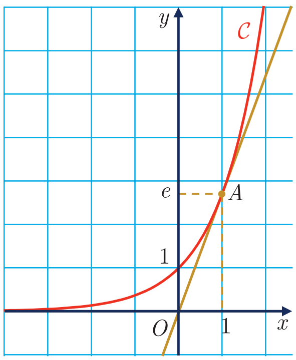
لتكن $M(m, e^m)$ نقطةً من $\mathcal{C}$، وليكن $\mathcal{T}$ المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة M. ميل المماس $\mathcal{T}$ يساوي $f'(m) = e^m$، فمعادلته هي $y = e^m + e^m(x-m)$ أو $y = e^m(x-m+1)$.

لدراسة وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$، ندرس التابع φ المعرّف على $\mathbb{R}$ والذي يمثل الفرق :

$$\varphi(x) = e^x - e^m(x - m + 1)$$

يعطى مشتق φ على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $\varphi'(x) = e^x - e^m$ وإشارته تماثل إشارة $x - m$ ومنه

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$



نلاحظ أنَّ $\varphi(m) = 0$ وأنّ $\varphi(x) > 0$ في حالة $x \neq m$. ولأنَّ M هي نقطة من $\mathcal{C}$، نستنتج أنَّ $\mathcal{C}$ يقع فوق أي مماس له. في الشكل المجاور مماس الخط البياني $\mathcal{C}$ في النقطة $A(1,e)$ يمر بمبدأ المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

مثال دراسة تابع من النمط $f(x) = e^{u(x)}$

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

الحل

- التابع f من النمط $f(x) = e^{u(x)}$، حيث $u(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. ولمّا كانت مجموعة تعريف u هي $\mathbb{R}$، فمجموعة تعريف f هي $\mathbb{R}$ أيضاً.
- ولأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^0 = 1$. فالمستقيم d الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.
- وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$. فالمستقيم d ذاته مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.
- التابع u اشتقاقي على $\mathbb{R}$، إذن f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. ولأنّ $u'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$، إذن

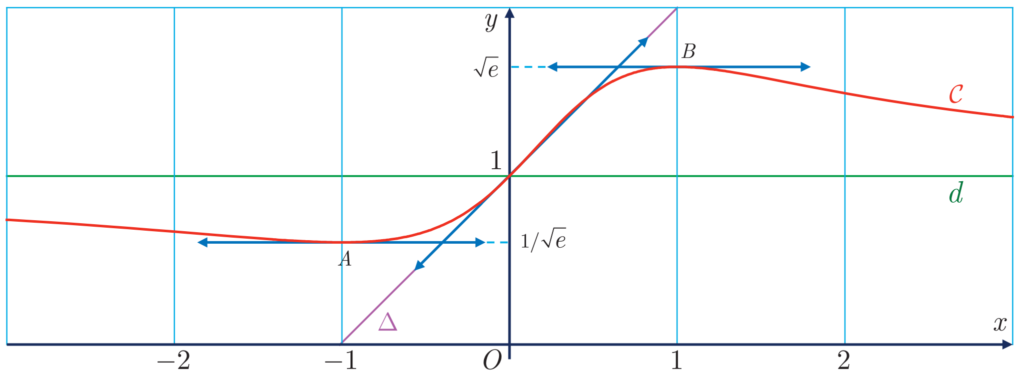
$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \frac{e^{u(x)}}{(x^2+1)^2}\left(1-x^2\right).$$

فإشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $1 - x^2$ الذي ينعدم عند $x = -1$ و $x = 1$، وهي موجبة بين الجذرين وسالبة خارجهما. كما إنّ $f(-1) = e^{-\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{e}$ و $f(1) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

- يمكننا إذن وضع جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/\sqrt{e}$	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	1

- مماسا $\mathcal{C}$ في $A\left(-1,1/\sqrt{e}\right)$ و $B\left(1,\sqrt{e}\right)$ يوازيان محور الفواصل $\left(f'(-1)=f'(1)=0\right)$. وفي النقطة $M(0,1)$، ميل المماس $m=f'(0)=1$، فالمُماس يوازي منصف الربع الأول ومعادلته $y=x+1$. نرمز إليه بالرمز Δ.
- نرسم d و Δ ومماسي $\mathcal{C}$ في A و B، ثم نرسم الخط $\mathcal{C}$ محقّقاً صفات f المدروسة.



تَدَرَّبْ

① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\exp\left(\dfrac{1}{2}-x^2\right)$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج معادلة كل مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. أشر إلى قيمة حديّة للتابع.

❸ اكتب معادلةً للمماس d للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$.

❹ جد إحداثيات النقطتين اللتين ينعدم فيهما $f''(x)$، واكتب معادلتي المماسين d_1 و d_2 فيهما.

❺ ادرس وضع الخط البياني $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى كلٍ من d و d_1 و d_2.

❻ ارسم d و d_1 و d_2 ثم ارسم $\mathcal{C}$.

② f و g هما التابعان المعرّفان على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ و $g(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. و h هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $h=\dfrac{g}{f}$. احسب كلاً من $f'(x)$ و $g'(x)$. وأثبت أنَّ $h'=\dfrac{1}{f^2}$.

4 نهايات مهمة تتعلق بالتابع الأسي

مبرهنة 7

مهما كان العدد الطبيعي n، فإنّه في جوار $+\infty$ يكون x^n مهملاً أمام e^x. أي

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-x}\right)=0\ .$$

الإثبات

في الحقيقة، رأينا أنّ الخط البياني للتابع الأسّي يقع فوق أيٍّ من مماساته. وبوجه خاص لدينا المتراجحة $e^x \geq 1+x$ أياً كانت قيمة x لأنّ $y=x+1$ هي معادلةٌ للمماس في النقطة $(0,1)$ من الخط البياني للتابع الأسي، وعليه سنستفيد فقط من الخاصّة $e^t \geq t$ في حالة $t \geq 0$.

