الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية

الثالث الثانوي

الجزء الأول

الرياضيات

كتاب الطالب

2018-2019 م
1439 -1440 هـ

الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيَة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

الرّياضيّات

الجزء الأول

الصّف الثّالث الثّانوي العلمي

العام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩ م / ١٤٣٩ - ١٤٤٠ هـ

حقوقُ التّأليفِ والنَّشرِ محفوظةٌ

لوزارةِ التَّربيةِ في الجُمهوريَّةِ العربيَّةِ السّوريَّة

حقوقُ الطّبعِ والتّوزيعِ محفوظةٌ

للمؤسّسةِ العامّةِ للطّباعةِ

طُبِعَ أوّلَ مرّةٍ للعامِ الدّراسيِّ ٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

تأليف

فئة من المختصّين

خطة توزيع منهاج الرياضيات

يخصص أربع حصص أسبوعياً لكتاب الرياضيات الجزء الأول

الشهر	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول			عموميات عن المتتاليات المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية	البرهان بالتدريج تمرينات ومسائل لنتعلم البحث
تشرين أول	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام نهاية تابع عند اللانهاية	نهاية تابع عند عدد حقيقي العمليات على النهايات	مبرهنات المقارنة نهاية تابع مركب المقارب المائل	الاستمرار التوابع المستمرة وحل المعادلات –أنشطة
تشرين ثاني	أنشطة تمرينات ومسائل الاشتقاق(تعاريف)	مشتقات بعض التوابع المألوفة تطبيقات الاشتقاق	تطبيقات الاشتقاق اشتقاق تابع مركب	مشتقات من مراتب عليا أنشطة
كانون أول	مسائل: لنتعلم البحث مسائل: قدماً إلى لأمام	نهاية متتالية مبرهنات تخص النهايات	تقارب المتتاليات المطردة متتاليات متجاورة	أنشطة تمرينات ومسائل: لنتعلم البحث
كانون ثاني	امتحان الفصل الأول و العطلة الانتصافية			
شباط	مسائل: قدماً إلى الأمام	التابع اللوغاريتمي النيبري لوغاريتم جداء ضرب	دراسة التابع اللوغاريتمي	اشتقاق تابع مركب نهايات تتعلق بالتابع اللوغاريتمي
آذار	أنشطة تمرينات مسائل	البحث وقدماً إلى الأمام تعريف التابع الأسي النيبري	خواص التابع الأسي دراسة التابع الأسي	نهايات تتعلق بالتابع الأسي دراسة التابع $x \mapsto a^x$
نيسان	أنشطة	التوابع الأصلية قواعد حساب التوابع الأصلية	التكامل المحدّد وخواصه	التكامل المحدّد وحساب المساحة
أيار	أنشطة ، تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل		

مُقدّمة

يأتي منهاجُ الرياضياتِ في الصّف الثّالث الثّانوي العلمي مُتمماً لمنهاجِ الرياضياتِ في الصّفين الأوّل والثاني الثّانويين الذي جرى إعدادُه في المركز الوطنيّ لتطويرِ المناهجِ التربوية وفق المعايير الوطنية، مُعتمداً في بنائِه على التّراكم الحلزونيّ للمفاهيم والمهارات وتكامُلِها، إذْ تتطور المفاهيم والمهارات في بناءٍ مترابطٍ، فتُقرَن المعارفُ بالحياة العمليَّة وتُقدَّمُ المادَّةُ العلميةُ بطرائق سهلة ومتنوعة ومدعّمة بمواقفَ حياتيّة وتتكاملُ مع الموادِّ الدّراسيّة الأخرى.

يشتملُ كتاب الرياضيات الجزء الأول على سبع وحداتٍ متضمنة تسعة وعشرين درساً وينتهي كل درس بعددٍ من التدريبات تهدف إلى تقويم الطالب وتمكنه من المعارف والمهارات التي تعلّمها في الدرس، وليتابع بقية دروس الوحدة ، ونجدُ في كلِّ وحدةٍ عدداً من الفقراتِ المميَّزةِ التي نُجْمِلُها فيما يأتي:

- المقدمة: وهي مقدِّمة تحفيزيّة تهدف إلى تنمية اتجاهاتٍ إيجابية نحو الرياضيات واحترام ما قدمّه العلماء من إسهامات في ميادين العلوم المختلفة.
- انطلاقةٌ نشطةٌ: تهدفُ إلى تعزيزِ المهارات الأساسية التي يحتاجها المتعلّم مزودة بأسئلة وشروحات وتوضيحات كمدخل للوحدة والإضاءة على مفاهيمها.
- أمثلةٌ: تتضمن مختلف الفقرات الموجودة في الدرس وهي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وبأسلوب منهجي علمي لتكوّن نماذجَ يجبُ اتباعها عند حلِّ الأنشطة والتدريبات والمسائل.
- تكريساً للفهم : تطرح سؤالاً هاماً للمناقشة يتعلق بفكرة الدرس الأساسية في مادة التعلم والإجابة عنه بطرائق متعددة موضحة بالأمثلة المناسبة لتكريس الفهم عند المتعلم حيث تتم إعادة طرح أفكار الدرس بأساليب مختلفة.
- أفكار يجب تمثلها: وهي فقرةٌ يجري فيها التنويهُ إلى قضايا ومفاهيمَ أساسيّة في الوحدة حيث تُعادُ صياغتُها بأسلوبٍ مختصرٍ ومبسَّطٍ.

