2

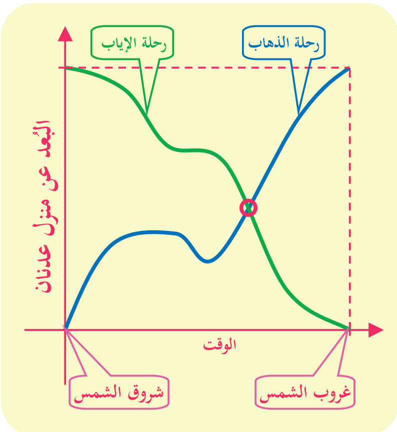
التوابع : النهايات والاستمرار

1. نهاية تابع عند اللانهاية
2. نهاية تابع عند عدد حقيقي
3. العمليات على النهايات
4. مبرهنات المُقارنة
5. نهاية تابع مركّب
6. المقارب المائل
7. الاستمرار
8. التوابع المستمرة وحل المعادلات

يسكن عدنان سفح جبل عالٍ، وأراد يوماً زيارة جدّه الذي يقيم في بيتٍ يتربّع على قمة الجبل. هناك طريق واحدة من بيت عدنان إلى بيت جدّه والرحلة تستغرق نهاراً كاملاً من شروق الشمس إلى غروبها.

أعدّ عدنان عُدّته وانطلق في رحلته في الصباح الباكر مع أوّل أشعة الشمس البازغة، وكان في رحلة صعوده يستريح من وقت إلى آخر ويستمتع بالمناظر الخلابة، وفي بعض الأحيان يرجع على أعقابه ليقطف زهرة أو ثمرة من شجرة.

وصل عدنان إلى بيت جده عند الغروب كما كان متوقّعاً، فالتقى جدّه وتسامرا وجهّز نفسه لرحلة العودة في اليوم التالي. انطلق عدنان عائداً إلى منزله مع بزوغ الشمس، كانت رحلة النزول أسهل، فراح يُسرع أحياناً ويُبطئ أحياناً أخرى، ويتوقّف لتناول الطعام. وصل عدنان إلى منزله مع غروب الشمس.



أتعلم أنّه يوجد موقع على الطريق أشارت عنده ساعة عدنان إلى الوقت نفسه في رحلة الذهاب وفي رحلة العودة؟

هذه نتيجة من مبرهنة القيمة الوسطى التي سندرسها في هذه الوحدة.

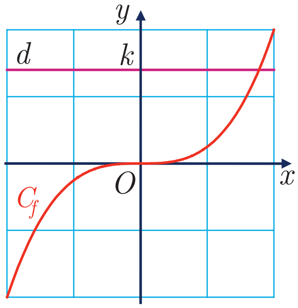
2

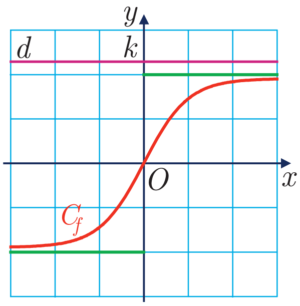
التوابع : النهايات والاستمرار

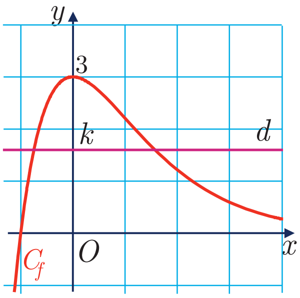
انطلاقة نشطة

نشاط 1 حلُّ المعادلات

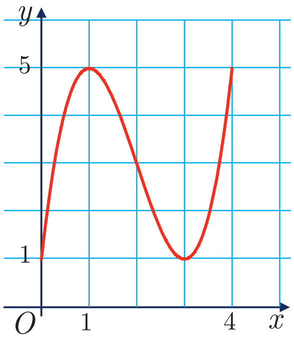
الأشكال الآتية هي الخطوط البيانية لتوابع f معرفة على $\mathbb{R}$.



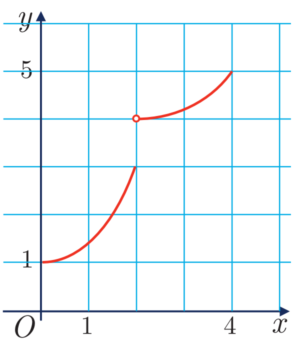




الحل الهندسي لمعادلة $f(x) = k$ هو البحث عن وجود نقاط مشتركة بين الخط البياني C_f للتابع f والمستقيم d الذي معادلته $y = k$. في حالة كثير حدود من الدرجة الثانية، نعلم أنّه يمكن حل المعادلة $f(x) = k$ حلاً جبرياً. ولكن قد يستحيل حلها في الحالة العامة. عندما نرسم الخط البياني C_f للتابع f ونرسم المستقيم d الذي معادلته $y = k$، فتكون فواصل النقاط المشتركة بين C_f و d حلولاً للمعادلة $f(x) = k$ إن كان لها حلول.

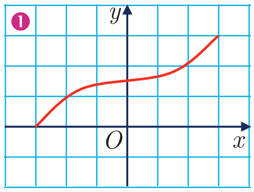


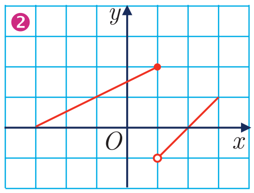
- رسمنا في الشكل المجاور الخط البياني لتابع f معرّف على المجال $[0, 4]$. أياً كان العدد الحقيقي k المحصور بين العددين 1 و 5، كان للمعادلة $f(x) = k$ حلول. لأنَّ الخط البياني للتابع f مكوّن من «قطعة واحدة». نقول في هكذا حالة إنَّ التابع **مستمر** على المجال $[0, 4]$.

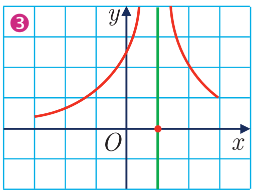


- أمّا في الشكل المجاور فنجد أيضاً الخط البياني لتابع f معرف على المجال $[0, 4]$. ولكن ليس للمعادلة $f(x) = k$ حلول عندما تكون $3 < k \leq 4$. لاحظ أنّ الخط البياني ليس قطعة واحدة. نقول في هكذا حالة إنَّ التابع f **غير مستمر** على المجال $[0, 4]$. (هو، بالتحديد غير مستمر عند 2)

الأشكال المرسومة أدناه، هي الخطوط البيانية لتوابع f معرّفة على المجال $[-3,+3]$.







① أيُّ التوابع الثلاثة مستمرٌ على المجال $[-3,+3]$ وأيّها غير مستمر عليه.

② اذكر، في كل حالة، عدد حلول المعادلة $f(x)=k$، تبعاً لقيم k.

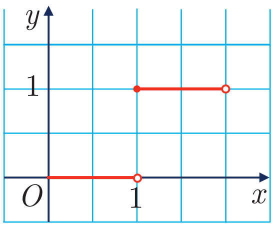
نشاط 2 استمرار ونهايات ومجالات

❶ تابع الجزء الصحيح

أيّاً يكن العدد الحقيقي x، يوجد عدد صحيح وحيد n يحقق $n \le x < n+1$. يسمى العدد n الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x، ويرمز إليه بالرمز $E(x)$. على سبيل المثال:

$E(\pi)=3$، لأنَّ $3 \le \pi < 3+1$ و $E(-3.5)=-4$، لأنَّ $-4 \le -3.5 < -3$.

في الشكل المرافق، ما رُسم باللون الأحمر هو الخط البياني لتابع معرف على المجال $[0,2[$.



① تحقق أنَّ التابع هو $E : x \mapsto E(x)$. احسب $E(1)$.

② هل $E(1)$ نهاية **للتابع** E في النقطة 1؟

مع أنّ التابع E معرف في النقطة 1، $\left(E(1)=1\right)$ ولكن قيم $E(x)$ لا تتجمّع حول قيمة محدّدة (نهاية) عند اقتراب x من 1، فليس لهذا التابع نهاية عند 1. نقول إنه **غير مستمر** في النقطة 1.

لاحظ أنَّ الخط البياني لهذا التابع على المجال $[0,2[$ يتألف من قطعتين، فهو يعاني انقطاعاً عند $x=1$. نقول إنَّ E غير مستمر على المجال $[0,2[$.

③ ارسم الخط البياني للتابع E على المجال $[2,5[$.

a. في أية نقاط من المجال $[2,5[$ التابع E غير مستمر؟

b. هل E مستمر على المجال $]3,5[$؟ علِّلْ إجابتك.

❷ صورة مجال

صورة مجالٍ I وفق تابعٍ f هي مجموعة الأعداد $f(x)$ عندما تتحوّل x في I آخذة جميع القيم فيه. نرمز إلى هذه المجموعة بالرمز $f(I)$.

① ارسم الخط البياني للتابع $f : x \mapsto x^2$. لاحظ أنَّ f مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على كل مجال.

② عيّن، وفق f، صورة كل من المجالات $[0,2]$ و $[-2,2]$ و $[-2,4]$ و $]-\infty,2]$ و $\mathbb{R}$.

لاحظ أنّه في كل حالة كانت المجموعة $f(I)$ مجالاً.

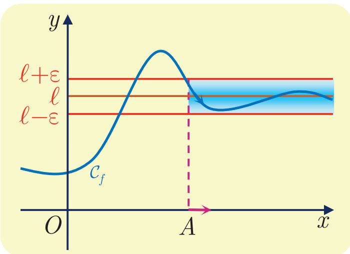
❶ نهاية تابع عند اللانهاية

1.1. النهاية الحقيقية (أو المنتهية) عند $+\infty$ (أو $-\infty$)، والمقارب الأفقي.

ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية الموجبة $+\infty$، هذا يعني أنّ مجموعة تعريف f تحوي مجالاً من الشكل $]a,+\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

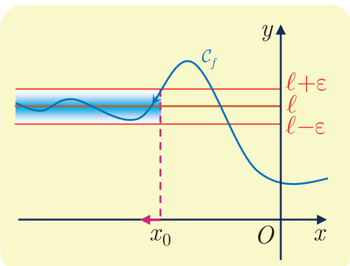
تعريف 1

نقول إنّ نهاية f عند $+\infty$ هي ℓ إذا كانت قيم $f(x)$ تصبح قريبة من القيمة ℓ، أو تتجمّع حول ℓ، عندما تصبح x كبيرة بما يكفي. ونكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.



بصياغة أدق مهما اخترنا العدد $\varepsilon > 0$ فإن قيم $f(x)$ ستقع داخل المجال $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ بدءاً من قيمة معينة A، وذلك كما هو موضّح في الشكل المجاور.

في هذه الحالة نقول إنّ المستقيم الذي معادلته $y = \ell$ مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ للمنحني $\mathcal{C}_f$، لأنّ المنحني يقترب من هذا المستقيم عندما تزداد قيم x.



ونعرّف بالمثل $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ في حالة تابع f معرّف في جوار اللانهاية السالبة $-\infty$. وعندئذ يكون المستقيم الذي معادلته $y = \ell$ مستقيماً مقارباً أفقياً عند $-\infty$ للمنحني $\mathcal{C}_f$.

تذكّر أنّ نهاية كل من التوابع الآتية هي $\ell = 0$ عند $+\infty$:

$x \mapsto \frac{1}{x}$ و $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ و $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (في حالة عدد طبيعي غير معدوم n) و $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

فالمستقيم المنطبق على محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي للخط البياني لكل منها في جوار $+\infty$. وكذلك يكون المستقيم نفسه مستقيماً مُقارباً أفقياً في جوار $-\infty$ لكل من التوابع

$x \mapsto \frac{1}{x}$ و $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ و $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (في حالة عدد طبيعي غير معدوم n).

2.1. النهاية اللانهائية عند $+\infty$ (أو $-\infty$)

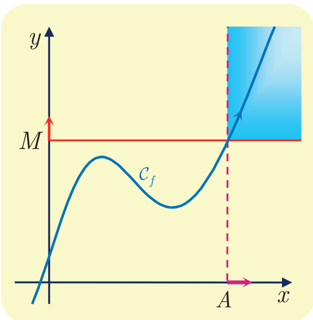
ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية الموجبة $+\infty$، أي أنّ مجموعة تعريف f تحوي مجالاً من الشكل $]a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

تعريف 2

نقول إن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تتجاوز (أي تصبح أكبر) أيّ عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة بما يكفي. ونكتب ذلك $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. يُكافئ هذا التعريفُ القولَ:

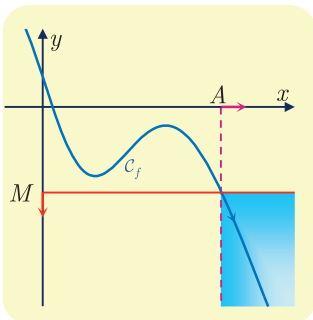
أياً كان العدد الحقيقي M، وُجِد عددٌ حقيقي A يُحقّق:

إذا كان $x > A$ كان $f(x) > M$.