لنتأمل عدداً موجباً x وعدداً طبيعياً n، عندئذ

$$e^x=\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

ومن ثَمّ

$$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to\infty} x=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$.

نتيجة 8

مهما كان العدد الطبيعي n فلدينا

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^n e^x\right)=0\ .$$

الإثبات

في الحقيقة، يكفي إجراء تغيير في المتحول $x \mapsto -x$ في المبرهنة السابقة.

نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$ ، إذن $\ln x$ مهمل أمام x في جوار $+\infty$، ورأينا أعلاه أنّ x مهمل أمام e^x في جوار $+\infty$. إذن $\ln x$ مهمل أمام e^x في جوار $+\infty$. ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}=+\infty$$

في الحقيقة هذا ينتج من المساواة $\frac{e^x}{\ln x}=\frac{e^x}{x}\cdot\frac{x}{\ln x}$ المحقّقة في حالة $x>0$.

مثال حساب نهايات

احسب كلاً من نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$:

① $f : x \mapsto x - e^x$

② $g : x \mapsto e^{2x} - e^x$

③ $h : x \mapsto e^x - \ln x$

الحل

① لحساب نهاية $f(x) = x - e^x$ عند $+\infty$، نكتب $f(x) = e^x\left(\dfrac{x}{e^x} - 1\right)$. ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ ،

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x} - 1\right) = -1$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

② لحساب نهاية $g(x) = e^{2x} - e^x$ عند $+\infty$، نكتب $g(x) = e^x(e^x - 1)$. ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ،

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

③ لحساب نهاية $h(x) = e^x - \ln x$ عند $+\infty$، نكتب:

$$h(x) = e^x\left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right) = e^x\left(1 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x}\right).$$

نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{e^x}\right) = 1$. ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ،

نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

مثال حساب نهايات

ادرس نهاية كلٍ من التابعين f و g عند حدود مجموعة تعريفه.

① $f : x \mapsto e^x - x^2$

② $g : x \mapsto \dfrac{2e^x + 1}{1 + e^x}$

الحل

① التابع f معرّفٌ على $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ، أمامنا إذن حالة عدم تعيين من النمط $+\infty - \infty$.

لإزالة عدم التعيين نكتب $f(x) = e^x\left(1 - x^2e^{-x}\right)$. ولمّا كان

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$$

استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② g معرّف على $\mathbb{R}$.

- في جوار $-\infty$. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ، إذن $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{1}{1} = 1$.
- في جوار $+\infty$. لدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{+\infty}{+\infty}$. لإزالتها نكتب

$$g(x) = \frac{e^x(2+e^{-x})}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{2+e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

ولما كان $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ ، استنتجنا أنَّ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

مثال دراسة تابع وحلُّ معادلة

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{-x} + x - 2$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$ ثم بيّن أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$.

الحل

- في جوار $-\infty$. $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} (x-2) = -\infty$. نحن أمام حالة عدم تعيين، لإزالتها نكتب $f(x) = e^{-x}(1+xe^x) - 2$. نعلم أنَّ $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ ، إذن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1+xe^x) = +\infty$. ومن ثَمّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- في جوار $+\infty$. لدينا $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

هذا يوحي بوجود فرع لا نهائي، وهنا نلاحظ أنّ $f(x) - x + 2 = e^{-x}$ ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-2)\big) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

نستنتج أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. ثم إنَّ

$$y_{\mathcal{C}} - y_d = f(x) - (x-2) = e^{-x} > 0$$

فالخط $\mathcal{C}$ يقع كاملاً فوق المقارب d.

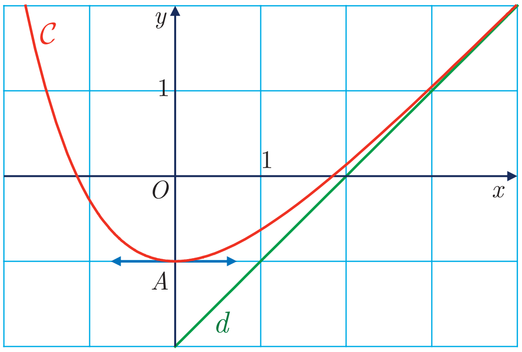
- التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 = e^{-x}\left(e^x - 1\right).$$

ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x = 0$ ، وإشارته تُماثل إشارة $e^x - 1$ أي إشارة x ، وهذا ما يتيح لنا وضع جدول تغيرات f الآتي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

لاحظ أنّ المماس في النقطة $A(0,-1)$ يوازي محور الفواصل ويقع الخط $\mathcal{C}$ فوق هذا المماس.



- الخط البياني:
  - نرسم المستقيم المقارب d الذي معادلته $y = x - 2$.
  - نرسم النقطة $A(0,-1)$ والمماس الأفقي فيها.
  - نرسم $\mathcal{C}$ محققاً خواص f المتعلقة بالتناقص على $]-\infty,0[$ والتزايد على $[0,+\infty[$.
- حل المعادلة $f(x) = 0$:
  - f مستمرٌ ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty,0[$ إذن $f\big(]-\infty,0[\big) =]-1,+\infty[$ ولمّا كان $0 \in]-1,+\infty[$، فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$.
  - f مستمرٌ ومتزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$ إذن $f\big([0,+\infty[\big) = [-1,+\infty[$ ولمّا كان $0 \in [-1,+\infty[$، فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[0,+\infty[$.
  - وبهذا يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حلاّن في $\mathbb{R}$.