- منعكساتٌ يجبُ امتلاكها: وهي فقرةٌ تتضمن إرشاداتٍ للمتعلم على كيفية التفكير قبل البدء بالإجابة عن سؤال، وما هو المنعكس السريع الذي يجب أن يتبادر إلى ذهنه وكيفية استعمال القضايا والمفاهيمَ الأساسيّة في أمثلة توضيحيّة.

- أخطاءٌ يجبُ تجنُّبَها: حيث جرت الإشارة إلى بعض الأخطاء الشائعة التي يقع فيها الطلاب عادة، أو المفاهيم التي يستعملها الطلاب في غير مكانها، أو بأسلوب منقوص.

- أنشّطة: في نهاية كل وحدة مجموعة من التمرينات والتطبيقات الحياتية صيغت على شكل أنشطة تفاعلية.

- لنتعلمِ البحثَ: وهي فقرة تُدَرِّب المتعلّمَ على طرائق حلِّ المشكلات وتشجّعُ التعلُّم الذاتيَّ عن طريق تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي وجَعْلِه يطرح على نفسه الأسئلة الصحيحة بهدف الوصول إلى حلول المسائل ثُمّ صياغة هذه الحلول بلغة سليمة.
- قُدُماً إلى الأمامِ: وهي تمارين ومسائل متنوعة ومتدرجة في صعوبتها تشمل في بعض الأحيان مواقف حياتية تُتيحُ للمُتَعلِّم فُرَص تعلم كثيرة وتعزز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد لديه.

- وهكذا كانت الوحدة الأولى (تذكرة بالمتتاليات الإثبات بالتدريج أو الاستقراء الرياضي) وهي مراجعة ومتمِّمة لما تعلمه الطالب في بحث المتتاليات في منهاج الثاني الثانوي.

- الوحدة الثانية (التوابع: النهايات والاستمرار) متضمنة عدداً من الدروس الأساسية لتكون تمهيداً لوحدة نهاية متتالية ودراسة التوابع، بدءاً من نهاية تابع والعمليات على النهايات ومن ثم المقاربات والتوابع المستمرة وحل المعادلات والذي يجد الطلاب بوجه عام صعوبة في استيعابه عند عرضه للمرة الأولى.

- ثُمّ تأتي الوحدة الثالثة (الاشتقاق) لتضم مراجعة لما تعلمه الطالب في الثاني الثانوي واشتقاق تابع مركب ومشتقات من مراتب عليا، وعدداً من تطبيقات الاشتقاق في دراسة اطراد التوابع وفي تعيين القيم الحديّة محلياً والتمهيد لدراسة التوابع.

- وندرس في الوحدة الرابعة مفهوم (نهاية متتالية) ليستفيد الطالب من الخبرات السابقة لتطبيق ما تعلّمه في دراسة تقارب المتتاليات المطردة والتعرف على المتتاليات المتجاورة.

- ونتعرف في الوحدةِ الخامسةِ (التابع اللوغاريتمي النيبري) وفي الوحدة السادسة (التابع الأسي)، الخواص والمشتقات ونهايات تتعلق بكل منهما، ودراسة توابع تشتمل على توابع أسية ولوغاريتمية.
- واخيراً نتعرف أداة رياضياتية فائقة الأهمية تفيد في العديد من المجالات التطبيقية والبحتة وفي الميكانيك وهي (التكامل والتوابع الأصلية).

وهنا نريد التأكيد على أنّ تحقيق الأهداف المرجوة من الكتاب في تنمية مهارات التفكير المختلفة وخاصة مهارات التفكير الناقد والتفكير الإبداعي، يتطلّب من المدرّس أن يؤدي دور المُيسر والموجّه للعملية التعلُّمية، فيطرح التساؤلات المُناسبة، ويختار المناسب من الأمثلة، ويرتب الأفكار ترتيباً منطقيّاً، ويوجه ممهداً الطريق لحل المسائل، ويصوغ الحلول صياغة لغوية سليمة على السبّورة.

وفي النهاية، نريد أن نتوجّه بالشكر إلى عدد من الزملاء الذين قدموا إلينا أشكالاً مختلفة من المساعدة، فمنهم من أبدى ملاحظاته على المسودات الأولى من الوحدات، ومنهم من حلّ المسائل أو تحقّق من صحتها، ومنهم من ساهم في إعادة صياغة بعض الفقرات.

وأخيراً نأمل من زملائنا الإسهام معنا في إنجاح هذه التجربة الجديدة وتزويدنا بمقترحاتهم البنّاءة المتعلقة بهذا الكتاب متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار.

