5

التابع اللوغاريتمي النيبري

1. التابع اللوغاريتمي النيبري
2. لوغاريتم جداء ضرب
3. دراسة التابع اللوغاريتمي $\ln$
4. اشتقاق تابع مركب من النمط $\ln \circ u$
5. نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي


جون نابيير 1550-1617

مع نهاية القرن السادس عشر وبداية القرن اللاحق، كان علم الفلك يتطور بسرعة، وكانت متطلباته الحسابية تتنامى مع دراسة حركة الكواكب التي أدت إلى حسابات صعبة طويلة ومُرهقة.

وفي الوقت ذاته كانت حسابات أصحاب البنوك تزداد صعوبة وتعقيداً وخصوصاً عند حساب الفوائد في إطار اقتصاد يتوسع ويزدهر مع الاكتشافات الجديدة. وعليه، لم يكن مُفاجئاً أن يبحث الرياضياتيون عن طرائق لتبسيط الحسابات.

الفكرة كانت بسيطة: استبدال عمليات جمع بعمليات ضرب، ولكنّ تحقيق ذلك لم يكن بالأمر السهل. إنّه الاسكتلندي جون نابيير **John Napier** الذي صمّم، لأوّل مرة عام **1614**، خوارزمية تفيد في استبدال عملية جمع الأعداد بعملية ضرب الأعداد، وذلك عن طريق تقديم جدول عددي يُفيد في إجراء هذا التحويل، استفاد نابيير من فكرة كانت سائدة في عصره تفيد بوجود تقابل بين المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية.

في عصر نابيير لم تكن مفاهيم التوابع والنهايات والاشتقاق معروفة، فهو إذن لم يعرّف التابع اللوغاريتمي الذي أصبح فيما بعد ذا أهمية علمية وعملية كبيرتين. ولكن من هنا انطلقت الفكرة.

5

التابع اللوغاريتمي

انطلاقة نشطة

نشاط 1 تحويل جداء إلى مجموع

❶ مقدمة تاريخية

في أواخر القرن السادس عشر، طرح التطور الملفت للتجارة، والملاحة، وعلم الفلك، مسائل في الحساب العددي شغلت جانباً مهماً من اهتمام الرياضياتيين، فبحثوا عن طرائق لتسهيل حساب جداء ضرب أعداد كبيرة. من المعلوم أنَّ عملية الجمع أسهل من عملية الضرب، فكيف لهم أن ينطلقوا من جمعٍ ليحصلوا على جداء ضربٍ؟

العدد	اللوغاريتم
a	a'
b	b'
ab	$a'+b'$

وهكذا نُظمت جداول لتحويل جداءات إلى مجاميع، فلو أردنا حساب $a\times b$ آلت العملية إلى حساب مجموع عددين a' و b'. هذه الأعداد تسمى **لوغاريتمات**.

n	n'
1	0.00000
2	0.30103
3	0.47712
4	0.60206
5	0.69897
6	0.77815

في الشكل المجاور نجد جزءاً مُستخلصاً من تلك الجداول، اخترنا للتبسيط $a=2$ و $b=3$. لحساب جداء الضرب نبحث في الجدول عن العدد الذي لوغاريتمه $a'+b'$.

ولكن كيف نصنع هذه الجداول، أي كيف نحسب a' انطلاقاً من العدد a؟

❷ التعبير عما سبق بلغة التوابع

المسألة المطروحة تُناقَش كما يأتي: أيوجد تابع f معرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ يحقّق $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ أياً يكن x و y من $]0,+\infty[$؟

① نفترض وجود تابع يحقق تلك الصفات.

a. ما المساواة التي نحصل عليها في حالة $x=y=1$؟ استنتج أنَّ $f(1)=0$.

b. نفترض أنَّ $y=a$ مقدار ثابتٌ، ونعرف التابع g على $]0,+\infty[$ وفق $g(x)=f(ax)$. لمّا كان $g(x)=f(ax)=f(a)+f(x)$، أمكننا حساب $g'(x)$ بطريقتين. استنتج أنّ $af'(ax)=f'(x)$. وذلك أياً يكن $x>0$.

c. باختيار مناسب للعدد x، استنتج أنَّ $f'(a)=\dfrac{f'(1)}{a}=\dfrac{k}{a}$ حيث عرّفنا $k=f'(1)$.

الخلاصة : إذا وُجد تابع معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ يحقّق $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ أياً يكن x و y من $]0,+\infty[$ ، عندئذ يكون $f(1)=0$ ويكون تابعه المشتق $x\mapsto \frac{k}{x}$.

② وبالعكس، إذا كان f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على $]0,+\infty[$ ، وكان $f'(x)=\frac{k}{x}$ و $f(1)=0$. فهل يحقّق هذا التابع الخاصّة $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ أياً يكن $x>0$ و $y>0$ ؟

.a ليكن b عدداً موجباً كيفياً. أثبت أنَّ التابع $h: x\mapsto f(xb)-f(x)$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ وأنَّ $h'(x)=0$ أياً يكن x .

.b استنتج أنَّ التابع h ثابتٌ، وبيّن أنّ قيمته الثابتة تساوي $f(b)$ ، باختيار مناسب للعدد x . ماذا تستنتج؟

الخلاصة : إذا وُجد تابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ، ينعدم عند الواحد، ومشتقه $x\mapsto\frac{k}{x}$ حيث k ثابت، فإنّ هذا التابع يحول جداء ضرب أعداد إلى مجموع أعداد.

وهكذا نكون قد أثبتنا النتيجة الآتية :

نتيجة

ليكن f تابعاً معرّفاً واشتقاقياً على المجال $]0,+\infty[\,=\mathbb{R}_+^*$. إنّ الشرط اللازم والكافي لكي يحقق f الخاصة:

$$f(xy)=f(x)+f(y) \quad \text{أياً يكن } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R}_+^* ،$$

هو أن يكون $f(1)=0$ وأن يوجد عدد حقيقيٌّ k يحقّق

$$f'(x)=\frac{k}{x} \quad \text{أياً يكن } x \text{ من } \mathbb{R}_+^* .$$

نتيجة

يوجد **على الأكثر** تابعٌ واحدٌ g معرّف واشتقاقي على المجال $\mathbb{R}_+^*$. ويحقّق الشرطين:

$\mathcal{L}_1$ $g'(1)=1$.

$\mathcal{L}_2$ وأياً يكن x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ، فلدينا $g(xy)=g(x)+g(y)$.

وعندئذ يعطى مشتق g على $\mathbb{R}_+^*$ بالصيغة $g'(x)=\frac{1}{x}$.

في الحقيقة، إذا حقّق g_1 و g_2 كلا الشرطين $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ استنتجنا أنّ لهما المشتق $x\mapsto\frac{1}{x}$ نفسه على $\mathbb{R}_+^*$ ، ومن ثَمّ كان مشتق g_1-g_2 معدوماً على المجال $\mathbb{R}_+^*$ ، فالفرق ثابتٌ على هذا المجال ويساوي الصفر عند الواحد. هو إذن، أي الفرق g_1-g_2 ، معدوم على $\mathbb{R}_+^*$ ، أي $g_1=g_2$.

1 التابع اللوغاريتمي النيبري

1.1. التعريف

مبرهنة وتعريف 1

يوجد تابعٌ واحدٌ معرّف واشتقاقي على المجال $\mathbb{R}_+^*$، ينعدم عند $x = 1$ ومشتقه على $\mathbb{R}_+^*$، هو التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$. يسمّى هذا التابع **تابع اللوغاريتم النيبري أو الطبيعي** ونرمز إليه بالرمز **ln**.
وبوجه عام يكتفى بتسميته **التابع اللوغاريتمي** إذا لم يكن هناك أي التباس.

