3

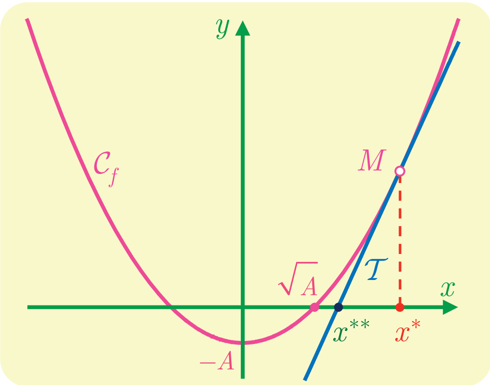
التوابع : الاشتقاق

1. تعاريف (تذكرة)
2. مشتقات بعض التوابع المألوفة (تذكرة)
3. تطبيقات الاشتقاق
4. اشتقاق تابع مركّب
5. المشتقات من مراتب عليا

البابليّون وحساب الجذر التربيعي

كانت مسألة حساب الجذر التربيعي $\sqrt{A}$ لعدد موجب A تُعدُّ مسألة مهمّة منذ القدم. المطلوب إذن حساب الحلّ الموجب للمعادلة $f(x)=0$ حيث $f(x)=x^2-A$ ، وفي غالب الأحيان لا نعرف إلاّ قيمة تقريبية x^* لهذا الحل نفترض أنها أكبر من $\sqrt{A}$، ولكن هل يمكننا انطلاقاً من x^* تعيين قيمة تقريبية أخرى x^{**} تكون أقرب إلى $\sqrt{A}$ من سابقتها x^* ؟

نرى من الشكل أنّ المماس $\mathcal{T}$ في $M(x^*,f(x^*))$ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x^{**} تكون أقرب إلى $\sqrt{A}$ من x^*.



معادلة المماس $\mathcal{T}$ في M هي

$$y=2xx^*-x^{*2}-A$$

وهو يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها

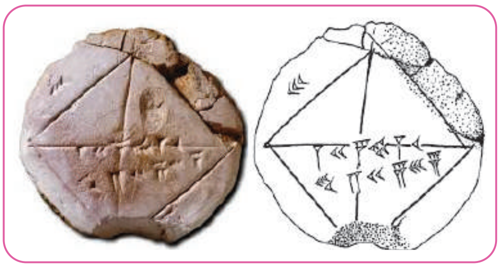
$$x^{**}=\frac{1}{2}\left(x^*+\frac{A}{x^*}\right)$$

وعليه يكون x^{**} المحسوب هكذا تقريباً أفضل للجذر التربيعي $\sqrt{A}$ من x^*.

في حالة $A=2$ يمكننا انطلاقاً من $x^*=2$ حساب تقريبات متتالية للعدد $\sqrt{2}$ كما يأتي

x^*	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$
x^{**}	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$
$x^{**}-\sqrt{2}\approx$	0.0858	0.00245	0.000002	0.000000000002

هذه الطريقة كانت معروفة للبابليين منذ حوالي ثلاثة آلاف سنة، وتسمّى الخوارزمية البابليّة، ونجد في الشكل المجاور رُقماً حجرياً بابلياً رمزه YBC– 7289 نُقش عليه $\sqrt{2}$ و $1/\sqrt{2}$ بالكتابة المسمارية بالأساس الستيني وهو ما كان معتمداً في ذلك الحين.



3

التوابع : الاشتقاق

1 تعاريف (تذكرة)

في كل هذه الوحدة سنرمز بالرمز D_f إلى مجموعة تعريف تابع f وبالرمز $\mathcal{C}_f$ إلى الخط البياني للتابع f في معلمٍ متجانس.

1.1. العدد المشتق والتابع المشتق

تعريف 1

ليكن f تابعاً معرفاً على مجالٍ I محتوى في D_f، ولتكن a نقطةً من I. نقول إنَّ ℓ هو **العدد المشتق للتابع f عند a** إذا وفقط إذا تحقق واحدٌ من الشرطين الآتيين:

- العدد ℓ هو نهاية التابع $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عندما تسعى h إلى الصفر مع بقاء $a+h$ في I.
- العدد ℓ هو نهاية التابع $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ عندما تسعى x إلى a مع بقائها في $I\setminus\{a\}$.

يُرمز إلى العدد المشتق للتابع f في a بالرمز $f'(a)$.

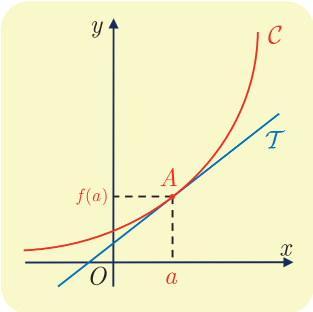
- عندما يقبل f عدداً مشتقاً في a، نقول إنَّ f **اشتقاقيٌّ في a**.
- عندما يكون f اشتقاقياً عند كل نقطة من مجالٍ I، نقول إنَّ f **اشتقاقيٌّ على I**.

تعريف 2

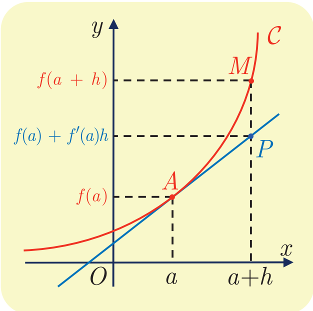
ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً على مجالٍ I. **التابع المشتق** للتابع f على I هو التابع f' الذي يقرن بكل a من I، العدد المشتق $f'(a)$.

يمكن أنْ يعرَّف f' على اجتماع مجالات وليس على مجال واحد فحسب. فمثلاً: التابع المشتق للتابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ المعرف على $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$، هو التابع f' المعرف على D نفسها وفق $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

2.1. المماس والتقريب التآلفي المحلي



ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني لتابع f اشتقاقيّ عند النقطة a، وليكن T المماس للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة $A\big(a, f(a)\big)$، إنّ T هو المستقيم المار بالنقطة A و ميلُه يساوي $f'(a)$. (انظر الشكل المجاور) وتكون $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ معادلةً للمماس $\mathcal{T}$.



يظهر من الرسم أنّ المستقيم $\mathcal{T}$ قريب من المنحني $\mathcal{C}$ في جوار النقطة A، ويمكننا إذن أن نستبدل بالمنحني $\mathcal{C}$ المستقيم T بقرب النقطة A. بعبارة أخرى نستبدل محلياً بالتابع $x \mapsto f(x)$ التابعَ التآلفي $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ أي إنّنا نستبدل بالعدد الحقيقي $f(a+h)$ العددَ الحقيقيّ $f(a) + hf'(a)$ عندما تكون h قريبة من الصفر.

تكريساً للفهم

ما فائدة التقريب التآلفي المحلي؟

- في الحالة العامة، حساب $f(a) + h \times f'(a)$ أسهلُ من حساب $f(a+h)$، لأنَّ المقدار $f(a) + h \times f'(a)$ كثير حدود من الدرجة الأولى بالمتحول h، فالحساب يتطلب فقط عمليةَ ضربٍ وعملية جمع.

مثال فعلى سبيل المثال، التابع $f : x \mapsto \sin x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$، و $f(0) = \sin 0 = 0$ و $f'(0) = \cos(0) = 1$. إذن لحساب قيمة التقريبية للعدد $\sin(h)$ في حالة قيمة صغيرة للعدد h نستعمل $f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)$ فنجد $\sin(h) \approx h$. إذن

$$\sin(0.1) \approx 0.1$$

أمّا الآلة الحاسبة فتعطي : $\sin(0.1)=0.099833$!.

عندما يكون f اشتقاقياً عند a، يمكن أن نكتب $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ و $h \mapsto \varepsilon(h)$ هو تابعٌ للمتحول h يحقق $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

في الحقيقة يكفي أن نضع

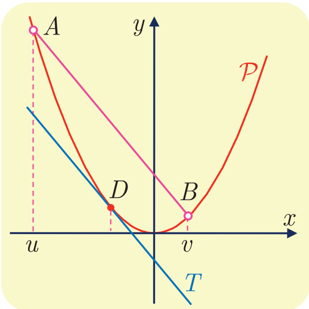
$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

ثُمّ نستفيد من تعريف العدد المشتق.

وبالعكس، إذا أمكن كتابة $f(a+h) = f(a) + h\ell + h\varepsilon(h)$ حيث ℓ عددٌ حقيقي و $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$،

عندئذ يكون ℓ العدد المشتق للتابع f عند a.