المُعدّون

المحتوى

① تذكرة بالمتتاليات، والإثبات بالتدريج 13

1. عموميات عن المتتاليات 14
2. البرهان بالتدريج أو بالاستقراء الرياضي 19

تمرينات ومسائل 22

② التوابع: النهايات والاستمرار 27

1. نهاية تابع عند اللانهاية 31
2. نهاية تابع عند عدد حقيقي 35
3. العمليات على النهايات 39
4. مبرهنات المقارنة 43
5. نهاية تابع مركب 47
6. المقارب المائل 50
7. الاستمرار 52
8. التوابع المستمرة وحل المعادلات 55

أنشطة 64

تمرينات ومسائل 67

③ التوابع: الاشتقاق 77

1. تعاريف (تذكرة) 79
2. مشتقات بعض التوابع المألوفة (تذكرة) 82
3. تطبيقات الاشتقاق 85
4. اشتقاق تابع مركّب 90
5. المشتقات من مراتب عليا 95

أنشطة 98

تمرينات ومسائل 104

④ نهاية متتالية 113

1. نهاية متتالية : تذكرة 115
2. مبرهنات تخص النهايات 120
3. تقارب المتتاليات المطردة 124
4. متتاليات متجاورة 129

أنشطة 135

تمرينات ومسائل 137

⑤ التابع اللوغاريتمي النيبري 147

1. التابع اللوغاريتمي النيبري 151
2. لوغاريتم جداء ضرب 155
3. دراسة التابع اللوغاريتمي $\ln$ 159
4. مشتق التابع المركب $\ln \circ u$ 163
5. نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي 163

أنشطة 168

تمرينات ومسائل 171

⑥ التابع الأسي 181

1. التابع الأسي النيبري 183
2. خواص التابع الأسي 187
3. دراسة التابع الأسي 191
4. نهايات مهمة تتعلق بالتابع الأسي 195
5. دراسة توابع من النمط $(a > 0)\ x \mapsto a^x$ 200
6. معادلات تفاضلية بسيطة 204

أنشطة 208

تمرينات ومسائل 209

⑦ التكامل والتوابع الأصلية 217

1. التوابع الأصلية 219
2. بعض قواعد حساب التوابع الاصلية 223
3. التكامل المحدّد وخواصه 228
4. التكامل المحدّد وحساب المساحة 237

أنشطة 242

تمرينات ومسائل 244

مسرد المصطلحات العلمية 251

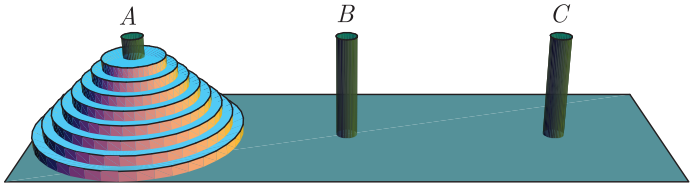
1

تذكرة بالمتتاليات
الإثبات بالتدريج

1 عموميات عن المتتاليات

2 الإثبات بالتدريج أو الاستقراء الرياضي

لنتأمّل أحجية بسيطة تسمّى برج هانوي، وهي أحجية اخترعها عام 1883 عالم الرياضيّات Eduard Lucas. نُعطى برجاً من ثمانية أقراص مثقوبة المراكز، مكدّسٌ بعضها فوق بعضٍ تِبعاً لتناقص قياساتها، أي بحيث يكون الصغير فوق الكبير، ويخترقها جميعاً واحدٌ من ثلاثة أعمدة كما يبيّن الشكل :



الهدف هو نقل كامل البرج إلى أحد العمودين الآخرين مع الالتزام بالشرطَيْن الآتيين :

- يُسمح بنقل قرصٍ واحدٍ فقط في النقلة الواحدة.
- لا يسمح بوضع قرصٍ فوق قرصٍ أصغر منه.

عرضَ Lucas لُعبته، وذكر أسطورة تحكي قصة برج أكبر، يسمّى برج براهما، مكوَّنٍ من أربعة وستين قرصاً مصنوعاً من الذهب الخالص، وثلاثة أعمدة من الألماس. في البدء وُضعتْ هذه الأقراص الذهبيّة مرتّبة تبعاً لقياسها فوق أحد الأعمدة، وأُمرت مجموعة من الرهبان بنقل البرج إلى العمود الثالث مع الالتزام بالقواعد التي سبق ذكرها. وانطلقَ الرهبان يعملون ليل نهار لأداء هذه المهمّة معتقدين أنّ نهاية العالم ستقع عند انتهائهم من نقل البرج!.

من غير الواضح أنّ يكون لهذه الأُحجية حلٌّ. ولكنّ القليل من التفكير، وربّما بعض التجريب، يمكن أن يقنعانا بإمكان الحلّ. والسؤال المطروح: " ما هو أفضل ما نستطيع تحقيقه ؟"، أي ما هو عدد النقلات اللازم والكافي لأداء المهمّة ؟

1

تذكرة بالمتتاليات، والإثبات بالتدريج

انطلاقة نشطة

نشاط التجربة والملاحظة والاستقراء.

