الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيَة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

الرّياضيّات

الجبـــــر والهندسة

كتاب المدرس

الصَّفُّ التَّاسع

العام الدراسي 2017-2018

طُبِع أوّل مرَّة للعام الدراسي 2017 – 2018 م

إعداد

أ.د. عمران قوبا | ميكائيل الحمود | أيشوع اسحق

د.خالد حلاوة | عصام علي | رضوان الدعبول

عامر الجندي

مُقدّمة

يأتي هذا الكتاب ليكون داعم ومساعد أساسي للمدرس يطلع المدرس من خلاله على طرائق لعرض الدرس ويشتملُ الكتاب على حلول عشر وحدات يضم كلٌّ منها حلول جميع التساؤلات والأنشطة والتحقق من فهمك والتدرب وأخيراً حل تمرينات ومسائل الوحدة. يأتي هذا الدليل للكتابين المدرسين الجبر والهندسة: كتاب الجبر مؤلف من ست وحدات وكل وحدة تضمنت عدداً من الدروس. وكذلك كتاب الهندسة مؤلف من أربع وحدات وكل وحدة أيضاً تضمنت عدداً من الدروس.

تم دمج كتابي المدرس للهندسة والجبر في كتاب واحد لإبراز أهمية اطلاع المدرس على محتوى الكتابين حتى لو كان يدرس أحد الكتابين.

وزودت كل وحدة بمخطط بناء الوحدة على شكل جدول يحوي الدروس وعدد الحصص المخصصة لكل درس وتوزيع الحصص على الأيام الدراسية. هذا التوزيع تقريبي وبإمكان المدرس أن يخطط بموجبه حسب مستوى طلابه من صف لأخر ممكن اضافة أو اختصار حصة لهذا التوزيع. وكذلك وضعنا فقرة بعنوان مفردات لغوية وترميز وتحوي هذه الفقرة الاصطلاحات الموجودة في الوحدة مع شرح لكل منها. ويأتي بعدها فقرة ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة تتضمن المرتكزات المعرفة المتوجب على الطالب معرفتها قبل البدء في الوحدة وكذلك نقاط التعلم الأساسية التي ستعلمها الطالب في هذه الوحدة.

ننوه هنا إلى أن طرائق الحل التي عرضناها في هذا الدليل هي طرائق مقترحة تساعد المدرس في الابتعاد عن التلقين أثناء سير الدرس ويمكن للمدرس إيصال الأفكار للطلاب بطرائق أخرى يرى أنها مناسبة لسوية طلابه في الصف على أن تكون تفاعلية.

نأمل أن يكون هذا الكتاب مرشداً وعوناً لكل مدرس ومتعلم للرياضيات، آملين من زملائنا، تزويدنا بمقترحاتهم المتعلقة بهذا الكتاب وبالصعوبات التي تواجههم.

المُعدّون

المحتوى

الجبر

الوحدة الأولى: الأعداد والكسور

الوحدة الثانية: قوى الأعداد العادية- الحساب بالرموز

الوحدة الثالثة: معادلات ومتراجحات

الوحدة الرابعة: جمل المعادلات

الوحدة الخامسة: التابع

الوحدة السادسة: مبادئ الاحتمال والإحصاء

الفهرس

الوحدة الأولى: النسب المثلثية لزاوية حادة

الوحدة الثانية: مبرهنة النسب الثلاث

الوحدة الثالثة: الزوايا والمضلعات في الدائرة، المضلعات المنتظمة

الوحدة الرابعة: مجسمات ومقاطع

خطة توزيع المنهاج

يخصص ثلاث حصص أسبوعياً لكتاب الجبر وحصتان أسبوعياً لكتاب الهندسة.

الشهر		الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول	الجبر			① طبيعة الأعداد	② القواسم المشتركة لعددين صحيحين ③ كسور مختزلة
	الهندسة			① بعض خواص التناسب	② النسب المثلثاتية لزاوية حادة
تشرين أول	الجبر	④ الجذر التربيعي لعدد موجب	تمرينات ومسائل	① قوة عدد عادي	② النشر والتحليل ③ مطابقات شهيرة
	الهندسة	③ علاقتان مهمتان بين النسب المثلثاتية	④ نسب زوايا شهيرة	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
تشرين ثاني	الجبر	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل ① معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد	② معادلات – خاصة الجداء الصفري	③ متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد– تمرينات ومسائل
	الهندسة	① مبرهنة النسب الثلاث	② مبرهنة النسب الثلاث العكسية	③ التشابه	تمرينات ومسائل
كانون أول	الجبر	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	① جملة معادلتين خطيتين بمجهولين	② تمثيل بياني
	الهندسة	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	① زوايا محيطية وزوايا مركزية	① زوايا محيطية وزوايا مركزية
كانون ثاني	الجبر	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			تمرينات ومسائل
	الهندسة	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			تمرينات ومسائل
شباط	الجبر	تمرينات ومسائل	① مفهوم التابع	② طرائق تعريف التابع	تمرينات ومسائل
	الهندسة	② الرباعي الدائري	③ المضلعات المنتظمة	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
آذار	الجبر	تمرينات ومسائل	① مفهوم الاحتمال	② تجارب عشوائية مركبة	③ أحداث متنافية. أحداث متعاكسة
	الهندسة	تمرينات ومسائل	① تذكرة بالمجسمات	② الكرة	③ مقاطع مجسمات
نيسان	الجبر	④ تذكرة بالمتوسط الحسابي	⑤ الربيعيات	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
	الهندسة	③ مقاطع مجسمات	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
أيار	الجبر	تمرينات ومسائل			
	الهندسة	تمرينات ومسائل			

1

الوحدة الأولى
الأعداد والكسور

1. طبيعة الأعداد
2. القواسم المشتركة لعددين صحيحين
3. كسور مختزلة
4. الجذر التربيعي لعدد موجب

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الاسبوع
1- طبيعة الأعداد	3	أيلول	الثالث
2- القواسم المشتركة لعددين صحيحين	3	أيلول	الرابع
3- كسور مختزلة	2	تشرين 1	الأول
4- الجذر التربيعي	3	تشرين 1	الثاني
تمرينات ومسائل	3	تشرين 1	الثالث
اختبار	1	تشرين 1	الثالث
المجموع	15		6

هذا التوزيع تقريبي وبإمكان المدرس أن يخطط بموجبه حسب مستوى طلابه من صف لآخر ممكن اضافة أو اختصار حصة لهذا التوزيع .

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
كسر مختزل	«اختصار الكسر إلى أبسط صيغة» القول « $\frac{a}{b}$ كسرٌ مختزل » يعني « a و b أوليان فيما بينهما ». وبهذا، فإنَّ الكسر المختزل غير قابل للاختصار. إذا اختصرنا الكسر، بتقسيم بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما، حصلنا على كسرٍ مختزل. **تكمن أهمية هذه الخاصة،** في الحصول على الكسر المختزل بخطوة واحدة.
القاسم المشترك الأكبر Greatest Common Divisor	أكبر القواسم المشتركة للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر لهما، ويُرمز إليه $\mathrm{GCD}(a,b)$. $\mathrm{GCD}(a,b)=\mathrm{GCD}(b,a-b)$ في حالة عددين طبيعيين $a>b$.

1

الجذر تربيعي	في حالة $a > 0$ يكون للعدد a جذران تربيعيان أحدهما موجب نرمز إليه بالرمز $\sqrt{a}$ والآخر سالب هو $-\sqrt{a}$. أمّا في حالة $a = 0$ فيكون $\sqrt{0} = 0$. ويُقرأ $\sqrt{a}$ «الجذر التربيعي للعدد a»
خوارزمية	عموماً، يسمّى تكرار العمليات ذاتها في عدد من الخطوات إلى حين الوصول إلى حل مسألة **خوارزمية**.
العدد العادي	العدد العادي هو كل عدد يمكن كتابته بالصيغة $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. لكلِّ عددٍ عاديٍّ كتابةٌ عشرية منتهية أو دوريّة غير منتهية، أي إنّ خاناته تتكرَّر بدءاً من حدٍّ معيّن. فالأعداد الصحيحة والعشرية هي أيضاً أعداد عادية.

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
العدد الأولي – العدد العشري – العدد العادي	ايجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين
مضاعفات عدد	الكسر المختزل
القسمة الإقليدية	الجذور التربيعية والعمليات عليها

مقدمة الوحدة:

تهتم المقدمة : بإبراز ما قدمه العلماء عبر العصور: وهذه لمحة عن بعض إنجازات البابليين ومساهماتهم في تطور العلوم. إنّ العدد π ليس عدداً عادياً فكتابته العشرية ليست منتهية وليست دورية.

لاحظ مفردات المقدمة: تقدم معلومة تاريخية إضافة إلى معلومة علمية كمادة إثرائيه للمتعلم.

الأعداد والكسور

 انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها.

1. **التعبير عن القسمة الإقليدية (التقسيم مع الباقي):** يمكن التعبير عن خارج وباقي القسمة الإقليدية للعدد 37 على العدد 4 على النحو الآتي:

① $37 = 8 \times 4 + 5$ ② $37 = 9 \times 4 + 1$ ③ $37 = 10 \times 4 - 3$

2. **قابلية القسمة على العدد 2:** العدد الآتي يقبل القسمة على العدد 2:

① 6625 ② 221 ③ 3578

3. **قابلية القسمة على العدد 3:** يقبل عددٌ صحيح القسمةَ على العدد 3

① إذا كان رقم آحاده 3 أو 6 أو 9.

② إذا كان جداء ضرب أرقامه مضاعفاً للعدد 3.

③ إذا كان مجموع أرقامه مضاعفاً للعدد 3.

4. **اختصار كسر:** بعد اختصار الكسر $\frac{15}{35}$ إلى أبسط صيغة نحصل على الكسر:

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{7}$

5. **الشكل العشري لكسر:** الشكل العشري للكسر $\frac{4}{5}$ هو:

① 4.5 ② 0.8 ③ 0.54

6. **معرفة الكسر العشري:** العدد الآتي ليس كسراً عشرياً:

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{5}{3}$

1

طبيعة الأعداد

يمكن التقديم بمناقشة بين المدرس وطلابه عن(الأعداد الأولية) لتكون هذه المعلومات بامتلاك جميع طلاب الصف

فالعدد الأولي هو كل عدد صحيح موجب له فقط قاسمان مختلفان، هما 1 والعدد نفسه.

على سبيل المثال: يسأل المدرس الطلاب

(1) هل الأعداد الآتية أولية (1 , 2, 3, 4, 5)؟

العدد 1 ليس أولياً، لأنْ ليس له سوى قاسم واحد هو 1.

العدد 3 عدد أولي، لأنه يقبل بالضبط قاسمين هما 1 و 3 فقط.

(2) هل الصفر عدد أولي؟ لماذا؟ **هل العدد 2 أولي ولماذا؟**

(3) اكتب الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 10.

ثم نتابع لنبدأ بمناقشة النشاط ويعتبر النشاط جزء أساسي من مادة التعلم

نشاط «تعيين طبيعة عدد»

الهدف من هذا النشاط:

يهدفُ إلى طرح أسئلة تظهر مدى معرفة الطالب بمحتوى الدرس أو يقدم طرائق لإثبات بعض الخواص في هذا الدرس فهو بمثابة اختبار قبلي للطالب لمحتوى الدرس.

فالهدف الأساسي هو معرفة طبيعة عدد معطى فيما إذا كان عدداً طبيعياً أو صحيحاً أو عشرياً أو عادياً أو ليس عادياً.

كيفية التعامل مع النشاط:

معلومات بسيطة وتعتبر تذكره لما تعلمه الطالب في صفوف سابقة وقادر أن يجيب عنها ويعطى المدرس فرصة للتفكير و مشاركة زملائه ليجيب عن اسئلة هذا النشاط

يضم النشاط أربعة اسئلة وتكون الإجابة بكلمة صح أم خطأ

يتابع المدرس بمناقشة النشاط في بداية الدرس:

صحيح أم خطأ

أيُّ المقولات الأربعة الآتية صحيحة وأيها غير صحيح؟

① العدد π ليس عدداً عادياً. **(صح)**

② أربعة بالضبط من أعداد القائمة الآتية هي أعداد عشرية: **(خطأ)**

$$3.14,\ \ \pi,\ \ 10^{-2},\ \ \frac{5}{3},\ \ \frac{1}{2},\ \ -4,\ \ 2.7,\ \ 0.5$$

③ جميع أعداد القائمة الآتية هي أعداد عادية: **(صح)**

$$7,\ \ \frac{1}{3},\ \ -\frac{3}{5},\ \ 2.5,\ \ -1.5,\ \ 10^{-3}$$

④ مجموع الأعداد العادية الصحيحة في القائمة الآتية يساوي 1000: **(صح)**

$$2,\ \ \frac{1}{3},\ \ -5.3,\ \ \pi,\ \ \frac{2}{7},\ \ 10^{3},\ \ -2,\ \ 7.5$$

تعلم

زودت تلك المعارف بأمثلة محلولة هي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وبأسلوب منهجي لتكون نماذجَ تحتذى عند حلِّ التدريبات والمسائل.

يمكن للمدرس اضافة أمثلة أثناء الحصة يختارها من التدريبات والتمرينات والمسائل.

عندئذ يكون الطالب تعلم المفهوم وتدرب على حل بعض المسائل وناقشها مع المدرس في الصف وليختار المدرس في الفترة المخصصة للحل المسائل وهي (ثلاث حصص)، عدداً من المسائل المتبقية ويجب أن يبقى بعض مثيلاتها ليفكر الطالب فيها ويتعلم بنفسه كيفية مناقشة وحل مسألة

مثلاً ممكن أن يختار التمارين الآتية: 20 من تمرينات الوحدة. أو أن يضيف التمارين:

(1) تأمل الجدول الآتي: انسخ لديك هذا الجدول، ثم أكمله بوضع العلامة ♈ في الحقل المناسب.

	صحيح	عشري	نسبي
هو عدد 3.45			
هو عدد $(2\div 3)$			
هو عدد $(56\div 7)$			
هو عدد 10^{-7}			
هو عدد 10^{5}			
هو عدد $(1\div 4)+(6\div 8)$			

1

(2) أثبت، شفوياً، أنَّ كلاً من العددين الآتيين N_1 و N_2 هو عدد عادي.

① $N_1 = \frac{7}{2} + \frac{5}{6} - \frac{9}{2} + \frac{13}{2}$ ② $N_2 = \frac{3}{10} - \frac{2}{5} + \frac{11}{10} - 1$

(3) لدينا $a = \frac{3}{2}$ و $b = -5$ و $c = \frac{2}{3}$

1. احسب كلاً من: $n_1 = a + b - c$ ؛ $n_2 = a - (b - c)$ ؛ $n_3 = a \times \frac{b}{c}$

2. واحد فقط من النواتج الثلاثة هو عدد عشري. أيٌّ منها؟

الحل:

من الطبيعي أن يرافق هذا الحل تعليل الخطوات وواضح بانها ملونه بالأحمر ليشرح المدرس ويعلل كيفية توحيد المقامات بالطريقة المناسبة والأبسط.

1. • $n_1 = \frac{3}{2} - 5 - \frac{2}{3} = \frac{3\times3}{2\times3} - \frac{5\times6}{1\times6} - \frac{2\times2}{3\times2} = \frac{9}{6} - \frac{30}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{35}{6}$.

• $n_2 = \frac{3}{2} - \left(-5 - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{5\times3}{1\times3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{15}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{3\times3}{2\times3} + \frac{17\times2}{3\times2} = \frac{9}{6} + \frac{34}{6} = \frac{43}{6}$

• $n_3 = \frac{3}{2} \times \frac{-5}{2/3} = \frac{-15}{4/3} = -15 \times \frac{3}{4} = -\frac{45}{4}$

2. n_3 عدد عشري، لأنَّ $n_3 = -\frac{45\times25}{4\times25} = -\frac{1125}{100} = 11.25$.

ملاحظة: يمكن أن نكتب $n_3 = -\frac{44}{4} - \frac{1}{4} = -11 - 0.25 = -11.25$.

تحقق من فهمك

تدريبات وتمارين ومسائل تعتبر اختبار بعَدي لِما تعلمه الطالب في الدرس ودور المُدرّس موجهاً وميسراً بالإشراف على حلها من قبل الطلاب أثناء الحصة.

① ضع ناتج كلٍّ من العمليات الآتية بصيغة كسر. وبيّن أيكون الناتج عدداً صحيحاً؟

نلاحظ أن جمع الكسور هنا بسيط فلا يتطلب منا سوى جمع البسوط.

① $\frac{7}{5}+\frac{4}{5}=\frac{11}{5}$ نلاحظ أن الناتج ليس عدداً صحيحاً.

وبقية الطلبات بنفس الإسلوب

② انسخ ثم أكمل ما يأتي.

① $\frac{1}{2}=\frac{\cdots}{6}$ هنا نلاحظ $2\times3=6$ لذلك نضع في الفراغ العدد $1\times3=3$

② $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ ③ $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$

يمكن للمدرس فيما تبقى من زمن الحصة أن يناقش بعض التدريبات ويطلب من الطلاب كواجب منزلي حل ما تبقى منها لتجري مناقشته في بداية الحصة القادمة.

تدرب

تمارين مباشرة تعزز ما تعلمه الطالب في الدرس، بعضها تطبيق مباشر لمفاهيم الدرس وبعضها الآخر للتحقق من فهم محتوى الدرس.

فهي لا تحتاج سوى التطبيق المباشر للمعارف ويمكن إنجازها بسهولة، ليكتسب الطالب مهارة في الحل وتطبيق القوانين بدقة.

① ضع ناتج كلٍّ من العمليات الآتية بصيغة كسر. وبيّن أيكون بين هذه النواتج أعدد عشرية؟

① $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

الحل:

① $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$ (ليس عدداً عشرياً)

② $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1\times3}{2\times3}-\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{3}{6}-\frac{4}{6}=-\frac{1}{6}$ (ليس عدداً عشرياً)

③ $-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1\times3}{2\times3}-\frac{2\times2}{3\times2}=-\frac{3}{6}-\frac{4}{6}=-\frac{7}{6}$ (ليس عدداً عشرياً)

② ليكن العددان $A=\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$ و $B=\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$

1

1. أكمل المساواة الآتية: $\frac{5}{6}=\frac{\cdots}{12}$

2. اكتب كلّاً من A و B بصيغة كسر.

3. واحد من العددين A و B عددٌ عشري. أيّهما؟

الحل:

1. $\frac{5}{6}=\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{10}{12}$

2. $A=\frac{10}{12}+\frac{7}{12}=\frac{17}{12}$ ؛ $B=\frac{5\times 2}{6\times 2}-\frac{7}{12}=\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}$

3. $B=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\times 4}=\frac{1}{4}=0.25=25\times 10^{-2}$ (عددٌ عشري)

③ ليكن $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

1. سمِّ مضاعفاً مشتركاً للعددين 4 و 6.

2. احسب ناتج A بصيغة كسر. هل A عدد عشري؟

الحل:

1. العدد 12 مضاعفٌ مشترك للعددين 4 و 6.

2. $A=\frac{3\times 3}{4\times 3}+\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$. (A ليس عدداً عشرياً)

④ لدينا الأعداد الآتية:

① $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}$ ② $4-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{4}{3}+\frac{1}{12}$

1. احسب كلّاً منها بصيغة كسر.

2. واحد فقط من النواتج التي حصلنا عليها عدد عشري، عيّنه؟

① $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}$ ② $4-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{4}{3}+\frac{1}{12}$

1. احسب ناتج كلٍ منها بصيغة كسر عادي.

2. واحد فقط من النواتج التي حصلنا عليها عدد عشري. أيٌّ منها؟

الحل:

1. ① $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}+\frac{3\times3}{7\times3}=\frac{14}{21}+\frac{9}{21}=\frac{23}{21}$

② $4-\frac{2}{9}=\frac{4\times9}{1\times9}-\frac{2}{9}=\frac{36}{9}-\frac{2}{9}=\frac{34}{9}$ ③ $-\frac{4}{3}+\frac{1}{12}=-\frac{4\times4}{3\times4}+\frac{1}{12}=\frac{-16}{12}+\frac{1}{12}=-\frac{15}{12}$

2. ③ $-\frac{4}{3}+\frac{1}{12}=-\frac{15\div3}{12\div3}=-\frac{5}{4}=-1.25$ (عدد عشري)

⑤ لدينا الأعداد الآتية:

① $\pi+\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{7}{2}-\frac{8}{5}$ ③ $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

1. احسب ناتج كلٍّ منها بصيغة كسر.
2. أيٌّ من تلك النواتج عدد عشري؟ وأيّها عددٌ غير عادي؟

الحل:

1. ① $\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

② $\frac{7}{2}-\frac{8}{5}=\frac{7\times5}{2\times5}-\frac{8\times2}{5\times2}=\frac{35}{10}-\frac{16}{10}=\frac{19}{10}$

③ $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\times3}{4\times3}+\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$

2. $\frac{19}{10}$ عدد نسبي و $\frac{19}{10}=1{,}9$ وهو عدد عشري.

زميلي المدرس ستجد عدداً من التمارين الإضافية ممكن إعطائها للطلاب كورقة عمل حسب مستوى الطالب وتمكنه من هذا الدرس ليتقن مهارة الحل بدقة وإتقان.

الدرس الأول لا يحتاج أكثر من حصتين مع حل التدريبات ولكن خصصنا له بالخطة الدرسية ثلاث حصص كونه الأسبوع الأول من العام الدراسي واللقاء الأول للمدرس مع الطلاب لذلك اعطينا فرصة للمدرس حصة ليتعرف مستوى طلابه من خلال مناقشة أفكار هذا الدرس

تمارين إضافية:

(1) لدينا الأعداد الآتية:

① $\frac{7}{5}\times\frac{-15}{7}$ ② $3\times\frac{20}{9}$ ③ $\frac{5}{3}\times\frac{12}{25}$

1. احسب ناتج كلٍ منها بصيغة كسر عادي.

2. واحد فقط من النواتج التي حصلنا عليها عدد صحيح. أيٌّ منها؟

الحل:

1. ① $\frac{7}{5}\times\frac{-15}{7}=\frac{7\times-15}{5\times7}=\frac{-105}{35}$

② $3\times\frac{20}{9}=\frac{3\times20}{9}=\frac{60}{9}$

③ $\frac{5}{3}\times\frac{12}{25}=\frac{5\times12}{3\times25}=\frac{60}{75}$

2. ① $\frac{7}{5}\times\frac{-15}{7}=\frac{-105}{35}=-7$ (عدد صحيح)

(2) فيما يلي أداء إحدى الطالبات في إجراء عمليتين:

① $\frac{25}{8}\times\frac{8}{10}=\frac{5}{2}$ ② $\frac{-3}{4}\times\frac{-6}{7}\times\frac{10}{9}=\frac{5}{7}$

لقد نسيت هذه الطالبة كتابة تفاصيل الحل. أعد إجراء هاتين العمليتين بتفاصيلها.

الحل:

① $\frac{25}{8}\times\frac{8}{10}=\frac{25\times8}{8\times10}=\frac{\cancel{5}\times5\times\cancel{8}}{\cancel{8}\times\cancel{5}\times2}=\frac{5}{2}$

② $\frac{-3}{4}\times\frac{-6}{7}\times\frac{10}{9}=\frac{-3\times-6\times10}{4\times7\times9}=\frac{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times5\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times7\times\cancel{3}\times\cancel{3}}=\frac{5}{7}$

(3) واحد فقط من الأعداد الآتية هو عدد صحيح. تحقق منه.

$A=\frac{5}{7}\div\frac{-10}{3}$ $\quad B=\frac{4}{3}\div\frac{2}{3}$ $\quad C=\frac{-3}{2}\div\frac{-9}{8}$

الحل:

- $A=\frac{5}{7}\times\frac{3}{-10}=-\frac{\cancel{5}\times3}{7\times2\times\cancel{5}}=-\frac{3}{14}$
- $B=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times3}{3\times2}=\frac{12}{6}=2$ (عدد صحيح)
- $C=\frac{-3}{2}\times\frac{8}{-9}=\frac{-3\times8}{2\times-9}=\frac{\cancel{-3}\times\cancel{2}\times4}{\cancel{2}\times\cancel{-3}\times3}=\frac{4}{3}$

(4) أصحيح أنَّ إثنين من الأعداد الثلاثة الآتية هما عشريان؟ علِّلْ إجابتك.

$A=\frac{3}{4}\div\frac{7}{5}$ $\quad B=\frac{-3}{5}\div4$ $\quad C=3\div\frac{5}{4}$

الحل:

- $A=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{4\times7}=\frac{15}{28}$ (ليس عشرياً)
- $B=\frac{-3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{-3}{20}=\frac{-3\times5}{20\times5}=-\frac{15}{100}=-0.15$ (عشري)
- $C=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}=\frac{12\times2}{5\times2}=\frac{24}{10}=2.4$ (عشري)

1

القواسم المشتركة لعددين صحيحين

الهدف من هذا النشاط:

إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين والتعرف على بعض خواص القاسم المشترك الأكبر.

كيفية التعامل مع النشاط:

معلومات بسيطة وتعتبر تذكره لما تعلمه الطالب في صفوف سابقة وقادر أن يجيب عنها ولكن يجب ان يعطى فرصة للتفكير أو مشاركة زملائه ليجيب عن أسئلة هذا النشاط

يضم النشاط ثلاث أسئلة وتكون الإجابة على الدفتر

يتابع المدرس بمناقشة النشاط في بداية الدرس:

نشاط « عودة إلى القاسم المشترك الأكبر »

1. العبارة المناسبة

تأمّل هذه العبارات الأربع:

«مضاعف للعدد»　　«قاسم للعدد»　　«يقسم»　　«يقبل القسمة على...».

أكمل كلّاً مما يأتي باستعمال العبارة المناسبة من بين العبارات السابقة، على أن يجري الانتقال من العدد الأول إلى الثاني مرة من اليمين إلى اليسار وأخرى من اليسار إلى اليمين.

① 25……5　　② 3……21　　③ 4……32　　④ 143……11

الحل:

① 5 يقسم 25 ؛ و 25 **مضاعف للعدد** 5

② 21 يقبل القسمة على 3 ؛ **والعدد** 3 **يقسم العدد** 21

2. تحضير مزهريات

لدى بائعة زهور 84 وردة جورية و 48 زنبقة، تريد أن تصنع منها باقات متماثلة نوعاً وعدداً.

1. هل يمكن للبائعة صنع أربع باقات متماثلة؟ ما مكونات كلٍ منها؟
2. اكتب، بترتيب تصاعدي، جميع قواسم العدد 48، وكذلك قواسم العدد 84.
3. ما عدد الباقات المتماثلة التي يمكن للبائعة صنعها؟
4. ما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن للبائعة صنعها؟

الحل:

العدد 4 قاسمٌ لكلٍ من العددين 84 و 48، فيمكن صنع أربع باقات متماثلة.

في كل باقة: عدد الورود الجورية يساوي $84 \div 4 = 21$ وعدد الزنابق يساوي $48 \div 4 = 12$.

2. قواسم العدد 84 هي بالترتيب التصاعدي $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84$

قواسم العدد 48 هي بالترتيب التصاعدي $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 18 ; 24 ; 48$

3. عدد أنواع الباقات المتماثلة التي يمكن للبائعة صنعها هو عدد القواسم المشتركة للعددين 84 و 48،

فهو 6.

4. أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن للبائعة صنعها هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 84 و 48،

فهو 12.

3. القاسم المشترك الأكبر والفرق

1. في كل من الحالتين الآتيتين: ① $a=18$ و $b=12$ ② $a=25$ و $b=22$

- نظِّمْ قائمة تضم قواسم كلٍّ من العددين a و b، ثُمّ قائمة تضم قواسم العدد $a-b$.
- جِدْ القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b، ثُمّ للعددين b و $a-b$.

2. إذا كان العددان الطبيعيان a و b موجبين تماماً وكان $a>b$، وكان d قاسماً مشتركاً لهما:

① أكمل العبارة «كان العددان $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ عددين .... »

② استنتج مما سبق ومن المساواة $\frac{a-b}{d}=\frac{a}{d}-\frac{b}{d}$ أنَّ d يقسم $a-b$.

③ أكمل العبارة « إذا كان d قاسماً لكلٍ من a و b، كان .... »

سنقبل، دون إثبات، أنَّ

$\text{GCD}(a,b)=\text{GCD}(b,a-b)$ في حالة عددين طبيعيين $a>b$.

الحل:

① قواسم $a=18$ هي: $1; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18$

قواسم $b=12$ هي: $1; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12$

قواسم $a-b=6$ هي: الأكبر للعددين a و b هو 6.

والقاسم المشترك الأكبر للعددين b و $a-b$ هو 6.

في حالة $a=25$ و $b=22$

① قواسم $a=25$ هي: 1, 5, 25

قواسم $b=22$ هي: 1, 2, 11, 22

قواسم $a-b=3$ هي: 1, 3.

② القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 1.

والقاسم المشترك الأكبر للعددين a و $a-b$ هو 1.

2. ① « $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ هما عددان صحيحان »

② $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ عددان صحيحان، فحاصل طرحهما $\frac{b}{d}-\frac{a}{d}$ عددٌ صحيح، أي $\frac{a-b}{d}$ عددٌ صحيح،

وهذا يعني d يقسم $a-b$.

③ « إذا كان d قاسماً لكلٍ من a و b، كان d قاسماً للفرق $a-b$.

تحقق من فهمك

① في كلٍ مما يأتي، سمِّ قاسماً مشتركاً للعددين a و b، ثم بسِّطْ الكسر $\frac{a}{b}$.

① $a=18$, $b=32$

قواسم العدد $a=18$ هي: $1,2,3,6,9$

قواسم العدد $b=32$ هي: $1,2,4,8,16$

القاسم المشرك الأكبر للعددين aو b هو: 2

$$\frac{a}{b}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$$

② $a=18$, $b=27$

قواسم العدد $a=18$ هي: $1,2,3,6,9$

قواسم العدد $b=27$ هي: $1,3,9$

القاسم المشرك الأكبر للعددين aو b هو: 9

$$\frac{a}{b}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$$

③ $a=12$, $b=39$

قواسم العدد $a=12$ هي: $1,2,3,4,6$

قواسم العدد $b=39$ هي: $13,3,1$

القاسم المشترك للعددين a وb هو: 3

$$\frac{a}{b}=\frac{12}{39}=\frac{4}{13}$$

④ $a=35$, $b=100$

قواسم العدد $a=35$ هي: $7,5,1$

قواسم العدد $b=100$ هي: $50,25,20,10,5,4,2,1$

القاسم المشترك للعددين a وb هو: 5

$$\frac{a}{b}=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$$

② بسِّطْ ذهنياً، كلاً من الكسور الآتية:

① $\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$ ② $\frac{126}{88}=\frac{63}{44}$ ③ $\frac{24}{39}=\frac{8}{13}$ ④ $\frac{120}{40}=3$

تدربْ

① في كلٍ من الحالات الآتية، اكتب لائحة بقواسم كلٍ من العددين a و b، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر لهما.

① $a=18$, $b=24$

قواسم العدد $a=18$ هي: $9,6,3,2,1$

قواسم العدد $b=24$ هي: $12,8,6,4,3,2,1$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a وb هو: 6

② $a=35$, $b=28$

قواسم العدد $a=35$ هي: $7,5,1$

قواسم العدد $b=28$ هي: $14,7,4,2,1$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a وb هو: 7

③ $a=65$, $b=39$

قواسم العدد $a=65$ هي: $13,5,1$

قواسم العدد $b=39$ هي: $13,3,1$

1

القاسم المشرك الأكبر للعددين a و b هو: 13

② أجب ذهنياً، إن كان العددان a و b أوليين فيما بينهما أم لا.

① $a=4$, $b=7$ العددان أوليان فيما بينهما لأن القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1

② $a=63$, $b=54$ العددان غير أوليين فيما بينهما لأنه يوجد على الأقل قاسم مشترك غير الواحد بين العددين a و b

③ $a=45$, $b=100$ العددان غير أوليين فيما بينهما لأنه يوجد على الأقل قاسم مشترك غير الواحد بين العددين a و b

④ ليكن لدينا العددين 60 ، 36.

① اكتب، بترتيب تصاعدي، القواسم التسعة للعدد 36 والقواسم الاثني عشر للعدد 60 .

قواسم العدد 36 هي: $36,18,12,9,6,4,3,2,1$

قواسم العدد 60 هي: $60,30,20,15,12,10,6,5,4,3,2,1$

② اكتب، بترتيب تصاعدي، القواسم المشتركة للعددين 36 و 60.

القواسم المشتركة للعددين 36 و 60 هي: $12,6,4,3,2,1$

③ استنتج القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين GCD.

القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين هو: 12

③ اكتب، بترتيب تصاعدي، قواسم GCD. مما تكون قد تحققت؟

قواسم GCD هي: $12,6,4,3,2,1$ نكون قد تحققنا من أن القواسم المشتركة للعددين 36 و 60 هي نفسها قواسم GCD

③ كسور مختزلة

الهدف من هذا النشاط:

يهدف النشاط إلى تبسيط الكسر إلى ابسط صيغة باستعمال **الاختصار والقاسم المشترك الأكبر**

ثم يتابع المدرس بمناقشة النشاط في بداية الدرس:

نشاط «اختصار الكسر إلى أبسط صيغة»

1. اختصارات متتالية

أوجد الكسور المساوية لكلٍ من الكسور الآتية وذلك بإجراء اختصارات متتالية، مستفيداً من قابلية القسمة، ثم دلّ على الكسر المختزل المساوي لكلٍّ منها.

① $\frac{21}{18}$ ② $\frac{15}{45}$ ③ $\frac{60}{40}$ ④ $\frac{18}{63}$

الحل: ① $\frac{21}{18}=\frac{7}{6}$ ② $\frac{15}{45}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ③ $\frac{60}{40}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ ④ $\frac{18}{63}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

2. الاختصار والقاسم المشترك الأكبر

ليكن الكسر $F=\frac{1\,595}{2\,639}$

1. أيمكن الاستفادة من قابلية القسمة لاختصار هذا الكسر؟

2. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين $1\,595$ و $2\,639$ بالطريقة التي تراها مناسبة، استنتج ما الكسر المختزل المساوي للكسر F؟

الحل:

1. نعم، يمكن الاستفادة من قابلية القسمة لاختصار هذا الكسر لأنَّ حدَّي الكسر يقبلان القسمة على 2

باقي القسمة	المقسوم عليه	المقسوم	خطوة
1 044	1 595	2 639	1
551	1 044	1 595	2
493	551	1 044	3
58	493	551	4
29	58	493	5
0	29	58	6

2. القاسم المشترك الأكبر للعددين $1\,595$ و $2\,639$ هو 29.

$$F=\frac{1\,595}{2\,639}=\frac{55}{91}$$

1

تحقق من فهمك

① أي الكسور الآتية مختزل وأيها ليس مختزلاً؟ علِّلْ إجابتك.

① $\frac{2}{3}$ الكسر هو كسر مختزل ،لأنه مكتوب بأبسط صورة.

② $\frac{28}{32}$ الكسر ليس مختزل، لأنه يمكن اختزاله وليس مكتوب بأبسط صورة.

③ $\frac{33}{72}$ الكسر ليس مختزل، لأنه يمكن اختزاله وليس مكتوب بأبسط صورة.

④ $\frac{3}{4}$ الكسر هو كسر مختزل ، لأنه مكتوب بأبسط صورة.

⑤ $\frac{10}{7}$ الكسر هو كسر مختزل ، لأنه مكتوب بأبسط صورة.

⑥ $\frac{18}{45}$ الكسر ليس مختزل، لأنه يمكن اختزاله وليس مكتوب بأبسط صورة.

② إذا علمت أنَّ $GCD(312\ ,\ 546) = 78$ ، أوجد الكسر المختزل من الكسر $\frac{312}{546}$.

الكسر المختزل هو : $\frac{312}{546} = \frac{4}{7}$

تدرب

① لدينا العددان $A = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9}$ و $B = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9}$

احسب ناتج كلٍ من العددين واكتبه كسراً مختزلاً.

الحل:

$$A = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{12}{5} - \frac{21}{45} = \frac{108}{45} - \frac{21}{45} = \frac{87}{45} = \frac{29}{9}$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9} = \frac{-7}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{-7}{3} \times 9 = \frac{-63}{3} = -21$$

② لدينا العددان $A=\dfrac{117}{63}$ و $B=\left(3-\dfrac{3}{2}\right)\div\left(-\dfrac{8}{7}\right)$

احسب ناتج كلٍ من العددين واكتبه بصيغة كسرٍ مختزل.

الحل:

$$A=\frac{117}{63}=\frac{13}{7}$$

$$B=\left(3-\frac{3}{2}\right)\div\left(-\frac{8}{7}\right)=(\frac{3}{2})\times\frac{-7}{8}=\frac{-21}{16}$$

③ لدينا العددان $A=\dfrac{12}{5}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{7}{9}$ و $B=\left(\dfrac{2}{3}-3\right)\div\dfrac{1}{9}$

1. اشرح لماذا الكسر A ليس مختزلاً.

2. بسِّطْ الكسر A حتى يصبح مختزلاً.

3. ثبِّتْ الخطوات التي تثبت أنَّ $A-B$ هو عدد حقيقي.

الحل:

(1 $$A=\frac{12}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}=\frac{12}{5}-\frac{21}{45}=\frac{108}{45}-\frac{21}{45}=\frac{87}{45}$$

$A=\dfrac{87}{45}$ الكسر ليس مختزلاً، لأنه غير مكتوب بأبسط صورة.

(2 $$A=\frac{87}{45}=\frac{29}{9}$$

(3

$$A=\frac{87}{45}$$

$$B=\left(\frac{2}{3}-3\right)\div\frac{1}{9}=-21$$

$$A-B=\frac{87}{45}-(-21)=\frac{87}{45}+\frac{945}{45}=\frac{1032}{45}=\frac{344}{9}$$

$A-B$ هو عدد حقيقي لأن ناتج قسمة $\dfrac{344}{9}$ هو عدد حقيقي.

④ اشرح لماذا الكسر $\dfrac{228}{144}$ ليس مختزلاً. بسِّطه حتى يصبح مختزلاً.

الحل:

الكسر $\dfrac{228}{144}$ ليس مختزلاً، لأنه غير مكتوب بأبسط صورة. أبسط صورة هي: $\dfrac{228}{144}=\dfrac{114}{72}=\dfrac{57}{36}$

الجذر التربيعي لعدد موجب

نشاط « إيجاد الجذر التربيعي لعدد موجب »

الجذر التربيعي لعدد موجب

1. **إشارة مربع عدد**

① احسب مربعات الأعداد الصحيحة من 0 حتى 15.

② استنتج مربعات الأعداد $0,2$; $1,4$; $-0,07$; $0,013$

③ اشرح لماذا مربع عدد عادي هو عدد موجب.

الحل:

①

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

②

y	0,2	1,4	0,07	0,013
y^2	0,04	1,96	0,049	0,000169

③ مربع عدد هو جداء ضرب العدد بنفسه، وجداء ضرب عددين لهما نفس الإشارة هو عدد موجب.

2. **الجذور التربيعية وخواصها الأولية**

معلومة:

بشكلٍ عام، الجذر التربيعي لعددٍ موجب a، ويُرمز إليه بالرمز $\sqrt{a}$، هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

① اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

• $\left(\sqrt{3}\right)^2$ • $\left(\sqrt{124}\right)^2$ • $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$

الحل:

• $\left(\sqrt{3}\right)^2 = +3$ • $\left(\sqrt{124}\right)^2 = 124$ • $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية، ثم أكِّدْ طبيعة العدد، هل هو صحيح؟ هل هو عادي عشري؟ هل هو عادي غير عشري؟

• $\sqrt{81}$ • $\sqrt{1.21}$ • $\sqrt{0}$ • $\sqrt{1}$ • $\sqrt{2\ 500}$ • $\sqrt{\frac{1}{25}}$

الحل:

• $\sqrt{81} = 9$ عدد صحيح • $\sqrt{1.21} = 1.1$ عدد عشري

• $\sqrt{0} = 0$ عدد صحيح • $\sqrt{1} = 1$ عدد صحيح

• $\sqrt{2\,500} = 50$ عدد صحيح • $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} = 0,2$ عدد عشري

③ اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

• $\sqrt{8^2}$ • $\sqrt{1.5^2}$ • $\sqrt{\left(\frac{11}{6}\right)^2}$

الحل:

• $\sqrt{8^2} = 8$ • $\sqrt{1,5^2} = 1.5$ • $\sqrt{\left(\frac{11}{6}\right)^2} = \frac{11}{6}$

④ الأعداد الآتية ليست عادية. احصر كلاً منها بين عددين صحيحين متتاليين.

• $\sqrt{7}$ • $\sqrt{18}$ • $\sqrt{150}$

الحل:

• $\sqrt{9} > \sqrt{7} > \sqrt{4}$ ، إذن • $2 < \sqrt{7} < 3$

• $\sqrt{25} > \sqrt{18} > \sqrt{16}$ ، إذن • $4 < \sqrt{18} < 5$

• $\sqrt{169} > \sqrt{150} > \sqrt{144}$ ، إذن • $12 < \sqrt{150} < 13$

3 عمليات مع الجذور التربيعية

① اختزل كلاً من العبارات الآتية:

$A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ ؛ $B = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 11\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ؛ $C = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3}$

الحل:

• $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5+3)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

• $B = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 11\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = (7-11)\sqrt{3} + (-2+3)\sqrt{2} = -4\sqrt{3} + \sqrt{22}$

• $C = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = (3-2)\sqrt{5} + (4-1)\sqrt{3} = \sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

② انشر واختزل كلاً من العبارات الآتية:

$D = \left(\sqrt{6}+1\right)\sqrt{6}$ ؛ $E = \left(3+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$ ؛ $F = 2\sqrt{5}\left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ **:الحل**

• $D = \left(\sqrt{6}+1\right)\sqrt{6} = (\sqrt{6})^2 + \sqrt{6} = 6 + \sqrt{6}$

• $E = \left(3+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right) = 3\times 4 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = 12 + \sqrt{3} - 3 = 9 + \sqrt{3}$

• $F = 2\sqrt{5}\left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{5}\times 3 - 2\sqrt{5}\times\frac{3}{2}\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

③ أنجز الجداءات الآتية:

$G = 2\sqrt{3}\times 5\sqrt{3}$ ؛ $H = \frac{2}{3}\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ؛ $I = -4\sqrt{11}\times 2.5\sqrt{11}$

الحل:

- $G = 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 2 \times 5 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 10 \times 3 = 12$
- $H = \dfrac{2}{3}\sqrt{2} \times \dfrac{3}{2}\sqrt{2} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 \times 2 = 2$
- $I = -4\sqrt{11} \times 2.5\sqrt{11} = -4 \times 2.5 \times \left(\sqrt{11}\right)^2 = -10 \times 11 = -110$

تحقق من فهمك

① اكتب بصيغة $\sqrt{a}$ مع a عدد صحيح موجب.

❶ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ❷ $\sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{75}$ ❸ $\sqrt{7} \times \sqrt{13} = \sqrt{82}$

② اكتب بصيغة عدد صحيح.

❶ $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

❷ $\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$

❸ $\sqrt{7} \times \sqrt{63} = \sqrt{441} = 21$

❸ $\sqrt{7} \times \sqrt{63} = \sqrt{441} = 21$

تدرب

① اكتب بصيغة $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ مع a و b عددان صحيحان موجبان.

❶ $\sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$

❷ $\sqrt{38} = \sqrt{19} \times \sqrt{2}$

❸ $\sqrt{15} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}$

② اكتب بصيغة جذر تربيعي لكسر مختزل.

الهدف من السؤال:

ما تحت الجذر التربيعي كسر مختزل بصيغة $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

❶ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\dfrac{3}{12}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}}$

❷ $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{10}{8}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}}$

❸ $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\dfrac{13}{26}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

③ اكتب بأبسط ما يمكن.

❶ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \times 4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

❷ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3\times 4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1} = 2$

❸ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9\times 5}} = \frac{1}{3}$

④ أعد كلاً من المقادير الآتية إلى أبسط ما يمكن.

❶ $A = 3\sqrt{2} - 4 + 5\sqrt{2} + 1 = 8\sqrt{2} - 3$

❷ $B = 3\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{2} = 4\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$

❸ $C = 2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}\times 4\sqrt{2} = 6\sqrt{25}\times 4\sqrt{2} = 6\times 5\times 4\sqrt{2} = 120\sqrt{2}$

⑤ فيما يأتي، انشر ثم بسِّط المقدار

❶ $\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$

❷ $\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2} + 2$

❸ $\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(4+2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} + 3$

⑥ اكتب العدد $3\sqrt{8}$ بالصيغة $\sqrt{c}$ حيث c عدد صحيح موجب.

$3\sqrt{8} = \sqrt{9\times 8} = \sqrt{72}$

⑦ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالصيغة $\sqrt{c}$ حيث c عدد صحيح موجب.

❶ $7\sqrt{5} = \sqrt{245}$

❷ $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

❸ $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$

❹ $5\sqrt{6} = \sqrt{150}$

⑧ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالصيغة $\sqrt{c}$ حيث c عدد صحيح موجب.

❶ $\frac{\sqrt{48}}{4} = \sqrt{\frac{48}{16}} = \sqrt{3}$

❷ $\frac{\sqrt{50}}{5} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$

❸ $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

❹ $\frac{\sqrt{108}-\sqrt{27}}{3} = \frac{\sqrt{4\times 27}-\sqrt{27}}{3} = \frac{2\sqrt{27}-\sqrt{27}}{3} = \sqrt{\frac{27}{9}} = \sqrt{3}$

⑨ عبِّر ذهنياً عن الكسور الآتية بكسور مختزلة.

❶ $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ❷ $\frac{\sqrt{1}}{4} = \frac{1}{4}$

❸ $\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}$ ❹ $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

1

تمرينات ومسائل

تأتي لتمكين المدرس من مراعات الفروق الفردية لطلابه وتمكن الطالب من ربط المفاهيم التي تعلمها الطالب في الوحدة وأيضا ربط هذه المفاهيم مع ما تعلمه الطالب سابقاً.

المسألة الأولى: من مسائل الوحدة تتضمن عدداً من الأسئلة الموضوعية وثلاث إجابات مقترحة يجب مناقشتها مع الطلبة وهي تضمن أغلب افكار مسائل الوحدة ولكن بصيغة الاختيار من متعدد ويتعلم منها الطالب طريقة التفكير باختيار الحل المناسب (مهارة التفكير الاستقصائي) قبل البدء بحل مسائل الوحدة.

1 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ يساوي

① $\frac{20}{48}$ ② $-\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{12}$

(2) مساحة قرص دائري نصف قطره 5 cm تساوي $25\pi\ cm^2$، هذه المساحة هي

① عدد غير عادي ② عدد عادي ③ عدد عشري

(3) القاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 63 هو

① 3 ② 9 ③ 12

(4) القاسم المشترك الأكبر للعددين 126 و 252 هو

① 3 ② 9 ③ 126

(5) أيُّ الكسور الآتية مختزل

① $\frac{224}{330}$ ② $\frac{17}{35}$ ③ $\frac{378}{465}$

(6) العدد $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

① صحيح ② عادي غير صحيح ③ غير عادي

(7) العدد $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{300}$ يساوي

① $3\sqrt{3}$ ② $-3\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{5}$

(8) عند حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3105 و 920 باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي، نجد نواتج الطرح:

① 2185, 1265, 345, 575, 230, 115, 0

② 345, 230, 115, 0

③ 1265, 390, 95, 10, 5, 0

(9) باستعمال خوارزمية إقليدس، القاسم المشترك الأكبر هو:

① أول باقٍ غير معدوم نحصل عليه.

② آخر باقٍ غير معدوم نحصل عليه.

③ آخر خارج قسمة غير معدوم نحصل عليه.

(10) القاسم المشترك الأكبر للعددين 942 و 774 هو ① 2 ② 6 ③ 5

2

في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

		①	②	③
(1)	$\frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{3}\right)$ يساوي	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{4}{15} \times \frac{5}{6}$	$\frac{6}{5} \times \frac{-15}{4}$
(2)	$\frac{4}{7} \times \frac{21}{2} - \frac{1}{2}$ هو عدد	عشري	عادي	غير عشري
(3)	$\frac{16}{9} \times \frac{3}{4}$ هو عدد	عشري	عادي	غير عشري

(4) ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 3cm يساوي

① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm ② $\sqrt{\frac{27}{4}}$ cm ③ 2.598 cm

(5) القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 45 يساوي

① القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 62

② القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 107×45

③ الواحد.

3

قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) $\frac{5}{13}$ عدد عشري.

الحل: لا أوافق، $\frac{5}{13}$ لا يمكن كتابته بالشكل: $a \times 10^{n}$، حيث a و n عددان صحيحان.

(2) 0.25 عدد عادي.

الحل:موافق، لأن 0.25 يمكن كتابته بالشكل: $0.25 = \frac{25}{100}$.

(3) $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \times \pi$ عدد غير عادي.

الحل: لا أوافق، لأن $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \times \pi = \frac{7}{3}$ و $\frac{7}{3}$ هو عدد عادي.

(4) $\frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$

الحل:أوافق، لأن $\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}}$

(5) العددان 60 و 120 لهما نفس العدد من القواسم.

الحل:لا أوافق، لأن 120 له قاسم إضافي عن العدد 60 وهو العدد نفسه 120

(6) 15 هو قاسم مشترك للعددين 45 و 60، إذن 15 يقسم 105 أيضاً.

الحل:أوافق، لأنه إذا كان d قاسم للعددين a و b، فإن d قاسم أيضاً لـ $a-b$ و $a+b$

(7) a و b يرمزان إلى عددين صحيحين موجبين تماماً. إذا كان b قاسماً للعدد a، كان b القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

الحل:أوافق، لأنه إذا كان العددين 12 و 6 والعدد 6 قاسم للعدد 12 إذن لا يوجد عدد أكبر من العدد 6 يكون قاسم مشترك أكبر للعددين 12 و 6

(8) القاسم المشترك الأكبر للعدد 127 وأحد مضاعفات العدد 7 يمكن أن يكون العدد 7.

الحل:لا أوافق، لأن 127 لا يقبل القسمة على 7

(9) نصف $\sqrt{36}$ يساوي $\sqrt{18}$.

الحل:لا أوافق، لأن نصف $\sqrt{36}$ هو: $\frac{\sqrt{36}}{2} = 3$

(10) $\frac{121\,110\,987\,654\,321}{123\,456\,789\,101\,112}$ كسرٌ مختزل. (اجمع الأعداد من 1 حتى 12).

الحل:

لا أوافق، لأن كل من البسط والمقام يقبل القسمة على 3.

4 لدينا الأعداد الآتية:

① $\frac{7}{5} \times \frac{-15}{7}$ ② $3 \times \frac{20}{9}$ ③ $\frac{5}{3} \times \frac{12}{25}$

1. احسب ناتج كلٍ منها بصيغة كسر عادي.

2. واحد فقط من النواتج التي حصلنا عليها عدد صحيح. أيٌّ منها؟

الحل:

.1 ① $\frac{7}{5} \times \frac{-15}{7} = \frac{-3}{1}$ ② $3 \times \frac{20}{9} = \frac{20}{3}$ ③ $\frac{5}{3} \times \frac{12}{25} = \frac{4}{5}$

.2 $\frac{7}{5} \times \frac{-15}{7} = \frac{-3}{1}$

5 واحد فقط من الأعداد الآتية هو عدد صحيح. تحقق منه.

$A = \frac{5}{7} \div \frac{-10}{3}$ $B = \frac{4}{3} \div \frac{2}{3}$ $C = \frac{-3}{2} \div \frac{-9}{8}$

الحل:

$A=\frac{5}{7}\div\frac{-10}{3}=\frac{-3}{14}$

$B=\frac{4}{3}\div\frac{2}{3}=2$ هو العدد الصحيح

$C=\frac{-3}{2}\div\frac{-9}{8}=\frac{4}{3}$

6 جميع الأعداد الآتية عشرية ما عدا واحداً منها. اشرح لماذا.

① $A=\frac{153}{10}$ ② $B=-\frac{7}{4}$ ③ $C=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ④ $D=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

الحل:

① $A=\frac{153}{10}=153\times10^{-1}$ إذن A هو عدد عشري لأنه كُتب بالشكل: $a\times10^{n}$ ، حيث a و n عددان صحيحان.

② $B=-\frac{7}{4}=\frac{-175}{100}=-175\times10^{-2}$ إذن B هو عدد عشري لأنه كُتب بالشكل: $a\times10^{n}$ ، حيث a و n عددان صحيحان.

7 عبِّر عن كلٍ من الجمل الثلاث الآتية بصيغة « قاسم »

① 75 مضاعف للعدد 15 . ② 2 يقسم 24 . ③ 35 يقبل القسمة على 7

الحل:

① 75 مضاعف للعدد 15: العدد 15 هو قاسم للعدد 75.

② 2 يقسم 24: العدد 2 هو قاسم للعدد 24.

③ 35 يقبل القسمة على 7: العدد 7 هو قاسم للعدد 35.

8 حسبت سلمى:

① ثلاثة أمثال $\sqrt{5}$. ② نصف $\sqrt{18}$. ③ مثلي جداء العددين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$.

فكانت النواتج: ① $\sqrt{45}$. ② 9. ③ $\sqrt{234}$.

قل مع التعليل إن كنت متفقاً مع هذه الإجابات أم لا.

الحل:

① أوافق لأن: $3\sqrt{5}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{45}$

1

② لا أوافق لأن: $\sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{2}$

③ لا أوافق لأن: $\sqrt{56} = 2\sqrt{2}\sqrt{7}$

9 أنا عددٌ، مربعي يساوي ثلاثة أمثال 12 وليس لي جذرٌ تربيعي، فمن أنا؟

الحل:

ثلاثة أمثال العدد 12 هو 36 وللعدد 36 جذران تربيعيان $+6$ و -6 إذن العدد هو -6.

10 هل العددان a و b أوليان فيما بينهما؟

① $a = 130$ و $b = 232$ ② $a = 130$ و $b = 231$ ③ $a = 170$ و $b = 165$

الحل:

① $a = 130$ و $b = 232$ العددان a و b غير أوليان فيما بينهما لأنه يوجد قاسم واحد على الأقل مشترك بينهما وهو العدد 2

② $a = 130$ و $b = 231$ العددان a و b أوليان فيما بينهما لأنه لا يوجد بينهما ولا قاسم مشترك

③ $a = 170$ و $b = 165$ العددان a و b غير أوليان فيما بينهما لأنه يوجد قاسم واحد على الأقل مشترك بينهما وهو العدد 5

11 $ABCD$ مستطيل، بعداه $AB = \left(\sqrt{5} + \sqrt{20}\right)$ cm و $BC = \left(\sqrt{80} - \sqrt{45}\right)$ cm.

احسب محيط هذا المستطيل، ثم اكتبه بالصيغة $a\sqrt{5}$.

الحل:

محيط المستطيل $ABCD$ هو:

$$\begin{aligned}
AB + BC &= \left(\sqrt{80} - \sqrt{45}\right) + \left(\sqrt{5} + \sqrt{20}\right) \\
&= \left(\sqrt{16 \times 5} - \sqrt{9 \times 5}\right) + \left(\sqrt{5} + \sqrt{4 \times 5}\right) \\
&= \left(4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\right) \\
&= \sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\
&= 4\sqrt{5}
\end{aligned}$$

والمحيط $8\sqrt{5}$

12 اعتمد على خواص قابلية القسمة لإعادة كلٍ من الكسور الآتية إلى صيغة كسر صافٍ.

① $a = \frac{90}{126}$ ② $b = \frac{495}{270}$ ③ $c = \frac{168}{264}$

الحل:

① $a=\frac{90}{126}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$ ② $b=\frac{495}{270}=\frac{99}{54}=\frac{11}{6}$ ③ $C=\frac{168}{264}=\frac{7}{11}$

13 باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي، أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

هل هذان العددان أوليان فيما بينهما؟ لماذا؟

$a=357$ و $b=204$ $a=2\,463$ و $b=1\,036$

$a=657$ و $b=527$ $a=2\,886$ و $b=1\,258$

الحل: $a=357$ و $b=204$

خطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	357	204	123
2	204	123	81
3	123	81	42
4	81	42	39
5	42	39	3
6	39	3	0

إذاً القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 3 إذاً a و b غير أوليين فيما بينهما

$a=2\,463$ و $b=1\,036$

خطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	2 463	1 036	391
2	1 036	391	254
3	391	254	137
4	254	137	117
5	137	117	20
6	117	20	17
7	20	17	3
8	17	3	2
9	3	2	1

أوليين فيما بينهما القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1

$a=657$ و $b=527$

خطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	657	527	130
2	527	130	7
3	130	7	4
4	7	4	3
5	4	3	1

أوليين فيما بينهما القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1

$b = 1\ 258$ و $a = 2\ 886$

خطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	657	527	130
2	527	130	7
3	130	7	4
4	7	4	3
5	4	3	1

$b = 1\ 258$ و $a = 2\ 886$

خطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	2886	1 258	370
2	1 258	370	238
3	370	238	132
4	238	132	106
5	132	106	26
6	106	26	2
7	26	2	0

إذاً القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 2 إذاً a و b غير أوليين فيما بينهما

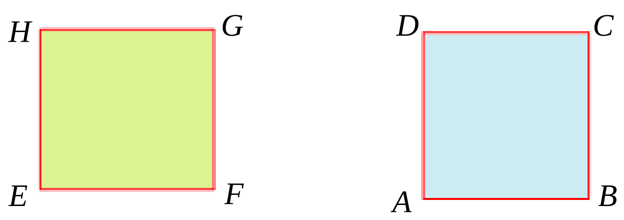
لإحراز تقدم

تأتي هذه التمارين والمسائل لتنمي قدرات الطلاب وتكون بمثابة تعلم من خلال التمارين والأنشطة وكذلك ليتعلم الطالب تحرير النصوص وحلولها فصياغة الحل صياغة سليمة لا تقل أهمية عن معرفة هذه الحلول.

14 $ABCD$ مربع طول ضلعه $AB = \sqrt{20} + 1$.

$EFGH$ مستطيل بعداه $EF = \sqrt{45} - 1$ و $FG = \sqrt{5} + 3$.

أثبت أنَّ محيطي هذين الشكلين متساويان.



الحل:

محيط $ABCD = 4 \times (\sqrt{20} + 1) = 4\sqrt{20} + 4 = 8\sqrt{5} + 4$

محيط $EFGH = 2(\sqrt{5} + 3) + 2(\sqrt{45} - 1) = 2\sqrt{5} + 6 + 2\sqrt{45} - 2 = 2\sqrt{5} + 6 + 6\sqrt{5} - 2 = 8\sqrt{5} + 4$

15 معادلة ومتابعة عمليات

1. أنجز حساب $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\right)$، واكتب الناتج بصيغة كسر صافٍ.

2. يملك شخص قطعة أرض. في عام 2012 باع ربعها، وفي عام 2013 باع أربع أخماس الباقي.

① ما كسر مساحة الأرض التي باعها عام 2013؟

② ما كسر مساحة الأرض الباقية بعد عمليتي البيع؟

③ بقي لدى المالك بعد عمليتي البيع ستة هيكتارات، ما مساحة ما كان يملك قبل البيع؟

الحل:

.1 $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\right)=1-\left(\frac{17}{20}\right)=\frac{3}{20}$

.2 ① $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

② $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\right)=1-\left(\frac{17}{20}\right)=\frac{3}{20}$

③ المساحة التي يملكها قبل البيع هي: $40=6\times\frac{20}{3}=\frac{6}{\frac{3}{20}}$

16 العدد π

من المعلوم أنَّ π هو عدد غير عادي (هو خارج قسمة طول قوس كل دائرة على طول قطرها) غير أنَّ بعض الكسور تعبر عن قيم تقريبية لهذا العدد. منها:

- $\frac{22}{7}$ (من قبل أرخميدس، عالم إغريقي من القرن الثالث قبل الميلاد)
- $\frac{355}{113}$ (من قبل زي شونكزي، عالم صيني نحو القرن الخامس الميلادي)

1. استعن بآلة حاسبة لحساب القيمة التقريبية لكل من الكسور السابقة لستة أرقام عشرية.

2. أثبت أنَّ كلاً من الكسور السابقة هو كسر صاف.

17 طبيعة عدد

لدينا العدد $A=\frac{153}{136}-\frac{3}{8}$

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 153 و 136 بتفاصيل الخوارزمية التي تستخدمها.

2. احسب A وضعه بصيغة كسرٍ صاف.

3. هل A عدد عشري؟ هل هو عدد عادي؟ علِّلْ إجاباتك.

1

الحل:

.1

القسمة الإقليدية	باقي القسمة	المقسوم عليه	المقسوم
$153 = 136 \times 1 + 17$	17	136	153
$136 = 17 \times 8 + 0$	0	17	136

القاسم المشترك الأكبر للعددين 153 و 136 هو 17

.2 $A = \frac{153}{136} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

.3 $\frac{3}{4}$ هو عدد عشري لأننا نستطيع كتابته بالشكل $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75 \times 10^{-2}$ وهو عدد عادي أيضاً لأنه يُكتب بالشكل: $\frac{a}{b}$ مع كون a عدد صحيح و b عدد طبيعي لايساوي الصفر.

18 مربع

$ABCD$ مستطيل. و $AB = \left(\sqrt{27} + \sqrt{3}\right)$ cm و $BC = \sqrt{48}$ cm.

.1 أثبت أنَّ $ABCD$ هو مربع.

.2 احسب كلاً من محيط ومساحة هذا المربع.

الحل:

.1 $AB = \left(\sqrt{27} + \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{9 \times 3} + \sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 16} = 4\sqrt{3}$

$ABCD$ هو مربع.

.2 محيط المربع= $4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ وحدة طول.

مساحة المربع= $4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 16 \times 3 = 48$ وحدة مساحة.

19 مع الأعداد الأولية

العدد الأولي هو كل عدد صحيح موجب له قاسمان مختلفان ، هما 1 والعدد نفسه.

على سبيل المثال:

3 عدد أولي، لأنه يقبل بالضبط قاسمين هما 1 و3.

1 ليس أولياً، لأنْ ليس له سوى قاسم واحد هو 1.

.1 هل الصفر عدد أولي؟ لماذا؟

.2 اكتب الأعداد الأولية المحصورة تماماً بين 1 و10.

3. لدينا العددان $a = 2\times3\times5$ و $b = 2^2\times5\times7$ وهما بصيغة مضاريب أولية.

أجب عن الأسئلة الآتية دون حساب a و b.

① هل العدد 2 قاسمٌ للعدد b؟

② هل العدد 6 قاسمٌ للعدد a؟

③ هل العدد 7 قاسمٌ للعدد a؟

④ ما القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

الحل:

1. الصفر ليس أولي، له أكثر من قاسمان .