مثال إحدى صفات القطع المكافئ



ليكن $\mathcal{P}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^2$ ولتكن A و B نقطتين من $\mathcal{P}$ فاصلتاهما بالترتيب u و v $(u \neq v)$، ولتكن D النقطة من $\mathcal{P}$ التي فاصلتها $\frac{u+v}{2}$. أثبت أن المماس T المار بالنقطة D للقطع $\mathcal{P}$ يوازي المستقيم (AB).

علينا إثبات توازي مستقيمين. ولأنهما لا يوازيان محور التراتيب، يكفي إثبات تساوي ميليهما، أو إثبات الارتباط الخطي للشعاعين الموجهين لهما.

الحل

ليكن m_1 ميل المستقيم (AB) عندئذ $m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{v^2 - u^2}{v - u} = v + u$. وليكن m_2 ميل المماس T. لأنّ $f'(x) = 2x$ استنتجنا $m_2 = f'\left(\frac{u+v}{2}\right) = u + v$. إذن $m_1 = m_2$ فالمستقيمان (AB) و T متوازيان، وهي النتيجة المطلوبة.

مشتقات بعض التوابع المألوفة (تذكرة)

1.2. عمليات على المشتقات

مبرهنة 1

ليكن u و v تابعين اشتقاقيَّين على D (D هي مجالٌ أو اجتماعُ مجالاتٍ)، وليكن k عدداً حقيقيّاً. عندئذ يكون كلٌّ من ku و $u+v$ و uv اشتقاقيّاً على D ويكون:

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ و } (u+v)' = u' + v' \text{ و } \left(ku\right)' = k\,u'$$

وعندما لا ينعدم v في D يكون $\frac{1}{v}$ و $\frac{u}{v}$ تابعين اشتقاقيين على D ويكون:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ و } \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

وعلى الخصوص، التوابع كثيرات الحدود اشتقاقية على $\mathbb{R}$. والتوابع الكسرية اشتقاقية على مجموعة تعريفها

2.2. مشتقات توابع مرجعية

التابع	المشتق	ملاحظات
$x \mapsto mx + p$	$x \mapsto m$	
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \left]0, +\infty\right[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$

3.2. مشتقات كثيرات الحدود

ليكن P هو كثير حدود معرف على $\mathbb{R}$ وفق $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. لحساب $P'(x)$، نشتق كلَّ حدٍّ على حدته ثمَّ نجمع الحدود الناتجة. فنجد

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

مثال حساب مشتقات

عيّن مجموعة تعريف كلٍ من التوابع الآتية، والمجموعة التي يقبل عليها الاشتقاق، ثمَّ احسب تابعه المشتق.

❶ $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+x-1}{4}$ ❷ $g(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

❸ $h(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x}$ ❹ $k(x)=x^2\cos x$

الحل

❶ التابع f كثيرُ حدود، فهو معرَّف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=\frac{1}{4}\left(3x^2-10x+1\right)$.

❷ أياً يكن العدد الحقيقي x يكن $x^2+x+1\neq 0$، فالتابع g تابعٌ كسري معرف على $\mathbb{R}$ وهو من ثَمّ اشتقاقي عليها. g هو من الصيغة $\frac{1}{v}$ فمشتقه هو من الصيغة $-\frac{v'}{v^2}$ ، إذن

$$g'(x)=-\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

❸ التابع h تابعٌ كسري، وهو معرفٌ (ومن ثَمَّ اشتقاقي) على $\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$. ولأنّ له الصيغة $\frac{u}{v}$ فلمشتقه الصيغة $\frac{u'v-uv'}{v^2}$، إذن:

$$h'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x)-(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=-\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

❹ التابع k هو جداء ضرب تابعين: $u:x\mapsto x^2$ و $v:x\mapsto\cos x$ وكلٌّ منهما اشتقاقي على $\mathbb{R}$، فالتابع k اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه من الصيغة $u'v+uv'$، إذن:

$$k'(x)=2x\times\cos x+x^2\left(-\sin x\right)=2x\cos x-x^2\sin x.$$

تكريساً للفهم

لماذا تكون المبرهنة 1 غير مُجدية أحياناً عندما ندرس قابلية الاشتقاق في نقطة؟

- لأنَّها لا تعطي سوى شروطاً كافية. على سبيل المثال، لإيجاد مشتق uv، تنص المبرهنة على أنّه إذا **كان** u و v اشتقاقيين على D، **كان** uv اشتقاقياً على D. لكنها **لا** تقول: إذا لم يكن u أو v اشتقاقياً على D، فلن يكون uv اشتقاقياً على D.

وعليه، قد يكون الجداء uv اشتقاقياً عند نقطةٍ دون أن يكون u أو v اشتقاقياً في تلك النقطة.

مثال لنتأمل التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=x\sqrt{x}$. إنّ f هو جداء ضرب التابعين: $x\mapsto x$ الاشتقاقي على $\mathbb{R}$ و $x\mapsto\sqrt{x}$ الاشتقاقي على $]0,+\infty[$. إذن f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا

$$f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}\ .$$

تؤكد المبرهنة على وجود f' على $]0,+\infty[$، لكنها لا تنفي قابلية الاشتقاق عند الصفر. لدراسة الاشتقاق عند الصفر، نعود إلى تعريف العدد المشتق: فنلاحظ أنّ

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$$

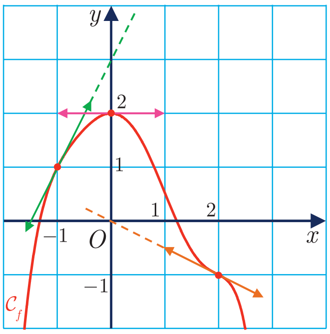
إذن $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$ والتابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$.

تَدرَّبْ

① فيما يأتي C_f هو الخط البياني لتابع f . اكتب معادلةً لمماس C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها 4 .

❶ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ❷ $f(x)=x^2$

❸ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ❹ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$



② في الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابعٍ f . تأمّل الشكل وأجب عن الأسئلة الآتية :

❶ عيّن كلاً من $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ أعطِ عددين صحيحين متتاليين يحصران كلاً من حلول المعادلة $f(x)=0$.

③ فيما يأتي، احسب التابع المشتق للتابع f مبيّناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها.

1. $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{4}$
3. $f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$
4. $f(x)=\dfrac{2}{x+1}-x$
5. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$
6. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
7. $f(x)=x\cos x$
8. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$
9. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
10. $f(x)=\sin x\cos x$
11. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$
12. $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$

3 تطبيقات الاشتقاق

1.3. اطراد تابع اشتقاقي (تذكرة)

مبرهنة 2

ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجالٍ I، تابعه المشتقّ f'.

❶ إذا كان f' موجباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متزايداً تماماً على I.

❷ إذا كان f' سالباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متناقصاً تماماً على I.

❸ إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I.

ملاحظة: في حالة تابع g، نصطلح أن نكتبَ «$g > 0$ على I» دلالة على أنّ «$g(x) > 0$ أياً كانت x من I».

صياغةٌ مُكافئة : في نص المبرهنة السابقة، ما وردَ في ❶ و ❷ يكافئ الآتي:

① إذا كان $f' \geq 0$ على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I، كان f متزايداً تماماً على I.

② إذا كان $f' \leq 0$ على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I، كان f متناقصاً تماماً على I.

2.3. القيم الحدّية (تذكرة)

تعريف 3

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I ولتكن c نقطة من I. نقول إنّ القيمة $M = f(c)$ **قيمة كبرى محليّاً** للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وُجِدَ مجالٌ مفتوحٌ J يضمّ النقطة c ويحقق الشرط

$$\forall x \in J \cap I, \quad f(x) \leq f(c)$$

ونعرّف بأسلوب مماثل، القيمة الصغرى محلياً لتابعٍ f، إذ نقول إنّ القيمة $m = f(d)$ **قيمة صغرى محلياً** للتابع f يبلغها عند النقطة d من I، إذا وُجِدَ مجالٌ مفتوحٌ J يضمّ النقطة d ويحقق الشرط

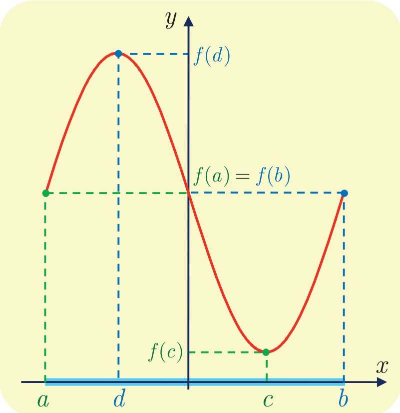
$$\forall x \in J \cap I, \quad f(d) \leq f(x)$$

نقول إنّ القيمةَ $f(a)$ **قيمةٌ حدية محليّاً** للتابع f إذا كانت قيمة كبرى محلياً أو صغرى محلياً.