مثال نهايات مميزة

جد نهاية كلٍ من التوابع الآتية عند a:

① $f : x \mapsto (1+x)^{1/x}$ و $a = 0$.

② $g : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ و $a = +\infty$.

③ $h : x \mapsto \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x/2}$ و $a = +\infty$.

جميع هذه الحالات، من النمط a^b حيث a و b توابع للمتحوّل x، هنا نعود دوماً إلى التعريف $a^b = \exp\big(b \ln a\big)$.

الحل

① في هذا المثال $f(x) = \exp\big(u(x)\big)$ حيث $u(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. ونعلم أنّ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$، والتابع الأسي مستمرٌ عند الواحد إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{u\to 1} e^u = e$. أي $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

② نجري تغيير المتحوّل $u(x) = \dfrac{1}{x}$، $g(x) = (1+u(x))^{1/u(x)}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$، ووجدنا أنّ $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

③ لنحاول أن نجعل صيغة h قريبة مما درسناه آنفاً:

$$h(x) = \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x/2} = \left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x/2}.$$

فإذا وضعنا $u(x) = \frac{x-1}{4}$، كان $\frac{x}{2} = 2u(x) + \frac{1}{2}$. وكان من ثَمّ

$$h(x) = \left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{2u(x)+\frac{1}{2}} = \left(\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}\right)^2 \sqrt{1+\frac{1}{u(x)}}.$$

لمّا كان $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ و $\lim_{u\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{u}} = 1$ و $\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$ ، استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \left(\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)^2 \cdot \lim_{u\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{u}} = e^2$$

تَدرَّبْ

① ادرس نهاية كلٍ من التابعين f و g عند حدود مجموعة تعريفه.

❶ $f(x) = \ln x - e^x$ ❷ $g(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

② ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (3-x)e^x$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

③ جد نهاية كلٍ من التوابع الآتية عند a:

❶ $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}, \quad a = 1$

❷ $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}, \quad a = +\infty$

❸ $f(x) = \frac{e^x-1}{2x}, \quad a = 0$

❹ $f(x) = 2xe^{-x}, \quad a = +\infty$

❺ $f(x) = \frac{e^x-1}{x-1}, \quad a = +\infty, -\infty$

❻ $f(x) = e^{2x} - e^x + 3, \quad a = +\infty, -\infty$

❼ $f(x) = \ln(e^x+2) \quad a = +\infty, -\infty$

❽ $f(x) = 2x - 1 + e^{-x} \quad a = -\infty$

❾ $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1) \quad a = 0, +\infty$

❿ $f(x) = e^{1/x} \quad a = +\infty, 0, -\infty$

5 دراسة توابع من النمط $x \mapsto a^x$ $(a>0)$

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً تماماً، كان $a^x = e^{x\ln a}$، التابع الأسي exp هو تابعٌ من هذا النمط يوافق الحالة الخاصة $a=e$. لنرمز إذن إلى التابع $x \mapsto a^x$ بالرمز $\exp_a$ ولنسمّه التابع الأسي بالأساس a.

لاحظ أنّه في حالة $a=1$، يمثّل التابع $\exp_1$ التابع الثابت $x \mapsto 1$. لذلك سنعتبر فيما يأتي العدد a موجباً تماماً ومختلفاً عن 1. واستناداً إلى التعريف يكون $\exp_a(x) = e^{x\ln a}$، فهو إذن من الشكل $\exp \circ u$ حيث $u(x) = x\ln a$.

1.5. مشتق التابع الأسي بالأساس a ودراسة تغيراته

مبرهنة 9

أياً يكن العدد الحقيقي a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$، فالتابع $\exp_a$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $\exp_a(x) = a^x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويعطى مشتقه بالعلاقة $\exp_a' = (\ln a)\exp_a$. ينتج من ذلك أنّ $\exp_a$ متزايدٌ تماماً في حالة $a>1$، ومتناقصٌ تماماً في حالة $0<a<1$.

الإثبات

لمّا كان $\exp_a(x) = e^{u(x)}$ حيث $u(x) = x\ln a$. وكان u اشتقاقيّاً على $\mathbb{R}$ ومشتقه $u'(x) = \ln a$، استنتجنا من المبرهنة 6، أنّ $\exp_a$ اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ وأنّ

$$\exp_a'(x) = (\ln a)\exp_a(x)$$

أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

ولمّا كان $a^x > 0$، كانت إشارة $\exp_a'(x)$ مماثلة لإشارة $\ln a$. إذن

- في حالة $a>1$، $\ln a > 0$، فالتابع $\exp_a$ متزايد تماماً على $\mathbb{R}$.
- وفي حالة $0<a<1$، $\ln a < 0$، فالتابع $\exp_a$ متناقص تماماً على $\mathbb{R}$.

2.5. نهاية التابع الأسي بالأساس a عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ورسم خطه البياني

لنرمز إلى الخط البياني للتابع $\exp_a$ بالرمز $\mathcal{C}_a$. ولنلاحظ أنّ $\exp_a(0) = e^0 = 1$ ، فالخط البياني $\mathcal{C}_a$ يقطع محور التراتيب بالنقطة $A(0,1)$.

حالة $a > 1$

- في جوار $-\infty$ لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$$

ومحور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_a$ في جوار $-\infty$.