كثيراً ما يوجّه الانتقاد إلى علم الرياضيات بأنّه لا يتضمن في جنباته شيئاً من المُلاحظة والتجربة والاستقراء كما تُفهَم هذه التعابير في العلوم الطبيعية.

ولكن من المؤكّد أنّ عمل الباحثين الذين عملوا ويعملون في مجال الرياضيات يتضمن الكثير من الملاحظة والتجربة والاستقراء. الاستقراء في المُعجم هو استخلاص نتائج عامّة من النظر في حالات خاصّة. لا تتطلّب الملاحظة والتجربة في الرياضيات تجهيزات مُكلفة كما في علوم الفيزياء أو الفلك أو غيرها، بل مُجرّد قلم وورقة نكتب عليها.

لنتأمّل مثلاً الأعداد الطبيعية الفردية: $\{1,3,5,7,9,\ldots\}$ وليكن S_n مجموع أوّل n عدداً منها. نُنشئ جدولاً يضم القيم التي يأخذها المقدار S_n بدلالة n:

n	1	2	3	4
S_n	1	$1+3=4$	$1+3+5=9$	$1+3+5+7=16$

أنشئ جدولاً في دفترك تستكمل فيه الجدول السابق بحساب قيم S_n الموافقة في حالة $n=5,6,7,\ldots$، أتلاحظ نمطاً؟ اقترح صيغة تُعطي عبارة S_n بدلالة n.

ها أنت قد أجريت تجربة رياضياتية ولاحظت نتائجها واستقرأت صيغة تُعطي عبارة مجموع أوّل n عدد طبيعي فردي بدلالة n. ولكن كيف تُثبتُ صحّة استقرائك إثباتاً رياضياتياً ؟ هذا ما سنتعلّمه في هذه الوحدة.

1 عموميات عن المتتاليات

المتتاليةُ هي تابعٌ مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$. أو أية مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ حيث n_0 عددٌ طبيعي معطى (يمكن أن يتغير من متتالية إلى أخرى). نرمز إلى المتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq n_0}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$. ونسمّي u_n **حدَّ المتتالية ذا الدليل** n.

للمتتالية عددٌ لا نهائيٌّ من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود. فحدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ تأخذ فقط القيمتين $+1$ و -1. كما إنّ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ و $\left(\frac{1}{n^2-1}\right)_{n\geq 2}$ متتاليتان فيهما $n_0 = 1$ و $n_0 = 2$ بالترتيب.

1.1. تعريف متتالية

① بتعريف صريح للحدّ ذي الدليل n.

أي يُعرّف الحدُّ ذو الدليل n بصيغة تتبع العدد n تفيد في حسابه. مثل $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$، أو $u_n = f(n)$ حيث f هو تابع معرّف على $[0,+\infty[$ مثل $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ مثلاً.

② بالتدريج.

أي أن يُحسب الحدُّ ذو الدليل n بدلالة الحدود التي سبقته. كأن نُعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بأن نُعطى الحدّ u_0 ثُمّ نعطى علاقة، **تسمّى علاقة تدريجيّة**، تفيد في حساب كلّ حدٍّ من حدود المتتالية بدلالة الحد أو الحدود التي سبقته.

مثال لنتأمّل مثلاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة انطلاقاً من حدّ البدء $u_0 = 3$ والعلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = u_n^2 - 2$، تسمح هذه المعطيات بحساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحداً إثر آخر.

$$u_1 = u_0^2 - 2 = 7, u_2 = u_1^2 - 2 = 47, u_3 = u_2^2 - 2 = 2207, \ldots$$

ونلاحظ في هذا المثال. أنّه يمكن التعبير عن الحدِّ u_{n+1} تابعاً للحدّ u_n الذي سبقه أي $u_{n+1} = f(u_n)$، والتابع f هو التابع $x \mapsto x^2 - 2$.

بوجه عام، إذا كان f تابعاً معرّفاً على المجموعة D، وتحقّق الشرط

مهما يكن العدد x من D يكن $f(x)$ عنصراً من D أيضاً

أمكننا تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، بإعطاء حدِّ البدء u_0 من المجموعة D، والعلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = f(u_n)$.

أَصحيحٌ أنّ آحاد جميع حدود المتتالية التي دليلها أكبر من 1 تساوي 7 في في المثال السابق؟

2.1. جهة اطراد متتالية

تعريف 1

نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **متزايدة تماماً** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $n_0 \leq n$ يكن $u_n < u_{n+1}$.

ونقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **متناقصة تماماً** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $n_0 \leq n$ يكن $u_n > u_{n+1}$.

وتكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **متزايدة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $n_0 \leq n$ يكن $u_n \leq u_{n+1}$.

كما تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **متناقصة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $n_0 \leq n$ يكن $u_n \geq u_{n+1}$.

وأخيراً تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **ثابتة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $n_0 \leq n$ يكن $u_n = u_{n+1}$.