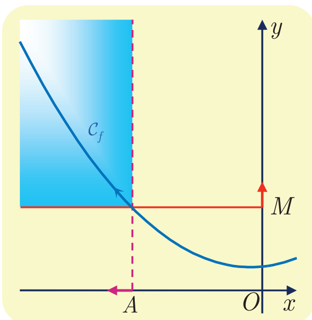


في الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع تتجاوز العدد M عندما تصبح x أكبر من حدٍ معيّن A.

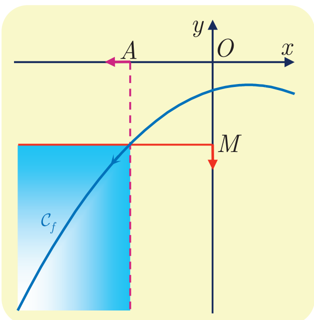
نعرّف بالمثل كلّاً من $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

■ تذكّر أنّ نهاية التوابع الآتية هي $+\infty$ عند $+\infty$.

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

- وأنّ نهاية التوابع الآتية هي $+\infty$ عند $-\infty$.

$x \mapsto x^2$ و $x \mapsto x^n$ (في حالة عدد طبيعي زوجي غير معدوم n)

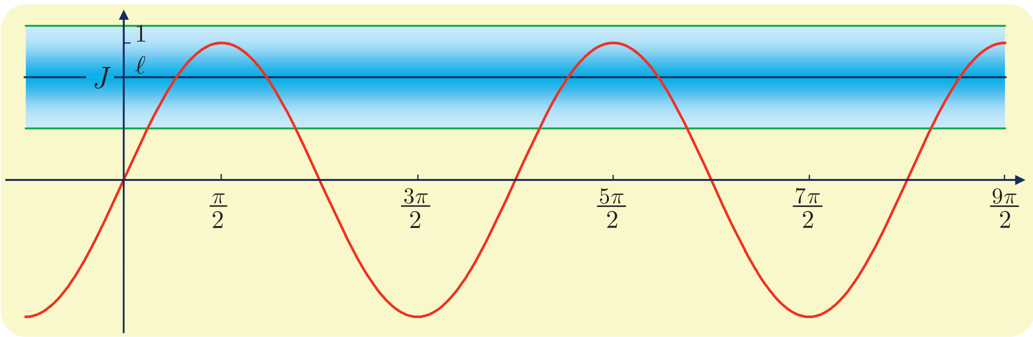
- وأنّ نهاية التوابع الآتية هي $-\infty$ عند $-\infty$.

$x \mapsto x$ و $x \mapsto x^n$ (في حالة عدد طبيعي فردي n)

تكريساً للفهم

لماذا ليس لتابع الجيب sin نهاية عند $+\infty$ ؟

لنفترض على سبيل الجدل أنّ هذه النهاية موجودة، ولنرمز إليها بالرمز ℓ. ولأنَّ $-1 \leq \sin x \leq +1$ أياً كان x من $\mathbb{R}$، فلا بُدّ أن تنتمي النهاية ℓ إلى المجال $I = [-1, +1]$. لنتأمل مجالاً مفتوحاً J مركزه ℓ ونصف قطره $\frac{1}{3}$. لمّا كان طول المجال J يساوي $\frac{2}{3}$، وهو أصغر تماماً من 2 (المسافة بين العددين 1 و -1)، فإنَّ هذا المجال لن يحتوي على العددين 1 و -1 في آن معاً، وإذا افترضنا مثلاً أنّ $-1 \notin J$ كانت قيم $\sin x$ عند جميع الأعداد $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$ خارج المجال J. إذن لا يوجد حدٌّ A يجعل $\sin x \in J$ في حالة $x > A$، وهذا يُناقض الافتراض $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x = \ell$. وعليه ليس للتابع sin نهاية عند $+\infty$.



مثال

استعمال « x في غاية الكبر»

لنتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$ وفق الصيغة $f(x) = \dfrac{4x-5}{2x+3}$. من المعلوم أنَّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. عيّن عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05.

الحل

ينتمي $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05 إذا تحقّقت المتراجحة

$$\left|f(x)-2\right|<\frac{1}{20}$$

ولكن

$$f(x)-2=\frac{4x-5}{2x+3}-2=\frac{-11}{2x+3}$$

إذن تُكافئ المتراجحة السابقة الشرط

$$\frac{11}{|2x+3|}<\frac{1}{20}$$

أو $|2x+3|>220$. وإذْ ينصب اهتمامنا على القيم الكبيرة للمتحول x، يمكننا افتراض أنَّ $x>0$، إذن $2x+3>0$ ومن ثمَّ $2x+3>220$، أو $x>108.5$. ينتج عن ذلك أنّه إذا كان $x>108.5$، انتمى $f(x)$ إلى المجال $I=]2-0.05,2+0.05[$. ويمكن أن نختار A أي عدد أكبر من 108.5 .

مثال الوضع النسبي للخط البياني لتابع ومقاربه الأفقي

في المثال السابق. لمّا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ ، كان المستقيم Δ الذي معادلته $y=2$ مقارباً أفقياً للخط البياني C_f التابع f. ادرس، بالاعتماد على إشارة $f(x)-2$، وضع الخط البياني C_f بالنسبة إلى المستقيم المقارب Δ.

الحل

تؤول دراسة الخط البياني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ. إلى دراسة إشارة المقدار $f(x)-2$ ولقد وجدنا

$$f(x)-2=\frac{-11}{2x+3}$$

ومن الواضح أنَّ $f(x)-2$ موجب على المجال $I_1=\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[$ وسالب على المجال $I_2=\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$. وبهذا يقع C_f فوق Δ في المجال I_1 وتحته في المجال I_2.

تَدرَّبْ

1. احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

① $f(x)=-x^3+x^2-x+1$ ② $f(x)=-3x^4+1$

③ $f(x)=8x^4-12x^3+5x^2-x$ ④ $f(x)=5x^3-3x-1$

⑤ $f(x)=7x^3+2x^2-5x-1$ ⑥ $f(x)=-2x^4+100x^3$

2. احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$، ثمَّ أعطِ عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$.

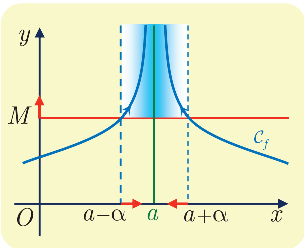
نهاية تابع عند عدد حقيقي

نُذكّر أنّ منطلق أي تابع f مما سندرسه هو مجال غير تافه أو اجتماع عدة مجالات، وأننا نرمز إليه بالرمز D_f. وعند دراسة نهاية هذا التابع عند نقطة a فإمّا أن تنتمي a إلى منطلق هذا التابع أو تكون طرفاً لأحد مجالات هذه المنطلق.

1.2. النهاية اللانهائية عند عدد حقيقي، المقارب الشاقولي

تعريف 3

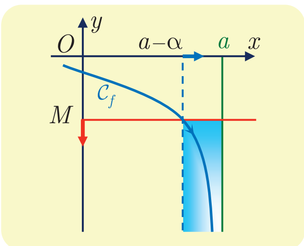
نقول إن نهاية f عند a هي $+\infty$ إذا تجاوزت قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M حين تقترب x بما يكفي من العدد a. ونكتب ذلك $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.



في الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع تتجاوز العدد M عندما يصبح بُعد x عن a أصغر من حد معين α، حيث α عدد حقيقي موجب تماماً.

يكافئ التعريف السابق القولَ مهما كَبُرَ العددُ الحقيقي M فيوجد مجالٌ مفتوح I مركزه a يحقق: « إذا كان x من $I \cap D_f$، كان $f(x) > M$».

نقول إن المستقيم الذي معادلته $x = a$ هو **مستقيم مقارب شاقولي** لمنحني التابع.

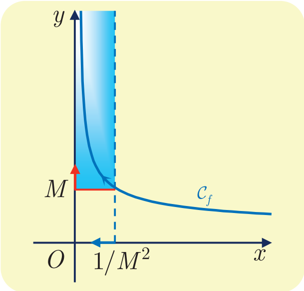


ونعرّف بالمماثلة $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$، إذا صارت قيم $f(x)$ سالبة وأصغر من أي عدد حقيقي M مُعطى سابقاً عندما تكون x قريبة بما يكفي من العدد a. أو مهما صَغُرَ العددُ الحقيقي السالب M فيوجد مجالٌ مفتوح I مركزه a يحقق:

« إذا كان x من $I \cap D_f$، كان $f(x) < M$».

نقول أيضاً في هذه الحالة إن المستقيم الذي معادلته $x = a$ هو **مستقيم مقارب شاقولي** لمنحني التابع.

مثال التابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ معرّف على المجال $D_f =]0,+\infty[$.



والنقطة $a = 0$ لا تنتمي إلى المجال D_f ولكنها أحد طرفي هذا المجال، يمكننا إذن دراسة نهاية التابع عند النقطة $a = 0$.

عندما تقترب الأعداد x من 0 فإن القيم $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ تصبح كبيرة أكثر فأكثر. إذا كان M عدداً حقيقياً موجباً تجاوزت قيمُ التابع العددَ M، مهما كان M كبيراً، عندما تصغر قيمة x بحيث يصبح $0 < x < \dfrac{1}{M^2}$.

نقول في هذه الحالة إن نهاية التابع f عند الصفر تساوي $+\infty$. ونكتب عندئذ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

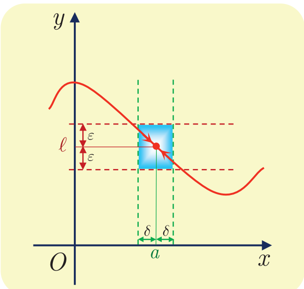
ويكون محور التراتيب الذي معادلته $x = 0$ مقارباً شاقولياً لمنحني التابع.

2.2. النهاية عند a هي عدد حقيقي ℓ

تعريف 4

نقول إن نهاية f عند a هي ℓ إذا تجمّعت القيم $f(x)$ قرب القيمة ℓ عندما تصبح x قريبة بما يكفي من a. ونكتب ذلك $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

صياغة دقيقة:



- مهما كان $\varepsilon > 0$ فإن القيم $f(x)$ ستقع داخل المجال $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ عندما يصبح المتحول x من D_f قريباً من a، أي عندما يصبح بعده عن a أصغر من حدٍّ معين δ (يتعلّق بالعدد ε).
- أو مهما كان $\varepsilon > 0$ فإنّ مجموعة حلول المتراجحة $\left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$ تحوي مجموعة من النمط $D_f \cap]a-\delta,a+\delta[$ حيث $\delta > 0$.
- أو مهما كان $\varepsilon > 0$ فتوجد مجموعة من النمط $D_f \cap]a-\delta,a+\delta[$ حيث $\delta > 0$ تحقق عناصرها المتراجحة $\left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon$.

مثال تعيين مجال

نعلم أنّ العدد 3 نهاية للتابع $f : x \mapsto \sqrt{4x+1}$ عند 2. عيّن مجالاً I مركزه 2 يحقّق الشرط: إذا كان x من المجال I، كان $f(x)$ من المجال $J =]2.99, 3.01[$.

الحل

يكافئ القولُ «$f(x)$ من المجال $]2.99, 3.01[$» القولَ «$2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01$»، إذن $2.99^2 < 4x+1 < 3.01^2$ وأخيراً $\frac{2.99^2-1}{4} < x < \frac{3.01^2-1}{4}$، وهذه المتراجحة تؤول بعد الاختزال إلى $1.985025 < x < 2.015025$. فمثلاً يمكننا أخذ المجال $I =]1.99, 2.01[$ لينتمي $f(x)$ إلى المجال $]2.99, 3.01[$ أياً كان x من I.