مثال في الشكل المجاور، f تابع اشتقاقي على المجال $I=[a,b]$ ، c و d نقطتان من المجال I.

القيمتان $f(c)$ و $f(a)$ قيمتان صغريان محلياً. والقيمتان $f(b)$ و $f(d)$ قيمتان كبريان محلياً.

لاحظ كيف أنّ $A=f(a)=f(b)$ هي في آن معاً قيمة كبرى محلياً يبلغها التابع عند b، وقيمة صغرى محلياً يبلغها التابع عند a.



مبرهنة 3

ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجالٍ **مفتوح** I، ولتكن c نقطة من I.

1. إذا كانت $f(c)$ قيمة كبرى (أو صغرى) محلياً، كان $f'(c)=0$.
2. إذا انعدمَ f' عند c وغيَّر إشارته عندها، كانت $f(c)$ قيمة حدية (كبرى أو صغرى) محلياً للتابع f.

إذن في شروط المبرهنة، إذا كانت $f(c)$ قيمة حدية (كبرى أو صغرى)، كان المماس للخط البياني للتابع f في النقطة $(c,f(c))$ أفقياً.

3.3. حل المعادلات

مُبرهَنة 4

ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً على مجال $I=[a,b]$. لنفترض أنّ $f'\geq 0$ على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I، عندئذ أياً كان k من المجال $[f(a),f(b)]$، كان **للمعادلة $f(x)=k$ حلٌّ وحيد** في المجال $[a,b]$.

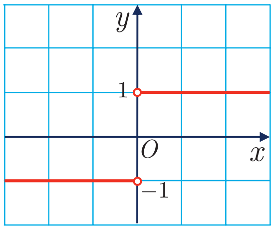
الإثبات

استناداً إلى فرضيات المبرهنة يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً على I، وهذه نتيجة من دراستنا في الوحدة السابقة.

لاحظ بالمثل أنّه إذا كان $f'\leq 0$ على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I، عندئذ أياً كان k من المجال $[f(b),f(a)]$، كان للمعادلة $f(x)=k$ حلٌّ وحيد في المجال $[a,b]$. وكذلك يمكن أن نكتفي بافتراض f مستمراً على المجال المغلق $[a,b]$ واشتقاقياً على $]a,b[$، ومشتقه لا يغير إشارته على هذا المجال.

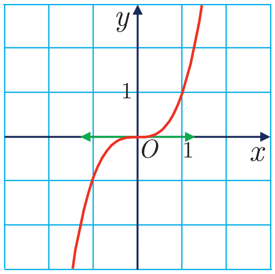
تكريساً للفهم

لماذا كان الشرط « I مجال » ضرورياً في المبرهنة 2؟



- على سبيل المثال، التابع f المعرف وفق $f(x) = -1$ عندما $x < 0$ و $f(x) = 1$ عندما $x > 0$، اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$، و $f'(x) = 0$ أياً كانت x من $\mathbb{R}^*$. ومع ذلك فإنَّ f ليس ثابتاً.

لماذا لا يكون الشرط « $f'(c) = 0$ » شرطاً كافياً في المبرهنة 3؟



- لأنَّه، على سبيل المثال، التابع f المعرف وفق $f(x) = x^3$، يحقق $f'(0) = 0$. ومع ذلك فإنَّ $f(0)$ ليست قيمة كبرى محلياً (ولا قيمة صغرى محلياً) للتابع. « لأنَّ f' لا يغير إشارته عند الصفر».

كيف نحدد مواقع حلول معادلةٍ $f(x) = 0$ ؟

- لإثبات أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في مجالٍ I (محدود أو غير محدود، مغلق أو مفتوح) ، يكفي إثبات أنَّ « f مطَّرد تماماً ويوجد عددان a و b في I يجعلان **$f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين**» أي « **$f(a) \times f(b) < 0$** ».

في الحقيقة، عندما يكون $f(a) \times f(b) < 0$ ، يكون الصفر محصوراً تماماً بين $f(a)$ و $f(b)$، عندها وحسب المبرهنة 4، يوجد α محصوراً تماماً بين a و b ومحققاً $f(c) = 0$. وهذا إثبات لوجود حلٍّ α للمعادلة $f(x) = 0$. أما وحدانية الحل فهي بسبب الاطراد التام للتابع.

مثال . دراسة التابع $f : x \mapsto \tan x$

- **مجموعة التعريف**: تذكّر أنّ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. إذن $\tan x$ غير معرف عندما $\cos x = 0$، أي في حالة $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. إذن

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- **مجموعة الدراسة**: أياً كانت x من $\mathcal{D}_f$، كان $-x$ من $\mathcal{D}_f$ وكان

$$f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan x = -f(x)$$

فالتابع f فردي، فخطّه البياني $\mathcal{C}_f$ في معلم متجانس متناظر بالنسبة إلى المبدأ O.

ومن جهة أخرى، أياً كانت x من $\mathcal{D}_f$، كان $x+\pi$ من $\mathcal{D}_f$ و

$$f(x+\pi)=\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\tan x=f(x).$$

فالتابع f دوري، والعدد π دورٌ له. تكفي إذن دراسته على مجالٍ طوله π، كالمجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$، ثُمّ ننتقل إلى المجال التالي بالانسحاب الذي شعاعه $\pi\vec{i}$ وإلى المجال السابق بالانسحاب الذي شعاعه $-\pi\vec{i}$. ولأنّ f فردي، **نكتفي بدراسته على المجال** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ونستكمل دراسته بالاستفادة من خواص التناظر المركزي والانسحاب.

- عند أطراف مجال الدراسة، التابع f مستمر عند 0 و $f(0)=0$، وعندما تقترب x من $\frac{\pi}{2}$ بقيم أصغر من $\frac{\pi}{2}$ يسعى $\cos x$ إلى الصفر بقيم موجبة. وعليه

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2},x<\frac{\pi}{2}}\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2},x<\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x=\dfrac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

- **الاطراد:** f اشتقاقي على $\mathcal{D}_f$ ولدينا

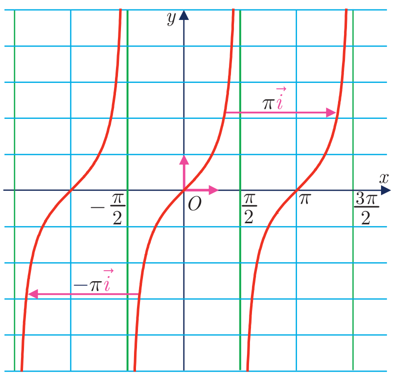
$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

إذن $f'>0$ على كل مجال من $\mathcal{D}_f$، وعلى الخصوص التابع f متزايدٌ تماماً على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

- للتابع على مجال الدراسة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ جدول التغيرات البسيط الآتي:

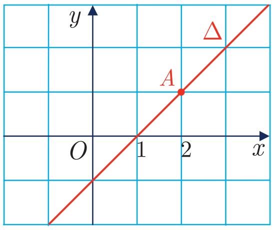
x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

- أمّا الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ فهو مبين في الشكل الآتي:



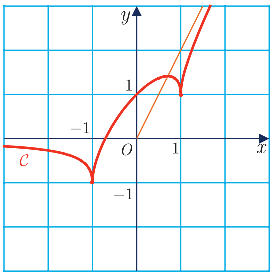
تَدرَّبْ

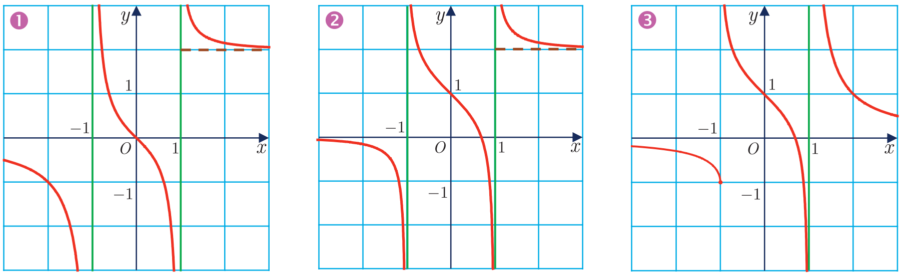
① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$. عيّن a و b علماً بأنَّ المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماسٌ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A. تحقق أنَّ التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.