نطلق على المتتاليات التي تحقّق أحد الشروط السابقة اسم متتاليات **مطّردة**، ويبيّن لنا مثال المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ أنّه توجد متتاليات غير مطّردة.

لدراسة اطراد متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، نقارن، أياً كان العدد الطبيعي n، العددين u_n و u_{n+1} وذلك بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$، أو بمقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ والعدد 1 في حال كون حدود المتتالية موجبة تماماً.

3.1. المتتالية الحسابية

تعريف 2

نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتالية حسابيّة** إذا وُجِدَ عدد حقيقي r وتحقّقت العلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = u_n + r$ أيّاً كان العدد الطبيعي n. نسمّي العدد r **أساس** المتتالية الحسابيّة $(u_n)_{n\geq 0}$. إذن في متتالية حسابيّة ننتقل من حدٍّ إلى الحدِّ الذي يليه بإضافة العدد الحقيقي نفسه.

وفي هذه الحالة، أياً كان العددان الطبيعيان m و p، كان

$$u_m = u_p + (m-p)r$$

وإذا كان S مجموعَ n حداً متتالياً أوّلها a وآخرها ℓ من حدود متتالية حسابية، كان

$$S = \frac{n(a+\ell)}{2}$$

وبوجه خاص

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4.1. المتتالية الهندسية

تعريف 3

نقول إنّ المتتاليةَ $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتاليةٌ هندسيّةٌ** إذا وُجِدَ عدد حقيقي q وتحقّقت العلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = q \times u_n$ أيّاً كان العدد الطبيعي n. نسمّي العدد q **أساس** المتتالية الهندسيّة $(u_n)_{n\geq 0}$.

إذن في متتالية هندسيّة ننتقل من حدٍّ إلى الحدِّ الذي يليه بالضرب بالعدد الحقيقي ذاته.

عندئذ: أياً كان العددان الطبيعيان m و p، كان

$$u_m = u_p q^{m-p}$$

وإذا كان S مجموعَ n حداً متتالياً أوّلها a من حدود متتالية هندسية أساسها $q \neq 1$ ، كان

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

وبوجه خاص

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

مطابقة مفيدة:

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1}\right)$$

أي إنّ $x^n - a^n$ هو جداء ضرب $(x-a)$ بمجموع جميع الأعداد $x^\alpha a^\beta$ حيث α و β عددان طبيعيان مجموعهما يساوي $n-1$. فنجد مثلاً

$$x^5 - a^5 = (x-a)\left(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4\right)$$

في الحقيقة، المساواة واضحة في حالة $x = a$ أو $x = 0$. وفيما عدا ذلك، نعوض $q = \frac{a}{x}$ في

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

فنحصل على

$$1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\cdots+\frac{a^{n-1}}{x^{n-1}}=\frac{x^n-a^n}{x^{n-1}(x-a)}$$

ونجد المطابقة المرجوة عندما نضرب طرفي المساواة الأخيرة بالعدد $x^{n-1}(x-a)$.

تكريساً للفهم

كيف ندرس جهة اطراد متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

ثمة ثلاث طرائق:

① دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

مثال لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق الصيغة $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n}$ في حالة $n\geq 1$. لدينا

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)}-\frac{n^2+1}{2n}=\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}$$

إشارة $u_{n+1}-u_n$ تماثل إشارة n^2+n-1. ولأنّ $n\geq 1$، فإنّ $n-1\geq 0$ و $n^2>0$ إذن n^2+n-1 موجب تماماً في حالة $n\geq 1$. إذن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة تماماً.

② كتابة $u_n=f(n)$، إن أمكن، ثم دراسة اطراد التابع f. فإذا كان التابع f مطّرداً على المجال $[n_0,+\infty[$ كانت جهة اطراد $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي نفسها جهة اطراد f.

مثال لنتأمّل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة $v_n=(n-1)^2$ في حالة $n\geq 0$. نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $x\mapsto (x-1)^2$. عندئذ $f'(x)=2(x-1)$. ولأنّ $f'(x)>0$ في حالة $x>1$، استنتجنا أنّ f متزايد تماماً على $[1,+\infty[$. فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0=1$.

③ عندما تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات حدود موجبة تماماً، يمكن أن نقارن بين $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ والعدد 1.

مثال لنتأمّل المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ وفق $w_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. جميع حدودها w_n موجبة تماماً، ولدينا $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{2}{3}$ أياً كان العدد الطبيعي n. إذن، أياً كان العدد الطبيعي n، كان $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}<1$ أو $w_{n+1}<w_n$. فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

تَدرَّبْ

① ليكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وجِدْ أساسها.

② الأسئلة الآتية تتعلّق بمتتاليات حسابية أو هندسية :

❶ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$. احسب u_{20}.

❷ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ و $u_{10} = \frac{25}{2197}$. احسب u_{30}.

❸ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n، واستنتج قيمة المجموعين $u_{30} + u_{31} + u_{32}$ و $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

❹ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n، واستنتج قيمة المجموعين $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ و $u_2 + u_4 + u_6 \cdots + u_{2n}$.