ملاحظة: قديماً كانت قيم هذا التابع مُجَدْوَلَة في جداول تسمى الجداول اللوغاريتمية، أمّا في يومنا هذا فنجده مُبرمجاً في آلاتنا الحاسبة وحواسيبنا، ونحصل على قيمه بلمسة زر $\boxed{\ln}$ ، مثلاً

$$\ln 2 \approx 0.693, \quad \ln 3 \approx 1.098$$

2.1. نتائج مباشرة

① مجموعة تعريف التابع ln هي المجال $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ و $\ln(1) = 0$.

- التابع ln اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ و $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- التابع ln مستمر على $\mathbb{R}_+^*$ لأنّه اشتقاقي على هذا المجال.

② التابع ln متزايد تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. في الحقيقة، $\frac{1}{x} > 0$ لأنَّ $x > 0$، ومن ثَمّ $\ln'(x) > 0$.

ينتج من ذلك الجدول الآتي الذي يعبر عن النتائج السابقة:

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$	‖	$+$	1	$+$	
$\ln x$	‖	$\nearrow - \nearrow$	0	$\nearrow + \nearrow$	

③ من التزايد التام للتابع ln ومن $\ln(1) = 0$، نستنتج الخلاصة الآتية:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$\ln x < 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[$$
$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$$

هذا أوّل لقاء لنا مع الرمز $\Leftrightarrow$ وهو رمز التكافؤ بين خاصتين : أي إنّ صحة أيٍّ منهما تقتضي صحة الأخرى. فمثلاً ينعدم $\ln(x)$ إذا كان $x = 1$ وفقط إذا كان $x = 1$.

مثال

في حالة $x > 2$ ، المتراجحة $\ln(x-2) > 0$ تكافئ $x-2 > 1$ ، أي $x > 3$ ، أو $x \in]3,+\infty[$.

أما المتراجحة $\ln(x-2) < 0$ تكافئ $0 < x-2 < 1$ ، أي $2 < x < 3$ ، أو $x \in]2,3[$.

④ وعموماً، أياً يكن العددان الموجبان تماماً a و b يكن :

$$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$$
$$a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$$
$$a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$$

نتيجة

لمقارنة عددين موجبين تماماً، يمكننا المقارنة بين لوغاريتميهما. فاللوغاريتم يحافظ على المساواة ويحافظ على الترتيب.

تكريساً للفهم

لماذا علينا الحذر عند التعامل مع لوغاريتم عبارة متحولة ؟

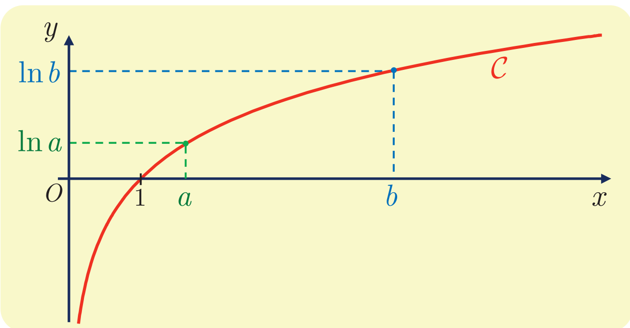
لأنَّ الأعداد الموجبة تماماً فقط لوغاريتماتها معرّفة.

مثال

- الكتابة $\ln(x^2-1)$ ليس لها معنىً إلا في حالة $x^2-1 > 0$ ، أي $x < -1$ أو $x > 1$.
- والكتابة $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ليس لها معنىً إلّا في حالة $\frac{x}{1-x} > 0$ ، أي $x \in]0,1[$.
- والكتابة $\ln\left|x^2+2x\right|$ ليس لها معنى إلّا في حالة $x^2+2x \neq 0$ ، أي $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$.

كيف نتخيّل النتائج المباشرة، ونتذكّرها ؟

يبيّن الشكل أدناه الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع اللوغاريتمي، ويوضّح مجمل هذه الخواص:



مثلاً $\ln x < 0$ عندما $x \in]0,1[$ ، و $\ln x > 0$ عندما $x \in]1,+\infty[$.

كيف نحل معادلةً $\ln g(x) = \ln h(x)$ أو متراجحة $\ln g(x) \leq \ln h(x)$ ؟

هنا g و h تابعان للمتحوّل x. استناداً إلى خواص التابع اللوغاريتمي

- المعادلة $\ln g(x) = \ln h(x)$ تُكافئُ الشروط

$$g(x) = h(x) \quad \text{و} \quad g(x) > 0 \quad \text{و} \quad h(x) > 0$$

- والمتراجحة $\ln g(x) \leq \ln h(x)$ تُكافئُ الشروط

$$g(x) \leq h(x) \quad \text{و} \quad g(x) > 0 \quad \text{و} \quad h(x) > 0$$

الطريقة : لحل المعادلة $\ln g(x) = \ln h(x)$ أو المتراجحة $\ln g(x) \leq \ln h(x)$.

1. نبدأ بتعيين E_g مجموعة قيم x التي تحقق $g(x) > 0$.
2. ثُمّ نعيّن بالمثل E_h مجموعة قيم x التي تحقق $h(x) > 0$.
3. فتكون مجموعة تعريف المعادلة أو المتراجحة هي $E = E_g \cap E_h$. أي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقّق في آن معاً $h(x) > 0$ و $g(x) > 0$.
4. نحلّ في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلة $g(x) = h(x)$ أو المتراجحة $g(x) \leq h(x)$، ولا نحتفظ من هذه الحلول إلا بتلك التي تنتمي إلى المجموعة E.

فكِّرْ

علّل لماذا تعطي الطريقة الآتية النتائج نفسها، وهي، من ثَمّ، أبسط عند التطبيق:

1. نبدأ بتعيين E_g مجموعة قيم x التي تحقق $g(x) > 0$. (التابع الصغير في المتراجحة.)
2. نحلّ في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلة $g(x) = h(x)$ أو المتراجحة $g(x) \leq h(x)$، ولا نحتفظ من هذه الحلول إلا بتلك التي تنتمي إلى المجموعة E_g. فنحصل على مجموعة الحلول المطلوبة.

مثال حلُّ معادلات ومتراجحات لوغاريتمية

① حل المعادلة $\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$.

② حل المتراجحة $\ln(x^2 - 4) \leq \ln(-3x)$.

الحل

① هنا لدينا حالة مساواة، نختار إذن $g(x) = 3x - 4$ وهو موجب على المجموعة $E_g =]\frac{4}{3}, +\infty[$.
المعادلة $3x - 4 = x^2 - 4$ تُكافئُ $x(x - 3) = 0$ ولها حلان $x_1 = 0 \notin E_g$ و $x_2 = 3 \in E_g$، إذن لهذه المساواة حلٌّ وحيد هو $x_2 = 3$.

② هذه متراجحة، لذلك نأخذ $g(x) = x^2 - 4$ وهو موجب على المجموعة $E_g =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

أمّا المتراجحة $x^2 - 4 \leq -3x$ فتكافئ $(x+4)(x-1) \leq 0$ أي $x \in [-4,1]$ ، فمجموعة الحلول المطلوبة هي نقاط المجال $[-4,1]$ التي تنتمي إلى E_g أي $[-4,-2[$ ، وهذه هي مجموعة حلول المتراجحة المعطاة.