② في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

أيُّ الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثّل الخط البياني للتابع المشتق f'؟





③ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+ax$. عيّن العدد الحقيقيّ a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً عند $x=1$.

④ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$، حيث a و b عددان حقيقيّان. نهدف إلى البحث عن قيم a و b بحيث يتحقّق الشرطان الآتيان:

- $f(-1)$ قيمة حديّة محلياً للتابع.
- هذه القيمة الحدية محلياً معدومة.

❶ لماذا $f'(-1)=0$ و $f(-1)=0$؟

❷ عيّن a و b، ثمَّ تحقق أنَّ التابع الذي حصلت عليه موافق لشروط المسألة.

⑤ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+5$.

❶ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

❷ تحقق أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً يقع بين -3 و -2. احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

4 اشتقاق تابع مركب

تسمحُ المبرهنةُ الآتية بحساب مشتق تابعٍ $x \mapsto g(u(x))$ انطلاقاً من معرفة مشتق كلٍّ من g و u.

مُبرهَنة 5

ليكن g تابعاً اشتقاقيّاً على مجال J، وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I، ولنفترض أنّه أيّاً كان x من I، انتمى $u(x)$ إلى J. عندئذ يكون التابع f المعرف وفق $f(x) = g(u(x))$ اشتقاقيّاً على I وأياً كان x من I، كان:

$$\left(g \circ u\right)'(x) = f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$$

لأنّ هذه الخاصة موضعية فهي تبقى صحيحة حتى لو كان I أو J اجتماع مجالات.

الإثبات (يُترك لقراءة ثانية)

لتكن a نقطة من I. نريد إثبات أنّ للتابع t المعرف على $I\backslash\{a\}$ وفق $t(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ نهايةً تساوي العدد $g'(u(a)) \times u'(a)$. لنضع $b = u(a)$، ولنلاحظ أنّه بسبب كون u اشتقاقياً عند a وكون g اشتقاقياً عند b استنتجنا استمرار التابعين المعرّفين كما يأتي:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x) - u(a)}{x - a}, & x \neq a \\ u'(a), & x = a \end{cases}$$

$$\beta : J \to \mathbb{R}, \beta(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(b)}{x - b}, & x \neq b \\ g'(b), & x = b \end{cases}$$

وهنا نلاحظ أنّه في حالة x من I و $x \neq a$ لدينا

$$\beta(u(x))\alpha(x) = \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

لمّا كان $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = u'(a)$ و $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} \beta(x) = g'(b)$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(b)u'(a)$$

وهي النتيجة المطلوبة.

مثال

- إذا كان $f(x)=g(ax+b)$ ، كان $f'(x)=ag'(ax+b)$. هنا $u(x)=ax+b$.
- لحساب مشتق $f(x)=(3x^2-x)^4$ نضع $u(x)=3x^2-x$ و $g(x)=x^4$ فيكون $f=g\circ u$ ومن ثَمّ:

$$f'(x)=4(3x^2-x)^3\times(6x-1)=4(6x-1)(3x^2-x)^3$$

مثال حساب مشتقات توابع مركبة

احسب التابع المشتق لكل من التوابع f_1 و f_2 و f_3 الآتية:

❶ $f_1(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ❷ $f_2(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ❸ $f_3(x)=\cos(x^2)$

الحل

التوابع f_1 و f_2 و f_3 هي توابع مركبة $g\circ u$. يتعلق الأمر في كل حالة بمعرفة التابعين g و u .

❶ $g_1(x)=\cos x$ و $u_1(x)=2x+\frac{\pi}{3}$. كلٌّ من هذين التابعين اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ، فحسب المبرهنة 5 f_1 اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولمّا كان $g_1'(x)=-\sin x$ و $u_1'(x)=2$ ، استنتجنا:

$$f_1'(x)=g_1'(u_1(x))\times u_1'(x)=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\times 2=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

❷ $g_2(x)=\sin x$ و $u_2(x)=\frac{1}{x}$. g_2 اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و u_2 اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$. إذن f_2 اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$. وأياً يكن x من $\mathbb{R}^*$: $g_2'(x)=\cos x$ و $u_2'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ، إذن أياً يكن x من $\mathbb{R}^*$:

$$f_2'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

❸ نجد بطريقة مماثلة لما سبق أنَّ f_3 اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وأنَّ $f_3'(x)=-2x\sin(x^2)$.

نتيجة 6

إذا كان u تابعاً موجباً تماماً واشتقاقياً على مجالٍ I ، كان التابع f المعرف على I بالصيغة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ اشتقاقياً على I ، وأياً كان x من I ، كان $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

الإثبات

نلاحظ أنّ $f(x)=g(u(x))$ حيث $g(x)=\sqrt{x}$. التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ، إذن f اشتقاقي على I لأنَّ u موجب تماماً واشتقاقي على I . وعليه أياً كان x من $]0,+\infty[$ ، كان $f'(x)=g'(u(x))\times u'(x)$ حيث $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، ومنه النتيجة المطلوبة.

نتيجة 7

ليكن n عدداً صحيحاً لا يساوي الصفر، و ليكن u تابعاً اشتقاقيّاً على مجال I، ولا ينعدم على I في حالة $n < 0$. عندئذ يكون التابع f المعرف وفق $f(x) = \left(u(x)\right)^n$ اشتقاقيّاً على I وأياً كان x من I، كان

$$f'(x) = n\left(u(x)\right)^{n-1} \times u'(x)$$

الإثبات

الإثبات متروك تمريناً للقارئ، ولكن نلاحظ أنّ صيغة المشتق هي ذاتها في حالتي $n > 0$ و $n < 0$، غير أنَّه في حالة $n < 0$،علينا اشتراط أنَّ $u(x) \neq 0$ أياً يكن x من I.

مثال تطبيق النتيجتين 6 و 7

احسب التابع المشتق للتابع f فيما يأتي:

❶ $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$ ❷ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ ❸ $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$

الحل

❶ يمكن أن نكتب $f(x) = (u(x))^3$ حيث $u(x) = x^2 + 3x + 1$. التابع u معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$، إذن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويعطى تابعه المشتق بالعلاقة

$$f'(x) = 3\left(u(x)\right)^2 \times u'(x) = 3(x^2 + 3x + 1)^2 \times (2x + 3).$$

❷ يمكن أن نكتب $f(x) = \sqrt{u(x)}$ حيث $u(x) = x^2 + 2x + 3$. التابع f معرَّفٌ عندما يكون $u(x) \geq 0$ واشتقاقي عندما يكون $u(x) > 0$. وإذا درسنا إشارة ثلاثي الحدود $x^2 + 2x + 3$ الذي مميزه $\left(\Delta = -8 < 0\right)$ وجدناه موجباً تماماً على $\mathbb{R}$، إذن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويعطى تابعه المشتق على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

❸ يمكن أن نكتب $f(x) = \left(u(x)\right)^{-3}$ حيث $u(x) = x^2 + x + 1$. ولأنّ ثلاثي الحدود $x^2 + x + 1$ موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، استنتجنا أنّ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويعطى تابعه المشتق على $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f'(x) = -3\left(u(x)\right)^{-4} \times u'(x) = \frac{-3}{(x^2 + x + 1)^4} \times (2x + 1) = \frac{-3(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4}.$$

تكريساً للفهم

كيف نستفيد من المبرهنة 5 في دراسة اشتقاق التابع $f = g \circ u$؟

- ليكن f التابع المعرَّف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = \cos\sqrt{x}$. بوضع $g(x) = \cos x$ و $u(x) = \sqrt{x}$، نرى أنّ $f = g \circ u$. التابع g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ والتابع u معرف على $[0,+\infty[$ واشتقاقي على $]0,+\infty[$.

إذن، استناداً إلى المبرهنة 5، يكون f اشتقاقياً على $]0,+\infty[$، وعلى هذا المجال يكون:

$$f'(x) = (\cos u)' \times u' = -\sin u \times (\sqrt{x})' = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

ولكنّ التابع f معرّف عند 0 و $f(0) = 1$ أيكون هذا التابع اشتقاقياً عند الصفر؟ لا تفيد المبرهنة 5 في الإجابة عن هذا السؤال. لذلك علينا العودة إلى تعريف العدد المشتق. فنبحث عن نهاية التابع t المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $t(h) = \dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}$ عندما تسعى h إلى الصفر.