❺ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها -2 وفيها $u_0 = -3$. احسب $u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$.

❻ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_0 = 1$. احسب $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$.

❼ احسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$.

❽ a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية. احسبها علماً أن

$$a + b + c = 36.75 \text{ و } abc = 343$$

③ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n}$.

❶ تحقق أنَّ $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

❷ أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

❸ استنتج عبارة v_n بدلالة n.

④ ادرس جهة اطراد كلٍّ من المتتاليات الآتية.

❶ $u_n = \frac{3}{n^2}$ ❷ $u_n = \sqrt{3n+1}$ ❸ $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$

❹ $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ ❺ $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$ ❻ $u_n = \frac{n}{10^n}$

❼ $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ ❽ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ ❾ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

2 البرهان بالتدريج، أو بالاستقراء الرياضي

1.2. أهمية الإثبات بالتدريج

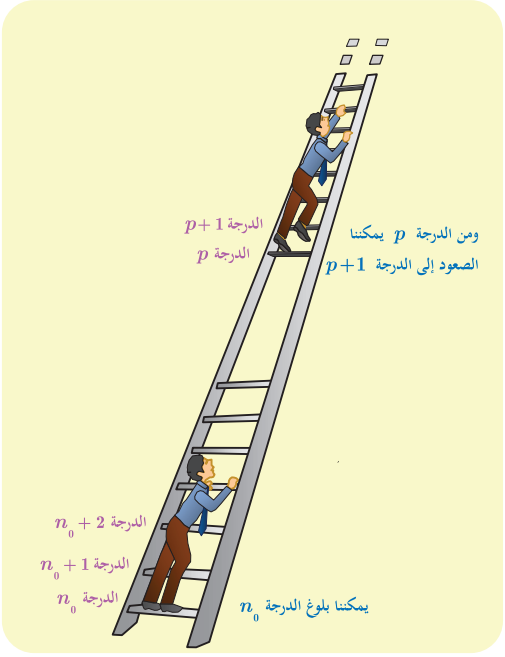
في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n نرمز بالرمز $E(n)$ إلى المساواة:

$$E(n) \text{ ☞ } \text{«} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \text{ »}$$

من الواضح أنّ $E(1)$ صحيحة لأنَّ $1^3 = 1^2$. و $E(2)$ صحيحة، لأنَّ $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$. كما إنَّ $E(3)$ صحيحة، لأنَّ $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$.

ولكن، أتكون $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد n؟ وفي حالة الإيجاب، كيف يكون الإثبات ونحن لا نمتلك القدرة على التحقُّق عدداً غيرَ منتهٍ من المرات؟

2.2. مبدأ الإثبات بالتدريج



الإثبات بالتدريج أو الاستقراء الرياضي ينص على أنّه كي تتمكن من صعود السُلّم والوصول إلى أية درجة دليلها n يحقق $n \geq n_0$، يكفي أن تتمكن من الصعود إلى الدرجة القاعدية التي دليلها n_0، وأن يكون بإمكانك الصعود من أية درجة دليلها p إلى الدرجة التي دليلها $p+1$ التي تعلوها مباشرة.

وبصياغة رياضيّاتية، لإثبات صحة خاصّة $E(n)$ تتعلّق بالعدد الطبيعي n في حالة $n \geq n_0$.

① نثبت صحة هذه الخاصّة في الحالة القاعدية $n = n_0$.

② نثبت في حالة $p \geq n_0$ أنّ صحّة $E(p)$ تقتضي صحّة $E(p+1)$.

وعندها نستنتج صحّة الخاصّة $E(n)$ أياً كانت قيمة n أكبر أو تساوي n_0.

تكريساً للفهم

متى نستعمل الإثبات بالتدريج ؟

نستعمل البرهان بالتدريج عندما نريد إثبات صحة خاصّة تتبع متحولاً طبيعياً n يتحول في $\mathbb{N}$ أو في مجموعة من النمط $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$.

كيف نستعمل الإثبات بالتدريج استعمالاً صحيحاً ؟

يجري الإثباتُ بالبرهان بالتدريج وفق الخطوات الآتية:

⓪ أولاً يجب أن نكتب وبوضوح الخاصّة $E(n)$ التي تتعلّق بالعدد الطبيعي n والتي نرغب بإثبات صحتها في حالة $n \geq n_0$. وفي أغلب الأحيان يكون $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$.

① نثبت صحة هذه الخاصّة في الحالة القاعدية $n = n_0$، أي صحة $E(n_0)$.

② نفترض صحّة $E(p)$ في حالة عدد p أكبر أو يساوي n_0 ونبرهن صحّة $E(p+1)$.

مثال أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل

⓪ الخاصّة المطلوبة $E(n)$ هي المساواة:

$$E(n) \text{ ☞ } \text{«} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ »}$$

ونريد إثبات صحتها في حالة $n \geq 1 (= n_0)$.