2. الأعداد الأولية المحصورة تماماً بين 1 و10هي $(2,3,5,7)$

3. ① نعم العدد 2 قاسم للعدد b

② نعم العدد6 قاسم للعدد a ③ لا،العدد7 ليس قاسم للعدد a

④ القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bهو 10

20 جميع أعداد حسب طبيعتها

لدينا مجموعة الأعداد:

$$\frac{4}{3},\ -\frac{48}{6},\ 25\pi,\ 0.3,\ -\frac{1}{4},\ 10^5,\ -\frac{5}{2},\ 7,\ \frac{5}{11},\ \frac{27}{100},\ 10^{-2},\ \frac{\pi}{4}$$

ضع هذه الأعداد في أماكنها من الجدول الآتي:

أعداد صحيحة	7	$-\frac{48}{6}$	10^5							
أعداد عشرية	10^{-2}	$\frac{27}{100}$	10^5	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{2}$	0.3				
أعداد عادية	$\frac{5}{11}$	0.3	$-\frac{48}{6}$	$\frac{4}{3}$						
أعداد غير عادية	$\frac{\pi}{4}$	25π								

نلاحظ أن بعض الأعداد وضعت في أكثر من خانة لأن الأعداد العشرية هي أعداد عادية وبعض الأعداد العادية هي أعداد صحيحة.

تمرينات ومسائل إضافية

(1) باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

هل هذان العددان أوليان فيما بينهما؟ علِّلْ إجابتك.

$a = 569$ و $b = 456$ $a = 20\ 153$ و $b = 11\ 516$

$a = 5\ 678$ و $b = 629$ $a = 263$ و $b = 1\ 520$

الحل:

المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة	القسمة الإقليدية
569	456	113	$569 = 456 \times 1 + 113$
456	113	4	$456 = 113 \times 4 + 4$
113	4	1	$113 = 4 \times 28 + 1$

$a = 569$ و $b = 456$

إذا العددين a وb أوليين فيما بينهما القاسم المشترك الأكبر لهما هو الواحد

$a = 20\ 153$ و $b = 11\ 516$

المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة	القسمة الإقليدية
20 153	11 516	8637	$20\ 153 = 11516 \times 1 + 8637$
11 516	8637	2879	$11\ 516 = 8637 \times 1 + 2879$
8637	2879	0	$8637 = 3 \times 2879$

إذا العددين a وb غير أوليين فيما بينهما لأن القاسم المشترك الأكبر لهما هو 2879

$a = 5\ 678$ و $b = 629$

المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة	القسمة الإقليدية
5 678	629	80	$5\ 678 = 629 \times 9 + 80$
629	80	69	$629 = 80 \times 7 + 69$
80	69	11	$80 = 69 \times 1 + 11$
69	11	3	$69 = 11 \times 6 + 3$
11	3	2	$11 = 3 \times 3 + 2$
3	2	1	$3 = 2 \times 1 + 1$

إذا العددين a وb أوليين فيما بينهما القاسم المشترك الأكبر لهما هو الواحد

$a = 263$ و $b = 1\ 520$

المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة	القسمة الإقليدية
1 520	263	205	$1\ 520 = 5 \times 263 + 205$
263	205	58	$263 = 1 \times 205 + 58$
205	58	31	$205 = 58 \times 3 + 31$
58	31	27	$58 = 31 \times 1 + 27$
31	27	4	$31 = 27 \times 1 + 4$
27	4	3	$27 = 4 \times 6 + 3$
4	3	1	$4 = 3 \times 1 + 1$

إذا العددين a وb أوليين فيما بينهما القاسم المشترك الأكبر لهما هو الواحد

(2) اكتب كلاً من الكسور الآتية بمقامات خالية من الجذور:

❶ $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ❷ $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}}$ ❸ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ❹ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}}$

الحل:

❶ $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ❷ $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ❸ $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ❹ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) اكتب كل عدد بالصيغة $a\sqrt{b}$ مع a عدد صحيح و b عدد صحيح موجب وأصغر ما يمكن.

❶ $A = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$ ❷ $B = \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$

الحل:

❶ $A = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

$A = 9\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - 15\sqrt{7} = -10\sqrt{7}$

❷ $B = \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$

$= \sqrt{4 \times 6} + \sqrt{9 \times 6} - \sqrt{25 \times 6}$

$= 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = 0$

انتهت الوحدة الأولى

2

الوحدة الثانية

قوى الأعداد العادية- الحساب بالرموز

1 قوة عدد عادي

2 النشر والتحليل

3 مطابقات شهيرة

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الاسبوع
1- قوة عدد عادي	2	تشرين أول	الثالث
2- النشر والتحليل	1	تشرين أول	الرابع
3- مطابقات شهيرة	2	تشرين أول	الرابع
تمرينات ومسائل	4	تشرين ثاني	الأول والثاني
اختبار	1	تشرين ثاني	الثاني
المجموع	10		4

هذا التوزيع تقريبي وبإمكان المدرس أن يخطط بموجبه حسب مستوى طلابه من صف لأخر ممكن اضافة أو اختصار حصة لهذا التوزيع .

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
قوة عدد عادي	a^n حيث a عدد عادي غير معدوم و n عدد صحيح
الصيغة المعيارية لعدد عشري	$a \times 10^n$ حيث a عدد عادي غير معدوم و n عدد صحيح
مطابقات شهيرة	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ حيث a و b أعداد عادية
نشر مقدار	$(ax+b)(cx+d)$ المقصود بالنشر هو فك الأقواس
تحليل مقدار	$(ax^2 - bx)$ المقصود بالتحليل هو تحويله إلى جداء أقواس

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
القوة وخواصها	قوة عدد عادي
التعبير الفظي	النشر والتحليل
الصيغة المعيارية	مطابقات شهيرة

2

مقدمة الوحدة:

لاحظ مفردات المقدمة : تقدم معلومة تاريخية إضافة إلى معلومة علمية كمادة إثراءً للمتعلم

قوى الأعداد العادية-الحساب بالرموز

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. رمز القوة

الكتابة 4^3 تعني:

① 4×3 ② $4\times 4\times 4$ ③ $3\times 3\times 3\times 3$

2. جداء قوتين للعدد 10

$10^3\times 10^{-4}$ يساوي:

① 10^{-12} ② -10 ③ 0.1

3. كتابة عدد عشري بالصيغة المعيارية

الصيغة المعيارية للعدد 450.1 هي:

① 4.501×10^2 ② 4501×10^{-1} ③ 0.4501×10^3

4. ترميز تعبير لفظي

في حالة n عدد صحيح، مربع العدد الصحيح التالي للعدد n هو:

① n^2+1 ② $2(n+1)$ ③ $(n+1)^2$

5. اختزال مجموع

كتابة أخرى للمقدار $2x+3x$ هي:

① $6x^2$ ② $5x^2$ ③ $5x$

6. نشر واختزال عبارة رمزية

بعد نشر واختزال المقدار $(2x+5)(3x-4)$، نحصل على:

① $6x^2-20$ ② $5x+1$ ③ $6x^2+7x-20$

7. تحليل عبارة رمزية إلى جداء مضاريب

يمكن تحليل المقدار $3x^2-12x$ إلى:

① $3x(x-12)$ ② $-9x$ ③ $3x(x-4)$

قوة عدد عادي

نشاط « إيجاد قوة عدد عادي »

1. ربح متسابق

في إحدى المسابقات التلفزيونية، طُرح على متسابقٍ 15 سؤالاً. يربح المتسابق 3 نقاط إذا أجاب عن السؤال الأول . بعدئذ، يربح المتسابق عن كل إجابة إضافية صحيحة ثلاثة أمثال ربحه في السؤال السابق.

① استعمل رمز القوة للتعبير عن ربح المتسابق في كلٍ من الحالات الآتية:

- أداء إجابتين صحيحتين $3\times3=3^2$
- أداء 5 إجابات صحيحة
- أداء 8 إجابات صحيحة

② ما أكبر ربح يمكن أن يحققه المتسابق؟

③ اكتب كلّاً من الأعداد الآتية بالصيغة 3^n حيث n عدد صحيح موجب.

❶ $3\times3\times3\times3$ ❷ $3^2\times3^4$ ❸ 3×3^5

استعمل تعريف القوة. مثلاً: $3^5=3\times3\times3\times3\times3$

2. أُسس سالبة

① 1 نانومتر يعادل 10^{-6} mm ونرمزه nm .

انسخ ثم أكمل: $1\text{ nm}=\dfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}\text{ mm}=0.\cdots\cdots\cdots\text{ mm}$.

② اكتب 2^{-4} بصيغة كسر ، ثم بصيغة كسر عشري.

③ اكتب بصيغة قوة عدد صحيح كلاً من الأعداد: • $\dfrac{1}{7^2}$ • $\dfrac{1}{10^8}$ • $\dfrac{1}{5^{-3}}$ • $\dfrac{1}{10^{-9}}$

إذا كان a عدداً عادياً غير معدوم و n عدداً طبيعياً، كان $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ويكون a^{-n} مقلوب a^n.

3. القوى والعمليات

① استفد من تعريف القوة لتكتب كلّاً من الأعداد الآتية بصيغة قوة عدد صحيح:

- $2^3\times2^{-5}$
- $4^{-3}\times4^9$
- $\dfrac{7^6}{7^4}$
- $\dfrac{5^5}{5^{-2}}$
- $(3^5)^{-3}$
- $(2^{-5})^5$
- $\dfrac{10^3}{5^3}$
- $2^3\times5^3$

② إذا كان a و b عددين عاديين غير معدومين، وإذا كان n عدداً صحيحاً فاكتب بصيغة قوة لعدد عادي كلاً مما يلي:

- $a^n \times a^m$
- $\dfrac{a^n}{a^m}$
- $\left(a^m\right)^n$
- $a^n \times b^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n}$

تحقق من فهمك

① اكتب كلّاً من الأعداد الآتية بالصيغة العشرية.

❶ 10^3 ❷ 10^{-1} ❸ 10^{-4}

❹ 5^{-2} ❺ $(-3)^2$ ❻ 2^{-1}

الحل

❶ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$

❷ $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

❸ $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0.00001$

❹ $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25} = \dfrac{1 \times 4}{25 \times 4} = \dfrac{4}{100} = 0.4$

❺ $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

❻ $2^{-1} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 \times 5}{2 \times 5} = \dfrac{5}{10} = 0.5$

② اكتب كلاً من الأعداد الآتية بصيغة قوة 10.

❶ $100\,000$ ❷ 0.01 ❸ 0.00001

الحل

❶ $100\,000 = 10^5$

❷ $0.01 = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$

❸ $0.00001 = \dfrac{1}{10\,000} = \dfrac{1}{10^4} = 10^{-4}$

تدرب

① انسخ وأكمل.

❶ $2^2 \times 2^5 = 2^{\cdots}$ ❷ $6^3 \times 6^{-4} = 6^{\cdots}$

❸ $\dfrac{7^5}{7^2} = 7^{\cdots}$ ❹ $\dfrac{10^7}{10^{-1}} = 10^{\cdots}$

الحل

❶ $2^2 \times 2^5 = 2^{2+5} = 2^7$ ❷ $6^3 \times 6^{-4} = 6^{3-4} = 6^{-1}$

❸ $\frac{7^5}{7^2}=7^{5-2}=7^3$ ❹ $\frac{10^7}{10^{-1}}=10^{7+1}=10^8$

② انسخ وأكمل.

❶ $\left(3^4\right)^5=3^{\cdots}$ ❷ $\left(2^{-3}\right)^2=2^{\cdots}$

❸ $\left(6^{-3}\right)^{-1}=6^{\cdots}$ ❹ $(-3y)^2=\cdots\times y^{\cdots}$

الحل

❶ $\left(3^4\right)^5=3^{4\times5}=3^{12}$ ❷ $\left(2^{-3}\right)^2=2^{-3\times2}=2^{-6}$

❸ $\left(6^{-3}\right)^{-1}=6^{(-3)\times(-1)}=6^3$ ❹ $(-3y)^2=9\times y^2$

③ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بصيغة قوة عدد واحد.

❶ $5^3\times2^3$ ❷ $4^2\times2^5$ ❸ $\frac{2^3}{5^3}$

❹ $\frac{10^7}{20^7}$ ❺ $\frac{25^3}{5^3}$ ❻ $\frac{2^7}{8^7}$

الحل

❶ $5^3\times2^3=(5\times2)^3=10^3$ ❷ $4^2\times2^5=(2^2)^2\times2^5=2^4\times2^5=2^{4+5}=2^9$

❸ $\frac{2^3}{5^3}=\left(\frac{2}{5}\right)^3$ ❹ $\frac{10^7}{20^7}=\left(\frac{10}{20}\right)^7=\left(\frac{1}{2}\right)^7$

❺ $\frac{25^3}{5^3}=\left(\frac{25}{5}\right)^3=5^3$ ❻ $\frac{2^7}{8^7}=\left(\frac{2}{2\times4}\right)^7=\left(\frac{1}{4}\right)^7$

④ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بصيغة كسر عادي.

❶ $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ❷ $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$ ❸ $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

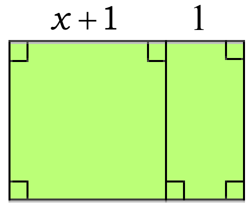
الحل

❶ $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$ ❷ $\left(-\frac{5}{2}\right)^3=\frac{(-5)^3}{2^3}=\frac{-125}{8}$ ❸ $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1^4}{2^4}=\frac{1}{16}$

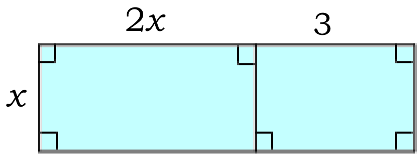
2 النشر والتحليل

نشاط « استعمال المساحات في النشر»

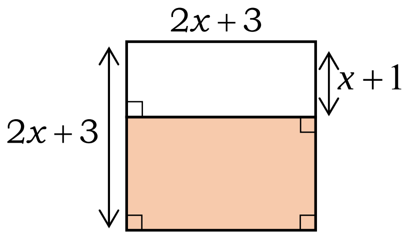
يرمز x إلى عدد موجب. في كلٍ من الحالات الثلاث الآتية:



$* \quad C=(x+1)^2+x+1$



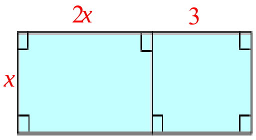
$* \quad A=2x^2+3x$



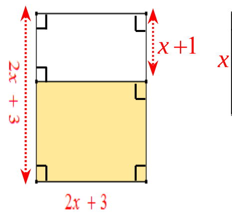
$* \quad B=(2x+3)^2-(2x+3)(x+1)$

1. في كل حالة، تحقق من أنَّ المقدار المعطى بدلالة x، يساوي مساحة المستطيل الملون.
2. استعمل الشكل لتتمكن من كتابة المقدار بصيغة جداء مضروبين.
3. حلِّل المقدار $E=(y+1)(y+2)+5(y+2)$ إلى جداء مضروبين.

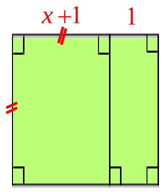
الحل:



① $A=2x^2+3x$



② $B=(2x+3)^2-(2x+3)(x+1)$



③ $C=(x+1)^2+x+1$

1. مساحة المستطيل هي الطول * العرض

① $2x^2=x\times 2x$ و $3x$، إذن $A=2x^2+3x$

② $(2x+3)^2$ و $(2x+3)(x+1)$ ،إذن $B=(2x+3)^2-(2x+3)(x+1)$

③ $(x+1)^2$ و $x+1=1\times(x+1)$ ،إذن $C=(x+1)^2+x+1$

2. ① $A=x(2x+3)$ ② $B=(2x+3)(x+2)$ ③ $C=(x+1)(x+2)$

3. $E=(y+1)(y+2)+5(y+2)=(y+2)(y+1+5)=(y+2)(y+6)$

تحقق من فهمك

① انشر كلاً من المقادير الآتية: ❶ $2(x-5)$ ❷ $-4(3y-2)$

الحل

❶ $2(x-5)=2\times x-2\times 5=2x-10$

❷ $-4(3y-2)=-4\times 3y-4\times -1=-12y+4$

② حلل العبارة: ❶ $A=2x^2-3x$ ❷ $B=(x+3)^2+6(x+3)$

الحل

❶ $A=2x^2-3x=x(2x-3)$

❷ $B=(x+3)^2+6(x+3)=(x+3)(x+3+6)=(x+3)(x+9)$

تدرب

① انشر ثم اختزل كلاً من المقادير الآتية:

❶ $A=(x+2)(x+3)$ ❷ $B=(x-3)(x-5)$

❸ $C=(y-3)(2y+1)$ ❹ $D=(x+2y)(2x-y)$

الحل

❶ $A=x\times x+x\times 3+2\times x+2\times 3=x^2+(3+2)x+6=x^2+5x+6$

❷ $B=x^2-5x-3x+15=x^2-8x+15$

❸ $C=2y^2+y-6y-3=2y^2-5y-3$

❹ $D=2x^2-xy+4xy-2y^2=2x^2+3xy-2y^2$

② لدينا $E=(2x-3)(x+2)-5(2x-3)$. ❶ انشر ثم اختزل E. ❷ حلِّل E.

الحل **.1** $E=2x^2+4x-3x-6-10x+15=2x^2-9x+9$

.2 $E=2x^2-6x-3x+9=2x(x-3)-3(x-3)=(x-3)(2x-3)$

③ في كل مما يأتي عيّن عاملاً مشتركاً، ثم حلِّل واختبر المساواة التي حصلت عليها.

❶ $A=5x^2-3x$ ❷ $B=(y-1)^2-2(y-1)$ ❸ $C=(2z+1)(3z-4)+5(2z+1)$

الحل ❶ $A=5x^2-3x$ **العامل المشترك هو:** x وبالتالي $A=5x^2-3x=x(5x-3)$

❷ $B=(y-1)^2-2(y-1)$ العامل المشترك هو: $y-1$

$(y-1)^2-2(y-1)=(y-1)(y-1-2)=(y-1)(y-3)$

❸ $C=(2z+1)(3z-4)+5(2z+1)$ العامل المشترك هو: $2z+1$

$C=(2z+1)(3z-4)+5(2z+1)=(2z+1)(3z-4+5)=(2z+1)(3z+1)$

مطابقات شهيرة

نشاط « استعمال المساحات للحصول على المطابقات الشهيرة»

.1 تمهيد

$2(a+3)$	$2a+6$	
		$a=1$
		$a=-2$

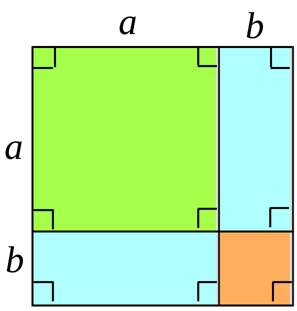
انسخ ثم أكمل الجدول السابق. تأمل نواتج حساباتك. ماذا تلاحظ؟

الحل

$2(a+3)$	$2a+6$	
8	8	$a=1$
2	2	$a=-2$

نلاحظ أن $2a+6=2(a+3)$

.2 مربع مجموع



① إخراج هندسي: a و b يرمزان إلى طولين، وهما إذاً موجبان تماماً.

- استفد من الشكل المرسوم جانباً لحساب مساحة المربع الذي طول حرفه $a+b$ بطريقتين مختلفتين.
- انسخ ثم أكمل: $(a+b)^2=\ldots+2\ldots+\ldots$

② الإثبات: احسب $(a+b)^2$ بنشر $(a+b)(a+b)$، ثم اختزل الناتج.

قارن بين هذا الناتج ونواتج ①.

الحل

① إخراج هندسي

- **طريقة أولى:** $(1)\cdots\cdots\mathcal{A}=(a+b)^2$
- **طريقة ثانية:** $(2)\cdots\cdots\mathcal{A}=\mathcal{A}(A)+2\mathcal{A}(C)+\mathcal{A}(B)=a^2+2ab+b^2$
- نستنتج من (1) و (2) أنّ : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

الحل:

② الإثبات

① $(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

② $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

③ تطبيق x و y و z أعداد عادية. انشر ثم اختزل كلاً من: • $(x+5)^2$ • $\left(y+\frac{3}{2}\right)^2$

الحل:

① $(x+5)^2 = x^2+2x\times 5+5^2 = x^2+10x+25$

② $\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = y^2+2y\times\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = y^2+3y+\frac{9}{4}$

.3 مربع فرق

① نشر $(a-b)^2$ اكتب $a-b=a+(-b)$ ثم استعمل ما توصلت إليه في **.2**

انسخ ثم أكمل: $(a-b)^2 = \cdots\cdots - 2\cdots\cdots + \cdots\cdots$

② تطبيق x و y و z أعداد عادية. انشر ثم اختزل كلاً من:

* $(x-6)^2$ * $\left(2-\frac{3}{2}y\right)^2$ * $(3z-2x)^2$

الحل:

① $(x-6)(x+6) = x^2-6^2 = x^2-36$

② $\left(2-\frac{3}{2}y\right)^2 = (2)^2-2(2)\left(\frac{3}{2}\right)y+y^2 = 4-6y+y^2$

③ $(3z-2x)(3z+2x) = (3z)^2-(2x)^2 = 9z^2-4x^2$

.4 فرق مربعين

① انسخ وأكمل: $(a+b)(a-b) = \ldots+\ldots-\ldots-\ldots = \ldots-\ldots$

② تطبيق انشر ثم اختزل كلاً من: * $(x-6)(x+6)$ * $\left(2-\frac{3}{2}y\right)\left(2+\frac{3}{2}y\right)$

الحل:

.1 $(a+b)(a-b) = a\times a+b\times a-b\times a-b\times b = a^2-b^2$

.2 تطبيق

① $(x-6)(x+6) = x^2-6^2 = x^2-36$

② $\left(2-\frac{3}{2}y\right)\left(2+\frac{3}{2}y\right) = 2^2-\left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 4-\frac{9}{4}y^2$

تحقق من فهمك

① انشر مستفيداً من المطابقات الشهيرة.

❶ $A=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ ❷ $B=\left(y-\frac{1}{4}\right)^2$ ❸ $C=\left(z+\frac{1}{5}\right)\left(z-\frac{1}{5}\right)$

الحل

❶ $A=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=x^2+2\times x\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

❷ $B=\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=y^2-2\times y\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$

❸ $C=\left(z+\frac{1}{5}\right)\left(z-\frac{1}{5}\right)=z^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2=z^2-\frac{1}{25}$

② انشر ثم اختزل.

❶ $A=(2-3x)^2$ ❷ $B=\left(\frac{3}{2}-2x\right)\left(\frac{3}{2}+2x\right)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2$

الحل

❶ $A=2^2-2\times 2\times 3x+(3x)^2=4-12x+9x^2$

❷ $B=\left(\frac{3}{2}\right)^2-(2x)^2-\left(4x^2+2\times 2x\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}-4x^2-4x^2-2x-\frac{1}{4}=2-8x^2-2x$

تدرب

① انشر مستفيداً من المطابقة $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

❶ $A=(x+2)(x-2)$ ❷ $B=(y-0.1)(y+0.1)$

الحل

❶ $A=(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$

❷ $B=(y-0{,}1)(y+0{,}1)=x^2-(0{,}1)^2=x^2-0{,}01$

② انشر ثم اختزل:

❶ $A=(4x-1)^2+(x+2)^2$ ❷ $B=(5y+4)^2+(5y+4)(5y-4)$

❸ $C=(7z-1)^2-(7z+1)^2$ ❹ $D=(5t-4)(t+2)-(t+2)^2$

الحل

❶ $A=(4x-1)^2+(x+2)^2=16x^2-8x+1+x^2+4x+4=17x^2-4x+5$

❷ $B=(5y)^2+2\times 5y\times 4+4^2+(5y)^2-4^2=25y^2+40y+16+25y^2-16=50y^2+24y$

$C=[(7z-1)-(7z+1)][(7z-1)+(7z+1)]=(7z-1-7z-1)(7z-1+7z+1)=-2(14z)=-28z$ ❸

$D=5t\times t+10t-4t-4\times 2-(t^2+4t+4)=5t^2+6t-8-t^2-4t-4=4t^2+2t-12$ ❹

③ انسخ، ثم أكمل لتصبح كل عبارة مطابقة (أيّ محققة عند جميع قيم x)

❶ $(x+\cdots\cdots)^2=\cdots\cdots+6x+\cdots\cdots$ ❷ $(\cdots\cdots-\cdots\cdots)^2=4x^2-\cdots\cdots+25$

❸ $(7x+\cdots\cdots)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)=\cdots\cdots-64$

الحل

$(x+3)^2=x^2+6x+9$ ❶

$(2x-5)^2=4x^2-20x+25$ ❷

$(7x+8)(7x-8)=49x^2-64$ ❸

④ دون استعمال آلة حاسبة، احسب بأسهل ما يمكن:

❶ 98^2 ❷ 98×102 ❸ 62×58 ❹ 501^2

الحل

$98^2=(100-2)^2=100^2-2\times 100\times 2+2^2=10\,000-400+4=9\,604$ ❶

$98\times 102=(100-2)(100+2)=100^2-2^2=10\,000-4=9\,996$ ❷

$62\times 58=(60+2)(60-2)=60^2-2^2=3600-4=3596$ ❸

$501^2=(500+1)^2=500^2+2\times 500\times 1+1^2=250\,000+1\,000+1=251\,001$ ❹

⑤ حلِّلْ كلاً من العبارات الآتية:

❶ $A=(x-2)^2+3(x-2)$ ❷ $B=5^2-16x^2$

❸ $C=x^2+6x+9$ ❹ $D=9x^2-6x+1$

الحل

$A=(x-2)^2+3(x-2)=(x-2)(x-2+3)=(x-2)(x+1)$ ❶

$B=5^2-16x^2=(5+4x)(5-4x)$ ❷

$C=x^2+6x+9=(x+3)^2$ ❸

$D=9x^2-6x+1=(3x-1)^2$ ❹

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) كل 1 km يساوي $100\,000\text{ cm}$، فكل 1 cm يساوي

① 10^5 km ② 10^{-5} km ③ 10^6 km

(2) $\cdots\cdots = 5^2 \times 5^4$ يساوي:

① 25^8 ② 5^8 ③ 5^6

(3) مثلا 2^5 يساوي

① 4^5 ② 2^6 ③ 2^{10}

(4) $\left(5^2\right)^3$ يساوي:

① 5^5 ② 10^3 ③ 5^6

(5) $\left(\frac{2}{3}x\right)^2$ يساوي

① $\frac{2}{3}x^2$ ② $\frac{4}{9}x^2$ ③ $\frac{4}{6}x^2$

(6) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$ هو عدد

① صحيح ② عادي غير صحيح ③ غير عادي

(7) $(4x+5)^2$ يساوي

① $16x^2+40x+25$ ② $16x^2+20x+25$ ③ $4x^2+40x+25$

(8) $\left(5-3t\right)\left(5+3t\right) = \cdots\cdots$

① $15-9t^2$ ② $25-9t^2$ ③ $25+9t^2$

(9) $\cdots\cdots = 9y^2-30y+25$ يساوي:

① $(3y+5)^2$ ② $(16y-5)^2$ ③ $(3y-5)^2$

(10) $\frac{9}{25}-\frac{1}{4}x^2$ يساوي:

① $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}x\right)^2$ ② $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}x\right)$ ③ $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}x\right)^2$

2 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) $\frac{2^3}{4^3}$ يساوي:

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2^3}$ ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

(2) $3x^2-6x$ يساوي

① $3x(x-2)$ ② $x(3x-2)$ ③ $3(x^2-2x)$

(3) $(2x-1)(x+1)-(2x-1)(x-1)$ يساوي

① $(2x-1)[(x+1)-(x-1)]$ ② $(2x-1)^2-(x-1)^2$ ③ $2(2x-1)$

(4) يُكتب $(x-1)^2+2x$ بالشكل:

① $(x+1)^2$ ② x^2+1 ③ $(x+1)^2-2x$

3 أيّ العبارات التالية صحيح وأيها خطأ؟ علل اجابتك

① نصف 4^5 يساوي 2^5.

② $2^7-2^3=2^4$.

③ مربع أي عدد هو عدد عادي.

④ $z^2+10z+25$ هو مربع عدد، أياً يكن العدد z.

⑤ $(x+3)$ هو أحد مضاريب المقدار $(x+3)^2-5x-15$.

الحل:

① القول خطأ. فالعبارة (نصف 4^5) تعني: $\frac{4^5}{2}=\frac{2^5 2^5}{2}=2^9$ وهذا لا يساوي 2^5

② القول خطأ. حيث $2^7-2^3=2^3(2^4-1)=2^3(16-1)=2^3(15)\neq 2^4$

③ القول خطأ. فالعدد π^2 غير عادي

④ القول صحيح. حيث

$$z^2+10z+25=(z+5)^2$$

⑤ القول صحيح. لأن

$$\begin{aligned}(x+3)^2-5x-15&=(x+3)^2-5(x+3)\\&=(x+3)[(x+3)-5]\end{aligned}$$

4 يرمز x إلى عدد عادي في العبارة $E=(x-1)^2-5x$. احسب E في كل من الحالات الآتية:

❶ $x=5$ ❷ $x=0$ ❸ $x=-3$

الحل:

$$E=(x-1)^2-5x$$

❶ $x=5,\ E=(5-1)^2-5\times 5=16-25=-9$

❷ $x=0,\ E=(0-1)^2-5\times 0=1$

❸ $x=-3, E=(-3-1)^2-5\times(-3)=16+15=31$

5 اختزل كلاً من العبارات الآتية:

❶ $B=1+4y-2-y$ ❷ $D=x-1-(2x-4)$

الحل:

❶ $B=(4-1)y+(1-2)=3y-1$

❷ $D=x-1-2x+4=(4-1)+(1-2)x=3-x$

6 اكتب كلاً من الأعداد بصيغة قوة عدد واحد.

① $A=3^4\times 3^{-2}\times 3^5$ ② $B=\dfrac{5\times\left(5^{-2}\right)^{-3}}{5^9}$

③ $C=\dfrac{3^4\times 3^5}{3^{-2}}$

الحل:

① $A=3^4\times 3^{-2}\times 3^5=3^{4-2+5}=3^7$

② $B=\dfrac{5\times\left(5^{-2}\right)^{-3}}{5^9}=\dfrac{5\times 5^6}{5^9}=\dfrac{5^{6+1}}{5^8}=\dfrac{5^7}{5^8}=5^{7-8}=5^{-1}$

③ $C=\dfrac{3^4\times 3^5}{3^{-2}}=\dfrac{3^{4+5}}{3^{-2}}=\dfrac{3^9}{3^{-2}}=3^{9+2}=3^{11}$

7 اكتب المقدار $P=\dfrac{3^7\times 4^8\times 5^4}{2^5\times 5^{-7}\times 9^3}$ على النحو الآتي: $2^a\times 3^b\times 5^c$

الحل:

$$P=\frac{3^7\times 4^8\times 5^4}{2^5\times 5^{-7}\times 9^3}=\frac{3^7\times 2^{16}\times 5^4}{2^5\times 5^{-7}\times 3^6}=3\times 2^{11}\times 5^{11}$$

$a=11, b=1, c=11$

8 بيّن إن كان العدد المعطى صحيحاً أم غير صحيح.

① $A=\dfrac{16\times10^{-1}\times2}{\left(10^{3}\right)^{2}\times10^{-8}\times80}$ ② $B=\dfrac{-2\times10^{-3}\times25\times\left(10^{2}\right)^{2}}{50\times10^{5}\times(-0,1)\times10^{-3}}$

الحل:

① $A=\dfrac{\cancel{16}\times10^{-1}\times2}{\left(10^{3}\right)^{2}\times10^{-8}\times\cancel{80}}=\dfrac{1\times10^{-1}\times2\times2}{10^{6}\times10^{-8}\times5\times2}=\dfrac{4}{10^{1}\times10^{6}\times10^{-8}\times10}=\dfrac{4}{10^{0}}=4$.

A عدد صحيح.

② $B=\dfrac{-2\times10^{-3}\times25\times\left(10^{2}\right)^{2}}{50\times10^{5}\times(-0,1)\times10^{-3}}=\dfrac{-2\times10^{-3}\times\cancel{5}\times5\times10^{4}}{\cancel{5}\times10\times10^{5}\times-10^{-1}\times10^{3}}=\dfrac{10^{1-3+4}}{-10^{1+5-1+3}}=\dfrac{10^{2}}{-10^{8}}=-\dfrac{1}{10^{6}}$.

B عدد غير صحيح.

9 انشر واختزل كلاً من:

❶ $A=(7t+3)(t-4)-(t-2)(t+6)$

❷ $B=2x(3x-1)-(1-4x)\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$

الحل:

❶ $A=(7t+3)(t-4)-(t-2)(t+6)$

$A=7t^{2}-28t+3t-12-(t^{2}+6t-2t-12)=7t^{2}-25t-12-t^{2}-4t+12=6t^{2}-29t$

❷ $B=2x(3x-1)-(1-4x)\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$

$B=6x^{2}-2x-\left(\dfrac{1}{2}x+1-2x^{2}-4x\right)=6x^{2}-2x-\left(-\dfrac{7}{2}x+1-2x^{2}\right)=6x^{2}-2x+\dfrac{7}{2}x-1+2x^{2}=8x^{2}+\dfrac{3}{2}x-1$

10 حلل كلاً من

$A=(5x+1)^{2}-(x-3)(5x+1)$ ❶

$B=(2t+3)^{2}-36$ ❷

الحل:

❶ $A=(5x+1)^{2}-(x-3)(5x+1)=(5x+1)((5x+1)-(x-3))=(5x+1)(4x+4)$

❷ $B=(2t+3)^{2}-36=(2t+3-6)(2t+3+6)=(2t-3)(2t+9)$

11 انسخ، ثم أكمل لتصبح كل عبارة مطابقة (محققة عند جميع قيم x)

❶ $49x^2 - \cdots\cdots = (\cdots\cdots + 3)(\cdots\cdots - 3)$

❷ $\cdots\cdots + 10x + \cdots\cdots = (x + \cdots\cdots)^2$

❸ $\cdots\cdots - 42x + 49 = (\cdots\cdots - \cdots\cdots)^2$

❹ $x^2 - \cdots\cdots + 64 = (\cdots\cdots - \cdots\cdots)^2$

الحل:

❶ $49x^2 - 9 = (7x + 3)(7x - 3)$

❷ $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

❸ $9x^2 - 42x + 49 = (3x - 7)^2$

❹ $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$

12 $N = \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$

أثبت أنَّ N عدد صحيح.

الحل:

$N = \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right) = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 9\times2 - 4\times3 = 18 - 12 = 6$ ، فهو عدد صحيح.

13 اكتب العدد $A = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$ بالصيغة $a + b\sqrt{c}$ مع c عدد موجب.

الحل:

$A = (\sqrt{3})^2 + 2\times\sqrt{3}\times5 + 5^2 = 3 + 10\sqrt{3} + 25 = 28 + 10\sqrt{3}$ ($a = 28$ و $b = 10$ و $c = 3$)

14 حلِّلْ باستعمال مطابقات مناسبة.

❶ $A = 49 - 36x^2$ ❷ $C = x^2 - 2x + 1$

❸ $I = (t+1)^2 - 8(t+1) + 16$ ❹ $E = (2x-1)^2 - (3x+2)^2$

❺ $F = 9 + 30z + 25z^2$ ❻ $G = 25z^2 - 30z + 9$

الحل:

❶ $A = 7^2 - (6x)^2 = (7 - 6x)(7 + 6x)$

❷ $C = x^2 - 2x + 1^2 = (x-1)^2$

❸ $I = (t+1)^2 - 2\times4(t+1) + 16 = [(t+1) - 4]^2 = (t-3)^2$

$E=[(2x-1)-(3x+2)][(2x-1)+(3x+2)]=(2x-1-3x-2)(2x-1+3x+2)=(-x-3)(5x+1)=$ ❹

$F=9+30z+25z^2=3^2+2\times3\times5z+(5z)^2=(3+5z)^2$ ❺

$G=(5z)^2-2\times5z\times3+3^2=(5z-3)^2$ ❻

15 التحقق من صحة النشر

نشرت رغد العبارة $2x(3x-5)-5(2x-1)$. هذه إجابتها:

$$2x(3x-5)-5(2x-1)=6x^2-20x-5$$

1. اختبر هذه المساواة عند $x=0$. ماذا تستنتج؟

2. هذه هي العمليات التي أجرتها رغد:

$$2x(3x-5)-5(2x-1)=2x\times3x-2x\times5-5\times2x-5\times1$$
$$=6x^2-10x-10x-5$$
$$=6x^2-20x-5$$

أين الخطأ في حل رغد؟ انشر العبارة بشكل صحيح.

الحل:

1. نرمز إلى الطرف الأيسر من المساواة بالرمز P_1 وإلى الطرف الأيمن بالرمز P_2، فعند $x=0$، يكون:

$P_1(0)=0(0-5)-5(0-1)=5$ و $P_2(0)=6(0)-20(0)-5=-5$.

$P_1(0)\neq P_2(0)$. نستنتج أنَّ حل عدنان خطأ.

2. الخطأ هو عند 5×1، يجب أن يكون 5×-1

$$2x(3x-5)-5(2x-1)=2x\times3x-2x\times5-5\times2x-5\times-1$$
$$=6x^2-10x-10x+5$$
$$=6x^2-20x+5$$

16 الطريقة الانسب

حسب فريد $(3+5)^2$ على النحو الآتي: $(3+5)^2=3^2+2\times3\times5+5^2=9+30+25=64$

$$(3+5)^2=3^2+2\times3\times5+5^2=9+30+25=64$$

1. هل أصاب فريد أم أخفق في الحساب؟

2. هل لديك طريقة أسرع من الطريقة التي اتبعها فريد؟ استعملها إذن لحساب $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)^2$.

الحل:

1. أصاب فريد.

2. نعم، ها هي:

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{2+3}{5}\right)^2=\left(\frac{5}{5}\right)^2=1^2=1$$

2

17 مساحتان متساويتان:

$ABCD$ مربع ول ضلعه $3+\sqrt{3}$. لنرمز A إلى مساحته .

$EFGH$ مستطيل بعداه: $EF=\sqrt{72}+3\sqrt{6}$ و $EH=\sqrt{2}$. ونرمز A'ألى مساحته

1. احسب A واختزل الناتج.

2. احسب A'. ثم تحقق من أن : $A=A'$

الحل:

1. $A=(3+\sqrt{3})^2=9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$

2. $A'=(\sqrt{72}+3\sqrt{6})(\sqrt{2})=\sqrt{144}+3\sqrt{12}=12+3\sqrt{12}=12+6\sqrt{3}$

18 مع الجذور التربيعية

لدينا $L=(3x-1)(2x+5)-(3x-1)^2$.

1. انشر ثم اختزل L.

2. احسب قيمة L في حالة $x=1+\sqrt{2}$

الحل:

1. $L=6x^2+15x-2x-5-(9x^2-6x+1)=-3x^2+19x-6$.

2. $L(1+\sqrt{2})=-3(1+\sqrt{2})^2+19(1+\sqrt{2})-6=-3(1+2\sqrt{2}+2)+19+19\sqrt{2}-6=4+13\sqrt{2}$

تمارين إضافية

(1) ① اكتب، بترتيب تصاعدي، القواسم التسعة للعدد 441.

② اكتب، بترتيب تصاعدي، القواسم الإثني عشر للعدد 84.

③ اكتب، بترتيب تصاعدي، القواسم المشتركة للعددين 441 و 84.

③ استنتج القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين.

(2) اشرح لماذا العدد 13 ليس القاسم المشترك الأكبر للعددين 69 و $2\,569$.

(3) اشرح لماذا العدد 7 ليس القاسم المشترك الأكبر للعددين 154 و $3\,780$.

(4) ① أنجز القسمة الإقليدية للعدد $7\,661$ على 163.

② استنتج ذهنياً القاسم المشترك الأكبر للعددين $7\,661$ و 163، ثم للعددين $7\,661$ و 47.

(5) هل العددان a و b أوليان فيما بينهما؟

① $a=130$ و $b=232$ ② $a=130$ و $b=231$

(6) دون حساب، اشرح لماذا العددان a و b ليسا أوليين فيما بينهما.

① $a=218$ و $b=162$ ② $a=21$ و $b=18$ ③ $a=170$ و $b=165$

(7) لدى حلواني 411 حبة توت و 685 حبة فريز.

يريد الحلواني أن يصنع منها عدداً من قوالب الحلوى.

1. ما أكبر عدد من القوالب يمكنه صنعها؟

2. ما عدد حبات التوت والفريز في كل قطعة؟

3

الوحدة الثالثة

معادلات ومتراجحات

1. معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد
2. معادلات – خاصة الجداء الصفري
3. متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الاسبوع
1- معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد	2	تشرين ثاني	الثالث
2- معادلات – خاصة الجداء الصفري	2	تشرين ثاني	الثالث والرابع
3- متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد	2	تشرين ثاني	الرابع
تمرينات ومسائل	5	كانون أول	الأول والثاني
اختبار	1	كانون أول	الثاني
المجموع	12		4

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
حلُّ معادلة	هو إيجاد قيمة (أو قيم) المجهول التي تحقّق المعادلة أي تجعلها صحيحة.
جذر معادلة	تسمى كل قيمة للمجهول تحقّق المعادلة **حلاً** لها أو **جذراً** لها.
معادلتان متكافئتان	نقول عن معادلتين إنهما **متكافئتان** إذا كان لهما الحلول نفسها.
الجداء الصفري	عندما تكون المعادلة جداء عوامل تساوي الصفر نقول إننا أمام جداء صفري
المتراجحة	المتراجحة تعبر عن مقارنة بين طرفين. ونستعمل في المتراجحة الرموز الآتية • $<$: أصغر تماماً، مثلاً $(5<7)$. • $>$: أكبر تماماً، مثلاً $(5>2)$ • $\leq$: أصغر أو يساوي (يُقرأ أصغر) $(5\leq 5)$ و $(5\leq 8)$ • $\geq$: أكبر أو يساوي (يُقرأ أكبر) $(3\geq 3)$ و $(5\geq 1)$
حل المتراجحة	قيم x التي تجعل المتراجحة صحيحة تسمى حلول هذه المتراجحة.
متراجحتان متكافئتان	نقول إنَّ متراجحتين متكافئتان إذا كان لهما الحلول نفسها.

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
التحقق من أن عدد هو حل لمعادلة	حلُّ معادلة
المقارنة	الجداء الصفري
رموز المتراجحة	حل المتراجحة
مستقيم الأعداد	

مقدمة الوحدة:

لاحظ مفردات المقدمة : تقدم معلومة تاريخية عن عالم يوناني شهير (أرخميدس) بطريقة مشوقة وهذه المعلومة توضح حقيقة عبارة وجدتها

3

معادلات ومتراجحات

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

.1 صيغة الضرب

أي المقادير الآتية مكتوبٌ بصيغة جداء ضرب مقدارين؟

① $4(x-3)+5$ ② $3y-2$ ③ $(z-1)(3z+7)$

.2 معادلة

أي الكتابات الآتية تمثّل معادلة بمجهول؟

① $x^2-x(x-3)$ ② $5-3=\frac{7}{2}-1.5$ ③ $2(y-1)=3y+5$

.3 جذر معادلة

أحد جذور المعادلة $x^2-3x=2(x-3)$ هو:

① 1 ② 3 ③ -1

المقصود بعبارة (حلّ معادلة) هو: عملية إيجاد القيم التي تحققها.

.4 تعبير عن نص بمعادلة

«أوجد عدداً، مجموع ثلاثة أمثاله مع العدد 8 يساوي نصف مربعه»

إذا رمزنا إلى هذا العدد بالرمز x، أمكن التعبير عن هذه المسألة بالصيغة:

① $3(x+8)=\frac{1}{2}x^2$ ② $3x+8=\frac{1}{2}x^2$ ③ $\frac{1}{2}(3x+8)=x^2$

5. إضافة عدد إلى طرفي متراجحة

إذا رمزَ x إلى عدد عادي يحقّق $x-3>2$ ، استنتجنا أنَّ:

① $x<-5$ ② $x>5$ ③ $x<1$

6. قسمة طرفي متراجحة على عدد

إذا رمزَ x إلى عدد عادي يحقق $-3x<12$ ، استنتجنا أنَّ:

① $x<15$ ② $x<-4$ ③ $x>-4$

7. خطوتان للوصول إلى حل متراجحة

المتراجحة $5x-2<0$ صحيحة في حالة:

① $x>0.4$ ② $x<\frac{5}{2}$ ③ $x<0.4$

معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد

نشاط « خطوات حل معادلة »

1. تطبيق مباشر: حلَّ غيث المعادلة $5x-1=7x+5$ على النحو الآتي:

① $5x-1-7x=5$

② $-2x-1=5$

③ $-2x-1+1=5+1$

④ $-2x=6$

⑤ $x=-3$

- حلُّ غيث صحيح ولكن لم يشرح لنا خطوات الانتقال الخمس التي أنجزها.
- اشرح خطوات الحل بلغة سليمة.

الشرح:

الخطوة الأولى: نقل غيث $7x$ من الطرف الأيمن للمعادلة إلى طرفها الأيسر وجمعه بعد تغيير إشارته مع $5x$ فحصل على $-2x$.

الخطوة الثانية: نقل غيث -1 من الطرف الأيسر للمعادلة إلى طرفها الأيمن وجمعه (بعد تغيير إشارته) مع 5 فحصل على 6.

الخطوة الثالثة: قسّم غيث المعادلة على -2 فحصل على $x=-3$.

2. أقراص DVD

1. تمتلك مايا مبلغاً من المال. اشترت أربعة أقراص DVD وبقي معها 400 ليرة سورية. نرمز إلى سعر القرص الواحد بالرمز x. عبِّر، بدلالة x، عن المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء.

2. تأكدت مايا من أنّها كانت تستطيع أن تشتري بالمبلغ الذي كانت تمتلكه قبل الشراء ستة أقراص إذا نقص سعر القرص 100 ليرة. عبِّر، بدلالة x، عن المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء بعبارة أخرى.

3. اكتب معادلة يحقّقها العدد x.

4. حلّ هذه المعادلة. ثم استنتج سعر القرص، وبعدئذ المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء.

الحل:

1. $4x + 400$ هو المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء.

2. $6(x - 100)$ هو أيضاً المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء.

3. نستنتج من **1.** و **2.** أنَّ $6(x - 100) = 4x + 400$ وهي المعادلة المعبرة عن الحالة.

4. • ننشر الطرف الأيسر من المعادلة $6x - 600 = 4x + 400$.

• نُجمّع الحدود المجهولة (التي تحوي x) في الطرف الأيسر والحدود المعلومة في الطرف الأيمن، على أن نغير إشارة كل حد تم نقله $6x - 4x = 600 + 400$.

• نَجْمع الحدود المجهولة على حدتها والحدود المعلومة على حدتها $2x = 1\,000$.

• نقسم كلاً من طرفي المعادلة على أمثال x، فنجد $x = \frac{1\,000}{2} = 500$.

فسعر القرص هو 500 ليرة سورية.

والمبلغ الذي كانت تمتلكه لمى قبل الشراء $6 \times 500 = 3\,000$ ليرة سورية.

تحقق من فهمك

① أيُّ المعادلات الآتية حلُّها -2 ؟

① $3x + 1 = 2x - 3$ ② $5y + 2 = 3y - 2$ ③ $\frac{z}{2} - 3 = z - 2$

الحل:

نرمز إلى الطرف الأيسر بالرمز T_1 وإلى الطرف الأيمن بالرمز T_2.

❶ $3x + 1 = 2x - 3$

نضع $x = -2$: $T_1 = 3(-2) + 1 = -6 + 1 = -5$ و $T_2 = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$.

$T_1 \neq T_2$، فالمعادلة ❶ حلّها ليس -2.

❷ $5y + 2 = 3y - 2$، نضع $y = -2$: $T_1 = 5(-2) + 2 = -10 + 2 = -8$ و $T_2 = -8$.

$T_1 = T_2$، فالمعادلة ❷ حلّها -2.

مناقشة المعادلة ❸ $\frac{z}{2}-3=z-2$

نضع $z=-2$: $T_1=\frac{-2}{2}-3=-1-3=-4$ و $T_2=-2-2=-4$.

$T_1=T_2$، فالمعادلة ❸ حلُّها -2.

② حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $5y-4=3y+2$ ② $\frac{z}{3}=\frac{1}{2}$ ③ $\frac{z}{3}+4=\frac{z}{4}-1$

الحل:

❶ $5y-4=3y+2$

$$5y-4=3y+2$$
$$5y-3y=2+4$$
$$2y=6$$
$$y=3$$

❷ $\frac{z}{3}=\frac{1}{2}$ جداء الطرفين = جداء الوسطين

$$2z=3$$
$$z=\frac{3}{2}$$

❸ $\frac{z}{3}+4=\frac{z}{4}-1$

$$\frac{z}{3}-\frac{z}{4}=-1-4$$
$$\frac{4z-3z}{12}=-5$$
$$\frac{z}{12}=-5$$
$$z=-60$$

تدرب

① حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $\frac{z}{5}-2=z+2$ ② $4x+\frac{1}{2}=2x-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{y}{2}-\frac{3}{2}=\frac{y}{3}-\frac{1}{2}$

الحل:

① $\frac{z}{5}-2=z+2$

$5\left(\frac{z}{5}-2\right)=5(z+2)$ ، $z-10=5z+10$ ، $z-5z=+10+10$ ، $-4z=20$ ،

$z=\frac{20}{-4}$ ، $z=-5$.

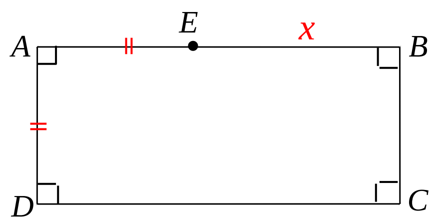
② $4x+\frac{1}{2}=2x-\frac{1}{3}$ الحل $4x-2x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

$2x=-\frac{5}{6}$ ومنه $x=-\frac{5}{12}$.

③ $\frac{y}{2}-\frac{3}{2}=\frac{y}{3}-\frac{1}{2}$

$6\left(\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)=6\left(\frac{y}{3}-\frac{1}{2}\right)$ ، $3y-9=2y-3$ ، $3y-2y=-3+9$ ، $y=6$.

② $ABCD$ مستطيل، و E نقطة من $[AB]$ تحقّق $EA=AD=3\text{ cm}$ و $EB=x$ (بالسنتيمترات)



1. احسب بدلالة x محيط المستطيل.

2. استعمل معادلة لحساب قيمة x التي تجعل محيط المستطيل مساوياً 20 cm.

الحل:

1. نرمز إلى محيط المستطيل بالرمز $\mathcal{P}$، فيكون $\mathcal{P}=2(AB+AD)\cdots(*)$

2. ولدينا $AB=AE+EB=3+x$ و $AD=3\text{ cm}$، نعوض في العلاقة $(*)$ فنحصل على

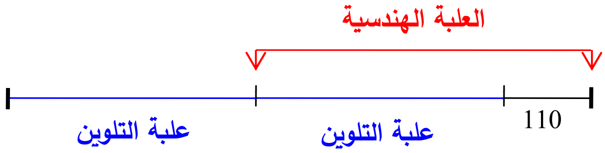
$\mathcal{P}=2(3+x+3)=2(x+6)=2x+12$.

نريد أن يتحقق $\mathcal{P}=20$، إذن $2x+12=20$ أو $2x=20-12$ أو $2x=8$، ومنها $x=\frac{8}{2}=4$.

③ اشترت سلمى علبة أقلام تلوين وعلبة أدوات هندسيّة بمبلغ 710 ليرة سورية.

العلبة الهندسيّة أغلى من علبة التلوين بمبلغ 110 ليرة سورية.

يمكن تمثيل الحالة بالمخطط المرافق.

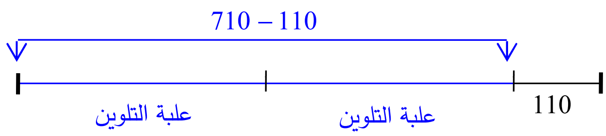


1. أي الأعداد الآتية يدل على سعر علبة التلوين:

❶ $710-110$ ❷ $710\div 2-110$ ❸ $(710-110)\div 2$

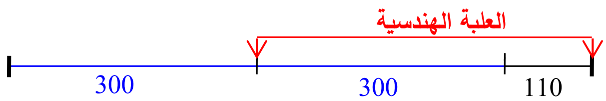
2. ما سعر العلبة الهندسية؟

الحل:



1. المخطط المرسوم جانباً مستوحى من المخطط المفروض، ومنه نستنتج أنَّ العدد الذي يدل على ثمن علبتي تلوين هو $710-110$، فسعر علبة التلوين هو ❸ $(710-110)\div 2$.

2. المخطط السابق يشير إلى أنَّ سعر علبة التلوين يساوي $(710-110)\div 2=600\div 2=300$ ليرة.



ويشير المخطط المجاور إلى أنَّ سعر علبة الأدوات الهندسية يساوي $300+110=410$ ليرة سورية.

معادلات – خاصة الجداء الصفري

نشاط « نحو حل معادلة من الشكل $(ax+b)(cx+d)=0$ »

1. الجداء الصفري

1. دلّ على كل مساواة صحيحة مما يأتي:

- $5\times 0=5$
- $5\times 0=0$
- $5\times(-5)=0$
- $5\times\frac{1}{5}=0$

2. لنتأمل الجداء $5\times z$. ما قيمة z التي تعدم هذا الجداء (تجعله مساويا الصفر)؟

3. أكدت ريم بأنها أضمرت عدداً y يعدم المقدار $5(y-2)$. ما العدد الذي أضمرته ريم؟

4. انسخ وأكمل، علماً بأنَّ a و b يرمزان إلى عددين عاديين.

① في حالة $a=0$ أو $b=0$، يكون $a\times b=\cdots\cdots$.

② إذا كان $a\times b=0$، كان .... أو كان ....

الحل:

1.
- $5\times 0=5$ مساواة خاطئة
- $5\times 0=0$ مساواة صحيحة
- $5\times(-5)=0$ مساواة خاطئة
- $5\times\frac{1}{5}=0$ مساواة خاطئة

2. قيمة z التي تعدم هذا الجداء هي 0.

3. القيمة التي أضمرتها ريم هي 2 لأنها ستحصل على 5×0 ووجدنا أنَّ هذا الجداء معدوم.

4. ① في حالة $a=0$ أو $b=0$، يكون $a\times b=0$.

② إذا كان $a\times b=0$، كان $a=0$ أو $b=0$.

2. المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$

1. حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $(x-2)(x+3)=0$ ② $(2x+5)(3x-1)=0$

③ $(y-4)^2=0$ ④ $3(x+5)(2x-3)=0$

الحل:

① $(x-2)(x+3)=0$

$x-2=0$ أو $x+3=0$، إذن $x=+2$ أو $x=-3$

② $(2x+5)(3x-1)=0$

$2x+5=0$ أو $3x-1=0$، إذن $2x=-5$ أو $3x=1$،

ومنها $x=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$ أو $x=\frac{1}{3}$.

③ $(y-4)^2=0$

$y-4=0$ ومنها $y=4$.

④ $3(x+5)(2x-3)=0$

$3\neq 0$، إذن $x+5=0$ أو $2x-3=0$، ومنها $x=-5$ أو $x=\frac{3}{2}$.

2. صحِّح الأخطاء في الحلول الآتية:

① حلول المعادلة $3(x-5)=0$ هي قيم x التي تحقق $x-5=0$.

إذن $x=5$.

التصحيح:

حلول المعادلة هي قيم x التي تحقق $x-5=0$، ومنها $x=5$.

② حلول المعادلة $(x+3)+(x-5)=0$ هي قيم x التي تحقق $\cancel{x+3=0}$ أو $\cancel{x-5=0}$.

$x=-3$ أو $x=5$.

التصحيح:

حلول المعادلة هي قيم x التي تحقق $x+3+x-5=0$ إذن $2x=2$ ومنها $x=\frac{2}{2}=1$.

تحقق من فهمك

① حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $(x+6)(x-7)=0$ ② $\left(\frac{y}{2}+2\right)\left(3y-\frac{5}{3}\right)=0$

③ $y^2=5$ ④ $\left(\sqrt{12}-3y\right)\left(2y+\sqrt{8}\right)=0$

الحل

❶ $(x+6)(x-7)=0$

إما $x+6=0$، ومنها $x=-6$. وإما $x-7=0$، ومنها $x=7$.

❷ $\left(\frac{y}{2}+2\right)\left(3y-\frac{5}{3}\right)=0$

إما $\left(\frac{y}{2}+2\right)=0$ ومنه $y=-4$ وإما $\left(3y-\frac{5}{3}\right)=0$ ومنه $y=\frac{5}{9}$

❸ $y^2=5$ نكتب على شكل متطابقة $y^2-5=0$ ومنه $y^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=0$ متطابقة فرق مربعين

$(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})=0$ ومنه إما $y=\sqrt{5}$ وإما $y=-\sqrt{5}$

❹ $\left(\sqrt{12}-3y\right)\left(2y+\sqrt{8}\right)=0$

إما $\sqrt{12}-3y=0$ ، إذن $\sqrt{12}=3y$ ، ومنها $y=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{\sqrt{4\times3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

وإما $2y+\sqrt{8}=0$ ، إذن $2y=-\sqrt{8}$ ، ومنها $y=-\frac{\sqrt{8}}{2}=-\frac{\sqrt{4\times2}}{2}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$.

تدربْ

① حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $3x(x-3)(3x+1)=0$ ② $5\left(x^2+1\right)(8x-1)=0$ ③ $(3x+1)(3x-1)^2=0$

الحل:

① $3x(x-3)(3x+1)=0$

إما $3x=0$ ، ومنها $x=0$.

وإما $x-3=0$ ، ومنها $x=3$.

وإما $3x+1=0$ ، إذن $3x=-1$ ، ومنها $x=-\frac{1}{3}$.

② $5\left(x^2+1\right)(8x-1)=0$

$5\left(x^2+1\right)>0$ ، أي $5\left(x^2+1\right)\neq0$ ، إذن $8x-1=0$ أو $8x=1$ ، ومنها $x=\frac{1}{8}$.

③ $(3x+1)(3x-1)^2=0$

إما $3x+1=0$ ، إذن $3x=-1$ ، ومنها $x=-\frac{1}{3}$.

وإما $(3x-1)^2=0$ ، إذن $3x-1=0$ أو $3x=1$ ، ومنها $x=\frac{1}{3}$.

②اكتب معادلة:

① حلولها -2 و 5 ② حلولها 0 و $0,5$ ③ حلولها $\sqrt{3}$ و -3

الحل:

① حلولها -2 و 5

المعادلة هي $(x+2)(x-5)=0$

② حلولها 0 و 0.5

المعادلة هي $x(x-0,5)=0$

③ حلولها $\sqrt{3}$ و -3

③ المعادلة هي $\left(x-\sqrt{3}\right)(x+3)=0$

3

④ حل كلاً من المعادلات الآتية:

❶ $3(5+3x)-(x-3)=0$

❷ $3(5+3x)(x-3)=0$

❸ $x+2(x-3)=0$

الحل:

❶ $3(5+3x)-(x-3)=0$

$15+9x-x+3=0$

$9x-x=-15-3$

$8x=-18$ ومنها $8x=\frac{-18}{8}=-\frac{9}{4}$.

❷ $3(5+3x)(x-3)=0$

إما $5+3x=0$، إذن $3x=-5$، ومنها $x=-\frac{5}{3}$.

وإما $x-3=0$، ومنها $x=3$.

❸ $x+2(x-3)=0$

$x+2(x-3)=0$

$x+2x-6=0$

$3x-6=0$

$3x=6$

$x=2$

⑤ حلِّلْ الطرف الأيسر، ثم حل المعادلة:

❶ $x(x-2)+3(x-2)=0$

❷ $(3x+5)^2-4x^2=0$

❸ $4x^2-9x=0$

❹ $(3x+1)^2+(3x+1)(x-1)=0$

الحل:

❶ $x(x-2)+3(x-2)=0$

$x(x-2)+3(x-2)=(x-2)(x+3)=0$

إما $x-2=0$، ومنها $x=2$.

وإما $x+3=0$، ومنها $x=-3$.

❷ $(3x+5)^2-4x^2=0$ ينقل هذا السؤال إلى درس المتطابقات

$[(3x+5)-2x][(3x+5)+2x]=(3x+5-2x)(3x+5+2x)=0$

$=(x+5)(5x+5)=(x+5)\times 5(x+1)=5(x+5)(x+1)=0$

إما $x+5=0$، ومنها $x=-5$ ، وإما $x+1=0$، ومنها $x=-1$.

3 $4x^2-9x=0$

$x(4x-9)=0$

إما $x=0$.

وإما $4x-9=0$ ، إذن $4x=9$ ، ومنها $x=\frac{9}{4}$.

4 $(3x+1)^2+(3x+1)(x-1)=0$

$$(3x+1)^2+(3x+1)(x-1)=0$$
$$(3x+1)\big((3x+1)+(x-1)\big)=0$$
$$(3x+1)(4x)=0$$

إما $(3x+1)=0$ أي $x=\frac{-1}{3}$

وإما $4x=0$ أي $x=0$

⑥ لدينا المقدار $E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$

1. انشر و اختزل E ، ثم حلله واحسب قيمته عند $x=\frac{1}{2}$.

2. حل المعادلة $E=0$.

الحل:

1. النشر والاختزال

$$E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)=9x^2+12x+4-(3x^2+21x+2x+14)$$
$$=9x^2+12x+4-3x^2-23x-14=6x^2-11x-10$$

• التحليل وحساب $E\left(\frac{1}{2}\right)$

$$E=(3x+2)\left[(3x+2)-(x+7)\right]=(3x+2)(3x+2-x-7)=(3x+2)(2x-5)$$
$$E\left(\frac{1}{2}\right)=6\left(\frac{1}{2}\right)^2-11\left(\frac{1}{2}\right)-10=6\times\frac{1}{4}-11\times\frac{1}{2}-10=\frac{3}{2}-\frac{11}{2}-\frac{20}{2}=-\frac{18}{2}=-9$$

2. حل المعادلة

وجدنا أنَّ $E=(3x+2)(2x-5)$

إذن $E=0$ هي $(3x+2)(2x-5)=0$

فإما $3x+2=0$ ، إذن $3x=-2$ ، ومنه $x=-\frac{2}{3}$. وكذلك $(2x-5)=0$ ومنه $x=\frac{5}{2}$

⑦لدينا المقدار $F=(2x-1)^2+(2x-1)(3x+5)$

1. انشر و اختزل F ثم حلله واحسب قيمته عند $x=\frac{1}{2}$

2. حل المعادلة $F=0$.

الحل:

1. النشر والاختزال

$$F=\left(2x-1\right)^2+\left(2x-1\right)\left(3x+5\right)=4x^2-4x+1+6x^2+10x-3x-5=10x^2+3x-4$$

● التحليل

$$F=\left(2x-1\right)^2+\left(2x-1\right)\left(3x+5\right)=(2x-1)(2x-1+3x+5)=(2x-1)(5x+4)$$

قيمته عند $x=\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}F&=\left(2x-1\right)^2+\left(2x-1\right)\left(3x+5\right)\\&=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)^2+\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)\left(3\left(\frac{1}{2}\right)+5\right)\\&=0+0\left(\left(\frac{3}{2}\right)+5\right)=0\end{aligned}$$

2. حل المعادلة

وجدنا أنَّ $E=(2x-1)(5x+4)$

إذن $E=0$ هي $(2x-1)(5x+4)=0$

فإما $2x-1=0$، إذن $2x=1$، ومنها $x=\dfrac{1}{2}$.