- وفي جوار $+\infty$ لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

- التابع $\exp_a$ متزايد تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a$	0	$\nearrow$	$+\infty$

حالة $0 < a < 1$

- في جوار $-\infty$ لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

- وفي جوار $+\infty$ لدينا

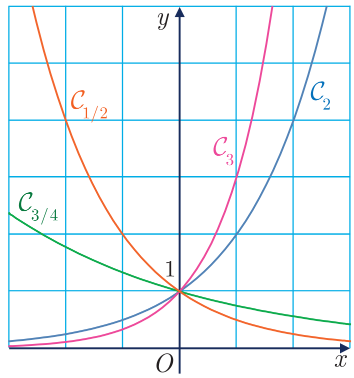
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$$

ومحور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_a$ في جوار $+\infty$.

- التابع $\exp_a$ متناقص تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a$	$+\infty$	$\searrow$	0

نجد في الشكل الخطوط البيانية $\mathcal{C}_a$ الموافقة لعدّة قيم للعدد a:



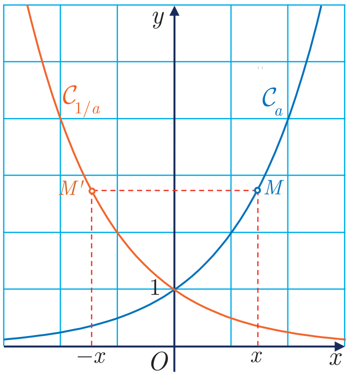
3.5. تتمات

- في حالة عدد حقيقي a موجب تماماً ومختلف عن 1. عرّفنا في وحدة التابع اللوغاريتمي التابع $\log_a$ المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق الصيغة $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$، فما العلاقة مع التابع الأسي بالأساس a الذي رمزنا إليه $\exp_a$؟

في الحقيقة، أياً كان $x > 0$ كان $\exp_a \circ \log_a(x) = e^{\ln a \log_a(x)} = e^{\ln x} = x$. وفي حالة x من $\mathbb{R}$ لدينا $\log_a \circ \exp_a(x) = \dfrac{1}{\ln a}\ln\left(e^{(\ln a)x}\right) = \dfrac{1}{\ln a}(\ln a)x = x$.

نستنتج مما سبق أنَّ $\exp_a$ هو التابع العكسي للتابع $\log_a$، فخطاهما البيانيان متناظران بالنسبة إلى منصّف الربع الأوّل Δ الذي معادلته $y = x$.

بوجه خاص، التابع $\exp_{10} : x \mapsto 10^x$ هو التابع العكسي للتابع اللوغاريتمي العَشري $\log$.



- هناك خاصّة تناظرية مهمة هي الخاصة الآتية: إنّ الخطين البيانيين $\mathcal{C}_a$ و $\mathcal{C}_{1/a}$ متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

في الحقيقة:

$$a^x = e^{x\ln a} = e^{(-x)(-\ln a)} = e^{-x\ln(1/a)} = (1/a)^{-x}.$$

فنظيرة النقطة $M(x, a^x)$ من $\mathcal{C}_a$ بالنسبة إلى محور التراتيب هي النقطة $M'(-x, (1/a)^{-x})$ من $\mathcal{C}_{1/a}$.

مثال دراسة تابع

ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x \cdot 2^x$، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

الحل

استناداً إلى التعريف، لدينا $f(x) = xe^{x\ln 2}$ عند كل عدد حقيقي x.

- في جوار $-\infty$ لدينا $f(x) = \dfrac{1}{\ln 2}u(x)e^{u(x)}$ حيث $u(x) = (\ln 2)x$. ولما كان

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = -\infty \text{ و } \lim_{u\to-\infty} ue^u = 0$$

استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$، ومحور الفواصل مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

- في جوار $+\infty$ لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا

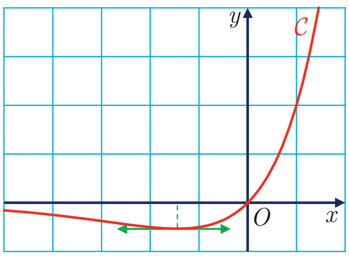
$$f'(x) = e^{x\ln 2} + x\ln 2 \times e^{x\ln 2} = e^{x\ln 2}(1 + x\ln 2) = 2^x(1 + x\ln 2).$$

إذن إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $1 + x\ln 2$ الذي ينعدم فقط عند $x = -\dfrac{1}{\ln 2}$. وعند هذا الحل

$$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2}e^{-\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2} = \frac{-1}{e\ln 2}$$

- جدول تغيرات f:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$



تَدرَّبْ

① بسّط كتابة كل من العددين $A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ و $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$.

② حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة:

❶ $7^{x-1} = 3^{x}$ ❷ $3^{x} = 4^{2x+1}$ ❸ $3^{x} > 4$

❹ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 4$ ❺ $5^{-x} < 5^{2x}$ ❻ $\frac{2^{x}}{2^{x}+1} < \frac{1}{3}$

③ فيما يأتي حل كلاً من المعادلات والمتراجحات المعطاة

❶ $4^{x} + 2^{x+1} - 3 = 0$، و $4^{x} + 2^{x+1} - 3 \leq 0$.

❷ $2^{x+1} - 10 \times 2^{x} + 12 = 0$، و $2^{x+1} - 10 \times 2^{x} + 12 \geq 0$.

❸ $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$، و $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$.

④ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2^{x^2-2x}$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

⑤ جد التابع المشتق لكلٍ من التوابع الآتية:

❶ $f(x) = x^{x}$ ❷ $f(x) = 3^{x^2}$ ❸ $f(x) = \pi^{\ln x}$.

⑥ حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين:

$$3^{x} \times 3^{y} = 9 \qquad (1)$$
$$3^{x} + 3^{y} = 4\sqrt{3} \qquad (2)$$

⑦ إذا علمت أنَّ $a > 0$ و $b > 0$ ، فهل صحيح أنَّ $a^{\ln b} = b^{\ln a}$؟

⑧ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x \cdot 2^{-x}$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

⑨ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4^{x} - 2^{x+2}$.