وكان بالإمكان أيضاً أن نلاحظ أنّ

$$\sqrt{4x+1} - 3 = \frac{4(x-2)}{3+\sqrt{4x+1}}$$

ومنه، في حالة $x > 0$ لدينا

$$\left|\sqrt{4x+1} - 3\right| = \frac{4\,|x-2|}{3+\sqrt{4x+1}} < \frac{4\,|x-2|}{3+\sqrt{4\times 0+1}} = |x-2|$$

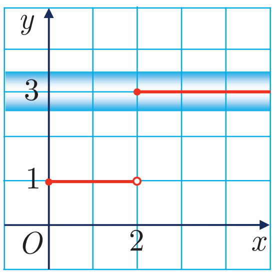
فالشرط $|x-2| < 0.01$ يقتضي $\left|\sqrt{4x+1}-3\right| < 0.01$ أو المتراجحة $x \in]1.99, 2.01[$ تقتضي $2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01$.

تكريساً للفهم

لماذا لا يكون لتابع f، بالضرورة، نهاية عند كل نقطة من D_f ؟

لنتأمل مثلاً الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I = [0,5]$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,2[\\ 3, & x \in [2,5] \end{cases}$$



$f(2) = 3$، ولكن 3 ليس نهاية للتابع f عندما تسعى x إلى 2. في حقيقة الأمر، إذا تأملنا المجال المفتوح $]2.5, 3.5[$ الذي مركزه 3 ونصف قطره 0.5، لوجدنا أنّه لا يحتوي جميع القيم $f(x)$ الموافقة لقيم x التي تنتمي إلى أي مجال مفتوح J مركزه 2. فعندما تقترب x ضمن J بقيم أصغر من 2 (من اليسار) يكون $f(x) = 1$ والقيمة 1 لا تنتمي إلى $]2.5, 3.5[$. هذا إثباتٌ أنّ ليس للتابع f نهاية عند 2.

لماذا نتحدّث عن نهاية من اليمين ونهاية من اليسار ؟

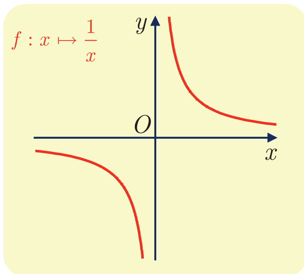
لأننا قد نجد أنفسنا أمام تابعٍ f **ليس** له نهاية عند a (لا حقيقية ولا لانهائية)، ولكن إذا قصرنا مجموعة تعريفه على المجموعة $]a,+\infty[\cap D_f$ وكانت هذه الأخيرة غير خالية، وأصبح للتابع الجديد (الذي يختلف عن السابق فقط في منطلقه)، نهاية ℓ (حقيقية أو لانهائية)، قلنا عندئذ إنَّ التابع **يقبل نهايةً من اليمين عند** a ونعبر عن ذلك بالكتابة :

$$\lim_{x\to a,x>a} f(x)=\ell \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$$

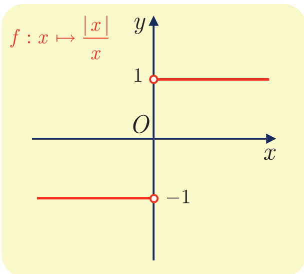
وبالمماثلة، إذا كانت المجموعة $]-\infty,a[\cap D_f$ غير خالية، وإذا قصرنا مجموعة تعريف التابع على المجموعة $]-\infty,a[\cap D_f$، فأصبح للتابع الجديد (الذي يختلف عن السابق فقط في منطلقه)، نهاية ℓ (حقيقية أو لانهائية)، قلنا عندئذ إنَّ التابع **يقبل نهايةً من اليسار عند** a ونعبر عن ذلك بالكتابة :

$$\lim_{x\to a,x<a} f(x)=\ell \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\ell$$

مثال



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=+1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

تَدرَّبْ

❶ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة، ويمكن في حالة عدم وجودالنهاية حساب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند a.

① $a=1$ ، $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ ② $a=2$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

③ $a=-1$ ، $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ ④ $a=-1$ ، $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+1}$

⑤ $a=2$ ، $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ ⑥ $a=-2$ ، $f(x)=3x-5+\dfrac{2}{x+2}$

❷ جِدْ نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1، ثمَّ عيّن عدداً α يحقّق الشرط: إذا كان x عنصراً من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفاً عن 1، كان $f(x)>10^3$.

3 العمليات على النهايات

تفيد المبرهنات الآتية، التي سنعرضها في جداول، في حساب نهايات التوابع $f+g$ و fg و $\frac{f}{g}$ إذا كنا نعرف نهاية f و g. هذه النهايات مأخوذة إما عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند نقطة ما a من $\mathbb{R}$.
في الجداول أدناه ℓ و ℓ' هي أعداد حقيقية. الخانات ذات اللون الأحمر تدل على الحالات التي تتطلب دراسة إضافية لاستنتاج النهاية ونسميها **حالات عدم التعيين**. في بقية الحالات، نقبل النتائج المبينة وهي سهلة التوقع حدسياً، فمثلاً إذا كان $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$ وكان $\lim_{x\to1} g(x)=3$ فإننا ندرك أنّ $\lim_{x\to1}\big(f+g\big)(x)=+\infty$.

1.3. نهاية المجموع

نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

2.3. نهاية الجداء

نهاية f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية fg	$\ell\cdot\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

3.3. نهاية الكسر

1.3.3. نهاية g لا تساوي الصفر

نهاية f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية g	$\ell'\neq0$	$+\infty$ أو $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

2.3.3. نهاية g تساوي الصفر

نهاية f	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	0
نهاية g	0 وقيم g موجبة	0 وقيم g سالبة	0 وقيم g موجبة	0 وقيم g سالبة	0
نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

4.3. صيغ عدم التعيين

عندما نكون بصدد حالة عدم تعيين فإننا لا نستطيع أن نحدد النهاية اعتماداً على الجداول السابق، وتلزم دراسة أكثر تفصيلاً في هذه الحالة. هذه الحالات الأربع هي

$$«\frac{0}{0}» \quad «\frac{\pm\infty}{\pm\infty}» \quad «0\times\pm\infty» \quad «+\infty-\infty»$$

هذه الكتابة هي رموز لتسهيل كتابة حالات عدم التعيين وليس لها معنى رياضي إذ لا يجوز مثلاً أن يكون المقام معدوماً في الكسر الأول.

مثال كيف نستفيد من المبرهنات السابقة؟

احسب نهاية التابع $h : x \mapsto \dfrac{x^2-x}{\sin x}$ عند الصفر.

الحل

ينتج h من قسمة تابعين، إذ إنّ $h=\dfrac{f}{g}$ وقد عرّفنا $f : x \mapsto x^2-x$ و $g : x \mapsto \sin x$. ونلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. إنّ العمليات على النهايات لا تجيب عن مثل هذه الحالة، نُحاول إذن البحث عن صيغة أخرى للتابع h تكون أكثر مُلاءَمة لحساب النهاية، فنكتب

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\times(x-1)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

حيث $v(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ و $u(x)=x-1$، وهنا نعلم من دراستنا السابقة أنّ

$$\lim_{x\to 0} v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} u(x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

إذن نستنتج من العمليات على النهايات أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

مثال إزالة عدم تعيين

احسب نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ عند 0.

الحل

لا تمكن الاستفادة من مبرهنات العمليات على النهايات مباشرة، لأنَّ نهاية كل من البسط والمقام تساوي الصفر. لذلك نكتب

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

ولما كان $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

مثال إزالة عدم تعيين

احسب نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ عند $+\infty$.

الحل

نكتب

$$f(x) = \frac{x\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}$$ (في جوار $+\infty$، $x > 0$).

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

تكريساً للفهم

كيف نجد نهايات توابع كثيرات حدود صحيحة و نهايات توابع كسرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ ؟

- عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$، نهاية تابع كثير الحدود هي نفسها نهاية حدِّه المُسيْطر، أي الذي له أعلى درجة. لإثبات هذه الخاصة نضع الحد الأعلى درجة خارج قوسين.

مثال لدراسة نهاية التابع $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 1$ عند $+\infty$، نرى أنّ الحدَّ المُسيْطر هو x^3، فنكتب

$$f(x) = x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

ولمّا كان

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) = 1$$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- عند $+\infty$ أو $-\infty$، تساوي نهايةُ تابع كسري (كلٌّ من بسطه ومقامه تابع كثير الحدود) نهايةَ خارج قسمة الحدّ المُسيْطر في البسط على الحد المُسيْطر في المقام. لإثبات ذلك نُخرج الحد المسيطر، في كلٍّ من البسط والمقام خارج قوسين ونختصرالنتيجة ثُمَّ نبحث عن النهاية المطلوبة.

مثال لندرس نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{2x+6}{x^2-3x+1}$ عند $-\infty$. إنّ الحدّ المسيْطر في البسط هو $2x$ والحدّ المسيْطر في المقام هو x^2. إذن نكتب في حالة x سالبة وصغيرة بقدر كافٍ:

$$f(x) = \frac{2x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

ولكن

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

إذن نهاية التابع f عند $-\infty$ تساوي 0 أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

تَدرَّبْ

❶ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة، ويمكن عند الحاجة حساب النهاية من اليمين ومن اليسار عند a.

① $a=1,2$ $\quad f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$

② $a=2,-2$ $\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$

③ $a=1$ $\quad f(x)=x^2-2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$

④ $a=1,2$ $\quad f(x)=x+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x-2}$

❷ عيّن فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f، ثمَّ ادرس في كل حالة نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس، عند اللزوم، النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

① $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

② $f(x)=x^2+\sqrt{x}-1$

③ $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$

④ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$

⑤ $f(x)=\dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$

⑥ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

❸ أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$، ثمَّ أوجد عدداً A يحقّق الشرط: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$.

❹ أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ عند 5، ثمَّ أوجد مجالاً I مركزه 5 يحقّق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I، انتمى $f(x)$ إلى المجال $]3.95,4.05[$.

4 مبرهنات المقارنة

1.4. مبرهنة الإحاطة

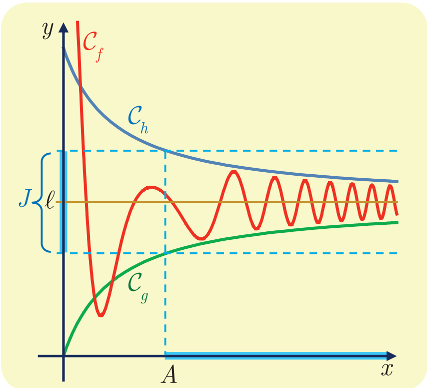
مبرهنة 1

لتكن f و g و h ثلاثة توابع معرفة على مجال من النمط $I =]b,+\infty[$ ولنفترض أنّه عند كل x من I تتحقّق المتراجحة $g(x) \le f(x) \le h(x)$. ثُمّ لنفترض أنّ للتابعين g و h النهاية ℓ ذاتها عند $+\infty$، عندئذ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

الإثبات

استناداً إلى الفرْض، كل مجال مفتوح J مركزه ℓ يحوي جميع قيم $g(x)$ و $h(x)$ الموافقة لقيم x من مجال $]A,+\infty[$. ويمكننا أن نفترض أنّ $A > b$. عندها، لأنّ $g(x) \le f(x) \le h(x)$ على المجال I، وقعت جميع $f(x)$ الموافقة لقيم x من المجال $]A,+\infty[$ في المجال J.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ استناداً إلى التعريف 1.



مثال

احسب نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ عند $+\infty$.

الحل

عند كل x من $]0,+\infty[$ تتحقّق المتراجحة $-1 \le \sin x \le +1$ ومنها نستنتج أنّ

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le +\frac{1}{x}.$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(+\frac{1}{x}\right) = 0$ استنتجنا استناداً إلى المبرهنة 1 أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

مبرهنة 2

ليكن f و g تابعين معرفين على مجال $I =]b,+\infty[$ ولنفترض أنّه عند كل x من I تتحقّق المتراجحة $|f(x) - \ell| \le g(x)$. ثُمّ لنفترض أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$، عندئذ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

الإثبات

تعني المتراجحة $\left|f(x)-\ell\right| \le g(x)$ أنَّ $\ell - g(x) \le f(x) \le \ell + g(x)$. وإذ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ، فإنَّ

$$\lim_{x\to+\infty} (\ell - g(x)) = \lim_{x\to+\infty} (\ell + g(x)) = \ell \ .$$

وعليه، استناداً إلى المبرهنة 1، نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

تبقى نتائج المبرهنتين 1 و 2 صحيحة عندما تؤخذ النهايات عند $-\infty$. إذ يكفي أن نستبدل المجال $\left]-\infty, b\right[$ بالمجال $\left]b, +\infty\right[$. أو تؤخذ النهايات عند عدد a حيث نستبدل بالمجال I مجالاً من مجالاً من النمط $\left]a\ , B\right[$ أو $\left]A,\ a\right[$ أو بمجموعة من النمط $\left]A, B\right[\setminus \{a\} = \left]A, a\right[\cup \left]a, B\right[$.