وإما $5x+4=0$، إذن $5x=-4$، ومنها $x=-\dfrac{4}{5}$.

⑧ لدينا المقداران:

$A=(4x+5)(x-2)-x(x+4)$ و $B=(3x-10)(x+1)$

1. أثبت أنَّ $A=B$.

2. استنتج حلول المعادلة $A=0$.

الحل:

1. $A=4x^2-8x+5x-10-x^2-4x=3x^2-7x-10$

$B=3x^2+3x-10x-10=3x^2-7x-10$, واضح أنَّ $A=B$.

2. بما أنَّ $A=B$، فحلول المعادلة $A=0$ هي حلول المعادلة $B=0$،

أي إنها حلول $(3x-10)(x+1)=0$.

فإما $3x-10=0$، إذن $3x=10$، ومنها $x=\dfrac{10}{3}$.

وإما $x+1=0$، ومنها $x=-1$.

3 متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد

نشاط « تعرف رموز ومصطلحات في حل المتراجحات »

1. قل إن كانت المتراجحة، في كلٍ مما يأتي، صحيحة أم خاطئة.

* $11+3 \geq 8+7$ * $11-3 \geq 1+7$ * $1-3 \geq 6-7$

* $5-3 \geq 8-7$ * $10-1 \geq 2+7$ * $1-3 \geq 6-9$

الحل:

* $11+3 \geq 8+7$
$14 < 15$
المتراجحة خاطئة

* $11-3 \geq 1+7$
$8 = 8$
المتراجحة صحيحة

* $1-3 \geq 6-7$
$-2 < -1$
المتراجحة خاطئة

* $5-3 \geq 8-7$
$2 \geq 1$
المتراجحة صحيحة

* $10-1 \geq 2+7$
$9 = 9$
المتراجحة صحيحة

* $1-3 \leq 6-9$
$-2 \geq -3$
المتراجحة خاطئة

2. أي القيم الآتية تحقق المتراجحة $2x+1 < x-5$؟

* $x = 0$ * $x = -10$ * $x = 5$

الحل:

* $x = 0$ نعوض $x = 0$ في المتراجحة

$$2x + 1 < x - 5$$
$$1 > -5$$

غير محققة

* $x = -10$ نعوض $x = -10$ في المتراجحة

$$2x+1<x-5$$
$$-20+1<-10-5$$
$$-19<-15$$

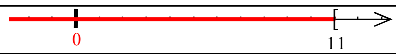
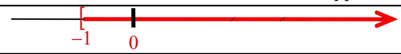
محققة

* $x=5$ نعوض $x=5$ في المتراجحة

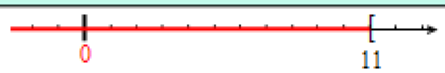
$$2x+1<x-5$$
$$10+1>5-5$$
$$11>0$$

غير محققة

① انسخ وأكمل كما في السطر الأول:

المتراجحة	الخاصة المستعملة	حل المتراجحة	تمثيل الحل
$x-5<6$	نضيف -5 إلى الطرفين	$x<11$	
$x+3\geq 2$	....	$x\geq$	
$2x<-6$	....	x	....
$-3x>12$	....	x	....

الحل:

المتراجحة		المتراجحة	تمثيل الحل
$x-5<6$	القاعدة المستعملة	-	
$x+3\geq 2$			
$2x<-6$		$x<11$	
$-3x>12$	التقسيم على عدد سالب	$x\geq -1$	

التقسيم على عدد موجب $x<-3$ 

الضرب بعدد سالب $x<-4$ 

② حل كلاًّ من المتراجحتين الآتيتين، ومثّل الحلول على مستقيم الأعداد كما في الجدول السابق.

* $4-3x\geq 2$ * $4x+8<16-2x$

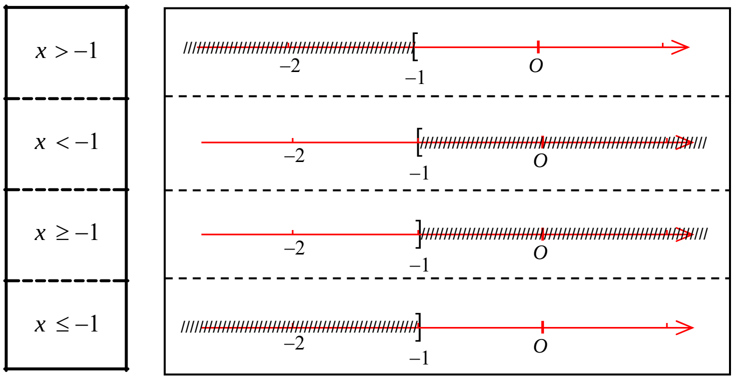
الحل:

* $4-3x\geq 2$ ؛ $-3x\geq 2-4$ ؛ $-3x\geq -2$ ؛ $x\leq \frac{-2}{-3}$ ؛ $x\leq \frac{2}{3}$.

** $4x+8<16-2x$ ؛ $2x+4x<16-8$ ؛ $6x<8$ ؛ $x<\frac{8}{6}$ ؛ $x<\frac{4}{3}$.

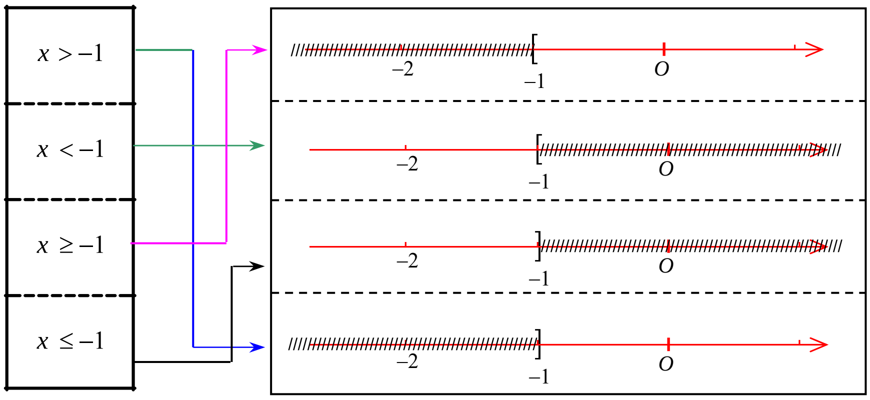
تحقق من فهمك

انسخ ثم اربط كل متراجحة من الحقل ① بحلها الممثل باللون الأحمر من الحقل ②.



① ②

الحل:



① ②

تدرب

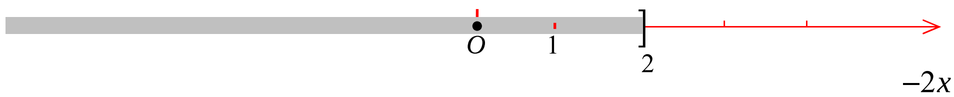
① حل كلاً من المتراجحات الآتية ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

❶ $3x+2>8$ ❷ $-2x+3\leq 5$ ❸ $\frac{x}{2}-1<\frac{1}{2}$

الحل:

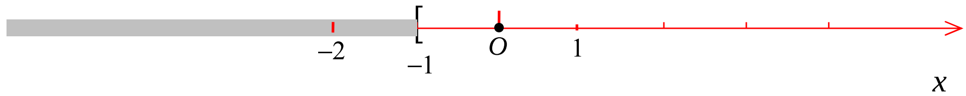
❶ $3x+2>8$

$3x>6$ ، $\frac{3x}{3}>\frac{6}{3}$ ومنه $x>2$.



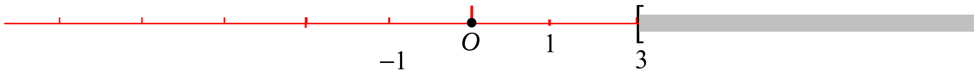
❷ $-2x+3\leq 5$

$-2x\leq 2$ نقسم على -2 مع مراعاة جهة التراجح فنجد $\frac{-2x}{-2}\geq\frac{2}{-2}$ ومنه $x\geq -1$



❸ $\frac{x}{2}-1<\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}<\frac{3}{2}$ **نضرب بالعدد 2** $2\times\frac{x}{2}<2\times\frac{3}{2}$ **فنجد** $x<3$



②لدينا المتراجحة $2x-5\leq 3$

1. أي الأعداد -2 ; $\frac{1}{2}$; 4 ; 5 حل لهذه المتراجحة وأيها ليس حلاً لها.

2. حل هذه المتراجحة.

3. مثِّلْ حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل:

1. نرمز إلى الطرف الأيسر من المتراجحة بالرمز $L_1(x)$.

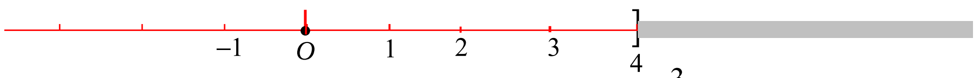
$L_1(5)=2(5)-5=5$، إذن 5 ليس حلاً للمتراجحة.

$L_1(4)=2(4)-5=3$، إذن 4 حلٌّ للمتراجحة.

فكل عدد أصغر أو يساوي 4 حلٌّ للمتراجحة، وبالتالي $\frac{1}{2}$ و -2 حلولٌ للمتراجحة.

2. حل المتراجحة:

$2x-5+5\leq 3+5$ ، $2x\leq 8$ ، $\frac{2x}{2}\leq\frac{8}{2}$ ، $x\leq 4$.



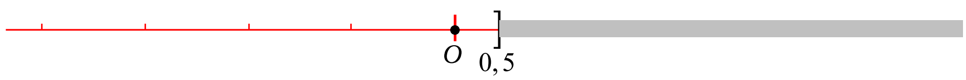
③ لدينا المتراجحة $2x-5\leq\frac{3}{2}-11x$

1. دون حل المتراجحة، هل أحد العددين 0 و 1 أو كلاهما حل لها؟

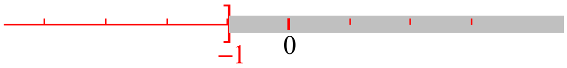
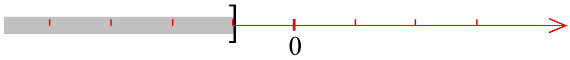
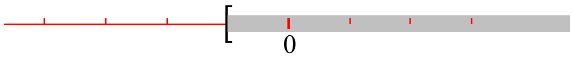
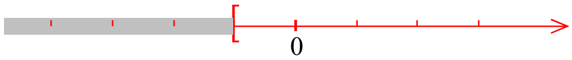
2. حل هذه المتراجحة ومثِّلْ حلولها على مستقيم الأعداد.

1. الحل: بالتعويض نجد الصفر حلّ للمتراجحة و العدد 1 ليس حلاً لها.

2. تكتب المتراجحة $2x+11x\leq\frac{3}{2}+5$ أو $13x\leq\frac{13}{2}$، ومنها $x\leq\frac{13}{2}\div 13$، أي $x\leq\frac{1}{2}$.



④ انسخ ثم اربط كل متراجحة من الحقل الأيسر بحلها الممثل باللون الأحمر من الحقل الأيمن.

❶ $5x-1\le 3(x-1)$	a 
❷ $4x-(2x-1)\ge 3x+2$	b 
❸ $\frac{x+4}{3}\ge 1$	c 
❹ $2x-4<5x-1$	d 

الحل:

- تكتب المتراجحة ❶ $5x-1<3x-3$ أو $5x-3x<-3+1$ أو $2x<-2$، إذن $x<\frac{-2}{2}$،

أي $x<-1$. فحل المتراجحة ❶ يمثل بالشكل a.

- تكتب المتراجحة ❷ $4x-2x+1\ge 3x+2$ أو $4x-2x-3x\ge +2-1$ أو $-x\ge +1$، إذن $x\le \frac{1}{-1}$،

أي $x\le -1$. فحل المتراجحة ❷ يمثل بالشكل a.

- تكتب المتراجحة ❸ $x+4\ge 3$ أو $x\ge 3-4$، إذن $x\ge -1$. فحل المتراجحة ❸ يمثل بالشكل d.
- تكتب المتراجحة ❹ $2x-5x<-1+4$ أو $-3x<+3$، إذن $x>\frac{+3}{-3}$. أي $x>-1$، فحل المتراجحة ❸

يمثل بالشكل b.

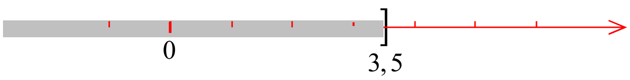
⑤ حل كل متراجحة ومثِّل حلولها على مستقيم الأعداد.

① $3x-2>x+5$ ② $2x-\frac{1}{4}\le 3x-\frac{1}{4}$

❸ $3(y-1)-2(4y+1)\ge 0$ ④ $\frac{1}{4}(3z+1)<\frac{1}{6}(5z+1)$

الحل:

① $3x-2>x+5$



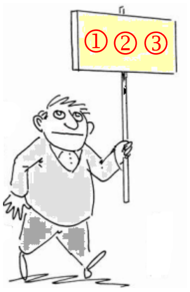
$3x-x>+5+2$ ، $2x>7$ ، $x>\frac{7}{2}$ ، $x>3.5$.

② $2x-\frac{1}{4}\le 3x-\frac{1}{4}$

$2x-3x\le -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ، $-x\le 0$ ، $x\ge 0$.

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.



(1) حَلُّ المعادلة $3x-5=0$ هو

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{3}{5}$

(2) حلول المعادلة $(3x-5)(2x+10)=0$ هي

① -5 ② $\frac{5}{3}$ ③ -5 و $\frac{5}{3}$

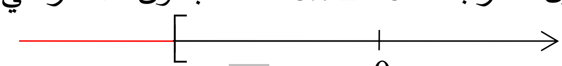
(3) حلول المعادلة $x^2=4$ هي

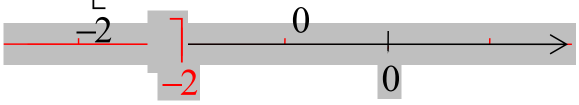
① -2 و 2 ② -4 و 4 ③ 1

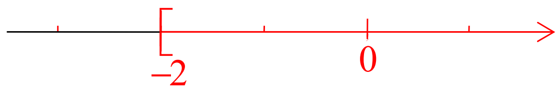
(4) حلول المتراجحة $-2x<3$ هي جميع قيم x التي تحقق

① $x<\frac{3}{2}$ ② $x<-\frac{3}{2}$ ③ $x>-\frac{3}{2}$

(5) حلول المتراجحة $3x\leq -6$ ممثلة باللون الأحمر في الشكل

① 

② 

③ 

(6) « قبل خمس سنوات كان عمري نصف ما سيصبح عليه بعد خمس سنوات ». إذا رمزتُ إلى عمري الآن بالرمز x، كانت المعادلة المعبرة عن النص هي

① $2(x-5)=x+5$ ② $x=2x+15$ ③ $2x-5=x+5$

(7) حسب النص الوارد في الطلب (6)، عمري الآن هو

① 5 سنوات ② 15 سنة ③ 10 سنوات

(8) العبارة التي قيمتها 10 عند $x=4$ هي

① $x(x+1)$ ② $(x+1)(x-2)$ ③ $(x-1)^2$

(9) جذر المعادلة $2x-(8+3x)=2$ هو

① 10 ② -10 ③ 2

2 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) حل المعادلة $5x+2=3x-1$ هو حل المعادلة

① $2x+2=-1$ ② $-2x+2=-1$ ③ $8x+2=-1$

(2) المعادلات التي حلولها أعداد عشرية هي

① $(3x-6)(2x-3)=0$ ② $(2x-1)(3x+2)=0$ ③ $3x(6-2x)=0$

(3) أحد حلول المتراجحة $x-4\geq 2(x+1)$ هو

① -10 ② -6 ③ 0

(4) حل المتراجحة $3x-2\leq 4x-1$ هو حل المتراجحة

① $x-2\leq -1$ ② $-x-2\leq -1$ ③ $7x-2\geq -1$

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي، معللاً إجابتك.

(1) يرمز x إلى عدد موجب. يمكن أن يكون المستطيل الذي بعداه $2x+1$ و $3x+4$ مربعاً.

الحل:

يكون المستطيل مربعاً إذا تساوى بعداه، أي $3x+4=2x+1$، إذن $3x-2x=+1-4$، ومنها $x=-3$، وهذا يخالف النص. فالقول خطأ.

(2) جذرا المعادلة $x^2-25=0$ هما عددان موجبان.

الحل:

تكتب المعادلة بالصيغة $x^2-25=0$ أو $x^2=25$.

جذرا المعادلة هما $x=5$ و $x=-5$ وهما واحد سالب و آخر موجب إذا المقولة خاطئة .

(3) العدد الوحيد الذي مربعه يساوي ضعفيه هو 2.

الحل:

القول خطأ. لأنَّ $0^2=0$ أيضاً.

(4) كلّ عدد هو حلٌّ للمعادلة $13x-12=x+12(x-1)$.

الحل:

نرمز إلى الطرف الأيسر من المعادلة بالرمز L_1 وإلى طرفها الأيمن بالرمز L_2، فيكون:

$L_1=13x-12$ و $L_2=x+12x-12=13x-12$.

نلاحظ أنّ $L_1=L_2$ أياً يكن x. فالقول صحيح.

(5) كل عدد أصغر من 3، يكون نظيره أصغر من -3.

الحل: القول خطأ. فالعدد 2 أصغر من 3 بينما نظيره -2 أكبر من -3.

(6) كل عدد أكبر من 3، يكون مقلوبه أكبر من $\frac{1}{3}$.

الحل:

القول خطأ. فالعدد 4 أكبر من 3 بينما مقلوبه $\frac{1}{4}$ أصغر من $\frac{1}{3}$.

(7) أي عدد موجب ليس حلاً للمتراجحة $-3x+1>0$.

الحل:

القول خطأ. لأنَّ حلول المتراجحة $-3x+1>0$ هي $x<\frac{1}{3}$ والعدد الموجب $\frac{1}{4}$ حل للمتراجحة.

4 إذا كان x عدداً يحقّق المتراجحة $x\leq 2$ كان

❶ $x-1\leq \ldots$ ❷ $x-2\leq \ldots$ ❸ $3+x\leq \ldots$

❹ $\frac{x}{2}\leq \ldots$ ❺ $-3x\geq \ldots$ ❻ $-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\geq \ldots$

الحل:

❶ $x-1\leq 1$ ❷ $x-2\leq 0$ ❸ $3+x\leq 5$

❹ $\frac{x}{2}\leq 1$ ❺ $-3x\geq -6$ ❻ $-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\geq \frac{1}{2}$

5 حل كلّاً من المعادلات الآتية.

① $3(-x+5)=-5(x+3)$ ② $5-3(x+1)=3-x$

③ $6(x-3)=2(3x-2)-3x$ ④ $(2x-9)(8x-1)=(4x+3)^2$

⑤ $(2x+3)(x-5)=2x(x-2)$ ⑥ $(3x-1)(x+2)=(x-1)(2x+4)$

الحل:

❶ $3(-x+5)=-5(x+3)$

$$-3x+5x=-15-15$$
$$2x=-30$$
$$x=-15$$

❷ $5-3(x+1)=3-x$

$5-3x-3=3-x$ ، $5-3-3=-x+3x$ ، $-1=2x$ ، ومنها $x=-\frac{1}{2}$.

❸ $6(x-3)=2(3x-2)-3x$

$6x-18=6x-4-3x$ ، $6x-6x+3x=-4+18$ ، $3x=14$ ، ومنها $x=\frac{14}{3}$.

❹ $(2x-9)(8x-1)=(4x+3)^2$

$$16x^2-2x-72x+9=16x^2+24x+9$$
$$16x^2-2x-72x+9-16x^2-24x-9=0$$
$$-98x=0$$
$$x=0$$

❺ $(2x+3)(x-5)=2x(x-2)$

$$(2x+3)(x-5)=2x(x-2)$$
$$2x^2-10x+3x-15=2x^2-4x$$
$$-10x+3x+4x-15=0$$
$$-3x-15=0$$
$$-3x=15$$
$$x=\frac{15}{-3}=-5$$

❻ $(3x-1)(x+2)=(x-1)(2x+4)$

$$(3x-1)(x+2)=(x-1)(2x+4)$$
$$(3x-1)(x+2)=2(x-1)(x+2)$$
$$(3x-1)(x+2)-2(x-1)(x+2)=0$$
$$(x+1)(x+2)=0$$

$x=-2$ أو $x=-1$

6 اشترك عدد من الأصدقاء لتنظيم عشاء مشترك يتقاسمون الكلفة بالتساوي. إذا دفع كل منهم 900 ليرة، زاد المبلغ عن الكلفة بمقدار 800 ليرة. وإذا دفع كل منهم 600 ليرة، نقص المبلغ عن الكلفة بمقدار 1300 ليرة. فما عدد هؤلاء الأصدقاء؟

الحل:

نرمز إلى عدد الأصدقاء بالرمز x.

إذا دفع كل منهم 900 ليرة، كان المبلغ المدفوع $900x$ ليرة، فكانت الكلفة $900x - 800$ ليرة.

وإذا دفع كل منهم 600 ليرة، كان المبلغ المدفوع $600x$ ليرة، فكانت الكلفة $600x + 1300$ ليرة.

والكلفة هي هي، إذن $900x - 800 = 600x + 1300$ أو $900x - 600x = 1300 + 800$ أو

$300x = 2100$، ومنها $\frac{2100}{300} = \frac{300x}{300}$ وبالتالي $x = 7$.

7 عمر سامر الآن 11 سنة وعمر غيث 26 سنة. بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر سامر؟

الحل:

نفترض أنَّ عمر غيث سيصبح مِثلَي عمر سامر بعد x سنة.

بعد x سنة يصبح عمر سامر $x + 11$ سنة ويصبح عمر غيث $x + 26$ سنة.

فيكون، حسب النص، $x + 26 = 2(x + 11)$، إذن $x + 26 = 2x + 22$ أو $26 - 22 = 2x - x$

أو $x = 4$.

(لاحظ: بعد 4 سنوات يصبح عمر سامر 15 سنة وعمر غيث 30 سنة و $30 = 2\times 15$)

8 ما العدد الذي إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خُمسيه حصلنا على 460 ؟

الحل:

نرمز إلى العدد المطلوب بالرمز x، فيكون حسب النص $\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}x = 460$، وبضرب طرفي المعادلة بالعدد 20، نحصل على $15x + 8x = 9200$ أو $23x = 9200$، ومنها $x = \frac{9200}{23} = 400$.

9 تضم مكتبة رولا أربعة أصناف من الكتب. نصف كتبها مدرسية، ربعها روايات، خُمسها علمية، بالإضافة إلى معجمين. ما عدد كتب رولا؟

الحل:

نرمز إلى عدد الكتب في مكتبة رولا بالرمز x، فيكون حسب النص $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 2 = x$.

نضرب كلاً من طرفي المعادلة بالعدد 20، نحصل على $10x + 5x + 4x + 40 = 20x$

أو $40 = 20x - 19x$، ومنها $x = 40$.

10 ABC مثلث قائم في A. $AB = 7\text{ cm}$ ، وطول $[BC]$ يزيد على $[AC]$ بمقدار 5 cm.

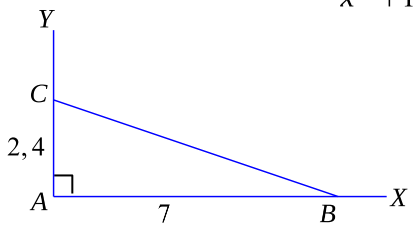
نرمز بالرمز x إلى طول $[AC]$ مقاساً بالسنتيمتر. احسب x.

الحل:

1. حسب مبرهنة فيثاغورث، يكون:

$CB^2 = AB^2 + AC^2$، أي $(x+5)^2 = 7^2 + x^2$ أو $x^2 + 10x + 25 = 49 + x^2$

أو $x^2 - x^2 + 10x = 49 - 25$ أو $10x = 24$، ومنها $x = \frac{24}{10} = 2.4$.



2. نرسم زاوية قائمة xAy، ونأخذ على ضلعه القائم $[AX)$ النقطة B التي تحقق $AB = 7\text{ cm}$ وعلى ضلعه القائم $[AY)$ النقطة C التي تحقق $AC = 2.4\text{ cm}$. نرسم $[AC]$، فنحصل على المثلث.

11 طريقتان للحل

نتأمّل المعادلة $(x-3)^2 = 4$.

- اقترحت "ريما" الحل التالي: « الأعداد التي مربعاتها 4 هي 2 و -2، ولذا فإن حلول المعادلة $(x-3)^2 = 4$ هي حلول المعادلتين $x-3=2$ و $x-3=-2$ » . أكمل الحل.
- اقترحت "لينا" الحل التالي: « المعادلة $(x-3)^2 = 4$ تكتب $(x-3)^2 - 4 = 0$. بتحليل الطرف الأيسر، أحصل على جداء صفري » . أكمل الحل.
- وأنت: حل المعادلة $(2-x)^2 = 9$.

الحل:

اقتراح ريما: المعادلة $x-3=2$ تعني $x = 2+3$، إذن $x = 5$.

والمعادلة $x-3=-2$ تعني $x = -2+3$، إذن $x = 1$.

اقتراح لينا: المعادلة $(x-3)^2 - 4 = 0$ تكتب $(x-3)^2 - 2^2 = 0$ إذن $(x-3+2)(x-3-2) = 0$،

أو $(x-1)(x-5) = 0$. فإما $x-5=0$، ومنها $x = 5$. وإما $x-1=0$، ومنها $x = 1$.

حل المعادلة $(2-x)^2 = 9$

$(2-x)^2 = 9$

$(2-x) = -3$ ومنه $-x = -5$ اذن $x = 5$

$2-x = +3$ ومنه $x = -1$

12 **1.** ① ليكن $M = \frac{4x+2}{5}$. احسب قيمة M عند $x = \frac{3}{4}$.

② هل العدد $\frac{3}{4}$ حلٌّ للمتراجحة $\frac{4x+2}{5} < 3$ ؟

2. حل المتراجحة $\frac{4x+2}{5} < 3$ ومثل حلولها على محور الأعداد.

الحل:

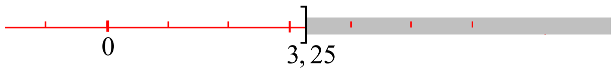
1. ① $M\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{4\times\frac{3}{4}+2}{5}=\frac{3+2}{5}=\frac{5}{5}=1$

② المتراجحة $\frac{4x+2}{5}<3$ تعني $M<3$.

وفي حالة $x=\frac{3}{4}$ يكون $1<3$، فالعدد $\frac{3}{4}$ حلٌّ للمتراجحة $\frac{4x+2}{5}<3$.

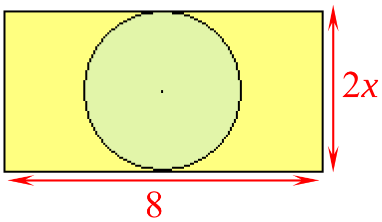
2. المتراجحة $\frac{4x+2}{5}<3$ تكتب $5\times\frac{4x+2}{5}<5\times3$، إذن $4x+2<15$ أو $4x<15-2$

أو $4x<13$، ومنها $x<\frac{13}{4}$ أي $x<3,25$.



لإحراز تقدم

13 في الشكل المرسوم جانباً، يرمز x إلى عدد موجب تماماً.
القرص الدائري الأخضر والمستطيل لهما مركز مشترك.
الدائرة المحيطة بالقرص تمس ضلعين متقابلين من أضلاع المستطيل. أوجد قيمة x التي تجعل مساحة القرص مساوية لمساحة الجزء الملون بالأصفر.



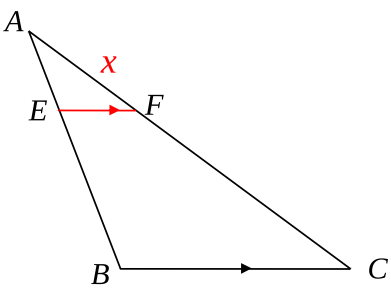
الحل

مساحة المستطيل $\mathcal{A}_1=8\times2x=16x$.

نصف قطر القرص يساوي $\frac{2x}{2}=x$، فمساحته $\mathcal{A}_2=\pi x^2$.

نريد أن تكون مساحة القرص مساوية لمساحة الجزء الملون بالأصفر، وهذا يعني أن تكون مساحة القرص مساوية نصف مساحة المستطيل، أي $\pi x^2=\frac{1}{2}\times16x$ أو $\pi x^2=8x$، إذن $\pi x^2-8x=0$ ومنه $x(\pi x-8)=0$ ومنه إما $x=0$ أي $x=\frac{8}{\pi}$.

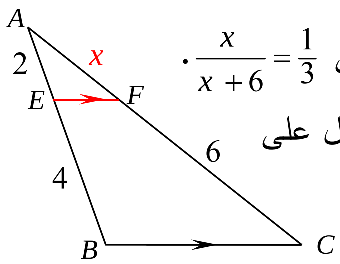
14 ABC مثلث طول ضلعه $[AB]$ يساوي 6 cm. E نقطة من $[AB]$ تحقق $AE=2\text{ cm}$. المستقيم المرسوم من E موازياً (BC) يقطع $[AC]$ في F. نعلم أنَّ $FC=6\text{ cm}$ ونضع $AF=x\text{ cm}$.



1. اشرح لماذا $\frac{x}{x+6}=\frac{1}{3}$.

2. حل هذه المعادلة. ما طول كلٍ من $[AF]$ و $[AC]$؟

الحل:



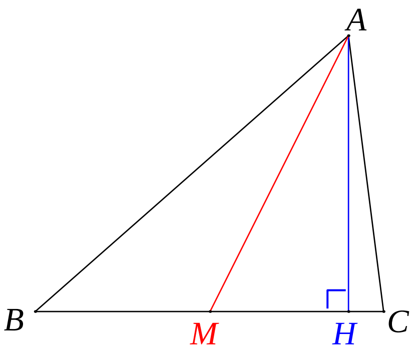
1. لدينا، حسب تالس، $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$، إذن $\frac{2}{6}=\frac{x}{x+6}$، وبالتالي $\frac{1}{3}=\frac{x}{x+6}$.

2. نستعمل قاعدة الجداء المتصالب في التناسب السابق، فنحصل على

$3x=x+6$ أو $3x-x=6$ أو $2x=6$، ومنها $x=\frac{6}{2}=3$.

$AF=x=3$ و $AC=AF+FC=3+6=9$.

15 في المثلث ABC، $[AH]$ ارتفاع و $[AM]$ متوسط. نعلم أنَّ $AB=9\text{ cm}$ و $AC=6\text{ cm}$ و $MH=3\text{ cm}$. نضع $BM=x\text{ cm}$ و $AH=h\text{ cm}$.



1. باستعمال مثلثين قائمين، أثبت أنَّ:

$①\cdots h^2=-x^2+6x+27$ و

$②\cdots h^2=-x^2-6x+72$

2. استنتج قيمة x.

الحل:

1. $[AM]$متوسط، $BM=MC=x$،

إذن $HC=MC-MH=x-3$ و $BH=BM+MH=x+3$.

في المثلث AHC القائم في H، وحسب فيثاغورث: $AH^2=AC^2-HC^2$، أي

$①\cdots h^2=6^2-(x-3)^2=36-(x^2-6x+9)=-x^2+6x+27$

وفي المثلث AHB القائم في H، وحسب فيثاغورث: $AH^2=AB^2-BH^2$، أي

$②\cdots h^2=9^2-(x+3)^2=81-(x^2+6x+9)=-x^2-6x+72$

2. نستنتج من العلاقتين ① و ② أنَّ $-x^2+6x+27=-x^2-6x+72$ بالحل نجد $x=\frac{15}{4}$

16 هناك عرضان في محل تأجير أفلام الفيديو:

- **اشتراك واستعارة:** يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً، ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره.
- **استئجار:** يدفع المستأجر 800 ليرة عن كل فلم يستأجره.

بدءاً من كم فلماً يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول أوفر من الثاني؟

الحل:

ليكن x عدد الأفلام التي يشاهده الشخص سنوياً.

في حالة الاشتراك يتكلف المشاهد سنوياً $550x+6\,000$ ليرة.

وفي حالة الاستئجار يتكلف المشاهد سنوياً $800x$ ليرة.

يكون العرض الأول أوفر في حالة $550x+6\,000<800x$ أو $6\,000<800x-550x$

أو $250x>6\,000$، ومنها $x>\frac{6\,000}{250}$ أي $x>24$.

فعلى المشاهد أن يرى سنوياً أكثر من 24 فلماً على الأقل ليكون العرض الأول

17 هناك عرضان في أحد المسابح كما يأتي:

- **دفع نقدي:** يدفع الشخص 340 ليرة عن كل زيارة للمسبح.
- **اشتراك:** يشترك الشخص ببطاقة سنوية تصلح لعشر زيارات للمسبح سعرها 1700 ليرة.

بدءاً من كم زيارة للمسبح سنوياً يكون العرض الثاني أوفر للشخص؟

الحل: نرمز x لعدد الزيارات

نفترض أنَّ العرض الثاني أوفر بدءاً من x زيارة .

الدفع النقدي يكلف الشخص $340x$ ليرة.

نريد أن تتحقق المتراجحة $340x<1\,700$، إذن $x>\frac{1\,700}{340}$ ، أي $x>5$.

فبدءاً من 6 زيارات سنوياً يكون العرض الثاني أوفر له.

تمارين إضافية

(1) مجموع القواسم

1. احسب: a)مجموع قواسم العدد 8 وليكن S_1. b) مجموع قواسم العدد 9 وليكن S_2. S)مجموع قواسم العدد 9×8 وليكن S.

2. اكتب علاقة بسيطة بين S_1 و S_2 و S.

3. بيِّن أنَّ تلك العلاقة لا تعمَّم على جميع الأعداد.

(2) المصور

1. هل العددان 288 و 224 أوليان فيما بينهما؟ اشرح لماذا.

2. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 288 و 224.

3. أوجد الكسر المختزل من الكسر $\dfrac{224}{288}$.

(3) بين الظن واليقين

أكَّد عدنان: « كل عددين طبيعيين متتاليين أوليان فيما بينهما »

1. ① اختبر تأكيد عدنان على جميع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 30 بحساب القاسم المشترك الأكبر لكل عددين متتاليين.

② هل هذه الأمثلة كافية لتتفق مع عدنان بما أكد؟

2. من المعلوم أنَّ عدداً من الأمثلة لا تكفي لإثبات صحة قضية، بل يجب إثبات صحتها بشكل عام.

① نرمز إلى عددٍ طبيعي بالرمز n. ما العدد التالي لهذا العدد؟

② نرمز إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين n و $n+1$ بالرمز d. اشرح لماذا d هو قاسمٌ للعدد $(n+1)-n$.

③ استنتج قيمة d.

3

④ استنتج رأياً قاطعاً في تأكيد عدنان.

(4) الربط بين العدد والهندسة

صندوق بهيئة متوازي مستطيلات ارتفاعه L وقاعدته مربع طول ضلعه ℓ.

نريد أن نملأ هذا الصندوق بعدد صحيح من العلب المكعبة المتماثلة والتي طول حرف كلٍ منها a، دون أن يبقى أي فراغ من الصندوق. علماً أنَّ a و L و ℓ اعداداً طبيعية.

1. في هذا السؤال: $\ell = 882$ و $L = 945$.

① ما أكبر قيمة للحرف a؟

② ما جميع القيم الممكنة للحرف a؟

2. في هذا السؤال: حجم الصندوق $\mathcal{V} = 77\ 760$ و $a = 12$.

① ما عدد العلب التي يتسع لها الصندوق؟

② استنتج الطولين L و ℓ.

4

الوحدة الرابعة
جمل المعادلات

1. جملة معادلتين خطيتين بمجهولين
2. معادلة مستقيم
3. حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الأسبوع
1- جملة معادلتين خطيتين بمجهولين	2	كانون أول	الرابع
2- معادلة مستقيم	1	كانون أول	الرابع
3- حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً	3	كانون ثاني	الرابع
تمرينات ومسائل	5	شباط	الأول والثاني
اختبار	1	شباط	الثاني
المجموع	12		

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
التمثيل البياني لمعادلة	رسم الخط البياني الممثل لهذه المعادلة.
حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً	رسم خطي المعادلتين فيكون الحل نقطة التقاطع هي الحل

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
حل معادلة خطية بمجهول واحد	جملة معادلتين خطيتين بمجهولين
رسم مستقيم	حل جملة معادلتين خطيتين بمجهولين
اختزال عبارة	معادلة مستقيم
اختبار صحة مساواة	حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

مقدمة الوحدة:

لاحظ مفردات المقدمة : تقدم احجية تختبر ذكاء الطالب وقد شاع استعمال هذا النمط بين الطلبة.

جمل المعادلات

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

.1 اختزال عبارة

الصيغة المختزلة للعبارة $3x+4-(5x-7)+1$ هي .

① $-2x-2$　② $-2x-4$　③ $-2x+12$

.2 حل معادلة

لحل المعادلة $3x+5=x-2$، يمكن أن نكتب

① $3x+x=-2+5$, $4x=3$, $x=0.75$

② $2x+5=-2$, $2x=-7$, $x=-3.5$

③ $2x+5=-2$, $2x=-7$, $x=-9$

.3 اختبار صحة مساواة

المساواة $3x-5y-7=6$ صحيحة في حالة

① $x=1$ و $y=2$　② $x=1$ و $y=-2$　③ $x=-2$ و $y=1$

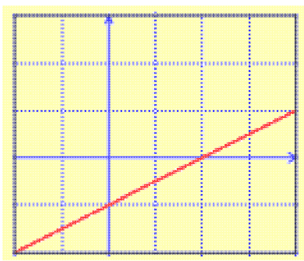
.4 التعبير بدلالة y

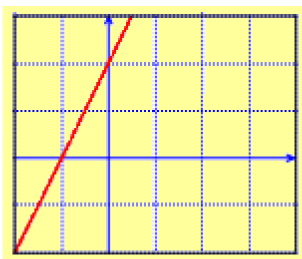
يرمز x و y إلى عددين يحقّقان $3x-y=2$، إذن

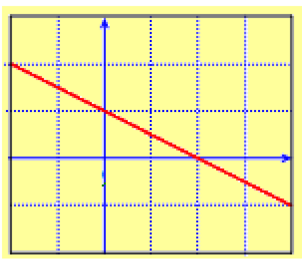
① $y=3x-2$　② $y=2-3x$　③ $y=-3x-2$

.5 التمثيل البياني لمعادلة

الخط البياني الذي يمثل المعادلة $y=\frac{1}{2}x-1$ هو الشكل : ①


①


②


③

4

جملة معادلتين خطيتين بمجهولين

نشاط « نحو التعامل مع مجهولين »

1. ما اشتراه صلاح: اشترى صلاح أربعة أقلام رصاص بسعر x ليرة سورية لكل قلم، وقلم حبر سعره y ليرة. دفع صلاح مبلغ 85 ليرة ثمن الأقلام التي اشتراها.

① عبِّر عن معطيات هذا النص بمعادلة فيها x و y.

② في حالة كون سعر قلم الرصاص 15 ليرة، كم يكون سعر قلم الحبر؟

③ في حالة كون سعر قلم الحبر 25 ليرة، كم يكون سعر قلم الرصاص؟

④ هل يمكن أن يكون سعر قلم الرصاص الذي اشتراه صلاح 22 ليرة؟ لماذا؟

الحل:

① $(1) \cdots 4x + y = 85$

② نضع في المعادلة السابقة $x = 15$، فنحصل على $4 \times 15 + y = 85$، إذن $y = 85 - 60 = 25$.

فيكون سعر قلم الحبر 25 ليرة.

③ نضع في المعادلة السابقة $y = 25$، فنحصل على $4x + 25 = 85$، إذن $4x = 85 - 25$ أو $4x = 60$، ومنها $x = \frac{60}{4} = 15$. فيكون سعر قلم الرصاص 15 ليرة.

④ نضع في المعادلة السابقة $x = 22$، فنحصل على $4 \times 22 + y = 85$ ، إذن $y = 85 - 88 = -3$.

لا يمكن أن يكون سعر قلم الحبر سالباً، فلا يمكن أن يكون سعر قلم الرصاص 22 ليرة.

2. ما اشتراه زياد: اشترى زياد قلمي رصاص بسعر x ليرة لكل قلم، وثلاثة أقلام حبر بسعر y ليرة لكل قلم. دفع زياد مبلغ 95 ليرة ثمن الأقلام التي اشتراها.

① عبِّر عن معطيات هذا النص بمعادلة فيها x و y.

② هل يمكن أن يكون سعر قلم الحبر 15 ليرة وسعر قلم الرصاص 25 ليرة مع كون ثمن الأقلام جميعاً 95 ليرة؟ وهل يمكن أن يكون سعر قلم الرصاص 15 ليرة وسعر قلم الحبر 20 ليرة؟ اشرح!

الحل

① $(2) \cdots 2x + 3y = 95$

② في الحالة الأولى نحصل على $2\times25+3\times15=50+45=95$.

المساواة محققة، فالعرض ممكن.

في الحالة الثانية نحصل على $2\times15+3\times20\neq95$.

المساواة غير محققة، فالعرض غير ممكن.

3. حل جملة معادلتين، من الدرجة الأولى، بمجهولين

كيف وجد صلاح وزياد الحل المشترك للمعادلتين (1) و (2)؟

- كتب صلاح: « إذا كان (x,y) حلاً للجملة، كان $y=85-4x$ »
- أردف زياد: « إذن $2x+3(85-4x)=95$ »

① اشرح كيف حصل صلاح وزياد على معادلتيهما. حلّ بعدئذ معادلة زياد.

② بحل معادلة زياد ستجد قيمة x . عد إلى معادلة صلاح لتجد y .

③ تحقق من أنَّ قيمتي x و y اللتين حصلت عليهما تحققان كلاً من المعادلتين (1) و (2).

④ ما قيمة كلٍ من قلم الرصاص وقلم الحبر؟

الحل

① كتب صلاح إحدى المجهولين بدلالة الأخر: $y=85-4x$

وضع زياد $2x+3(85-4x)=95$ في المعادلة (2) فحصل على ما حصل عليه.

لحل معادلة صلاح، ننشر $3(85-4x)$، فنحصل على $2x+255-12x=95$.

ننقل الحدود المجهولة إلى الطرف الأيمن من المعادلة والحدود المجهولة إلى الطرف الأيسر منها، على أن نغير إشارة كل حد منقول، فنجد $255-95=12x-2x$.

نختزل كلاً من طرفي المعادلة، فنحصل على $160=10x$، ومنها $x=\frac{160}{10}=16$.

② بالعودة إلى معادلة صلاح مع $x=16$، سنجد $y=85-4\times16=21$.

③ نضع $x=16$ و $y=21$ في المعادلة $4x+y=85\cdots(1)$، فنحصل على $4\times16+21=85$

أي $40+45=85$. وهذه مساواةٌ صحيحة، فقيمتا x و y تحققان المعادلة (1).

4

نضع $x=16$ و $y=21$ في المعادلة $(2)\cdots 2x+3y=95$، فنحصل على $2\times16+3\times21=95$

أي $32+63=95$. وهذه مساواةٌ صحيحة، فقيمتا x و y تحققان المعادلة (2).

④ بهذا يكون سعر قلم الرصاص 16 ليرة وسعر قلم الحبر 21 ليرة.

تحقق من فهمك

① أيُّ الثنائيات $(7,-3),(-13,9),(2,-1),(-1,2)$ حلٌّ:

❶ للمعادلة $2x+3y=1$ ؟

❷ للمعادلة $3x+5y=6$ ؟

❸ للجملة $\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=6\end{cases}$ ؟

الحل

❶ $(2,-1)$ حلٌّ للمعادلة $2x+3y=1$ لأنَّ $2(2)+3(-1)=4-1=1$.
و $(-13,9)$ حلٌّ لها لأنَّ $2(-13)+3(9)=-26+27=1$.

❷ $(-13,9)$ حلٌّ للمعادلة $3x+5y=6$ لأنَّ $3(-13)+5(9)=-39+45=6$.
و $(7,-3)$ حلٌّ لها لأنَّ $3(7)+5(-3)=21-15=6$.

❸ $(-13,9)$ حلٌّ للجملة $\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=6\end{cases}$ لأنَّ $(-13,9)$ حلّ لكل من معادلتي الجملة.

② حلّ كلّاً من جمل المعادلات الآتية:

❶ $\begin{cases}x+4y=14\\x+11y=35\end{cases}$

❷ $\begin{cases}4x+y=-14\\3x+2y=-8\end{cases}$

❸ $\begin{cases}0.3x+0.2y=9\\x+4y=10\end{cases}$

❹ $\begin{cases}x-11=y+11\\x-y=2(y+19)\end{cases}$

الحل

$\begin{cases}x+4y=14\\x+11y=35\end{cases}\cdots\cdots①$

نطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) طرفاً من طرف، فنحصل على $7y=21$، ومنها $y=\frac{21}{7}=3$.

نعوض $y=3$ في المعادلة (1)، فنحصل على $x+12=14$، ومنها $y=14-12=2$.

فحل الجملة هو $x=2$ و $y=3$.

$$②\cdots\cdots\begin{cases}4x+y=-14\cdots(1)\\3x+2y=-8\cdots(2)\end{cases}$$

من المعادلة (1) $y=-14-4x$ ، نعوض في المعادلة (2) فنحصل على $3x+2(-14-4x)=-8$
ننشر المعادلة فنحصل على:
$3x-28-8x=-8$ نضع المعاليم في طرف والمجاهيل في طرف آخر فنحصل على:

$$3x-8x=-8+28$$

نجمع كل طرف على حدى:

$$-5x=20$$
$$x=\frac{20}{-5}=-4$$

نعوض قيمة x في المعادلة: $y=-14-4x$ فنحصل على الحل المشترك : $x=-4, y=2$

$$③\cdots\cdots\begin{cases}0.3x+0.2y=9\cdots(1)\\x+4y=10\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

من المعادلة (2) $x=10-4y$ ، نعوض في المعادلة (1) فنحصل على $0.3(10-4y)+0.2y=9$
وبضرب طرفيها بالعدد 10 نحصل على $3(10-4y)+2y=90$ أو $30-12y+2y=90$
أو $-12y+2y=90-30$ أو $-10y=60$ ، ومنها $y=\frac{60}{-10}=-6$.
نعوض $y=-6$ في المعادلة (2)، فنحصل على $x+4(-6)=10$ ، ومنها $x=10+24=34$. فنحصل على الحل المشترك : $y=-6$, $x=34$

$$④\cdots\cdots\begin{cases}x-11=y+11\cdots\cdots(1)\\x-y=2(y+19)\cdots(2)\end{cases}$$

هذه الجملة تكافئ الجملة $\begin{cases}x-y=11+11\cdots(1)\\x-y=2y+38\cdots(2)\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-y=22\cdots(1)\\x-3y=38\cdots(2)\end{cases}$.

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) طرفاً من طرف، فنحصل على $2y=-16$ ، ومنها $y=\frac{-16}{2}=-8$.
نضع $y=-8$ في المعادلة (1)، فنحصل على $x-(-8)=22$ ، ومنها $x=22-8=14$.

4

تدرب

① جِد الأعداد الناقصة لتكون الثنائية $(2,-5)$ حلاً للجملة :

$$\begin{cases} 6x - y = \cdots \\ \cdots x + 2y = 4 \end{cases}$$

الحل

نعوض الثنائية $(2,-5)$ في المعادلة الأولى:

$$6x - y = \cdots \quad (1)$$
$$6(2) - (-5) = 12 + 5 = 17$$

$$\cdots x + 2y = 4 \quad (2)$$
$$\cdots (2) + 2(-5) = 4$$

نعوض الثنائية $(2,-5)$ في المعادلة الثانية:

$$7(2) - 10 = 4$$
$$14 - 10 = 4$$
$$4 = 4$$

② أيُّ الثنائيات $(4,-10)$, $(3,18)$, $(-0.5,+0.5)$ حلٌّ للجملة :

$$\begin{cases} 7x + 3y = -2 \\ -5x + \ \ y = \ \ 3 \end{cases}$$

الحل

نعوض الثنائية $(4,-10)$ في جملة المعادلتين

$$\begin{cases} 7(4) + 3(-10) = -2 \quad (1) \\ 28 - 30 = -2 \\ -2 = -2 \\ -5x + y = 4 \quad (2) \\ -5(4) + (-10) = 4 \\ -20 - 10 \neq 4 \end{cases}$$

إذاً الثنائية $(4,-10)$ ليست حلاً للجملة لأنها حل للمعادلة الأولى وليست حلاً للمعادلة الثانية

نعوض الثنائية $(3,18)$ في جملة المعادلتين

$$\begin{cases} 7x + 3y = -2 \quad (1) \\ -5x + y = 4 \quad (2) \end{cases}$$

بنفس الطريقة نجد أن هذه الثنائية $(3,18)$ ليست حلاً

نعوض الثنائية $(-0.5,+0.5)$ فنجد أنها تمثل حلاً للمعادلتين الأولى والثانية

③ حلّ كلّاً من الجمل الآتية:

❶ $\begin{cases} 5x+4y=60 \\ -5x-3y=105 \end{cases}$ ❷ $\begin{cases} 4x-3y=32 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$

❸ $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 5x+9y=-7 \end{cases}$ ❹ $\begin{cases} 6x+7y=7 \\ -3x+2y=-31 \end{cases}$

الحل

① ...... $\begin{cases} 4x-3y=32 \cdots(1) \\ -2x+3y=2 \cdots(2) \end{cases}$

نجمع المعادلتين (1) و (2) طرفاً مع طرف، فنحصل على $2x=34$، ومنها $x=\frac{34}{2}=17$.

نضرب كلاً من طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 ونجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة (1) طرفاً مع طرف، فنحصل على $3y=36$، ومنها $y=\frac{36}{3}=12$.

② ...... $\begin{cases} 5x+4y=60 \cdots (1) \\ -5x-3y=105 \cdots(2) \end{cases}$

نجمع المعادلتين (1) و (2) طرفاً مع طرف، فنحصل على $y=165$.

نضرب كلاً من طرفي المعادلة (1) بالعدد 3 وكلاً من طرفي المعادلة (2) بالعدد 4، فنحصل على الجملة المكافئة

$$\begin{cases} 15x+12y=180 \cdots (1) \\ -20x-12y=420 \cdots(2) \end{cases}$$

ثم نجمع معادلتي هذه الجملة طرفاً مع طرف، فنحصل على $-5x=600$، ومنها $x=\frac{600}{-5}=-120$.

③ ...... $\begin{cases} 6x+7y=7 \cdots\cdots (1) \\ -3x+2y=-31 \cdots(2) \end{cases}$

نضرب كلاً من طرفي المعادلة (2) بالعدد 2، فنجد الجملة المكافئة

$$\begin{cases} 6x+7y=7 \cdots\cdots (1) \\ -6x+4y=-62 \cdots(2) \end{cases}$$

ثم نجمع معادلتي الجملة طرفاً مع طرف، فنحصل على $11y=-55$، ومنها $y=\frac{-55}{11}=-5$.

نعوض $y=-5$ في المعادلة (2)، فنحصل على $-3x+2(-5)=-31$ أو $-3x=-31+10$ ومنه $x=7$.

④ ...... $\begin{cases} -2x+3y=5 \cdots(1) \\ 5x+9y=-7 \cdots(2) \end{cases}$

4

نضرب كلاً من طرفي المعادلة (1) بالعدد -3، فنجد الجملة المكافئة

$$\begin{cases} 6x - 9y = -15 \cdots (1) \\ 5x + 9y = -7 \cdots \ (2) \end{cases}$$

ثم نجمع معادلتي الجملة طرفاً مع طرف، فنحصل على $11x = -22$، ومنها $x = \frac{-22}{11} = -2$.

نعوض $x = -2$ في (1)، فنحصل على $-2(-2) + 3y = 5$ أو $3y = 5 - 4$ أو $3y = 1$ ومنها $y = \frac{1}{3}$.

④ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، هل الثنائية $(-4,3)$ هي حل الجملة؟

❶ $\begin{cases} y - 3x = 15 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases}$

❷ $\begin{cases} x + \frac{5}{3}y = 1 \\ -\frac{3}{8}x - 2y = -\frac{9}{2} \end{cases}$

الحل

الثنائية $(-4,3)$ ليست حلاً للجملة لأنها حلاً للمعادلة الأولى لأن

$$3 - 3(-4) = 15$$
$$3 + 12 = 15$$
$$15 = 15$$

ولكنها ليست حلاً للمعادلة الثانية $-3x + 4y = 0$ لأن

$$-3(-4) + 4(3) = 0$$
$$12 + 12 \neq 0$$

إذاً الثنائية $(-4,3)$ ليست حلاً للجملة الأولى.

الثنائية $(-4,3)$ هي حلاً للجملة لأنها حل للمعادلة الأولى لأن

$$-4 + \frac{5}{3}3 = 1$$
$$-4 + 5 = 1$$
$$1 = 1$$

محققة وهي حلاً للمعادلة الثانية لأن

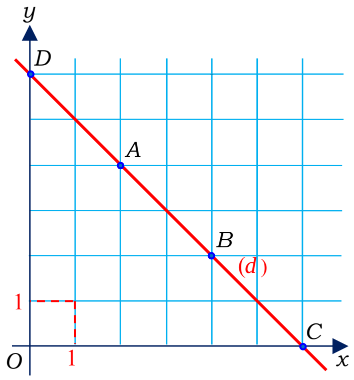
$$-\frac{3}{8}(-4) - 2(3) = -\frac{9}{2}$$
$$\frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2}$$
$$-\frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$$

إذاً الثنائية $(-4,3)$ حل للجملة الثانية لأنها حل للمعادلة الأولى والثانية .

2 معادلة مستقيم

نشاط « المعنى الهندسي لمعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين»

.1 ليكن المستقيم (d) المرسوم جانباً.



① اكتب إحداثيات النقاط A,B,C,D. ماذا تلاحظ عند جمع فاصلة كلّ من هذه النقاط مع ترتيبها؟

② اختر نقاطاً أخرى على (d) هل تبقى الخاصة السابقة صحيحة في حالة النقاط التي اخترتَها؟

③ هل تقع النقطة $(1,4)$ على المستقيم (d)؟

الحل:

①إحداثيات النقطة $A\ (2,4)$

إحداثيات النقطة $B\ (4,2)$

إحداثيات النقطة $C\ (6,0)$

إحداثيات النقطة $D\ (0,6)$

نلاحظ عند جمع فاصلة كل نقطة مع ترتيبها أن الناتج هو 6

② نختار نقطة $G(5,1)$ مثلا ،نعم تبقى الخاصة السابقة صحيحة

③ لا التوثق: مجموع الفاصلة والترتيب لا يساوي 6

.2 ① حدّد في المعلم السابق النقاط $(0,4)$، $(1,4)$، $(2,4)$، $(4,4)$، ثم صل بينها، تيقّن أنّها تقع على مستقيم (d')؟ ما الخاصّة التي تحقّقها جميع نقاط هذا المستقيم؟

② ارسم من النقطة $(3,1)$ ارسم مستقيماً شاقولياً (d'') يوازي محور التراتيب Oy. وخذ عليه عدداً من النقاط ودوّن إحداثياتها. ماذا تلاحظ بشأن هذه النقاط؟ ما الخاصّة التي تحقّقها جميع نقاط هذا المستقيم؟

الحل:

①تحدد النقاط السابقة بالرسم على مستوي الإحداثيات

نعم ،تقع على مستقيم (d')،الخاصة التي تحققها أن لجميع هذه النقاط تراتيب متساوية

②نرسم المستقيم شاقولياً (d'') يوازي محور التراتيب Oy

ندون النقاط الآتية$(3,5)(3,3)(3,2)(3,0)$ نلاحظ أن فواصل هذه النقاط متساوية

الخاصة التي تحققها جميع هذه النقاط هي لها نفس الفاصلة

3. لتكن المعادلة (1) $2x+y=5$. نسمي هذه المعادلة "معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين".

① نفترض أنّ x و y ترتبطان معاً بالعلاقة (1). انسخ الجدول الآتي إلى دفترك ثم أكمله

x	4	...	-2
y	...	-3	...

② أي الثنائيات $(1,3),\ (2,2),\ (3,1),\ (0,5),\ (4,1),\ (-1,7)$ تحقّق المعادلة (1)؟

عموماً يمكن إيجاد عدد غير منتهٍ من الثنائيات التي تحقق المعادلة (1).

③ مثّل، في معلمٍ، الثنائيات التي تحقّقتَ أنّها حلول للمعادلة (1). هل يمكنك رسم مستقيم يمر بهذه النقاط؟

نقبل أنّ إحداثيات كلّ نقطة تقع على المستقيم الذي وجدتَه تمثّل حلّاً لهذه المعادلة.

④ في حالة كلّ معادلة من المعادلات الآتية، جِدْ نقطتين تحقّقانها ثُمّ ارسم في معلم المستقيمات الممثّلة لكل منها:

❶ $-x+y=3$ ❷ $x+y=3$

❸ $2x+y=1$ ❹ $x-y=0$

يتعين المستقيم بنقطتين لذلك يمكن أن نكتفي بتعيين نقطتين ومن ثَمَّ رسم المستقيم.

الحل:

①

x	4	4	-2
y	-3	-3	9

②نعوض إحداثيات الثنائيات في المعادلة (1) .

③نمثل في معلم الثنائيات التي تحقّقنا أنها حلول للمعادلة (1) نلاحظ أن جميع هذه النقط تقع على المستقيم نفسه.

④ ❶ $-x+y=3$ ❷ $x+y=3$

❸ $2x+y=1$ ❹ $x-y=0$

المعادلة الأولى لدينا نقطتين تحققانها

$(0,3)(-3,0)$ نعين النقطتين في مستوي الإحداثيات ونصل بينهما ونحصل على المستقيم المطلوب

بنفس الطريقة نحل المعادلة الثانية والثالثة والرابعة.

تحقق من فهمك

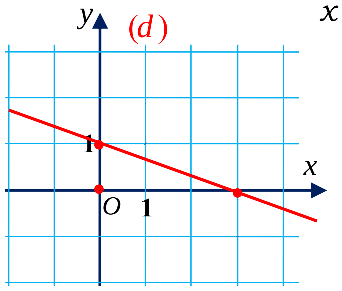
ارسم المستقيمات التي تمثيل بيانياً كل من المعادلات الآتية.

❶ $x+3y=3$ ❷ $y=x+3$ ❸ $y+2=0$

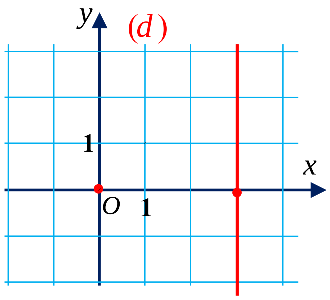
❹ $y=-x$ ❺ $x=3$ ❻ $2x+y=0$

الحل

❶ رسم المستقيم الذي معادلته $x+3y=3$



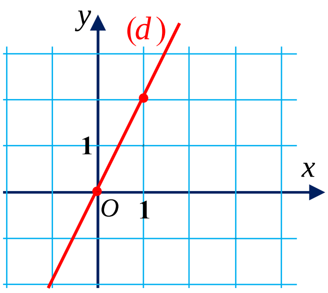
❺ رسم المستقيم الذي معادلته $x=3$



4

تدرب

ليكن المستقيم (d) المرسوم جانباً.



① اكتب نقطتين من هذا المستقيم.

② أي من المعادلات الآتية هو تمثيل للمستقيم (d).

❶ $y=x+1$ ❷ $x+2y=1$ ❸ $y=2x$

الحل

① A,B نقطتين من هذا المستقيم احداثيتهما

$A(0,0)$ و $B(1,2)$

② نلاحظ أن إحداثيات النقطتين A و B تحققان المعادلة الثالثة فهي تمثل المستقيم (d) الذي معادلته $y=2x$.

3 حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

نشاط «نحو الحل بيانياً»

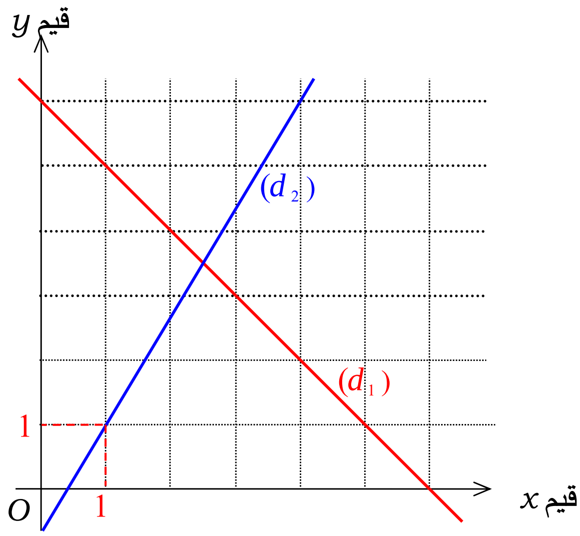
مستقيمات: أراد علاء أن يرسم مستطيلاً يحقّق الشرطين الآتيين:

(1) نصف محيطه يساوي 6 cm.

(2) خمسة أمثال عرضه مطروحاً من ثلاثة أمثال طوله يساوي 2 cm.

① نرمز إلى عرض هذا المستطيل بالرمز x وإلى طوله بالرمز y (بالسنتيمتر). عبِّرْ عن (1) و (2) بجملة معادلتين خطيتين بالمجهولين x و y.

② عبّر علاءٌ في كلٍ من (1) و (2) عن y بدلالة x، فوجد من (1): $y = 6 - x$. ماذا وجد من (2)؟



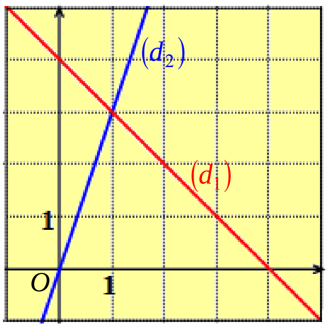
③ مثَّلَ علاءٌ بيانياً، كلاً من العلاقتين اللتين حصل عليهما، فحصل على ما ترى في الشكل المرافق. كيف تصرف علاءٌ؟

④ اقرأ على الشكل الحل المشترك لجملة المعادلتين وتحقق من صحة ما وجدت.

⑤ ما بعدا المستطيل الذي يسعى إليه علاء؟

جملة المعادلتين $\begin{cases} y = 6 - x \\ 3y - 5x = 2 \end{cases}$ بحل جملة المعادلتين نجد $x = 2$ و $y = 4$

تحقق من فهمك



لحل الجملة $\begin{cases} x+y=4 & (1) \\ 3x-y=0 & (2) \end{cases}$

رسمت لينا مستقيمين في المعلم المرافق.

1. ما هي عبارة y بدلالة x التي استخدمتها لينا

① لرسم المستقيم (d_1) ؟

② لرسم المستقيم (d_2) ؟

2. اقرأ على الشكل حل الجملة، ثم تحقق من الحل.

الحل: **1.** ① يمر المستقيم (d_1) بالنقطة التي إحداثياها $(0,4)$ يحققان المعادلة (1): $0+4=4$، فالعبارة التي استعملتها لينا هي $y=4-x$.