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ ارسم $\mathcal{C}$.

⑩ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (1-x) \times 2^{x}$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

6 معادلات تفاضلية بسيطة

1.6. مفردات جديدة

أن **نحُلَّ** على مجال I **المعادلة التفاضلية** $y' = ay, (a \neq 0)$ بالتابع المجهول y، هو أن نعثر على جميع التوابع f الاشتقاقية على I، والتي تُحقّق في حالة x من I، العلاقة $f'(x) = af(x)$. يُسمّى مثل هذا التابع حلاً للمعادلة التفاضلية $y' = ay$.

2.6. حلّ المعادلة $y' = ay$ في حالة $a \neq 0$

مبرهنة 10

إنّ حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay, (a \neq 0)$ على $\mathbb{R}$، هي التوابع $f_k : x \mapsto ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي.

الإثبات

من الواضح أولاً أنّ كلّ تابع من النمط f_k هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية لأنّ

$$f_k'(x) = ake^{ax} = af_k(x)$$

وبالعكس، لنتأمّل تابعاً f معرّفاً على $\mathbb{R}$ يُحقّق المعادلة التفاضلية، ولنعرّف $g : x \mapsto f(x)e^{-ax}$. عندئذ يكون لدينا ما يأتي:

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x)(-a)e^{-ax} = \big(f'(x) - af(x)\big)e^{-ax} = 0$$

إذن g تابعٌ ثابتٌ على $\mathbb{R}$ لأنّ مشتقه معدومٌ عليها، وإذا رمزنا بالرمز k إلى قيمة هذا الثابت استنتجنا أنّ $f(x) = ke^{ax} = f_k(x)$.

نتيجة

أياً كان (x_0, y_0) فيوجد حلٌّ وحيدٌ f معرّف على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay, (a \neq 0)$، يحقّق $f(x_0) = y_0$.

الإثبات

في الحقيقة، إنّ أي حلّ f للمعادلة التفاضلية المعطاة، هو من النمط $f : x \mapsto ke^{ax}$، بقي أن نُعيّن قيم k التي تجعل $f(x_0) = y_0$، أي $ke^{ax_0} = y_0$ أو $k = y_0e^{-ax_0}$. وهنا نجد أنّ قيمة واحدة للعدد k وفقط واحدة هي التي تحقّق المطلوب إذن $f : x \mapsto y_0e^{a(x-x_0)}$ هو الحلّ الوحيد المنشود.

مبرهنة 11

إنّ حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b \;\left(a \neq 0, b \in \mathbb{R}\right)$ على $\mathbb{R}$، هي التوابع

$$g_k : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

حيث k عدد حقيقي.

الإثبات

من الواضح أولاً أنّ كلّ تابع من النمط g_k هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ لأنّ

$$g_k'(x) = ake^{ax} = a\left(g_k(x) + \frac{b}{a}\right) = ag_k + b$$

وبالعكس، لنتأمّل تابعاً g معرّفاً على $\mathbb{R}$ يُحقّق المعادلة التفاضلية، ولنعرّف $f : x \mapsto g(x) + \frac{b}{a}$.

عندئذ يكون لدينا في حالة عدد حقيقي x ما يأتي:

$$f'(x) = g'(x) = ag(x) + b = af(x)$$

إذن f حلٌّ للمعادلة $y' = ay$، فهو إذن من الشكل $x \mapsto ke^{ax}$ حيث k عددٌ حقيقي، أو $g(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} = g_k(x)$.

تَدرَّبْ

① حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y' = 3y$ ❷ $y' + 2y = 0$

❸ $3y' = 5y$ ❹ $2y' + 3y = 0$

② في كلّ حالة عيّن حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

❶ $y' = 2y$، والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$.

❷ $y' + 5y = 0$، والخط البياني $\mathcal{C}$ للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

❸ $y' + 2y = 0$، وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

③ حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y' = 2y + 1$ ❷ $y + 3y' = 2$

❸ $2y' = y - 1$ ❹ $2y + 3y' - 1 = 0$

أفكارٌ يجب تَمثُّلُها

- الخطان البيانيان للتابعين $\ln$ و $\exp$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$.
- يساعد التابع $\exp$ في حل المعادلة $y = \ln x$ بالمجهول x: $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.
- e^x هو العدد الذي لوغاريتمه يساوي x: $\ln e^x = x$ أياً كان $x \in \mathbb{R}$. وفي حالةٍ خاصة $\ln e = 1$. كما أنَّ $e^{\ln x} = x$ في حالة $x > 0$.
- أساسيات التابع الأسي:
  - e^x عددٌ حقيقي أياً يكن العدد الحقيقي x، وهو موجبٌ تماماً، ثم إنَّ $e^0 = 1$.
  - $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ و $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.
  - $\exp$ متزايد تماماً على $\mathbb{R}$.
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- التابع $\exp$ يساوي تابعه المشتق: $\exp' = \exp$.
- مجموعة تعريف التابع $x \mapsto e^{u(x)}$ هي مجموعة تعريف التابع $x \mapsto u(x)$.
- التابع $\exp$ يفيد في تعريف قوة حقيقية (قد لا تكون أعداداً عادية):

  $a^b = \exp(b \ln a) = e^{b \ln a}$ ($a > 0$ و $b \in \mathbb{R}$).
- قواعد العمليات على القوى الحقيقية منسجمة مع مثيلاتها على القوى الصحيحة.
- مهما كانت n فإنّ x^n مهمل أمام e^x في جوار $+\infty$ أي $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

منعكسات يجب امتلاكُها.