لدينا

$$t(h) = \frac{\cos\sqrt{h}-1}{h} = -\frac{2\sin^2(\sqrt{h}/2)}{h} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{h}/2)}{\sqrt{h}/2}\right)^2$$

ولأنّ

$$\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{2} = 0$$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -\frac{1}{2}$. فالتابع f اشتقاقي أيضاً عند الصفر، و $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

أيمكن للتابع f المعرف وفق $f(x) = \sqrt{u(x)}$، أن يقبل الاشتقاق عند x_0 تحقق $u(x_0) = 0$؟

- نعم، لأنَّ النتيجة 6 لا تنصُّ على أنّ «$u(x_0) = 0$» يقتضي «f غير اشتقاقي عند x_0». فهذه النتيجة لا تجيب عن السؤال المطروح.

وعليه، لمعرفة ما إذا كان f اشتقاقياً في x_0، علينا أن نعود إلى تعريف العدد المشتق في x_0.
أي علينا أن ندرس نهاية التابع $t : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ عند النقطة x_0.

مثال ليكن $f(x) = \sqrt{x-1}$ في حالة x من $[1,+\infty[$ وهنا $u(x) = x-1$ و $u(1) = 0$ وفي حالة $x > 1$ لدينا

$$t(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 1, x>1} t(x) = +\infty$، فالتابع f غير اشتقاقي عند 1.

مثال ليكن $f(x)=\sqrt{(x-1)^4}$ ، أياً يكن x من $\mathbb{R}$. هنا $u(x)=(x-1)^4$ و $u(1)=0$ ، وأياً يكن x من $\mathbb{R}$ ، فلدينا $f(x)=(x-1)^2$. إذن f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي عند 1.

تَدرَّبْ

① في التمرينات الآتية، احسب مشتق f على المجموعة D المشار إليها في كل حالة.

❶ $f(x)=(2x^3-1)^5$ ، $D=\mathbb{R}$,

❷ $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$ ، $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$,

❸ $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ ، $D=\mathbb{R}$,

❹ $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ ، $D=\mathbb{R}$,

❺ $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ ، $D=\mathbb{R}$,

❻ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ ، $D=\mathbb{R}\setminus[-1,2]$,

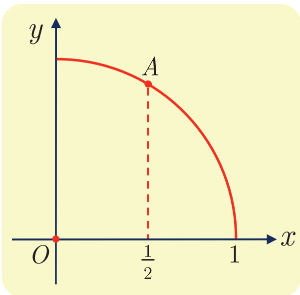
❼ $f(x)=\sqrt{\cos x}$ ، $D=[0,\frac{\pi}{2}[$,

❽ $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$ ، $D=[0,\frac{\pi}{2}[$,

❾ $f(x)=\tan(3x)$ ، $D=[0,\frac{\pi}{6}[$,

❿ $f(x)=\tan^2 x$ ، $D=[0,\frac{\pi}{2}[$,

② في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $x^2+y^2=1$ هي معادلةٌ للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1. وعليه فإنّ ربع الدائرة C المرسوم في الشكل المرافق، هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

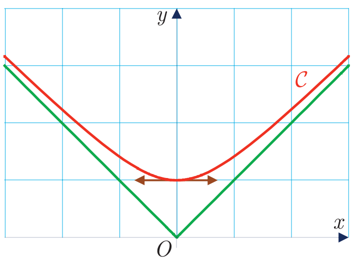


❶ احسب $f'(x)$ على المجال $[0,1[$.

❷ استنتج معادلةً للمماس T للدائرة C في النقطة A التي تساوي فاصلتها $\dfrac{1}{2}$.

❸ تحقَّق أنَّ المستقيم (OA) والمماس T متعامدان.

③ في الشكل المرافق نجد الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.



❶ تحقَّقْ أنَّ f تابعٌ زوجي.

❷ احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

❸ علّل كون المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارباً مائلاً للخط البياني C في جوار $+\infty$؟

❹ ادرس تغيرات f . هل من توافق بين نتائج الدراسة والنتائج التي تستخلصها من الخط البياني؟

5 المشتقات من مراتب عليا

تعريف 4

ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً على مجال I. نسمي تابعَه المشتق f' التابعَ المشتق الأول (أو المشتق من المرتبة الأولى) للتابع f ونرمز إليه أحياناً بالرمز $f^{(1)}$. وعندما يكون f' اشتقاقياً على I، يُرمز إلى تابعه المشتق بالرمز f'' أو بالرمز $f^{(2)}$. يسمى f'' المشتق الثاني (أو المشتق من المرتبة الثانية) للتابع f. وهكذا، أياً يكن العدد الطبيعي $n \geq 2$، نعرِّف التابع المشتق من المرتبة n بصفته التابع المشتق للتابع $f^{(n-1)}$. أي $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

مثال ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق الصيغة $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. عندئذ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$.

الحل

سنعتمد أسلوب الإثبات بالتدريج، لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية:

$$\text{«أياً كان } x \text{ من } \mathbb{R}\setminus\{1\} \text{ كان } f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\text{»}$$

- الخاصّة $E(1)$ صحيحة لأنّ

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{0\times(1-x) - 1\times(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

أو $f^{(1)}(x) = \dfrac{1!}{(1-x)^{1+1}}$.

- لنفترض إذن صحّة الخاصة $E(n)$ أي أنّ $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ أياً كانت $x \neq 1$. عندها

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' = \frac{0\times(1-x)^{n+1} - n!\times\left((1-x)^{n+1}\right)'}{\left((1-x)^{n+1}\right)^2}$$

$$= \frac{0 - n!\times(-(n+1))(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

وهذا يُثبت صحة الخاصة $E(n+1)$. فنكون بذلك قد أثبتنا صحة الخاصة $E(n)$ أياً كانت n.

أفكار يجب تَمثُّلُها

- $f'(a)$ هو ميلُ المماس للخط البياني C_f في النقطة $A(a,f(a))$.
- يمكن أن يكون للخط البياني C_f مماسٌ في النقطة $A(a,f(a))$ حتّى لو لم يكن f اشتقاقياً في a، على أن يكون $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ أو $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$. وعندئذ يكون المماس شاقولياً.
- قد لا يكون تابعٌ f اشتقاقياً على كامل مجموعة تعريفه.

مثال

$x\mapsto\sqrt{x}$ معرفٌ على $[0,+\infty[$، لكنّه غير اشتقاقي عند الصفر.

- **صيغة أساسية:** عندما $f(x)=g(u(x))$، يكون $f'(x)=g'(u(x))\times u'(x)$. وبوجه خاص

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2} \quad \text{و} \quad \left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

- يمكن أن يكون التابع $x\mapsto g(u(x))$ اشتقاقياً في نقطةٍ a دون أنْ يستوفي شروط المبرهنة 5 أو النتيجة 6.

منعكسات يجب امتلاكُها.

- إنْ تجد $f'(a)=0$، فكِّرْ عندئذ بالمماس الأفقي. وبالعكس، إذا كان المماس في $A(a,f(a))$ أفقياً كان $f'(a)=0$.
- عند البحث عن قيمٍ كبرى أو صغرى لتابع، فكِّرْ بتنظيم جدولٍ بتغيراته.
- لإثبات أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً في المجال $[a,b]$، فكِّرْ بطريقةٍ تقوم على إثبات أنَّ f مستمرٌ ومطردٌ تماماً على $[a,b]$ وأنَّ $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين.
- عندما تصعبُ دراسةُ إشارة $f'(x)$، فكِّرْ في دراسة تغيرات تابعٍ g تكون إشارة $g(x)$ مماثلةً لإشارة $f'(x)$.

مثال إذا كان $f'(x)=(x^3-x^2+1)\times\sqrt{x}$، ادرسْ تغيرات $g:x\mapsto x^3-x^2+1$.

- إذا أردت البحث عن إشارة $f'(x)$ في حالة $f(x)=\sqrt{u(x)}$، تذكّرْ أنّه يكفي البحث عن إشارة $u'(x)$، لأنَّ $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

مثال إذا كان $f(x)=\sqrt{x^2-4x+1}$، كانت إشارة $f'(x)$ مماثلةً لإشارة $2x-4$.