② يمر المستقيم (d_2) بالنقطة التي إحداثياها $(0,0)$ يحققان المعادلة (2): $3(0)-0=0$، فالعبارة التي استعملتها لينا هي $y=3x$.

2. حل الجملة هو إحداثيا نقطة تقاطع المستقيمين (d_1) و (d_2)، فهو $(x\,,\,y)=(1,\,3)$

التحقق أن الثنائية $(x\,,\,y)=(1,\,3)$ حل للمعادلة :

$$\begin{array}{l|l} x+y=4 & 3x-y=0 \\ 1+3=4 & 3(1)-3=0 \\ 4=4 & 0=0 \end{array}$$

إذا الثنائية حل للجملة.

4

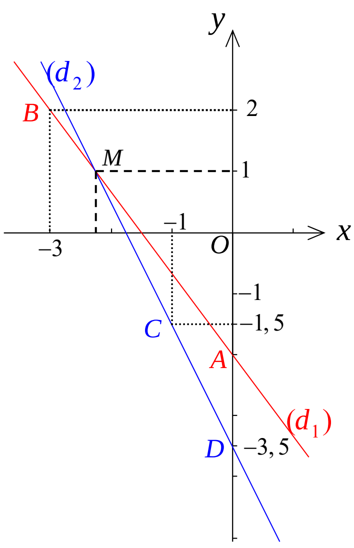
تدرب

① لدينا الجملة $\begin{cases} 4x+3y=-6 & (1) \\ 2x+y=-3.5 & (2) \end{cases}$

1. مثِّل هذه الجملة بيانياً.

2. اقرأ على الشكل حلاً تقريبياً لهذه الجملة.

3. حل الجملة جبرياً وقارن الحل الجبري بالحل الذي قرأته على الشكل.



الحل:

1. • نضع في المعادلة (1) $x=0$، فنحصل على $y=-2$.

ثم نضع $x=\dfrac{-3}{2}$، فنحصل على $y=0$.

نستنتج أنَّ المستقيم الذي يمثل المعادلة (1) يتعين بالنقطتين $A(0,-2)$ و $B(-3,2)$. نرسم هذا المستقيم وليكن (d_1).

• نضع في المعادلة (2) $x=-1$، فنحصل على $y=-1.5$. ثم نضع $x=0$، فنحصل على $y=-3.5$.

نستنتج أنَّ المستقيم الذي يمثل المعادلة (2) يتعين بالنقطتين

$C(-1,-1{,}5)$ و $D(0,-3{,}5)$. نرسم هذا المستقيم وليكن (d_2).

2. يتقاطع المستقيمان (d_1) و (d_2) في نقطة نرمز إليها بالرمز

M، إحداثياها هما، كما يبدو في الشكل، $x \approx -2.25$ و $y \approx 1$.

3. نضرب كلاً من طرفي المعادلة (2) بالعدد -2 ثم نجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة (1) طرفاً مع طرف، فنحصل على $y = 1$.

نضع $y=1$ في المعادلة (2) فنجد $2x+1=-3.5$ أو $2x=-4.5$، ومنها $x=\frac{-4.5}{2}=-2.25$. فحل الجملة هو $(x,y)=(-2.25,1)$

② لدينا الجملة
$$\begin{cases} 5x+2y=12 & (1) \\ x+2y=8 & (2) \end{cases}$$

1. اكتب y بدلالة x من كلٍ من معادلتي الجملة.

2. في معلم ديكارتي، مثِّل بيانياً كلاً من المعادلتين اللتين وجدتهما في السؤال السابق.

3. اقرأ من الشكل حلّ الجملة، ثم تحقّق مما قرأت حسابياً.

الحل:

1. من المعادلة الأولى $2y=12-5x$، ومنها $y=\frac{12-5x}{2}$ أو $y=6-\frac{5}{2}x \cdots$❶.

ومن المعادلة الثانية $2y=8-x$، ومنها $y=\frac{8-x}{2}$ أو $y=4-\frac{1}{2}x \cdots$❷.

2. جدول بقيم التابع $f(x)=6-\frac{5}{2}x$:

x	0	2
y	6	1

فالخط البياني للتابع الأول يمر بالنقطتين $A(0,6)$ و $B(2,1)$.

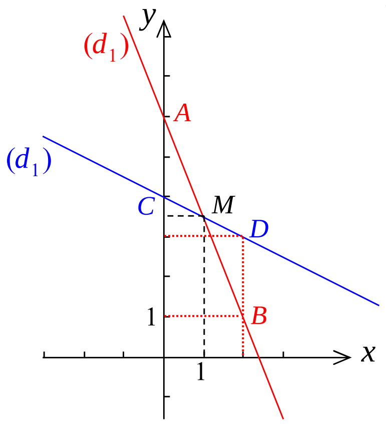
نرمز لهذا الخط بالرمز (d_1).

جدول بقيم التابع $f(x)=4-\frac{1}{2}x$:

x	0	2
y	4	3

فالخط البياني للتابع الثاني يمر بالنقطتين $C(0,4)$ و $D(2,3)$.

نرمز لهذا الخط بالرمز (d_2).



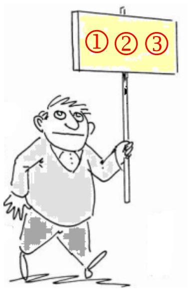
3. حل الجملة هو إحداثيا نقطة تقاطع المستقيمين (d_1) و (d_2)، فهو، كما يبدو في الشكل، $x \approx 1$ و $y \approx 3{,}5$.

حسابياً: نجد من ❶ و ❷ أنَّ $6-\frac{5}{2}x=4-\frac{1}{2}x$ أو $12-5x=8-x$ أو $12-8=-x+5x$ أو $4=4x$، ومنها $x=\frac{4}{4}=1$.

نضع $x=1$ في المعادلة ❷، فنحصل على $y=4-\frac{1}{2}=3.5$.

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.



(1) حل الجملة $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$ هو الثنائية

① $(5,-4)$

② $(-5,4)$

③ $(4,-5)$

(2) لحل الجملة $\begin{cases} 7x-y=1 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $y=7x-1$ ثم $4x+3(7x-1)=2$

② $y=1-7x$ ثم $4x+3(1-7x)=2$

③ $y=7x-1$ ثم $7x-(7x-1)=1$

(3) لحل الجملة $\begin{cases} 4x-y=3 \\ -x+y=5 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $4x-y+(-x+y)=2$

② $4x-y-(-x+y)=2$

③ $4x-y+(-x+y)=8$

(4) لحل الجملة $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 7x-10y=1 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $2(2x+5y)-(7x-10y)=5$

② $7x-10y+2(2x+5y)=7$

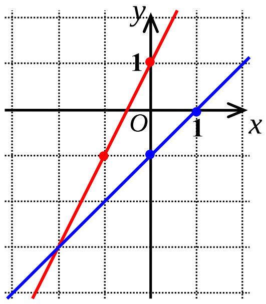
③ $7x-10y-2(2x+5y)=-5$

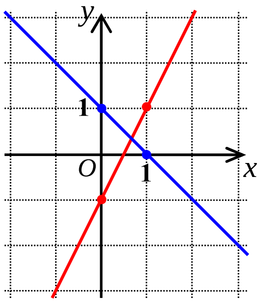
(5) تكلف شراء أربعة دفاتر وخمسة مصنفات 1 950 ليرة. وتكلفة شراء ستة دفاتر وسبعة مصنفات 2 670 ليرة. يمكن التعبير عن هذه الحالة بالجملة

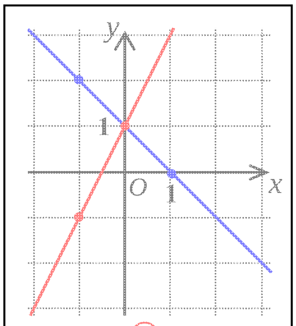
① $\begin{cases} 4x+5y=1\,950 \\ 6x+7y=2\,670 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 4x+5y=1\,950 \\ 6y+7x=2\,670 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 5y+4x=1\,950 \\ 6y+7x=2\,670 \end{cases}$

4

(6) تُمثَّل الجملة $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ في معلم متجانس بالشكل ③.


①


②


③

2 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) لحل الجملة $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+7y=1 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $x=1-7y$ ثم $2(1-7y)-y=5$

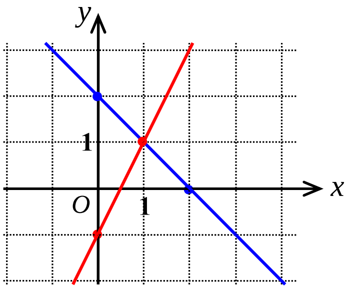
② $y=2x-5$ ثم $x+7(2x-5)=1$

③ $2x-y-2(x+7y)=3$

(2) أحد حلول المعادلة $6x-5y=8$ هو الثنائية.

① $(3,2)$ ② $(-4.6,-7)$ ③ $(10.1,10.52)$

(3) الشكل المرسوم هو تمثيل بياني للجملة



① $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=6 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} y=2x \\ y=-x+2 \end{cases}$

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي، معللاً اجابتك.

(1) الجملة $\begin{cases} x+2y=5 & (1) \\ x+y=2 & (2) \end{cases}$ لها الحل $(1,2)$.

الإجابة: غير موافق

التعليل : بتعويض $(1,2)$ في المعدلة الثانية فنجد أنه لا يحققها.

(2) المعادلتان (1) $x+y=1$ و (2) $4x+4y=4$ متكافئتان.

الإجابة: صح

التعليل: نقسم كلاً من طرفي المعادلة (2) على العدد 4، فنحصل على المعادلة (1) ذاتها، بمعنى أنَّ الجملة تكافئ إحدى معادلتيها. لاحظ في الجدول بعضاً من حلولها.

x	-2	0	3
y	9	7	4

(3) الثنائية $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ حل للجملة $\begin{cases} 6x+8y=-3 & (1) \\ x-10y=8 & (2) \end{cases}$.

الإجابة: صح

التعليل: نضع $x=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{3}{4}$ في المعادلة (1)، فنجد $6x+8y=6\times\frac{1}{2}+8(-\frac{3}{4})=3-6=-3$

ونضعهما في المعادلة (1)، فنجد $x-10y=\frac{1}{2}-10(-\frac{3}{4})=\frac{1}{2}+\frac{15}{2}=\frac{16}{2}=8$.

(4) الجملتان $\begin{cases}2(x+y)-3y=4\\ x+2y=4\end{cases}$ و $\begin{cases}2x-y=4\\ 3x+6y=12\end{cases}$ متكافئتان.

الإجابة: صح

التعليل: نصلح المعادلة الأولى من الجملة الأولى ثم نضرب المعادلة الثانية من هذه الجملة بالعدد 3

فنجد: $2x+2y-3y=4$ ومنه $2x-y=4\cdots❶$

نضرب طرفي المعادلة ❷ من الجملة (S_1) بالعدد 3، فنجد $3x+6y=12\cdots(2)$.

(5) المعادلة $(x+2)(-y+3)=0$ (*) والجملة $\begin{cases}5x-3y=-19 & (1)\\ 2x+y=-1 & (2)\end{cases}$ (**) لهما الحلول ذاتها.

الإجابة: خطأ

التعليل: قيمتان للمجهول x تحققان المعادلة (*) هما $x_1=-2$ و $x_2=3$، بينما لأي جملة من معادلتين خطيتين حل وحيد أو عدد غير منته من الحلول.

(6) ترشح شخصان لمنصب رئيس جمعية مؤلفة من 1000 ناخب. نال الخاسر 250 صوتاً أقل من الفائز، فيكون الفائز قد نال 625 صوتاً.

الإجابة: صح

التعليل: $625-250=375$ و $375+625=1\,000$.

4 دفع جمال ثمن دفترين وثلاثة أقلام 110 ليرات. عبَّرنا عن هذا النص بالمعادلة $2x+3y=110$. إلامَ يرمز x؟ وإلامَ يرمز y؟

الحل: **الرمز** x لثمن الدفتر والرمز y يرمز لثمن القلم .

5 لدينا الجملة $\begin{cases}5x-y=15\\ x+2y=4\end{cases}$

أيٌّ من معادلتيها هي الأفضل لكتابة y بدلالة x؟ وأيهما الأفضل لكتابة x بدلالة y ؟ علّل.

الحل:

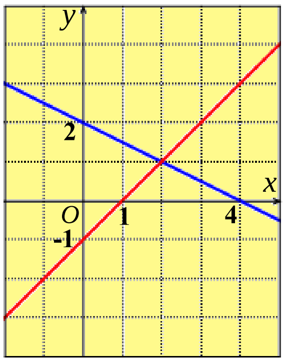
لكتابة أحد المجهولين بدلالة الآخر يكون من الأسهل اختيار المجهول ذي المعامل 1.

فلكتابة y بدلالة x، نختار المعادلة (1): $-y=-5x+15$، إذن $y=5x-15$.

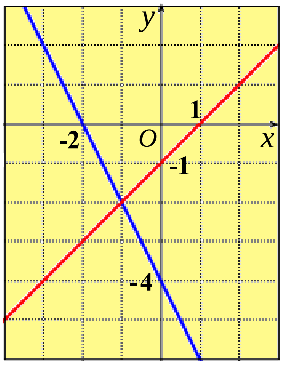
ولكتابة x بدلالة y، نختار المعادلة (2): $x=4-2y$.

6 لدينا الجملة
$$\begin{cases} 2x+y=-4 & (1) \\ x-y=1 & (2) \end{cases}$$

ولدينا الشكلان ① و ②:



①



②

1. حل الجملة.

2. أي من هذين الشكلين يمثل هذه الجملة؟

الحل

1. بجمع معادلتي الجملة طرفاً مع طرف،

نحصل على $3x=-3$، ومنها $x=\frac{-3}{3}=-1$.

بالتعويض في المعادلة (2) نحصل على $-1-y=1$، ومنها $-1-1=y$ أي $y=-2$.

2. حل الجملة $(x,y)=(-1,-2)$ هو إحداثيا نقطة تقاطع المستقيمين، وهما متقاطعان في تلك النقطة في الشكل ②.كما ان المستقيمين المرسومين بالشكل يمثلان المعادلتين.

7 لدينا الجملة
$$\begin{cases} x+y=32 & (1) \\ 3x+5y=124 & (2) \end{cases}$$

1. حل هذه الجملة.

2. رسم عدنان 32 مضلعاً بعضها مثلثات والبعض الآخر مضلعات خماسية.أحصى عدنان عدد أضلاع جميع المضلعات التي رسمها فوجدها 124 ضلعاً. ما عدد المثلثات وما عدد المضلعات الخماسية التي رسمها عدنان؟ تحقق من إجابتك.

الحل:

1. من المعادلة (1) $y=32-x$، نعوض في المعادلة (2) فنحصل على $3x+5(32-x)=124$

أو $3x+160-5x=124$ أو $-2x=124-160=-36$، ومنها $x=\frac{-36}{-2}=18$.

نضع $x=18$ في المعادلة $y=32-x$، فنحصل على $y=32-18=14$.

فحلُّ الجملة هو $(x,y)=(18,14)$.

2. نرمز إلى عدد المثلثات التي رسمها عدنان بالرمز x وإلى عدد المضلعات الخماسية بالرمز y،

فيكون $x+y=32\cdots(1)$

ويكون عدد أضلاع المثلثات $3x$ وعدد أضلاع المضلعات الخماسية $5y$، ولكن مجموع أضلاع المضلعات التي رسمها 124، إذن $3x+5y=124\cdots(2)$

وجدنا في الطلب الأول أنَّ حل الجملة التي معادلتاها $x+y=32\cdots(1)$ و $3x+5y=124\cdots(2)$ هو $(x,y)=(18,14)$.

فعدد المثلثات التي رسمها عدنان هو 18 وعدد المضلعات الخماسية هو 14.

8 جِدْ ذهنياً عددين:

① مجموعهما 80 والفرق بينهما 4.

② مجموعهما 4 والفرق بينهما 84.

الحل:

① يتعلق الأمر بحل الجملة $\begin{cases} x+y=80 \\ x-y=4 \end{cases}$.

بجمع معادلتي الجملة طرفاً من طرف، نحصل على $2x=84$، ومنها $x=42$.

وبطرح المعادلة الثانية من الأولى طرفاً من طرف، نحصل على $2y=76$، ومنها $y=38$.

② يتعلق الأمر بحل الجملة $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=84 \end{cases}$.

بجمع معادلتي الجملة طرفاً من طرف، نحصل على $2x=88$، ومنها $x=44$.

وبطرح المعادلة الثانية من الأولى طرفاً من طرف، نحصل على $2y=-80$، ومنها $y=-40$.

9 حل كلّاً من جمل المعادلات الآتية:

① $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=8 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x-\frac{8}{3}y=5 \\ 4x-2y=\frac{10}{3} \end{cases}$

③ $\begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{y}{5} \\ 5x+4y=80 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=5 \\ x-y\sqrt{2}=0 \end{cases}$

3. أكمل حل الجملة (S).

$$①\cdots\cdots\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7\cdots(1) \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=8\cdots(2) \end{cases}$$

نضرب كلاً من طرفي كل من معادلتي الجملة بالعدد 6، فنجد الجملة المكافئة $\begin{cases} 3x+2y=42\cdots① \\ 2x+3y=48\cdots② \end{cases}$.

• نضرب كلاً طرفي المعادلة ① بالعدد 3 وكلاً من طرفي المعادلة ② بالعدد 2، فنجد الجملة المكافئة $\begin{cases} 9x+6y=126\cdots❶ \\ 4x+6y=96\cdots❷ \end{cases}$.

نطرح المعادلة ❷ من المعادلة ❶ طرفاً من طرف، فنحصل على $5x=30$، ومنها $x=\frac{30}{5}=6$.

4

• نضرب كلاً طرفي المعادلة ① بالعدد 2 وكلاً من طرفي المعادلة ② بالعدد 3، فنجد الجملة المكافئة
$\begin{cases} 6x+4y=84 \cdots \text{❸} \\ 6x+9y=144 \cdots \text{❹} \end{cases}$.

نطرح المعادلة ❸ من المعادلة ❹ طرفاً من طرف، فنحصل على $5y=60$، ومنها $y=\frac{60}{5}=12$.

$$\text{②} \cdots\cdots \begin{cases} 2x-\frac{8}{3}y=5 \cdots (1) \\ 4x-2y=\frac{10}{3} \cdots (2) \end{cases}$$

نضرب كلاً من طرفي كل من معادلتي الجملة بالعدد 3، فنجد الجملة المكافئة $\begin{cases} 6x-8y=15 \;\cdots \text{①} \\ 12x-6y=10 \cdots \text{②} \end{cases}$.

• نضرب كلاً طرفي المعادلة ① بالعدد 3 وكلاً من طرفي المعادلة ② بالعدد 4، فنجد الجملة المكافئة
$\begin{cases} 18x-24y=45 \cdots \text{❶} \\ 48x-24y=40 \cdots \text{❷} \end{cases}$.

نطرح المعادلة ❶ من المعادلة ❷ طرفاً من طرف، فنحصل على $30x=-5$، ومنها $x=\frac{-5}{30}=-\frac{1}{6}$.

• نضرب كلاً من طرفي المعادلة ① بالعدد -2، فنجد الجملة المكافئة $\begin{cases} -12x+16y=-30 \;\; \text{❸} \\ 12x-6y=10 \cdots\cdots \text{❹} \end{cases}$.

نجمع معادلتي الجملة الأخيرة طرفاً مع طرف، فنحصل على $10y=-20$، ومنها $y=\frac{-20}{10}=-2$.

لإحراز تقدم

10 رؤوس وقوائم

في إحدى المزارع أرانب ودجاجات. عدد رؤوس هذه الحيوانات 28 وعدد قوائمها 76. ما عدد الدجاجات في هذه المزرعة؟ وما عدد الأرانب فيها؟

الحل: نرمز إلى عدد الدجاج في المزرعة بالرمز x، وإلى عدد الأرانب بالرمز y، فيكون:

عدد قوائم الدجاج $2x$ وعدد قوائم الأرانب $4y$.

عدد رؤوس هذه الدواجن 28، إذن $x+y=28$.

وعدد قوائمها 76، إذن $2x+4y=76$ أو $x+2y=38$.

نريد حل الجملة $\begin{cases} x+y=28 \cdots (1) \\ x+2y=38 \;\; (2) \end{cases}$:

نطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) طرفاً من طرف، فنحصل على $y=10$.

نضع $y=10$ في المعادلة (1)، فنحصل على $x+10=28$، ومنها $x=28-10=18$.

عدد الدجاج في هذه المزرعة 10 وعدد الأرانب 18.

11 طوابع بريدية

مجموع ما يقتني الصديقان ماهر وعامر 144 طابعاً بريدياً. إذا أعطى ماهر اثنين من طوابعه لعامر أصبح لدى عامر مثلي ما لدى ماهر. ما عدد الطوابع التي لدى كلٍّ من الصديقين؟

الحل: نرمز إلى عدد الطوابع التي يقتنيها ماهر بالرمز x والتي يقتنيها عامر بالرمز y، فيكون $x+y=144$.

إذا أعطى ماهر إثنين من طوابعه لعامر لأصبح مع عامر $y+2$ طابعاً وبقي مع ماهر $x-2$ طابعاً، عندها يكون $y+2=2(x-2)$ أو $y+2=2x-4$ أو $2x-y=6$.

نريد حل الجملة $\begin{cases} x+y=144 \cdots (1) \\ 2x-y=6 \cdots \ (2) \end{cases}$:

نجمع المعادلتين (1) و (2) طرفاً مع طرف، فنحصل على $3x=150$، ومنها $x=\dfrac{150}{3}=50$.

نضع $x=50$ في المعادلة (1)، فنحصل على $50+y=144$، ومنها $y=144-50=94$.

فلدى ماهر 50 طابعاً، ولدى عامر 94 طابعاً.

12 عُلِمَ فرقهما

الفرق بين عددين هو 15. إذا أضفنا 10 إلى كلٍ من هذين العددين أصبح أكبر الناتجين مثلي أصغرهما. ما هما هذان العددان؟

الحل: نرمز إلى أكبر العددين بالرمز x وإلى أصغرهما بالرمز y، فيكون $x-y=15$.

إذا أضفنا 10 إلى كلٍ من هذين العددين، لأصبحا على التوالي $x+10$ و $y+10$، عندها:

$x+10=2(y+10)$ أو $x+10=2y+20$ أو $x-2y=10$.

نريد حل الجملة $\begin{cases} x-y=15 \ \cdots \ (1) \\ x-2y=10 \cdots (2) \end{cases}$:

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) طرفاً من طرف، فنحصل على $y=5$.

نضع $y=5$ في المعادلة (1)، فنحصل على $x-5=15$، ومنها $x=15+5=20$.

فأكبر العددين هو 20، وأصغرهما هو 5.

13 أعمار

عمر لجين الآن ثلاثة أمثال عمر جمانة. وبعد 15 سنة، يصبح عمر لجين مثلي عمر جمانة. ما عمر كلّ من لجين وجمانة ؟

الحل: نرمز إلى عمر لجين بالرمز x وإلى عمر جمانة بالرمز y، فيكون $x=3y$.

بعد 15 سنة، يصبح عمر لجين $x+15$ وعمر جمانة $y+15$ ، عندها:

$x+15=2(y+15)$ أو $x+15=2y+30$ أو $x-2y=15$.

4

نريد حل الجملة $\begin{cases} x = 3y \cdots\cdots (1) \\ x - 2y = 15 \cdots (2) \end{cases}$:

نضع $x = 3y$ في المعادلة (2)، فنحصل على $3y - 2y = 15$، ومنها $y = 15$.

نضع $y = 15$ في المعادلة (1)، فنحصل على $x = 3 \times 15 = 45$.

فعمر لجين الآن هو 45 سنة وعمر جمانة 15 سنة.

14 سرعة

قطع راكب دراجة مسافةً على مرحلتين بالسرعة الوسطى نفسها. استغرق في المرحلة الأولى ساعة وربع وفي المرحلة الثانية ساعة ونصف. نعلم أنَّ المسافة التي قطعها في المرحلة الثانية تزيد عن تلك التي قطعها في المرحلة الأولى بمقدار $4\,\text{km}$.

1. بأية سرعة وسطى كانت تسير الدراجة؟

2. ما المسافة التي قطعها في كلٍّ من المرحلتين؟

الحل:

نرمز إلى المسافة التي قطعها في المرحلة الأولى (مقدرة بالكيلومترات) بالرمز x، فتكون المسافة التي قطعها في المرحلة الثانية $x + 4$.

نرمز إلى السرعة الوسطى للدراجة بالرمز v، فيكون $x = 1{,}25\ v \cdots (1)$ و $x + 4 = 1{,}5\ v \cdots (2)$.

نضع $x = 1{,}25\ v$ في المعادلة (2)، فنحصل على $1{,}25\ v + 4 = 1{,}5\ v$ أو $4 = 1{,}5\ v - 1{,}25\ v$ أو $0{,}25\ v = 4$ أو $4 \times 0{,}25\ v = 4 \times 4$ ومنها $v = 16$. فالسرعة الوسطى للدراجة هي $16\ \text{km/h}$.

نضع $v = 16$ في المعادلة (1)، فنحصل على $x = 1{,}25 \times 16 = 20$.

فالمسافة التي قطعها هي: في المرحلة الأولى $20\ \text{km}$، وفي المرحلة الثانية $20 + 4 = 24\ \text{km}$

15 مع القسمة الإقليدية

جِدْ عددين صحيحين موجبين، مع العلم أنَّ:

- مجموعهما يساوي 241.
- إذا قسمنا أكبرهما على أصغرهما، كان خارج القسمة 4 وباقيها 11.

نرمز إلى أكبر العددين بالرمز x وإلى أصغرهما بالرمز y.

- $(1) \cdots x + y = 241$
- $(2) \cdots x = 4y + 11$

نضع $x = 4y + 11$ في المعادلة (1)، فنحصل على $4y + 11 + y = 241$ أو $4y + y = 241 - 11$ أو $5y = 230$، ومنها $y = \dfrac{230}{5} = 46$.

نضع $y = 46$ في المعادلة (2)، فنحصل على $x = 4 \times 46 + 11 = 195$.

فأكبر العددين هو 195 وأصغرهما هو 46.

5

الوحدة الخامسة

التابع

1. مفهوم التابع
2. طرائق تعريف التابع

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الأسبوع
1- مفهوم التابع	2	شباط	الثالث
2- طرائق تعريف التابع	2	شباط	الثالث والرابع
تمرينات ومسائل	2+2	شباط+ آذار	الرابع+ الأول
اختبار	1	آذار	الأول
المجموع	9		3

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
التابع	نسمّي تابعاً للمتحوّل x كل إجرائيّة تربط بكلّ عدد x عدداً وحيداً $f(x)$. فعندما نجد أنَّ كل قيمة للمتحول x تقابلها قيمة واحدة للمقدار A، نقول إننا عرَّفنا تابعاً يقرن بكل قيمةٍ للمتحول x قيمةً واحدة للمقدار A، والتي يُمكن أن نرمز إليها بالرمز $A(x)$.
السلف والصورة	إذا كتبنا $y = f(x)$ قلنا إنَّ y هو صورة x وفق التابع f وأيضاً نقول إنّ x هو سَلَف لـ y وفق التابع f.
المنطلق	مجموعة تعريف التابع
مجموعة قيم التابع	مجموعة النتائج الممكنة للتابع

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
أولويات العمليات	مفهوم التابع
استعمال صيغة	مجموعة تعريف التابع
رسم نقطة عُلِمت إحداثيتاها	طرائق تعريف التابع

التابع

 انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. مراعاة أولويات العمليات

العدد $4\times 3^2+2$ يساوي

① 144 ② 44 ③ 38

2. استعمال الأقواس

نختار عدداً x، نطرح منه العدد 2، ثم نضرب الناتج بالعدد 3، فنحصل على

① $3x-2$ ② $3(x-2)$ ③ $2(x-3)$

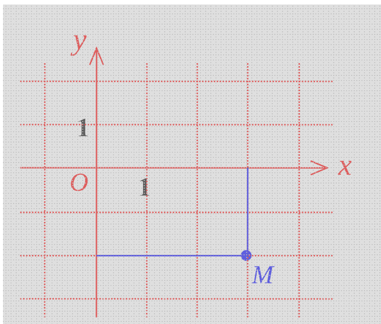
3. استعمال صيغة

تُعطى مسافة الأمان بين سيارتين بالصيغة $\mathcal{D}=8+0.2\,V+0.003\,V^2$ حيث $\mathcal{D}$ المسافة مقاسة بالأمتار، و V هي سرعة السيارة مقاسة بالكيلومتر في الساعة. مسافة الأمان بالنسبة إلى سيارة سرعتها 50 km/h هي

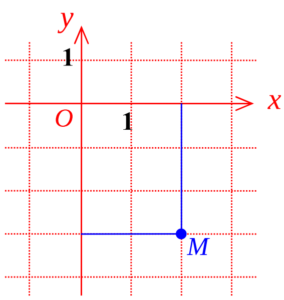
① 18.0225 m ② 25.5 m ③ 417.5 m

4. رسم نقطة عُلِمت إحداثياتها

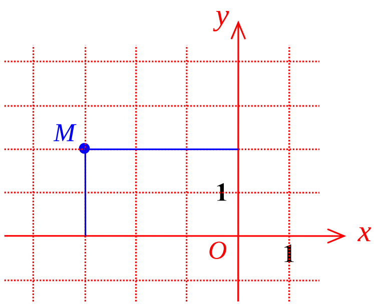
الموضع الصحيح للنقطة M التي فاصلتها 3 وترتيبها -2، هو في الشكل



①



②



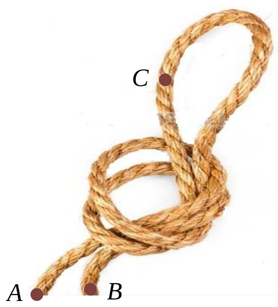
③

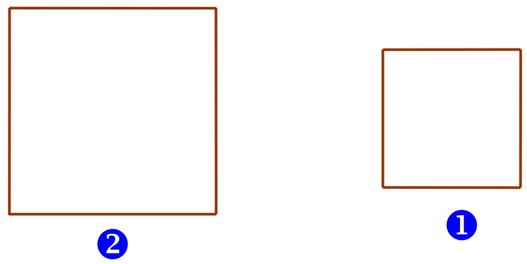
مفهوم التابع

نشاط «مجموعة تعريف تابع ومجموعة قيمه وقاعدة ربطه»

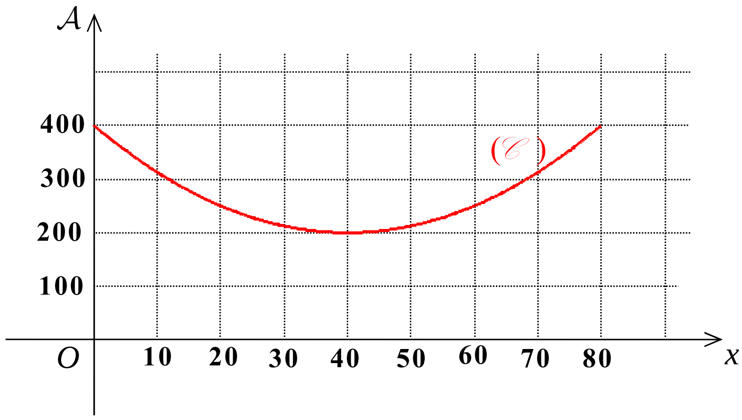
1. صياغة تابع

- حبل طوله $80\ \text{m}$، طرفاه A و B. جزّأنا الحبل إلى قطعتين $[AC]$ و $[BC]$.
- صنعنا من القطعة $[AC]$ المربع ❶ ومن القطعة $[BC]$ المربع ❷.





- يرمز x إلى طول القطعة $[AC]$ و $\mathcal{A}$ إلى مجموع مساحتي المربعين.
- الشكل الآتي تمثيلٌ لـ $\mathcal{A}$ بدلالة x.



بمعنى أنَّ ترتيب كل نقطة (x,y) من الخط البياني $(\mathscr{C})$ هي قيمة $\mathcal{A}$ الموافقة.

أولاً: استعن بالشكل وأجب (يمكن أن تجيب بقيم تقريبية).

1. ما مجموعة قيم x؟
2. انسخ وأكمل الجدول الآتي:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$\mathcal{A}$	......	......	......	......	......	......	......	......

3. ما قيمة x عندما $\mathcal{A} = 200$.
4. ما قيمة x التي تتساوى عندها مساحتا المربعين ❶ و ❷؟

الحل:

أولاً: 1. مجموعة قيم x هي $]0;80[$

2. الجدول:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\mathcal{A}$	400	310	250	210	200	210	250	310	400

3. في حالة $\mathcal{A} = 200$ ، $x = 40$

4. تتساوى مساحتا المربعين ❶ و ❷ في حالة تساوي طولي ضلعي المربعين، أي $x = 80 - x$ ،

إذن $2x = 80$ ، ومنها $x = \frac{80}{2} = 40$

.2 آلة إنتاج أعداد. هي آلة كلما لقّمناها عدداً x أنتجت لنا عدداً y واحداً فقط.

$$x \to \boxed{\boxed{x^2} \to \boxed{+1} \to \boxed{\times 2}} \to y$$

الآلـــة

هذه الآلة هي تجسيد لتابع f حيث $f(x) = y$.

1. تحقق من أنَّ $f(4) = 34$. أي إنَّنا إذا أدخلنا في الآلة العدد 4 حصلنا على العدد 34 .

2. أثبت أنَّ العدد 34 هو أيضاً صورة للعدد -4 وفق التابع f .

3. اكتب عبارة $f(x)$ بدلالة x .

4. احسب كلاً من $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(100)$ و $f(3.1)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

الحل:

1. $f(4) = 2(4^2 + 1) = 2(16 + 1) = 34$

2. $f(-4) = 2[(-4)^2 + 1] = 2(16 + 1) = 34$

3. $f(x) = 2(x^2 + 1)$

4. $f(1) = 2(1^2 + 1) = 2(1 + 1) = 4$ و $f(-1) = 2[(-1)^2 + 1] = 2(1 + 1) = 4$

$$f(3.1) = 2(3.1^2 + 1) = 2(9.61 + 1) = 21.22$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1) = 2(\frac{1}{4} + 1) = 2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}$$

تحقق من فهمك

① في العمود الأيسر من الجدول المرافق معلومات عن تابعٍ f. انسخ ثم أكمل هذا الجدول.

صيغة رمزيّة	صيغة لفظيّة
$f(\cdots) = \cdots$	3 هو صورة 2
$f(\cdots) = \cdots$	-1 هو صورة 8
$f(\cdots) = \cdots$	4 هو صورة 5
$f(\cdots) = \cdots$	13 هو صورة -7

الحل:

صيغة رمزية	صيغة لفظية
$f(2) = 3$	صورة 3 2
$f(-1) = 8$	هو صورة 8 -1
$f(4) = 5$	هو صورة 5 4
$f(13) = -7$	

② هذه معلومات عن تابعٍ h : $h(-1) = 3$ و $h(1) = h(5) = 0$

1. عبِّر عن المعلومة $h(-1) = 3$ بجملةٍ تتصدرها كلمة «**صورة**»

2. عبِّر عن المعلومة $h(1) = h(5) = 0$ بجملةٍ تحوي كلمة «**صورة**»

الحل

1. صورة العدد -1 هو 3.

2. صورة كلٍّ من العددين 1 و 5 هو العدد 0.

تدرب

الشكل المرافق هو جدول قيم تابعٍ f. انسخ هذا الجدول في دفترك ثم أكمل:

x	$f(x)$
0	5
1	–2
2	–5
3	10
4	5

① وفق التابع f العدد ...... هو صورة العدد 1.

② وفق التابع f العدد 5 هو صورة لكل من العددين 0 و ....

③ وفق التابع f العدد 10 هو ......العدد ....

الحل:

① وفق التابع f العدد -2 هو صورة العدد1.

② وفق التابع f العدد 5 هو صورة لكل من العددين 0 و 4.

③ وفق التابع f العدد 10 هو صورة العدد 3.

② طرائق تعريف التابع

1. آلات أخرى لإنتاج أعداد

الآلة (1): ليكن g التابع الذي يربط بكل عددٍ t العددَ $g(t)=(t-1)^2+2t$

① ارسم مخطط الآلة التي تنتج الأعداد وفق التابع g.

② احسب كلّاً من $g(0)$ و $g(1)$ و $g(-1)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

نسمي t متحولاً صامتاً للتابع أي أنَّ الرمز المعطى لهذا المتحول غير مهم.

فقد نكتب $g(x)=(x-1)^2+2x$ أو حتى $g(\square)=(\square-1)^2+2\square$.

الآلة (2): الآلة المصممة لإنتاج الأعداد وفق:

$$t \to \boxed{\boxed{t^2} \to \boxed{+1}} \to y$$

تنتج الأعداد ذاتها التي تنتجها **الآلة (1)**.

فإذا رمزنا للتابع الموافق لهذه الآلة بالرمز h ، قلنا إنَّ التابعين g و h متساويان، وكتبنا $h=g$.

① تحقق من أنَّ: $h(-1)=g(-1)$ و $h(2)=g(2)$ و $h(0)=g(0)$.

② أثبت أنَّ $g=h$.

الآلة (3): الآلة المصممة لإنتاج الأعداد وفق:

$$x \to \boxed{y^2=x} \to y$$

① علامَ نحصل إذا أدخلنا العدد 4 ؟

② علامَ نحصل إذا أدخلنا العدد -9 ؟

③ علامَ نحصل إذا أدخلنا العدد 0 ؟

④ ما الخلاف بين هذه الآلة والآلات السابقة؟

الحل

الآلة (1): ليكن g التابع الذي يربط بكل عددٍ t العددَ $g(t)=(t-1)^2+2t$

①

$$t \to \boxed{\boxed{(t-1)^2} \to \boxed{+2t}} \to y$$

الآلة g

② $g(0)=(0-1)^2+2(0)=1+0=1$ ؛ $g(1)=(1-1)^2-2(1)=0-2=-2$

$g(-1)=(-1-1)^2+2(-1)=4-2=2$ ؛ $g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2}\right)^2+(-1)=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$

الآلة (2): الآلة المصممة لإنتاج الأعداد وفق:

$$t \rightarrow \boxed{\boxed{t^2} \rightarrow \boxed{+1}} \rightarrow y$$

تنتج الأعداد ذاتها التي تنتجها *الآلة (1).*

فإذا رمزنا للتابع الموافق لهذه الآلة بالرمز h ، قلنا إنَّ التابعين g و h متساويان، وكتبنا $h=g$.

① $g(-1)=\left[(-1-1)^2+2(-1)\right]=4-2=2$ و $h(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$، إذن $g(-1)=h(-1)$

$g(-2)=\left[(2-1)^2+2(2)\right]=1+4=5$ و $h(2)=(2)^2+1=4+1=5$، إذن $g(2)=h(2)$

② يكون $g=h$ عندما تتحقق المساواة $g(x)=h(x)$ أياً يكن العدد x.

في الحقيقة $g(x)=(x-1)^2+2x=x^2-2x+1+2x=x^2+1=h(x)$

الآلة (3): الآلة المصممة لإنتاج الأعداد وفق:

$$x \rightarrow \boxed{y^2=x} \rightarrow y$$

① إذا أدخلنا العدد 4 حصلنا على $y^2=4$. لهذه المعادلة حلاّن، فستنتج الآلة عددين هما $y_1=2$ و $y_2=-2$.

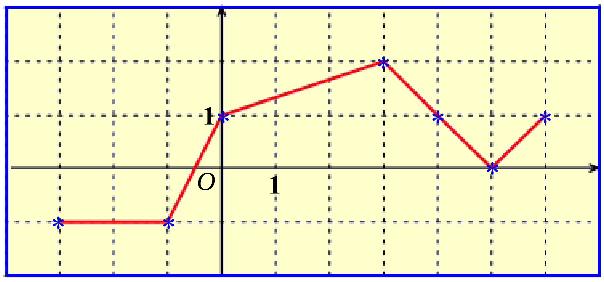
② إذا أدخلنا العدد -9 حصلنا على $y^2=-9$. وهذه المعادلة غير قابلة للحل، فالآلة لن تنتج أي عدد.

③ إذا أدخلنا العدد 0 حصلنا على $y^2=0$، ولهذه المعادلة حل وحيد $y=0$، فستنتج الآلة العدد 0

④ الآلات السابقة تنتج أعداداً وفق تابع، بمعنى أننا كلما لقمناها عدداً أعطتنا عدداً واحداً.

بينما هذه الآلة فتنتج أعداداً وفق علاقة غير تابعية، بمعنى أننا قد نلقمها عدداً فتعطينا عددين مختلفين، وقد نلقمها عدداً فلا تعطينا أي عدد.

تحقق من فهمك



① ليكن f التابع المعرف بهذا الخط البياني:

1. ما صورة كلٍّ من 0 و 3 و 5 وفق f؟

2. ما الأعداد التي صورتها 1 وفق f؟

الحل:

1. وفق التابع f، صورة 0 هي 1. وصورة 3 هي 2. وصورة 5 هي 0.

2. ما الأعداد التي صورتها 1 وفق f هي : 1 و 4 و 6

② في إحدى الصحف، أحصينا عدد أسطر المقالات القصيرة وسجلنا النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأسطر	1	2	3	4	5	6	7
عدد المقالات	3	6	24	38	24	15	9

يعرِّف هذا الجدول تابعاً f يقرن بعدد الأسطر عددَ المقالات (مثلاً هناك 6 مقالات كلٌّ منها مؤلف من سطرين)

1. ماذا تعني الكتابة $f(7)=9$ ؟

2. كم عدد المقالات المؤلفة من 4 أسطر؟ عبِّر عن ذلك برموز رياضية باستعمال f.

3. وفق التابع f : ① ما صورة العدد 6؟ ② ما الأعداد التي صورتها العدد 24؟

الحل:

1. الكتابة $f(7)=9$ تعني أنَّ تسع مقالات كلّ منها مؤلف من سبعة أسطر.

2. عدد المقالات المؤلفة من 4 أسطر هو 38 مقالة. نكتب $f(4)=38$.

3. وفق التابع f:

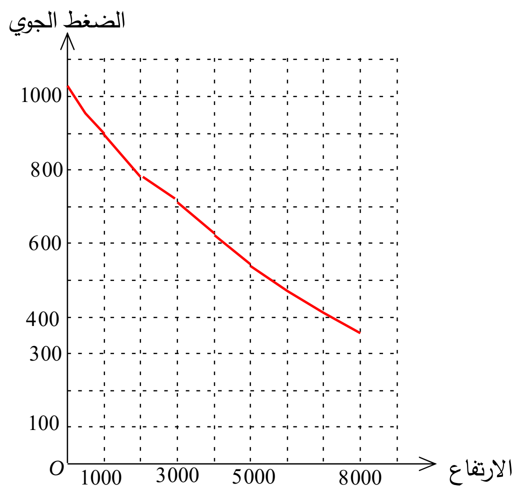
① صورة العدد 6 هي 15 ② صور العدد 24 هي 3 و 5.

③ الجدول الآتي يمثّل تابعاً g يقرن بكل ارتفاع عن سطح البحر، مقاساً بالمتر، الضغطَ الجوي الموافق مقاساً بالهيكتوباسكال hPa.

	0	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
	1013	955	899	795	701	616	540	472	411	356

مثّل هذا الجدول بيانياً، متخذاً على محور الفواصل 1 cm لكلّ 1000 m ارتفاعاً عن سطح البحر، وعلى محور التراتيب 1 cm لكلّ 100 hPa.

الحل:



④ ليكن f التابع المعطى بالصيغة $f(x)=-3(x-1)^2$. جِدْ، وفق هذا التابع، صورة كلٍّ من 0 و 1 و -4 .

الحل:

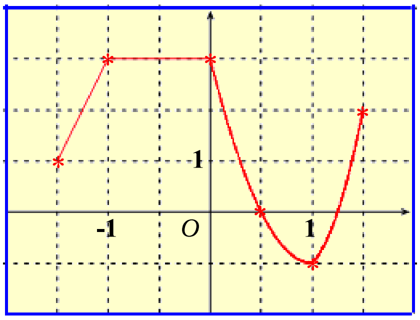
① $f(0)=-3(0-1)^2=-3(-1)^2=-3\times 1=-3$

② $f(1)=-3(1-1)^2=-3(0)^2=-3\times 0=0$

③ $f(-4)=-3(-4-1)^2=-3(-5)^2=-3\times 25=-75$

تدرب

① هذا الخط البياني يمثّل تابعاً h.



أكمل:

① $h(0.5)=\cdots\cdots$ ② $h(-1.5)=\cdots\cdots$

③ $h(0)=\cdots\cdots$ ④ $h(1.5)=\cdots\cdots$

الحل:

① $h(0.5)=0$ ؛ ② $h(-1.5)=1$

③ $h(0)=3$ ؛ ④ $h(1.5)=2$

② هذه معلومات عن كبح سيارة على أرض زلقة :

السرعة	مسافة الأمان	مسافة الكبح
50	13.89	16.08
90	25.00	52.08
100	27.78	46.30
130	36.11	108.67

ليكن:

- f التابع الذي يقرن مسافة الأمان (m) بسرعة السيارة (km/h).
- g التابع الذي يربط مسافة الكبح (m) بسرعة السيارة (km/h).

1. أكمل: ① $f(90)=\cdots\cdots$ ② $g(90)=\cdots\cdots$.

2. ليكن k التابع الذي يقرن بكل سرعة مجموع مسافتي الأمان والكبح. نظِّمْ جدولاً بقيم هذا التابع.

الحل:

1. أكمل: ① $D_R(90)=25$ مسافة الأمان ؛ ② $D_F(90)=52.08$ مسافة الكبح

2.

V	$f+g$
50	29,97
90	77,08
100	74,08
130	144,78

③ ليكن h التابع المعطى وفق $t \mapsto -\frac{1}{2}t+5$. احسب صور كلّ من 0 و 2 و $-\frac{4}{3}$ وفق f.

الحل:

① $h(0) = -\frac{1}{2} \times 0 + 5 = 0 + 5 = 5$

② $h(2) = -\frac{1}{2} \times 2 + 5 = -1 + 5 = 4$

③ $h\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2} \times -\frac{4}{3} + 5 = \frac{2}{3} + 5 = \frac{17}{3}$

④ ليكن f التابع المعطى وفق $t \mapsto t(t+1)$.

1. انسخ وأكمل $f(t) = \cdots\cdots$.

2. هل صحيح أنَّ:

① 0 هو صورة -1 وفق f؟

② 110 صورة للعدد 11 وفق f؟

③ صورة العدد 2 هي 5 وفق f؟

④ العدد الذي صورته 0.25 وفق f هو 0.5؟

الحل:

1. انسخ وأكمل $f(t) = t(t+1)$.

2. ① « صح » لأنَّ $f(-1) = -1(-1+1) = 0$

② « صح » لأنَّ $f(11) = 11(11-1) = 110$

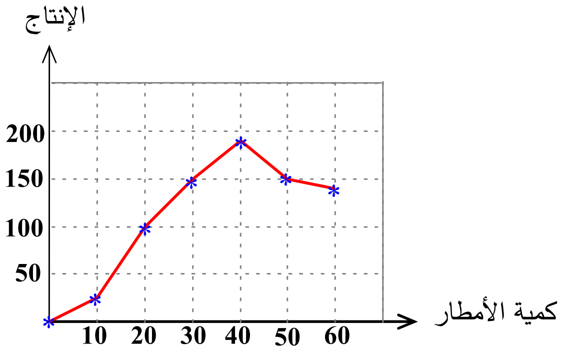
③ « خطأ » لأنَّ $f(2) = 2(2+1) = 6 \neq 5$

④ « خطأ » لأنَّ $f(0.5) = 0.5(0.5+1) = 0.75 \neq 0.25$

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة مما يأتي، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) تعلم أنَّ سهول الجزيرة السورية مشهورة بزراعة القمح اعتماداً على المطر وأنَّ غزارة الإنتاج تتعلق بكمية الأمطار السنوية. f هو التابع الذي يقرن بكمية هطول الأمطار السنوية (cm) مقدار إنتاج مساحة $1000\ \mathrm{m}^2$ من الأرض المزروعة (kg).



إذا كان الشكل المرافق تمثيلاً لهذا التابع، كان

① $f(40)=8$ ② $f(40)=190$ ③ $f(40)=200$

(2) بالنسبة إلى التابع f في التمرين السابق، الإنتاج الأكبر هو في حالة كمية الهطول

① 60 cm ② 50 cm ③ 40 cm

(3) الجدول الآتي هو جدول قيم تابع h يقرن برقم كل دورة قيمة مكالمات الهاتف الأرضي لأحد المنازل (بالليرة السورية).

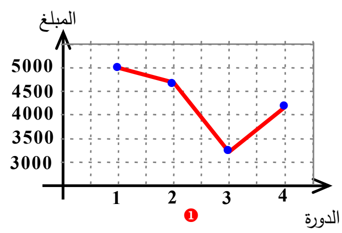
رقم الدورة	1	2	3	4
قيمة المكالمات	5005	3720	4180	4810

وفق هذا التابع، العدد الذي صورته 4 810 هو ① 1 ② 3 ③ 4.

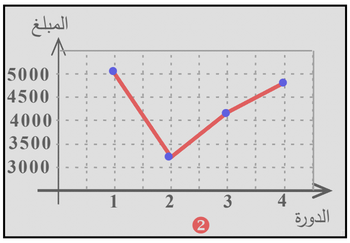
(4) بالنسبة إلى التابع h في التمرين السابق، صورة 3 هي

① 4 810 ② 4 180 ③ 5 005 .

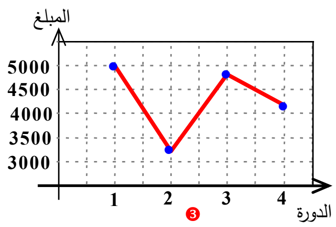
(5) التابع h في التمرين السابق، يُمثَّل بيانياً بالشكل



①



②



③

(6) إذا كان التابع k معرفاً بالقاعدة $x \mapsto (x-2)(x+1)$ ، كان

① $k(-1)=0$ ② $k(-1)=6$ ③ $k(-1)=2$

2 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) ما صيغة التابع الذي يقرن بكل عدد x مربع مجموع x مع العدد 5 ؟

① $x \mapsto x^2+5$

② $x \mapsto (x+5)^2$

③ $x \mapsto (5+x)^2$

(2) h هو التابع المعطى وفق $h(t)=t^2+t-6$. أحد أسلاف العدد 0 وفق هذا التابع هو

① 2

② 6

③ -3

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) f هو التابع $x \mapsto (x-3)(x-4)$ صورة -3 وفق هذا التابع هي 42 .

صح،لأن $f(-3)=(-3-3)(-3-4)=-6\times -7=42$

(2) إذا كان g التابع $x \mapsto 3(x-3)^2$ ، كان $g(0)=3$.

خطأ، لأن $g(0)=3(0-3)^2=3\times 9=27$

(3) h هو التابع $x \mapsto x^2$ ليس للعدد -3 أسلاف وفق هذا التابع.

صح.

(4) k هو التابع $t \mapsto \frac{1}{t}$ (مع $t \neq 0$) إذن لا يمكن إيجاد صورة 9 وفق هذا التابع.

خطأ, يمكن إيجاد صورة 9 وفق هذا التابع $k(9)=\frac{1}{9}$

(5) u هو التابع $t \mapsto (t-1)^2$ يوجد عددان صورة كل منهما 9 وفق هذا التابع.

صح، لأن $u(-2)=(-2-1)^2=9$
$u(4)=(4-1)^2=9$

(6) v هو التابع الذي يربط بكل عدد موجب جذره التربيعي الموجب. يوجد عددان صورة كل منهما تساوي 1 ، خطأ، لا يوجد إلا عدد موجب وهو 1 صورته تساوي

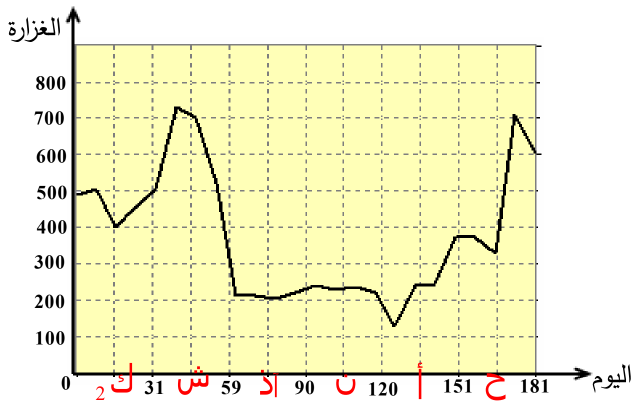
(7) نقرن بكل عدد x، عدداً y يحقق $(y-x)(y-2x)(y-3x)=0$.

إذن نحن نعرف بهذه العلاقة تابعاً.

خطأ، التابع يقرن كل قيمة للمتحول x عددا واحدا y أما في هذا المثال هناك ثلاث قيم ممكنة للعدد y .

5

4 الشكل الآتي يمثّل تابعاً F يقرن أيّام النصف الأوّل من عام 2006 بغزارة تدفق مياه نهر الفرات (m^3/s).



1. بالنسبة إلى هذا التابع:

① ما هو المتحول؟

② في أي يوم (بالتقريب) وفي أي شهر كان النهر يتدفق بأكبر غزارة؟

2. أكمل بالتقريب: ① $F(181) = \cdots\cdots$ ② $F(\cdots\cdots) = 400$.

الحل:

1. بالنسبة إلى هذا التابع:

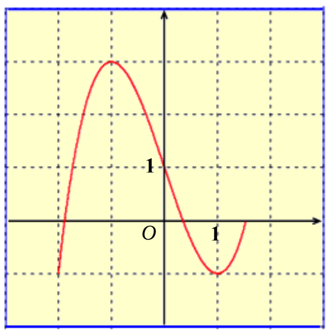
① المتحول هو اليوم.

② في 9 شباط، بالتقريب، كان النهر يتدفق بأكبر غزارة.

2. أكمل بالتقريب:

① $F(181) \approx 600$ ② $F(15) \approx 400$

5 التابع g هو التابع الممثّل بالخط البياني الآتي:



1. ما صورة كلٍ من 0 و 1؟

2. حدّد أسلاف العدد 0؟ (استعمل قيماً تقريبية عند اللزوم.)

3. ما العدد الذي صورته أكبر ما يمكن؟ وما هذه الصورة؟

4. ما الأعداد التي صورتها أصغر ما يمكن؟ وما هذه الصورة؟

الحل:

1. صورة 0 هي 1 وصورة 1 هي -1.

2. أسلاف العدد 0 هي 1 و 0.3 و -1.9.

3. العدد الذي صورته أكبر ما يمكن هو -1 وصورته هي 3.

4. الأعداد التي صورتها أصغر ما يمكن هي 1 و -2. وهذه الصورة هي -1.

6 الجدول الآتي يعرِّف تابعاً f يربط بكل ساعة من ساعات أحد أيام شهر تموز درجة حرارة الطقس (C°) في مدينة دمشق.

الساعة	12	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	36	37	38	39	38	37	36

1. ماذا تعني الكتابة $f(1) = 37$ و $f(6) = 36$ ؟

2. مثِّل بيانياً هذا التابع.

الحل:

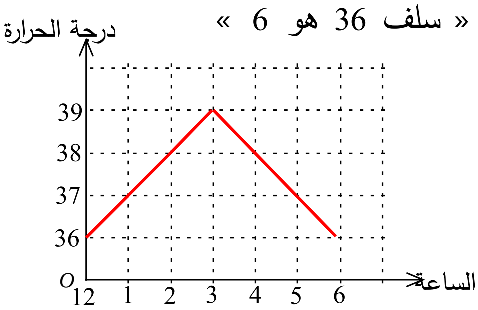
1. الكتابة $f\ (1) = 37$ تعني أنَّ درجة الحرارة كانت 37 درجة مئوية في الساعة الواحدة.

ويعبَّر عنها بلغة التوابع « صورة 1 هي 37 » أو « سلف 37 هو 1 »

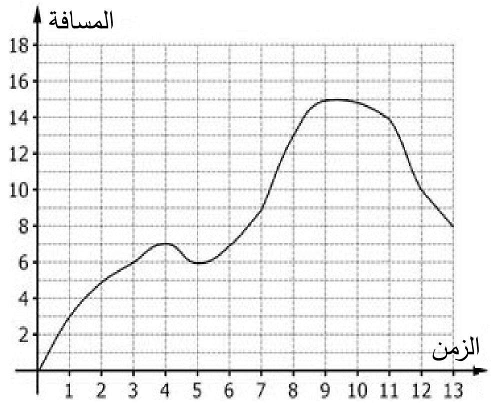
والكتابة $f\ (6) = 36$ تعني أنَّ درجة الحرارة كانت 36 درجة مئوية في الساعة السادسة.

ويعبَّر عنها بلغة التوابع « صورة 6 هي 36 » أو « سلف 36 هو 6 »

2. التمثيل البياني لهذا التابع:



7 ربط باحث في علم الحيوان جهاز إرسال بفأر ليقرأ المسافة التي تفصل بينه وبين جحره. الخط البياني أدناه يبين المسافة (m) بين السحلية وجحرها خلال 13 دقيقة.



نرمز إلى التابع الذي يقرن بكل لحظة مسافةَ الفأر عن جحره بالرمز k.

1. نرمز إلى المتحول بالرمز t. علام يدل t؟

2. ما أكبر مسافة ابتعدها الفأر عن جحره؟ وفي أيّة دقيقة كان ذلك؟

3. كم كانت مسافة الفأر عن جحره في الدقيقة 13؟

4. انسخ وأكمل:

① $k(3)=\cdots\cdots$ ② $k(5)=\cdots\cdots$ ③ $k(12)=\cdots\cdots$

5. انسخ وأكمل:

① $k(\cdots\cdots)=3$ ② $k(\cdots\cdots)=9$ ③ $k(\cdots\cdots)=10$

6. هل ثمة فترة زمنية كان أثناءها الفأر ينتقل وهو تقريباً على المسافة نفسها من جحره؟ ما هذه الفترة إن كانت موجودة؟

الحل:

1. يدل t على الزمن بالدقائق.

2. أكبر مسافة ابتعدتها الفأرة عن جحره هي 15 m وذلك في الدقيقة 9.

3. في الدقيقة 13، كانت مسافة الفأرة عن جحرها 8 m.

4. ① $k(3)=6$ ؛ ② $k(5)=6$ ؛ ③ $k(12)=10$

5. ① $k(1)=3$ ؛ ② $k(7)=9$ و ③ $k(12.5)\approx 9$ ؛ ③ $k(7.3)\approx 10$ و ③ $k(12)\approx 10$

6. في الفترة الزمنية من الدقيقة 9 حتى الدقيقة 10، كانت خلالها الفأرة تنتقل وهي تقريباً على نفس المسافة عن جحرها. وهذه المسافة هي 15 m.

لإحراز تقدم

8 رسم بريد

وزن المغلف	قيمة الطابع
20	55
50	88
100	133
250	218
500	297
1 000	385
2 000	507
3 000	593

التابع f هو التابع الذي يقرن قيمة الطابع البريدي (بالليرة السورية) بكتلة المغلف المرسل (g).

1. أكمل: ① $f(20) = \cdots\cdots$ ② $f(1000) = \cdots$

2. أكمل: ① $f(\cdots\cdots) = 297$ ② $f(\cdots\cdots) = 593$

3. الشكل الآتي تمثيل للتابع f وضعه أحد الطلاب لغاية $250\ g$.

① ما رأيك؟ هل هناك أخطاء؟

② صحِّح كلّ خطأ تجده.

الحل:

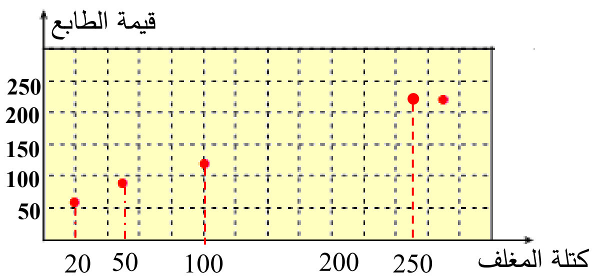
1. أكمل:

① $f\ (20) = 55$ ② $f\ (1\,000) = 385$

2. أكمل:

① $f\ (500) = 297$ ② $f\ (3\,000) = 593$

3. تمثيل f:

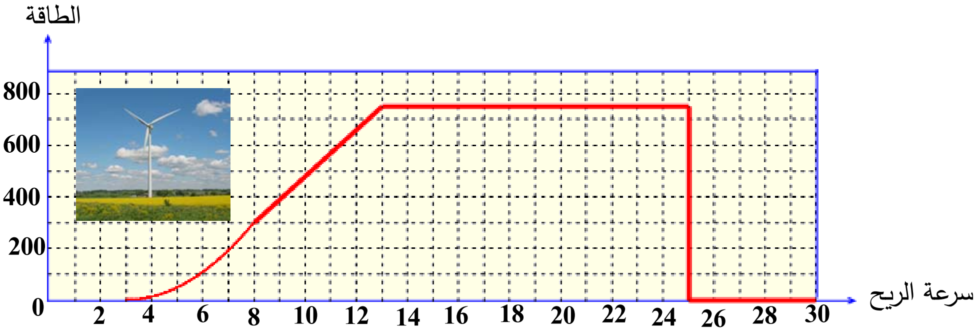


① نعم

② لا داعي لكتابة 200 ولكنها موضوعة في مكان خاطئ ومن ثم توضعت 250 في مكان خاطئ أيضاً

9 تابعٌ أم ليس تابعاً ؟

الشكل الآتي يمثل الاستطاعة التي تولدها عنفة هوائية (بالكيلوواط) حسب سرعة الريح (m/s)



1. بدءاً من أية سرعة للريح تبدأ العنفة بتوليد الكهرباء؟

2. ما مقدار الاستطاعة الناتجة عن رياح سرعتها $8\ m/s$ ؟

3. الاستطاعة الأكبر لهذه العنفة هي $750\ kw$. عند أية سرعة للريح تتولد هذه الاستطاعة ؟

4. ما سرعات الريح التي عندها تتوقف العنفة عن توليد الطاقة؟

5. تذكَّر تعريف التابع، ثم تأمل الشكل عند سرعة الريح $25\ m/s$. هل الشكل تمثيل لتابع؟ علِّلْ.

الحل:

1. تبدأ العنفة بتوليد الكهرباء بدءاً من بعد السرعة $3\ m/s$.(فاصلة النقطة A)

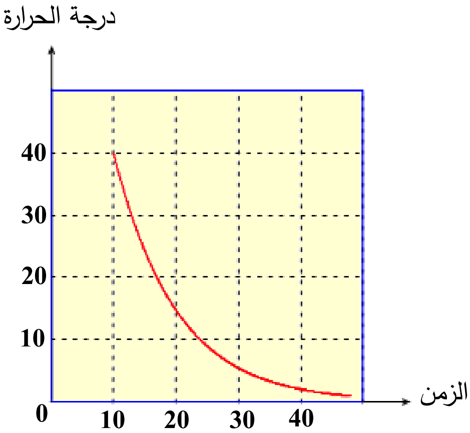
2. الاستطاعة الناتجة عن رياح سرعتها $8\ m/s$ هي $300\ kw$. (ترتيب النقطة B)

3. تتولد الاستطاعة الأكبر لهذه العنفة عندما تتراوح سرعة الريح بين $13\ m/s$ و $25\ m/s$.