- لتبسيط عبارة أو تحليلها إلى مضاريب، تذكَّر أنَّ $e^{nx} = (e^x)^n$.
- تذكَّر أنَّ e^u لا ينعدم وهو موجب تماماً أياً تكن العبارة u.
- لحل المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ أو المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$، نحل المعادلة $u(x) = v(x)$ أو المتراجحة $u(x) \geq v(x)$.
- تذكر أنَّ أية قوة موجبة لـ x مهملة أمام e^x في جوار $+\infty$، ولذا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

وهذا مفيد عند حساب النهايات في جوار $+\infty$.

مثال لحساب نهاية التابع $f : x \mapsto e^x - x$ عند $+\infty$، نكتب $f(x) = e^x(1 - \frac{x}{e^x})$، ولأنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$، إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 1$. ولمّا كان $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- للبحث عن النهايات في جوار $-\infty$، ضع $u = -x$ ثُم ابحث عن النهايات عندما تسعى u إلى $+\infty$.

مثال لحساب نهاية التابع $f : x \mapsto e^{-x} + x$ عند $-\infty$، نضع $u = -x$ فيكون $\lim_{x\to-\infty} u = +\infty$ ويكون $f(x) = e^u - u$. وبناءً على المثال السابق، لدينا $\lim_{u\to+\infty} (e^u - u) = +\infty$، إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

- في حالة $f(x) = e^{u(x)}$، لمعرفة إشارة $f'(x)$، ادرس إشارة $u'(x)$. لأنَّ $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ و $e^{u(x)} > 0$.
- تذكَّر أنَّ «a^x» هو $e^{u(x)}$ حيث $u(x) = x\ln a$. والتابع $f : x \mapsto a^{v(x)}$ في الحالة العامة، له تابع مشتق معطى بالصيغة $f'(x) = v'(x)\cdot \ln a \cdot a^{v(x)}$ عندما يكون v اشتقاقياً. وفي حالة $f(x) = a^x$ خصوصاً يكون $f'(x) = \ln a \cdot a^x$.

أخطاء يجب تجنّبها.

- لا ترفع عدداً سالباً إلى أسٍ غير صحيح، فعلى سبيل المثال ليس للرمز $(-2)^\pi$ أي معنىً.
- لا تعتقد أنَّ مشتق التابع $f(x) = a^x$ هو $f'(x) = x\,a^{x-1}$ لأنَّ x هو أس القوة.
- لا تعتقد أنَّ $e^a + e^b = e^{a+b}$.

أنشطة

نشاط 1 إحاطة العدد النيبري e

نهتمّ في هذا النشاط بإحاطة العدد النيبري e باستعمال متتاليات، ونهتم بسرعة تقارب هذه المتتاليات.

❶ إحاطة العدد e

ليكن f التابع المعرّف على $]-1,+\infty[$ بالصيغة $f(x)=\ln(1+x)-x$.

① ادرس تغيرات التابع f، واستنتج أنّ $\ln(1+x)\leq x$ في حالة $x>-1$.

② ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

a. تحقّق أنّ $\frac{1}{n}$ عنصر من $]0,1[$، وأنّ $\frac{-1}{1+n}$ عنصر من $]-1,0[$.

b. بالاستفادة من نتيجة ① استنتج أنّ

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$ ومن ثَمّ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$.
- $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\leq-\frac{1}{n+1}$ ومن ثَمّ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq\frac{1}{n+1}$، وأخيراً $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geq e$. إذن

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\qquad(*)$$

③ ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً. وليكن g و h التابعين المعرّفين على $[0,1]$ وفق

$$g(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$$

a. ادرس اطراد كلٍّ من التابعين g و h على $[0,1]$، واستنتج أنّ $h(1)\geq1\geq g(1)$.

b. استنتج أنّ

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq e\leq1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot(n!)}\qquad(**)$$

❷ تطبيق

لنتأمّل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ الآتيتين: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $v_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

① أثبت أنّ $0\leq e-u_n\leq\frac{u_n}{n}\leq\frac{3}{n}$ بالاعتماد على $(*)$.

② استنتج من $(**)$ أنّ $0\leq e-v_n\leq\frac{1}{n(n!)}$. أيُّ المتتاليتين أفضل لحساب تقريب للعدد e؟

تمرينات ومسائل

1 في كلٍ من الحالات الآتية، احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها.

① $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

② $I =]0, +\infty[, \quad f(x) = e^{-x} \ln x$

③ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$

④ $I = \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad f(x) = \frac{1}{x}e^x$

⑤ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$

⑥ $I = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad f(x) = xe^{1/x}$

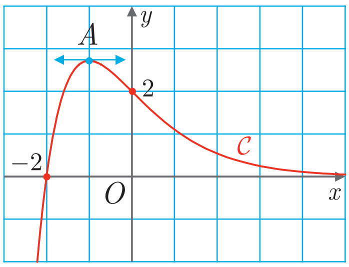
⑦ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + e^x)$

⑧ $I =]0, +\infty[, \quad f(x) = e^{x \ln x}$

⑨ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$

⑩ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

2 $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (ax + b)e^{-x}$، حيث a و b عددان حقيقيان. اعتماداً على ما تجد في الشكل:



① احسب قيمة كلٍ من a و b.

② احسب $f'(x)$، واستنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f.

③ أثبت أنّ محور الفواصل مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

3 ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع الأسي $\exp$. ثُمّ استنتج رسم الخط البياني لكلٍ من التوابع الآتية:

① $f : x \mapsto e^x - 2$ ② $g : x \mapsto 1 - e^x$ ③ $h : x \mapsto |1 - e^x|$

4 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

① ما نهاية f عند كلٍ من طرفي مجموعة تعريفه؟

② ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

③ g هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$. أثبت أنَّ $g(x) = f(-x)$، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقاً من $\mathcal{C}$.