تَدرَّبْ

① في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

❶ $\ln(x^2)$ ❷ $\ln(1-x)$ ❸ $\ln(x-3)$

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ ❺ $\frac{1}{\ln x}$ ❻ $\ln(x^2+4x)$

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ ❽ $\ln|x+1| - \ln|x-1|$ ❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

② f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = 2 + \ln x$. بيّن أنّ f اشتقاقي على I ، واحسب $f'(x)$ ، واكتب معادلة للمماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1.

③ f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

❶ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

❷ نظِّم جدولاً يبيّن جهة اطراد f .

❸ استنتج من الجدول السابق أنَّ $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

④ حلّ المعادلات الآتية:

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$ ❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

❸ $\ln(x-2) = \ln 2$ ❹ $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

⑤ حلّ المتراجحات الآتية:

❶ $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$ ❷ $\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

❸ $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geq \ln x$ ❹ $\ln x \leq \ln(x^2-2x)$

2 لوغاريتم جداء ضرب

1.2. خاصة أساسية

مبرهنة 2

أياً يكن $a>0$ و $b>0$ يكن

$$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$$

الإثبات

نثبّت a ونعرف التابع f على $\mathbb{R}_+^*$ وفق

$$f(x)=\ln(ax)-\ln a-\ln x \qquad (*)$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$، و

$$f'(x)=a\times\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=0$$

f' تابع معدوم على $\mathbb{R}_+^*$، إذن f ثابت عليها. ولأن $f(1)=\ln a-\ln a-\ln 1=0$ استنتجنا أنّ $f(x)=0$ على $\mathbb{R}_+^*$. وبناءً على $(*)$ هذا يكافئ $\ln(ax)-\ln a-\ln x=0$، وتنتج الخاصة المطلوبة باختيار $x=b$.

2.2. نتائج الخاصة الأساسية

① **لوغاريتم كسر ولوغاريتم مقلوب**

أياً يكن $a>0$ و $b>0$ يكن

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$$

الإثبات: لما كان $a=\frac{a}{b}\cdot b$ كان $\ln a=\ln\frac{a}{b}+\ln b$، ومنه $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$. وفي الحالة الخاصة $a=1$ يكون $\ln\frac{1}{b}=\ln 1-\ln b=-\ln b$.

② **لوغاريتم جداء ضرب عدة أعداد**

أياً يكن $a_1>0$ و $a_2>0$ و $\cdots$ و $a_n>0$ يكن

$$\ln(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n$$

الإثبات: هذه تبرهن بالتدريج على العدد n.

③ لوغاريتم قوة بأس طبيعي

أياً يكن $a > 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$، يكن

$$\ln a^n = n \ln a$$

الإثبات: يكفي أن نضع $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ في الخاصة السابقة.

④ لوغاريتم الجذر التربيعي لعدد

أياً يكن $a > 0$ يكن

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

الإثبات: في الحقيقة لدينا $\ln b^2 = 2\ln b$ في حالة $b > 0$ يكفي أن نضع $b = \sqrt{a}$.

تكريساً للفهم

لماذا لا تصح المساواة $\ln(x^2) = 2\ln x$ على $\mathbb{R}$؟

لأنَّ الخاصة الأساسية صحيحة فقط على مجموعة الأعداد الموجبة تماماً. فلحساب $\ln(x^2)$: نضع $x^2 = x \times x = |x| \times |x|$، فيكون:

$$\ln(x^2) = \ln\big(|x| \cdot |x|\big) = \ln|x| + \ln|x| = 2\ln|x|$$

- في حالة $x > 0$، يكون $|x| = x$، فيكون $\ln(x^2) = 2\ln x$.
- في حالة $x < 0$، يكون $|x| = -x$، فيكون $\ln(x^2) = 2\ln(-x)$.

مثال

لنتأمل التابعين $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ و $g : x \mapsto \ln(x+1) + \ln(x-1)$ ولنلاحظ ما يأتي. إنّ مجموعة تعريف f هي $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. ومجموعة تعريف كل من $x \mapsto \ln(x+1)$ و $x \mapsto \ln(x-1)$ هي $D_1 =]-1,+\infty[$ و $D_2 =]1,+\infty[$، إذن مجموعة تعريف g هي تقاطع هاتين المجموعتين أي $D_g = D_1 \cap D_2 =]1,+\infty[$. نستنتج أنّ التابعين f و g غير متساويين لاختلاف مجموعتي تعريفهما. ولكن مهما كانت x من $D_f \cap D_g =]1,+\infty[$ كان $f(x) = g(x)$.

مثال حلّ معادلات ومتراجحات

① جد S_E مجموعة حلول المعادلة (E) الآتية $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$.

② جد S_I مجموعة حلول المتراجحة (I) الآتية $\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6-x)$.

الحل

① مجموعة تعريف المعادلة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحات $2x-3>0$ و $6-x>0$ و $x>0$ فهي إذن $D=]\frac{3}{2},6[$. وعلى المجموعة D ، تُكتب المعادلة (E) بالشكل

$$\frac{1}{2}\ln(2x-3)=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$

أو
$$\ln\left(2x-3\right)=2\ln\left(6-x\right)-\ln x$$

وهذا يُكافئ
$$\ln(2x-3)+\ln x=\ln(6-x)^2$$

وأخيراً
$$\ln(2x^2-3x)=\ln(6-x)^2$$

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2x^2-3x=(6-x)^2$ التي تعطي بعد الإصلاح $x^2+9x-36=0$ أو $(x+12)(x-3)=0$. ولهذه المعادلة حلاّن $x_1=-12\notin D$ و $x_2=3\in D$. فمجموعة حلول المعادلة (E) هي $\mathcal{S}_E=\{3\}$.

② مجموعة تعريف المتراجحة (I) هي مجموعة قيم x التي تحقق في آنٍ معاً المتراجحات $6-x>0$ و $x^2-3x>0$ فهي إذن $D'=]-\infty,0[\cup]3,6[$. وعلى المجموعة D' ، تُكتب المتراجحة (I) بالشكل

$$\ln(x^2-3x)\geq\ln(6-x)^2$$

نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(x^2-3x)\geq(6-x)^2$ فنجدها بعد الإصلاح تُكافئ $x\geq 4$. فمجموعة حلول المتراجحة (I) هي ما ينتمي من حلول المتراجحة $x\geq 4$ إلى المجموعة D' . أي إنَّ $\mathcal{S}_I=[4,6[$.

لاحظ أنّ المتراجحة $\ln(x^2-3x)\geq 2\ln(6-x)$ تكون محققة إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان

$$x<6 \text{ و } x^2-3x\geq(6-x)^2 \qquad (*)$$

لأنّه في هذه الحالة يكون الشرط $x^2-3x>0$ محققاً بطبيعة الحال ولا داعي للتوثق منه. والشرطان في $(*)$ يُكافئان $x<6$ و $x\geq 4$ أي $\mathcal{S}_I=[4,6[$.

تَدرَّبْ

① بسِّط كتابة الأعداد الآتية:

❶ $a=\ln 3+\ln\frac{1}{3}$ ❷ $b=\ln\frac{1}{16}$ ❸ $c=\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

② اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$:

❶ $a=\ln 50$ ❷ $b=\ln\frac{16}{25}$ ❸ $c=\ln 250$

③ أثبت أنَّ $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})=0$.

④ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x=\ln 5,\qquad y=\ln 2+\ln 3$

❷ $x=2\ln 3,\qquad y=3\ln 2$

⑤ فيما يأتي بسّط كتابة كلٍ من a و b .