- لمقارنة قيم f و g على مجالٍ I، يمكن أن نرس إشارة التابع $k = f - g$ ولتحقيق ذلك، قد نحتاج إلى دراسة تغيراته. تسمح معرفة إشارة $(f-g)$ بتحديد الوضع النسبي للخطين البيانيين C_f و C_g. وبوجه خاص، تفيد معرفة إشارة $f(x) - \big((x-a)f'(a) + f(a)\big)$ بتحديد الوضع النسبي للخط البياني C_f ومماسه في النقطة $A(a, f(a))$.
- لمعرفة قابلية الاشتقاق في a لتابعٍ f مستمرٍ في a، فكِّرْ في دراسة $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

أخطاء يجب تجنّبها.

- إنّ مشتق التابع $x \mapsto f(ax+b)$ هو $x \mapsto af'(ax+b)$ فلا تنسَ المقدار «a».
- إذا كان $P(x) = g(a)\,f(x)$، أُعطي مشتق P بالعلاقة $P'(x) = g(a)\,f'(x)$ وليس بالعلاقة $P'(x) = g(a)\,f'(x) + g'(a)\,f(x)$. لأنَّ $g(a)$ عددٌ، وليس تابعاً للمتحوّل x.
- في صيغة مشتق $x \mapsto g\big(u(x)\big)$، لا تنسْ الحد $u'(x)$.
- القضية «إذا كان $f = g$، كان $f' = g'$» صحيحة، لكنَّ القضية «إذا كان $f > g$، كان $f' > g'$» خطأ في الحالة العامة.

أنشطة

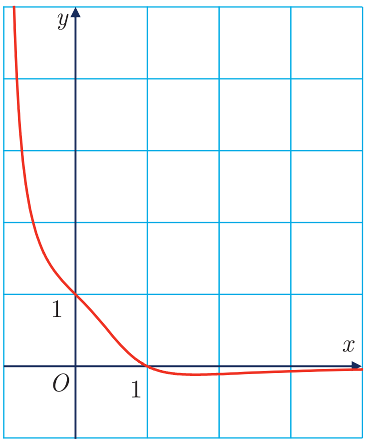
نشاط 1 دراسة تابع، التوابع المُساعدة

❶ دراسة تابع

في الحالة العامة، المقصود بدراسة تابع f هو تعيين مجموعة تعريفه D_f، وحساب نهاياته عند أطراف المجالات المكوّنة لمجموعة تعريفه والبحث عن مقاربات خطه البياني C_f، ودراسة تغيراته، وأخيراً رسم خطه البياني. وأحياناً، نكتشف بسهولة أنَّ f زوجي، أو فردي، أو دوري، مما يفيد في جعل دراسة التابع تقتصر على مجموعة جزئية من D_f ثُمَّ تُمدّد الدراسة، إلى كامل D_f مستفيدين من طبيعة الخاصة التي يتمتع بها التابع.

❷ دراسة تابع كسري

لنتأمّل التابع الكسري f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$. لقد رسمنا باستعمال برنامج متخصص الخط البياني C للتابع f في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.



ستسمح الدراسة الآتية بتعرّف صفات f ومن ثمَّ توضيح كيفية الوصول إلى رسم خطه البياني C دون استعمال أي برنامج وخصوصاً سير الخط البياني على المجال $[0,1]$. في الحقيقة، لا يعطي الخط المرسوم باستعمال الحاسوب دائماً، جميع المعلومات المتعلقة بالتابع، لكنّه يزودنا بتصور مفيد جداً عن تلك المعلومات.

① احسب $f'(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$ وتحقّق أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3-3x^2-1$.

في حالة تعذر تعيين إشارة $f'(x)$ جبرياً، ندرس تغيراتِ تابعٍ مساعدٍ g نستنتج منه الإشارة المطلوبة.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

a. ادرس تغيرات g.

b. أثبت أنَّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]-1,+\infty[$، وأنَّ α ينتمي إلى المجال $[1.6,1.7]$.

c. استنتج إشارة $g(x)$.

③ بالاستفادة من النتائج السابقة، نظّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ اكتب معادلةً للمماس Δ للخط البياني C في النقطة A منه التي تساوي فاصلتُها 0. وادرس الوضع النسبي للخط C ومماسه Δ على المجال $]-1,1[$.

⑤ أثبت أنَّ الخط C يقع فوق المستقيم d مماسه في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

⑥ ارسم Δ و d ثمَّ ارسم C.

نشاط 2 مماس شاقولي

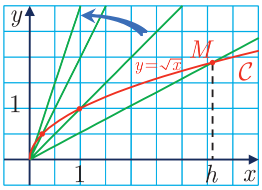
❶ الحالة العامة

لنتأمّل تابعاً f مستمراً عند نقطةٍ a تنتمي إلى أحد مجالات D_f. إذا كان

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$$

قَبِلَ الخط البياني C_f للتابع f، في معلمٍ متجانس مماساً شاقولياً في النقطة $A(a,f(a))$. هندسياً، يفسَّرُ الشرطان «f مستمر عند a و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$» بأنَّ ميل القاطع للخط C_f في النقطة $A(a,f(a))$ يسعى إلى $+\infty$ (أو $-\infty$)، أي إنَّ القاطع يسعى إلى المستقيم الذي معادلته $x=a$.

❷ حالة التابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$



تعلم أنَّ f مستمرٌ عند الصفر، لكنه غير اشتقاقي عند الصفر. أثبت أنَّ محور التراتيب مماس لخطه البياني في مبدأ المعلم.

❸ دراسة التابع $f : x \mapsto x\sqrt{x(2-x)}$

① a. تحقّق أنَّ f معرف على المجال $[0,2]$.

b. أثبت أنَّ f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال.

② ما نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ استنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

③ ما نهاية $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ عندما تسعى x إلى 2؟ هل f اشتقاقي عند $x=2$؟

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع f، في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، بالرمز $\mathcal{C}$.

a. ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

b. عيّن مماسَي $\mathcal{C}$ في النقطتين $A(0,0)$ و $B(2,0)$.

c. ارسم مماسي $\mathcal{C}$ في A و B ثمَّ ارسم $\mathcal{C}$.

نشاط 3 دراسة تابع مثلثاتي

❶ كيف ندرس تابعاً مثلثاتيّاً ؟

تذكَّرْ

- التابعان $\sin$ و $\cos$ دوريان ويساوي الدورُ الأصغر لكل منهما 2π. لأنَّ:

$\cos(x+2\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2\pi)=\sin x$

- التابع $\tan$ دوري ويساوي دوره الأصغر π. لأنَّ:

$k\in\mathbb{Z}$ و $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $\tan(x+\pi)=\tan x$

- التابعان $x\mapsto\sin(ax+b)$ و $x\mapsto\cos(ax+b)$ والدورُ الأصغر لكل منهما هو $\dfrac{2\pi}{|a|}$.

غالباً، ما تفيد الصفات الخاصة بالتوابع المثلثاتيّة في استنتاج مجال دراسة تابعٍ f معرّف على D_f:

- إذا كان T دوراً للتابع f، كان T موجباً تماماً، وأياً كان العدد الحقيقي x،
إذا كان $x\in D_f$ كان $x+T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$
في هذه الحالة يمكن أن ندرس التابع على مجالٍ طوله T.
- إذا كان f زوجياً أو فردياً، يكفي أن ندرسه على $\left[0,\frac{T}{2}\right]\cap D_f$، ثُمَّ:
  - □ إذا كان f زوجياً، أعطى التناظر المحوري بالنسبة إلى محور التراتيب الخط البياني على $\left[-\frac{T}{2},0\right]\cap D_f$.
  - □ وإذا كان f فردياً، أعطى التناظر بالنسبة إلى المبدأ O الخط البياني على $\left[-\frac{T}{2},0\right]\cap D_f$.
- بعدئذ، يسمح الانسحابان اللذان شعاعاهما $T\vec{i}$ و $-T\vec{i}$ بالحصول على الخط البياني على مجالات أخرى.

وخلاف ذلك، تجري دراسة التوابع المثلثاتيّة بمثل دراسة التوابع الأخرى.

❷ دراسة التابع $x\mapsto 2\sin x+\sin 2x$

لنتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\sin x+\sin 2x$.

① تحقّق أنَّ f دوريٌّ وأنَّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

② أثبت أنّه، في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

③ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$.