5 في الحالات الآتية بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ يقبل مُقارباً مائلاً d، عيّنه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

① $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$ ② $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$ ③ $f(x) = x + 2 + xe^x$

6 بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = \ln(3 + e^x)$ يقبل خطين مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يُطلب تعيينهما.

7 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$.

① لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y = 2$ و d_2 الذي معادلته $y = -3$ مقاربان للخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

④ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$. ثمّ ارسم في معلم متجانس d_1 و d_2 و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

8 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x-1)e^x$. ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثمّ ارسم $\mathcal{C}$.

9 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^x - x$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② بيّن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

③ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثم ارسم d و $\mathcal{C}$.

10 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x + 1}$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ أثبت أنَّ المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

④ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

⑤ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

⑥ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$. ثمّ ارسم في معلم متجانس d و d' و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

11 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^x - x - 2$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ استنتج من ② أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.

④ نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة $f(x) = 0$ بالرمز α. أثبت أنَّ $-2 < \alpha < -1$.

⑤ ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x.

لنتعلّم البحث معاً

12 مماسات مشتركة

ليكن $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ الخطان البيانيان للتابعين الأسي exp واللوغاريتمي ln بالترتيب. أيقبل هذان الخطان مماسات مشتركة ؟

نحو الحلّ

- لنرسم الخطين $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ ثم لنتأملهما. كم مماساً مشتركاً لهذين الخطين برأيك؟ حاول أن ترسم مماسين مشتركين أترى غيرهما ؟
- لنتأمّل مماساً T_E يمس $\mathcal{C}_E$ في النقطة $A(a,e^a)$، ومماساً T_L يمس $\mathcal{C}_L$ في النقطة $B(b,\ln b)$، $b>0$. ثم لنبحث عن الشروط على a و b التي يجب أن يحققاها كي ينطبق المستقيمان T_E و T_L.

1. اكتب بالصيغة $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ معادلةً للمستقيم T_E وأخرى للمستقيم T_L.
2. أثبت إذن أنَّ العبارتين الآتيتين متكافئتان:

❶ المستقيمان T_E و T_L منطبقان ❷ $b=e^{-a}$ و $e^{-a}=\dfrac{a-1}{a+1}$

- يبقى علينا معرفة إن كان ثمة عدد حقيقي a يحقّق $\dfrac{a-1}{a+1}=e^{-a}$. لا تُحل هذه المعادلة جبرياً.

هذا يدفعنا للتفكير بدراسة التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=e^{-x}-\dfrac{x-1}{x+1}$.

1. ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.
2. استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّين فقط a_1 و a_2.
3. أثبت أنّ

$$f(-x)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x f(x)=0 \quad \text{في حالة} \quad x\notin\{1,-1\}$$

ثُمّ بين أنّ $a_1=-a_2$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 تابع القوّة

ليكن α عدداً حقيقياً غير معدوم. نهدف إلى دراسة التابع P_α المعرّف على $]0,+\infty[$ بالصيغة $P_\alpha(x)=x^\alpha$.

نحو الحلّ

تذكّر أنّ $P_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$ فالتابع P_α من النمط $x \mapsto e^{u(x)}$ حيث $u(x) = \alpha \ln x$.

1. عيّن، تبعاً لإشارة α، جهة اطراد التابع u، واستنتج جهة اطراد P_α .
2. ادرس تِبعاً لإشارة α نهاية P_α عند طرفي مجموعة تعريفه. وبيّن أنّه في حالة $\alpha > 0$ يمكننا أن نعرّف $P_\alpha(0) = 0$ فنحصل على تابع مستمرّ على $[0, +\infty[$ في هذه الحالة.

لندرس اشتقاقية التابع P_α .

1. أثبت أنّ P_α اشتقاقي على $]0, +\infty[$ وأنّ $P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}$ أو كما جرت العادة أن نكتب $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. نفترض أنّ $0 < \alpha < 1$. وأنّنا عرّفنا في هذه الحالة $P_\alpha(0) = 0$. احسب نهاية نسبة التغير $x \mapsto t(x) = \dfrac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x}$ عند الصفر. ماذا تستنتج ؟
3. أعد السؤال السابق في حالة نفترض أنّ $1 < \alpha$.

أثبت $P_\alpha \circ P_\beta = P_{\alpha\beta}$. وبوجه خاص $P_{1/\alpha}$ هو التقابل العكسي للتابع P_α . في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n نسمّي التابع $P_{1/n}$ تابع الجذر من المرتبة n، ونرمز عادة إلى $x^{1/n}$ بالرمز $\sqrt[n]{x}$، فيكون $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ التقابل العكسي للتابع $x \mapsto x^n$ المعرّفين على المجال $]0, +\infty[$.

مقارنة تابع القوّة بالتابعين الأسّي واللوغاريتمي.

1. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^\alpha \ln x \right) = 0$.
2. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^\alpha e^{-x} \right) = 0$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلاً من المعادلات أو المتراجحات الآتية:

① $\dfrac{e^{-x} - 1}{e^x - 1} = -2$

② $4e^{2x} + e^{-2x} \leq 5$

③ $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

④ $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$

⑤ $e^x + \dfrac{e}{e^x} = 1 + e$

⑥ $e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+2}$

⑦ $\dfrac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} < \dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} e^x - \dfrac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$ ② $\begin{cases} e^{4x}e^y = \dfrac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \end{cases}$

16 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

① a. بيّن أنّ التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

b. اكتب معادلة المماس d للخط $\mathcal{C}$ في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمستقيم d.