❶ $a=\ln 567-\ln 72-\ln\frac{7}{8}+\ln\frac{1}{27}$

❷ $b=\ln\sqrt{216}+\ln\sqrt{75}-\ln 15-\ln\sqrt{27}$

⑥ أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x>0$.

❶ $\ln(1+x)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

❷ $\ln(1+x^2)=2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

⑦ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، جد مجموعة قيم x التي تُحقّق المساواة.

❶ $\ln(x^2-x)=\ln x+\ln(x-1)$

❷ $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+2)$

⑧ في كل حالة مما يأتي، جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة المعطاة:

❶ $2^n\leq 100$ ❷ $\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq 10^{-2}$ ❸ $0.2\geq\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ❹ $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n\geq 2$

مساعدة : يمكن استعمال الآلة الحاسبة عند الضرورة.

⑨ حل كلّ متراجحة أو معادلة فيما يأتي:

❶ $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$ ❷ $2\ln x=\ln(2x^2+8x)$

❸ $\ln(x+11)=\ln(x+3)+\ln(x+2)$ ❹ $\ln(x+11)=\ln(x+3)(x+2)$

❺ $\ln 4+\ln 2=\ln(x-6)+\ln(x+1)$ ❻ $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

❼ $\ln 3\leq\ln(5-x)+\ln(x-1)$ ❽ $\ln(3x^2-x)\leq\ln x+\ln 2$

❾ $\ln(6x+4)\leq\ln(3x^2-x-2)$ ❿ $3\ln x>\ln(3x-2)$

⑩ في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط المشار إليه.

❶ $\ln x=\ln(y+1)$ ❷ $\ln y=2\ln x$ ❸ $\ln x+\ln y=0$

3 دراسة التابع اللوغاريتمي ln

1.3. نهاية التابع اللوغاريتمي عند اللانهاية وعند الصفر

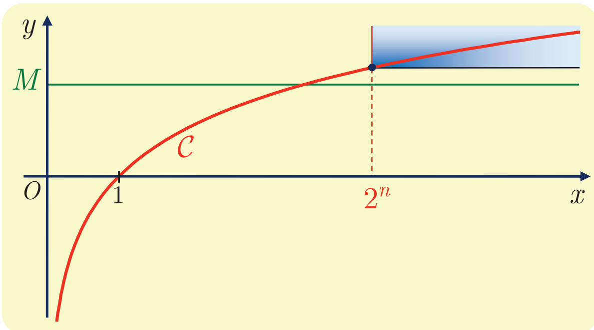
مبرهنة 2

❶ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

❷ $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$

الإثبات

❶ هدفنا هو إثبات أنّه مهما كَبُر العدد الموجب M، فيوجد عدد A يجعل $\ln x \geq M$ بمجرد انتماء x إلى المجال $[A,+\infty[$.



وسعياً لتحقيق هذا الهدف، نختار عدداً طبيعياً موجباً تماماً n يحقق $n > \dfrac{M}{\ln 2}$، ولمّا كان $\ln 2 > 0$، استنتجنا أنّ $n\ln 2 = \ln 2^n > M$. فإذا عرّفنا $A = 2^n$ استنتجنا من تزايد التابع اللوغاريتمي أنّ

$$x > A \text{ يقتضي } \ln x > \ln 2^n > M$$

وهذا يبرهن ❶ استناداً إلى التعريف.

❷ نعتمد فكرة ذكية تنص على نقل النهاية عند الصفر إلى نهاية عند $+\infty$ وذلك بإجراء تغيير للمتحوّل فنضع $u = u(x) = \dfrac{1}{x}$، إذن $x = \dfrac{1}{u}$، فيكون $\lim_{x\to 0, x>0} u(x) = +\infty$ و $\ln x = -\ln u(x)$.

ولكن استناداً إلى ❶ لدينا $\lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$ ، إذن

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\lim_{u\to+\infty} \ln u = -(+\infty) = -\infty$$

وهذا يبرهن ❷.

2.3. المعادلة $\ln x = m$ (m حقيقي) ، العدد النيبري e

رأينا أنَّ التابع $\ln$ متزايد تماماً واشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$، وأثبتنا إضافة إلى ذلك أنَّ

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

تتيح هذه المعلومات تطوير جدول تغيرات $\ln$ الذي رأيناه سابقاً ليصبح كما يأتي:

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$	||	$+$	1	$+$	
$\ln x$	|| $-\infty$	$\nearrow - \nearrow$	0	$\nearrow + \nearrow$	$+\infty$

واستناداً إلى المبرهنتين 7 و 8 من الوحدة الثانية، نستنتج أنّ صورة $\mathbb{R}_+^*$ وفق التابع $x \mapsto \ln x$ هي $\mathbb{R}$ كاملة. وأنّه أياً كان العدد m من $]-\infty,+\infty[$، كان للمعادلة $\ln x = m$ حل، وحل وحيد، في $]0,+\infty[$.

إذن يُعرّف التابع اللوغاريتمي **تقابلاً** من $]0,+\infty[$ إلى $]-\infty,+\infty[$.

اصطلاح وترميز

في حالة عدد حقيقي m نرمز إلى الحلّ الحقيقي الوحيد للمعادلة $\ln x = m$ بالرمز e^m. هذا يعني أنّ $\ln(e^m) = m$ أياً يكن العدد الحقيقي m. تُعرّف الحالة الخاصة الموافقة للعدد $m = 1$ **العدد النيبري** e^1 الذي نرمز إليه تبسيطاً e. وهو إذن الحل الحقيقي الوحيد للمعادلة $\ln x = 1$.

يمكن حساب العدد e إلى أية دقة نريد وهو يساوي تقريباً 2.7182818284590.

ونظراً إلى أنّ 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln x = 0$ استنتجنا أيضاً أنّ $e^0 = 1$.

فكِّر

هل يؤدي الترميز السابق إلى التباس؟ في الحقيقة، عندما يكون m عدداً طبيعياً موجباً تماماً، فإنّ الرمز e^m يشير من جهة أولى إلى الحل الوحيد x^* للمعادلة $\ln x = m$، ويمكن، من جهة ثانية، أن يشير إلى العدد $x^{**} = \underbrace{e \times e \times \cdots \times e}_{m}$.

ولكن لا ضير في ذلك لأنّ $x^* = x^{**}$ (لماذا؟)

تكريساً للفهم

كيف نستعمل المساواة $\ln(e^m) = m$ في حل المعادلات والمتراجحات؟

مثال

لنبحث عن الأعداد الحقيقية x من المجال $]-\infty, \frac{1}{2}[$ التي تحقق المعادلة $\ln(1-2x) = -2$.

في الحقيقة، أن يكون x حلاً للمعادلة المعطاة يُكافئ أن يكون $u = 1-2x$ حلاً للمعادلة $\ln u = -2$. ولهذه المعادلة الأخيرة حلٌ وحيدٌ هو $u = e^{-2}$ إذن $1-2x = e^{-2}$ ومنه $x = \dfrac{1-e^{-2}}{2}$.