مساعدة: ستحتاج إلى حل المتراجحة $\cos x>\frac{1}{2}$. لهذا، يمكن استعمال الدائرة المثلثاتيّة، أو الخط البياني للتابع $x\mapsto\cos x$ على المجال $[0,\pi]$. وكذا الأمر عند دراسة إشارة $\cos x+1$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$، ثمَّ على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

نشاط 4 نهايات ومشتقات

❶ المبدأ

ليكن g تابعاً ما، وليكن f تابعاً يحقق عند كل x من مجال مفتوح يحوي a و $x \neq a$ العلاقة

$$f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

ثُمّ لنفترض إضافةً إلى ذلك أنَّ التابع g اشتقاقي عند a، عندئذ يقبلُ f نهايةً عند a ويكون

$$\lim_{x \to a} f(x) = g'(a) .$$

إذن، لإزالة حالة عدم التعيين من الصيغة « $\frac{0}{0}$ » لتابعٍ f عند نقطةٍ a، يمكن أن نحاول كتابة f بالشكل $f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ حيث g اشتقاقي عند a. عندئذ يكون $\lim_{x \to a} f(x) = g'(a)$.

❷ تطبيقات

① ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. يقودنا البحث عن نهاية f عند الصفر إلى إحدى صيغ عدم التعيين. ضعْ $g(x) = \sqrt{x+4}$ لكي تتمكن من حساب نهاية f عند الصفر. ثُمّ احسب هذه النهاية.

② ننوي دراسة نهاية التابع $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ عند $\frac{\pi}{2}$.

a. تحقّق أنَّ الحساب المباشر يقود إلى صيغة عدم تعيين.

b. لاحظ أنَّ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$، واستنتج أنَّ نهاية f عند $\frac{\pi}{2}$ تساوي العدد المشتق للتابع $x \mapsto \cos x$ عند $\frac{\pi}{2}$، ماذا تساوي هذه النهاية؟

③ ادرس، في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، نهاية التابع f في النقطة التي يشار إليها.

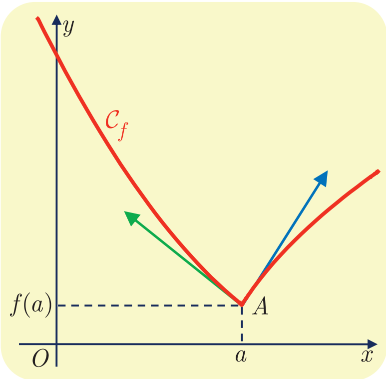
a. $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

b. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ عند $x = 1$.

نشاط 5 الاشتقاق من اليمين ومن اليسار

❶ حالة عامة: تعريف نصف المماس

عندما يكون التابع f مستمراً على مجالٍ يحوي a، ويقبلُ التابع $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايةً ℓ من اليمين عند a، نقول عندئذ إنَّ التابع f **اشتقاقيٌ من اليمين** عند a، ونسمي ℓ العدد المشتق من اليمين للتابع f في a، ونرمز إليه بالرمز $f'(a^+)$. نعرّف بأسلوب مماثل **الاشتقاق من اليسار** عند a ونرمز إلى العدد المشتق من اليسار بالرمز $f'(a^-)$ في حال وجوده.



في حال وجود $f'(a^+)$ و $f'(a^-)$ نقول إنّ الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f يقبل في النقطة $A(a,f(a))$ نصف مماس من اليمين ونصف مماس من اليسار. ويكون $f'(a^+)$ ميلَ نصف المماس من اليمين، و $f'(a^-)$ ميلَ نصف المماس من اليسار.

❷ دراسة مثال

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|+1}$.

① ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطه البياني $\mathcal{C}_f$ في النقطة $A(0,2)$.

② ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليسار لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$.

③ ارسم نصفي المماسين السابقين وارسم $\mathcal{C}_f$ على المجال $[-2,2]$.

نشاط 6 تأطير (حصر) توابع مثلثاتية

❶ تمهيد

لنتأمّل تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ولنفترض أنّ $f'(x)\le g'(x)$ أياً يكن x من D.

بدراسة التابع h المعرف على D وفق $h(x)=f(x)-f(0)-g(x)+g(0)$ أثبت أنَّ:

$$f(x)-f(0)\le g(x)-g(0) \qquad (*)$$

❷ حصر $\sin x$ و $\cos x$.

① .a أثبت أنَّ $\sin x \leq x$ ، أياً يكن $x \geq 0$.

.b باختيار $f(x) = -\cos x$ ، و $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ برهن مستفيداً من التمهيد أنّه في حالة $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 \qquad (\Delta)$$

② .a أثبت أنَّ $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ ، أياً يكن $x \geq 0$.

.b وأنَّ $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ ، أياً يكن $x \in \mathbb{R}$.

.c وأخيراً بين أنّ $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ ، أياً يكن $x \geq 0$.

❸ تطبيقات

① استنتج مما سبق أنَّ العدد $1 - \dfrac{x^2}{2}$ تقريبٌ للعدد $\cos x$ بخطأ لا يتجاوز $\dfrac{x^4}{24}$. ما الخطأ الذي نرتكبه عندما نكتب $\cos(0.1) = 0.995$ ؟

② احسب نهاية $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

③ احسب نهاية $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

تمرينات ومسائل

1 اكتب معادلة للمماس للخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a.

① $f(x) = x^3 + x^2 - 3x, \quad a = 0$ ② $f(x) = x\sqrt{x}, \quad a = 1$

③ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad a = 0$ ④ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad a = 0$

⑤ $f(x) = \cos x, \quad a = 0$ ⑥ $f(x) = x\cos x, \quad a = \frac{\pi}{4}$

2 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x+1}$.

① اكتب معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$؟

3 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$.

① أعطِ معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -\dfrac{1}{4}x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x - y = 0$؟

4 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② تحقّق أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثةَ جذور. واحصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

هنا نجد رمزاً جديداً: يعني هذا الرمز أنّ استعمال الآلة الحاسبة أو الحاسوب **مسموح**، ولكن **ليس ضرورياً**.

5 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

6 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

7 في كل حالة من الحالات الآتية، احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها. وحدِّدْ في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق.

① $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ ② $f(x) = x\sqrt{x}$

③ $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ④ $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

⑤ $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ⑥ $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

8 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

① تحقّق أنَّ $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

② استنتج أنَّ $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

9 في كلٍّ من الحالات الآتية، ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر.

① $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ② $f(x) = x|x|$ ③ $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$

10 التابع f معرفٌ على $\mathbb{R}$ وفق $f(0) = 0$ و $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x \neq 0$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟ علّل إجابتك.

② احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

11 محلّ هندسي

في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، M هي النقطة التي إحداثيتاها $(m,0)$ حيث $0 \leq m \leq 3$، و N هي النقطة التي إحداثيتاها $(0,n)$ حيث $n \geq 0$، النقطتان M و N تحققان $MN = 3$. وأخيراً J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تُحقق $MJ = 2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$، ورسمه.

نحو الحلّ

- هذه مسألةٌ في دراسة المحل الهندسي تحليلياً. سنسعى بدايةً إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النقطة J بدلالة m. يمكن التفكير بمبرهنة تالس، لكنْ يبدو الأمر أيسرَ باستعمال الأشعة.
  ① أثبت أنَّ $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.
  ② أثبت أنَّ $n = \sqrt{9 - m^2}$. واستنتج (x,y) إحداثيّتي للنقطة J بدلالة m.
- للحصول على معادلة للمحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J، نبحث عن علاقةٍ بين الإحداثيّتين x و y للنقطة J مستقلةٍ عن الوسيط m. أثبت أنَّ $y = 2\sqrt{1 - x^2}$، عندها تنتمي J إلى الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$.
- يبقى أن نجيب عن السؤال: أترسم J الخط البياني $\mathcal{C}$ كاملاً عندما تتحول m على المجال $[0,3]$؟
  ① لماذا تنتمي x إلى المجال $[0,1]$؟
  ② ما هو إذن المحل الهندسي للنقطة J؟
  ③ ادرس تغيرات f وادرس قابلية اشتقاقه عند 1. وأخيراً ارسم $\mathcal{L}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

12 توابع ومجموعات نقطية

في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، نرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق:

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \qquad (*)$$

نهدف إلى إثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ هي اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ومن ثمَّ رسمُ $\mathcal{E}$.