② a. ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

b. أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2m\,e^x - 1 = 0$، ثم استنتج أنَّ $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$.

17 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x) = e^x + \ln|x|$. وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = x\,e^x + 1$.

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

② ادرس تغيرات f وارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلّين مختلفين أياً يكن m من $\mathbb{R}$.

18 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

① تحقّق من كلٍ من المقولات الآتية:

a. f معرّف على $\mathbb{R}$.

b. يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.

c. المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$.

d. الخط $\mathcal{C}$ يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

④ ارسم كلاً من d و Δ و $\mathcal{T}$، ثم ارسم $\mathcal{C}$ في المعلم ذاته.

19 ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

① ادرس تغيرات $g : x \mapsto e^x f'(x)$.

② استنتج دراسة تغيرات f.

20 ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بالصيغة $f(x) = \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

21 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$.

① a. جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل الخط $\mathcal{C}$ مقاربات غير مائلة؟

b. أثبت أنَّ $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$.

c. استنتج أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً، وليكن d، في جوار $-\infty$.

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. ثُمّ ارسم في معلمٍ واحد d ثم $\mathcal{C}$.

③ نرمز إلى نقاط $\mathcal{C}$ التي فواصلها 0 و 1 و -1 على التوالي بالرموز A و B و D. أثبت أنَّ مماس $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم (BD).

22 محل هندسي

نتأمّل التابعين $f_1 : x \mapsto e^x$ و $f_2 : x \mapsto e^{-x}$، وخطاهما البيانيان $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. يقطع المستقيم المرسوم من $A(m,0)$ موازياً محور التراتيب الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N. بالترتيب.

① ارسم $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

② نرمز بالرمزين T_1 و T_2 إلى مماسي $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N بالترتيب. اكتب معادلةً لكل من T_1 و T_2. واستنتج أنَّ T_1 و T_2 متعامدان.

③ أثبت أنَّ إحداثيتي P، نقطة تقاطع T_1 و T_2، هما $\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$.

④ لتكن النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

a. احسب، بدلالة m، إحداثيي النقطة I.

b. جد المحل الهندسي Γ للنقطة I عندما تتحول m في $\mathbb{R}$.

c. ارسم مجموعة النقاط I في المعلم الذي رسمت فيه الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

⑤ a. احسب، بدلالة m، مركبات الشعاعين $\overrightarrow{IP}$ و $\overrightarrow{AP}$.

b. استنتج أنَّ المستقيم (IP) مماس للخط Γ في النقطة I، وأنَّ الطول AP ثابت.

23 ابحث عن نهاية كلٍ من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية:

❶ $u_n = \dfrac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$ ❷ $u_n = \dfrac{e^{2n}}{(1+n)^2}$ ❸ $u_n = \ln(2+e^{-n})$

❹ $u_n = e^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$ ❺ $u_n = n(e^{1/n}-1)$ ❻ $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

24 المشتق من المرتبة n

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = (x^2+x-1)e^x$. ولتكن $f^{(1)} = f'$ و $f^{(2)} = f''$ و $f^{(3)}$ و … و $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n \geq 1)$.

① احسب $f^{(1)}(x)$ و $f^{(2)}(x)$.

② .a أثبت أنَّ $f^{(n)}(x) = (x^2+a_n x+b_n)e^x$ مع $a_{n+1} = a_n + 2$ و $b_{n+1} = b_n + a_n$.

.b استنتج أنَّ a_n و b_n أعداد عادية.

③ في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n .

.a أثبت أنَّ المتتالية (a_n) حسابية. استنتج كتابة a_n بدلالة n .

.b تحقق من أنَّ $b_n = a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$ (أياً يكن $n \geq 1$) ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n .

25 معادلة تفاضلية

① لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2y'+3y=0$. عيّن جميع حلول (E) .

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $2y'+3y = x^2+1$.

.a عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يُحقّق المعادلة (E') .

.b بيّن أنّه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E)، وبرهن بالعكس، أنّه إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة (E') .

.c استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية (E') .

26 نتأمّل المعادلة التفاضلية (E) : $y'+3y = 2e^{-x}$.

① عيّن العدد a ليكون التابع $x \mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E) .

② ليكن a العدد الذي وجدناه في ①، وليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$. نعرّف التابع $h : x \mapsto g(x) - ae^{-x}$ أثبت أنّ التابع g حلٌ للمعادلة التفاضلية (E)، إذا وفقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية (F) : $y' + 3y = 0$.

③ حلّ المعادلة التفاضلية (F)، واستنتج مجموعة حلول (E).

27 ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

① a. حلّ المعادلة التفاضلية (1) الآتية: $y' - \frac{1}{n}y = 0$.

b. نتأمّل المعادلة التفاضلية (2) الآتية: $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$. عيّن عددين a و b ليكون التابع $x \mapsto g(x) = ax + b$ المعرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2).

c. ❶ أثبت أنّه ليكون تابع h معرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2) يلزم ويكفي أن يكون $h - g$ حلاً للمعادلة (1).

❷ استنتج من ذلك حلول المعادلة (2).

❸ ومن بينها عيّن تلك الحلول f التي تحقق $f(0) = 0$.

② نتأمّل التابع f_n المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{x/n}$.

a. ادرس إشارة f_n' ، واستنتج جدول تغيرات التابع f_n. أثبت على الخصوص أنّ التابع f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة تماماً يطلب تعيينها.

b. أثبت أنّ الخط البياني $\mathcal{C}_n$ للتابع f_n يقبل مُقارباً مائلاً d_n. أعطِ معادلةً للمستقيم d_n. وارسم كلاً من d_2 و $\mathcal{C}_2$.