2.4. مبرهنة المقارنة عند اللانهاية

مبرهنة 3

ليكن f و g تابعين معرفين على مجال $I = \left]b, +\infty\right[$.

① إذا كان $f(x) \ge g(x)$ ، عند كل x من I ، وكان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ، كان

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

② إذا كان $f(x) \le g(x)$ ، عند كل x من I ، وكان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ، كان

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ .$$

الإثبات

استناداً إلى الفرْض، كل مجال من النمط $\left]M, +\infty\right[$ يحوي جميع قيم $g(x)$ ، عندما $x > A$ ، ولأنّنا يمكن أن نأخذ $A > b$ ، فتتحقق المتراجحة $f(x) \ge g(x)$ ، نستنتج أنّ هذا المجال سيحوي أيضاً جميع قيم $f(x)$ ، عندما $x > A$. إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ بناءً على التعريف 2. ويجري بالمثل إثبات الفقرة الثانية من المبرهنة.

مثال

احسب نهاية التابع $f : x \mapsto x + \cos x$ عند $+\infty$.

الحل

مهما كانت x كان $\cos x \ge -1$ ومنه $f(x) = x + \cos x \ge x - 1$ ، ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$ ،

فاستناداً إلى المبرهنة 3 ينتج أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

مثال مع تابع الجزء الصحيح

ادرس نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$ عند $+\infty$. (E هو تابع الجزء الصحيح).

الحل

$E(x)$ هو العدد الصحيح الوحيد الذي يحقق $E(x) \leq x < E(x)+1$ ، أو $x-1 < E(x) \leq x$.

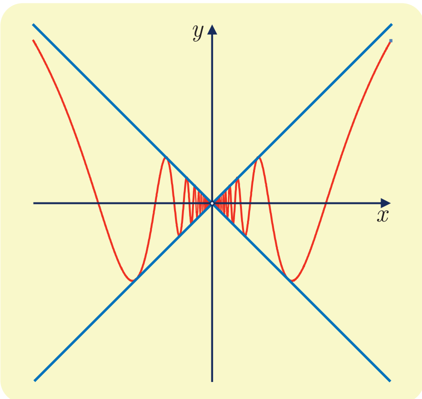
وعند قيم x من المجال $]0,+\infty[$ تتحقّق المتراجحة

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{E(x)}{x} \leq 1$$

ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 1$ ، فإنَّ مبرهنة الإحاطة تفيد باستنتاج أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

مثال في جوار الصفر

ادرس نهاية التابع $f : x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ عند الصفر.



الحل

لاحظ أنّ $\left|f(x)-0\right| = |x| \times \left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$ ، ولأنّ $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$ ،

أياً تكن x من $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ، فإنَّ

$$\left|f(x)-0\right| \leq |x|.$$

ولكن $\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ ، فاستناداً إلى المبرهنة 2 نجد $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

تكريساً للفهم

ما المعلومات الإضافية التي تزودنا بها مبرهنة الإحاطة ؟

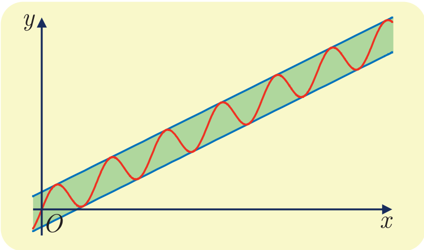
إضافة إلى معرفة نهاية تابع، تفيد هذه المبرهنة في:

- معرفة القيم التقريبية لتابع عند قيم المتحول التي هي في غاية الكبر.
- معرفة سلوك الفرع اللانهائي للخط البياني للتابع.

مثال

ادرس سلوك التابع $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 2\sin x$ في جوار $+\infty$.

الحل



مهما كانت x من $\mathbb{R}$، كان $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه

$$\frac{x}{2} - 2 \leq \frac{x}{2} + 2\sin x \leq \frac{x}{2} + 2$$

إذن

$$\frac{x}{2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 2 .$$

ولكن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2} - 2\right) = +\infty$ ، فاستناداً إلى المبرهنة 3 . نستنتج أنَّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty .$$

إضافة إلى معرفة نهاية f عند $+\infty$، لدينا المعلومتان الآتيتان:

① إنّ $\frac{x}{2}$ هي قيمةٌ تقريبية للعدد $f(x)$ بخطأ يساوي 2 زيادة أو نقصاناً. فمثلاً

$\frac{1000}{2} - 2 \leq f(1000) \leq \frac{1000}{2} + 2$، أي $498 \leq f(10000) \leq 502$.

② الخط البياني للتابع f محددٌ بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $y = \frac{x}{2} - 2$ و $y = \frac{x}{2} + 2$.

تَدَرَّبْ

1 أجب عن الأسئلة الأتية:

① f تابعٌ يحقق $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x + 7}{x - 1}$، أيّاً كان $x > 1$. ما نهاية f عند $+\infty$؟

② أثبت أنَّ $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ أياً يكن $x > -1$. استنتج نهاية $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$. ثُمّ ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$.

③ f تابعٌ يحقق $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x+1}$، أيّاً كان $x \geq 0$. ما نهاية f عند $+\infty$؟

④ f تابعٌ يحقق $f(x) \geq \frac{1}{4}x^2$ ، أيّاً كان $x < 0$. ما نهاية f عند $-\infty$؟

⑤ أثبت أنَّ $x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5$، أيّاً كان العدد الحقيقي x . استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x \mapsto x^2 - 5\sin x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2 ليكن f التابع المعرف على المجال $[0, +\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$.

① تحقق أنَّ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ أياً يكن $x \geq 0$.

② استنتج أنَّ $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ في حالة $x > 0$.

③ ما نهاية f عند $+\infty$؟

5 نهاية تابع مركب

سنقبل دون إثبات صحّة المبرهنة المهمّة الآتية:

مبرهنة 4

نتأمّل ثلاثة توابع f و g و h ونفترض أنّ $f(x) = g \circ h(x) = g(h(x))$. إذا كان

$$\lim_{x \to a} h(x) = b \quad \text{و} \quad \lim_{t \to b} g(t) = c$$

فعندئذ $\lim_{x \to a} f(x) = c$ ، وذلك سواءٌ كانت المقادير a و b و c أعداداً حقيقية منتهية أو مقادير لانهائيّة.

عند استعمال هذه المبرهنة في إيجاد نهاية تابع مركب $f : x \mapsto g(h(x))$ ، عند a ، نبحث **بداية** عن $\lim_{x \to a} h(x) = b$ ، **ثُمَّ** نبحث عن نهاية g عند b .

مثال

① ابحث عن نهاية التابع $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ عند $+\infty$.

② نتأمّل التابع المعطى على المجال $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}}$. ما نهاية هذا التابع عندما تسعى x إلى $\frac{1}{3}$ ؟

الحل

① نضع $X = h(x) = x^2 - x + 1$ ، عندئذ $f(x) = \sqrt{X}$ ، ومعلومٌ لدينا أنّ $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ وأنّ $\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ ، إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

② نضع $X = h(x) = 3x - 1$ على $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ ، عندئذ $X > 0$ و $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$. ومعلوم لدينا أنّ $\lim_{x \to \frac{1}{3}} h(x) = 0$ و $\lim_{X \to 0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{X}}\right) = +\infty$ ، إذن $\lim_{x \to \frac{1}{3}} f(x) = +\infty$.

عندما نكتب $X = h(x)$ و $f(x) = g(X) = (g \circ h)(x)$ ، نقول إننا **غيَّرنا المتحول**. وفي الحقيقة نحن بذلك نكون قد ركّبنا تابعين.

تكريساً للفهم

كيف ننقل دراسة النهاية عند $+\infty$ إلى دراسة النهاية عند الصفر؟

بإجراء تغييرٍ للمتحول وفق $X = \frac{1}{x}$.

مثال لنتأمل، عند $+\infty$، سلوك التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. لا يفيدنا استخدام قواعد العمليات على النهايات، لأنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}\right) = 0$. لذا نجري تغيير المتحول، بوضع $X = h(x) = \frac{1}{x}$، عندئذ يكون $f(x) = \frac{\sin X}{X}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$. إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = 1.$$

يساعد تغيير المتحول وفق $X = \frac{1}{x}$، أيضاً، في:

- الانتقال من دراسة النهاية عند الصفر، من اليمين، إلى دراسة النهاية عند $+\infty$.
- الانتقال من دراسة النهاية عند الصفر، من اليسار، إلى دراسة النهاية عند $-\infty$.
- الانتقال من دراسة النهاية عند $+\infty$ إلى دراسة النهاية عند الصفر ، من اليمين.
- الانتقال من دراسة النهاية عند $-\infty$ إلى دراسة النهاية عند الصفر ، من اليسار.

لماذا يكون العدد المشتق لتابع اشتقاقي f نهايةً عند a للتابع $g : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$؟

تذكّر أنّ القولَ « f اشتقاقي عند a» يُكافئ القولَ « للتابع $h \mapsto t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية حقيقية ℓ عند الصفر». وعندها يكون $\ell = f'(a)$.

لنتأمل التابع المدروس g، ولنلاحظ أنّ $g(x) = t(x-a)$، إذن نحن أمام نهاية تابع مركّب، فإذا وضعنا $h(x) = x - a$، كان

$$g(x) = t(h(x))$$

ولأنّ

$$\lim_{x\to a} h(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0} t(h) = f'(a)$$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = f'(a)$، أي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

تَدرَّبْ

❶ فيما يأتي، نُعطى تابعاً f معرّفاً على مجموعة D ويُطلب حساب نهاية f عند a.

①	$a = 5$	$f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$,	$D =]5,+\infty[$,
②	$a = -\infty$	$f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$,	$D = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$,
③	$a = -\infty$	$f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$,	$D =]-\infty,1[$,
④	$a = 1$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$D =]-1,+1[$,
⑤	$a = 1$	$f(x) = \cos \pi x + \dfrac{1}{(x-1)^2}$,	$D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$,
⑥	$a = +\infty$	$f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$,	$D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$,
⑦	$a = 1, -\infty$	$f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$,	$D =]-\infty,1[$,
⑧	$a = +\infty$	$f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$,	$D =]0,+\infty[$,
⑨	$a = +\infty$	$f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^2$,	$D =]0,+\infty[$,
⑩	$a = +\infty$	$f(x) = \cos^2\left(\pi \times \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$,	$D =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,

❷ ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

② أعدْ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x.

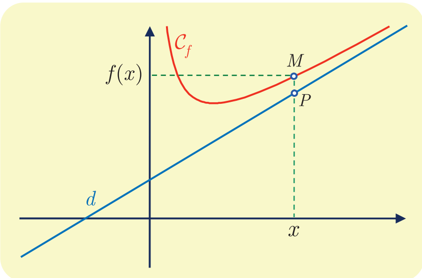
6 المقارب المائل

تعريف 5

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال من النمط $I =]b,+\infty[$. وليكن C_f الخط البياني للتابع f في معلمٍ معطى، وكذلك ليكن Δ المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$. نقول إنَّ المستقيم Δ مقاربٌ للخط البياني C_f في جوار $+\infty$، إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$$

ونعرِّف، بأسلوب مماثل، المقارب المائل في جوار $-\infty$.



هندسياً: ليكن x عدداً من مجموعة تعريف f، ولتكن M نقطة من C_f و P نقطة من Δ تساوي فاصلةُ كل منهما x. عندئذ $PM = |f(x)-(ax+b)|$. واستناداً إلى التعريف كلما كبر العدد x صَغُرتْ المسافة PM، أي اقترب الخط البياني C_f من المستقيم Δ.