مثال

لنبحث عن الأعداد الحقيقية x من المجال $]0, +\infty[$ التي تحقق المتراجحة

$$(\ln x + 2)(\ln x - 3) \leq 0$$

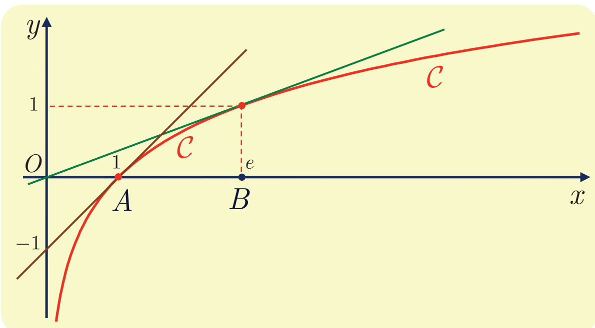
بإجراء تغيير للمتحوّل $z = \ln x$ تصبح المتراجحة $(z+2)(z-3) \leq 0$ وحلولها كما نعلم هي قيم z التي تحقّق $-2 \leq z \leq 3$. وبالعودة إلى x تُكافئ هذه المتراجحة ما يأتي

$$\ln(e^{-2}) = -2 \leq \ln x \leq 3 = \ln(e^3)$$

ولأنَّ التابع $\ln$ متزايد تماماً، نستنتج أنَّ $e^{-2} \leq x \leq e^3$. فمجموعة حلول المتراجحة هي $[e^{-2}, e^3]$.

ما هي النقاط والمماسات الملفتة من الخط البياني للتابع $\ln$؟

- في الشكل المرسوم أعلاه، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع $\ln$، A و B النقطتان من هذا الخط اللتان فاصلتاهما بالترتيب 1 و e. ولأنّ $\ln(1) = 0$ و $\ln(e) = 1$، فإنَّ $A(1,0)$ و $B(e,1)$.
- محور التراتيب مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- ميل المماس للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة منه فاصلتها x_0 يساوي $\ln'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$. وهو يقبل $y = \ln(x_0) + \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$ أو $y = \dfrac{x}{x_0} + \ln(x_0) - 1$ معادلة لهذا المماس. فمثلاً



- $y = x - 1$ هي معادلة للمماس في النقطة $A(1,0)$ للخط البياني $\mathcal{C}$.
- و $y = \dfrac{x}{e}$ هي معادلة للمماس في النقطة $B(e,1)$ للخط البياني $\mathcal{C}$، وهذا المماس يمر بمبدأ الإحداثيات.

مثال دراسة تابع لحل متراجحة

أثبت أنَّ $\ln x < 2\sqrt{x}$ أياً يكن $x > 0$.

لعلَّ إحدى أهم الطرائق لإثبات أنَّ $\ln x < 2\sqrt{x}$ أياً يكن $x > 0$، هي دراسة اطراد التابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

الحل

التابع f اشتقاقي على I، ويعطى تابعه المشتق على I بالعلاقة

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$$

ينعدم هذا المشتق عند $x = 1$ وإشارته تماثل إشارة $x - 1$، وهذا ما يفيدنا في وضع جدول الاطراد الآتي للتابع f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

بالاستعانة بجدول الاطراد نستنتج أنَّ $f(x) \geq 2 > 0$ أياً يكن $x > 0$، أي إنّ $2\sqrt{x} - \ln x > 0$، أو $\ln x < 2\sqrt{x}$.

تَدرَّبْ

① انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \mapsto \ln x$، ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية : $x \mapsto \ln(-x)$، و $x \mapsto -\ln x$ و $x \mapsto -\ln(-x)$، و $x \mapsto 1 + \ln x$.

② أثبت أنَّ $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$، أياً يكن $x > 0$. واستنتج أنّ $2 < e < 4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x.

③ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x = \ln e^3 - 2, y = \ln\left(e\sqrt{e}\right)$ ❷ $x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, y = \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

④ حلّ كل متراجحة أو معادلة مما يأتي :

❶ $\ln(1-x) = -2$ ❷ $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$

❸ $(\ln x)^2 = 16$ ❹ $(\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0$

❺ $\ln(2-x) \geq 1$ ❻ $\ln\frac{1}{x} > 2$

4 مشتق التابع المركب $\ln \circ u$

مبرهنة 3

إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I و**موجباً تماماً** على I، كان التابع $x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ اشتقاقياً على I وكان $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ هو تابعه المشتق على I.

الإثبات

هذه نتيجة مباشرة من مبرهنة اشتقاق التابع المرّكب التي درسناها في الوحدة الثالثة، التابع $f = \ln \circ\, u$ اشتقاقي على I، وأياً يكن x من I يكن :

$$f'(x) = \ln'\big(u(x)\big) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

وإذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I وسالباً تماماً على I، كان $-u$ اشتقاقياً وموجباً تماماً على I، ومن ثَمّ كان التابع $f(x) = \ln\big(-u(x)\big)$ اشتقاقياً على I وكان:

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

5 نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي

مبرهنة 4

❶ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ❷ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ❸ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(x \ln x\big) = 0$

الإثبات

❶ في الحقيقة، التابع $\ln$ اشتقاقي عند 1، فإذا عرّفنا في حالة x من $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ نسبة التغير

$$t(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

فإننا نعرف نظراً إلى اشتقاقيّة التابع اللوغاريتمي $\ln$ عند 1 أنّ $\displaystyle\lim_{x\to 0} t(x) = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$. وهذه هي النتيجة المطلوبة في ❶.

❷ أثبتنا في مثال سابق أنّه في حالة $x > 0$ لدينا $\ln x < 2\sqrt{x}$. ولمّا كان $\ln x > 0$ في حالة $x > 1$ استنتجنا أنّه في حالة $x > 1$ لدينا

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x}$$

وبقسمة طرفي هذه المتراجحة على المقدار الموجب x نستنتج أنّ

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$ أياً يكن $x > 1$.

ولما كان $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$، استنتجنا استناداً إلى مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. وهي ❷.

❸ نجري تغيير المتحوّل $u = u(x) = \frac{1}{x}$ فنلاحظ أنّه في حالة $x > 0$ لدينا

$$x \ln x = -\frac{\ln u}{u}$$

ولكن $\lim_{x\to 0, x>0} u(x) = +\infty$ و $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ استناداً إلى مبرهنة نهاية تابع مركّب.

$$\lim_{x\to 0} \left(x \ln x\right) = \lim_{u\to+\infty} \left(-\frac{\ln u}{u}\right) = -\lim_{u\to+\infty} \left(\frac{\ln u}{u}\right) = 0$$.

نتائج

❶ $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$ ❷ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ❸ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$ ❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

مثال استعمال المبرهنة 3 في حساب النهايات

احسب كلاً من نهايات التوابع الآتية عند a :

① $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \ln x,\qquad a = 0$

② $g : x \mapsto x \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|,\qquad a = +\infty$

③ $h : x \mapsto \left(\ln(2x+1) - \ln(x+2)\right),\qquad a = +\infty$

الحل

① التابع f معرّفٌ على $D = \mathbb{R}_+^*$. ونعلم أنّ نعلم أنّ $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$، فنحن نواجه حالة عدم تعيين من النمط $+\infty - \infty$. لإزالة حالة عدم التعيين، نكتب $f(x)$ بالصيغة

$$f(x) = \frac{1 + x \ln x}{x}$$

وعندئذ نرى أنّ البسط يسعى إلى الواحد لأنّ $\lim_{x\to 0} \left(x \ln x\right) = 0$، والمقام يسعى إلى الصفر بقيم موجبة،

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

② نجري تغيير المتحوّل $u = u(x) = \dfrac{1}{x}$ فنلاحظ أنّه في حالة $x > 0$ لدينا

$$g(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+u)}{u}$$

ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ و $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{u\to0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

③ في حالة $x > 0$ كلٌّ من $x + 2$ و $2x + 1$ موجب تماماً، إذن $h(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$. ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+2} = 2$ والتابع اللوغاريتمي مستمرٌّ عند 2 استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ln 2$.

تَدرَّبْ

① جد كلاً من النهايات الآتية:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ ❷ $\lim\limits_{x\to0} \left((x^2 - x)\ln x\right)$ ❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

② فيما يأتي، جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه.