4. تتوقف العنفة عن توليد الطاقة عندما تتراوح سرعة الريح بين $0\ m/s$ و $3\ m/s$، ثم عندما تتجاوز سرعة الريح $25\ m/s$.

5. الشكل تمثيل لتابع، لأنَّ بكل قيمة لسرعة الريح ترتبط قيمة واحدة للطاقة.

10 تقارب



الشكل المرافق تمثيلٌ لتابعٍ f يربط بكل لحظة زمنية (بالدقيقة) درجة حرارة غرفة تبريد أدوية (C°) .

1. في أية لحظة كانت حرارة الغرفة 40 درجة مئوية؟

2. بعد كم دقيقة تقترب درجة حرارة الغرفة من الصفر؟

3. أكمل:

① $f(20) = \cdots\cdots$ ② $f(35) = \cdots\cdots$

4. أكمل:

① $f(\cdots\cdots) = 30$ ② $f(\cdots\cdots) = 2$

الحل:

1. كانت حرارة الغرفة 40 درجة مئوية في الدقيقة 10 (ترتيب A)

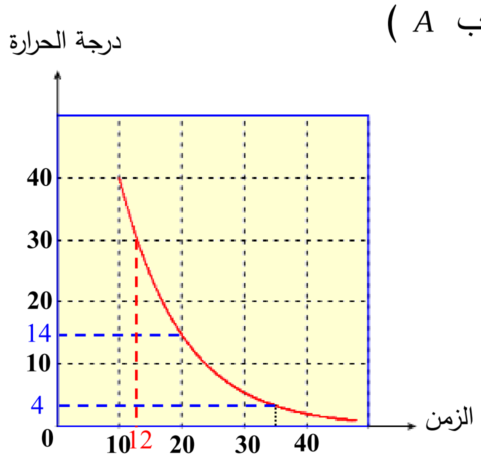
2. تقترب درجة حرارة الغرفة من الصفر بعد **دقيقة.** 40

3. أكمل بقيم تامة أو تقريبية:

① $f(20) \approx 15$ ؛ ② $f(35) \approx 4$

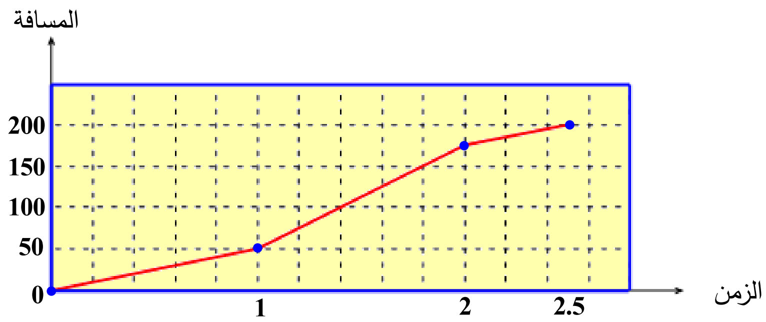
4. أكمل بقيم تامة أو تقريبية:

① $f(12) \approx 30$ ؛ ② $f(40) \approx 2$



11 سائق

استغرق سائق سيارة ساعتين ونصف في قطع مسافة $200\ \text{km}$. الشكل التالي تمثيلٌ لتابع g يقرن بكل لحظة المسافة المقطوعة.



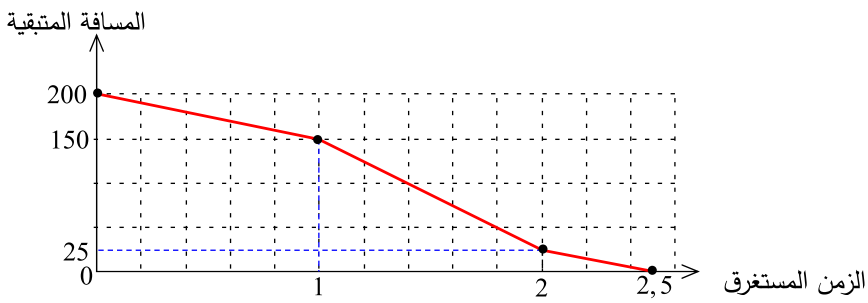
مثِّلْ التابع h الذي يقرن بكل لحظة المسافة المتبقية.

الحل:

● جدول بالمسافات المتبقية

الزمن المستغرق	0	1	2	2.5
المسافة المتبقية	200	150	25	0

● تمثيل التابع h:



12 توقّع ثم إثبات

f و g تابعان معرَّفان كما يأتي:

$$f(x) = (x-1)(11-x) + 5(x-1)^2$$
$$g(x) = 2(x-1)(2x+3)$$

1. انسخ ثم أكمل الجدول الآتي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

2. ماذا تتوقع؟ عزّز توقعك باختيار قيم أُخرى للمتحول x.
3. أثبت ما توقعت.

الحل:

1. انسخ ثم أكمل الجدول الآتي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	24	6	4	-6	0	14	36
$g(x)$	24	6	4	-6	0	14	36

2. أتوقع أن تتحقق المساواة $f(x) = g(x)$ أياً يكن العدد x.

3. $f(x) = 11x - x^2 - 11 + x + 5x^2 - 10x + 5 = 4x^2 + 2x - 6$

$g(x) = 2(2x^2 - 2x + 3x - 3) = 4x^2 + 2x - 6$

نتبيَّن أنَّ $f(x) = g(x)$ أياً يكن العدد x

6

الوحدة السادسة

مبادئ الاحتمال والإحصاء

1. مفهوم الاحتمال
2. أحداث متنافية. أحداث متعاكسة
3. تجارب عشوائية مركبة
4. الوسيط والربيعات

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الأسبوع
1- مفهوم الاحتمال	3	آذار	الثاني
2- أحداث متنافية. أحداث متعاكسة	3	آذار	الثالث
3- تجارب عشوائية مركبة	3	آذار	الرابع
4- الوسيط والربيعات	3	نيسان	الأول
تمرينات ومسائل	5	نيسان	الثاني والثالث والرابع
اختبار	1	إيار	الأول
المجموع	18		8

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
التجربةُ العشوائيةُ	عندما يكون للتجربة عدد من النتائج أو الإمكانات ولا نعرف بدايةً أي تلك النتائج هي التي ستقع.
الحدث	كلُّ مجموعة من نتائج التجربة **حدثاً**.
الحدث البسيط	نسمي كل نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة حدثاً بسيطاً.
الحدثان المتنافيان	نقول إنّ حدثين **متنافيان** إذا استحال تحققهما في آنٍ معاً.
الحدثان المتعاكسان	الحدث **المعاكس** لحدثٍ A هو الحدث الذي يتحقق إن لم يتحقق A. نرمز إليه بالرمز $\overline{A}$ ونقول إنَّ A و $\overline{A}$ متعاكسان (كلٌّ منهما يعاكس الآخر).
الوسيط	**وسيط** عينة من الأعداد، هو العدد M الذي يحقق: • ما لا يقل عن نصف مفردات العينة هي أصغر أو تساوي M. • ما لا يقل عن نصف مفردات العينة هي أكبر أو تساوي M.
المدى	**مدى** عينة من الأعداد ، هو الفرق بين أكبر مفردات العينة وأصغرها.

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
التكرار النسبي	مفهوم الاحتمال
التكرار النسبي المئوي	الأحداث البسيطة
إيجاد نسبة	الأحداث متنافية
مقارنة كسور عادية	الأحداث متعاكسة
عمليات على كسور عادية	التجارب العشوائية
المتوسط الحسابي	التجارب العشوائية المركبة
المدى	الوسيط
العينة	الربيعات

مقدمة الوحدة:

لاحظ مفردات المقدمة: تقدم معلومة تاريخية توضح عبر التاريخ أهمية الإحصاء في العلوم السكانية.

مبادئ الاحتمال والإحصاء

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. حساب تكرار نسبي

ثمة 17 كرة حمراء في علبة تحتوي على 54 كرة. لحساب التكرار النسبي للكرات الحمراوات نجري العملية

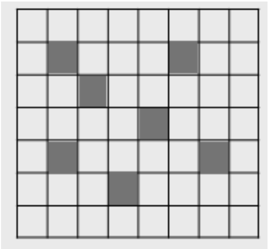
① $54-17$ ② $54+17$ ③ $17\div 54$

2. تعرُّف التكرار النسبي المئوي

تشكل الطالبات $\frac{3}{5}$ من طلبة الصف. يمكن التعبير عن هذه النسبة بالصيغة

① 3.5% ② $60\ \%$ ③ 6%

3. إيجاد نسبة



في الرقعة المرسومة جانباً، نسبة الخلايا السوداء تساوي

① $\frac{1}{7}$. ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$

4. استعمال نسبة مئوية

عدد الطلبة في معهدٍ للغات 450 . منهم 60 % يتعلمون اللغة الإنكليزية، فعدد هؤلاء هو

① 75 طالباً ② 180 طالباً ③ 270 طالباً

5. مقارنة كسور عادية

أكبر الكسور $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{8}{15}$ هو

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{8}{15}$

6. عمليات على كسور عادية

ناتج $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$ يساوي

① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{13}{48}$

مفهوم الاحتمال

نشاط «الأحداث البسيطة»

1. شعار أم كتابة

نتعامل مع قطعة نقود معدنية دونما عيوب، ذات وجهين (كما نعلم) كتابة T وشعار H. نلقي هذه القطعة، كيفياً، على سطح طاولة ملساء ونراقب الوجه الظاهر بعد سقوطها. (شروط التجربة هي أنَّ القطعة تستقر على سطح الطاولة بحيث يظهر أحد وجهيها ويختفي الآخر) أي يظهر T، أو يظهر H. سنكون، بالتأكيد، في مواجهة نتيجتين ممكنتين: شعار أو كتابة.

كتابة شعار

1. بالنسبة إليك، أترى أفضليةً لظهور أحد الوجهين على حساب الآخر؟

2. انسخ وأكمل : حظ الوجه H في الظهور هو .... وحظ الوجه T هو ....

3. نلقي تلك القطعة ست مرات، أترى أننا سنحصل بالتأكيد على ثلاث كتابات؟

4. نفترض أننا ألقينا تلك القطعة أربع مرات وحصلنا في كل مرة على شعار، ثم ألقيناها للمرة الخامسة. ما الصحيح فيما يأتي؟

① نحن أكثر حظاً في الحصول على كتابة.

② نحن أكثر حظاً في الحصول على شعار.

③ للوجهين نفس الحظ في الظهور.

④ لا يمكن الحصول على شعار من جديد.

مثل هذه الألعاب نسميها تجارب (أو اختبارات)

الحل:

1. لا أرى مثل هذه الأفضلية، فلكلٍ من الوجهين الحظ نفسه في الظهور.

2. حظ الوجه H في الظهور هو $\frac{1}{2}$ وحظ الوجه T هو $\frac{1}{2}$

3. ليس بالضرورة.

4. ① نحن أكثر حظاً في الحصول على كتابة. خطأ

② نحن أكثر حظاً في الحصول على شعار. خطأ

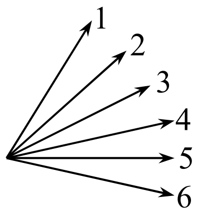
③ للوجهين نفس الحظ في الظهور. صح

④ لا يمكن الحصول على شعار من جديد. خطأ

2. إلقاء حجر نرد

نتأمّل حجر نرد متوازناً، كتبت على أوجهه الستة الأرقام $1,2$, 3, 4 , 5 , 6 .
نلقي هذا الحجر كيفياً، ونسمّي نتيجة التجربة رقم الوجه العلوي للنرد.

1. انسخ شجرة الإمكانات (النتائج الممكنة) واكتب الاحتمال على كل فرع. ما مجموع جميع الاحتمالات؟

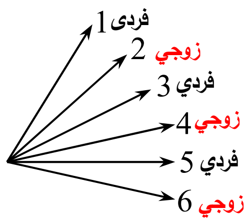


2. تهيأت ريم لإلقاء الحجر متمنية الحصول على عدد زوجي.

① ما النتائج (الأحداث البسيطة) التي تُحقّق أمنيتها؟ نسمي هذه الأمنية «الحصول على عدد زوجي » **حدثاً** نرمز إليه بالرمز E .

② حمّل فروع شجرة الإمكانات بالاحتمالات الموافقة.

3. هي ذي طريقتان لحساب احتمال الحدث E :



☝ «جمعُ الاحتمالات المكتوبة على الفروع المنتهية بأعداد زوجية »

✌ «تقسيم عدد النتائج الزوجية (التي كل منها يحقق أمنية ريم) على عدد النتائج الممكنة »

لا بدّ أنَّ هاتين الطريقتين تؤديان إلى الناتج ذاته. ما هذا الناتج؟ أكمل إذن

$$\mathbb{P}(E) = \cdots\cdots$$

4. ما احتمال كلٍّ من الأحداث الآتية:

الحدث A : «الحصول على عدد أصغر تماماً من 5 »

الحدث B : «الحصول على عددٍ n يحقق $2 \le n \le 4$ »

الحدث C : «الحصول على عددٍ n يحقق $1 \le n \le 6$ ».

الحل:

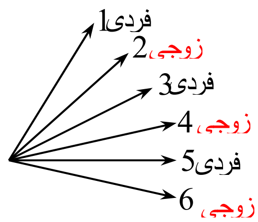
1. شجرة الإمكانات محملة فروعها بالاحتمالات الموافقة.

مجموع جميع الاحتمالات يساوي 1.

2. ① النتائج (الأحداث الابتدائية) التي تُحقق أمنيتها هي 2 أو 4 أو 6 .

هذه الأمنية « الحصول على عدد زوجي » نسميها **حدثاً** نرمز إليه بالرمز E .

② حمّل فروع شجرة الإمكانات بالاحتمالات الموافقة.



احتمال كل فرع يساوي $\frac{1}{6}$.

3. ☝ $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

✌ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

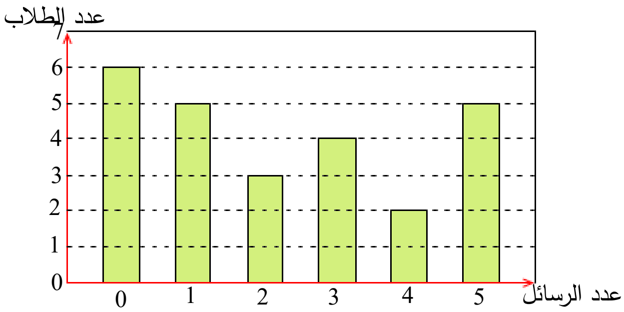
نستنتج أنَّ $\mathbb{P}(E)=\frac{1}{2}$.

4. ما احتمال كلٍ من الأحداث الآتية:

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(\{1,2,3,4\})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\{2,3,4\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(\{1,2,3,4,5,6\})=\frac{6}{6}=1$$

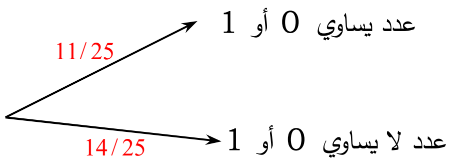
3. رسائل إلكترونية

سجَّل كل طالب من صف يحوي 25 طالباً على ورقة بيضاء عدد الرسائل الإلكترونية التي أرسلها يوم أمس. الشكل المرافق تمثيلٌ للنتائج بالأعمدة. خلطنا تلك الأوراق بعد طيها ووضعناها في كيس وسحبنا إحداها عشوائياً ثم قرأنا العدد المكتوب عليها.



1. ارسم شجرة الإمكانات وحمِّل فروعها بالاحتمالات. ما مجموع هذه الاحتمالات؟

2. E هو الحدث «تحمل الورقة العدد 0 أو 1». لحساب احتمال هذا الحدث، رسم عمار الشجرة المرافقة. كيف تصرف عمار؟ ما احتمال الحدث E؟

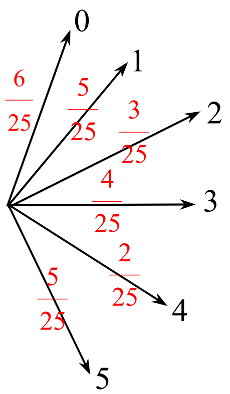


3. ما احتمال كلٍ من الأحداث الآتية؟

الحدث A: «تحمل الورقة العدد 4 فأكثر»

الحدث B: «تحمل الورقة العدد 2 فأكثر»

الحل:



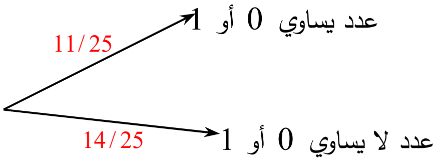
1. شجرة الإمكانات فروعها محملة بالاحتمالات.

مجموع الاحتمالات $\frac{6}{25}+\frac{5}{25}+\frac{3}{25}+\frac{4}{25}+\frac{2}{25}+\frac{5}{25}=\frac{25}{25}=1$

2. E هو الحدث « تحمل الورقة العدد 0 أو 1 ».

قرأ عمار التجربة بالمنظور الآتي:

اعتبر نتيجتين للتجربة، إحداهما « عدد الرسائل أصغر أو يساوي 1 » الأخرى « عدد الرسائل أكبر تماماً من 1 »



$\mathbb{P}(E)=\frac{6+5}{25}=\frac{11}{25}$.

3. $\mathbb{P}(A)=\frac{2+5}{25}=\frac{7}{25}$

$\mathbb{P}(B)=\frac{3+4+2+5}{25}=\frac{14}{25}$

تحقق من فهمك

① أي المواقف الآتية هو تجربة احتمالية؟

① الحصول على علامة جيدة في امتحان مادة الرياضيات.

② الحصول على الحذاء الذهبي في أحد دوريات كرة القدم.

③ إلقاء حجر نرد ذي وجهين حمراوين ووجهين زرقاوين ووجهين بيضاوين.

الحل:

① نلاحظ أن الموقف يُعبر عن حدث، فالموقف ليس تجربة احتمالية.

② نلاحظ أن الموقف يُعبر عن حدث، فالموقف ليس تجربة احتمالية.

③ نلاحظ أن الموقف يحوي مجموعة النتائج هي $\{R ;B ;W\}$ حيث يشير الحرف R إلى اللون الأحمر والحرف B إلى اللون الأزرق والحرف W إلى اللون الأبيض، ولا يمكن معرفة النتيجة التي يمكن أن تظهر فالموقف تجربة احتمالية.

② نلقي حجر نرد متجانس أوجهه الستة مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6.

1. انسخ وأكمل:

① يوجد .... إمكانية (إمكانيات) من أصل .... إمكانيات للحصول على الرقم 5.

② يوجد .... إمكانية (إمكانيات) من أصل .... إمكانيات للحصول على رقم فردي.

2. احسب احتمال كلٍ من الحدثين:

① A « الحصول على الرقم 5 »

① B « الحصول على رقم زوجي »

الحل:

1. انسخ وأكمل:

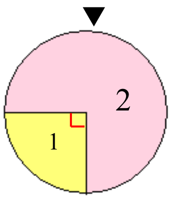
① توجد إمكانية واحدة من أصل ست إمكانيات للحصول على الرقم 5.

② توجد 3 إمكانية (إمكانيات) من أصل 6 إمكانيات للحصول على رقم فردي.

2. ① $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{6}$

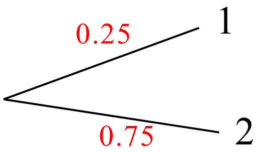
② $\mathbb{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

تدرب



① ندور هذا الدولاب المتجانس. وبعد أن يستقر، نقرأ الرقم المكتوب في القطاع الدائري الذي يشير إليه المعلم. ارسم شجرة الإمكانات لهذه التجربة وزوِّد فروعها بالاحتمالات.

الحل:



نأخذ بالاعتبار أنَّ مساحة الجزء الملون بالزهر تساوي ثلاثة أمثال مساحة الجزء الملون بالأصفر.

$\mathbb{P}(1)=\frac{1}{4}=0.25$ و $\mathbb{P}(2)=\frac{3}{4}=0.75$.

② ارسم شجرة الإمكانات للعبة إلقاء قطعة نقد متجانسة محملاً فروعها باحتمال ظهور الكتابة T و الشعار H.

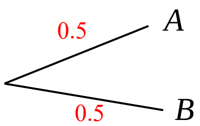
الحل:

$\mathbb{P}(T)=\frac{1}{2}=0.5$ و $\mathbb{P}(H)=\frac{1}{2}=0.5$.

③ تحوي جرة 4 كرات متماثلة، اثنتان حمراوان (R) واثنتان زرقاوان (B). نسحب من الجرة عشوائياً كرةً ونتفقد لونها. ارسم شجرة الإمكانات لهذه اللعبة وزوِّد فروعها بالاحتمالات.

الحل:

نرمز إلى الحدث « ظهور كرة حمراء » بالرمز A وإلى الحدث « ظهور كرة زرقاء » بالرمز B، فيكون: $\mathbb{P}(A)=\frac{2}{4}=0,5$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{2}{4}=0,5$.



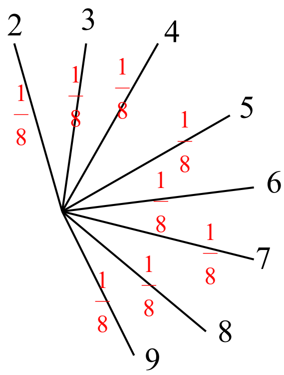
④ في كيس 8 كرات متماثلة كتبت عليها الأرقام 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

نسحب من الكيس عشوائياً واحدة من تلك الكرات.

1. ارسم شجرة الإمكانات ووضع الاحتمالات على فروعها.

2. ما احتمال الحصول على كرة تحمل رقماً فردياً؟

3. ما احتمال الحصول على كرة تحمل رقماً زوجياً؟



الحل:

1. رسم شجرة الإمكانات مرفق.

2. في الكيس أربع كرات فردية، نرمز للحدث « سحب كرة فردية » بالرمز A، فيكون $\mathbb{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

3. في الكيس أربع كرات زوجية، نرمز للحدث « سحب كرة زوجية » بالرمز B، فيكون $\mathbb{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

أو : B هو معاكس A، إذن $\mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

أحداث متنافية وأحداث متعاكسة

نشاط «استعمال أحداث متنافية واحداث متعاكسة»

تحتوي جرة غير شفافة على 15 كرة متماثلة ومرقمة بالأرقام من 1 حتى 15. نسحب كرةً من الجرة ونهتم برقمها.

1. ارسم شجرة الإمكانات محملة بالاحتمالات بصيغة كسور.

2. ليكن A الحدث «الحصول على كرة رقمها 2 » و B الحدث «الحصول على كرة رقمها أكبر تماماً من 3 ».

① أيمكن أن يتحقّق هذان الحدثان في آنٍ معاً؟ (نقول إنَّ الحدثين A و B **متنافيان**)

② احسب احتمال «الحصول على كرة رقمها 2 **أو** رقمها أكبر تماماً من 3».

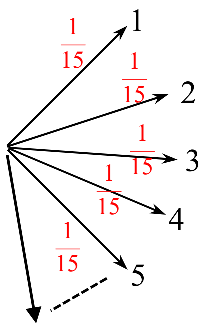
3. ليكن V الحدث « الحصول على كرة رقمها لا يساوي 1». احسب احتمال الحدث V باستعمال كلٍّ من الطريقتين الآتيتين:

☝ جمع الاحتمالات المدونة على فروع شجرة الإمكانات.

✌ باستعمال الحدث **المعاكس** الذي نرمز إليه بالرمز $\overline{V}$ وهو «الحصول على كرة رقمها 1».

الحل:

1. هذه شجرة الاحتمالات وقد حُمِّل كل فرع باحتمال الحدث الموافق.



2. ① لا يمكن للحدثين A و B أن يتحققا في آنٍ معاً.

② نرمز إلى الحدث « الحصول على كرة رقمها 2 **أو** رقمها أكبر تماماً من 3 » بالرمز C، فيكون C الحدث « الحصول على كرة رقمها 2 **أو** رقمها أكبر تماماً من 3 »

ويكون $\mathbb{P}(C)=\frac{1}{15}+\frac{12}{15}=\frac{13}{15}$.

3. ☝ $\mathbb{P}(V)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+........+\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

✌ $\mathbb{P}(V)=1-\mathbb{P}(V')=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

تحقق من فهمك

نلقي حجر نرد متجانساً، أوجهه محملة بالأرقام 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6. ونعرِّف الأحداث الآتية:

A : «ظهور عدد أصغر أو يساوي 2 »

B : «ظهور عدد أكبر تماماً من 4 »

1. الحدثان A و B متنافيان. لماذا؟ احسب احتمال A ثم احتمال B.

2. احسب احتمال الحدث E : « ظهور عدد n يحقق $n \leq 2$ أو $n > 4$ »

الحل:

$A=\{1,2\}$ و $B=\{5,6\}$

1. A و B متنافيان لأنَّهما لا يتحققا معاً، وبالرموز $A \cap B = \phi$.

$\mathbb{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2. $E=\{1,2,5,6\}$، إذن $\mathbb{P}(E)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

تدرب

في اللعبة الواردة في التمرين السابق، نعرّف الحدثين الآتيين:

I : « ظهور عدد فردي »

J : « ظهور عدد زوجي »

1. الحدثان I و J متعاكسان. لماذا؟ احسب احتمال الحدث I.

2. احسب احتمال الحدث J بطريقتين مختلفتين.

الحل:

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $I=\{1,3,5\}$ و $J=\{2,4,6\}$

1. الحدثان I و J متعاكسان لأنَّ $I \cap J = \phi$ و $I \cup J = \Omega$.

$\mathbb{P}(I)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

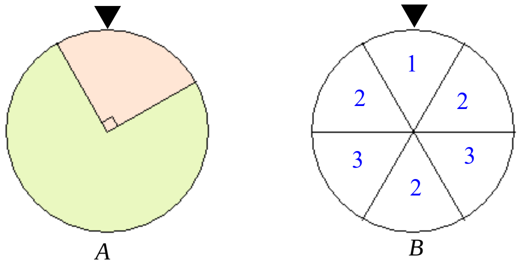
2. ☝ $\mathbb{P}(J)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ أو $\mathbb{P}(J)=1-\mathbb{P}(I)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

6

تجارب عشوائية مركبة

نشاط « استعمال شجرة الإمكانات »

لدينا دولابان أحدهما A ملون والآخر B مرقَّم (تأمل الشكل المرافق)



ندوِّر هذين الدولابين وننتظر حتى يستقرا. سيستقر الدولاب A بحيث نحصل على اللون الأحمر (R) أو على اللون الأخضر (V). وسيستقر الدولاب على الرقم 1 أو على الرقم 2 أو على الرقم 3.

إحدى نتائج هذه التجربة هي على سبيل المثال $(R,1)$ وهي « استقرار الدولاب A على اللون الأحمر واستقرار الدولاب B على الرقم 1 »

1. اكتب لائحة بالنتائج الممكنة.

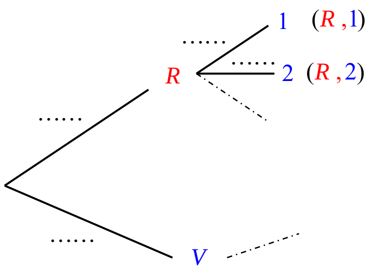
2. انسخ وأكمل شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات.

3. نكرر التجربة 120 مرة.

① ما القيمة المتوقعة لعدد النتائج التي تبدأ بالحرف R؟

② ما القيمة المتوقعة لعدد النتائج التي تنتهي بالرقم 1؟

③ ما التكرار المتوقع للنتيجة $(R,1)$؟



4. نفترض أننا كرّرنا التجربة n مرة.

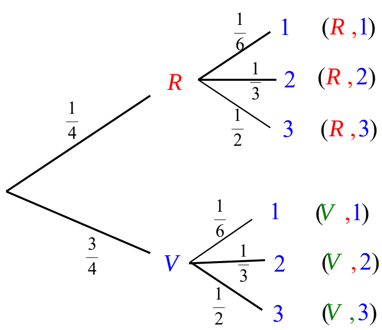
اشرح لماذا تكرار النتيجة $(R,1)$ هو حوالي $\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times n$ مرة.

نقبل بأنَّ احتمال الحصول على النتيجة $(R,1)$ يساوي جداء ضرب الاحتمالين $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{6}$.

الحل:

1. النتائج الممكنة هي: $\{(R,1),(R,2),(R,3),(V,1),(V,2),(V,3)\}$

2. انسخ وأكمل شجرة الإمكانات وحمّل فروعها بالاحتمالات.



3. نكرر التجربة 120 مرة.

① القيمة المتوقعة لعدد النتائج التي تبدأ بالحرف R هي $\frac{1}{4}\times 120=30$

② القيمة المتوقعة لعدد النتائج التي تنتهي بالرقم 1 هي

$\frac{1}{6}\times 120=20$.

③ التكرار المتوقع للنتيجة $(R,1)$ هو بحدود $\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times 120=5$.

4. نفترض أننا كررنا التجربة n مرة.

النتيجة $(R,1)$ تظهر في حالة استقرار الدولاب الملون على اللون الأحمر والدولاب المرقم على الرقم 1 ويتحقق ذلك باحتمال $\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}$ في كل تجربة، وفي حالة n تجربة، يكون التكرار المتوقع $\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times n$ مرة تقريباً

تحقق من فهمك

يحوي كيس ثلاث كرات حمراء وكرتين خضراوين. وتحوي علبة أربع مكعبات زرقاء وثلاثة صفراء. نسحب عشوائياً كرة من الكيس ونسجل لونها، ثم نسحب عشوائياً مكعباً من العلبة ونسجل لونه.

1. ارسم شجرة الإمكانات ورمِّزْ نتائج التجربة.

2. حمِّلْ فروع الشجرة احتمال كل نتيجة.

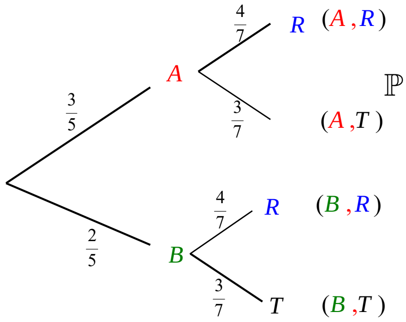
الحل:

1. نرمز للحدث « سحب كرة حمراء » بالرمز A

وللحدث « سحب كرة خضراء » بالرمز B

وللحدث « سحب مكعب أزرق » بالرمز R

وللحدث « سحب مكعب » بالرمز T

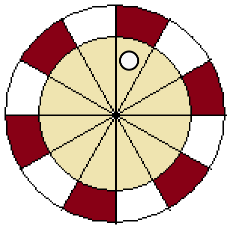


2. $\mathbb{P}(A)=\frac{3}{5}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{2}{5}$ و $\mathbb{P}(R)=\frac{4}{7}$ و $\mathbb{P}(T)=\frac{3}{7}$

إذن $\mathbb{P}(A,R)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$ و $\mathbb{P}(A;T)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{35}$

و $\mathbb{P}(B,R)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{35}$ و $\mathbb{P}(B;T)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$

تدرب



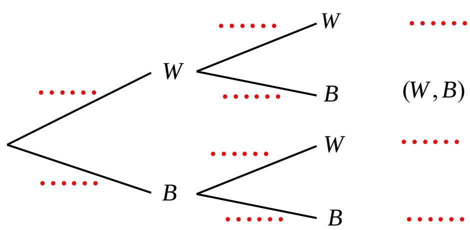
نتأمّل دولاباً دوّاراً قُسّم إلى ست شرائح بيضاء وست شرائح بنية.

وجرّة تحوي ثلاث كرات بيضاء وواحدة بنية.

نسحب عشوائياً كرةً من الجرة ونسجل لونها. ثم نلقي تلك الكرة عشوائياً على الدولاب وننتظر حتى يستقر الدولاب لنسجل لون الشريحة التي استقرت عليها الكرة. على سبيل المثال، يدل الرمز (W,B) على أننا ألقينا كرةً بيضاء فاستقرت على شريحة بنية، بينما يدل الرمز (W,W) على أننا ألقينا كرةً بيضاء فاستقرت على شريحة بيضاء.

1. علام يدل كلٌ من الرمزين (B,W) و (B,B)؟

2. انسخ وأكمل شجرة الإمكانات لهذه التجربة، ثم حمّل كل فرع الاحتمال المناسب.



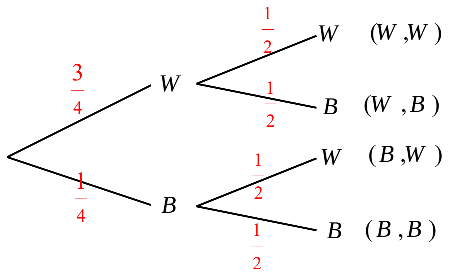
3. احسب احتمال كلٍ من الحدثين:

- E: «تستقر كرة على شريحة من لونها »
- F: «تستقر كرة على شريحة من غير لونها »

الحل:

1. يدل الرمز (B,W) على أننا سحبنا من الكيس كرة بنية وألقيناها على الدولاب فاستقرت على شريحة بيضاء. ويدل الرمز (B,B) على أننا سحبنا من الكيس كرة بنية وألقيناها على الدولاب فاستقرت على شريحة بنية.

2. شجرة الإمكانات لهذه التجربة.



3. ① $E=\{(B,B),(W,W)\}$

$$\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(B,B)+\mathbb{P}(W,W)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

② $F=\{(B,W),(W,B)\}$

$$\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(B,N)+\mathbb{P}(N,B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) حزمة ورق لعب مكون من 32 ورقة موزعة في أربع فئات: قلب ♥، ديناري ♦، سباتي ♣، بستوني ♠ وفي كل فئة 8 أوراق: ملك ، بنت ، شاب، 10 ، 9 ، 8 ، 7 ، 6 .
نسحب عشوائياً ورقةً من الحزمة. احتمال الحصول على ورقة حمراء يساوي

① 0.75 ② 0.5 ③ 0.25

(2) في السؤال (1) احتمال الحصول على قلب يساوي

① 0.75 ② 0.5 ③ 0.25

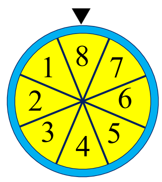
(3) في السؤال (1) احتمال الحصول على ملك يساوي

① 0.0625 ② 0.125 ③ 0.25

(4) في السؤال (1) احتمال الحصول على 7 يساوي

① 0.0625 ② 0.125 ③ 0.25

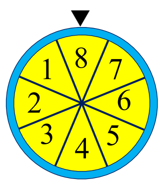
(5) ندوِّر هذا الدولاب ونقرأ الرقم الذي يستقر عنده المعلم. في أيّ الحالات الآتية يكون الحدثان A و B متنافيان ؟



① A: «ظهور عدد n يحقق $n \le 3$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 2$»
② A: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 2$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 5$»
③ A: «ظهور عدد n يحقق $n \le 2$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 4$»

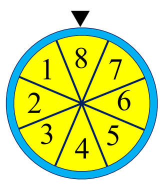
2 أشر إلى الإجابات الصحيحة في كل حالة من الحالات الآتية.

(1) في تجربة الدولاب، في أيّ حالة يكون الحدثان A و B متعاكسين



① A: « ظهور عدد زوجي » و B: « ظهور عدد فردي »
② A: «ظهور عدد n يحقق $n < 4$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n > 5$»
③ A: «ظهور عدد n يحقق $n \le 4$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 5$»

(2) في تجربة الدولاب السابقة، العدد $\frac{1}{2}$ هو احتمال الحدث



① A: «ظهور عدد زوجي»
② B: «ظهور عدد n يحقق $n \le 4$»
③ C: «ظهور عدد n يحقق $n < 4$»

(3) في تجربة رمي قطعتي نقود، العدد $\frac{1}{4}$ هو احتمال النتيجة

① (H,T) ② (H,H) ③ (T,T)

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) يعبَّر عن احتمال حدث بأي عدد.

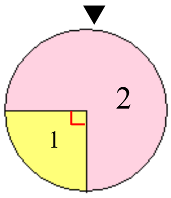
الحل: خطأ، احتمال أي حدث يجب أن يكون محصور بين عددين هما $0 \leq P(\text{A}) \leq 1$

ومجموع احتمالات النتائج الممكنة في أي اختبار عشوائي يجب أن يكون 1

(2) في تجربة عشوائية، مجموع احتمالات نتائج التجربة يساوي 1.

الحل: صح، لأن مجموعة نتائج التجربة هي مجموعة الاحداث البسيطة والتي مجموع احتمالاتها الواحد.

(3) في تجربة عشوائية، احتمالات نتائج التجربة متساوية.



الحل: خطأ، ففي المثال ندور هذا الدولاب المتجانس. وبعد أن يستقر، نقرأ الرقم المكتوب في القطاع الدائري الذي يشير إليه المعلم. ارسم شجرة الإمكانات لهذه التجربة وزوِّد فروعها بالاحتمالات. وهنا نتائج التجربة غير متساوية.

(4) في تجربة عشوائية، احتمالات الأحداث المتوقعة متساوية.

الحل: خطأ، ففي المثال الموجود في (3) حدث أن نحصل على $\{1,2\}$ متوقع واحتماله 1 وكذلك حدث أن نحصل على 2 متوقع ولكن احتماله $\frac{3}{4}$.

(5) أياً كان عدد المرات التي نلقي بها قطعة نقد متجانسة، سيشكل عدد مرات ظهور الكتابة 50%

الحل: خطأ، مثلا عند إلقاء قطعة نقد متجانسة ثلاث مرات يمكن أن يظهر شعارين وكتابة.

(6) إذا ألقينا حجر نرد 60 مرة ولم نحصل على الوجه 6، فهذا يعني أن الحجر ليس متجانساً.

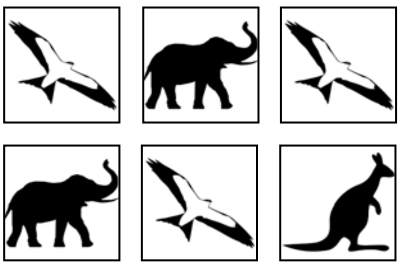
الحل: خطأ، ليس بالضرورة فالتجربة العشوائية لا تحتم حصول حدث ما بعد 60 مرة.

(7) في خزانة عمران ثلاثة قمصان (أحمر وأزرق وأسود) وأربعة ربطات عنق (حمراء وزرقاء وسوداء وخضراء). ارتدى عمران عشوائياً أحد القمصان وإحدى الربطات. احتمال أن يكون قد ارتدى من لون واحد هو $\frac{1}{6}$.

الحل:

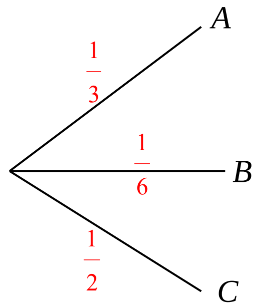
خطأ، بل الاحتمال هو $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

4 في مغلف 6 بطاقات متماثلة رسم عليها ثلاثة أصناف من الحيوانات كما تجد في الشكل المرافق. نسحب من المغلف عشوائياً واحدة من البطاقات.



1. قالت ليلى «في المغلف ثلاثة أصناف من الحيوانات، فحظّي في الحصول على فيل هو 1 من 3 ». وأنت، ما رأيك؟

2. ما احتمال الحصول على حيوان استرالي المنشأ؟



3. ارسم شجرة الإمكانات ووضّع الاحتمالات على فروعها.

4. ما احتمال الحصول على حيوان غير طائر؟

الحل:

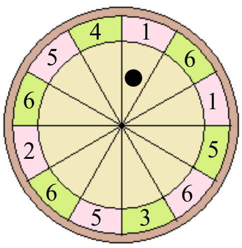
نرمز بالرمز A إلى الحدث : الحصول على صورة فيل

1. $\mathbb{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$، حل ليلى صحيح. ولكن حجة ليلى خطأ فليس الذي حدد ذلك الناتج أن في المغلف ثلاثة أصناف من الحيوانات

2. نرمز بالرمز B إلى الحدث :الحصول على صورة حيوان استرالي المنشأ(الكنغر) $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{6}$

3. رسم شجرة الإمكانات مع الاحتمالات على فروعها.

4. نرمز بالرمز C إلى الحدث :الحصول على صورة حيوان غير طائر $\mathbb{P}(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$



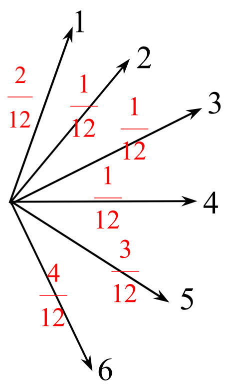
5 نلقي الكرة السوداء عشوائياً على سطح دولاب الروليت لتستقر في أحد القطاعات المرقّمة.

1. ارسم شجرة الإمكانات ووضع الاحتمالات، بصيغة كسور عادية، على فروعها.

2 . إذا أجرينا هذه التجربة 120 مرة، هل سنحصل 40 مرة على الرقم 6؟

3. ما احتمال وقوف الكرة في قطاع ذي رقم زوجي؟

الحل:



1. $\mathbb{P}(1)=\frac{2}{12}$ و $\mathbb{P}(2)=\frac{1}{12}$ و $\mathbb{P}(3)=\frac{1}{12}$ و $\mathbb{P}(4)=\frac{1}{12}$

و $\mathbb{P}(5)=\frac{3}{12}$ و $\mathbb{P}(6)=\frac{4}{12}$.

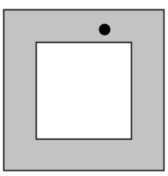
2. نتيجة التجربة لا تحتم ذلك ولكن إذا أجرينا هذه التجربة 120 مرة،

يفترض أن نحصل على $120\times\frac{4}{12}=40$ مرة.

3. نرمز إلى الحدث « وقوف الكرة في قطاع ذي رقم زوجي »بالرمز A،

فيكون $A=\{2,4,6,6,6,6\}$ وبالتالي $\mathbb{P}(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

أو $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(2)+\mathbb{P}(4)+\mathbb{P}(6)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{4}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$



6 $ABCD$ رقعة مربعة الشكل طول ضلعها 5 cm، وعرض المنطقة المظللة منها 1 cm. نرمز إلى مساحة المربع $ABCD$ بالرمز $\mathcal{A}$ وإلى مساحة المنطقة المظللة بالرمز $\mathcal{A}'$. نلقي كرة معدنية قطرها صغير على هذه الرقعة، ونتأمل الحدث E : «تستقر الكرة

في المنطقة المظللة ». احسب $\mathbb{P}(E)$ علماً بأنَّ $\mathbb{P}(E)=\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$.

الحل: $\mathbb{P}(\mathrm{E})=\frac{16}{25}$

7 أجب ذهنياً عن الأسئلة الآتية:

① تجربة عشوائية لها نتيجتان، احسب احتمال إحدى نتيجتيها علماً بأن احتمال الأخرى هو:

- 0.75 ▪ 0.4 ▪ $\frac{5}{8}$ ▪ $18\ \%$

الحل: $1-0.75=0.25$ و $1-0.4=0.6$ و $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ و $1-18\%=82\%$

② تحوي جرة كراتٍ حمراء (R) وكراتٍ خضراء (V) وأخرى بيضاء (B). نعلم أنَّ $\mathbb{P}(R)=\frac{3}{8}$ و $\mathbb{P}(V)=\frac{1}{4}$. احسب $\mathbb{P}(B)$.

الحل: $\mathbb{P}(B)=1-[\mathbb{P}(R)+\mathbb{P}(V)]=1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.

③ احتمال سحب بطاقة حمراء عشوائياً من مغلف هو $\frac{3}{5}$. احسب عدد البطاقات الحمراء في المغلف علماً أنّ مجموع ما في المغلف هو: ▪ 50 بطاقة ▪ 45 بطاقة ▪ 125 بطاقة

الحل: نرمز إلى عدد البطاقات الحمراء في الكيس بالرمز x.

$\frac{3}{5}=\frac{x}{50}$، ومنها $x=\frac{3\times 50}{5}=30$.

$\frac{3}{5}=\frac{x}{45}$، ومنها $x=\frac{3\times 45}{5}=27$.

$\frac{3}{5}=\frac{x}{125}$، ومنها $x=\frac{3\times 125}{5}=\frac{375}{5}=75$.

④ في كل حالة، احسب احتمال الحدث المعاكس للحدث A:

- $\mathbb{P}(A)=\frac{4}{7}$ ▪ $\mathbb{P}(A)=0.25$ ▪ $\mathbb{P}(A)=1$

الحل: نرمز إلى الحدث المعاكس للحدث A بالرمز A'، فيكون:

$\mathbb{P}(A')=1-\mathbb{P}(A)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

$\mathbb{P}(B')=1-\mathbb{P}(B)=1-0.25=0.75$

$\mathbb{P}(A')=1-1=0$

لإحراز تقدم

8 تقييم اختبار

في الجدول المرافق تصحيح اختبارٍ لطارق قوامه 100 سؤال، حيث يدلّ الرمز (T) إلى أنّ الإجابة صحيحة والرمز (F) إلى أنّ الإجابة خطأ:

T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	F	T	T	F
T	T	T	T	F	F	T	T	T	F
T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	T	T	T	F

1. حسب هذا الجدول، أي التأكيدات الآتية هو الأفضل؟

① نصف إجابات طارق خاطئة.

② ثلث إجابات طارق خاطئة.

③ ربع إجابات طارق خاطئة.

④ خُمس إجابات طارق خاطئة.

2. أيمكنك القول إنَّ طارق لديه دوماً خطأ من أصل كل خمسة أسئلة مطروحة؟ اشرح إجابتك.

3. إذا أخذنا عشوائياً إحدى إجابات طارق، ما احتمال أن تكون هذه الإجابة صحيحة؟

الحل:

1. ④ خمس إجابات طارق خاطئة

2. ليس بالضرورة أن يكون ذلك صحيحا.

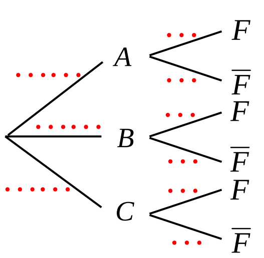
3. $\mathbb{P}(A)=\dfrac{81}{100}$

9 من جدول إلى شجرة

في معمل صناعة أسلاك حديدية، تعمل ثلاث آلات A و B و C. يعتبر السلك صالحاً إذا كان طوله محصوراً بين 24.9 cm و 25.1 cm، وكل سلك مصنوع بطولٍ خارج هذا النطاق هو معيبٌ F فينسّق.

نقرأ في الجدول الآتي مواصفات 100 سلك أنتجتها الآلات الثلاث:

	الآلة A	الآلة B	الآلة C
الأسلاك الصالحة	23	40	21
الأسلاك المعيبة	5	8	3



نسحب عشوائياً واحداً من هذه الأسلاك.

① ما احتمال أن يكون هذا السلك من إنتاج الآلة A؟ من إنتاج الآلة B؟ من إنتاج الآلة C؟

② ما احتمال أن يكون هذا السلك معيباً؟

③ ما احتمال أن يكون هذا السلك صالحاً ومن إنتاج الآلة A ؟

④ نعلم أنَّ السلك المسحوب هو من إنتاج الآلة B، ما احتمال أن يكون معيباً؟

⑤ انسخ وأكمل شجرة الإمكانات أعلاه لهذه التجربة وحمِّل فروعها بالاحتمالات.

الحل:

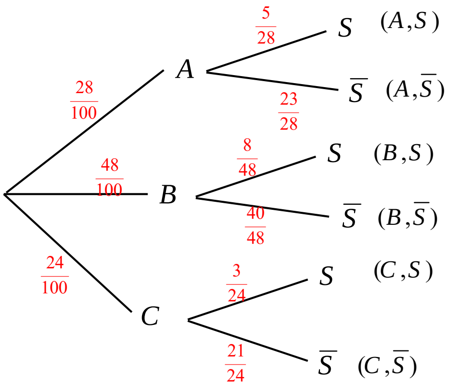
① $\mathbb{P}(A)=\dfrac{28}{100}$ و $\mathbb{P}(B)=\dfrac{48}{100}$ و $\mathbb{P}(C)=\dfrac{24}{100}$.

② عدد الأسلاك المعيبة يساوي $3+8+5=16$. ومنه $\mathbb{P}(S)=\dfrac{16}{100}$.

③ $\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(A,\overline{S})=\dfrac{28}{100}\times\dfrac{23}{28}=\dfrac{23}{100}$

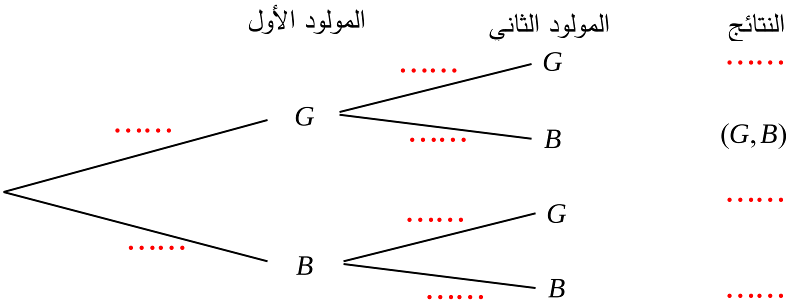
④ إذا كان السلك من انتاج الآلة B، كان عدد الإمكانات 48 وعدد الحالات الموافقة 8، فاحتمال هذا الحدث يساوي $\dfrac{1}{6}=\dfrac{8}{48}$.

⑤ شجرة الإمكانات والاحتمالات.



10 عائلات ذات مولودين

نعتبر جنس المولود بمثابة تجربة ذات نتيجتين، بنت (G) وصبي (B). نعتبر أنَّ احتمال ولادة بنت مساوٍ لاحتمال ولادة صبي. فيما يأتي شجرة الإمكانات لعائلة لديها مولودان :



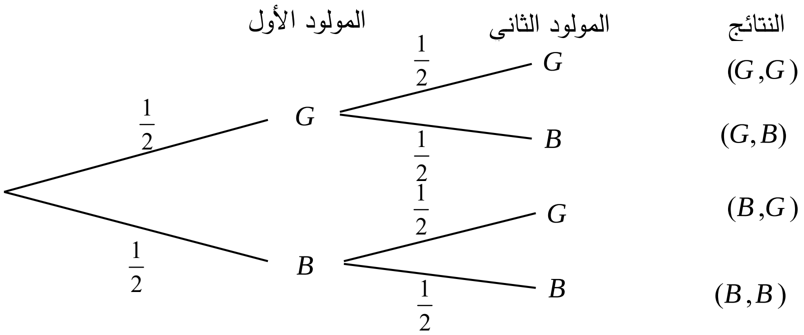
1. انسخ هذه الشجرة ووضِّع على فروعها الاحتمالات المناسبة.

2. احسب احتمال أن يكون مولودا العائلة من جنس واحد.

3. طرقت جرس منزل العائلة ذات المولودين ففتح البابَ صبيٌّ، ما احتمال أن يكون المولود الآخر بنتاً؟

الحل

1. انسخ هذه الشجرة ووضِّع على فروعها الاحتمالات المناسبة.



2. $\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}\big((B,B),(G,G)\big)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3. $\mathbb{P}(M)=\frac{1}{2}$

11 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) وسيط العينة $2, 8, 4, 11, 16, 7, 19, 3, 11$ هو

① 16 ② 9 ③ 8

(2) وسيط العينة $13, 5, 17, 8, 12, 9, 11, 3$ هو

① 10 ② 11 ③ 12

(3) الرُبيع الأول للعيّنة $25, 23, 19, 17, 12, 9, 8$ هو

① 9 ② 12 ③ 15

(4) الرُبيع الثالث للعيّنة $23, 19, 17, 12, 9, 8, 7$ هو

① 15 ② 17 ③ 19

12 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) بين الربيعين الأول والثالث يوجد

① على الأقل 50% من القيم. ② نصف القيم بالضبط. ③ على الأقل نصف القيم.

(2) سلسلة أعداد مرتبة تصاعدياً. إذا حذفنا أصغر أعداد السلسلة وأكبرها فإنَّ تغيراً يطرأ على

① المتوسط الحسابي ② الوسيط ③ المدى

6

13 في التمرينات الآتية، أجب إن كان القول صحيحاً أم خطأً، معلّلاً اجابتك.

(1) وسيط أية عينة إحصائية هي أحد مفرداتها.

الحل: خطأ، فوسيط العينة $17, 13, 9, 8$ هو 11

(2) وسيط أية عينة إحصائية ذات 25 مفردة مرتبة تصاعدياً، هي المفردة التي ترتيبها 13.

الحل: صح، لان $2n+1=25$ ومنه $n=12$ وترتيب المفردة هو $n+1$

(3) الربيع الأول لأية عينة إحصائية هو أصغر تماماً من وسيطها.

الحل: خطأ، فوسيط العينة $8, 8, 8, 8$ يساوي الربيع الأول

(4) إذا كان المتوسط الحسابي لدرجات طلاب أحد الصفوف 11، فهذا يعني أنَّ نصف طلاب هذا الصف درجاتهم أكبر من 11.

الحل: خطأ فمثلا العلامات $10,10,10,14$ لا تحقق أنَّ نصف طلاب هذا الصف درجاتهم أكبر من 11.

(5) بالضبط 50% من مفردات أية عينة إحصائية تقع بين الربيعين الأول والثالث.

الحل: صح لان الربيعات الثلاثة تقسم العيّنة بعد ترتيبها إلى أربعة أجزاء متساوية عدداً.

14 هذه درجات عدد من طلاب الصف التاسع في اختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى 15)

$$6,7,9,9,9,10,12,12,14,15$$

1. احسب مدى هذه الدرجات.
2. احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.
3. ما هي الدرجة الوسيط؟

الحل:

1. المدى هو الفرق بين أكبر مفردات العينة وأصغرها، إذن $E=15-6=9$.
2. $\bar{x}=\dfrac{6+7+3\times9+10+2\times12+13+14+15}{13}=\dfrac{103}{10}=10.3$
3. مفردات العينة مرتبة تصاعدياً من اليسار إلى اليمين، فالوسيط إذن $M=9.5$.

15 سجَّل عدد من الطلاب عدد الساعات التي يقضونها في تحضير وظائفهم المنزلية أسبوعياً، فكانت النتائج كما يأتي : $3,2,4,3,3,5,6,2,10,12,3,1,9,7$.

1. احسب المتوسط الحسابي لهذه الأزمنة.
2. جد وسيط هذه الأزمنة.

3. أكد سهيل « 50 % من الطلاب يقضون أكثر من 5 ساعات في تحضير وظائفهم الأسبوعية ». هل هو محقٌّ؟ لماذا؟

الحل:

نرتب هذه المفردات تصاعدياً: 1، 2 ،2، 3، 3، 3، 3، 4 ، 5 ، 6، 7 ، 9، 10 ، 12

1. $\bar{x} = \frac{12+10+9+7+6+5+4+4\times3+2\times2+1}{14} = \frac{70}{14} = 5$

2. عدد مفردات العينة زوجي، ومفردتا الوسيط هما 3 و 4، فالوسيط $M = \frac{3+4}{2} = 3.5$

3. هو غير محق. فقط خمسة طلاب من أصل 14 طالباً يقضون أكثر من 5 ساعات في تحضير وظائفهم، ونسبتهم هي $\frac{100\times5}{14}\%$ وهذه لا تساوي $50\ \%$.

16 في وزارة المواصلات اطلعنا على جدول المسافات عن العاصمة دمشق، وسجلنا مسافات 21 قرية عن دمشق بالكيلومترات:

195,	165,	195,	29,	230,	195,	158
174,	222,	154,	166,	168,	182,	182
216,	157,	210,	197,	163,	53,	143

1. احسب مدى هذه العينة.

2. احسب المتوسط الحسابي لهذه المسافات لأقرب كيلومتر.

3. احسب وسيط هذه المسافات.

الحل:

1. أكبر مفردات العينة هو 230 وأصغرها 29، فمداها $E = 350 - 29 = 321$.

2. حساب المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{2073}{14}$$

نستعمل آلة حاسبة، فنجد $\bar{x} \approx 169.24$

3. الوسيط $M = 174$

17 هاتِ عيّنة :

① مؤلفة من سبعة أعداد وسيطها -3.

② مؤلفة من ستة أعداد وسيطها -3 وعلى الأقل أحدها يساوي -3.

③ مؤلفة من ستة أعداد وسيطها -3 وأيٌّ منها لا يساوي -3.

الحل

6

① $-6\ ,-5\ ,-4\ ,-3\ ,-2\ ,-1\ ,0$: نلاحظ أن الوسيط هو $M=-3$

② $-5\ ,-4\ ,-3\ ,-3\ ,-2\ ,-1$: نلاحظ أن الوسيط هو $M=\dfrac{-3-3}{2}=-3$

③ $-7\ ,-6\ ,-5\ ,-1\ ,0\ ,1$: نلاحظ أن الوسيط هو $M=\dfrac{-1-5}{2}=-3$

18 في كلٍ من الحالتين الآتيتين، هل يمكن إيجاد عينة قوامها تسعة أعداد، مداها 18، بحيث:

① متوسطها الحسابي يساوي الربيع الأول.

② متوسطها الحسابي يساوي الربيع الثالث.

الحل:

① نجعل حدودها التسعة متساوية مثلاً

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

لنجعل المدى 18 لذلك نطرح من العدد الأول 9 ونضيف للعدد الأخير 9

$$-8,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 10$$

وهي العينة الموجودة.

أو نوزع الحدود كيفما اتفق على أن:

- تحافظ على ترتيبها التصاعدي.
- تحافظ على مجموعها.
- تحافظ على الشرط المعطى.

على سبيل المثال:

$$1-2-5-6-10-10-10-10-10-10-10-10-10-10-11-12-16-18-19$$

② نفس الحل السابق

أو نوزع الحدود كيفما اتفق على أن:

- تحافظ على ترتيبها التصاعدي.
- تحافظ على مجموعها.
- تحافظ على الشرط المعطى.

على سبيل المثال:

$$1-3-5-6-8-9-9-10-10-10-10-10-10-10-10-15-17-18-19$$

1

الوحدة الأولى

النسب المثلثية لزاوية حادة

1. بعض خواص التناسب
2. النسب المثلثية لزاوية حادة
3. علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية
4. نسب زوايا شهيرة

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الاسبوع
1- بعض خواص التناسب	2	أيلول	الثالث
2- النسب المثلثية لزاوية حادة	2	أيلول	الرابع
3- علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية	2	تشرين 1	الأول
4- نسب زوايا شهيرة	2	تشرين 1	الثاني
تمرينات ومسائل	5	تشرين 1	الثالث+ الرابع
اختبار	1	تشرين2	الأول
المجموع	15		7

هذا التوزيع تقريبي وبإمكان المدرس أن يخطط بموجبه حسب مستوى طلابه من صف لأخر ممكن اضافة أو اختصار حصة لهذا التوزيع .

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
التناسب	مساواة بين نسبتين أي من الشكل $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
النسب المثلثية في المثلث القائم	النسب المثلثية في المثلث القائم هي الجيب وجيب التمام والظل
الزوايا الشهيرة في المثلث القائم	الزوايا الشهيرة في المثلث القائم هي $30,45,60$
المثلث الثلاثيني الستيني	هو مثلث قائم فيه الزاويتان $30,\ 60$

1

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
وتر المثلث القائم	خواص التناسب
الضلع المقابلة لزاوية حادة في مثلث قائم	علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية
ضلع مجاورة لزاوية حادة في مثلث قائم	النسب المثلثية لزاوية حادة
النسب الثلاث المتساوية	نسب زوايا شهيرة
إثبات أن مثلث قائم	
حساب مجهول في معادلة أو تناسب	

مقدمة الوحدة:

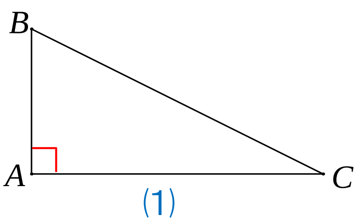
تهتم المقدمة بإبراز ما قدمه العلماء عبر العصور: لاحظ مفردات المقدمة: تقدم معلومة تاريخية وهنا هذه المقدمة تبرز كيفية حساب مسافة الأرض عن الشمس عن طريق استعمال الزوايا.

النسب المثلثية لزاوية حادة

انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها.

.1 وتر المثلث القائم



في الشكل (1)، المثلث BAC قائم في A، وتر هذا المثلث هو

① $[AB]$ ② $[AC]$ ③ $[BC]$

.2 الضلع المقابلة لزاوية حادة في مثلث قائم

في الشكل (1)، الضلع المقابلة للزاوية $\widehat{B}$ هي

① $[AB]$ ② $[AC]$ ③ $[BC]$

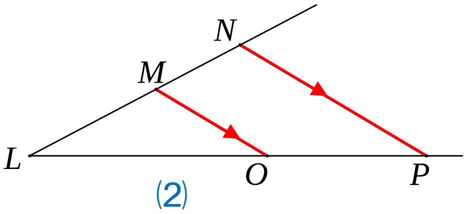
.3 ضلع مجاورة لزاوية حادة في مثلث قائم

في الشكل (1)، الضلع الآتية مجاورة للزاوية $\widehat{B}$:

① $[AB]$ ② $[AC]$ ③ $[BC]$

4. النسب الثلاث المتساوية

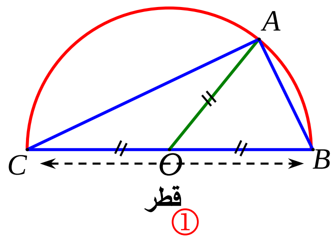
في الشكل (2)، النقاط L و M و N على استقامة واحدة، وكذلك النقاط L و O و P على استقامة واحدة. يمكن أن نكتب:

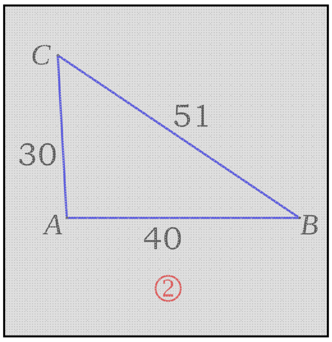


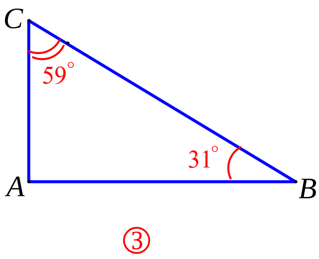
① $\frac{LM}{LN} = \frac{LO}{LP} = \frac{MO}{NP}$ ② $\frac{LM}{MN} = \frac{LO}{OP} = \frac{MO}{NP}$ ③ $\frac{LN}{LM} = \frac{LO}{OP} = \frac{MO}{NP}$

5. مثلث قائم

أيّ المثلثات الآتية غير قائم







6. حساب مجهول

لحساب x من العلاقة $\frac{1}{7} = \frac{x}{5}$، يمكن أن نكتب

① $x = 5 \times 7$ ② $7x = 5$ ، إذن $x = \frac{5}{7}$ ③ $5 = 7x$، إذن $x = 5 - 7$

1

1 بعض خواص التناسب

نشاط «تعرف خواص التناسب»

إذا كانت d و c و b و a أربعة أعداد غير معدومة وكان $a\times d=b\times c$ (1)

1. بتقسيم طرفي المساواة (1) على $b\times d$ نجد: $\frac{b\times c}{b\times d}=\frac{a\times d}{b\times d}$ إذن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

- اكتب التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $a\times c$.
- اكتب التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $a\times b$.
- اكتب التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $c\times d$.