إضافة إلى ذلك، تمكِّنُنا معرفة إشارة $f(x)-(ax+b)$ من تعيين وضع الخط البياني C_f بالنسبة إلى مقاربه Δ.

مثال مقارب مائل

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$. وليكن Δ المستقيم الذي معادلته $y = x+1$.

① أثبت أنَّ المستقيم Δ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

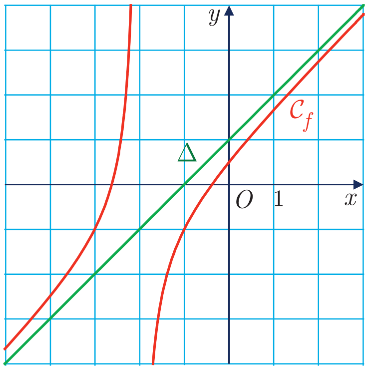
② ادرس وضع C_f بالنسبة إلى Δ.

الحل

① لاحظ أنّ

$$f(x)-(x+1)=\frac{x^2+3x+1-(x^2+3x+2)}{x+2}=\frac{-1}{x+2}.$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+2}=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=$ فالمستقيم Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.



② تُعاكس إشارةُ $f(x)-(x+1)$ إشارةَ $x+2$ إذن:

- على المجال $]-2,+\infty[$ ، $f(x)-(x+1)<0$ فجزء الخط البياني C_f الموافق لقيم $x>-2$ يقع تحت Δ.
- على المجال $]-\infty,-2[$ ، $f(x)-(x+1)>0$ فجزء الخط البياني C_f الموافق لقيم $x<-2$ يقع فوق Δ.

تَدرَّبْ

❶ فيما يأتي بيّن معللاً إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني C_f للتابع f، عند $+\infty$ أو عند $-\infty$. ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f و مقاربه Δ.

① $\Delta : y = 2x+3$ ، $f(x) = 2x+3+\dfrac{10}{x+1}$

② $\Delta : y = -x+1$ ، $f(x) = -x+1-\dfrac{1}{x^2}$

③ $\Delta : y = x$ ، $f(x) = x+\dfrac{\sin x}{x}$

④ $\Delta : y = 3x+7$ ، $f(x) = 3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$

⑤ $\Delta : y = 2x+1$ ، $f(x) = \dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$

⑥ $\Delta : y = x-2$ ، $f(x) = \dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$

⑦ $\Delta : y = -x-4$ ، $f(x) = \dfrac{-x^2-4x+\sin x}{x}$

⑧ $\Delta : y = \dfrac{1}{2}x+1$ ، $f(x) = \dfrac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$

7 الاستمرار

1.7. الاستمرار عند نقطة أو على مجموعة

فيما يأتي f تابعٌ معرّفٌ على مجموعة D_f، مؤلّفة من مجال أو من اجتماع مجالات غير مقتصرة على نقطة واحدة.

تعريف 6

لتكن a نقطة من D_f. نقول إنّ التابعَ f **مستمرٌ عند a**، إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ونقول إنّ التابعَ f **مستمرٌ على مجموعة D** محتواة في D_f، إذا وفقط إذا كان f مستمراً عند كل نقطة من نقاط D.

نستنتج من هذا التعريف، ومن المبرهنات المتعلقة بالعمليات على نهايات التوابع، أنّ مجموع تابعين مستمرين عند نقطة (أو على مجموعة) مستمرٌ أيضاً عندها (أو عليها). وكذلك يكون جداء ضربهما، أو خارج قسمتهما شريطة كونه معرّفاً عند النقطة المدروسة. كما نستنتج من خاصّة نهاية التابع المركّب أنّ مركّب تابعين مستمرّين مستمرٌ أيضاً.

ليس لدراسة استمرار تابع، عند نقطة لا تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع، أيُّ معنىً.

2.7. الاستمرار والاشتقاق

مبرهنة 5

① إذا كان التابع f اشتقاقياً في نقطة a، كان مستمراً في a.

② إذا كان التابع f اشتقاقياً على مجال I، كان مستمراً على I.

الإثبات

لنفترض أنّ التابع f اشتقاقي عند a، إذن للتابع g المعرف بالعلاقة $g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايةٌ منتهية عند a هي $f'(a)$. نستنتج من ذلك أنّه في حالة x من D_f مختلف عن a يكون

$$f(x) - f(a) = (x-a)g(x)$$

ولأنّ $\lim_{x\to a} g(x) = f'(a)$ و $\lim_{x\to a}(x-a) = 0$، استنتجنا أنَّ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

3.7. استمرار التوابع المرجعية

① وجدنا في الصف الثاني الثانوي أن تابع « الجذر التربيعي » أي $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على المجال المفتوح $]0,+\infty[$، فهو مستمر على $]0,+\infty[$. ثمَّ إنَّ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0 = f(0)$ ، أي إنَّ هذا التابع مستمرٌ أيضاً عند الصفر، فهو مستمر على كامل المجال $[0,+\infty[$.

② التوابع « كثيرات الحدود » اشتقاقية على $\mathbb{R}$، فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

③ التوابع « الكسرية » اشتقاقية على مجموعة تعريفها D، فهي مستمرة على D.

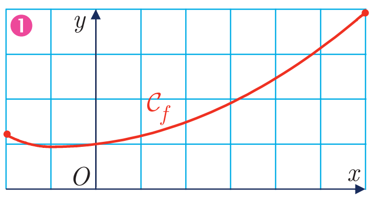
④ التابعان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ اشتقاقيان على $\mathbb{R}$، فهما مستمران على $\mathbb{R}$.

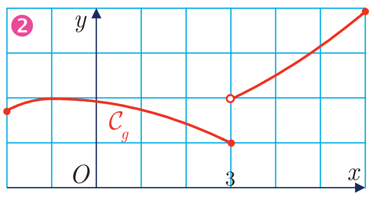
نستنتج مما سبق أنَّ جميع التوابع التي نحصل عليها من التوابع المألوفة سابقة الذكر، بإجراء عمليات جبرية أو عمليات تركيب هي توابع مستمرة على مجموعات تعريفها.

تكريساً للفهم

كيف نتعرف استمرار تابع اعتماداً على خطه البياني ؟

في الشكلين ❶ و ❷ الآتيين، C_f و C_g هما، بالترتيب، الخطّان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I = [-2,6]$.





التابع f مستمر على I لأنَّ خطه البياني مكوّن من «قطعة واحدة» أو لأنَّ C_f يُرسم «دون رفع القلم» عن الورقة. أمّا التابع g فهو غير مستمر على I لأنَّ

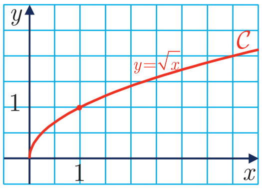
$$\lim_{x\to 3, x<3} g(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 3, x>3} g(x) = 2$$

إذن ليس للتابع g نهاية عند $x = 3$.

لماذا إذا كان تابعٌ مستمراً على مجال I لا يكون بالضرورة اشتقاقياً على I؟

من المعلوم أنَّ تابعاً اشتقاقياً على مجال I، يكون بالضرورة مستمراً على I، لكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً، فقد يكون تابعٌ مستمراً على مجال دون أن يكون اشتقاقياً عليه.

مثال تابعٌ مستمرٌ على مجال وغير اشتقاقي عليه



تابع « الجذر التربيعي » مستمر عند الصفر لكنه غير اشتقاقي عند الصفر، لأنَّ

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$.

يقبل الخط البياني لهذا التابع مماساً « شاقولياً» في المبدأ.

ما هي نتائج الاستمرار المتعلقة بنهايات التوابع المألوفة وتركيبها؟

مثال تركيب توابع مستمرة

التابع $f: x\mapsto\sqrt{x^2+4x+5}$ معرفٌ على $\mathbb{R}$ لأنَّ $x^2+4x+5>0$ على $\mathbb{R}$.وإذا رمزنا بالرمز g إلى التابع $x\mapsto x^2+4x+5$ وبالرمز h إلى تابع الجذر التربيعي $x\mapsto\sqrt{x}$، كان $f(x)=h(g(x))$ على $\mathbb{R}$.

التابع f مثالٌ عن تابعٍ مألوف، لأنّه مركب من تابعين مرجعيين «كثير حدود» و «الجذر التربيعي». التابع g مستمر على $\mathbb{R}$ و h مستمر على مجموعة تعريفه، فالتابع f مستمر على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}$.

بالمثل، التابع

$$f: x\mapsto \sin x+\cos x$$

تابعٌ مستمر على $\mathbb{R}$ لأنّه مجموع تابعين مستمرين على $\mathbb{R}$.

تَدَرَّبْ

1 نتأمّل التابع f المعطى وفق $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$.

① ما مجموعة تعريف f ؟

② أيكون f مستمراً على مجموعة تعريفه؟

③ بيّن أنّ التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دوراً له.

④ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$. أثبت أنّ g اشتقاقي وارسم خطه البياني.

⑤ استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi,2\pi]$. ما مجموعة تعريف f' ؟

التوابع المستمرة وحل المعادلات

1.8. مبرهنة القيمة الوسطى

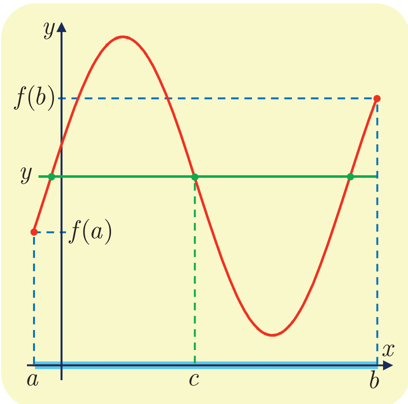
سنقبل دون إثبات المبرهنة المهمة الآتية التي تصف خاصّة أساسيّة من خواص التوابع المستمرة على مجال.

مبرهنة 6

إذا كان f تابعاً مستمراً على مجال $[a,b]$. عندئذٍ أيّاً يكن العدد الحقيقي y المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد –على الأقل– عددٌ حقيقي c محصور بين a و b يحقق $f(c) = y$.

بافتراض $f(a) \leq f(b)$ وبوضع $I = [a,b]$، يمكن عرض هذه المبرهنة بطرائقَ عدة، منها:

- أياً يكن y من المجال $[f(a), f(b)]$، فللمعادلة $f(x) = y$، بالمجهول x، حل واحد على الأقل في المجال I.
- كل عدد حقيقي y من المجال $[f(a), f(b)]$، هو صورة عدد c من المجال I. ويدل الشكل المرافق على أنَّ العدد c ليس وحيداً بالضرورة.



- إذا رمزنا بالرمز $f(I)$ إلى مجموعة الصور $f(x)$ عندما تأخذ x جميع القيم في I، أمكننا التعبير عن هذه المبرهنة بالقول: إنّ المجال $[f(a), f(b)]$ محتوىً في $f(I)$.

ملاحظة

عموماً، نرمز إلى مجموعة صور عناصر المجموعة A وفق تابعٍ f معرف على A بالرمز $f(A)$ ونسميها صورة المجموعة A وفق f.

2.8. حالة تابع مستمر ومطّرد تماماً على مجال مغلق $[a,b]$

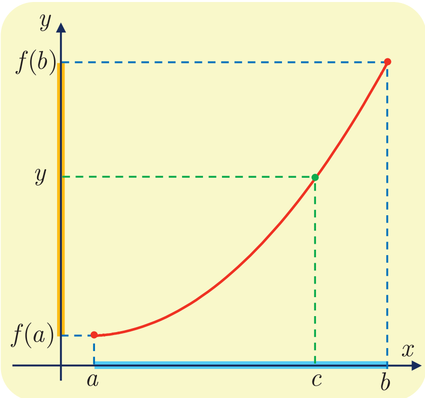
مبرهنة 7

إذا كان f تابعاً مستمراً ومتزايداً تماماً على مجال $I = [a,b]$.

① صورة المجال $[a,b]$ وفق f هو المجال $[f(a), f(b)]$.

② أياً كان y من $[f(a), f(b)]$، فللمعادلة $f(x) = y$، بالمجهول x، حلٌّ واحد وواحد فقط في I.

الإثبات



① لما كان f متزايداً تماماً على I كانَ

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

مهما كانت x من I. إذن كلُّ عدد من $f(I)$، ينتمي إلى المجال $[f(a), f(b)]$.