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$
3. $f(x) = x - \ln x$
4. $f(x) = x + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$
6. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
8. $f(x) = x(1 - \ln x)$
9. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x - 1)$
11. $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$
12. $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

③ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق $f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

❶ لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

❷ ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$.

④ في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f' .

❶ $I =]2, +\infty[, \quad f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

❷ $I =]1, +\infty[, \quad f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

❸ $I =]0, +\infty[, \quad f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

❹ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + x^2)$

أفكار يجب تمثُّلها

- أساسيات التابع اللوغاريتمي:
  - $x \mapsto \ln x$ غير معرّف إلاّ في حالة $x > 0$.
  - $\ln 1 = 0$.
  - $x > 1$ و $\ln x > 0$ متراجحتان متكافئتان، كذلك $x < 1$ و $\ln x < 0$.
  - $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
  - $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$.
- التابع $x \mapsto \ln x$ يحوّل الجداء إلى مجموع : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- التابع $x \mapsto \ln x$ يحقق الخاصة : $\ln(a^n) = n \ln a$.
- أياً يكن العدد الحقيقي m فللمعادلة $\ln x = m$ حلّ وحيد هو $x = e^m$.
- عند طرفي المجال $]0, +\infty[$ لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0$.

منعكسات يجب امتلاكُها.

- قبل البحث عن لوغاريتم عدد، عليك التأكد من أنَّ العدد موجب تماماً.

مثال المقدار $\ln\big((x-1)(2-x)\big)$ غير موجود إلاّ إذا كان $x \in]1,2[$.

- للمقارنة بين عددين موجبين تماماً، فكِّر في مقارنة لوغاريتميهما.
- لحل متراجحة مجهولها أس قوة، استعمل اللوغاريتم لإسقاط الأس.

مثال لتعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-3}$، نحلّ المتراجحة $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < \ln 10^{-3}$ أي

$$n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < -3 \ln 10$$

وهنا **نتنبّه** أنّ $0 < \dfrac{2}{3} < 1$، إذن $\ln \dfrac{2}{3} < 0$ فالمتراجحة السابقة تكافئ

$$n > \frac{-3 \ln 10}{\ln \frac{2}{3}} \approx 17.0366$$

فالأعداد الطبيعية n التي تحقق $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-3}$ هي التي تحقق $n \geq 18$.

- لحساب نهاية تابع من النمط $x \mapsto x^n - \lambda \ln x$ عند $+\infty$ ، نضع x^n خارج قوسين.

مثال لحساب نهاية التابع $f : x \mapsto x^2 - 3\ln x$ عند $+\infty$، نكتب

$f(x) = x^2\left(1 - 3 \times \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3\ln x}{x^2}\right) = 1$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

أخطاء يجب تجنّبها.

- لا تعتقد أنّ لطرفي المساواة $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ مجموعة التعريف ذاتها. لأنّ $\ln(ab)$ معرف لمجرد كون a و b من إشارة واحدة، بينما $\ln a + \ln b$ غير معرف إلاّ إذا كان $a > 0$ و $b > 0$.

مثال مجموعة تعريف $x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$ هي $]1,+\infty[$، أمّا مجموعة تعريف $x \mapsto \ln(x^2-1)$ فهي $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

- لا تباشر بأخذ لوغاريتم عدد قبل التيقن من كونه موجباً تماماً.

أنشطة

نشاط 1 تتمات عن التابع اللوغاريتمي ln

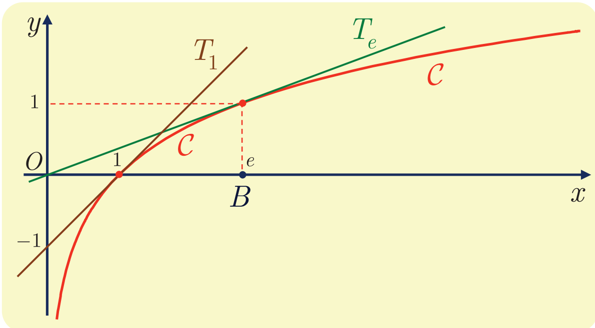
فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع ln في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

A نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها $a>0$، و T_a هو المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A.

① a. أثبت أنَّ $y=\frac{1}{a}x-1+\ln a$ معادلةٌ للمماس T_a.

b. تحقّق أنَّ المماس T_e للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $B(e,1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.



② ليكن g التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $g(x)=\frac{1}{a}x-1+\ln a-\ln x$.

a. أثبت أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ وادرس إشارة $g'(x)$.

b. استنتج جدولاً باطراد g ومن ثمَّ إشارة g.

③ استنتج مما سبق أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① استنتج من الفقرة السابقة أنَّه مهما كان $a>0$ و $x>0$ كان $\ln x \le \ln a + \frac{x-a}{a}$ (1)

② استنتج من (1) أنَّه مهما كان $a>0$ كان $\ln(a+1)-\ln a \le \frac{1}{a}$ (2)

③ a. يبدو الخط $\mathcal{C}$ على المجال $[10,11]$ وكأنه قطعة مستقيمة أفقية، لماذا؟

b. ما فاصلتا النقطتين I و J من الخط $\mathcal{C}$ اللتين ترتيباهما على التوالي 10 و 15؟ أمن الممكن وضع هاتين النقطتين على الخط $\mathcal{C}$؟ لماذا؟

تُفسّر المعلومات السابقة أنَّ التابع ln «يسعى ببطء إلى $+\infty$».

نشاط 2 تابع اللوغاريتم العشري log

❶ التابع اللوغاريتمي بالنسبة لأساس a

تعريف

في حالة عدد حقيقي a عدداً حقيقياً ينتمي إلى المجموعة $]0,+\infty[\setminus\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
نعرِّف على المجال $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ تابعاً وفق العلاقة $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ نرمز إلى هذا التابع بالرمز $\log_a$ ونسميه التابع اللوغاريتمي بالأساس a. فيكون $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

لاحظ أنّه في حالة $a = e$ يكون $\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$. إذن تابع اللوغاريتم النيبري $\ln$ هو التابع اللوغاريتمي الذي أساسه العدد النيبري e.

❷ التابع اللوغاريتمي العَشري

التابع اللوغاريتمي العَشري، هو التابع اللوغاريتمي بالأساس 10، فهو التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ وفق $\log(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln(10)}$، ولقد جرت العادة أن نرمز إليه بالرمز $\log$ بدلاً من $\log_{10}$ وذلك تبسيطاً للكتابة.

① احسب $\log(1)$ و $\log(10)$، ثم $\log(100)$ و $\log(1000)$ و $\log(10000)$.

② نضع $k = \frac{1}{\ln(10)}$. أثبت أنَّ $0 < k < 1$.

③ باستعمال المساواة $\log x = k \ln x$، تحقّق من أنَّ التابع $\log$ يتمتع بجميع خواص التابع $\ln$.

④ ارسم في معلم متجانس واحد الخطّين البيانيين للتابعين $\log$ و $\ln$.

❸ بعض استعمالات اللوغاريتم العَشري

في الكيمياء: تقاس درجة حموضة محلول بالـ pH الذي يساوي $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$ حيث $[\mathrm{H_3O^+}]$ هو تركز شوارد $[\mathrm{H_3O^+}]$ في المحلول مُقاسة بواحدة المول بالليتر.