① الخاصّة $E(1)$ صحيحة لأنها تنص على المساواة الواضحة $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

② نفترض أنَّ $E(n)$ صحيحة، أي $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. عندئذ

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

وهذه هي تحديداً الخاصّة $E(n+1)$، فنكون إذن قد أثبتنا صحتها اعتماداً على صحة $E(n)$. إذن $E(n)$ صحيحة مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n.

لقد رأينا عند دراسة المتتاليات الحسابية أنّ

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

إذن

$$(1+2+\cdots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

فإذا استفدنا من المثال السابق استنتجنا أنّ

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

في حالة أي عدد طبيعي موجب تماماً n.

مثال أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعي n كان 4^n+2 مضاعفاً للعدد 3.

الحل

⓪ الخاصة $E(n)$ المطلوبة هي

$E(n)$ ☞ « 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3 »

① الخاصّة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ $4^0+2=1+2=3$، مضاعف للعدد 3.

② نفترض أنَّ $E(n)$ صحيحة، أي إنّ 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3. ثُمّ نلاحظ أنّ

$$4^{n+1}+2=4^n\times 4+2=(4^n+2)\times 4-8+2=4(4^n+2)-6$$

بحسب افتراضنا، 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3، إذن $4(4^n+2)$ مضاعفٌ للعدد 3، ومن ثَمّ يكون $4(4^n+2)-6$ مضاعفاً للعدد 3 لأنه مجموع مضاعفين للعدد 3. فالقضية $E(n+1)$ صحيحة. إذن $E(n)$ صحيحة مهما كان العدد الطبيعي n.

تدرّب

① نعرف في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$ المقدار $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$،

❶ احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4. ثُمّ عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n.

❷ أثبت بالتدريج أنّه في حالة أية عدد طبيعي $n\geq 1$ لدينا :

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

② ليكن $x>-1$. في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n\geq 1+nx$. أثبت أنّ المتراجحة $E(n)$ محقّقة أياً كان العدد الطبيعي n.

تمرينات ومسائل

1 بيّن أيُّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطّردة (ربما بدءاً من حدّ معيّن n_0).

① $u_n = -3n+1$ ② $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ ③ $u_n = 2^n$

④ $u_n = \left(-\dfrac{1}{n}\right)^n$ ⑤ $u_n = 1+\dfrac{1}{n^2}$ ⑥ $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

⑦ $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ ⑧ $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

تذكّر أنّ $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$ في حالة عدد طبيعي n موجب تماماً وأن $0! = 1$.

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$ في حالة أي عدد طبيعي n.

① احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ثمَّ خمِّنْ عبارة u_n بدلالة n.

② بحساب عبارة $u_n - 3$ عند كل $n \geq 0$، عبِّرْ عن u_n بدلالة n.

3 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = -u_n + 4$ في حالة عدد طبيعي n.

احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 وخمِّنْ عبارة u_n بدلالة n ثمَّ حدد u_n بدلالة n.

4 أثبت بالتدريج صحةالخاصتين الآتيتين

① $1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n! = (n+1)!-1$.

② $n! \geq 2^{n-1}$.

5 في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$، ليكن $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ و $v_n = u_{2n} - u_n$. أثبت أنَّ المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

6 a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$. نعلم أنَّ a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، نرمز إلى أساسها بالرمز q. كما نعلم أنَّ $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q.

لنتعلّم البحث معاً

7 صُغ افتراضاً ثُمّ تحقّق من صحته

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$ عند كل عدد طبيعي n. نهدف في هذا التمرين إلى التعبير عن u_n بدلالة n.

نحو الحلّ

نعلم أنّه في حالة متتالية معرفة بعلاقة تدريجية، يمكننا حساب u_n بشرط أن نكون قد عرفنا الحدود التي تسبقه. والمطلوب هنا هو إيجاد طريقةٍ لحساب u_n مباشرةً بدلالة n. في هذا النمط من المسائل، نحسب حدوداً أولى من المتتالية ثمَّ نحاول في كل حالة الربط بين قيمة الحدّ ودليله.

احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5...

نجد أنَّ كل حد من الحدود المحسوبة يبدأ من اليسار بالرقم 5 وينتهي بالرقم 2، ويوجد بينهما عددٌ من الأصفار يتعلق بقيمة n، أي بدليل هذا الحد. بالتأكيد، سيسمح لك هذا بالتعبير عن u_n بدلالة n.

1. عيّن عدد الأصفار المشار إليه أعلاه عندما تأخذ n القيم 1، 2، 3، 4 و 5.
2. ما عدد الأصفار بدلالة n.
3. تحقّق أنّ $u_k = 5\times 10^k + 2$ في حالة k من $\{1,2,3,4,5\}$.
4. اقترح صيغة للحدّ u_n بدلالة n. ثُم أثبت صحة اقتراحك أياً كانت n.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

8 متتالية هندسية مخفيّة

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق

$$u_0 = s \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n \qquad (*)$$

① عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تُحقّق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية $(*)$ نفسها أي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ أياً كانت n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية.

③ اكتب عبارة v_n ثمَّ u_n بدلالة n و s.