2. بإضافة العدد 1 إلى طرفي التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نجد $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$، وبتوحيد المقامات في طرفي المساواة الأخيرة نجد $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

3. بأسلوب مماثل لما وجدناه في الخطوة 2. نطرح العدد 1 من طرفي التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نحصل على $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

الحل

1. التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) $a\times d=b\times c$ على $a\times c$. هو $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

- التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $a\times b$. هو $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$
- التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $c\times d$. هو $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

2. بإضافة العدد 1 إلى طرفي التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نجد $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$، وبتوحيد المقامات في طرفي المساواة الأخيرة نجد $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

3. بطرح العدد 1 من طرفي التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نجد $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$، وبتوحيد المقامات في طرفي المساواة الأخيرة نجد $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

تحقق من فهمك

① إذا كان $\frac{b}{3}=\frac{a}{2}$ وكان $a+b=15$ فاحسب كلّاً من a و b.

الحل

نبدل بين طرفي التناسب نحصل على تناسب جديد $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

نثبت المقامين ونضيف كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على $\frac{b+a}{a}=\frac{3+2}{2}$ أي $\frac{15}{a}=\frac{5}{2}$

فتكون قيمة a هي $a=\frac{2\times 15}{5}=6$ وقيمة b هي $b=15-6=9$

② جِدْ عددين موجبين مجموعهما 27 ونسبتهما $\frac{1}{2}$.

الحل

نفترض a العدد الموجب الأول و b العدد الموجب الثاني

فيكون $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ و $a+b=27$

نثبت المقامين ونضيف كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على

$\frac{a+b}{b}=\frac{1+2}{2}$ أي $\frac{27}{b}=\frac{3}{2}$ ومنه $b=\frac{27\times 2}{3}=18$

تدربْ

① ABC مثلث فيه $\widehat{C}=110^\circ$، و $\frac{\widehat{A}}{\widehat{B}}=\frac{3}{4}$ احسب قياس كل من الزاويتين A و B.

الحل

مجموع قياس زوايا المثلث 180°

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$
$$\hat{A}+\hat{B}=180^\circ-C^\circ$$
$$=180^\circ-110^\circ$$
$$=70^\circ$$

لدينا التناسب $\frac{\hat{A}}{\hat{B}}=\frac{3}{4}$ نثبت المقامين ونضيف كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على

$\frac{\hat{A}+\hat{B}}{\hat{B}}=\frac{3+4}{4}$ أي $\frac{70}{\hat{B}}=\frac{7}{4}$

ومنه $\hat{B}=\frac{4\times 70}{7}=40$ و $\hat{A}=70-40=30$

1

② جِدْ عددين موجبين فرقهما 28 ونسبتهما $\frac{12}{5}$.

الحل

نفترض العدد الأكبر a والعدد الأصغر b

فيكون فرقهما $a-b=28$

وتكون نسبتهما $\frac{a}{b}=\frac{12}{5}$

نثبت المقامين ونطرح كل مقام من البسط الموافق له نحصل على $\frac{a-b}{b}=\frac{12-5}{5}$

فإن $\frac{28}{b}=\frac{7}{5}$ اذن $b=\frac{28\times 5}{7}=20$ و $a=28+20=48$

③ يزيد عمر سارة على عمر سلمى بمقدار أربع سنوات فإذا كانت نسبة عمريهما $\frac{3}{5}$ فاحسب عمر كل منهما.

الحل

نرمز إلى عمر سلمى a وإلى عمر سارة $a+4$

وتكون النسبة بين عمريهما $\frac{a}{a+4}=\frac{3}{5}$

وبتطبيق خاصة الجداء التقاطعي نحصل على $3(a+4)=5a$ اذن $12=5a-3a$

ومنه $a=6$ وهو عمر سلمى

ويكون عمر سارة $6+4=10$

④ لدى صبا لعبة مكعبات فيها 30 مكعباً ملوناً بالأصفر والأحمر ونسبة المكعبات الصفراء إلى الحمراء $\frac{3}{2}$ احسب عدد كلّ من المكعبات الصفراء والحمراء.

الحل

نفترض عدد المكعبات الحمراء a وعدد المكعبات الصفراء b

فتكون النسبة بين المكعبات الصفراء إلى المكعبات الحمراء $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

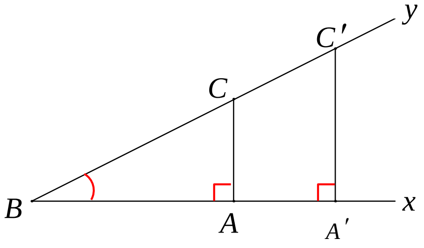
إذا ثبتنا المقامين واضفنا كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على $\frac{b+a}{a}=\frac{3+2}{2}$

أي $\frac{30}{a}=\frac{5}{2}$ اذن $a=\frac{2\times 30}{5}=12$ و $b=30-12=18$

النسب المثلثية لزاوية حادة

نشاط «إيجاد النسب المثلثية في المثلث القائم»

1. مثلثات قائمة مشتركة بزاوية حادة



المثلثان BAC و $BA'C'$ قائمان في A و A' ومشتركان بالزاوية الحادة $\widehat{B}$.

① اشرح لماذا $\underset{①}{\dfrac{BC}{BC'}} = \underset{②}{\dfrac{AC}{A'C'}} = \underset{③}{\dfrac{BA}{BA'}}$.

② علل $AC \times BC' = A'C' \times BC$ ثم استنتج أنَّ $\dfrac{A'C'}{BC'} = \dfrac{AC}{BC}$.

③ علل $BC \times BA' = BC' \times BA$ ثم استنتج أنَّ $\dfrac{A'B}{BC'} = \dfrac{AB}{BC}$.

④ استنتج أيضاً أنَّ $\dfrac{A'C'}{BA'} = \dfrac{AC}{BA}$.

الحل:

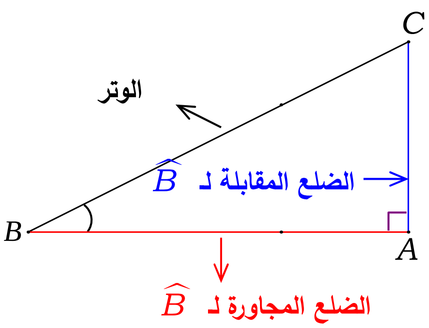
① (AA') و (CC') عمودان على مستقيم واحد (Bx) فهما متوازيان. $[Bx)$ و $[By)$ قاطعان لهما، فحسب تالس $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{BC'}$ (القطع المتقابلة متناسبة)

② بتبديل موضعي الطرفين في التناسب $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{BC'}$، نحصل على $\dfrac{A'C'}{BC'} = \dfrac{AC}{BC}$.

2. ① حسب تالس أيضاً $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BA}{BA'}$ (القطع المتقابلة متناسبة)

② بتبديل موضعي الطرفين في التناسب $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BA}{BA'}$، نحصل على $\dfrac{A'C'}{A'B} = \dfrac{AC}{AB}$.

2. في مثلث قائم



1. $\widehat{B}$ زاوية حادة في مثلث قائم، انسخ وأكمل باستعمال العبارات المدونة على الشكل المرافق:

$\sin\widehat{B} = \dfrac{\cdots}{\cdots}$ و $\cos\widehat{B} = \dfrac{\cdots}{\cdots}$ و $\tan\widehat{B} = \dfrac{\cdots}{\cdots}$

2. بقطع النظر عن قياس الزاوية $\widehat{B}$، اشرح:

① لماذا $\sin\widehat{B}$ و $\tan\widehat{B}$ عددان موجبان تماماً؟

② لماذا $\sin\widehat{B} < 1$ و $\cos\widehat{B} < 1$ ؟

1

الحل:

.1 $\sin \widehat{B} = \dfrac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \widehat{B}}{\text{الو تر}}$

$\tan \widehat{B} = \dfrac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \widehat{B}}{\text{الضلع المجاور للزاوية } \widehat{B}}$

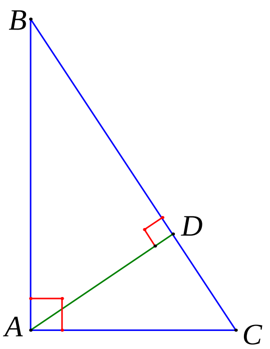
$\cos \widehat{B} = \dfrac{\text{الضلع المجاور للزاوية } \widehat{B}}{\text{الو تر}}$

.2 ① كلٌّ من $\sin \widehat{B}$ و $\tan \widehat{B}$ هو نسبة طولين إذن نسبة عددين موجبين، فكل منهما عدد موجب.

② كلٌّ من $\sin \widehat{B}$ و $\cos \widehat{B}$ كسر بسطه أصغر تماماً من مقامه (لأنَّ وتر المثلث القائم هو أطول أضلاعه) فكل منهما أصغر تماماً من 1.

تحقق من فهمك

في الشكل المرافق، ABC مثلث قائم في A فيه $[AD]$ ارتفاع.



① عبر عن $\sin B$ في المثلث ADB ثم في المثلث BAC.

② إذا كانت $\dfrac{2}{3} = \dfrac{AC}{BC}$ استنتج النسبة $\dfrac{AD}{AB}$.

③ عبر عن $\cos C$ في المثلث ACD ثم في المثلث BAC.

④ إذا كانت $\dfrac{2}{3} = \dfrac{AC}{BC}$ استنتج النسبة $\dfrac{CD}{AC}$.

⑤ عبر عن $\tan B$ في المثلث ADB ثم في المثلث BAC.

الحل:

① في المثلث ADB يكون $\sin A\hat{B}D = \dfrac{AD}{BC}$

في المثلث BAC يكون $\sin A\hat{B}C = \dfrac{AC}{BC}$

② إذا كانت $\dfrac{2}{3} = \dfrac{AC}{BC}$ استنتج النسبة $\dfrac{AD}{AB}$

من الطلب السابق نجد $\sin B = \dfrac{AD}{AB}$ و $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ فإن $\dfrac{2}{3} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{AB}$

③ عبر عن $\cos C$ في المثلث ACD ثم في المثلث BAC

في المثلث ACD يكون $\cos A\hat{C}D = \dfrac{DC}{AC}$

في المثلث BAC يكون $\cos B\hat{C}A = \dfrac{AC}{BC}$

④ إذا كانت $\dfrac{2}{3} = \dfrac{AC}{BC}$ استنتج النسبة $\dfrac{CD}{AC}$

من الطلب السابق نجد $\cos \hat{C} = \dfrac{DC}{AC}$ و $\cos \hat{C} = \dfrac{AC}{BC}$ فإن $\dfrac{DC}{AC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{2}{3}$

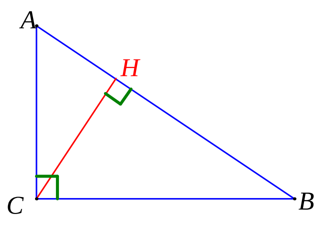
④ عبر $\tan B$ عن في المثلث ADB ثم في المثلث BAC

في المثلث ADB يكون $\tan B = \dfrac{AD}{BD}$

في المثلث BAC يكون $\tan B = \dfrac{AC}{BA}$

تدرب

① تأمل الشكل المرافق، ثم أجب.



① اكتب عبارتي $\sin \widehat{B}$ و $\cos \widehat{B}$ في المثلث ABC ثم في المثلث BHC.

② عبّر عن $\tan \widehat{A}$ بطريقتين.

الحل:

① اكتب عبارتي $\sin \widehat{B}$ و $\cos \widehat{B}$ في المثلث ABC ثم في المثلث BHC

في المثلث ABC يكون $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$ و $\cos \widehat{B} = \dfrac{CB}{AB}$

في المثلث BHC يكون $\sin \widehat{B} = \dfrac{HC}{HB}$ و $\cos \widehat{B} = \dfrac{HB}{CB}$

② عبر عن $\tan \widehat{A}$ بطريقتين.

في المثلث ABC يكون $\tan \widehat{A} = \dfrac{CB}{CA}$ أو في المثلث BHC يكون $\tan \widehat{A} = \dfrac{HC}{AH}$

1

② DEF مثلث قائم في E.

① ما الطولان اللازمان لحساب كلٍ من ❶ $\cos\widehat{D}$ ❷ $\sin\widehat{D}$ ❸ $\tan\widehat{D}$

② اكتب كلاً من هذه النسب.

③ في حالة $ED = 6\text{ cm}$ و $EF = 8\text{ cm}$، احسب طول الوتر.

④ احسب كلاً من ❶ $\cos\widehat{D}$ ❷ $\sin\widehat{D}$

الحل:

① ❶ لحساب $\cos\widehat{D}$ يلزم طول الضلع المجاور للزاوية $\widehat{D}$ أي طول الضلع DFوطول وتر المثلث القائم ED

❷ لحساب $\sin\widehat{D}$ يلزم طول الضلع المقابلة للزاوية $\widehat{D}$ أي طول الضلع EFوطول وتر المثلث القائم DF

❸ لحساب $\tan\widehat{D}$ يلزم طول الضلع المقابلة للزاوية $\widehat{D}$ أي طول الضلع EF وطول الضلع المجاورة للزاوية DE

② $\cos\widehat{D} = \dfrac{ED}{DF}$ و $\sin\widehat{D} = \dfrac{EF}{DF}$ و $\tan\widehat{D} = \dfrac{EF}{ED}$

③ حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم:

إن معرفة طولي أي ضلعين من أضلاع المثلث القائم تكفي لحساب النسب الثلاث لأن مبرهنة فيثاغورث كفيلة بحساب طول الضلع الثالث

$$DF^2 = EF^2 + ED^2$$
$$DF^2 = (8)^2 + (6)^2 = 100$$
$$DF = 10 \quad cm$$

④ حساب كلا من $\cos\widehat{D}$ و $\sin\widehat{D}$

$$\sin\widehat{D} = \frac{EF}{DF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\widehat{D} = \frac{ED}{DF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

③ ABC مثلث قائم في B.

① ما الزاوية التي تجيبها يساوي $\frac{AB}{AC}$؟

② ما الزاوية التي جيبها يساوي $\frac{AB}{AC}$؟

③ ما الزاوية التي ظلها يساوي $\frac{AB}{BC}$؟

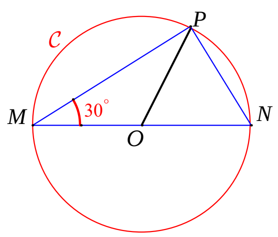
الحل:

① الزاوية التي تجيبا يساوي $\frac{AB}{AC}$ هي $\widehat{A}$

② الزاوية التي جيبها يساوي $\frac{AB}{AC}$ هي $\widehat{C}$

③ الزاوية التي ظلها يساوي $\frac{AB}{BC}$ هي $\widehat{C}$

④ في الشكل المرافق الدائرة C التي طول قطرها $[MN]$ يساوي 12 و P نقطة منها تُحقق $\widehat{PMN} = 30^\circ$.



① ما نوع المثلث MPN ؟ استنتج قياس الزاوية $\widehat{PNM}$.

② ما نوع المثلث OPN؟

③ احسب الطول PN. ثم استنتج $\sin 30^o$.

الحل:

① نوع المثلث MPN قائم في P وقياس الزاوية $P\hat{N}M$ هو:

$$P\hat{N}M = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

② نوع المثلث OPN متساوي الساقين لأن : $OP = ON = r$ وفيه الزاوية $P\hat{N}M = 60^\circ$
فهو متساوي الأضلاع

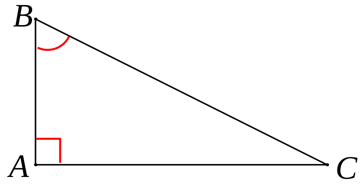
③ طول الضلع PN وهو ضلع مقابل للزاوية 30° في المثلث القائم فإن طوله يساوي نصف طول الوتر

$$PN = \frac{1}{2}MN = 6$$

$$\sin 30^\circ = \frac{PN}{MN} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

③ علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية

نشاط « استنتاج العلاقتين $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = 1$ و $\tan \widehat{B} = \dfrac{\cos \widehat{B}}{\sin \widehat{B}}$ »



ABC مثلث قائم في A.

1. انسخ وأكمل:

① $\cos \widehat{B} = \dfrac{\cdots\cdots}{BC}$ ① $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{\cdots\cdots}$ ① $\tan \widehat{B} = \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

2. استعمل مبرهنة فيثاغورث لكتابة علاقة بين أضلاع المثلث ABC.

3. استنتج أنَّ $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = 1$.

4. احسب $\dfrac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$، واستنتج أنَّ $\tan \widehat{B} = \dfrac{\cos \widehat{B}}{\sin \widehat{B}}$.

الحل:

1. إكمال:

① $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ ② $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ ③ $\tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$

2. $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

3. حسب ما ورد في **1**: $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = \dfrac{AB^2}{BC^2} + \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

وبالاستفادة من **2.** نحصل على $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$

4. لدينا من ① $AB = BC \times \cos \widehat{B}$، ومن ② $AC = BC \times \sin \widehat{B}$، نعوض في ③

فنحصل على

$$\tan \widehat{B} = \frac{BC \times \sin \widehat{B}}{BC \times \cos \widehat{B}} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}.$$

تحقق من فهمك

① مثلث قائم فيه θ قياس زاوية حادة و $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

1. ما المتطابقة التي تفيد في كتابة $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$؟

2. استنتج $\sin^2\theta$ ثم $\sin\theta$.

الحل:

1. المتطابقة التي تفيد في كتابة $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ هي

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

أي $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

2. حساب $\sin^2\theta$.

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

حساب $\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

② ABC مثلث قائم في A و $\sin\widehat{B} = \frac{7}{25}$. احسب $\cos\widehat{B}$ ثم $\tan\widehat{B}$.

الحل:

نعلم أن $\sin^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$ فإن $\cos^2\hat{B} = 1-\sin^2\hat{B}$

فيكون $\cos^2\hat{B} = 1-\frac{49}{625}$ أي $\cos\hat{B} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$

اذن $\tan\hat{B} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$

1

تدربْ

① ABC مثلث قائم في A و $\tan\widehat{B}=\dfrac{3}{4}$. احسب كلاً من $\sin\widehat{B}$ و $\cos\widehat{B}$.

الحل:

$$\frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{B}}{\cos^2\widehat{B}}=\frac{9}{16}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{B}}{\cos^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{B}}=\frac{9}{16+9}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{B}}{1}=\frac{9}{25}$$

$$\sin\widehat{B}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\cos\widehat{B}}=\frac{3}{4}$$

$$\cos\widehat{B}=\frac{4\times\frac{3}{5}}{3}=\frac{4}{5}$$

② θ قياس زاوية حادة تحقّق $\cos\theta=\frac{3}{5}$.

1. استعمل المتطابقة $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ لحساب $\sin\theta$.

2. اكتب $\tan\theta$ بهيئة كسر مختزل.

الحل:

1. حساب $\sin\theta$

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\frac{9}{25}+\sin^2\theta=1$$

$$\sin^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

2. كتابة $\tan\theta$ بهيئة كسر مختزل $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$

③ ليكن θ قياس زاوية حادة ، $\cos\theta = \frac{5}{13}$ و $\tan\theta = \frac{12}{5}$.

1. احسب قيمة جيب الزاوية θ بطريقتين.

2. أتكفي معرفة $\cos\theta = \frac{5}{13}$ فقط لحساب $\sin\theta$ و $\tan\theta$؟ اشرح.

3. أتكفي معرفة $\tan\theta = \frac{12}{5}$ فقط لحساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$؟ اشرح.

الحل:

1. الطريقة الأولى

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{12}{5} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{12}{13}$$

الطريقة الثانية

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$(\frac{5}{13})^2 + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{25}{169} + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = \frac{144}{169}$$

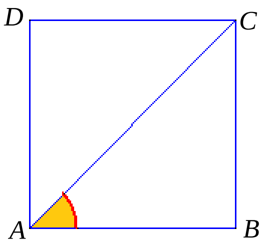
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

2. نعم تكفي لحساب $\sin\theta$ من المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ كما في الفقرة السابقة من التمرين ثم حساب $\tan\theta$ من المتطابقة : $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

3. نعم تكفي وذلك كما في الخطوات المتبعة لحل التمرين الأول

نسب زوايا شهيرة

تحقق من فهمك



$ABCD$ مربع ، طول ضلعه 1.

1. ما قياس الزاوية $\widehat{BAC}$؟

3. احسب طول قطر المربّع AC.

الحل:

1. ما قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ ؟

المثلث ABC متساوي الساقين وفيه زاوية قائمة B

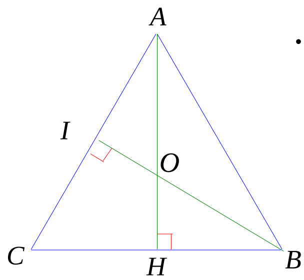
إذن $B\hat{A}C = \frac{A+C}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

2. احسب طول قطر المربع AC

من المثلث القائم ABC نجد

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$AC = \sqrt{2}$$

تدرب



① AH و BI ارتفاعان في مثلث ABC متساوي الأضلاع، طول ضلعه 1.

1. ① ما قياس الزاوية $\widehat{ABH}$؟ احسب طول AH.

② استنتج مساحة المثلّث ABC.

2. ما قياس الزاوية $\widehat{OBH}$؟ احسب طول OH.

الحل:

1. ① قياس الزاوية $\widehat{ABH} = 60^o$ لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع

لحساب طول AH من المثلث القائم AHB وحسب فيثاغورث $AH^2 + HB^2 = AB^2$ فإن

$AH^2 = AB^2 - HB^2$ أي $AH^2 = (1)^2 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ فإن $AH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② استنتج مساحة المثلث ABC .

$$S_{ABC} = \frac{CB \times AH}{2}$$
$$= \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

2. قياس الزاوية $O\hat{B}H$

لدينا BI ارتفاع في مثلث متساوي الأضلاع متعلق في الضلع AC فهو منصف للزاوية $A\hat{B}C$

إذن قياس الزاوية : $O\hat{P}H = O\hat{B}A = 30^{\circ}$

حساب طول OH

إن طول الارتفاع في مثلث متساوي الأضلاع يساوي

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

والارتفاع هو متوسط في المثلث متساوي الأضلاع ونقطة تلاقي الارتفاعات هي نقطة تلاقي المتوسطات

إذن O هي نقطة تلاقي المتوسطات وتقسم كل متوسط إلى قسمين أحدهما ضعف الآخر أي

$$AO = 2OH$$

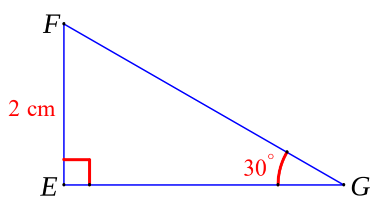
فإن:

$$OH = \frac{1}{3}AH$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

② تأمل الشكل المرافق، ثم:

1. احسب الطول FG بطريقتين.

2. احسب الطول EG.



الحل:

1) احسب الطول FG بطريقتين

الطريقة الأولى: في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية 30^o يساوي نصف طول الوتر, أي:

$EF = \frac{1}{2}FG$ أي $2 = \frac{1}{2}FG$ فإن $4 = FG$

الطريقة الثانية $\widehat{EGF} = 30^o$, $\sin\widehat{EGF} = \frac{EF}{FG}$ أي $\sin 30 = \frac{EF}{FG}$ فإن $\frac{2}{FG} = \frac{1}{2}$ اذن $FG = 4$

2) احسب الطول EG .

من المثلث القائم FEG وحسب فيثاغورث نجد

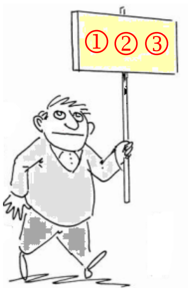
$$EF^2 + EG^2 = FG^2$$
$$4 + EG^2 = 16$$
$$EG^2 = 12$$
$$EG = 2\sqrt{3}$$

1

تمرينات ومسائل

1

في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

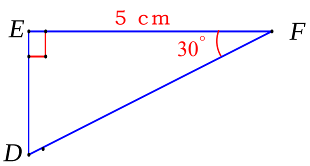


(1) في مثلث SIN قائم في I، جيب الزاوية $\widehat{S}$ يساوي

① $\dfrac{NI}{SI}$ ② $\dfrac{SI}{NS}$ ③ $\dfrac{NI}{NS}$

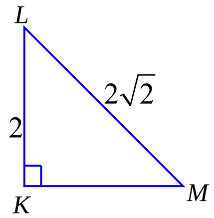
(2) في مثلث TAN قائم في A، ظل الزاوية $\widehat{T}$ يساوي

① $\dfrac{AN}{AT}$ ② $\dfrac{TA}{TN}$ ③ $\dfrac{AN}{TN}$



(3) مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً، طول الضلع DE هو

① $2.5\ \text{cm}$ ② $5\sqrt{3}\ \text{cm}$ ③ $\dfrac{5}{\sqrt{3}}\text{cm}$

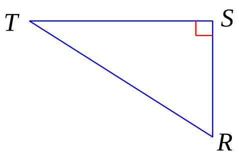


(4) مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً، قياس الزاوية $\widehat{M}$ هو

① 45° ② 40° ③ 60°

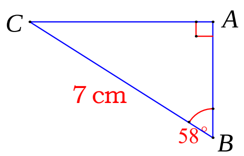
2

في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.



(1) في مثلث RST قائم في S، الطول RT يساوي

① $ST \times \cos \widehat{T}$ ② $\dfrac{ST}{\cos \widehat{T}}$ ③ $\dfrac{ST}{\sin \widehat{R}}$

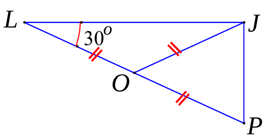


(2) مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً، الطول AC يساوي

① $7 \times \cos 32^\circ$ ② $\dfrac{7}{\sin 58^\circ}$ ③ $7 \times \sin 58^\circ$

(3) LPJ مثلث فيه $\widehat{JLP} = 30^\circ$ و $LP = 12\ \text{cm}$.

O نقطة من $[LP]$ تُحقق $OL = OJ = OP$. إذن



① $\widehat{J} = 90^\circ$ ② $JP = 6\ \text{cm}$ ③ $\widehat{P} = 60^\circ$

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) جيب وتجيب زاوية حادة هما عددان محصوران بين الصفر والواحد.

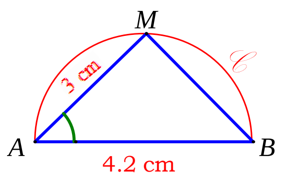
الحل:

موافق، لأن كلٌّ من $\sin\widehat{B}$ و $\tan\widehat{B}$ هو نسبة طولين إذن نسبة عددين موجبين، فكل منهما عدد موجب تماماً. وكلٌّ من $\sin\widehat{B}$ و $\cos\widehat{B}$ كسر بسطه أصغر تماماً من مقامه (لأنَّ وتر المثلث القائم هو أطول أضلاعه) فكل منهما أصغر تماماً من 1.

(2) ظل زاوية حادة هو عدد محصور بين الصفر والواحد.

الحل:

غير موافق، لأن $\tan\widehat{B}$ كسر يمكن أن يكون بسطه أكبر تماماً من مقامه فيوجد مثلث المقابل فيه أكبر من الوتر فيون الناتج أكبر من الواحد أيضاً.

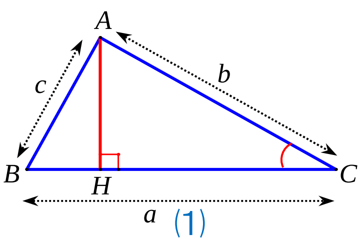


(3) في الشكل المرافق، $[AB]$ قطرٌ في الدائرة $\mathscr{C}$، M نقطة منها، و $AB = 4.2\text{ cm}$ و $AM = 3\text{ cm}$، إذن $\cos\widehat{A} = \frac{5}{7}$.

الحل:

موافق، لأن

$$\cos\widehat{A} = \frac{3}{4.2} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$



(4) في الشكل (1)، نضع $AB = c$ و $BC = a$ و $CA = b$. عندئذٍ $AH = b\sin\widehat{C}$.

الحل:

موافق، لأن $\sin\widehat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{b}$ ومنه $AH = b\sin\widehat{C}$

(5) في الشكل (1) مساحة المثلث ABC هي $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\widehat{C}$.

الحل:

موافق، لأن

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\times BC\times AH$$

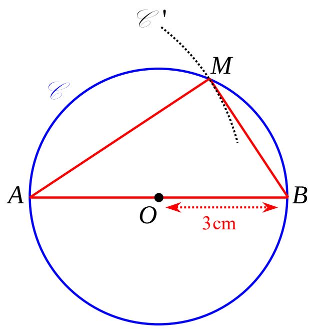
$$= \frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\widehat{C}$$

4 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O ونصف قطرها 3 cm. و $[AB]$ قطر في هذه الدائرة.

1. وضِّعْ نقطةً M على الدائرة $\mathscr{C}$ بحيث يكون $AM = 5\text{ cm}$.

2. ما طبيعة المثلث AMB ؟ اشرح.

الحل:



1. • نرسم قطعة مستقيمة $[AB]$ طولها 6 cm منتصفها O،

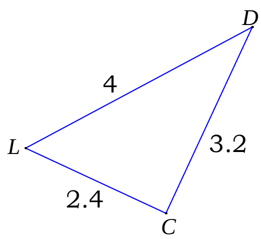
ثم نرسم الدائرة $\mathscr{C}$، وهي التي مركزها O والمارة بالنقطة A.

• نرسم دائرة $\mathscr{C}'$ مركزها A ونصف قطرها 5 cm، فتكون M هي إحدى نقطتي الدائرتين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$.

2. $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية في الدائرة $\mathscr{C}$ تقابل قطرها، فهي قائمة.

فالمثلث AMB قائم الزاوية في M.

5 CDL مثلث، أطوال أضلاعه كما في الشكل المرافق.



1. أثبت أنَّ هذا المثلث قائم الزاوية.

2. احسب كلاً من النسب المثلثية $\cos \hat{L}$ و $\sin \hat{L}$ و $\tan \hat{L}$.

الحل:

1. $CL^2 + CD^2 = 2.4^2 + 3.2^2 = 5,76 + 10.24 = 16 = 4^2 = LD^2$.

فالمثلث CDL قائم في C حسب مبرهنة فيثاغورث.

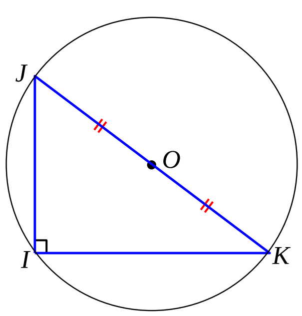
2. $\cos \hat{L} = \dfrac{CL}{LD} = \dfrac{2.4}{4} = 0.6$ و $\sin \hat{L} = \dfrac{CD}{LD} = \dfrac{3.2}{4} = 0.8$ و $\tan \hat{L} = \dfrac{CD}{LC} = \dfrac{3.2}{2.4} = \dfrac{4}{3}$.

6 IJK مثلث قائم في I، فيه $IJ = 9\text{cm}$ و $IK = 12\text{cm}$.

1. احسب طول الوتر $[JK]$.

2. عيّن مركز الدائرة المارة برؤوسه واحسب طول نصف قطرها.

الحل:



1. حسب مبرهنة فيثاغورث:

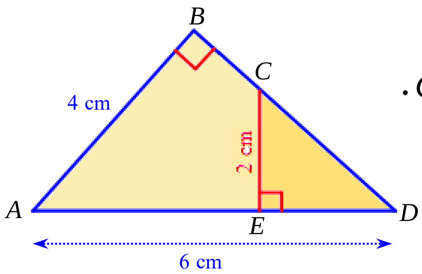
$JK^2 = IJ^2 + IK^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$، إذن:

$JK = \sqrt{225} = 15\text{ cm}$.

2. نعلم أنَّ وتر المثلث القائم هو قطر في الدائرة المارة

برؤوسه، فتكون النقطة O منتصف الوتر $[JK]$ مركزها.

نصف قطر تلك الدائرة هو $OJ = OK = \dfrac{JK}{2} = \dfrac{15}{2} = 7.5\text{ cm}$



7 تأمل الشكل المرافق، ثم أجب.

1. اكتب عبارة $\sin \widehat{D}$ في كلٍ من المثلثين القائمين ABD و CED.

2. استنتج الطول CD.

3. احسب الأطوال ED و AE و BC.

الحل:

1. في المثلث ABD القائم في B: $\sin \widehat{D} = \dfrac{AB}{AD} \cdots (1)$.

وفي المثلث CED القائم في E: $\sin \widehat{D} = \dfrac{CE}{CD} \cdots (2)$.

2. من العلاقتين (1) و (2) نجد أنَّ $\dfrac{CE}{CD} = \dfrac{AB}{AD}$، وبعد التعويض $\dfrac{2}{CD} = \dfrac{4}{6}$، ومنها

$CD = \dfrac{2 \times 6}{4} = 3$.

3. نحسب ED باستعمال مبرهنة فيثاغورث في المثلث CED القائم في E:

$ED^2 = CD^2 - CE^2 = 9 - 4 = 5$، ومنها

$$ED = \sqrt{5} = 2.236\cdots\cdots$$
$$\approx 2.37$$

$AE = AD - ED \approx 6 - 2.37 \approx 36.3$.

نحسب BD باستعمال مبرهنة فيثاغورث في المثلث ABD القائم في B:

$BD^2 = AD^2 - AB^2 = 36 - 16 = 20$، ومنها $BD = \sqrt{20} \approx 4.47$.

$$BC = BD - CD$$
$$\approx 4.47 - 3$$
$$\approx 1.47$$

8 في المثلث TOC القائم في T: $TC = 1.2\,\text{cm}$ و $OC = 1.3\,\text{cm}$.

1. احسب الطول TO.

2. احسب كلاً من النسب $\cos \widehat{O}$ و $\sin \widehat{O}$ و $\tan \widehat{O}$. اكتب النواتج بكسور مختزلة.

الحل:

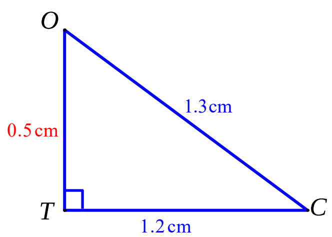
1. حسب مبرهنة فيثاغورث، نكتب $TO^2 = OC^2 - TC^2 = 1.3^2 - 1.2^2 = 1.69 - 1.44 = 0.25$،

إذن $TO = \sqrt{0.25} = 0.5\text{ cm}$.

2. $\cos \widehat{O} = \dfrac{TO}{OC} = \dfrac{0.5}{1.3} = \dfrac{5}{13}$.

$\sin \widehat{O} = \dfrac{TC}{OC} = \dfrac{1.2}{1.3} = \dfrac{12}{13}$.

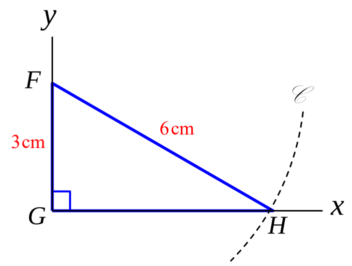
$\tan \widehat{O} = \dfrac{TC}{TO} = \dfrac{1.2}{0.5} = \dfrac{12}{5}$.



لإحراز تقدم

9 ارسم مثلثاً FGH قائم الزاوية في G بحيث يكون $FH = 6\,\text{cm}$ و $FG = 3\,\text{cm}$ دون استعمال الكوس.

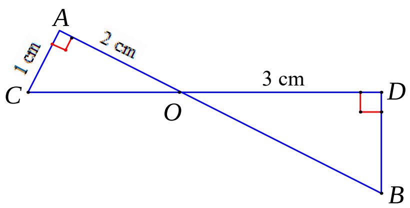
الحل:



- نرسم زاوية قائمة $\widehat{xGy}$.
- نأخذ على $[Ay)$ نقطة F تحقق $GF = 3\text{ cm}$.
- نرسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها F ونصف قطرها 6 cm.

نقطة تقاطع الدائرة $\mathscr{C}$ ونصف المستقيم $[Gx)$ هي الرأس H للمثلث FGH.

10 في الشكل المرافق، القطعتان $[AB]$ و $[CD]$ متقاطعتان في O.



1. اشرح لماذا $\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$.

2. باعتماد $\tan \widehat{AOC}$ و $\tan \widehat{DOB}$، اشرح لماذا $\frac{DB}{3} = \frac{1}{2}$.

3. احسب إذن الطول DB.

الحل:

1. زاويتان متقابلتان بالرأس فهما متساويتان.

2. $\tan \widehat{AOC} = \frac{AC}{AO} = \frac{1}{2}$ و $\tan \widehat{DOB} = \frac{BD}{OD} = \frac{BD}{3}$، ولدينا $\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$

أي $\tan \widehat{AOC} = \tan \widehat{DOB}$ ومنه $\frac{DB}{3} = \frac{1}{2}$.

3. حساب الطول DB:

$$\frac{DB}{3} = \frac{1}{2}$$

$$DB = \frac{3}{2}$$

11 إنشاء هندسي

استعمل فرجاراً وكوساً مدرجاً لرسم الزاوية $\widehat{xOy}$ المحققة للشرط المرافق في الحالات الآتية. (يمكن *الاستغناء عن الكوس باستعمال مسطرة*).

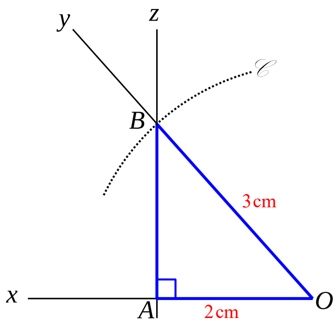
$\cos \widehat{xOy} = \dfrac{2}{3}$ ①

$\sin \widehat{xOy} = \dfrac{5}{6}$ ②

$\tan \widehat{xOy} = \dfrac{2}{5}$ ③

الحل:

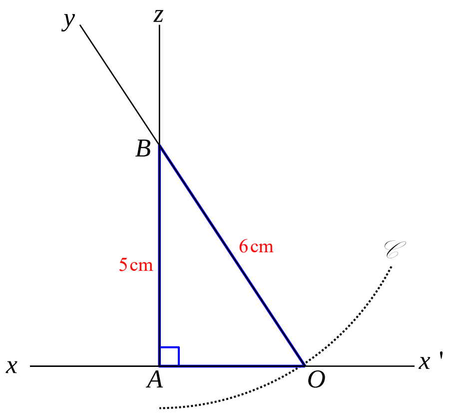
$\cos \widehat{xOy} = \dfrac{2}{3}$ ①



- نرسم نصف مستقيم $[Ox)$ ونأخذ عليه نقطةً A تحقق $OA = 2\text{ cm}$.
- نرسم من A عموداً على $[Ox)$ وليكن (Az).
- نرسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها 3 cm.
- نرمز إلى إحدى نقطتي تقاطع الدائرة $\mathscr{C}$ والمستقيم (Az) بالرمز B.
- نرسم نصف المستقيم $[Oy)$ ماراً بالنقطة B.

$\cos \widehat{xOy} = \cos \widehat{AOB} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{2}{3}$.

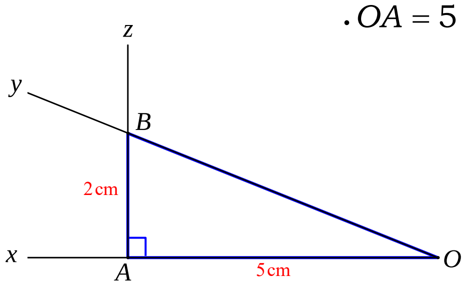
$\sin \widehat{xOy} = \dfrac{5}{6}$ ②



- نرسم مستقيماً $(x'x)$ ونأخذ عليه نقطةً A.
- نرسم من A عموداً على $(x'x)$ وليكن (Az).
- نأخذ على (Az) نقطة B تحقق $AB = 5\text{ cm}$.
- نرسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها B ونصف قطرها 6 cm.
- نرمز إلى إحدى نقطتي الدائرة $\mathscr{C}$ والمستقيم $(x'x)$ بالرمز O.
- نرسم نصف المستقيم $[Oy)$ ماراً بالنقطة B.

$\sin \widehat{xOy} = \sin \widehat{AOB} = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{5}{6}$.

③ $\tan \widehat{xOy} = \dfrac{2}{5}$



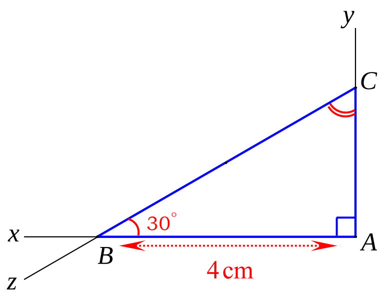
- نرسم نصف مستقيم $[Ox)$ ونأخذ عليه نقطةً A تحقق $OA = 5\text{ cm}$.
- نرسم من A عموداً على $[Ox)$ وليكن (Az) .
- نأخذ على (Az) نقطة B تحقق $AB = 2\text{ cm}$.
- نرسم نصف المستقيم $[Oy)$ ماراً بالنقطة B .

$\tan \widehat{xOy} = \tan \widehat{AOB} = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{2}{5}$.

12 إنشاء هندسي

باستعمال كوس مدرَّج ومنقلة ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A بحيث يكون $\widehat{ABC} = 30^\circ$ و $AB = 4\text{ cm}$.

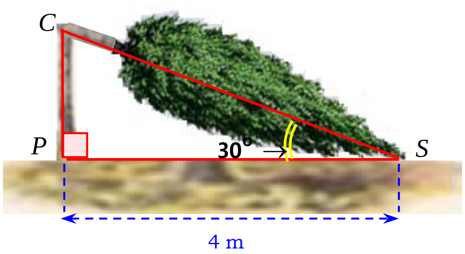
الحل:



- نرسم زاوية قائمة $\widehat{xAy}$.
- نأخذ على $[Ax)$ النقطة B التي تحقق $AB = 4\text{cm}$.
- نرسم زاوية $\widehat{ABz}$ قياسها 30° .

نقطة تقاطع $[Ax)$ و $[Bz)$ هي الرأس C .

13 حساب ارتفاع شجرة



الشكل المرافق تصوير لشجرة انكسرت بفعل عاصفة. تأمل المعطيات المدونة على الشكل، ثم احسب ارتفاع الشجرة عن الأرض قبل العاصفة.

الحل:

نرمز إلى ارتفاع الشجرة قبل العاصفة بالرمز h، فيكون $h = PC + CS \cdots(1)$

من المثلث PCS القائم في P:

- $\tan\widehat{P} = \frac{PC}{PS}$، إذن $\tan 45^\circ = \frac{PC}{4.5}$، ومنها

$PC = 4.5 \times \sin 45^\circ = 3.18198\cdots \approx 3.182\ \text{m}$.

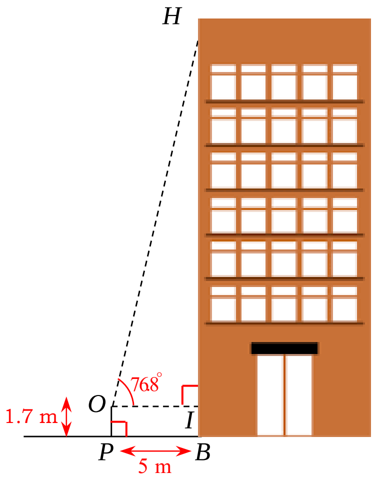
- $\sin\widehat{P} = \frac{PC}{CS}$، إذن $\sin 45^\circ = \frac{3.182}{CS}$، ومنها $CS = \frac{3.182}{\sin 45^\circ} \approx 4.501$.

نضع $PC \approx 3{,}182\ \text{m}$ و $CS \approx 4{,}501$ في العلاقة (1)، فنحصل على

$$h \approx 3.182 + 4.501$$
$$\approx 7.683\ \text{m}$$

وهو ارتفاع الشجرة قبل العاصفة.

14 قياس ارتفاع واجهة مبنىً



لقياس الارتفاع HB لواجهة مبنىً، قام مهندسٌ بالآتي:

- اتخذ نقطة P في مستوى قاعدة المبنى على مسافة $5\ \text{m}$ عن النقطة B ($BP = 5\ \text{m}$).
- وضع جهاز رصده في النقطة O على ارتفاع $1.7\ \text{m}$ عن قاعدة المبنى ($OP = 1.7\ \text{m}$)، فوجد منها $\widehat{IOH} = 76.8^\circ$.

احسب قيمة تقريبية للارتفاع هذا المبنى.

(علماً أن $\tan 76.8^o \approx 4.26$).

الحل:

ارتفاع المبنى هو $BH = BI + IH = 1.7 + IH \cdots (1)$.

من المثلث OIH القائم في I:

$\tan\widehat{IOH} = \frac{IH}{OI}$ إذن $\tan 76.8^\circ = \frac{IH}{5}$، ومنها $IH = 5 \times \tan 76.8^\circ$.

نستعمل آلة حاسبة، فنجد $IH = 5 \times \tan 76.8^\circ = 5 \times 4.263\cdots \approx 21\ \text{m}$.

نضع $IH \approx 21\ \text{m}$ في العلاقة (1)، فنجد

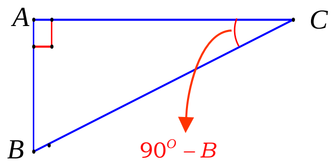
$$BH \approx 1.7 + 21$$
$$\approx 22.7\ \text{m}$$
$$\approx 23\ \text{m}$$

وهو ارتفاع البناء.

1

15 متممة زاوية

ABC مثلثٌ قائمٌ في A.



1. اكتب عبارتي $\cos\widehat{B}$ و $\sin\widehat{C}$.

2. اشرح، إذن، لماذا $\cos\widehat{B} = \sin(90^\circ - \widehat{B})$.

3. أثبت بشرحٍ مماثل أنَّ $\sin\widehat{B} = \cos(90^\circ - \widehat{B})$.

الحل:

1. $\cos\widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} \cdots (1)$ و $\sin\widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} \cdots (2)$.

2. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ و $\widehat{A} = 90^\circ$، إذن $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \cdots (3)$

من العلاقة (3)، $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}$، إذن $\sin(90^\circ - \widehat{B}) = \sin\widehat{C} = \dfrac{AB}{BC}$.

وبالاستفادة من العلاقة (1) نحصل على $\sin(90^\circ - \widehat{B}) = \cos\widehat{B}$.

3. وجدنا أنَّ $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}$، إذن $\cos(90^\circ - \widehat{B}) = \cos\widehat{C} = \dfrac{AC}{BC}$.

وبالاستفادة من العلاقة (2) نحصل على $\cos(90^\circ - \widehat{B}) = \sin\widehat{B}$.

16

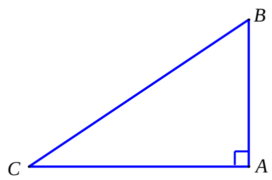
في كلٍ من الحالات الآتية، ABC مثلثٌ قائمٌ في A. احسب:

1. الطول AB في حالة $BC = 7\text{ cm}$ و $\sin\widehat{C} = 0.4$.

2. الطول AC في حالة $AB = 8\text{ cm}$ و $\tan\widehat{B} = 0.5$.

3. الطول BC في حالة $AB = 3.2\text{ cm}$ و $\cos\widehat{B} = 0.4$.

الحل:



1. $AB = BC \times \sin\widehat{C} = 7 \times 0.4 = 2.8\text{ cm}$.

2. $AC = AB \times \tan\widehat{B} = 8 \times 0.5 = 4\text{ cm}$.

3. $BC = \dfrac{AB}{\cos\widehat{B}} = \dfrac{3.2}{0.4} = 8\text{ cm}$.

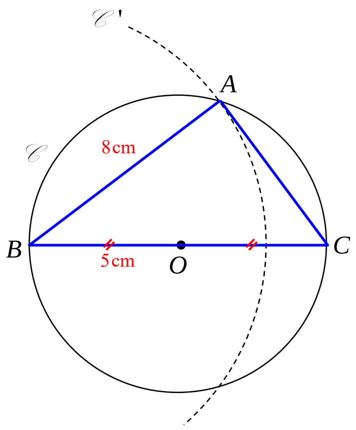
17 $\mathscr{C}$ دائرة أحد أقطارها $[BC]$ طوله 12 cm.

1. ارسم هذه الدائرة وضِع عليها نقطةً A تحقق $BA = 6\sqrt{3}\text{ cm}$.

2. ما طبيعة المثلث ABC ؟ برّر إجابتك.

3. احسب قياس الزاوية $\widehat{ABC}$.

الحل:



1. • نرسم القطعة $[BC]$ ولتكن O منتصفها، ثم نرسم الدائرة $\mathscr{C}$

(مركزها O وتمر بالنقطة B)

• نرسم دائرة $\mathscr{C}'$ مركزها B ونصف قطرها 8 cm.

إحدى نقطتي الدائرتين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ هي الرأس A في المثلث ABC .

2. المثلث ABC مرسوم في دائرة قطرها $[BC]$، فهو قائم في A .

3. $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{8}{10} = 0.8$.

باستعمال آلة حاسبة نجد

$\widehat{ABC} = 36.869\cdots \approx 37^\circ$.

1

تمرينات ومسائل إضافية

(1) **1.** ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في B، بحيث يكون $AB = 5\text{ cm}$ و $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

2. احسب AC.

3. ارسم محور الضلع $[AC]$؛ فيقطع $[AC]$ في I ويقطع $[BC]$ في J.

4. احسب قياس $\widehat{IJB}$.

مساعدة:

2. حلِّل جيداً المعلومات المتعلقة بالمثلث ABC وتلك التي تبحث عنها.

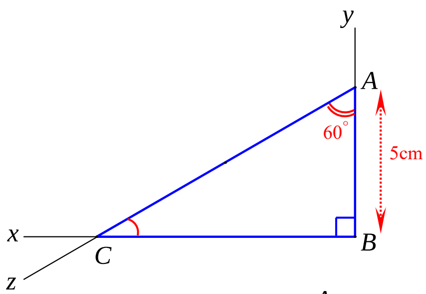
4. احسب بدايةً قياس $\widehat{IJC}$.

الحل:

1. • نرسم زاوية قائمة $\widehat{xBy}$ ونأخذ على $[By)$ النقطة A التي تحقق $BA = 5\text{ cm}$.

• نرسم زاوية $\widehat{BAz}$ قياسها 60°.

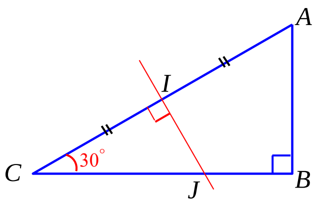
نقطة تقاطع $[Bx)$ و $[Az)$ هي الرأس C.



2. $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$، إذن $\cos 60^\circ = \dfrac{5}{AC}$،

ومنها $AC = \dfrac{5}{\cos 60^\circ} = \dfrac{5}{0.5} = 10\text{ cm}$.

3. رسم المحور.



4. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$، إذن $60^\circ + 90^\circ + \widehat{C} = 180^\circ$،

ومنها $\widehat{C} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

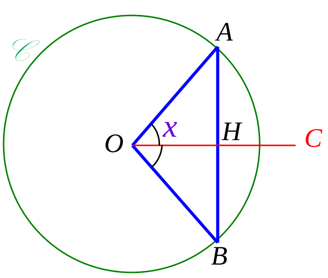
مجموع زوايا المثلث CIJ يساوي 180° و $\widehat{C} + \widehat{I} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$، إذن $\widehat{IJC} = 60^\circ$.

نستنتج أنَّ $\widehat{IJB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

(2) **جيب ونصف وتر**

$\mathscr{C}$ دائرة مركزها O ونصف قطرها 1.

A و B نقطتان من $\mathscr{C}$. نصف المستقيم $[OC)$ منصف للزاوية $\widehat{AOB}$ يقطع الوتر $[AB]$ في H. $\widehat{AOC} = x^\circ$.

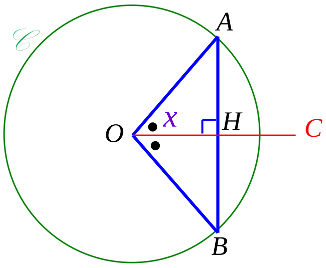


1. اشرح لماذا H هي منتصف $[AB]$.

2. اكتب الطول AB بدلالة x.

الحل:

1. $OA = OB$ (أنصاف أقطار الدائرة) فالمثلث OAB متساوي الساقين في A. ومنصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين هو محور قاعدته، إذن (OC) هو محور الوتر $[AB]$، وبالتالي H هي منتصف $[AB]$.



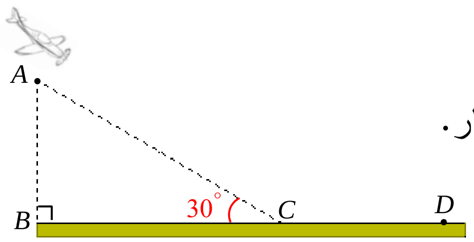
2. في المثلث OHA القائم في H، $\sin \widehat{HOA} = \dfrac{HA}{OA}$.

ولدينا $\widehat{HOA} = x$ و $OA = 1$، إذن $\sin x = \dfrac{HA}{1}$،

ومنها $HA = \sin x$.

ثم إنَّ $HA = \dfrac{1}{2}AB$، $\dfrac{1}{2}AB = \sin x$، ومنها $AB = 2\sin x$.

(3) **اربط الحزام**



تقترب طائرة سياحية من المطار، وفي هبوطها ستسلك المسار المائل من A (لحظة بدء الهبوط) إلى C على أرض المطار.

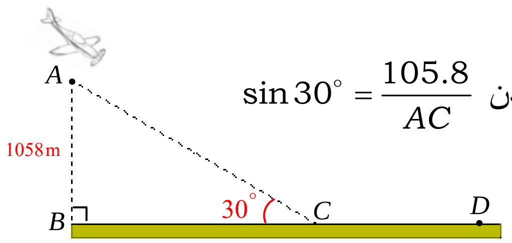
- ارتفاع الطائرة وهي على وشك الهبوط $AB = 1\,058\ \text{m}$.
- زاوية ميل المسار (AC) على الأفق $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

1. أثبت أنَّ المسافة المتبقية للطائرة بدءاً من الموضع A إلى الموضع C هي $AC = 2\,116\ \text{m}$.

2. نعلم أنَّ الطائرة ستقطع المسافة AC بسرعة ثابتة v تساوي $92\ \text{m/s}$، احسب الزمن الذي ستستغرقه لقطع هذه المسافة.

3. جد بالأمتار المسافة CD اللازمة للطائرة حتى وقوفها، علماً بأن هذه المسافة تُعطى بالعلاقة $CD = \dfrac{2v^2+6\,600}{25}$ حيث v هي سرعة الطائرة بالمتر في الثانية لحظة تماسها أرض المطار في C.

الحل:



1. في المثلث ABC القائم في B: $\sin \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC}$ إذن $\sin 30^\circ = \dfrac{105.8}{AC}$

ولكن $\sin 30^\circ = 0.5$، إذن $0.5^\circ = \dfrac{1058}{AC}$،

ومنها $2116\ \text{m} = \dfrac{1058 \times 2}{0.5 \times 2} = \dfrac{1058}{0.5} = AC$.

2. نرمز إلى الزمن المستغرق لقطع هذه المسافة بالرمز t، فيكون $23 = \dfrac{2116}{92} = \dfrac{AC}{v} = t$.

فهذا الزمن يساوي 23 ثانية.

3. نضع $v = 92$ في العلاقة المعطاة، فنحصل على $CD = \dfrac{2\times 92^2+6\,600}{25}$.

وباستعمال آلة حاسبة، نقرأ على الشاشة 941.12 . إذن $CD = 941.12\ \text{m}$.

2

الوحدة الثانية

مبرهنة النسب الثلاث

1. مبرهنة النسب الثلاث
2. مبرهنة النسب الثلاث العكسية
3. التشابه

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الاسبوع
1- مبرهنة النسب الثلاثة	2	تشرين2	الأول
2- مبرهنة النسب الثلاثة العكسية	2	تشرين2	الثاني
3- التشابه	3	تشرين2	الثالث + الرابع
تمرينات ومسائل	5	كانون 1	الأول+ الثاني
اختبار	1	كانون 1	الثاني
المجموع	12		6

هذا التوزيع تقريبي وبإمكان المدرس أن يخطط بموجبه حسب مستوى طلابه من صف لأخر ممكن اضافة أو اختصار حصة لهذا التوزيع .

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح
مثلثان متشابهان	إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في مثلثين، قلنا إنَّ المثلثين **متشابهان**
معامل التصغير	هو قسمة طول ضلع من الشكل الصغير على مقابله من المثلث الكبير
معامل التكبير	هو قسمة طول ضلع من الشكل الكبير على مقابله من المثلث الصغير

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

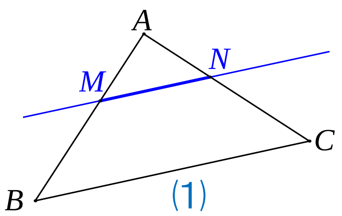
المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
التقاطع والتوازي للمستقيمات	**مبرهنة النسب الثلاث**
استعمال خواص التناسب	**مبرهنة النسب الثلاث العكسية**
تساوي نسبتين	**التشابه**
استعمال مساواة الضرب التقاطعي	**معامل التكبير والتصغير**
	استعمال معامل التكبير والتصغير في حساب الاطوال والمساحات والحجوم

مبرهنة النسب الثلاث

انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. تحليل شكل



(1)

في الشكل (1)، ABC مثلث، و M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AC]$، والمستقيمان (MN) و (BC) متوازيان.

الجدول التناسبي هو

①

AM	AN	MN
AC	AB	BC

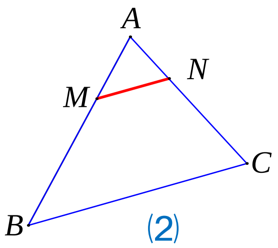
②

AM	AN	MN
AB	AC	BC

③

AM	AN	MN
MB	NC	BC

2. استعمال التناسب



(2)

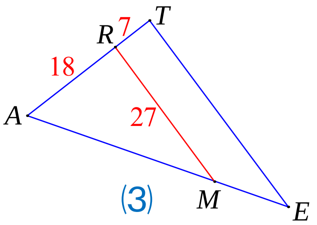
في الشكل (2):

$AM = 2\text{ cm}$ و $AN = 1.6\text{cm}$ و $AB = 6\text{ cm}$ و $(MN) \parallel (BC)$.

الطول AC يساوي

① 5.6 cm ② 4.6 cm ③ 4.8 cm

3. تساوي نسبتين



(3)

في الشكل (3) : $(RM) \parallel (TE)$ و $AR = 18$ و $RT = 7$ و $RM = 27$

إذن :

① $\frac{18}{25} = \frac{27}{TE}$ ② $\frac{18}{7} = \frac{27}{TE}$ ③ $\frac{18}{25} = \frac{TE}{27}$

4. استعمال مساواة الضرب التقاطعي

من المساواة $\frac{5}{AB} = \frac{2}{3}$، يمكننا أن نستنتج

① $2 \times 5 = 3 \times AB$ و $AB = \frac{2 \times 5}{3}$

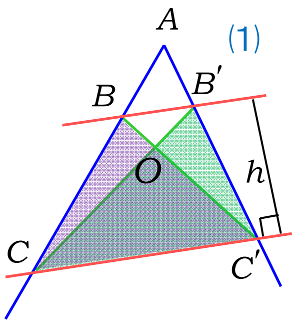
② $2 \times AB = 3 \times 5$ و $AB = \frac{3 \times 5}{2}$

③ $2 \times AB = 3 \times 5$ و $AB = 3 \times 5 - 2$

❶ مبرهنة النسب الثلاث

نشاط «استعمال المساحات في إثبات مبرهنة النسب الثلاث »

ⓐ في الشكل الآتي: $(BB') \parallel (CC')$ علل تساوي مساحتي المثلثين $BCC', B'CC'$.



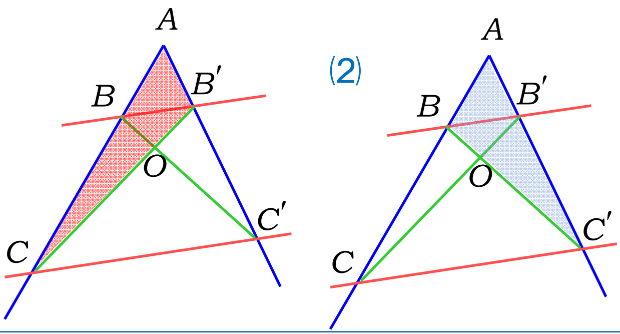
$S(ABC)$ يدل على مساحة المثلث ABC.

ⓑ من ⓐ نجد

$$S(BCC') = S(B'CC')$$

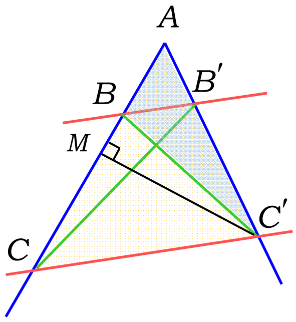
$$S(ACC') - S(BCC') = S(ACC') - S(B'CC')$$

$$S(ABC') = S(AB'C)$$



ⓒ في الشكل الآتي للمثلثين ABC' و ACC' الارتفاع $C'M$ نفسه. تعلم أن مساحة المثلث نصف جداء القاعدة بالارتفاع أثبت أن

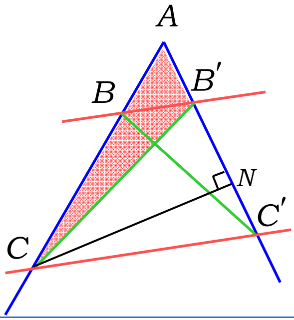
$$\frac{S(ABC')}{S(AC'C)} = \frac{\frac{1}{2}AB \times h}{\frac{1}{2}AC \times h} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$



ⓓ في الشكل الآتي لاحظ أن للمثلثين $AB'C$ و ACC' الارتفاع CN نفسه، أثبت أنّ

$$\frac{S(ABC')}{S(AC'C)} = \frac{S(AB'C)}{S(AC'C)} = \frac{\frac{1}{2}AB' \times h'}{\frac{1}{2}AC' \times h'} = \frac{AB'}{AC'} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج ❶ $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$.



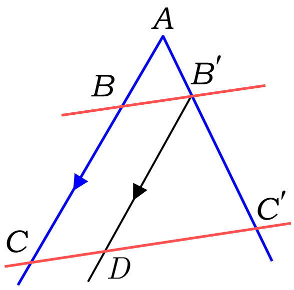
ⓔ من الخطوة ⓓ وجدنا $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$

ومنه لدينا $\frac{AC' - AB'}{AC'} = \frac{AC - AB}{AC}$

أي ❷ $\frac{B'C'}{AC'} = \frac{BC}{AC}$

ⓕ نرسم من النقطة B' المستقيم الموازي للمستقيم (AB) ولتكن D نقطة تقاطعه مع $(C'C)$.

بالاعتماد على النتيجة ❷ نجد ❸ $\frac{A'B'}{AC'} = \frac{CD}{CC'}$.