نحو الحلّ

بحثاً عن طريق. يتعلق الأمر بإثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ من النقاط $M(x,y)$ تساوي $C_1 \cup C_2$. يجب إذن إثبات أنّ القول « تنتمي M إلى $\mathcal{E}$» يكافئ « تنتمي M إلى $C_1 \cup C_2$ » أو « تنتمي M إلى C_1 أو إلى C_2 »، حيث C_1 و C_2 هما خطّان بيانيان لتابعين f_1 و f_2 فتكون معادلتاهما

$$y = f_1(x) \quad \text{و} \quad y = f_2(x)$$

يتعلق الأمر إذن بإيجاد تابعين f_1 و f_2 تكون معهما المقولتان الآتيتان متكافئتين:

- « إحداثيّتا M تحققان $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ »
- « إحداثيّتا M تحققان $y = f_1(x)$ أو $y = f_2(x)$».

① تحقق أنّ العلاقة $(*)$ تكافئ $y^2 = \dfrac{-x^2+2x+3}{4}$.

② تعلم أنّ « $y^2 = a$ »تكافئ « $y = \sqrt{a}$ أو $y = -\sqrt{a}$ » فقط عندما يكون $a \geq 0$. ما قيم x التي تحقق $-x^2+2x+3 \geq 0$؟

تبقى دراسة تغيرات f_1 و f_2، ثمَّ رسم خطيهما البيانيين C_1 و C_2. نرمز بالرمز f_1 إلى التابع المعرف على $[-1,3]$ وفق $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{2}$.

① أثبت أنّ f_1 اشتقاقي على $]-1,3[$. احسب $f_1'(x)$ على $]-1,3[$.

② ادرس قابلية f_1 للاشتقاق عند -1 وعند 3. ثُمّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f_1. وارسمْ C_1.

يمكن، لكي نرسم C_2، أن ندرس تغيرات f_2. ولكن هنا، لدينا: $f_2(x) = -f_1(x)$، أياً تكن x من $[-1,3]$. وفق أيّ تحويلٍ هندسي يكون C_2 صورة C_1؟ ارسم C_2.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 متراجحة هويغنز Huygens

نهدف إلى إثبات صحة المتراجحة $2\sin x + \tan x \geq 3x$ أياً يكن x من المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.

نحو الحلّ

يبدو حل هذه المتراجحة مثلثاتياً شبه مستحيل. لذا نلجأ إلى دراسة التابع f المعرف على I وفق $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. تحقّق أنَّ إشارة $f'(x)$ على المجال I تماثل إشارة $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

يمكنك أن تضع $t = \cos x$، ثم تدرس إشارة كثير الحدود $P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ مع t من $]0,1]$. ادرس تغيرات P على المجال $]0,1]$، وتحقق أنّ P موجب على هذا المجال.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

14 التابع f معرفٌ على المجال $[0,1[$ وفق $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟

② احسب $f'(x)$ على $]0,1[$.

15 نتأمّل التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

① احسب التابع المشتق للتابع f .

② استنتج مشتق كلٍّ من التوابع الآتية:

❶ $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ❷ $h : x \mapsto \dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

❸ $\ell : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ ❹ $k : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

16 فيما يأتي، أوجد التابع المشتق للتابع f محدداً المجموعة التي تنجز عليها الاشتقاق.

① $f(x)=\cos^2 3x$ ② $f(x)=\sin^3 2x$

③ $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$ ④ $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$

17 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

① عيِّن التابع المشتق f' للتابع f .

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x)=f(\sin x)$. أثبت أنَّ g اشتقاقي على I ثمَّ احسب $g'(x)$ على I .

③ نرمز بالرمز h إلى التابع المعرف على $J=]1,+\infty[$ وفق $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$. أثبت أنَّ h اشتقاقي على J ثمَّ احسب $h'(x)$ على J .

18 a و b عددان حقيقيان، و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=ax^3+bx^2+1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل C مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

19 a و b عددان حقيقيان، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$$

عيّن a و b لتكون $y=4x+3$ معادلةً للمماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟

20 a عددٌ حقيقيٌّ، و f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$. هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدّية محليّة عند $x = 1$؟

21 f هو تابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها. إضافةً إلى ذلك نفترض أنّ:

- $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$.
- f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$.

ارسمْ خطاً بيانياً C **يمكن** أن يمثل التابع f .

22 في كلٍّ من الحالات الآتية، احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

① $a = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ ② $a = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

③ $a = 1$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$ ④ $a = 1$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x-1}$

23 في كلٍّ من الحالات الآتية، أوجد عدد حلول المعادلة، ثمَّ احسب قيمةً تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .

① $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$ ② $x\left(2x+1\right)^2 = 5$

③ $x^4 - \dfrac{1}{2}x + 1 = 0$ ④ $\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

24 ليكن f التابع المعرّف على المجال $[1, +\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$.

① ادرس تغيرات التابع f . أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً يطلب حساب قيمة تقريبية لهذا الحل على ألّا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .

② احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

25 ليكن f التابع المعرّف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

① ادرس تغيرات f على I .

② استنتج أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $]1, 2[$.

③ احسب قيمة تقريبية لهذا الجذر على ألا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .

26 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$$

① ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

② نريد تعيين المماسات للخط البياني $\mathcal{C}$ المارة بالمبدأ، (غير المماس في المبدأ.)

.a ليكن a عدداً حقيقياً. اكتب معادلةً للمماس T_a الذي يمس C في النقطة $A\left(a,f(a)\right)$.

.b فكِّرْ في أنَّ T_a يكون أحد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدأ. ثُمّ جد معادلة لكل مماس للخط البياني $\mathcal{C}$ يمر بالمبدأ.

27 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

① أوجد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس نهاية f عند -1. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط $\mathcal{C}$؟

④ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

⑤ أثبت أنَّ النقطة $I(-1;-3)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

⑥ ارسم مقاربات $\mathcal{C}$ ثمَّ ارسم $\mathcal{C}$.

28 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$$

① أوجد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفه، ثمَّ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ثمَّ ارسم كلاًّ من d و $\mathcal{C}$.

④ حدِّدْ هندسياً عدد حلول المعادلة $x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$.

29 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$

① احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل C مقارباً أفقياً؟

② تحقق أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C.

③ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ ارسم مقاربات C ثمَّ ارسم C.

30 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$.

① قارن كلّاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$. استنتج أنّه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$.

② أثبت أنَّ $f'(x) = 6\cos x \times \sin x\left(1 - 2\cos x\right)$، عند كل عدد حقيقي x.

③ ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi, 2\pi]$.

31 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$.

① أثبت أنَّ $f(x+2\pi) = f(x)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

② تحقق أنَّ $f'(x) = 3\sin x\left(2\sin 2x - 1\right)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

③ ادرس f على مجال طوله 2π، وارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi, 2\pi]$.

32 ليكن f التابع المعرف على المجال $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = 4x - \tan^2 x$.

① احسب التابع المشتق $f'(x)$. ضعْ $\tan x = t$ وتحقق أنَّ

$$f'(x) = 2(1-t)\left(t^2 + t + 2\right)$$

② استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I.

③ أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = -1$، في المجال I جذراً وحيداً α.

33 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x\cos x$.

① احسب عند كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$.

② أثبت، مستخدماً البرهان بالتدرّيج، أنَّ مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا:

$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$ أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

34 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$، على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

② بالاستفادة مما سبق، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

35 إيجاد تابع

نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقّق

$f(0)=0$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ عند كل x من $\mathbb{R}$.

وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

① ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

a. تحقق أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

b. احسب $g(0)$ واستنتج أنَّ التابع f فردي.

② ليكن h التابع المعرف على $I=\left]0,+\infty\right[$ وفق $h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. تحقق من أنَّ h اشتقاقي على I، واحسب $h'(x)$ على I.

b. أثبت أنَّ $h(x)=2f(1)$، أياً يكن x من I.

c. استنتج أنَّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$.

d. ماذا تستنتج بشأن الخط البياني $\mathcal{C}$؟

③ ليكن k التابع المعرف على $J=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ وفق $k(x)=f(\tan x)-x$.

a. احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k؟

b. احسب $f(1)$.

c. نظِّمْ جدولاً بتغيرات f على $\mathbb{R}$.

d. ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني $\mathcal{C}$ وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها -1 و 0 و 1، ثُمّ ارسم $\mathcal{C}$.