بالعكس، إذا كان y عنصراً من المجال $[f(a), f(b)]$، كان y صورة عددٍ c، من I (بناءً على المبرهنة 6)، إذن ينتمي y إلى $f(I)$. وهكذا نرى أنّ للمجموعتين $f(I)$ و $[f(a), f(b)]$ العناصر نفسها، أي

$$f(I) = [f(a), f(b)]$$

② إضافة إلى ما سبق، ليس للمعادلة $f(x) = y$ أكثر من حل، لأنَّ لكل عددين مختلفين صورتين مختلفتين. بسبب التزايد التام للتابع f.

تبقى المبرهنة السابقة صحيحة في حالة تابع f متناقص تماماً على أنْ نستبدل المجال $[f(b), f(a)]$ بالمجال $[f(a), f(b)]$.

نتيجة

إذا كان f مستمراً ومطرداً على المجال $I = [a,b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$، كان للمعادلة $f(x) = 0$، بالمجهول x، حلٌ وحلٌّ وحيد في I.

الإثبات

في الحقيقة، تقتضي الفرضيةُ $f(a) \times f(b) < 0$ أنّ « $f(a) \neq 0$ و $f(b) \neq 0$ وأنّ الصفر 0 يقع في المجال الذي طرفيه $f(a)$ و $f(b)$. فهذه إذن حالة خاصة من المبرهنة 7.

إذا كان f مستمراً على مجال **مغلق** $[a,b]$ وكنّا نعلم بطريقة ما أنّه مطّردٌ تماماً على المجال **المفتوح** $]a,b[$ فإنّ استمرار f يقتضي أنّ يكون f في الحقيقة مطرداً تماماً على $[a,b]$.

مثال حل معادلة

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-2x^2-1$.

① أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً c في المجال $[2,3]$.

② اكتب معادلة للمماس T للخط البياني للتابع f في النقطة M التي فاصلتها 2 وعيّن α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل.

③ اكتب معادلة للمستقيم S المار بالنقطة M والنقطة $N(\alpha,f(\alpha))$. ثُمَّ عيّن β فاصلة نقطة تقاطع S مع محور الفواصل.

④ رتّب الأعداد α و β و c تصاعدياً، واستنتج مجالاً يحصر الحلّ c .

لإثبات أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في مجال $[a,b]$، نتيقّن أنَّ f مستمرٌ وأنّه مطرد تماماً على $[a,b]$ وأنَّ $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين.

الحل

① تقودنا دراسة التابع f إلى جدول تغيراته الآتي:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0			$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{59}{27}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

ونلاحظ من الجدول أنّ التابع المستمر f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,3]$، وأنّ $f(2)=-1$ و $f(3)=8$ ، أي $f(2)\times f(3)<0$. إذن للمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد c في المجال $[2,3]$.

يُبين الجدول بوضوح أيضاً أنَّ $f(x)<0$ على المجال $]-\infty,2]$ و $f(x)>0$ على المجال $[3,+\infty[$. إذن، لا تقبل المعادلة $f(x)=0$ سوى الحل $x=c$ في $\mathbb{R}$.

② معادلة المماس T في النقطة $M(2,-1)$ هي : $y=f'(2)(x-2)+f(2)=4x-9$ ، وهو يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\alpha=\frac{9}{4}$.

③ معادلة المستقيم S المار بالنقطة $M(2,-1)$ والنقطة $N(\frac{9}{4},\frac{17}{64})$ ، إذْ $f(\frac{9}{4})=\frac{17}{64}$ ، هي

$$y=\frac{f\left(\frac{9}{4}\right)-f(2)}{\frac{9}{4}-2}(x-2)+f(2)=\frac{81}{16}x-\frac{89}{8}$$

وهو يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\beta=\frac{178}{81}$.

④ لاحظ أنّ $f(\alpha)=\frac{17}{64}>0$ و $f(\beta)=-\frac{24497}{(81)^3}<0$ إذن $\beta<c<\alpha$ ، وعليه $c\in]\beta,\alpha[$.

في الحقيقة، يمكن تعميم المبرهنة 7 إلى حالة مجال لا على التعيين I وتابع f مطّرد عليه، إذ يكون في جميع الأحوال $J = f(I)$ مجالاً، توضّح المبرهنة الآتية الحالات المختلفة للمجالين I و J وذلك تبعاً لجهة اطراد التابع f :

مبرهنة 8

فيما يأتي a و b عنصران من المجموعة $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$، ونفترض أنّ $a < b$. ونفترض أنّ التابع f تابعٌ مستمرٌ ومطّردٌ تماماً على المجال I وأنّ $J = f(I)$.

	f متزايد تماماً	f متناقص تماماً
$I = [a,b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I =]a,b]$	$f(I) =]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$	$f(I) = [f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$
$I = [a,b[$	$f(I) = [f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)]$
$I =]a,b[$	$f(I) =]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$

مثال حل معادلة

تأمّل جدول تغيرات f المعرف والمستمر على $\mathbb{R}$. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$؟

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

الحل

انطلاقاً من جدول التغيرات، سنهتم بتحديد قيم f في كلٍّ من المجالات

$I_1 =]-\infty, -1[$ و $I_2 = [-1, 2]$ و $I_3 =]2, +\infty[$.

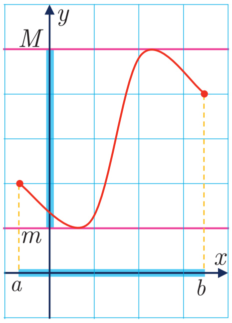
استناداً إلى المبرهنة 8. لمّا كان f مستمراً ومتناقصاً تماماً على كلّ من I_1 و I_3 ومستمراً ومتزايداً تماماً على I_2 استنتجنا أنّ

$J_1 = f(I_1) =]-2, +\infty[$ و $J_2 = f(I_2) = [-2, 4]$ و $J_3 = f(I_3) =]3, 4[$

- f متناقصٌ تماماً على المجال I_1 وينتمي الصفر إلى المجال J_1 ، فيوجد إذن في I_1 عددٌ حقيقي وحيدٌ α يحقق $f(\alpha) = 0$.
- f متزايدٌ تماماً على المجال I_2 وينتمي الصفر إلى المجال J_2، فيوجد إذن في I_2 عددٌ حقيقي وحيدٌ β يحقق $f(\beta) = 0$.
- ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حلولٌ في المجال I_3 ، لأنَّ الصفر لا ينتمي إلى المجال J_3.

نستنتج مما سبق أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$.

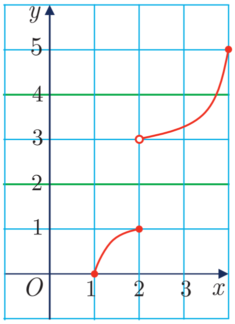
تكريساً للفهم



هل صورة مجال $[a,b]$ وفق تابع مستمرّ هي دوماً مجال $[m,M]$؟

نعم حتى لو لم يكن f مطرداً. عندما $I=[a,b]$، يكون $f(I)$ مجالاً مغلقاً $[m,M]$ وأياً كانت x من I كان $m \le f(x) \le M$. إذن، أياً كانت y من $[m,M]$ وُجِد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ يحقق $f(c)=y$.

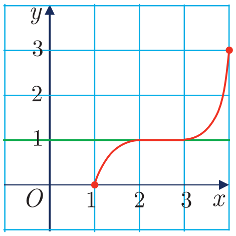
كيف يفسَّر وجود ووحدانية حل المعادلة $f(x)=y$؟



- يتأكد لنا **وجود** الحل عندما يكون التابع **مستمراً** وتقع y بين $f(a)$ و $f(b)$.

  أما في حالة تابع غير مستمر، فإنَّ وجود الحل غير مضمون بالضرورة.

  ففي الشكل المرافق، التابع المرسوم خطه البياني معرّف على $[1,4]$ ولكنه غير مستمر. ونرى أنّ المعادلة $f(x)=4$ قابلة للحل. في حين لا حلول للمعادلة $f(x)=2$.



- ويضمن لنا **الاطراد التام** للتابع **وحدانية** الحل. أما في حالة الاطراد غير التام، فقد نجد للمعادلة أكثر من حل.

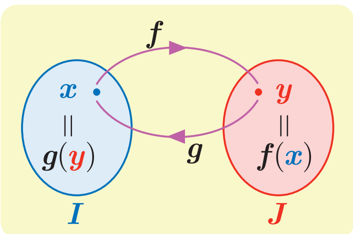
  في الشكل المرافق، التابع مطرد (متزايد)، ولكنه ليس متزايداً تماماً. ونرى أنّ جميع قيم المجال $[2,3]$ حلولٌ للمعادلة $f(x)=1$.

3.8. مفهوم التابع العكسي

لنتأمّل تابعاً f مستمراً ومطّرداً تماماً على مجالٍ ما I، ولنضع $J=f(I)$. المجموعة J، كما نعلم، هي مجال. عندئذ:

- أياً يكن العدد الحقيقي x من I، ينتمي $f(x)$ إلى J.
- أياً يكن العدد الحقيقي y من J، يوجد عددٌ، واحد فقط، x من I يحقق $f(x)=y$.

عندما يتحقق هذان الشرطان، نقول إنَّ **f تقابلٌ من I إلى J**



يمكننا الآن أن نعرّف تابعاً g على J كما يأتي: إذا كان y عدداً من J وكان x الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=y$، عرّفنا $g(y)=x$. نقول إنَّ g، المعرف على $J=f(I)$، هو **التابع العكسي** للتابع f المعرف على I. كما نسميه **التقابل العكسي** للتقابل f، ونرمز إليه بالرمز f^{-1}.

وعليه، أياً كان x من I، كان $g(f(x))=x$. وأياً كان y من J، كان $f(g(y))=y$.

مثلما g هو التابع العكسي للتابع f $(f^{-1}=g)$، فإنَّ f هو التابع العكسي للتابع g $(g^{-1}=f)$. وتُكتب العلاقتان $g(f(x))=x$ و $f(g(y))=y$ بالشكل $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ و $f\big(f^{-1}(y)\big)=y$.

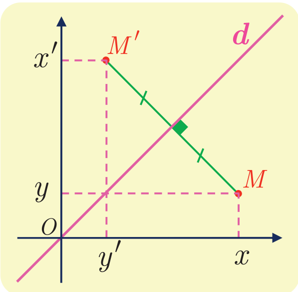
تكريساً للفهم

لماذا يكون الخطّان البيانيان لتقابل وتقابله العكسي متناظرين ؟

ليكن f تقابلاً مستمراً من مجال I إلى مجال J، وليكن g التقابل العكسي للتابع f. عندئذ أياً كانت x من I و أياً كانت y من J، كانت العبارتان $f(x)=y$ و $g(y)=x$ متكافئتين.

في معلم متجانس، نرمز إلى الخطين البيانيين للتابعين f و g على التوالي بالرمزين C_f و C_g، عندئذ

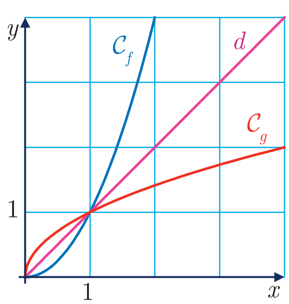
C_f و C_g متناظران بالنسبة إلى المستقيم d الذي معادلته $y=x$.



في الحقيقة، تكون نقطتان $M\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $M'\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$ إذا وفقط إذ كان $x'=y$ و $y'=x$.

فإذا كانت $M\begin{bmatrix}x\\y=f(x)\end{bmatrix}$ نقطة من C_f كانت نظيرتها $M'\begin{bmatrix}y\\x=g(y)\end{bmatrix}$ فهي إذن نقطة من C_g. ونجد بالمثل أنّه إذا كانت M نقطة من C_g، كانت نظيرتها M' نقطة من C_f.

مثال



التابعان $f:x\mapsto x^2$ و $g:x\mapsto\sqrt{x}$ مستمران ومتزايدان تماماً على $I=[0,+\infty[$. وإذا وضعنا $f(x)=y$ وجدنا $g(y)=x$، وبالعكس، إذا كان $g(y)=x$ كان $f(x)=y$. إذن يمثّل كلّ من f و g تقابلاً وتقابله العكسي، وفي معلم متجانس يكون خطاهما البيانيان متناظرين بالنسبة إلى المستقيم d الذي معادلته $y=x$.