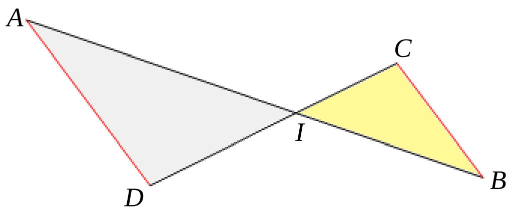


من ❶ و ❸ نستنتج أنّ $\dfrac{CD}{CC'}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB'}{AC'}$. لاحظ أنّ $CD=BB'$

وبالتالي ❹ $\dfrac{BB'}{CC'}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB'}{AC'}$. تسمى النتيجة ❹ التي توصلنا إليها

مبرهنة النسب الثلاث أو **مبرهنة تالس**.

تحقق من فهمك



المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان في I. والمستقيمان (AD) و (CB) متوازيان. استوحِ من النص ومن الشكل جدول تناسب ثم اكتب ثلاث نسب متساوية.

الحل

نرتب الحروف وفق

I	B	C
I	A	D

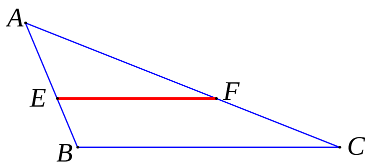
مع مراعاة أنّ النقاط التي تنتمي إلى مستقيم واحد تقع في عمود واحد.

نضع جدول التناسب

IB	IC	CB
IA	ID	AD

إذن النسب المتساوية : $\dfrac{IC}{ID}=\dfrac{IB}{IA}=\dfrac{CB}{DA}$

تدرب

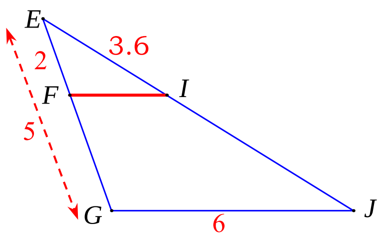


① ABC مثلث، E نقطة من $[AB]$ و F نقطة من $[AC]$.

إذا علمت أن $(BC)\parallel(EF)$، انسخ وأكمل: $\dfrac{AE}{\cdots}=\dfrac{\cdots}{AC}=\dfrac{\cdots}{\cdots}$

الحل

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$



② المستقيمان (FI) و (GJ) متوازيان.

1. ما المثلثان اللذان أطوال أضلاعهما في حالة تناسب؟

2. احسب كلاً من الطولين EJ و FI.

الحل

1. المثلثان اللذان أطوال أضلاعهما في حالة تناسب هما EFI و EGJ.

2. حسب مبرهنة النسب الثلاث: $\dfrac{FI}{GJ}=\dfrac{EI}{EJ}=\dfrac{EF}{EG}$، إذن $\dfrac{FI}{6}=\dfrac{3,6}{EJ}=\dfrac{2}{5}$.

من التناسب $\dfrac{3.6}{EJ}=\dfrac{2}{5}$، نحصل على $EJ=\dfrac{5\times 3.6}{2}=8$.

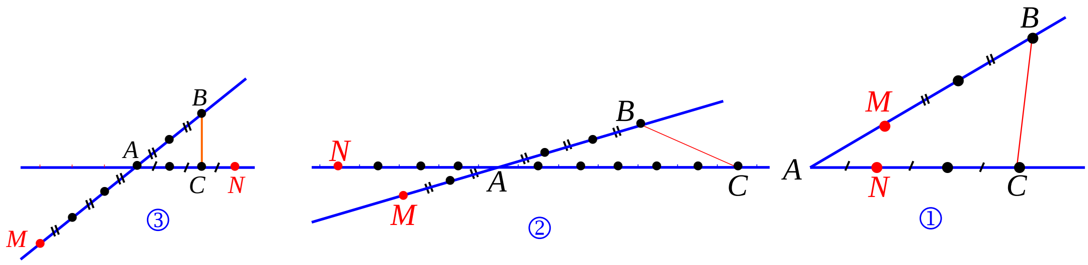
من التناسب $\dfrac{FI}{6}=\dfrac{2}{5}$، نحصل على $FI=\dfrac{2\times 6}{5}=2.4$.

2 عكس مبرهنة النسب الثلاث

نشاط « إثبات عكس مبرهنة النسب الثلاث »

مناقشة M هي نقطة من المستقيم (AB) و N هي نقطة من المستقيم (AC). أكدت وفاء قولها: «إذا كانت المساواة $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ محققة، كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيين»

1. أبدِ وجهة نظرك حول اقتراح وفاء مستعيناً بالأشكال الثلاثة الآتية :



2. ما الشرط الذي تقترح إضافته على اقتراح وفاء ليصبح صحيحاً؟

3. لنبحث عن الشرط الذي عليك اقتراحه

في الشكل ①:

- ارسم من M المستقيم الموازي للمستقيم (BC) فيقطع (AC) في نقطة ولتكن N'.
- استعمل مبرهنة النسب الثلاث على المتوازيين (BC) و (MN') والقاطعين (AB) و (AC).
- وازن بين النسبتين $\frac{AN}{AC}$ و $\frac{AN'}{AC}$.
- ماذا تستنتج حول AN و AN' ؟

هل يبقى اقتراح وفاء صحيحاً في حال انطباق النقطتين N و M؟

ما الشرط الذي تضيفه إذن إلى اقتراح وفاء؟

الحل

1. تأكيد وفاء ليس صحيحاً إلاّ إذا زوِّد بشرطٍ.

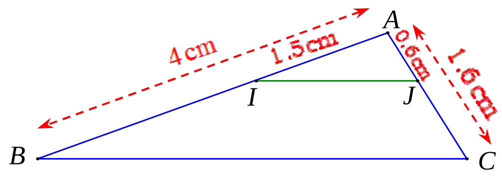
2. الشرط الذي أقترحه هو « M و N تقعان، على التوالي، على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ أو على امتداديهما بالاتجاه ذاته »

3. في الشكل ①: تقع النقطتان M و N، على التوالي، على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$، وهذا يتفق مع مبرهنة النسب الثلاث العكسية.

في الشكل ②: تقع النقطتان M و N، على التوالي، على امتدادي القطعتين $[AB]$ و $[AC]$، بالاتجاه ذاته، وهذا يتفق مع مبرهنة النسب الثلاث العكسية.

في الشكل ③: تقع النقطة M على امتداد $[BA]$ بينما تقع N على امتداد $[AC]$، وهذا لا يتفق مع مبرهنة النسب الثلاث العكسية.

تحقق من فهمك

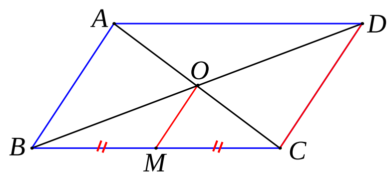


① المستقيمان (BI) و (CJ) متقاطعان في A. هل المستقيمان (IJ) و (BC) متوازيان؟ اشرح.

الحل

$$\frac{AI}{AB}=\frac{1.5}{4}=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}\cdots(1) \quad \text{و} \quad \frac{AJ}{AB}=\frac{0.6}{1.6}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}\cdots(2)$$

نجد من (1) و (2) أنَّ $\frac{AJ}{AC}=\frac{AI}{AB}$، فالمستقيمان (IJ) و (BC) متوازيان.



② قطرا متوازي الأضلاع $ABCD$ متقاطعان في O. و M منتصف $[BC]$. ماذا تقول عن المستقيمين (OM) و (DC)؟ ولماذا؟

الحل

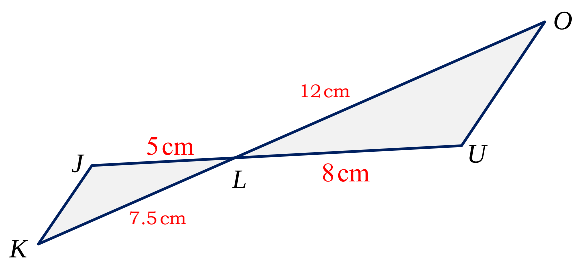
نعلم أنَّ قطري متوازي الأضلاع متناصفان، إذن النقطة O هي منتصف $[BD]$.

ولدينا M منتصف $[BC]$.

ففي المثلث BCD، يمر المستقيم (OM) بمنتصفي ضلعيه $[BA]$ و $[BC]$.، فهو يوازي ضلعه الثالث

أي إنَّ (OM) و (DC) متوازيان.

تدرب



① المستقيمان (JU) و (KO) متقاطعان في L.

1. اكتب قيمة كلٍ من النسبتين $\frac{LO}{LK}$ و $\frac{LU}{LJ}$.

2. انسخ وأكمل:

① « النقاط J و L و U على المستقيم (JU) منسجمة بالترتيب مع النقاط ⋯ و ⋯ و ⋯ على المستقيم ⋯ ».

② « $\frac{LO}{LK}=\frac{\cdots}{\cdots}$، إذن حسب ⋯⋯⋯ يكون المستقيمان (JK) و (OU) ⋯⋯⋯.

الحل

1. $\frac{LO}{LK}=\frac{12}{7.5}=\frac{12\div 3}{7.5\div 3}=\frac{4}{2.5}=\frac{4\times 4}{2.5\times 4}=\frac{16}{10}=1.6\cdots(1)$

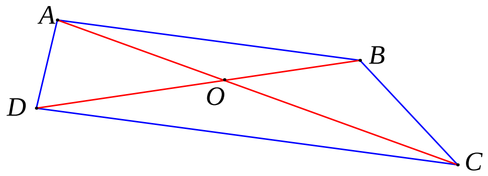
$$(2)\cdots\frac{LU}{LJ}=\frac{8}{5}=\frac{8\times 2}{5\times 2}=\frac{16}{10}=1.6$$

.2 ① « النقاط J و L و U على المستقيم (JU) منسجمة

بالترتيب مع النقاط K و L و O على المستقيم (KO) »

② « $\frac{LU}{LJ}=\frac{LO}{LK}$ ، إذن حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث يكون المستقيمان (JK) و (OU) متوازيين.

② قطرا الرباعي $ABCD$ متقاطعان في O، ونعلم أنَّ: $OA=6.5\text{ cm}$ و $OB=5\text{ cm}$ و $OC=9.1\text{ cm}$ و $OD=7\text{ cm}$. أثبت أنَّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

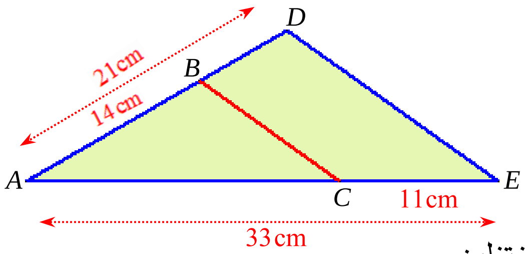


الحل

$$(1)\cdots\frac{OD}{OB}=\frac{5}{7} \text{ و } (1)\cdots\frac{OA}{OC}=\frac{6.5}{9.1}=\frac{65\div 13}{91\div 13}=\frac{5}{7}$$

نجد من (1) و (2) أنَّ $\frac{OD}{OB}=\frac{OA}{OC}$، فنستنتج، حسب مبرهنة النسب الثلاث، أنَّ المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان. ففي الرباعي $ABCD$ ضلعان متقابلان متوازيان، فهو شبه منحرف.

③ انظر إلى الشكل المرافق وأجب:



.1 احسب النسبتين $\frac{AB}{AD}$ و $\frac{AC}{AE}$ واكتبهما بشكل كسرين مختزلين.

.2 استنتج أنَّ المستقيمين (BC) و (DE). متوازيان.

الحل

.1 $(1)\cdots\frac{AB}{AD}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$ ؛ $(2)\cdots\frac{AC}{AE}=\frac{33-11}{33}=\frac{22}{33}=\frac{2}{3}$

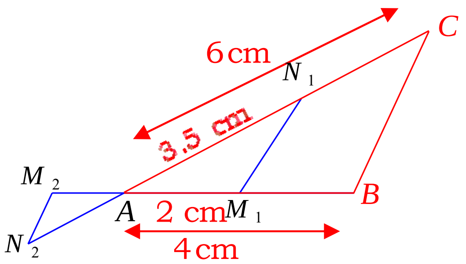
.2 نجد من (1) و (2) أنَّ $\frac{OD}{OB}=\frac{OA}{OC}$، فنستنتج، حسب النسب الثلاث، أنَّ المستقيمين (BC) و (DE) متوازيان.

③ التشابه

نشاط «استنتاج نسبة التشابه»

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في مثلثين، قلنا إنَّ المثلثين **متشابهان ويكون أحدهما مصغر أو مكبر عن الآخر أو مطابق له.**

1. مجموعة مثلثات



① ABC مثلث فيه $AB = 4\text{ cm}$ و $AC = 6\text{ cm}$.

و $(M_2N_2) \parallel (BC)$.

• علّل تساوي النسب $\frac{AM_2}{AB}$ و $\frac{M_2N_2}{CB}$ و $\frac{N_2A}{CA}$.

المثلثان ABC و AM_2N_2 متشابهان لتساوي النسب الثلاث. عندئذ يكون المثلث AM_2N_2 مصغراً عن المثلث ABC أو المثلث ABC مكبراً عن المثلث AM_2N_2.

• قارن النسبتين $\frac{AM_1}{AB}$ و $\frac{N_1A}{CA}$. هل المثلثان ABC و AM_1N_1 متشابهان؟ علل إجابتك.

الحل

• بالنسبة إلى المثلثين ABC و AM_2N_2 : لدينا A و B و M_2 على استقامة واحدة

ولدينا $(M_2N_2) \parallel (BC)$ فحسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AM_2}{AB} = \frac{M_2N_2}{CB} = \frac{N_2A}{CA}$$

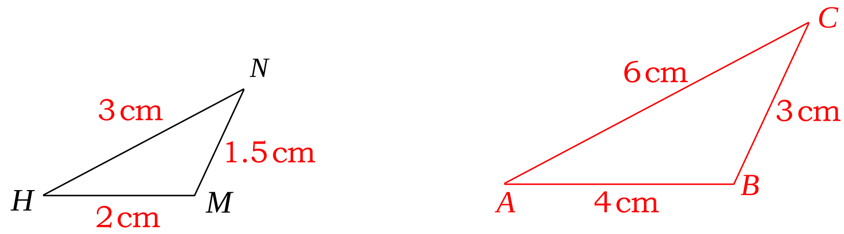
فالمثلثان ABC و AM_2N_2 متشابهان لتساوي النسب الثلاث. وفي الشكل، تبدو أضلاع AM_2N_2 أصغر من أضلاع ABC ، فالأول تصغير للثاني.

عندئذ يكون المثلث AM_2N_2 مصغراً عن المثلث ABC أو المثلث ABC مكبراً عن المثلث AM_2N_2.

• بالنسبة إلى المثلثين ABC و AM_1N_1 : نلاحظ النسبتين $\frac{AM_1}{AB} = \frac{1}{2}$ و $\frac{7}{12} = \frac{35}{60} = \frac{N_1A}{CA}$.

أي $\frac{N_1A}{CA} \neq \frac{AM_1}{AB}$ فالمثلثين لا تتوفر فيهما شروط التشابه ، وبالتالي ليسا متشابهين

② تأمل الشكل الآتي:



واحسب كلاً من $\frac{HM}{AB}$ و $\frac{NM}{CB}$ و $\frac{NH}{CA}$. هل المثلثان ABC و HMN متشابهان؟

لاحظ أن أطوال أضلاع المثلث ABC تنتج عن أطوال الأضلاع المقابلة لها في المثلث HMN بضربها بالعدد 2 فالمثلث ABC تكبير للمثلث HMN ونسمي العدد 2 **معامل التكبير**.

ويكون المثلث HMN تصغير للمثلث ABC برأيك ما هو **معامل التصغير**؟

الحل

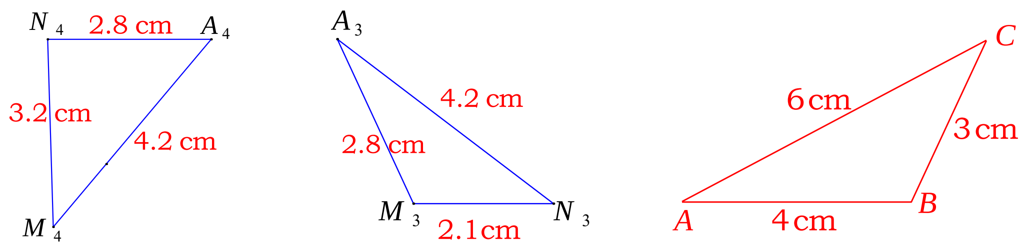
$\frac{1}{2}=\frac{HM}{AB}$ و $\frac{1}{2}=\frac{NM}{CB}$ و $\frac{1}{2}=\frac{NH}{CA}$. اصبح لدينا $\frac{HM}{AB}=\frac{NH}{CA}=\frac{NM}{CB}$ فالمثلثان ABC و HMN متشابهان.

③ تأمّل التناسب $\frac{HM}{AB}=\frac{NH}{CA}=\frac{NM}{CB}$، قس الزوايا المقابلة لكلّ ضلع من الأضلاع الواردة في التناسب. هل الزوايا المتقابلة متساوية؟

الحل

نجد بالقياس أن الزوايا المتقابلة متساوية

④ أي المثلثين $A_3M_3N_3$ و $A_4M_4N_4$ تصغير للمثلث ABC؟



الحل

- بالنسبة إلى المثلثين ABC و $A_3M_3N_3$:

$\frac{AN_3}{AC}=\frac{4.2}{6}=0.7$ و $\frac{AM_3}{AB}=\frac{2.8}{4}=0.7$ و $\frac{M_3N_3}{CB}=\frac{7}{10}$ إذن $\frac{A_3N_3}{CA}=\frac{M_3N_3}{CB}=\frac{M_3A_3}{AB}$،

ويترتب على ذلك تشابه المثلثين $A_3M_3N_3$ و ABC مما يجعل $A_3M_3N_3$ تصغيراً للمثلث ABC بنسبة $\frac{7}{10}$.

• بالنسبة إلى المثلثين ABC و $A_4M_4N_4$ نجد

$\frac{4}{5}=\frac{M_4N_4}{AB}$ و $\frac{14}{15}=\frac{A_4N_4}{CB}$ و $\frac{7}{10}=\frac{A_4M_4}{CA}$. اصبح لدينا $\frac{M_4A_4}{AB} \neq \frac{M_4N_4}{CB} \neq \frac{A_4N_4}{CA}$

فالمثلثان ABC و $A_3M_3N_3$ غير متشابهين.

④ لدينا المثلث EFG تصغير للمثلث ABC .

• انسخ جدول الأضلاع المتقابلة في المثلثين ثم أكمله

		EF
BC	AC	AB

.

• انسخ جدول الرؤوس المتقابلة في المثلثين ثم أكمله

		G
A	B	C

.

• اكتب النسب الثلاث المتساوية واستنتج معامل التصغير ثم احسب الطول GF .

الحل

• جدول الأضلاع المتقابلة في المثلثين

FG	GE	EF
BC	AC	AB

.

• جدول الرؤوس المتقابلة في المثلثين

E	F	G
A	B	C

.

• النسب الثلاث المتساوية

$$\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{CB}=\frac{GE}{CA}$$

معامل التصغير هو $\frac{3}{4}=\frac{EF}{AB}$

حساب الطول GF:

$\frac{3}{4}=\frac{FG}{3}$ ومنه $FG=\frac{9}{4}$

تحقق من فهمك

ABC و EFG مثلثان فيهما $AB = 5 \text{ cm}$، $AC = 8 \text{ cm}$، $BC = 6.5 \text{ cm}$ و $EF = 1 \text{ cm}$، $EG = 1.6 \text{ cm}$، $FG = 1.2 \text{ cm}$. هل المثلث EFG تصغيرٌ للمثلث ABC. علّل إجابتك.

الحل

لنرتب أطوال أضلاع كلٍّ من المثلثين تصاعدياً:

ABC: $AB = 5 \text{ cm}$ و $BC = 6.5 \text{ cm}$ و $CA = 8 \text{ cm}$

EFG: $EF = 1 \text{ cm}$ و $FG = 1.2 \text{ cm}$ و $GE = 1.6 \text{ cm}$

ولاستعمال عكس مبرهنة النسب الثلاث علينا ترتيب الحروف وفق

A	B	C
E	F	G

$\frac{AB}{EF} = \frac{5}{1} = 5$ و $\frac{BC}{FG} = \frac{6.5}{1.2} = \frac{65}{12}$ ، $\frac{BC}{FG} \neq \frac{AB}{EF}$، فالمثلث EFG ليس تصغيراً للمثلث ABC.

تدرّب

① **1.** ارسم مستطيلاً $ABCD$ بعداه $AB = 4 \text{ cm}$ و $AD = 3 \text{ cm}$.

2. ارسم تصغيراً $A'B'C'D'$ للمستطيل $ABCD$ نسبته $\frac{4}{5}$.

3. احسب بطريقتين مختلفتين:

① محيط $A'B'C'D'$.

② مساحة $A'B'C'D'$.

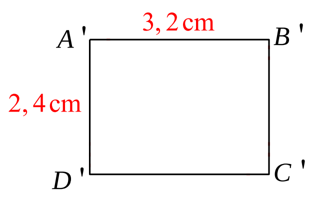
الحل

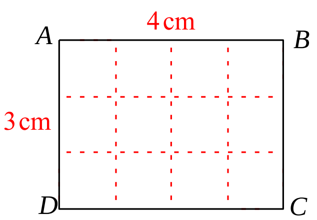
1. رسم $ABCD$ ببعديه التامين.

2. $A'B' = 4 \times \frac{4}{5} = 3.2 \text{ cm}$

$A'D' = 3 \times \frac{4}{5} = 2.4 \text{ cm}$

نرسم $A'B'C'D'$ بهذين البعدين.





3. نرمز إلى محيط المستطيل $ABCD$ بالرمز $\mathcal{P}$ وإلى محيط $A'B'C'D'$ بالرمز $\mathcal{P}'$.

ونرمز إلى مساحة المستطيل $ABCD$ بالرمز $\mathcal{A}$ وإلى مساحة $A'B'C'D'$ بالرمز $\mathcal{A}'$.

① ☝ $\mathcal{P}'=2(A'B'+A'D')=2(3.2+2.4)=2\times5.6=11.2\text{ cm}$.

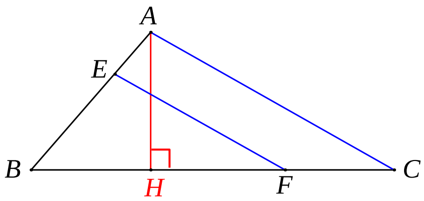
✌ $\mathcal{P}=2(AB+AD)=2(4+3)=2\times7=14$، إذن

$\mathcal{P}'=\frac{4}{5}\mathcal{P}=\frac{4}{5}\times14=\frac{56}{5}=\frac{112}{10}=11.2\text{ cm}$.

② ☝ $\mathcal{A}'=A'B'\times A'D'=3.2\times2.4=7.68\text{ cm}^2$.

✌ $\mathcal{A}=AB\times AD=4\times3=12\text{ cm}^2$، إذن

$\mathcal{A}'=\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\mathcal{A}=\frac{16}{25}\times12=\frac{64}{100}\times12=7.68\text{ cm}^2$.



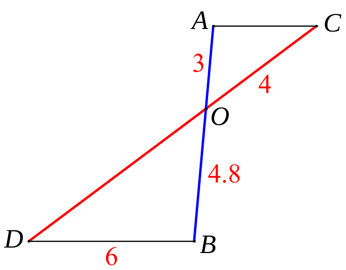
② في الشكل المرافق، $[AH]$ ارتفاع للمثلث ABC. نقطة من $[AB]$ و F نقطة من $[BC]$ و $(EF)\parallel(AC)$. نعلم أنَّ $BF=2.8\text{ cm}$ و $BC=4\text{ cm}$ و $AH=1.5\text{ cm}$. احسب مساحة المثلث ABC، ثم مساحة المثلث BEF.

الحل

نرمز إلى مساحة المثلث ABC بالرمز $\mathcal{A}$ وإلى مساحة AEF بالرمز $\mathcal{A}'$.

$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}\times4\times1.5=3\text{ cm}^2$.

المثلثان ABC و EBF متشابهان، فالمثلث EBF تصغيرٌ للمثلث ABC ونسبة التصغير هي $k=\frac{BE}{BC}=\frac{2.8}{4}=0.7$، إذن $\mathcal{A}'=k^2\times\mathcal{A}=0.49\times3=1.47\text{ cm}^2$.



③ المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان في O، والمستقيمان (AC) و (BD) متوازيان.

1. احسب الطول OD.

2. احسب الطول AC.

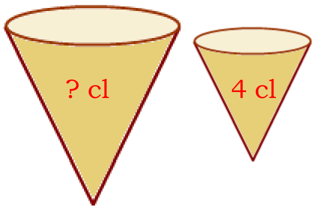
الحل

حسب مبرهنة النسب الثلاث نجد: $\frac{AC}{BD}=\frac{OC}{OD}=\frac{AO}{OB}$، إذن $\frac{AC}{6}=\frac{4}{OD}=\frac{3}{4.8}$.

1. من التناسب $\frac{4}{OD}=\frac{3}{4.8}$، نحصل على

$$\frac{32}{15}=\frac{4\times 8}{15}=\frac{4\times 48}{30}=\frac{4\times 4.8\times 10}{3\times 10}=\frac{4\times 4.8}{3}=OD.$$

2. من التناسب $\frac{AC}{6}=\frac{3}{4.8}$، نحصل على $\frac{15}{4}=\frac{180}{48}=\frac{3\times 6\times 10}{4.8\times 10}=\frac{3\times 6}{4.8}=AC$.



④ لدى بائع مرطبات عبوات مثلجات بسعتين مختلفتين. تسع العبوة الصغيرة 4 cl من البوظة، أما العبوة الكبيرة فهي تكبير للعبوة الصغيرة بنسبة 1.5. احسب سعة العبوة الكبيرة.

الحل

نرمز إلى سعة العبوة الكبيرة بالرمز $\mathscr{V}$ وإلى سعة العبوة الصغيرة بالرمز $\mathscr{V}'$.

نسبة التصغير هي $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=k$ و $\mathscr{V}'=k^3\times\mathscr{V}$، إذن $\mathscr{V}'=\frac{27}{64}\times 12=4.9357\text{ cl}$.

⑤ اقترح مهندس معماري بنّاء صومعة حبوب بحجم 900 m^3، فصمم نموذجاً مصغراً لها بمقياس $\frac{1}{20}$. احسب حجم النموذج المصمم.

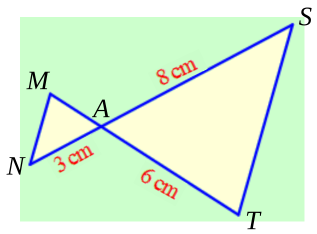
الحل

نرمز إلى حجم النموذج بالرمز $\mathcal{V}$، فيكون:

$$\mathcal{V}=\left(\frac{1}{20}\right)^3\times 900=\frac{900}{8000}=\frac{9}{80}=\frac{9}{80}\times 1000\text{ cm}^3=11.25\text{ cm}^3$$

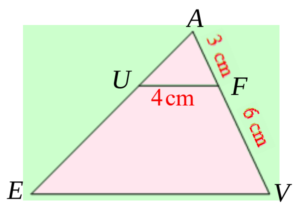
تمرينات ومسائل

1 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.



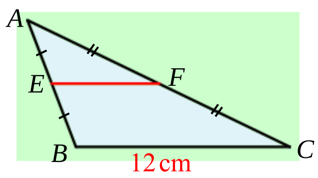
(1) (NS) و (MT) متقاطعان في A ، و (TS) و (NM) متوازيان.
الطول AM يساوي

① 1 cm ② 2.25 cm ③ 4 cm



(2) في الشكل المرافق المستقيمان (UF) و (EV) متوازيان. الطول EV يساوي :

① 6.75 cm ② 8 cm ③ 12 cm



(3) في المثلث ABC ، E و F هما منتصفا $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي، فالطول EF يساوي

① 7.75 cm ② 6 cm ③ 4.8 cm

(4) إذا ضربنا أطوال أضلاع مثلث بالعدد 3 ، فإنَّ قياسات زواياه

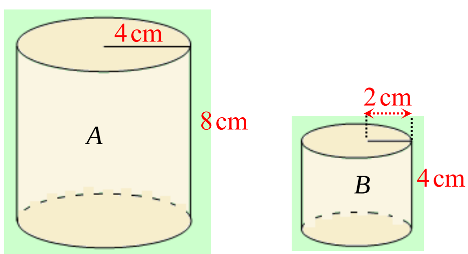
① تُضرب بالعدد 9 ② تُضرب بالعدد 3 ③ لا تتغير

(5) في المثلث ABC ، $AB = 2\text{ cm}$ و $AC = 3\text{ cm}$ و $BC = 4.5\text{ cm}$. وفي المثلث DEF ، $DE = 6\text{ cm}$ و $DF = 9\text{ cm}$ و $EF = 13.5\text{ cm}$. مساحة المثلث DEF تساوي

① ثلاثة أمثال مساحة ABC .

② أربعة أمثال مساحة ABC .

③ تسعة أمثال مساحة ABC .



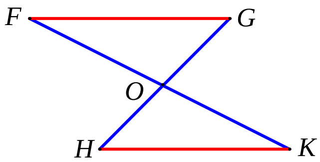
(6) حجم الأسطوانة A يساوي

① مثلي حجم الأسطوانة B .

② أربعة أمثال حجم الأسطوانة B .

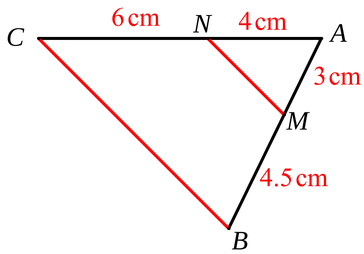
③ ثمانية أمثال حجم الأسطوانة B .

2 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.



(1) المستقيمان (FK) و (GH) متقاطعان في O،
والمستقيمان (FG) و (HK) متوازيان، إذن

① $\frac{OF}{OK} = \frac{OH}{OG}$ ② $\frac{OF}{OK} = \frac{FG}{HK}$ ③ $\frac{OF}{KO} = \frac{GO}{HO}$



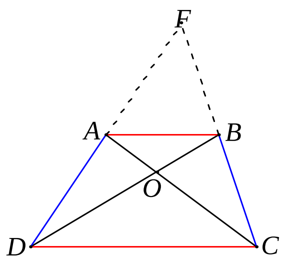
(2) المستقيمان (CN) و (BM) متقاطعان في A ، إذن

① (MN) و (BC) ليسا متوازيين.

② الرباعي $BCNM$ شبه منحرف.

③ المثلث ABC تكبير للمثلث AMN .

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

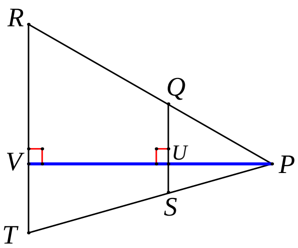


(1) $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$، وقطراه متقاطعان في O،
فالمثلثان OAD و OBC يشكلان إحدى حالات تناسب النسب الثلاث.

الحل

غير موافق، فالمثلثان OAD و OBC يحويان ضلعان متوازيان.

(2) في الشكل المرافق لدينا $\frac{SQ}{TR} = \frac{UQ}{VR}$.



الحل

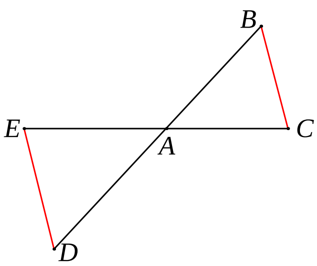
موافق، بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث مرتين

من المثلثان PRV , PQU تكون النسب الثلاث

(1) $\frac{UQ}{VR} = \frac{PQ}{PR} = \frac{PU}{PV}$

ومن المثلثان PRT , PQS تكون النسب الثلاث (2) $\frac{PQ}{PR} = \frac{SQ}{RT} = \frac{PS}{PT}$

بمقارنة نجد أن $\frac{UQ}{VR} = \frac{SQ}{TR}$



(3) المستقيمان (CE) و (BD) متقاطعان في A . المستقيمان (CB) و (DE) متوازيان. إذن

$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$.

الحل

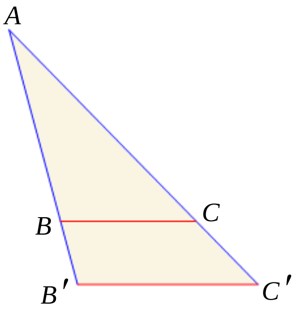
موافق، بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث نجد $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ نثبت البسوط ونجمعها للمقام فنحصل

$\frac{AD}{AB+AD}=\frac{AE}{AC+AE}$ أي $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$ وبقلب النسبتين نجد $\frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE}$

(4) بعملية تكبير ضُربت مساحة مستطيل بالعدد 2.5، فنسبة التكبير هي 1.25.

الحل

غير موافق، فنسبة التكبير $\sqrt{2.5}$ وليس $\frac{2.5}{2}$



4 B' و C' نقطتان من نصفي المستقيمين $[AB)$ و $[AC)$.

- (BC) و $(B'C')$ متوازيان.
- $BC = 1.5\text{ cm}$ و $B'C' = 2\text{ cm}$.
- مساحة المثلث ABC تساوي 9 cm^2.

احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

الحل

لدينا المستقيمان (BC) و $(B'C')$ متوازيان فأضلاع المثلثين $A'B'C'$ و ABC متناسبة حسب مبرهنة النسب الثلاث، فالمثلثين متشابهين ونسبة تشابههما هي :

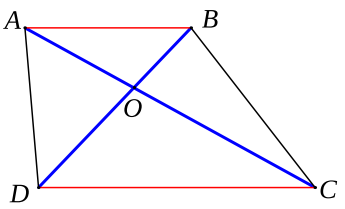
$$k=\frac{BC}{B'C'}=\frac{1.5}{2}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

إيجاد مساحة المثلث:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=k^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$$S_{A'B'C'}=\frac{S_{ABC}\times 16}{9}=\frac{9\times 16}{9}=16\,\text{cm}^2$$



5 $ABCD$ شبه منحرف. قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$، وقطراه متقاطعان في O. نعلم أنَّ:

$OA = 3\text{ cm}$، $OC = 5\text{ cm}$، و $OB = 2\text{ cm}$ و $AB = 4\text{ cm}$.

1. سمِّ مثلثين تشملهما مبرهنة النسب الثلاث. اشرح.
2. احسب قيمة كلٍّ من الطولين OD و CD.

الحل

1. قاعدتا شبه المنحرف قطعتان متوازيتان، أي $(AB) \parallel (DC)$، فالمثلثان OAB و OCD يشكلان التناسب المطلوب، بهذا الترتيب للحروف.

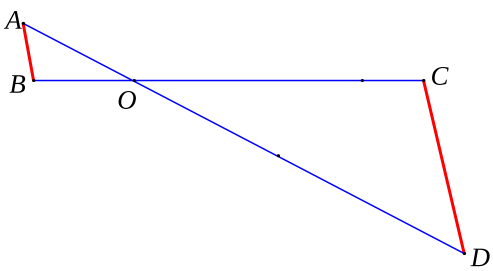
2. حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين OAB و OCD أنَّ $\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$، إذن $\frac{CD}{4} = \frac{5}{3} = \frac{OD}{2}$.

من التناسب $\frac{5}{3} = \frac{OD}{2}$، نجد $OD = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$ cm.

ومن التناسب $\frac{CD}{4} = \frac{5}{3}$، نجد $CD = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$ cm.

6 المستقيمان (AD) و (BC) متقاطعان في O. ونعلم أنَّ: $OA = 3$ cm و $OD = 9$ cm و $OB = 2.4$ cm و $OC = 7$ cm.

أثبت أنَّ المستقيمين (AB) و (CD) غير متوازيين.



الحل

توازي المستقيمين (AB) و (CD) يتطلب، حسب النسب الثلاث، تساوي النسبتين $\frac{OA}{OD}$ و $\frac{OB}{OC}$.

لدينا $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{OA}{OD}$ و $\frac{2.4}{7} = \frac{OB}{OC}$.

واضح أنَّ $3 \times 2.4 \neq 1 \times 7$، إذن $\frac{OB}{OC} \neq \frac{OA}{OD}$، فالمستقيمان (AB) و (CD) غير متوازيين.

7 $[AB]$ قطعة مستقيمة، في صفحة بيضاء، طولها غير معلوم. دون استعمال مسطرة مدرجة:

1. قسِّم $[AB]$ إلى خمسة أقسام متساوية.
2. قسِّم $[AB]$ إلى سبعة أقسام متساوية.

الحل

1. • نرسم نصف مستقيم $[Ax)$، ونرسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A ونصف قطرها 5 وحدات طول.

نرمز إلى نقطة تقاطع الدائرة $\mathscr{C}$ و نصف مستقيم $[Ax)$ بالرمز C.

• نقسم القطعة $[AC]$ إلى خمسة أقسام متساوية (خمس وحدات طول).

• نرسم القطعة $[BC]$، ثم نرسم من نقاط تقسيمها مستقيمات موازية للمستقيم (BC).

هذه المستقيمات المتوازية تقسم $[AB]$ إلى خمسة أقسام متساوية.

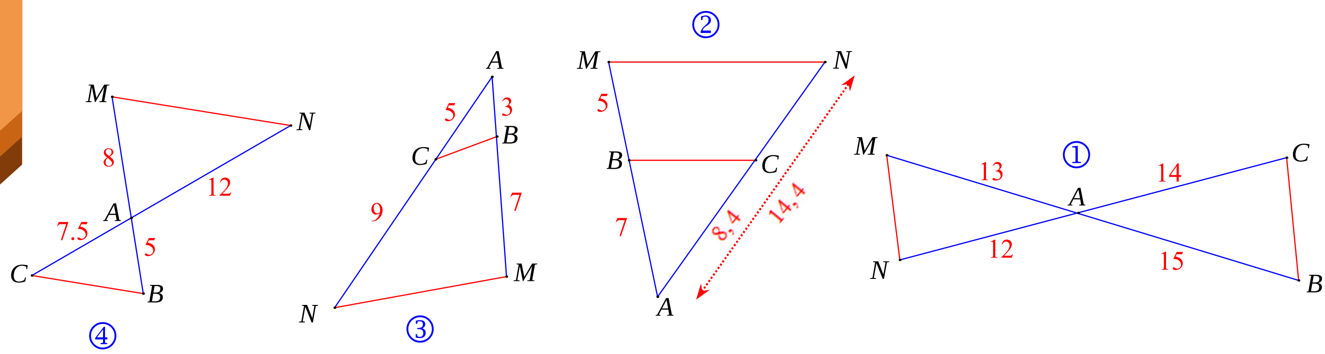
قسِّم $[AB]$ إلى خمسة أقسام متساوية.

الإثبات: باستعمال مبرهنة النسب الثلاث مرات متتالية نجد المطلوب.

2. نعيد العمل الوارد في **1.** على أن يكون نصف قطر الدائرة 7 وحدات طول، ونقسم القطعة $[AC]$ إلى سبعة أقسام متساوية.

8 في كلٍ من الأشكال الآتية، (BM) و (CN) متقاطعان في A.

قل إن كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيين أم متقاطعين مع شرح إجابتك في كل حالة.



الحل

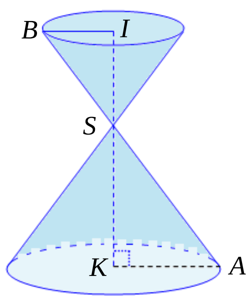
- في الشكل ① $\frac{12}{14} \neq \frac{13}{15}$، فالمستقيمان (MN) و (BC) غير متوازيين.
- في الشكل ② بالحساب نجد $\frac{AB}{AM} = \frac{7}{12}$ و $\frac{7}{12} = \frac{84}{144} = \frac{8.4}{14.4} = \frac{AC}{AN}$ أي $\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$

فنستنتج، حسب مبرهنة النسب الثلاث، أنَّ المستقيمين (MN) و (BC) متوازيان.

- في الشكل ③ $\frac{5}{14} = \frac{AC}{AN} \neq \frac{3}{10} = \frac{AB}{AM}$، فالمستقيمان (MN) و (BC) غير متوازيين.
- في الشكل ④ $\frac{5}{8} = \frac{AB}{AM} \cdots (1)$ و $\frac{5}{8} = \frac{15}{24} = \frac{75}{120} = \frac{7.5}{12} = \frac{AC}{AN} \cdots (2)$

نجد من (1) و (2) أنَّ $\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$، فنستنتج، حسب مبرهنة النسب الثلاث، أنَّ المستقيمين (MN) و (BC) متوازيان.

9 مخروطان دورانيان متقابلان بالرأس S، مركزا قاعدتيهما I و K، ونصفا قطريهما $[IB]$ و $[KA]$. المستقيمان (AB) و (KI) متقاطعان في S، والمستقيمان (IB) و (KA) متوازيان. نعلم أنَّ $KA = 4.5 \text{ cm}$ و $KS = 6 \text{ cm}$ و $SI = 4 \text{ cm}$.



1. احسب الطول IB، ثم الطول SA.

2. المخروط الذي مركز قاعدته I تصغير للمخروط الذي مركز قاعدته K، وحجماهما على التوالي $\mathcal{V}_I$ و $\mathcal{V}_K$.

① ما معامل التصغير.

② احسب $\mathcal{V}_K$ ثم استنتج $\mathcal{V}_I$.

الحل

1. لدينا حسب مبرهنة النسب الثلاث، $\frac{SI}{SK} = \frac{IB}{KA}$. نعوض فنجد $\frac{4}{6} = \frac{IB}{4.5}$، ومنها

$IB = \frac{4 \times 4.5}{6} = 3 \text{ cm}$.

حسب مبرهنة فيثاغورث $SB = 5 \text{ cm}$

لدينا حسب مبرهنة النسب الثلاث، $\frac{SI}{SK} = \frac{SB}{SA}$. نعوض فنجد $\frac{4}{6} = \frac{SB}{5}$، ومنها

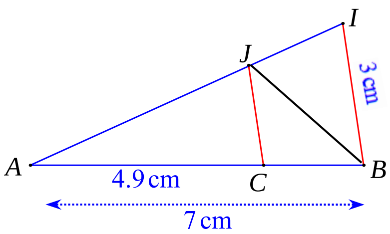
$IB = \frac{4 \times 5}{6} = \frac{10}{3} \text{cm}$.

2. ① معامل التصغير هو $k = \frac{SI}{SK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

② $\mathcal{V}_K = \frac{1}{3} \times \pi \times KA^2 \times KS = \frac{1}{3} \pi \times 4.5^2 \times 6 = 40.5\,\pi$

نضرب $\mathcal{V}_K$ بالعدد $k^3 = \frac{8}{27}$ لنحصل على $\mathcal{V}_I$.

إذن $\mathcal{V}_I = 40.5\pi \times \frac{8}{27} = 12\pi \text{ cm}^3$.



10 المستقيمان (JI) و (BC) متقاطعان في A، والمستقيمان (JC) و (IB) متوازيان. أثبت أنَّ $\widehat{CJB} = \widehat{CBJ}$.

الحل

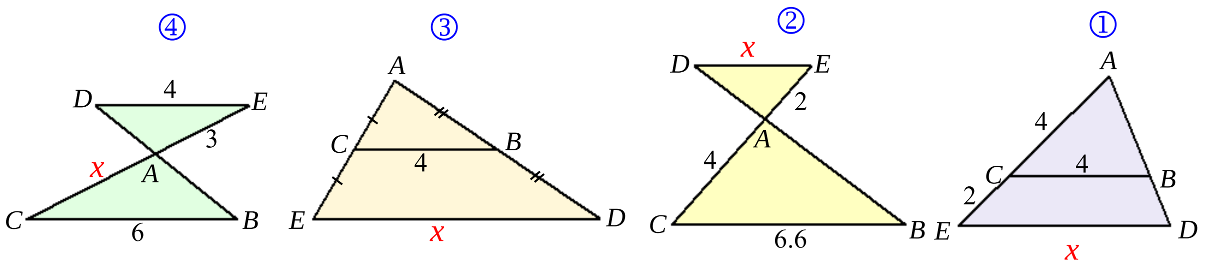
- $CB = AB - AC = 7 - 4.9 = 2.1 \text{ cm}$ $\cdots(1)$.
- حسب مبرهنة النسب الثلاث، $\frac{AC}{AB} = \frac{CJ}{BI}$. نعوض فنحصل على $\frac{4.9}{7} = \frac{CJ}{3}$، ومنها

$CJ = \frac{3 \times 4.9}{7} = 2.1 \text{ cm}$ $\cdots(2)$

نستنتج من (1) و (2) أنَّ $CB = CJ$. أي إنَّ المثلث CBJ متساوي الساقين في C، فزاويتا قاعدته متساويتان، إذن $\widehat{CJB} = \widehat{CBJ}$.

11 في كلٍّ من الأشكال الآتية، (BD) و (CE) متقاطعان في A، والمستقيمان (BC) و (DE) متوازيان. احسب ذهنياً الطول x.

2



الحل

① $\frac{4}{4+2}=\frac{4}{x}$، ومنها $x=6$.

② $\frac{2}{4}=\frac{x}{6.6}$، ومنها $x=\frac{1}{2}\times 6.6=3.3$.

③ $x=2\times 4=8$. ④ $\frac{6}{4}=\frac{x}{3}$، ومنها $x=\frac{3\times 6}{4}=4.5$.

12 مساحة المثلث ABC تساوي $25\ \mathrm{cm}^2$ وقياسا اثنتين من زواياه 65° و 80°. المثلث EFG تكبير للمثلث ABC بنسبة 2.

1. احسب ذهنياً قياسات زوايا المثلث EFG.

2. احسب ذهنياً مساحة المثلث EFG.

الحل

1. قياسات زوايا المثلث EFG هي 65° و 80° و 35°.

2. مساحة المثلث EFG هي $100\ \mathrm{cm}^2$

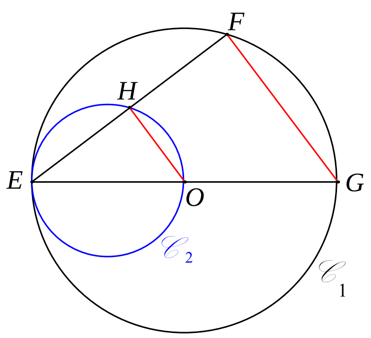
13 حجم هرم يساوي $270\ \mathrm{m}^3$. احسب ذهنياً حجم نموذج مصغر لهذا الهرم بمقياس $\frac{1}{3}$.

الحل

حجم نموذج مصغر هو $10\ \mathrm{m}^3$

لإحراز تقدم

14 دائرتان متماسان داخلاً



$\mathscr{C}_1$ دائرة مركزها O و $[EG]$ قطر فيها. $\mathscr{C}_2$ هي الدائرة التي قطرها $[EO]$.

1. هل المستقيمان (OH) و (GF) متوازيان؟ علِّل إجابتك.

2. إذا علمت أنَّ $OH=3\ \mathrm{cm}$، احسب FG.

الحل

1. $[EG]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}_1$ المرسومة على المثلث FEG، فهذا المثلث قائم في F، إذن

$(1)\cdots(GF)\perp(EF)$

$[EO]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}_2$ المرسومة على المثلث HEO، فهذا المثلث قائم في H، إذن

$(2)\cdots(OH)\perp(EF)$

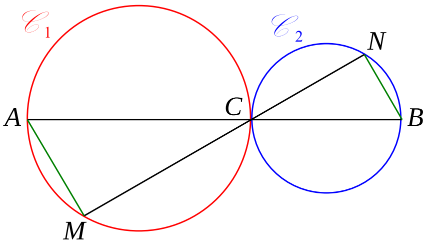
ينتج من (1) و (2) أنَّ المستقيمين (OH) و (GF) متوازيان، لأنهما عمودان على مستقيمٍ واحد.

2. O مركز الدائرة $\mathscr{C}_1$ أي O هي منتصف القطر $[EG]$، ومنه $OE = OG$ وكذلك (OH) و (GF) متوازيان.

حسب مبرهنة النسب الثلاث، $\frac{EO}{EG} = \frac{OH}{FG}$. نعوض فنحصل على $\frac{1}{2} = \frac{3}{FG}$، ومنها

$FG = 2\times 3 = 6\text{ cm}$

15 دائرتان متماستان خارجاً



C نقطة من $[AB]$، بحيث $CA = 6\text{ cm}$ و $CB = 4\text{ cm}$.

$\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ دائرتان قطراهما على التوالي $[AC]$ و $[CB]$. M نقطة من $\mathscr{C}_1$ و N نقطة من $\mathscr{C}_2$ والنقاط M و C و N على استقامة واحدة. نعلم أنَّ $AM = 3\text{ cm}$. احسب NB.

الحل

$[AC]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}_1$ المرسومة على المثلث MAC، فهذا المثلث قائم في M، إذن

(1) $(AM)\perp(MN)$.

$[BC]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}_2$ المرسومة على المثلث NBC، فهذا المثلث قائم في N، إذن

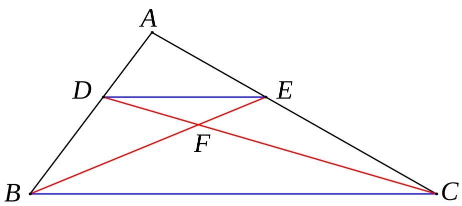
(2) $(BN)\perp(MN)$)

ينتج من (1) و (2) أنَّ المستقيمين (AM) و (BN) متوازيان، لأنهما عمودان على مستقيمٍ واحد.

وينتج عن توازيهما وبحسب مبرهنة النسب الثلاث $\frac{CB}{CA} = \frac{BN}{AM}$.

إذن $\frac{4}{6} = \frac{BN}{3}$ ، ومنها $BN = \frac{3 \times 4}{6} = 2 \text{ cm}$.

16 اثنان من حالات تناسب النسب الثلاث



في الشكل المرافق، المستقيمان (DE) و (BC) متوازيان، والمستقيمان (CD) و (BE) متقاطعان في F . نفترض أنّ $AD = 2 \text{ cm}$ و $DB = 3 \text{ cm}$ و $BF = 4 \text{ cm}$.

1. استعمل مبرهنة النسب الثلاث لإيجاد نسبتين كل منهما تساوي النسبة $\frac{DE}{BC}$.

2. استنتج أنَّ $\frac{2}{5} = \frac{EF}{4}$ ، ثم احسب EF .

الحل

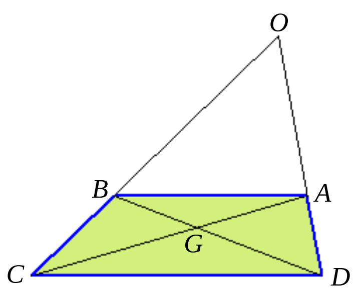
1. بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث على المثلث ABC ، نجد $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ (1)

وبتطبيقها على المثلث FBC ، نجد $\frac{DE}{BC} = \frac{EF}{FB}$ (2)

2. بعد التعويض في (1) و (2)، نحصل على $\frac{2}{5} = \frac{DE}{BC}$ (3) و $\frac{DE}{BC} = \frac{EF}{4}$ (4)

ثم نستنتج من (3) و (4) أنَّ $\frac{2}{5} = \frac{EF}{4}$ ، ومنها $EF = \frac{4 \times 2}{5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ cm}$.

17 شبه منحرف



$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$ ضلعاه المائلان متقاطعان في O ، وقطراه متقاطعان في G .

نعلم أنَّ: $OB = 8 \text{ cm}$ و $GC = 6 \text{ cm}$ و $GA = 4 \text{ cm}$.

1. وازن النسبتين $\frac{GA}{GC}$ و $\frac{OB}{OC}$.

2. استنتج الطول BC .

الحل

1. بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث على المثلث OCD، $\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{CD}$ (1)

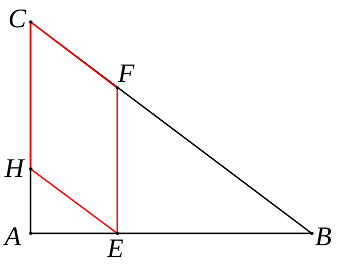
بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث على المثلث GAB، $\frac{GA}{GC}=\frac{AB}{CD}$ (2)

نجد من (1) و (2) المساواة (3) $\frac{OB}{OC}=\frac{GA}{GC}$

2. نضع قياسات الأطوال المعلومة في العلاقة (3) فنجد $\frac{4}{6}=\frac{8}{OC}$، ومنها $OC=\frac{8\times 6}{4}=12\text{ cm}$.

إذن $BC=OC-OB=12-8=4\text{ cm}$.

18 مع النسب الثلاث وفيثاغورث



ABC مثلث قائم في A، طولا ضلعيه القائمين هما $AB=4\text{ cm}$ و $AC=3\text{ cm}$.

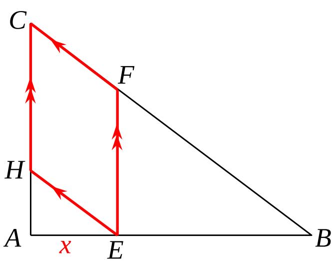
1. احسب طول وتر هذا المثلث.

2. E نقطة على $[AB]$ و (EF) يوازي (AC) و (EH) يوازي (BC).

نرمز إلى الطول AE بالرمز x.

ما طبيعة الرباعي $EFCH$؟ احسب، بدلالة x، أطوال أضلاع هذا الرباعي.

الحل



1. باستعمال مبرهنة فيثاغورث على المثلث ABC القائم في A نجد $BC^2=AB^2+AC^2=16+9=25$، ومنها $BC=\sqrt{25}=5\text{ cm}$

2. $EFCH$ متوازي أضلاع لأنّ كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

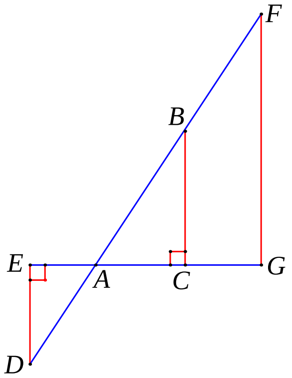
بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث، نجد $\frac{BE}{BA}=\frac{EF}{AC}$

أي $\frac{EF}{3}=\frac{4-x}{4}$ ومنها $EF=CH=\frac{3(4-x)}{4}=\frac{12-3x}{4}$.

بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث مرة ثانية نجد $\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$ أي $\frac{EH}{5}=\frac{x}{4}$،

ومنها $EH = CF = \dfrac{5x}{4}$.

19 وحدة القياس هي السنتيمتر



في الشكل المرافق $AB = 12$ و $AC = 9.6$ و $AD = 6.5$ و $BC = 7.2$ و $BF = 10.5$ و $AG = 18$.

1. احسب AE .

2. أثبت أنَّ المستقيمين (FG) و (BC) متوازيان.

3. احسب $\sin \widehat{ABC}$.

الحل

1. بما أن $BC \perp EG$ و $ED \perp EG$ إذن (BC) و (ED) متوازيان لأنهما عمودان على مستقيم واحد

حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC حيث (ED) و (BC)، متوازيان نكتب:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{6.5}{12} = \frac{AE}{9.6}$$

$$\frac{6.5}{12} = \frac{AE}{9.6}$$

$$AE = \frac{6.5 \times 9.6}{12}$$

$$AE = 5.2 \text{ cm}$$

2. نحسب النسبتين $\dfrac{AB}{AF}, \dfrac{AC}{AG}$

$$\frac{AC}{AG} = \frac{9.6}{18} = \frac{96}{180} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{12}{22.5} = \frac{120}{225} = \frac{8}{15}$$

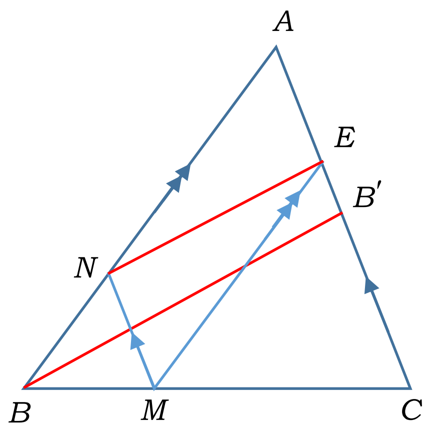
إذن $\dfrac{AC}{AG} = \dfrac{AB}{AF}$

حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث في المثلث نستنتج أن (FG) و (BG)، متوازيان .

3. في المثلث ABC القائم في $\widehat{C}$

$$\sin\widehat{ABC}=\frac{AC}{AB}=\frac{9.6}{12}=\frac{8}{10}=0.8$$

20 مع النسب الثلاث والمتوسط



ABC مثلث فيه $[BB']$ متوسط، و M نقطة من $[BC]$ تُحقق $BM=\frac{1}{3}BC$، و $(MN)\parallel(AC)$ و $(ME)\parallel(AN)$.

1. أثبت أن $\frac{AN}{AB}=\frac{2}{3}$.

2. أثبت أن $\frac{AE}{AB'}=\frac{2}{3}$، واستنتج أنّ $(NE)\parallel(BB')$.

الحل

1. إثبات أن $\frac{AN}{AB}=\frac{2}{3}$.

لدينا من فرض المسألة $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$

لدينا $(MN)\parallel(AC)$ حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC نكتب:

$$\frac{BN}{BA}=\frac{BM}{BC}$$

$$\frac{BN}{BA}=\frac{1}{3}$$

أي (1) $\frac{AN}{AB}=\frac{2}{3}$.

2. أثبت أن $\frac{AE}{AB'}=\frac{2}{3}$، واستنتج أنَّ $(NE)\parallel(BB')$.

لدينا $(EM)\parallel(AB)$، حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC نكتب:

$$\frac{CE}{CA}=\frac{CM}{CB}$$

$$\frac{CE}{CA}=\frac{2}{3}$$

وبالتالي $\frac{AE}{CA}=\frac{1}{3}$

ولدينا (BB')متوسط في المثلث BAC فإن $AC=2AB'$ نعوض:

$$\frac{AE}{2AB'}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AE}{AB'}=\frac{2}{3}\quad(2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد

$$\frac{AN}{AB}=\frac{AE}{AB'}$$

حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث في المثلث نستنتج أن (NE) و (BB')، متوازيان .

2

3

الوحدة الثالثة
الزوايا والمضلعات في الدائرة
المضلعات المنتظمة

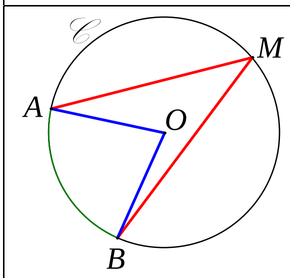
1. زوايا محيطية وزوايا مركزية
2. الرباعي الدائري
3. المضلعات المنتظمة

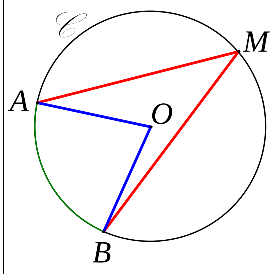
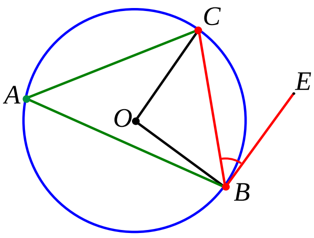
مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الاسبوع
1− زوايا محيطية وزوايا مركزية	2	كانون 1	الثالث
2− الرباعي الدائري	2	كانون 1	الرابع
3− المضلعات المنتظمة	2	كانون 2	الأول
تمرينات ومسائل	5	كانون 2	الثاني + الثالث
اختبار	1	كانون 2	الرابع
المجموع	12		6

هذا التوزيع تقريبي وبإمكان المدرس أن يخطط بموجبه حسب مستوى طلابه من صف لأخر ممكن اضافة أو اختصار حصة لهذا التوزيع .

مفردات لغوية وترميز

المصطلح	التوضيح	
الزاوية محيطية	A و B و M ثلاث نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O مع $M \neq A$ و $M \neq B$. نقول إنَّ $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية في الدائرة $\mathscr{C}$ تقابل (أو تحصر) القوس $\overset{\frown}{AB}$ التي لا تضم M.	

الزاوية المركزية	A و B و M ثلاث نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O مع $M \neq A$ و $M \neq B$. نقول إنَّ $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية في الدائرة $\mathscr{C}$ تشترك مع $\widehat{AMB}$ بالقوس $\overset{\frown}{AB}$. 
الزاوية المماسية	تسمى الزاوية التي رأسها على دائرة وأحد ضلعيها وتر في هذه الدائرة وضلعها الآخر مماس لها **زاوية مماسية**. 
الرباعي الدائري	هو رباعي تقع رؤوسه على دائرة.
المضلع المنتظم	نقول إنَّ مضلعاً منتظمٌ، إذا كانت أطوال أضلاعه متساوية وكانت قياسات زواياه متساوية.
مضلع في دائرة	هو مضلع تمر من رؤوسه دائرة.

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
الزاويتان متكاملتان	الزوايا محيطية
الزاويتان متتامتان	الزوايا المركزية
رسم مثلث في دائرة	الزوايا المماسية
مركز ثقل المثلث	الأوتار والأقواس في الدائرة
الدائرة المرسومة المارة برؤوس مثلث قائم	المضلعات المنتظمة
حساب قياس زاوية في مثلث متساوي الساقين	

الزوايا والمضلعات في الدائرة، المضلعات المنتظمة

انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. زاويتان متكاملتان

$\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ زاويتان متكاملتان. هذا يعني

① $\widehat{A}=\widehat{B}$ ② $\widehat{A}+\widehat{B}=180^\circ$ ③ $\widehat{A}+\widehat{B}=90^\circ$

2. زاويتان متتامتان

$\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ زاويتان متتامتان. هذا يعني

① $\widehat{A}=\widehat{B}$ ② $\widehat{A}+\widehat{B}=180^\circ$ ③ $\widehat{A}+\widehat{B}=90^\circ$

3. رسم مثلث في دائرة

$\mathscr{C}$ هي دائرة قطرها $[AB]$ و M نقطة من $\mathscr{C}$ غير A و B، إذن

① المثلث AMB قائم في M ② $MA=MB$ ③ $\widehat{AMB}=100^\circ$

4. مركز ثقل المثلث

مركز ثقل المثلث هو

① نقطة تلاقي ارتفاعاته ② نقطة تلاقي منصفاته ③ نقطة تلاقي متوسطاته

5. الدائرة المرسومة المارة برؤوس مثلث قائم

ABC مثلث قائم في A. مركز الدائرة المارة برؤوسه هو

① نقطة تلاقي ارتفاعاته ② منتصف $[BC]$ ③ مركز ثقله

6. حساب قياس زاوية في مثلث متساوي الساقين

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A وفيه $\widehat{BAC}=40^\circ$. إذن

① $\widehat{ABC}=40^\circ$ ② $\widehat{ABC}=70^\circ$ ③ $\widehat{ABC}=60^\circ$

7. حساب طول

ABC مثلث قائم في B، فيه $AC=4\text{ cm}$ و $\widehat{ACB}=60^\circ$. إذن

① $BC=2\text{ cm}$ ② $BC=3.5\text{ cm}$ ③ لا يمكن حساب BC

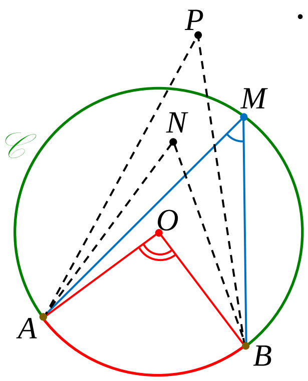
8. مثلثات متساوية الأضلاع

لمثلثٍ متساوي الأضلاع

① محور تناظر واحد فقط ② أكثر من محور تناظر ③ مركز تناظر

1 زوايا محيطية وزوايا مركزية

نشاط « تعرف الزاوية المحيطية والمركزية وقياساتها »



.1 دوائر وزوايا $\mathscr{C}$ هي دائرة مركزها O. A و B و M ثلاث نقاط من $\mathscr{C}$.