في علم الزلازل: يشير المقدار I_0 إلى شدة قاعدية مرجعية، وعندها نقول إن درجة زلزال شدته I تساوي M إذا كان $M = \log(I/I_0)$. فما درجة الزلزال الذي وقع في لوس أنجلس عام 1971 إذا علمت أنّ $I = 50.01 \times 10^6 I_0$.

في علم الصوتيات: تُعطى الشدة $\mathcal{I}$ مُقاسة بالدِسيبِل لصوت استطاعته $\mathcal{P}$ بالصيغة $10\log(\mathcal{P}/\mathcal{P}_0)$ حيث تُمثّل $\mathcal{P}_0$ حدّ الصوت المسموع، الذي لا يُسمع أي صوت استطاعته أدنى منه.

نشاط 3 حصر المقدار $\ln(1+x)$

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

① ادرس على $\mathbb{R}_+^*$ التابع $f : x \mapsto \ln x + 1 - x$ ، واستنتج في حالة $x > 0$ صحة المتراجحة

$$\ln x \leq x - 1 \qquad (1)$$

② a. بالاستفادة من (1) برهن أنّه في حالة $t > -1$ لدينا $\ln(1+t) \leq t$.

b. وكذلك باختيار $x = \dfrac{1}{1+t}$ ، أثبت أنّه في حالة $t > -1$ لدينا $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$.

نستنتج إذن صحة المتراجحة:

في حالة $t > -1$ لدينا $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t \qquad (2)$

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

ليكن p عدداً طبيعياً موجباً تماماً. ولنضع $t = \dfrac{1}{p}$.

① أثبت انطلاقاً من (2) أنّ $\dfrac{1}{p+1} \leq \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p}$.

② نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالعلاقة $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

a. أثبت مستفيداً من (2) أنّ $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \dfrac{1}{2n}$.

b. استنتج أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من العدد $\ln 2$.

c. احصر العدد $\ln 2$ باختيار $n = 10$.

نشاط 4 دراسة تابع

ليكن g التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ بوضع $g(0) = 0$ و $g(x) = \dfrac{x}{x - \ln x}$ في حالة $x > 0$.

ليكن أيضاً $\mathcal{C}$ الخط البياني المُمثّل للتابع g .

① تيقّن أنّ $g(x)$ معرّف في حالة $x > 0$.

② a. أثبت أنّ g مستمرٌ عند الصفر.

b. ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر. وعيّن إن أمكن المماس للخط $\mathcal{C}$ عند مبدأ الإحداثيات.

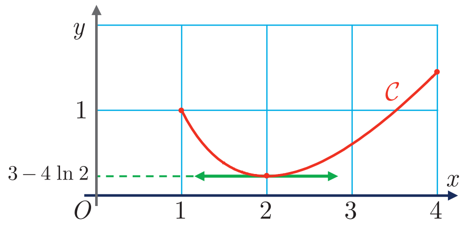
③ a. ما نهاية g عند $+\infty$؟

b. احسب $g'(x)$ في حالة $x > 0$ ، ثُمّ ادرس g .

c. أعط معادلة للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 1.

تمرينات ومسائل

1 نتأمّل تابعاً f معرّفاً على المجال $I=[1,4]$ وفق $f(x)=ax+b+c\ln x$ حيث a و b و c أعداد حقيقية نهدف إلى تعيينها. نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع.



① أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

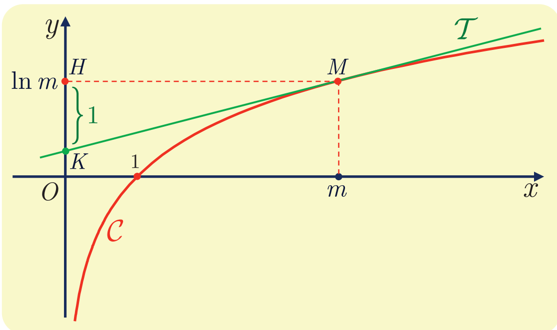
② استفد من المعلومات المدونة على الشكل لإثبات أنَّ:

$$a+b=1 \quad \text{و} \quad 2a+c=0 \quad \text{و} \quad 2a+b+c\ln 2=3-4\ln 2.$$

③ جد قيم a و b و c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

2 ليكن a و b عددين حقيقيين. في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln x$. النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من $\mathcal{C}$، والمماس للخط البياني $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$. استفد من هذه المعطيات لتعيّن a و b.

3 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، رسمنا $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $\ln$. لتكن M نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها m.



① جد، بدلالة m، معادلةً للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

② لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس $\mathcal{T}$ مع هذا المحور.

a. أثبت أنَّ ترتيب النقطة K يساوي $\ln m-1$، أياً يكن $m>0$.

b. استنتج أنَّ $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$.

c. استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط $\mathcal{C}$ من نقطة كيفية منه.

4 كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان؟

5 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

① جد نهاية هذه المتتالية.

② نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a. أثبت أنَّ $S_n = \ln(n+1)$.

b. ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$؟

6 أثبت أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع

$$f : x \mapsto x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

في جوار $+\infty$. (ضع $X = \frac{1}{x}$).

7 نتأمّل التابع f المعرف على $I = [0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$. واستنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

8 التوابع الآتية معرفة على $I = \mathbb{R}_+^*$. ادرس تغيرات كلٍ منها وارسم خطه البياني.

① $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

② $f : x \mapsto x - x\ln x$

③ $f : x \mapsto x\ln x$

④ $f : x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x}$

⑤ $f : x \mapsto x - \ln x$

⑥ $f : x \mapsto x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

9 في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

① $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ و $I =]e, +\infty[$.

② $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I =]1, +\infty[$.

لنتعلّم البحث معاً

10 حساب لوغاريتمي

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}$ (1)

احسب $\frac{a}{b}$.

نحو الحلّ

- يؤكد النص على وجود عددين a و b يحققان العلاقة (1) (وليس مطلوباً حسابهما). بل حساب قيمة $\frac{a}{b}$. علينا إذن استبعاد اللوغاريتمات من العلاقة، ولهذا سنسعى للوصول إلى علاقة من النمط $\ln A=\ln B$، ومن ثم نستنتج أنَّ $A=B$.
  1. أثبت أنَّ $\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$.
  2. استنتج أنَّ $a+b=3\sqrt{ab}$، ومن ثم $a^2+b^2-7ab=0$ (2).
- لاستنتاج قيمة $\frac{a}{b}$، يمكننا التفكير بالآتي:
  - القول إنَّ a حلٌّ للمعادلة $x^2-7bx+b^2=0$ يسمح بحساب a بدلالة b. ثم استنتاج $\frac{a}{b}$ بالتقسيم على b.
  - تسمية النسبة المجهولة $k=\frac{a}{b}$، فيكون $a=bk$ والسعي للحصول على مساواة لا تحوي إلا k. أثبت أنَّ $k^2-7k+1=0$ ثم أكمل (لا تنسَ أنَّ $k>0$).

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

11 حلّ جملة معادلتين

a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ تماماً. حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy=a^2 & (1)\\ (\ln x)^2+(\ln y)^2=\frac{5}{2}(\ln a)^2 & (2)\end{cases}$$

نحو الحلّ

- إذا كان (x,y) حلاً للجملة، كان $x>0$ و $y>0$. (لماذا؟). يمكننا التفكير كما في السابق بالسعي لاستبعاد اللوغاريتمات من المعادلة (2) وكتابتها بالصيغة $\ln A=\ln B$ التي تقتضي $A=B$. عندها سنكون في مواجهة جملة معادلتين بالمجهولين x و y فقط. ولكن ليست هناك أية قاعدة تفيد في تبسيط $(\ln x)^2+(\ln y)^2$ فهذه المحاولة عقيمة. يمكننا أيضاً التفكير بتعويض $y=\dfrac{a^2}{x}$ في المعادلة (2)، ولكن النتيجة ليست مشجعة.