تَدرَّبْ

❶ التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$. علّل لماذا يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيد في المجال $]1,2[$؟

❷ التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. علّل لماذا يكون للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاثة وفقط ثلاثة حلول حقيقية؟

❸ ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [-3,2]$ وفق $f(x) = x^2 + 1$.

① ارسم خطه البياني C_f . واحسب $f(I)$.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ في المجال I؟

❹ ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [2,3]$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

① ارسم خطه البياني C_f . واحسب $f(I)$.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = \dfrac{3}{4}$ في المجال I؟

❺ ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2}$.

① احسب $f(-1)$ و $f(-\frac{1}{2})$ و $f(0)$ و $f(1)$.

② استنتج أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$.

❻ ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 1 + 3x - x^3$

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثمَّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f .

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة جذور فقط، ينتمي كل واحد منها إلى واحد من المجالات: $[-2,-1]$، و $[-1,1]$ و $[1,2]$.

❼ نتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - \cos x$.

① احسب $f(0)$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج أنّه يوجد عدد حقيقي α يحقّق $f(\alpha) = 0$.

② اشرح لماذا كل حلّ للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[-1,1]$.

③ استنتج أنّ كل حلّ للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $]0,1[$.

④ برهن أنّ التابع $x \mapsto x - \cos x$ متزايدٌ تماماً على المجال $]0,1[$، واستنتج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0,1[$.

أفكار يجب تَمثُّلُها

- تفيد العمليات على النهايات في إيجاد نهاية ناتج مجموع تابعين أو جداء ضربهما أو خارج قسمتهما، إلاّ أنَّ هذه العمليات قد تقودنا إلى حالات عدم التعيين وهي:

$$+\infty-\infty ، 0\times\pm\infty ، \frac{0}{0} ، \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

- إذا كان تابعٌ f أكبر من تابعٍ ينتهي إلى $+\infty$، انتهى f نفسه إلى $+\infty$.
- وإذا كان تابعٌ f أصغر من تابعٍ ينتهي إلى $-\infty$، انتهى f نفسه إلى $-\infty$.
- إذا كان تابعٌ f محصوراً بين تابعين ينتهي كلٌّ منهما إلى ℓ، انتهى f نفسه إلى ℓ. سواءٌ كان ℓ عدداً حقيقياً أو كان $+\infty$ أو $-\infty$.
- عندما نبحث عن نهاية تابعٍ مركب $x\mapsto g\big(h(x)\big)$، عند a، نبحثُ أولاً عن نهاية h عند a، فإذا كان $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ بحثنا عن نهاية g عند b.
- تسمح المبرهنة المتعلقة بنهاية تابع مركب، **بتغيير المتحول**. فعندما نبحث، على سبيل المثال، عن نهاية التابع

$$f: x\mapsto\left(\frac{4x+1}{x-1}\right)^{5/2}-3\left(\frac{4x+1}{x-1}\right)^{3/2}$$

عند $+\infty$، يمكن أن نضع $u(x)=\sqrt{\dfrac{4x-1}{x+1}}$، فيكون $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=2$ ويكون من ثَمَّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{u\to 2}\left(u^5-3u^3\right)=32-24=8 .$$

- لدراسة استمرار f عند a، نحسب $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ونحسب $f(a)$.
- التوابع الاشتقاقية هي توابع مستمرة.

منعكسات يجب امتلاكُها.

- عند البحث عن نهاية تابع، فكِّرْ في استعمال **التوابع المرجعية**: $x\mapsto x$، $x\mapsto x^2$، $x\mapsto x^3$، $x\mapsto\sqrt{x}$، $x\mapsto\dfrac{1}{x}$، $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$، $x\mapsto\dfrac{1}{x^3}$، $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. ثمَّ اكتب $f(x)$ بدلالة تلك التوابع بشكل ناتج مجموع أو جداء ضرب أو خارج قسمة.
- تذكَّرْ أنَّ نهاية تابع **كثير الحدود** عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية حدِّه المُسيْطر.

- تذكَّرْ أنَّ نهاية تابع **كسري** (بسطه ومقامه كثيرا حدود) عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية خارج قسمة الحدِّ المسيطر في البسط على الحد المسيطر في المقام.
- عندما تقودنا مبرهنات النهايات إلى الحالة $\infty - \infty+$ أو $\frac{\infty}{\infty}$، تذكَّرْ أن تضع الحد الأعلى درجة خارج قوسين.
- عندما لا تفيد مبرهنات النهايات، فكر بالاستفادة من مبرهنة الإحاطة.
- لإثبات أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للخط البياني C_f في جوار $+\infty$، يكفي إثبات أنَّ $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$. (الأمر ذاته عند $-\infty$).
- إنَّ تغيير المتحول وفق $X = \frac{1}{x}$ ينقل حساب النهاية عند الصفر إلى حساب النهاية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$، وبالعكس. مما قد يسهّل حساب النهاية.
- فكِّرْ في أنَّ **الاستمرار والاطراد التام**، لتابعٍ f يقودان إلى معرفة وجود حل المعادلة $f(x) = k$ في مجال من مجموعة تعريف f ووحدانية هذا الحل.

أخطاء يجب تجنّبها.

- استمرار تابع عند a لا يعني بالضرورة قابلية اشتقاقه في a. فمثلاً التابعان $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto |x|$ مستمران عند الصفر، وغير اشتقاقيين عنده.
- لتعيين صورة المجال $[a,b]$ وفق تابعٍ f، لا يكفي حساب $f(a)$ و $f(b)$.

أنشطة

نشاط 1 البحث عن مقاربات مائلة

❶ أمثلة

1. f هو التابع المعرَّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$.

① لماذا يمكن تأكيد أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$ مقاربٌ للخط C_f في جوار $+\infty$؟

② بيِّنْ الوضع النسبي للخطين Δ و C_f.

2. f هو التابع المعرَّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$.

بإعطاء x قيماً كبيرة، تكون قيم $f(x)$ قريبة من $\frac{2x^2}{x} = 2x$. فيمكن إذن أن يكون مستقيمٌ معادلته من النمط $y = 2x + b$ مقارباً للخط البياني C_f. سنسعى إذن إلى كتابة $f(x)$ بالصيغة:

$$f(x) = 2x + b + \frac{c}{x+3}$$

① عين عددين b و c يحققان $f(x) = 2x + b + \frac{c}{x+3}$، أياً كان $x \geq 0$.

② استنتج أنَّ C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ، وبيِّنْ وضعه بالنسبة إلى C_f.

❷ الحالة العامة. نتأمّل تابعاً f تابعٌ يحققُ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Δ مستقيم معادلته $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. نفترض أنَّ

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0 .$$

أثبت أنَّ $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - ax\right)$. **مساعدة:** اكتب

$$f(x) = ax + b + \left(f(x) - (ax+b)\right) .$$

2. وبالعكس، أثبت أنّه إذا كان

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ (a \text{ عدد حقيقي غير معدوم}) \text{ و } \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - ax\right) = b \ (b \text{ عدد حقيقي})$$

كان المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارباً للخط C_f.

❸ تطبيق

ليكن f التابع المعرَّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. بالاستفادة من ❷، أثبت أنَّ C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$.

ملاحظة: يُبحث عن المقارب المائل في جوار $-\infty$ بطريقة مماثلة لما هو في جوار $+\infty$.

نشاط 2 نهايات جديرة بالاهتمام

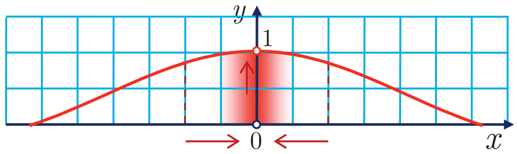
الهدف من هذا النشاط هو حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

❶ عموميات

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالصيغة $f(h)=\dfrac{\sin h}{h}$. في الجدول الآتي نجد بعض الأعداد القريبة من العدد 0 وقيم التابع f المقابلة لها.

h	$\pm2^{0}$	$\pm2^{-1}$	$\pm2^{-2}$	$\pm2^{-3}$	$\pm2^{-4}$	$\pm2^{-5}$	$\pm2^{-6}$	$\cdots\to0$
$f(h)$	0.84147	0.95885	0.98962	0.99740	0.99935	0.99948	0.99996	$\cdots\to1$

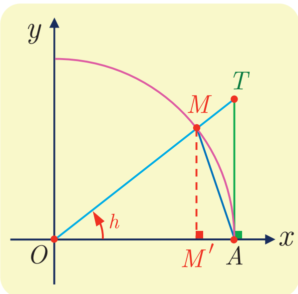
نلاحظ من الجدول أنّه عندما تقترب قيمة h من العدد 0 تقترب قيمة $f(h)$ من العدد 1 وذلك مع كون التابع f غير معرف عند $h=0$. ويوضّح ذلك الشكل الآتي.



إذن من الطبيعي القول إنّ التابع f يسعى إلى العدد 1 عند الصفر: $\lim\limits_{h\to0}f(h)=1$.

❷ حالة h من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

لتكن C الدائرة المثلثاتيّة التي مركزها O. ولتكن M تلك النقطة من C بحيث يكون h التعيينَ الأساسي بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$. h هو أيضاً قياس الزاوية الهندسية $\widehat{AOM}$ بالراديان. وفق هذه الشروط ومع الأخذ بدلالات الشكل المرافق، نعلم أنّ $OA=1$ و $OM'=\cos h$ و $MM'=\sin h$ وطول القوس $\widehat{AM}$ يساوي h.



مساحة المثلث OAM $\leq$ مساحة القطاع الدائري OAM $\leq$ مساحة المثلث OAT $\quad(*)$

1. لماذا مساحة القطاع الدائري OAM تساوي $\dfrac{h}{2}$؟
2. لماذا مساحة المثلث OAM تساوي $\dfrac{1}{2}\sin h$؟
3. لماذا مساحة المثلث OAT تساوي $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin h}{\cos h}$؟
4. استنتج من $(*)$ أنّ $\sin h\leq h\leq\dfrac{\sin h}{\cos h}$.
5. استنتج أنّ $\cos h\leq\dfrac{\sin h}{h}\leq1$ أياً يكن h من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

❸ حالة h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

نضع $h'=-h$، فيكون $0<h'<\frac{\pi}{2}$ واستناداً إلى الدراسة السابقة $\cos h'\leq\dfrac{\sin h'}{h'}\leq 1$.

1. استنتج أنّه أياً كان $h\neq 0$ و h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$، كان $\cos h\leq\dfrac{\sin h}{h}\leq 1$.
2. نهاية التابع المألوف $x\mapsto\cos x$ عند الصفر تساوي 1. استنتج أنَّ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$.

❹ النهاية الثانية المتعلّقة بتابع جيب التمام

يقودنا البحث عن نهاية $\dfrac{\cos h-1}{h^2}$ عند الصفر، بحساب نهاية البسط ونهاية المقام، إلى حالة عدم تعيين، لأن نهاية كل من البسط والمقام تساوي الصفر عند $h=0$.

1. بملاحظة أنَّ $\cos h=1-2\sin^2\dfrac{h}{2}$، أثبت أنَّ

$$\frac{\cos h-1}{h^2}=-\frac{2\sin^2(h/2)}{4\times(h/2)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(h/2)}{(h/2)}\right)^2.$$

2. استنتج أنَّ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h^2}=-\frac{1}{2}$.

❺ تطبيق

لنتأمّل التابع المعرّف في $D=[-\pi,\pi]\backslash\{0\}$ بالصيغة

$$f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}$$

استعمل أسلوب الفقرة ❹ ونتائج هذا النشاط لتحسب $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$.

تمرينات ومسائل

1 ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

① $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$　　② $f(x)=2-\dfrac{4}{x^2}$

③ $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x+3}$　　④ $f(x)=x+\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x+2}$

⑤ $f(x)=\left(2x-3\right)\left(5-\sqrt{x}\right)$　　⑥ $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{x}$

⑦ $f(x)=2x+\sin x$　　⑧ $f(x)=x^2+2x-\dfrac{1}{x}$

⑨ $f(x)=x-2\sqrt{x}+3$　　⑩ $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

2 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$، ثمَّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيِّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

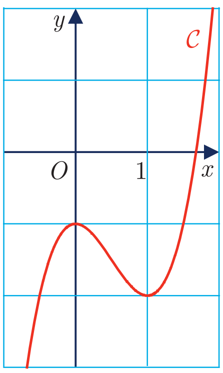
3 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند -1. ثمَّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيِّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

4 f هو التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

① أثبت أنَّ $\dfrac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\dfrac{2x+1}{x-1}$ أياً يكن $x>1$.