نحو الحلّ

نبحث عن كثير حدود من الدرجة الثانية P. لنكتبه إذن بالصيغة $P(n)=an^2+bn+c$. لتعيين الأمثال a و b و c نستفيد من كون المتتالية التي حدها العام $t_n=P(n)$ تُحقق العلاقة التدريجية.

1. بيّن أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ تحقق العلاقة التدريجية $(*)$ إذا وفقط إذا كان

$$\left(\frac{a}{2}-1\right)n^2+\left(2a+\frac{b}{2}-1\right)n+\left(a+b+\frac{c}{2}\right)=0$$

أياً كان العدد الطبيعي n.

2. استنتج من ذلك جملة بسيطة من المعادلات تحققها a و b و c. ثُمّ عين هذه الأعداد.

لإثبات أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية، يكفي أن نجد عدداً q بحيث تتحقق المساواة $v_{n+1}=qv_n$، عيّن q.

بمعرفة v_0 و q يمكننا استنتاج v_n، ثُمّ لأنّنا نعرف t_n يمكننا إنجاز المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

9 نُعطى عددين حقيقيين a و b ونفترض أنّ $a\neq 1$. نتأمّل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1}=av_n+b$، أياً كان العدد الطبيعي n.

① عيّن تابعاً f يحقق $v_{n+1}=f(v_n)$ أياً كانت قيمة $n\geq 0$.

② احسب ℓ حلّ المعادلة $f(x)=x$.

③ نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n=v_n-\ell$. أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، واستنتج u_n بدلالة n و a و b و v_0. ثُمّ استنتج v_n بدلالة هذه المُعاملات.

10 نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0=1,\ u_1=4, \\ u_{n+1}=5u_n-6u_{n-1} \qquad (n\geq 1) \end{cases}$$

① عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان $a+b=5$ و $ab=6$.

② لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n=u_{n+1}-au_n$. أثبت أنَّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها b.

③ لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $w_n=u_{n+1}-bu_n$. أثبت أنَّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها a.

④ عبّرْ عن v_n و w_n بدلالة n. ثُمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

11 متراجحة تدريجية

① أثبت، أيّاً كان العدد الطبيعي n، $n \geq 2$، أنَّ: $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$.

② نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$ ».

❶ ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n، تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

❷ أثبت أنَّ $E(n)$ صحيحة، أيّاً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$.

12

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq (n+2)^2$ ».

① أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(3)$ و $E(4)$ صحيحة؟

② أثبت بالتدريج أنَّ القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$.

13

أثبت بالتدريج، صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n.

① « $4^n + 5$ مضاعفٌ للعدد 3 ».

② « $2^{3n} - 1$ مضاعفٌ للعدد 7 ».

③ « $n^3 + 2n$ مضاعفٌ للعدد 3 ».

④ « $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعفٌ للعدد 7 ».

14

نرمز إلى القضية « يقسمُ العددُ 9 العددَ $10^n + 1$ » بالرمز $E(n)$، في حالة $n \in \mathbb{N}$.

① أثبت أنّه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمةٍ للعدد n، كانت عندئذ $E(n+1)$ صحيحة.

② أتكون القضية $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ برِّرْ إجابتك.

15

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ عند كل $n \geq 0$.

① أثبت أنَّ $0 \leq u_n \leq 2$، أيّاً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

16

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$ عند كل $n \geq 0$.

① أثبت أنَّ التابع $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايدٌ تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$، أيّاً كان العدد n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

17 ليكن θ عددٌ حقيقي من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. ثُمّ نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق $u_0 = 2\cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$.

① احسب u_1 و u_2.

② أثبت بالتدريج، أنَّ $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

مساعدة: تذكَّرْ أنَّ $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.

18 في مستوٍ $\mathcal{P}$، محدَّث بمعلم متجانس، $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2 - 5y^2 = 1$. ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(9x+20y, 4x+9y)$، أي $f(M) = M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(1,0)$، ثُمّ لنتأمّل في المستوي $\mathcal{P}$ متتالية النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $S_{n+1} = f(S_n)$. أثبت أنَّ S_n نقطة من المجموعة $\mathcal{H}$ وأنّ إحداثياتها أعداد صحيحة.

19 يرمز x إلى عدد حقيقي ويرمز n إلى عدد طبيعي غير معدوم. نضع

$$S_n = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos\big((2n-1)x\big)$$

① باستعمال دساتير مثلثاتية تعرفها، أثبت أنَّ:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big) \quad \text{و} \quad \sin(2a) = 2\sin a\cos a$$

② حوِّل كلاً من العبارتين الآتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين إلى مجموع نسبتين مثلثيتين.

$$\sin x \cdot \cos\big((2n+1)x\big) \quad \text{و} \quad \sin nx \cdot \cos nx$$

③ أثبت أنَّ $S_n = \cos(nx) \times \frac{\sin(nx)}{\sin x}$، أياً يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi\big(k \in \mathbb{Z}\big)$.