لنفكر إذن بتحويل العلاقة (1) إلى العلاقة اللوغاريتمية $\ln xy=\ln a^2$، عندها سنحصل على جملة معادلتين بالمجهولين $\ln x$ و $\ln y$.

افترض أنَّ (x,y) حلٌّ للجملة، ثم تحقّق أنَّ $\ln x+\ln y=2\ln a$.

- نضع إذن $X=\ln x$ و $Y=\ln y$، ثم نحسب منهما x و y. كما نضع تبسيطاً للكتابة $\ln a=A$. (نذكّر أنّ حل المعادلة $\ln t=T$ هو $t=e^T$).

1. أثبت، وفق تلك الإجراءات، أنّ $Y=2A-X$ وأنَّ $4X^2-8AX+3A^2=0$.
2. استنتج أنَّ X تقبل قيمتين $X_1=\dfrac{A}{2}$ و $X_2=\dfrac{3A}{2}$، ثم استنتج قيم Y الموافقة.
3. تحقّق أنَّ $(x=\sqrt{a}$ و $y=a\sqrt{a})$ أو $(x=a\sqrt{a}$ و $y=\sqrt{a})$.

- وبالعكس تحقّق أنّ كلاً من $(x,y)=(a,a\sqrt{a})$ و $(x,y)=(a\sqrt{a},a)$ هو حلّ للجملة المعطاة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

12 مسألة وجود

أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحقّقان $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}$ (1) ؟

نحو الحلّ

- الفكرة المفيدة في البحث عن عددين a و b، تعتمد على تجميع كل ما يتعلّق بالعدد a من جهة وكل ما يتعلّق بالعدد b من جهة أخرى. نبحث إذن عن a و b، بحيث $\dfrac{\ln b}{b}=\dfrac{\ln a}{a}$. هذا يوحي إلينا أن ندرس التابع f المعرَّف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. وتعود المسألة إلى البحث عن عددين مختلفين a و b يحققان $f(a)=f(b)$.

1. ادرس تغيرات التابع f ونظِّم جدولاً بها (النهايات عند طرفي مجموعة التعريف وجهة الاطراد).
2. ارسم الخط البياني للتابع f.

لندرس استناداً إلى جدول التغيرات أو بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x)=m$. وذلك تبعاً لقيم m .

1. ناقش عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ في حالة $m>1/e$ ، $m=1/e$ ، $0<m<1/e$ وأخيراً $m\leq 0$.
2. استنتج الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان.
3. استنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$ يوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 إثبات متراجحة

أثبت أنَّ المتراجحة $\ln(x)\cdot\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ محققة، أيّاً يكن x من $]0,1[$.

نحو الحلّ

توحي إلينا المتراجحة $\ln x\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ أن ندرس اطراد f المعرَّف على $]0,1[$ بالعلاقة $f(x)=\ln(x)\cdot\ln(1-x)$. أثبت أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على المجال $]0,1[$.

لندرس إذن التابع $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على $]0,1[$.

1. احسب $g'(x)$ واستنتج إشارة g على كل من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2},1\right[$.
2. استنتج دراسة تغيرات التابع f ، وأثبت المتراجحة المطلوبة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

② $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \ln x+\ln y=\ln 3 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 \\ 3\ln x-5\ln y=4 \end{cases}$

③ $\begin{cases} (\ln x)(\ln y)=-12 \\ \ln(xy)=1 \end{cases}$

16 حلّ كلاً من المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$ ، والمتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$.

مساعدة: ضع $X = \ln x$.

17 ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

① .a تحقّق أنَّ $P(-1) = 0$.

.b استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

.c حل المتراجحة $P(x) \leq 0$.

② استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$.

18 ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

① أثبت أنَّ f تابع فردي.

② .a أثبت أنَّ f اشتقاقي على I .

.b ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$.

③ ارسم الخط البياني للتابع f .

19 ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I ، وارسم خطه البياني.

① $I =]1,+\infty[, \quad f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

② $I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \ln(1+x^2)$

③ $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

20 في معلمٍ متجانس، C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1,+\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

① أثبت أنَّ $g(x) \leq f(x)$ أياً يكن x من I .

② أثبت أنَّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

③ ادرس تغيرات كلٍ من f و g وارسم الخطين C_f و C_g مستفيداً من رسم المماس المشترك.

21 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

22 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

23 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

⑤ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

24 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]4,+\infty[$ وفق

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

① أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② ادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

③ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. ثُمّ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

④ أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α، واحصره في مجال طوله يساوي 1.

25 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α.

③ أثبت أنّ $1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$.

26 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعطى وفق : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$.

① تحقّق أنَّ D_f، مجموعة تعريف f، هي $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

② احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

③ أثبت أنَّ f متناقص تماماً على كلٍ من مجالي D_f.

④ ارسم في معلمٍ متجانس الخط البياني $\mathcal{C}$.

27 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على بالعلاقة $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$.

② أثبت أنَّ $(4-x)\in D_f$، أياً يكن x من D_f.

③ .a احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x)+f(x)$.

.b استنتج أنَّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

⑤ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑥ ارسم الخط $\mathcal{C}$ في معلمٍ متجانس.

28 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

① احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

29 في كلٍ من الحالتين الآتيتين، ادرس التابع f على $I = \mathbb{R}_+^*$، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f(x) = (x+1)\ln x$.

② $f(x) = \dfrac{1}{x} + x\ln x$.

30 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

① احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرّفة كما يأتي:

- M_1 نقطة تقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل.
- M_2 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.
- M_3 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يوازي محور الفواصل.
- M_4 نقطة من $\mathcal{C}$ ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

a. احسب فواصل هذه النقاط.

b. أثبت أنَّ تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. ما أساسها؟

31 ليكن f التابع المعرف على $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق $f(x) = -\dfrac{x}{2} + \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① a. أثبت أنَّ $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\dfrac{1}{4}$، أياً يكن x من D_f.

b. استنتج أنَّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط $\mathcal{C}$.

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

③ أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = -\dfrac{1}{2}x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$. وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مقاربه d.

④ ارسم في معلم واحد d ثم $\mathcal{C}$.

32 ليكن f التابع المعرف على $D_f = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1.

a. جد معادلةً للمستقيم T_A المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A.

b. ارسم في معلم واحد T_A ومقاربات $\mathcal{C}$، ثم $\mathcal{C}$.

③ لتكن B نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها u. أثبت أنَّ $u^3-1+2\ln u=0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون المماس T_B للخط $\mathcal{C}$ في النقطة B موازياً للمستقيم Δ الذي معادلته $y=x$.

④ a. حل المعادلة $u^3-1+2\ln u=0$.

b. استنتج أنَّ A هي النقطة الوحيدة من $\mathcal{C}$ يكون المماس فيها موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

33 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

① a. احسب نهاية $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج أنَّ f اشتقاقي عند $x=0$.

b. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ليكن $\mathcal{T}$ مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $x=1$ منه، جد معادلةً لهذا المماس.

③ نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمماس $\mathcal{T}$. ولهذا نعرف التابع h على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$. ادرس، إشارة $h''(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثَمّ إشارة $h(x)$.

④ اكتب معادلات مماسات $\mathcal{C}$ في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل.

⑤ ارسم مماسات $\mathcal{C}$ التي وجدتها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$ في المعْلَم ذاته.