② استنتج نهاية f عند $+\infty$.

5 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$ وليكن C خطه البياني المبيّن في الشكل المرافق.



① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثمَّ نظِّم جدولاً بتغيرات f.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذراً واحداً فقط. وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α، أثبت أنَّ α ينتمي إلى المجال $]1.6,1.7[$.

6 تغيير للمتحوّل

نتأمّل التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x}$. ادرس نهاية f عند الصفر.

نحو الحلّ

- نحن أمام صيغة عدم تعيين، لماذا؟
- **بحثاً عن طريق**

الطريقة الأولى: تُذكِرنا عبارة $f(x)$ بالتابع $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ الذي تساوي نهايته 1 عند الصفر. وهذا يقودنا إلى التفكير بتغييرٍ للمتحول. أجرِ التغيير $X = 3x$ ، ثمَّ أنجز الحل.

الطريقة الثانية: تمكن كتابة $f(x)$ بالصيغة $f(x) = \dfrac{\sin(3x) - \sin 0}{x - 0}$ ، وهذه العبارة هي معدل تغير التابع $x \mapsto \sin 3x$. استفد من ذلك لإيجاد نهاية f عند الصفر.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 التابع $x \mapsto \sqrt{ax^2 + bx + c}$

ليكن f التابع المعرفُ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$. وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني.

المطلوب هو إثبات أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$، وكذلك الأمر في جوار $-\infty$.

نحو الحلّ

- فهم السؤال

- الحد المسيطر في كثير الحدود $2x^2 + x + 1$ هو $2x^2$، فيمكن أن نخمِّن أنّه، عند القيم الكبيرة للمتحول x، يكون $f(x)$ من مرتبة $\sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x$.

- **بحثاً عن طريق**

① أثبت أنَّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}\,x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

② استنتج قيمة $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (\sqrt{2}\,x + \frac{\sqrt{2}}{4})\right)$.

③ أعد الدراسة السابقة في جوار $-\infty$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 كثير الحدود ذي الدرجة الفردية

من المعلوم أنَّ كثيرَ حدودٍ P من الدرجة n يكتب بالصيغة

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ حيث $a_n \neq 0$.

نهدف إلى إثبات أنَّه إذا كان n عدداً فرديّاً، قبِلَ P جذراً حقيقياً على الأقل.

نحو الحلّ

فهم السؤال. يتعلق الأمر بإثبات أنَّ للمعادلة $P(x) = 0$ حلاً على الأقل في حالة n فردي. يتبادر إلى الذهن أن ندرس تغيرات التابع $x \mapsto P(x)$. ولأنَّ التابع P مستمرٌ، يمكن التفكير في إيجاد عددين a و b يحققان $P(a) \times P(b) < 0$. أيَّةُ مبرهنة تفيد في تحقيق ما خطر لنا.

بحثاً عن طريق. لنفترض أوّلاً أنّ $a_n > 0$.

- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)$ مستفيداً من كون العدد n فردياً.
- استنتج أنّه يوجد عددان حقيقيان a و b يحققان $P(a) > 0$ و $P(b) < 0$.
- استنتج وجود عدد حقيقي c يحقق $P(c) = 0$.
- ادرس بالمثل حالة $a_n < 0$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

9 ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a، وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار.

① $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ $\quad a = -\infty, 1, 5, +\infty$

② $f(x) = \dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ $\quad a = -\infty, -2, 2, +\infty$

③ $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $\quad a = -\infty, -2, 1, +\infty$

④ $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9}$ $\quad a = -\infty, -3, 3, +\infty$

⑤ $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$ $\quad a = -\infty, 1, +\infty$

⑥ $f(x) = 2x + \sin^2 x$ $\quad a = -\infty, +\infty$

⑦ $f(x) = x^3(2+\cos x)$ $\quad a = -\infty, +\infty$

⑧ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ $\quad a = 1, +\infty$

10 ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$.

① أثبت أنَّ g محدود.

② استنتج كلاً من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{3+2\sin x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$.

11 ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

① عيّن $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف f .

② أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}$ ، أياً تكن x من $\mathcal{D}_f$.

③ ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف $\mathcal{D}_f$.

12 ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

① ادرس نهاية f في جوار 1.

② أوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ ، أياً تكن x من $I\setminus\{1\}$.

13 ادرس في كل حالة نهاية التابع f ، عند a .

① $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ ، $a=+\infty$

② $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ ، $a=-\infty$

③ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ، $a=3$

④ $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ ، $a=0$

⑤ $f(x)=\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ ، $a=1,+\infty$

⑥ $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، $a=-1,+\infty$

14 ادرس في كل حالة نهاية التابع f .

① $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ، $a=0,+\infty$

② $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ ، $a=0$

③ $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ ، $a=0$

④ $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ ، $a=2$

15 ليكن g التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}g(g(x))$.

② أعدْ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x .

16 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-d}$. جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أنّ الخواص الآتية محققة:

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
- تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط $\mathcal{C}$.

17 فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه $\mathcal{D}_f$. بيِّنْ، في كل حالة، إنَّ كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط $\mathcal{C}$.

① $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ ② $f(x) = -x + 3 + \dfrac{2}{x^2+1}$

③ $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$ ④ $f(x) = 1 - x + \dfrac{3x}{x^2+2}$

⑤ $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-4}{x}$ ⑥ $f(x) = \dfrac{x^2+2+\sin x}{x}$

⑦ $f(x) = \dfrac{x^2+6x+1}{x^2-1}$ ⑧ $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$

⑨ $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$ ⑩ $f(x) = \dfrac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$

مساعدة: في ⑧ و ⑨ و ⑩ فكّر باستعمال القسمة الإقليدية لكثيرات الحدود.

18 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$.

① .a احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x+1)\big)$.

.b استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

.c ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

② .a احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

.b أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ وأنَّ نهاية $x \mapsto f(x) - ax$ عند $-\infty$ عددٌ حقيقي b.

.c استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

19 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

② .a اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية، (متمّماً إلى مربّع كامل).

.b استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$. اكتب معادلته.

20 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$. اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

② أثبت أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

21 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{\left|4x^2-1\right|}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② a.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-3x\big)$.

b.احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big)$.

③ a.استنتج أنَّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يُطلب إيجاد معادلتيهما.

b.ادرس الوضع النسبي للخط C وكلٍ من المقاربين Δ_1 و Δ_2 .

22 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}$.

① ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② a.اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني.

b.ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

c.استنتج أنَّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب إيجاد معادلتيهما.

③ أثبت أنَّ الخط C يقع فوق كلٍّ من هذين المقاربين.

23 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

① a. أثبت أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x+1$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

b. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

② أصحيحٌ أنَّ المستقيم Δ' الذي معادلته $y = x-1$ مقاربٌ للخط C في جوار $-\infty$ ؟

24 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3+x+1$. احسب $f(-1)$ و $f(0)$ ثمَّ أثبت وجود عدد حقيقي وحيد c من المجال $\left]-1{,}0\right[$ يحقق $f(c) = 0$.

25 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$.

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على المجال $\left]-1{,}-\frac{3}{2}\right[$.

② نظِّمْ جدولاً بتغيرات f على المجال $\left]-1{,}-\frac{3}{2}\right[$.

③ أوجد $f\left(\left]-1{,}-\frac{3}{2}\right[\right)$ وأثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = 10$ حلّاً وحيداً في المجال $\left]-1{,}-\frac{3}{2}\right[$.

26 ليكن f التابع المعرف على $I = [0,3]$ وفق $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

② استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$.

③ عيّن $f([0,3[)$.

27 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$. أثبت أنَّ f مستمر على $\mathbb{R}$ وعيّن $f(\mathbb{R})$.

28 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

① احسب نهاية f عند الصفر.

② هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$؟ علل إجابتك.

29 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x} & : \quad x \neq 0 \\ m & : \quad x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$؟

30 يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = x - E(x)$.

① ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$.

② هل f مستمر على المجال $[0,2]$؟

31 يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = E(x) + \big(x - E(x)\big)^2$.

① اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

② أثبت أنَّ f مستمر على المجال $[0,2]$؟

32 في معلمٍ متجانس، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,\pi]$ وفق $f(x)=\sin x$.
و d هو المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$.

① a. ارسم كلّاً من C و d .

b. يبدو أنَّ للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$. استفد من الرسم لإيجاد مجال صغير ينتمي إليه α .

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $[0,\pi]$ وفق $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$.

a. احسب $g'(x)$ وأثبت أنَّ $g'(x)$ ينعدم عند $x=\frac{\pi}{3}$.

b. نظِّمْ جدولاً بتغيرات g .

③ استنتج مما سبق أنَّ المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تقبل حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$.

33 ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق $f(x)\in I$ ، أياً يكن x من I .
نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $k(x)=f(x)-x$. بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$.

34 مجموعة توابع مستمرة

ليكن m عدداً حقيقياً، وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$$

① a. أثبت أنَّ الخطين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B . أوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

b. استنتج أنَّ جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B .

② أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

③ استنتج مما سبق أنَّ للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثةَ حلول متمايزة في $\mathbb{R}$، أياً يكن العدد m .

35 ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق الشرطين:

- أياً كان x من I كان $f(x)$ من I .
- وأياً كان x من $]0,1[$ كان $f'(x)<1$.

أثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=x$ حلّاً وحيداً في I .

36 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. وليكن C خطه البياني في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① أثبت أنَّ للخط C محور تناظر.

② ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

③ أثبت أنَّ $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ ، أياً يكن x من $\mathbb{R}$. استنتج أنَّ C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$. عيِّن الوضع النسبي للخط C ومقاربه d .

④ ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=-f(x)$ ، وليكن $\mathcal{H}=C\cup C'$. أثبت أنَّ معادلة $\mathcal{H}$ هي $y^2-x^2=1$.

⑤ نعتمد معلماً جديداً $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ و $\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$. لتكن M نقطة إحداثيتاها (x,y) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ وإحداثيتاها (X,Y) في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. أوجد x و y بدلالة X و Y . ارسم الخط $\mathcal{H}$ في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

37 تابع القيمة المطلقة: تغيرات. حل معادلة

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$ وفق:

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

① a. اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمةً مطلقة.

b. ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f . ثمَّ أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على كلٍّ من مجالات D_f .

② ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

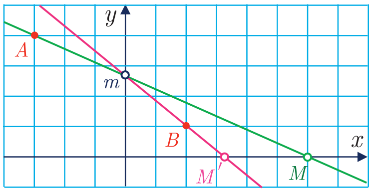
③ a. تحقّق من أنَّ المستقيمين اللذين معادلتاهما $y=x+1$ و $y=-x-1$ هما، بالترتيب، مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$. ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين.

b. أوجد معادلةً للمماس T للخط البياني C في النقطة A منه علماً أنَّ فاصلة A تساوي الصفر.

c. ارسم T ومقاربي C ثمَّ ارسم C .

④ أثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً α في المجال $]-1,1[$ وأوجد مجالاً طوله 10^{-1} تنتمي إليه α .

38 في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، لدينا النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$. نقرن بالنقطة M النقطةَ M' التي نعرفها كما يلي:



- يقطعُ المستقيمُ (AM) المحور $(O;\vec{j})$ في m.
- يقطعُ المستقيمُ (Bm) المحور $(O;\vec{i})$ في M'.

نرمزُ إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$.

① بدون حساب، خمِّنْ نهاية f عند $+\infty$.

② أثبت أنَّ $f(x)=\dfrac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، ثمَّ استنتج نهاية f عند $+\infty$.

③ a.ادرس نهاية f عند $-\infty$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

b.ادرس نهاية f عند $x=1$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

④ عندما $x=-3$، يكون المستقيم (AM) موازياً $(O,\vec{j})$ وتكون m « في اللانهاية ». يمكن أنْ نقول في هذه الحالة أنَّ (Bm) يوازي $(O,\vec{j})$ وأنَّ M' تقع في $(2,0)$. نعرِّف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، و $g(-3)=2$. لماذا يكون g مستمراً عند -3؟

ملاحظة: نقول في هكذا حالة إننا مدَّدنا استمرار g ليشمل $x=-3$.