N نقطة داخل $\mathscr{C}$ و P نقطة خارجها.

نسمي $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية في الدائرة $\mathscr{C}$، تحصر (أو تقابل) القوس $\overset{\frown}{AB}$ الملون بالأحمر.

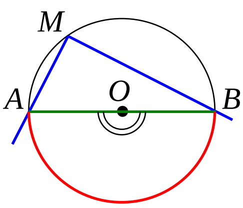
نسمي $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية في الدائرة $\mathscr{C}$، تحصر (أو تقابل) القوس $\overset{\frown}{AB}$ الملون بالأحمر.

ونقول عندئذ إنَّ الزاويتين، المحيطية $\widehat{AMB}$ والمركزية $\widehat{AOB}$ مشتركتان بالقوس $\overset{\frown}{AB}$ المشار إليه.

1. لماذا الزاويتان $\widehat{ANB}$ و $\widehat{APB}$ ليستا محيطيتين؟

2. ارسم الشكل وارسم في $\mathscr{C}$ زاوية محيطية أخرى تقابل القوس $\overset{\frown}{AB}$.

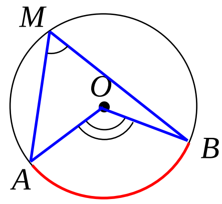
3. وضِع على $\mathscr{C}$ نقطةً E تجعل $\widehat{AEB}$ زاوية محيطية تحصر القوس الذي طرفاه A و B وتضم النقطة M. لوّن الزاوية المركزية التي تقابل هذا القوس.



4. في الشكل المرسوم جانباً، $[AB]$ قطر في الدائرة.

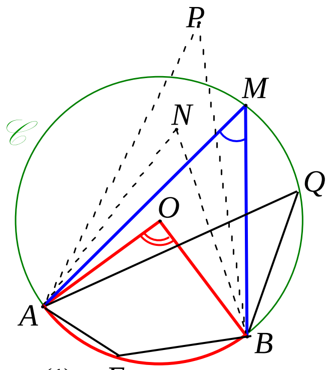
① ما نوع الزاوية $\widehat{BMA}$ وما قياسها؟

② علل المساواة $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ (*).



الحل:

1. لأنَّ N و P ليستا على الدائرة.



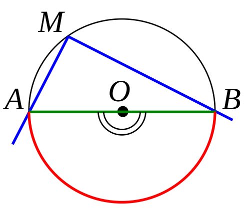
(1)

2 و **3.** نوضِّع نقطةً Q على القوس الكبرى $\overset{\frown}{AB}$، فتكون $\widehat{AQB}$ زاوية محيطية أخرى تقابل القوس $\overset{\frown}{AB}$.

3. نوضِّع E على القوس الصغرى $\overset{\frown}{AB}$، فتكون $\widehat{AEB}$ زاوية محيطية تحصر القوس التي طرفاها A و B وتضم النقطة M.

والزاوية المركزية التي تقابل هذه القوس هي الزاوية المنعكسة $\widehat{AOB}$.

4. في الشكل المرسوم جانباً، $[AB]$ قطر في الدائرة.

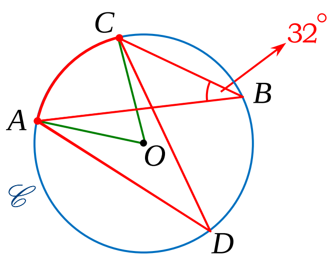


(2)

① الزاوية المحيطية $\widehat{AMB}$ قائمة لأنها تحصر قوس نصف دائرة.

② $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB} \cdots (*)$.

2. تطبيق

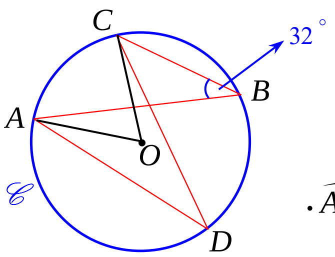


في الشكل المرافق، النقاط A و B و C و D نقاط من الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O و $\widehat{ABC} = 32^\circ$.

① حدد الزاوية المركزية التي تشترك مع $\widehat{ABC}$ بالقوس. ثم احسب قياسها.

② حدد الزاوية المحيطية التي تشترك مع $\widehat{ABC}$ بالقوس. ثم احسب قياسها. ماذا تلاحظ؟

الحل:



$\widehat{BAC}$ زاوية محيطية تشترك مع المركزية $\widehat{AOC}$ بالقوس $\overset{\frown}{AC}$،

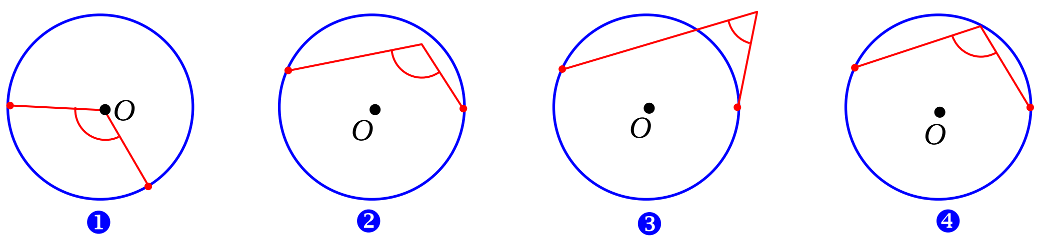
فحسب 1. يكون $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 2\times 32^\circ = 64^\circ$.

$\widehat{BDC}$ زاوية محيطية تشترك مع المركزية $\widehat{AOC}$ بالقوس $\overset{\frown}{AC}$،

إذن $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC}$ أي $64^\circ = 2\widehat{ADC}$، ومنها $\widehat{ADC} = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$.

تحقق من فهمك

في كل حالة، O هي مركز الدائرة. قل إن كانت الزاوية المشار إليها في الشكل محيطية أو مركزية أم ليست مركزية وليست محيطية. اذكر السبب إن كانت إجابتك نفياً أو إيجاباً.



الحل:

❶ الزاوية ليست مركزية، لأنَّ رأسها ليست مركز للدائرة.

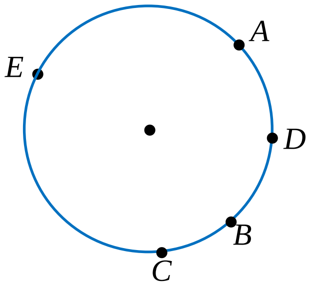
❷ الزاوية مركزية، لأنَّ رأسها مركز للدائرة.

❸ الزاوية مركزية، لأنَّ رأسها مركز للدائرة.

❹ الزاوية ليست مركزية، لأنَّ رأسها ليست مركز للدائرة.

تدرب

① A و B و C و D و E نقاطٌ من دائرة مركزها O.



❶ ارسم شكلاً ولا تستعمل في إجاباتك سوى هذه النقاط الخمس.

❷ لوّن بالأزرق القوس الذي تقابله الزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$.

❸ ارسم زاوية محيطية أخرى تقابل القوس نفسه. هل الزاوية المحيطية $\widehat{AEC}$ تقابل القوس نفسه؟

❹ ارسم الزوايا المحيطية التي تشترك مع المركزية $\widehat{DOE}$ بالقوس نفسه.

الحل:

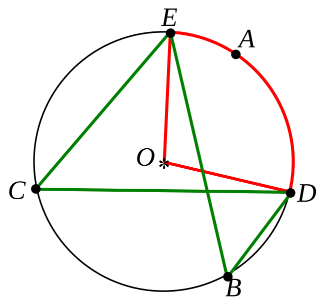
❶ الرسم

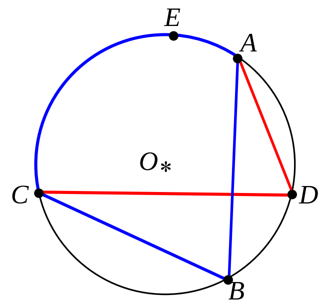
❷ القوس التي تقابلها الزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$ هي $\widehat{BC}$.

❸ $\widehat{ADC}$ هي زاوية محيطية أخرى تقابل القوس نفسها.

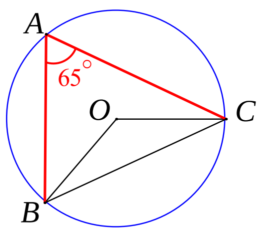
الزاوية المحيطية $\widehat{AEC}$ لا تقابل نفس القوس، بل تقابل $\widehat{ADBC}$.

❹ الزوايا المحيطية التي تشترك مع المركزية $\widehat{DOE}$ بالقوس نفسها هي $\widehat{DBE}$ و $\widehat{DCE}$، والقوس هي $\widehat{DE}$.



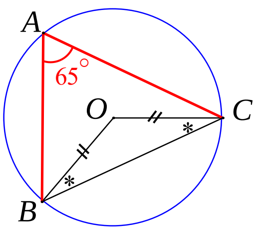


② A و B و C ثلاث نقاطٍ من دائرة مركزها O. نعلم أنَّ $\widehat{BAC} = 65^\circ$.



احسب قياس كلٍ من: ❶ $\widehat{BOC}$ ❷ $\widehat{OBC}$ ❸ $\widehat{OCB}$

الحل:

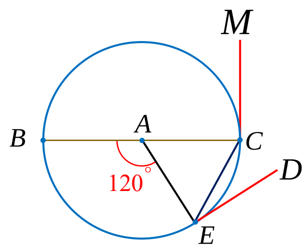


❶ $\widehat{BOC}$ مركزية و $\widehat{BAC}$ محيطية، وكلاهما تقابل القوس $\widehat{BC}$،

إذن $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2 \times 65^\circ = 130^\circ$.

❷ و ❸ $OB = OC$ أنصاف أقطار الدائرة، فالمثلث OAB متساوي

الساقين في O، إذن $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BOC}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ$.



③ $[BC]$ قطر في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A. E نقطة من هذه الدائرة تُحقّق $\widehat{BAE} = 120^\circ$.

❶ احسب قياسات الزوايا الآتية: $\widehat{CAE}$، $\widehat{ECB}$، $\widehat{CBE}$.

❷ احسب قياس الزاوية المماسية $\widehat{CED}$ وقياس $\widehat{BCM}$.

الحل:

❶ $\widehat{CAE}$ مركزية وتكمل الزاوية $\widehat{BAE}$ إذن

$$\begin{aligned}\widehat{CAE} &= 180^o - \widehat{BAE} \\ &= 180^o - 120^o \\ &= 60^o\end{aligned}$$

$\widehat{ECB}$محيطية، و $\widehat{BAE}$ مركزية وكلاهما تقابل القوس $\widehat{BE}$،

إذن $\widehat{ECB} = \frac{1}{2}\widehat{BAE} = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$.

$\widehat{CBE}$ محيطية، و $\widehat{CAE}$ مركزية وكلاهما تقابل القوس $\widehat{CE}$،

إذن $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{CAE} = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$.

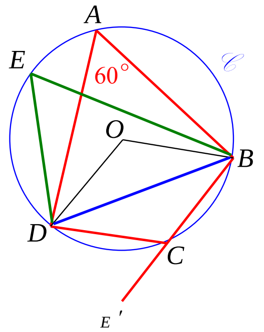
❷ $\widehat{CED}$ زاوية مماسية، و $\widehat{CAE}$ مركزية وكلاهما تقابل القوس $\widehat{CE}$،
إذن $\widehat{CED} = \frac{1}{2}\widehat{CAE} = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$.

نعلم أن المماس يعامد نصف القطر في نقطة التماس فقياس $\widehat{BCM} = 90^\circ$.

② الرباعي الدائري

نشاط « نقاط تقع على دائرة واحدة »

1. دراسة تجريبية



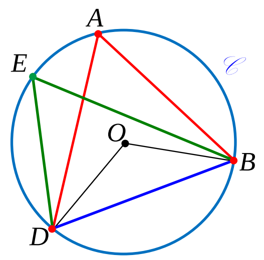
في الشكل المرافق، النقاط A و B و C و D و E واقعة على دائرة واحدة $\mathscr{C}$ مركزها O. $\widehat{BAD}=60^\circ$.

1. ما قياس الزاوية $\widehat{BED}$ ؟
2. احسب قياس كلٍّ من الزاويتين $\widehat{BOD}$ المباشرة والمنعكسة.
3. استنتج قياس الزاوية المحيطية $\widehat{BCD}$.
4. ما العلاقة بين قياسي الزاويتين المحيطيتين $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$؟
5. تقع النقطة E' على امتداد $[BC]$، وازن بين قياسي الزاويتين $\widehat{DCE'}$ و $\widehat{BAD}$.

الحل:

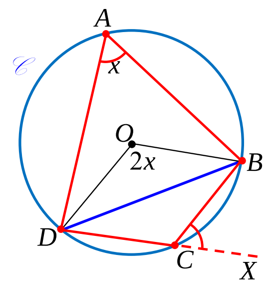
1. الزاوية $\widehat{BED}$ محيطية تشترك مع الزاوية المحيطية $\widehat{BAD}$ إذن $\widehat{BED}=60^\circ$.
2. الزاوية المباشرة $\widehat{BOD}$ مركزية و $\widehat{BAD}$ محيطية، وكلاهما تقابل القوس $\widehat{BCD}$،
إذن $\widehat{BOD}=2\widehat{BAD}=2\times 60^\circ=120^\circ$.
فيكون قياس الزاوية المنعكسة $\widehat{BOD}$ يساوي $360^\circ-120^\circ=240^\circ$
3. من كون قياس الزاوية المنعكسة $\widehat{BOD}$ يساوي 240° يكون قياس الزاوية المحيطية $\widehat{BCD}$ التي تشترك معها بالقوس يساوي $\widehat{BCD}=120^\circ$.
4. نلاحظ أن مجموع قياسي الزاويتين المحيطيتين $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ هو 180°.
5. $\widehat{DCE'}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ إذن $\widehat{DCE'}=\widehat{BAD}$.

2. إثبات



$[BD]$ وتر في دائرة $\mathscr{C}$، A و E نقطتان من هذه الدائرة غير B و D.

① إذا كانت النقطتان A و E واقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى (BD)، كانت الزاويتان $\widehat{BED}$ و $\widehat{BAD}$ في هذه الحالة محيطيتين مشتركتين بالقوس $\widehat{BD}$، فهما متساويتان.



الزاويتان المحيطيتان المشتركتان بقوس من دائرة متساويتان.

② إذا كانت النقطتان A و E في جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (BD)، ورمزنا إلى قياس الزاوية $\widehat{BAD}$ بالرمز x، استنتجنا من كونها محيطية

تشترك مع المركزية $\widehat{BOD}$ بالقوس $\widehat{BCD}$، أنّ $\widehat{BOD} = 2x$، فقياس الزاوية المنعكسة $\widehat{BOD}$ يساوي $360^\circ - 2x$.

ولما كانت الزاوية المنعكسة $\widehat{BOD}$ مركزية وتشترك مع المحيطية $\widehat{BCD}$ بالقوس $\widehat{BAD}$، استنتجنا أنَّ قياس الزاوية $\widehat{BCD}$ يساوي نصف قياس المركزية المنعكسة $\widehat{BOD}$، أي $\frac{1}{2}(360^\circ - 2x) = 180^\circ - x$. وبهذا يكون

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = x + (180^\circ - x) = 180^\circ .$$

فالزاويتان $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ متكاملتين.

مجموع قياسات زوايا أي رباعي يساوي 360°.

③ إذا مدّدنا $[DC)$ إلى X، لكان $\widehat{BCX} = \widehat{BAD}$ لأنَّ كلّاً منهما تكمل الزاوية $\widehat{BCD}$.

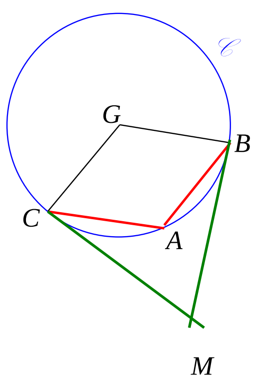
تحقق من فهمك

ABC مثلث متساوي الساقين، قياس زاوية رأسه A يساوي 120°، G مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوسه. ويتقاطع في M مماسا الدائرة $\mathscr{C}$ في B و C.

❶ ارسم شكلاً يتفق مع معطيات المسألة.

❷ أثبت أنَّ الرباعي $MBGC$ دائري.

الحل:



❶ الرسم.

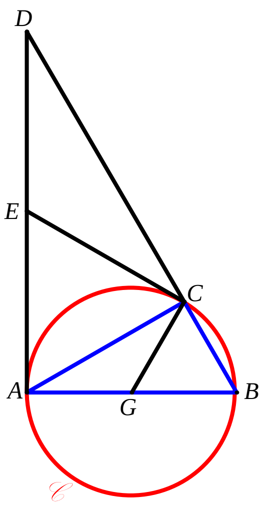
❷ نعلم أن المماس يعامد نصف القطر في نقطة التماس

إذن $\widehat{GBM} = \widehat{GCM} = 90^\circ$

وبهذا يكون $\widehat{GBM} + \widehat{GCM} = 180^\circ$.

إذن الرباعي $MBGC$ دائري.

تدرب



① ABC مثلث قائم في C ومرسوم في الدائرة $\mathscr{C}$، فيه $AB = 12$ و $\widehat{BAC} = 30^\circ$. مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A يتقاطع مع المستقيم (BD) في النقطة D.

❶ احسب مساحة المثلث ACD.

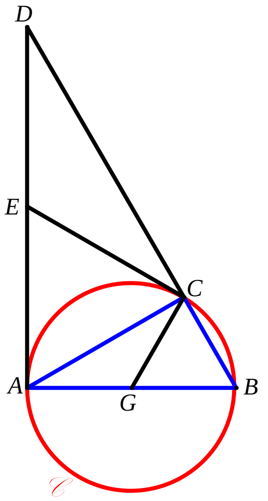
❷ لتكن E منتصف القطعة $[AD]$، أثبت أنَّ المستقيم (CE) مماس للدائرة $\mathscr{C}$.

❸ لتكن G مركز الدائرة $\mathscr{C}$، أثبت أنَّ الرباعي $AGCE$ هو دائري.

الحل:

❶ لدينا $AB = 12$ و $\widehat{BAC} = 30^\circ$ وبالتالي $CB = 6$ ويكون حسب مبرهنة فيثاغورث $CA = 6\sqrt{3}$.

مساحة المثلث ACD :



$$\begin{aligned} S(ACD) &= \frac{AC \times BC}{2} \\ &= \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} \\ &= 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

❷ المستقيم (AD) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ أي $\widehat{BAD} = 90^\circ$ ولدينا $\widehat{ABD} = 60^\circ$ فتكون $\widehat{BDA} = 30^\circ$.

اصبح لدينا $\widehat{ECA} = 60^\circ$ و $\widehat{ACG} = 30^\circ$ أي $\widehat{ECG} = 90^\circ$

إذن المستقيم مماس للدائرة $\mathscr{C}$.

❸ لدينا المستقيمان (CE) و (AD) للدائرة $\mathscr{C}$

إذن $\widehat{EAG} = \widehat{ECG} = 90^\circ$.

وبهذا يكون $\widehat{EAG} + \widehat{ECG} = 180^\circ$.

إذن الرباعي $AGCE$ دائري.

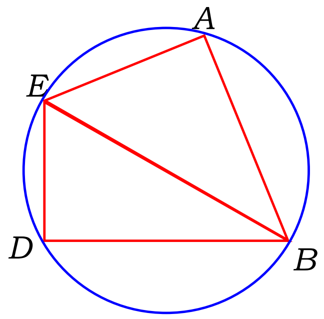
② ABE و DBE مثلثان قائمان، $[BE]$ وترٌ مشتركٌ لهما.

❶ أثبت أنَّ النقاط A و D و B و E واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}$. عيّنْ مركز هذه الدائرة وارسمها. (لاحظ وجود حالتين)

❷ في الحالة التي تكون النقطتان A و D بجهةٍ واحدةٍ نسبةً إلى المستقيم (BE). نضع النقطة H على نصف المستقيم $[ED)$ بحيث يكون $DH = DB$، ونضع النقطة T على نصف المستقيم $[BA)$ بحيث يكون $AT = AE$. أثبت أنَّ النقاط B و E و T و H واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}'$.

الحل:

❶ حالة (1):

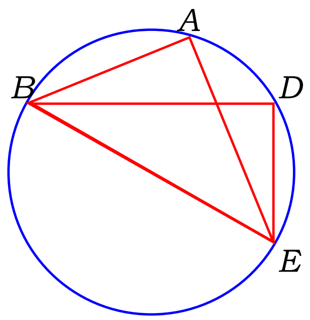


لدينا $\widehat{EAB} = \widehat{EDB} = 90^\circ$.

وبهذا يكون $\widehat{EAB} + \widehat{EDB} = 180^\circ$.

إذن الرباعي $ABDE$ دائري.

فالنقاط A و D و B و E واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}$. لتعيّينْ مركز هذه الدائرة نختار مثلث قائم تمر من رؤوسه الدائرة مثل ABE فيكون مركز الدائرة منتصف الوتر $[BE]$.



حالة (1):

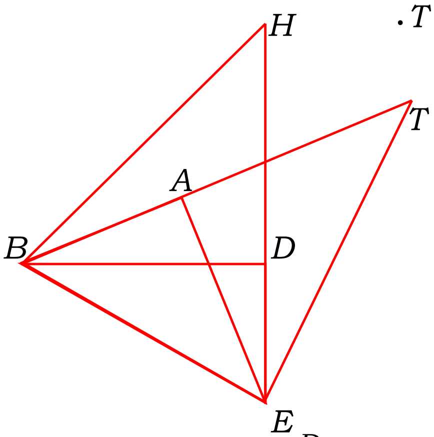
لدينا $\widehat{EAB} = \widehat{EDB} = 90°$.

إذن تساوت الزاويتان $\widehat{EAB}, \widehat{EDB}$ والنقطتان A و D

في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم (BE)،

إذن الرباعي $ADEB$ دائري.

فالنقاط A و D و B و E واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}$. لتعيّينْ مركز هذه الدائرة نختار مثلث قائم تمر من رؤوسه الدائرة مثل ABE فيكون مركز الدائرة منتصف الوتر $[BE]$.



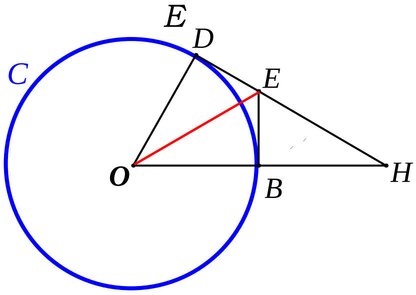
❷ لدينا المثلثان ATE, BDH قائمان ومتساويا الساقين إذن $\widehat{T} = \widehat{H} = 45°$.

إذن تساوت الزاويتان $\widehat{H}, \widehat{T}$ والنقطتان H و T

في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم (BE)،

إذن الرباعي $BHTE$ دائري.

فالنقاط B و E و T و H واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}'$.



③ في الشكل المرسوم جانباً: (BE) و (DH) مماسان للدائرة $\mathcal{C}(O,6)$ في النقطتين B و D على التوالي و $\widehat{BOD} = 60°$.

❶ احسب DH.

❷ أثبت أنَّ النقاط O و B و E و D واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}'$. عيّنْ مركزها وارسمها.

❸ احسب طول نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}'$.

الحل:

❶ في المثلث ODH يكون

$$\tan 60° = \frac{DH}{OD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{DH}{6}$$

$$DH = 6\sqrt{3}$$

❷ لدينا $\widehat{EBO} = \widehat{EDO} = 90^\circ$.

وبهذا يكون $\widehat{EBO} + \widehat{EDO} = 180^\circ$.

إذن الرباعي $ODEB$ دائري. فالنقاط O و B و E و D واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}'$. لتعيِّينْ مركز هذه الدائرة نختار مثلث قائم تمر من رؤوسه الدائرة مثل ODE فيكون مركز الدائرة منتصف الوتر $[OE]$.

❸ المثلثان EDO, EBO طبوقان أي $\widehat{EOB} = 30^\circ$

$$\cos \widehat{EOB} = \frac{OB}{OE}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{6}{OE}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{OE}$$

$$OE = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

فيكون طول نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}'$ يساوي $r = \frac{OE}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

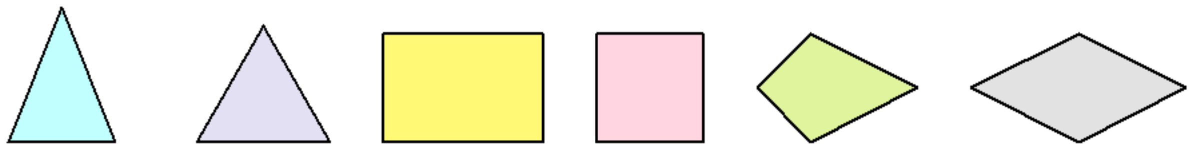
3 المضلعات المنتظمة

نشاط «تعرّف مضلعات منتظمة»

نقول إنَّ مضلعاً منتظمٌ، إذا كانت أطوال أضلاعه متساوية وكانت قياسات زواياه متساوية.

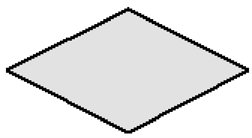
1. مضلعات ثلاثية أو رباعية

في كل من الحالات الآتية. هل المضلع منتظم؟

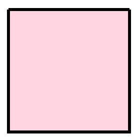


الحل:

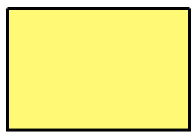
① و ②:



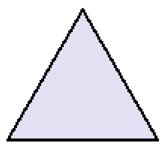
ليس منتظماً؛ لا تمر برؤوسه دائرة.



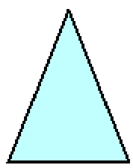
منتظمٌ؛ تمر برؤوسه دائرة.



ليس منتظماً؛ تمر برؤوسه دائرة.

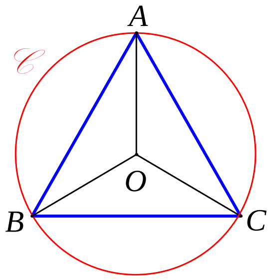


منتظمٌ؛ تمر برؤوسه دائرة.



ليس منتظماً؛ تمر برؤوسه دائرة.

2. مثلث متساوي الأضلاع في دائرة



① ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. ما قياسات زوايا المثلث ABC؟ استنتج قياسات الزوايا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COA}$.

نقول إنَّ O هي مركز المثلث المتساوي الأضلاع ABC.

② وضِع على ورقة بيضاء نقطتين O و M بحيث يكون $OM = 3\text{ cm}$. ارسم المثلث المتساوي الأضلاع MNP الذي مركزه O.

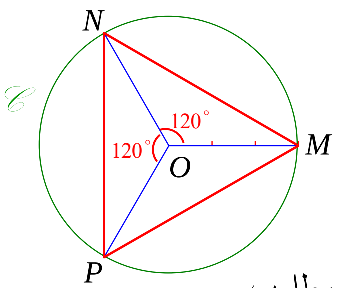
الحل:

1. ① قياسات زوايا المثلث المتساوي الأضلع متساوية، ومجموع زوايا أي مثلث يساوي 180°، نستنتج أنَّ $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

② الزوايا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COA}$ مركزية في الدائرة $\mathscr{C}$ وتقابل الأقواس التي تقابلها زوايا المثلث المحيطية، نستنتج أنَّ $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} = \widehat{AOB} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$.

2. • بعد رسم النقطتين O و M، نرسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O ونصف قطرها 3 cm.

• نستعمل منقلةً لرسم زاوية رأسها O وأحد ضلعيها $[OM]$ وقياسها 120°، نرمز إلى نقطة تقاطع ضلعها الآخر مع الدائرة $\mathscr{C}$ بالرمز N.



• نرسم زاوية رأسها O وأحد ضلعيها $[ON]$ وقياسها 120°، نرمز إلى نقطة تقاطع ضلعها الآخر مع الدائرة $\mathscr{C}$ بالرمز P.

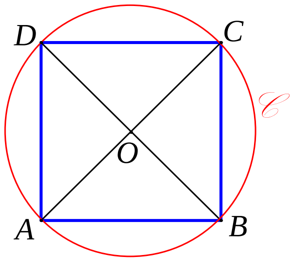
نرسم القطع الثلاث $[MN]$ و $[NP]$ و $[PM]$ فنحصل على المثلث المطلوب.

الإثبات:

$\widehat{NMP} = \frac{1}{2}\widehat{NOP} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ و $\widehat{MNP} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^\circ$ و $\widehat{NPM} = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

قياسات زوايا المثلث MNP متساوية، فهو متساوي الأضلاع.

3. مربع في دائرة



① $ABCD$ مربع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. ما قياسات الزوايا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COD}$ و $\widehat{DOA}$.

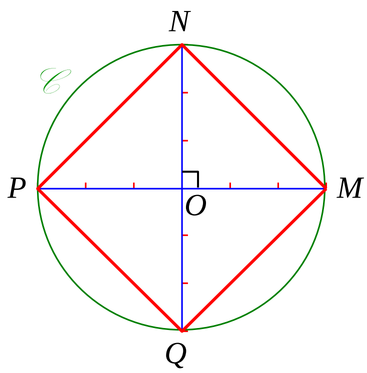
نقول إنَّ O هي مركز المربع $ABCD$.

② وضِّع على ورقة بيضاء نقطتين O و M بحيث يكون $OM = 3\text{ cm}$.
ارسم المربع $MNPQ$ الذي مركزه O.

الحل:

1. قطرا المربع متعامدان، إذن $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = \dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

2. • بعد رسم النقطتين O و M، نرسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O ونصف قطرها 3 cm.



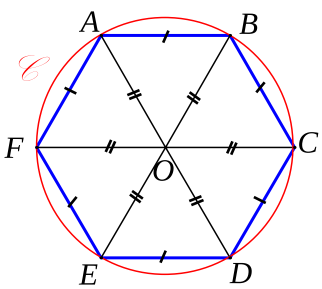
• نرسم النقطة P التي تقابل M قطرياً.

• نرسم القطر $[NQ]$ العمودي على القطر $[MP]$. نرسم الرباعي $MNPQ$ وهو المطلوب.

الإثبات:

قطرا الرباعي $MNPQ$ متعامدان ومتساويان فهو مربع.

4. مسدس في دائرة



$ABCDEF$ مسدس منتظم مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. المثلثات المتساوية الساقين OBA و OAF و $\cdots$ و OCB طبوقة، إذن $\widehat{BOA} = \widehat{AOF} = \cdots = \widehat{BOC}$.

① احسب القياس المشترك لتلك الزوايا المركزية.

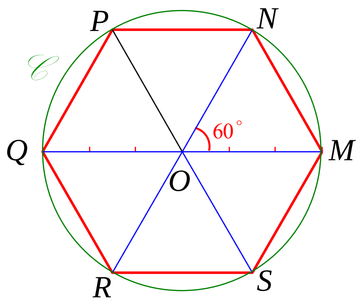
② استنتج أنَّ طول ضلع المسدس المنتظم يساوي نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحل:

1. ① قياس كلٍ من تلك الزوايا يساوي $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

② المثلثات المتساوية الساقين OAB و OAB و ..... و OFA طبوقة، وقياس زاوية الرأس لكلٍ منها

يساوي 60° فزوايا قاعداتها متساوية وقياس كل منها يساوي $60^\circ = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2}$ ، فهي متساوية الأضلاع وطول ضلع كلٍ منها يساوي نصف قطر الدائرة المرسومة على المضلع.

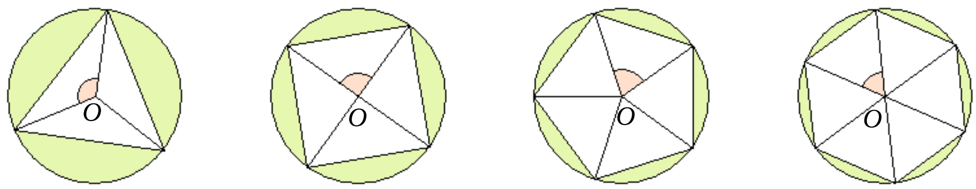


2. ① • بعد رسم النقطتين O و M ، نرسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O ونصف قطرها $3\ \text{cm}$.

② نستعمل منقلةً لرسم ست زوايا مركزية متتالية في الدائرة رأسها O وقياس كلٍ منها 60°، نرمز إلى نقاط تقاطع أضلاعها الأخرى مع الدائرة $\mathscr{C}$ بالرموز N و P و Q و R و S، فيكون $MNPQRS$ المضلع المطلوب.

تحقق من فهمك

في كل حالة، اذكر نوع المضلع المنتظم المرسوم في الدائرة التي مركزها O واحسب قياس الزاوية المشار إليها باللون الأحمر.



❶ ❷ ❸ ❹

الحل:

❶ مثلث متساوي الأضلاع، $\varphi = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

❷ مربع، $\varphi = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

❸ مخمس منتظم، $\varphi = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

❹ مسدس منتظم ، $\varphi = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

تدرّب

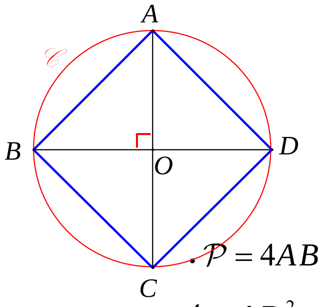
① $ABCD$ مربع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها $4\,\text{cm}$.

❶ احسب الطول AB.

❷ احسب محيط هذا المربع.

❸ احسب مساحة المربع $ABCD$.

الحل:



❶ قطرا المربع متعامدان ومتقاطعان في مركز الدائرة المرسومة عليه،

فالمثلث AOB قائم في O و $OA = OB = 3\text{ cm}$.

باستعمال مبرهنة فيثاغورث، نجد $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 9 + 9 = 18$،

ومنها $AB = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.

❷ نرمز إلى محيط هذا المربع بالرمز $\mathcal{P}$، فيكون $\mathcal{P} = 4AB = 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

❸ نرمز إلى مساحة هذا المربع بالرمز $\mathcal{A}$، فيكون $\mathcal{A} = AB^2 = (\sqrt{18})^2 = 18\text{ cm}^2$.

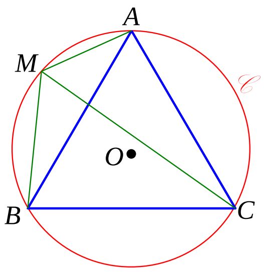
أو $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times BD}{2} = \dfrac{6 \times 6}{2} = 18\text{ cm}^2$

② ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O. M نقطة من الدائرة $\mathcal{C}$.

❶ احسب قياس كلٍّ من الزوايا: ① $\widehat{AMC}$ ② $\widehat{BMC}$ ③ $\widehat{AMB}$

❷ ماذا تسمي نصف المستقيم $[MC)$؟

الحل:



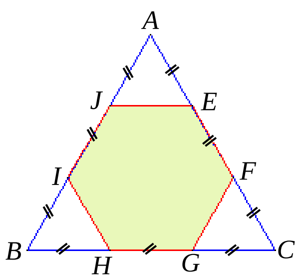
1. $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

① $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ محيطيتان تقابلان القوس $\overset{\frown}{AC}$.

② $\widehat{BMC} = \widehat{CAB} = 60^\circ$ محيطيتان تقابلان القوس $\overset{\frown}{BC}$.

③ $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{BMC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

2. $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$، فنصف المستقيم $[MC)$ منصف للزاوية $\widehat{AMB}$.



③ ABC مثلث متساوي الأضلاع. و $EFGHIJ$ مسدس مشار إليه في الشكل المرافق. هل المسدس $EFGHIJ$ منتظم؟ اشرح.

الحل:

المثلث AEJ متساوي الساقين في A و $\widehat{EAJ} = 60^\circ$،

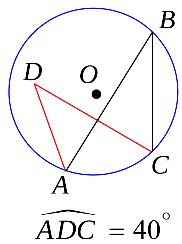
فهو متساوي الأضلاع، إذن $EJ = AE = EF$.

والمثلثات التي رؤوسها رؤوس المثلث ABC طبوقة، يترتب على ذلك أنَّ أطوال أضلاع المسدس متساوية، وكل من زواياه قياسها $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$، أي إنّ قياسات زواياه متساوية، فهو منتظم.

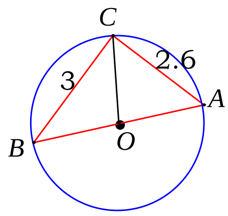
تمرينات ومسائل

1 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

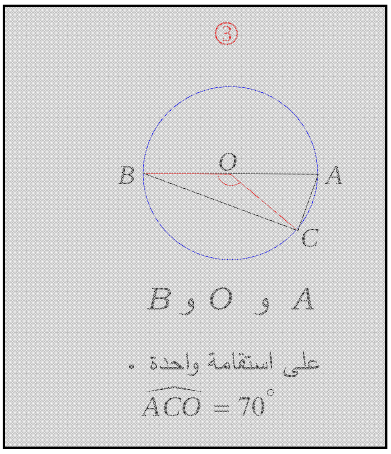
(1) يرمز O إلى مركز الدائرة المرسومة. $\widehat{ABC} = 20^\circ$ في الشكل



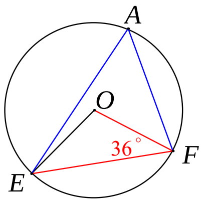
$\widehat{ADC} = 40^\circ$



O و A و B على استقامة واحدة

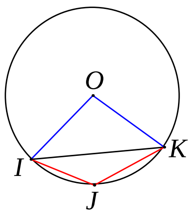


A و O و B على استقامة واحدة .
$\widehat{ACO} = 70^\circ$



(2) A و E و F ثلاث نقاط من دائرة مركزها O. $\widehat{OFE} = 36^\circ$، إذن

① $\widehat{EAF} = 54^\circ$ ② $\widehat{EAF} = 72^\circ$ ③ $\widehat{EAF} = 108^\circ$



(3) I و J و K ثلاث نقاط من دائرة مركزها O. $\widehat{IOK} = 100^\circ$، إذن

① $\widehat{KJI} = 100^\circ$ ② $\widehat{KJI} = 110^\circ$ ③ $\widehat{KJI} = 130^\circ$

(4) $ABCDEF$ مسدس منتظم، فقياس الزاوية $\widehat{EDC}$ يساوي

① 60° ② 120° ③ 135°

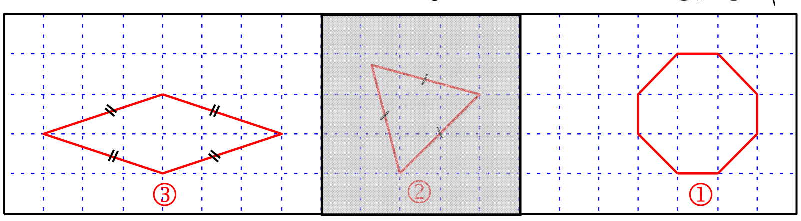
(5) النقطة O هي مركز مثمن منتظم أحد أضلاعه $[AB]$، فقياس الزاوية $\widehat{AOB}$ يساوي

① 30° ② 45° ③ 60°

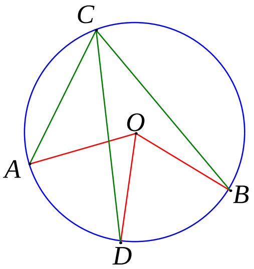
(6) $ABCD$ مربع مرسوم في دائرة نصف قطرها $3\ cm$، فطول ضلع هذا المربع يساوي

① $3\ cm$ ② $4.2\ cm$ ③ $3\sqrt{2}\ cm$

(7) المضلع المنتظم من بين المضلعات الآتية هو:



2 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.



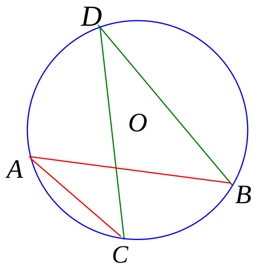
(1) A و B و C و D أربع نقاط من دائرة مركزها O. $\widehat{BOD} = 66^\circ$ و $\widehat{DCA} = 33^\circ$. إذن

① $\widehat{AOD} = 66^\circ$ ② $\widehat{DCB} = 33^\circ$ ③ $[CD]$ هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{BCA}$.

(2) ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة نصف قطرها $4\ \text{cm}$. إذن الطّول AB بالسنتيمتر يساوي: ① $8 \times \cos 30^\circ$ ② $8 \times \sin 60^\circ$ ③ 8

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) A و B و C و D أربع نقاط من دائرة واحدة. إذن $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

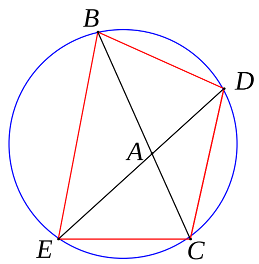


الحل:

موافق، لانهما زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

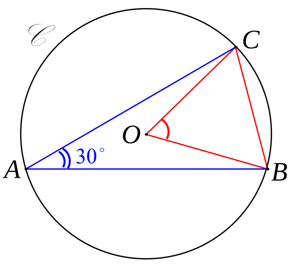
(2) $BDCE$ رباعي مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$، قطراه متقاطعان في A. $\widehat{EDC} = 35^\circ$ و $\widehat{EAC} = 72^\circ$.

إذن A هي مركز الدائرة $\mathscr{C}$.



الحل:

غير موافق، لأنه لو كانت A هي مركز الدائرة $\mathscr{C}$ لكان $\widehat{EDC} = \frac{1}{2}\widehat{EAC}$ فالزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس.



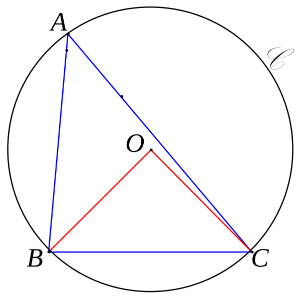
(3) ABC مثلث، فيه $\widehat{BAC} = 30^\circ$ و $BC = 4\ \text{cm}$. إذن نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوي $4\ \text{cm}$.

الحل:

موافق، لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس.

أي $\widehat{BOC} = 60^\circ$ اصبح لدينا مثلث متساوي الساقين فيه زاوية 60^o فهو مثلث متساوي الأضلاع.

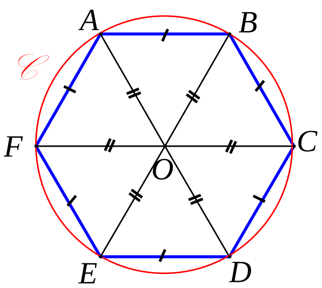
أي $OB = 4\ \text{cm}$



(4) ABC مثلث، فيه $\widehat{ABC}=85^\circ$ و $\widehat{ACB}=50^\circ$. O مركز الدائرة المارة برؤوسه. إذن المثلث OBC قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

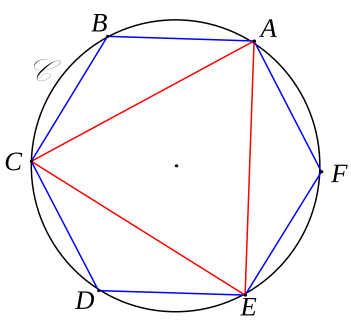
الحل:

موافق، لأن قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ هو 45^o ولكن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس. فيكون قياس الزاوية $\widehat{BOC}$ هو 90^o



(5) مسدس منتظم مرسوم في دائرة قطرها 5 cm . محيط هذا المسدس يساوي 30 cm .

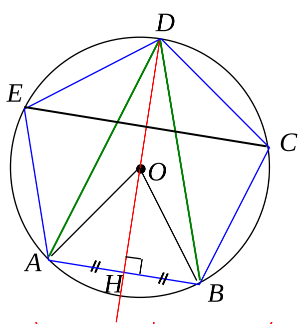
الحل: غير موافق، ليكن $ABCDEF$ مسدس منتظم مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O . المثلثات OBA و OAF و ... و OCB متساوية الأضلاع وطبوقة، طول ضلع المسدس المنتظم يساوي نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه. أي ضلع المسدس المنتظم يساوي 2.5 محيط هذا المسدس يساوي $6\times2.5=15\text{ cm}$.



(6) $ABCDEF$ مسدس منتظم. إذن المثلث ACE متساوي الأضلاع.

الحل:

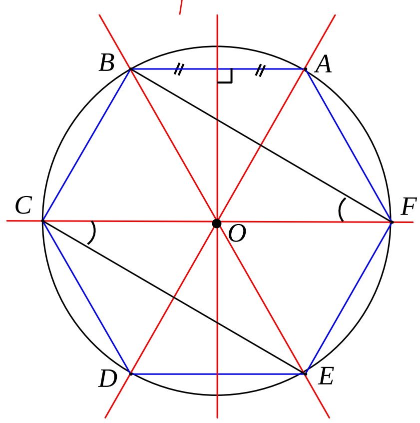
موافق، لأن المثلثات ABC, DEC, FEA طبوقة فالمثلث ACE متساوي الأضلاع.



(7) للمخمس المنتظم خمسة محاور تناظرية.

الحل:

موافق، ففي الشكل المجاور يتضح أن (DH) محور تناظر وبالمثل نثبت أن كل محور ضلع في المخمس هو محور تناظر .



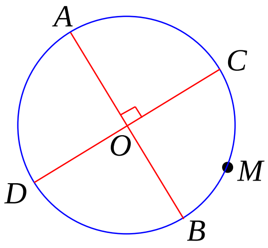
(8) للمسدس المنتظم ستة محاور تناظرية.

الحل:

موافق، ففي الشكل المجاور يتضح أنه لدينا 6 محور تناظر

4 $[AB]$ و $[CD]$ قطران متعامدان في دائرة مركزها O. M نقطة من القوس الصغرى $\overset{\frown}{BC}$. احسب قياس كلٍ من:

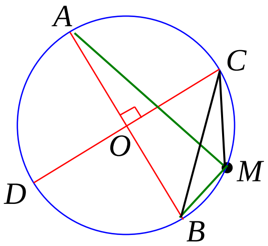
① $\widehat{AMB}$ ② $\widehat{AMC}$ ③ $\widehat{BMC}$



الحل:

① المثلث AMB مرسوم في دائرة قطرها $[AB]$، فهو قائم في M،

إذن $\widehat{AMB} = 90^\circ$

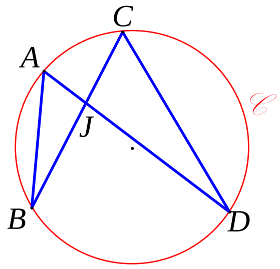


② $\widehat{AMC}$ محيطية وتشترك مع المركزية $\widehat{AOC}$ بالقوس $\overset{\frown}{AC}$، إذن

$\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$.

③ $\widehat{BMC} = \widehat{BMA} + \widehat{AMC} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

5 A و B و C و D نقاطٌ من دائرة $\mathscr{C}$. نعلم أنَّ $\widehat{ABC} = 22^\circ$ و $\widehat{BAD} = 58^\circ$. الوتران $[AD]$ و $[BC]$ متقاطعان في J. احسب قياس كلٍّ من: ① $\widehat{BCD}$ ② $\widehat{CDA}$ ③ $\widehat{CJD}$



الحل:

① $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ محيطيتان تقابلان القوس $\overset{\frown}{BD}$، فهما متساويتان، إذن $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 58^\circ$.

② $\widehat{CDA}$ و $\widehat{ABC}$ محيطيتان تقابلان القوس $\overset{\frown}{AC}$، فهما متساويتان، إذن $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 22^\circ$.

③ $\widehat{CJD} = \widehat{AJB}$ لأنهما متقابلتان بالرأس. ومجوع زوايا المثلث AJB هو 180°، إذن:

$\widehat{CJD} = \widehat{AJB} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BAD}) = 180^\circ - (22^\circ + 58^\circ) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

6

1. ارسم نقطتين O و A المسافة بينهما $4\ \text{cm}$.

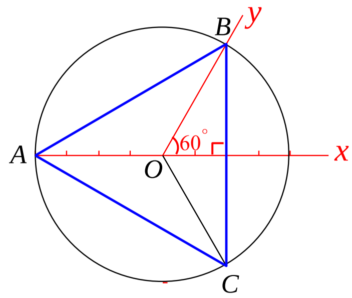
2. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O وتمر بالنقطة A.

3. استعمل مسطرة ومنقلة لرسم مثلث ABC متساوي الأضلاع في الدائرة $\mathscr{C}$.

4. ارسم المثلث ABC المتساوي الأضلاع في الدائرة $\mathscr{C}$، دون استعمال منقلة.

الحل:

1. و **2.** رسم O و A والدائرة $\mathscr{C}$.



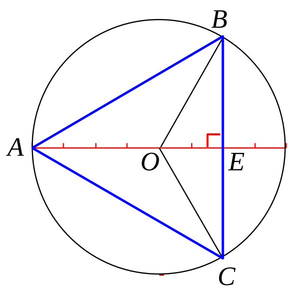
3. نستعمل المنقلة لرسم زاوية رأسها O وقياسها 60° أحد ضلعيها $[Ox)$ على استقامة (AO) وضلعها الآخر $[Oy)$ يقطع الدائرة في B.

نظيرة النقطة B بالنسبة إلى (Ax) هي الرأس الثالث C للمثلث المطلوب.

الإثبات: المثلث OBC متساوي الساقين في O، إذن $\widehat{COx} = 60^\circ$، ومنها $\widehat{BOC} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$.

$\widehat{BAC}$ محيطة وتشترك مع $\widehat{BOC}$ بالقوس $\overset{\frown}{BC}$، إذن $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\times 120^\circ = 60^\circ$.

A نقطة من محور $[BC]$، إذن $AB = AC$، فالمثلث ABC متساوي الساقين في A، وفيه $\widehat{BAC} = 60^\circ$، فهو متساوي الأضلاع.



4. نرسم النقطة E على $[AO)$ وبطول $OE = 2\text{ cm}$.

نرسم من E العمود على (AO) فيقطع الدائرة في B و C، ويكون المثلث ABC متساوي الأضلاع.

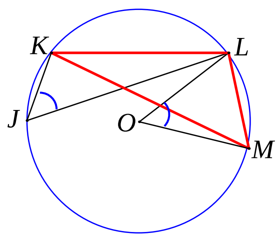
الإثبات: في المثلث OBE القائم في E، لدينا $\cos\widehat{BOE} = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$،

إذن $\widehat{BOE} = 60^\circ$ وبالتالي $\widehat{BOC} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$.

ثم نتابع الإثبات كما ورد في **3**.

7

J و K و L و M نقاط من دائرة مركزها O.



$$\widehat{KJL} = \widehat{LOM} = 52^\circ$$

احسب قياسات زوايا المثلث LMK.

الحل:

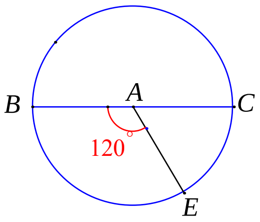
- $\widehat{LMK}$ و $\widehat{KJL}$ زاويتان محيطيتان تقابلان القوس $\overset{\frown}{LK}$، فهما متساويتان، إذن $\widehat{LMK} = 52^\circ$.
- $\widehat{LKM}$ محيطية وتشترك مع المركزية $\widehat{LOM}$ بالقوس $\overset{\frown}{LM}$،

إذن $\widehat{LKM} = \frac{1}{2}\widehat{LOM} = \frac{1}{2}\times 52^\circ = 26^\circ$.

- مجموع زوايا المثلث LMK يساوي 180°،

إذن $\widehat{KLM} = 180^\circ - (\widehat{LMK} + \widehat{LKM}) = 180^\circ - (52^\circ + 26^\circ) = 102^\circ$.

8 $[BC]$ قطر في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A . E نقطة من هذه الدائرة تُحقّق $\widehat{BAE}=120^\circ$. F نقطة من $\mathscr{C}$ تختلف عن B و C و E .



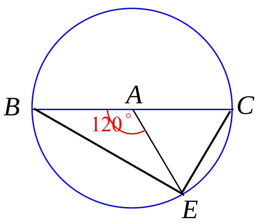
احسب قياسات الزوايا الآتية:

① $\widehat{CAE}$ ② $\widehat{ECB}$ ③ $\widehat{CBE}$

الحل:

① $\widehat{CAE}=\widehat{CAB}-\widehat{BAE}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

② $\widehat{ECB}$ محيطية، تشترك مع المركزية $\widehat{EAB}$ بالقوس $\widehat{BE}$،



إذن $\widehat{ECB}=\frac{1}{2}\widehat{BAE}=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$.

③ $\widehat{CBE}$ محيطية، تشترك مع المركزية $\widehat{CAE}$ بالقوس $\widehat{CE}$،

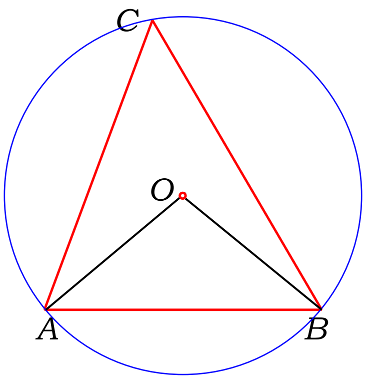
إذن $\widehat{CBE}=\frac{1}{2}\widehat{CAE}=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$.

9 $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 7 cm.

1. ارسم $[AB]$ وارسم نقطةً C بحيث تحصل على $\widehat{BAC}=70^\circ$ و $\widehat{ABC}=60^\circ$. ثم ارسم الدائرة المارة بروؤس المثلث ABC . ارمز إلى مركزها بالرمز O.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{AOB}$.

الحل:



$$\widehat{ABC}=180^\circ-(60^\circ+70^\circ)=50^\circ$$

ولأن قياس الزاوية المركزية يساوي ضعفي قياس الزاوية المحيطية التي تشترك معها بالقوس فإن:

$$\widehat{AOB}=2\,\widehat{ABC}=100^\circ$$

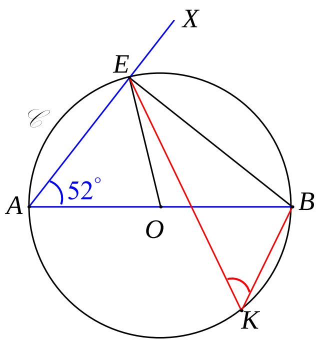
10 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ حيث $AB=8\text{ cm}$.

1. ارسم شكلاً، حسب معطيات النص، ووضِّع على $\mathscr{C}$ نقطةً E تحقق $\widehat{BAE}=52^\circ$.

2. أثبت أنَّ المثلث AEB قائم الزاوية.

3. وضِّع على القوس $\widehat{AB}$ التي لا تضم E نقطةً K . احسب قياس كلٍّ من $\widehat{BOE}$ و $\widehat{BKE}$.

الحل:



1. نستعمل منقلةً لرسم نصف مستقيم $[AX)$ يصنع مع (AB) زاوية قياسها 52°، فيقطع الدائرة في النقطة E.

2. $[AB]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوس المثلث ABE، فهذا المثلث قائم في E.

3. $\widehat{BOE}$ مركزية تشترك مع $\widehat{BAE}$ بالقوس $\widehat{BE}$، إذن

$$\widehat{BOE} = 2\widehat{BAE} = 2\times 52^\circ = 104^\circ$$

$\widehat{BKE}$ و $\widehat{BAE}$ محيطيتان تقابلان القوس $\widehat{BE}$، فهما متساويتان، إذن $\widehat{BKE} = 52^\circ$.

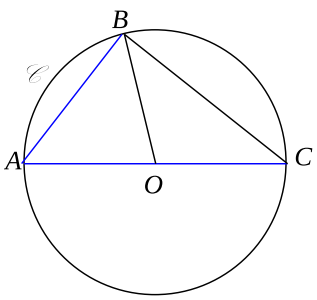
11 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O ونصف قطرها 4 cm. A و B نقطتان من $\mathscr{C}$ تحقّقان $\widehat{AOB} = 70^\circ$، C هي النقطة المقابلة قطرياً للنقطة A.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص، ثم أثبت أنَّ المثلث ABC قائم الزاوية.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{ACB}$.

3. احسب الطول AB مقرباً إلى أقرب ميليمتر.

الحل:



1. الرسم

الزاوية $\widehat{ABC}$ محيطية تقابل قوس نصف الدائرة فقياسها 90°

فالمثلث ABC قائم الزاوية.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{ACB}$.

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية التي تشترك معها بالقوس فإن:

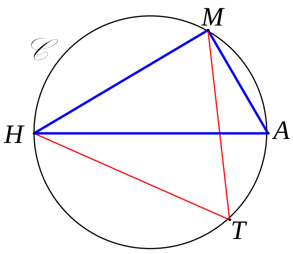
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 35^\circ$$

3. احسب الطول AB مقرباً إلى أقرب ميليمتر.

$$\begin{aligned} AB &= AC\times \sin C \\ &= 8\times \sin 35^\circ \end{aligned}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\begin{aligned} AB &\approx 8\times 0.57 \\ &\approx 4.56\,\text{cm} \\ &\approx 45.6\,\text{mm} \\ &\approx 46\,\text{mm} \end{aligned}$$



12 $\mathscr{C}$ دائرة قطرها $AH = 9\text{ cm}$. M و نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ تحقّق $AM = 4.5\text{ cm}$ و T نقطة أخرى من $\mathscr{C}$.

1. تحقق من أنَّ المثلث MAH قائم الزاوية.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{MHA}$.

3. ما قياس الزاوية $\widehat{HTM}$ ؟

الحل:

1. $[AH]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوس المثلث MAH، فهذا المثلث قائم في M.

2. في المثلث MAH القائم في M، $\sin\widehat{MHA} = \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{4.5}{9} = 0.5$، إذن $\widehat{MHA} = 30^\circ$.

3. في المثلث MAH القائم في M، $\widehat{MAH} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

و $\widehat{MTH} = \widehat{MAH}$ لأنهما محيطيتان تقابلان القوس $\overset{\frown}{MH}$، نستنتج أنَّ $\widehat{MTH} = 60^\circ$.

13 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O.

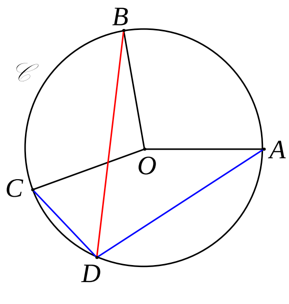
1. وضِّع النقاط A و B و C، بهذا الترتيب، على $\mathscr{C}$ بحيث يكون $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 100^\circ$. ثم وضِّع نقطةً D على القوس $\overset{\frown}{AC}$ التي لا تضم B.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{ADB}$.

3. أثبت أنَّ نصف المستقيم $[DB)$ منصف للزاوية $\widehat{ADC}$.

الحل:

1. الرسم:



تنتج B عن A بدوران مركزه O وزاويته 100°.

وتنتج C عن B بدوران مركزه O وزاويته 100°.

2. $\widehat{ADB}$ محيطية وتشترك مع المركزية $\widehat{AOB}$ بالقوس $\overset{\frown}{AB}$،

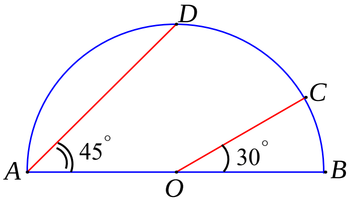
إذن $\widehat{ADB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}\times 100^\circ = 50^\circ \cdots(1)$.

3. $\widehat{BDC}$ محيطية وتشترك مع المركزية $\widehat{BOC}$ بالقوس $\overset{\frown}{BC}$،

إذن $\widehat{BDC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\times 100^\circ = 50^\circ \cdots(2)$.

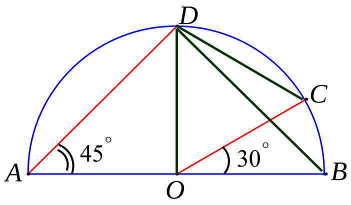
نجد من (1) و (2) أنَّ $\widehat{ADB} = \widehat{BDC}$، إذن نصف المستقيم $[DB)$ منصف للزاوية $\widehat{ADC}$.

14 C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ تحقّقان $\widehat{AOC}=30^\circ$ و $\widehat{BAD}=45^\circ$.



1. ما طبيعة المثلث ADB ؟ اشرح إجابتك.
2. ما طبيعة المثلث COD ؟ اشرح إجابتك.

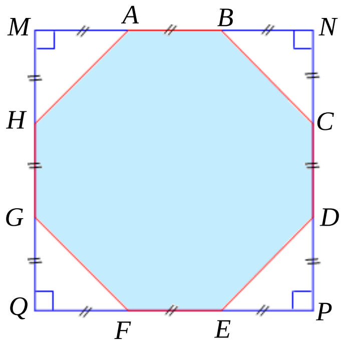
الحل:



1. $[AB]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوس المثلث ADB، فهذا المثلث قائم في D .
2. $\widehat{DAB}$ محيطية وتشترك مع المركزية $\widehat{BOD}$ بالقوس $\widehat{BD}$، إذن $\widehat{BOD}=2\widehat{DAB}=2\times 45^\circ=90^\circ$.

$\widehat{COD}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ اصبح لدينا مثلث متساوي الساقين وفيه زاوية 60° فهو متساوي الأضلاع.

15 $MNPQ$ مربع. و $ABCDEFGH$ مثمن مشار إليه في الشكل المرافق.



1. هل هذا المثمن منتظم؟ اشرح.
2. $\mathcal{A}$ هي مساحة المربع $MNPQ$ و $\mathcal{A}'$ مساحة المثمن.

اشرح لماذا $\mathcal{A}'=\frac{7}{9}\mathcal{A}$ ؟

الحل:

1. في المثلث NBC القائم في N، وتره هو أطول أضلاعه، إذن $BC>BN$ وبالتالي $BC>BA$.

فهذا المثمن غير منتظم.

2. نرمز إلى طول ضلع المربع $MNPQ$ بالرمز 3ℓ، فيكون $\mathcal{A}=(3\ell)^2=9\ell^2$.

المثلثات القائمة في رؤوس المربع طبوقة ومساحة أحدها يساوي $\frac{1}{2}\ell\times\ell=\frac{1}{2}\ell^2$، فمجموع مساحاتها يساوي $4\times\frac{1}{2}\ell^2=2\ell^2$. إذن $\mathcal{A}'=\mathcal{A}-2\ell^2=9\ell^2-2\ell^2=7\ell^2$.

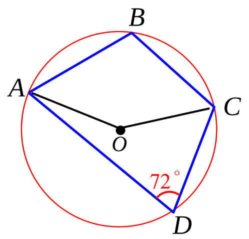
وبهذا يكون $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}=\frac{7\ell^2}{9\ell^2}=\frac{7}{9}$، وبالتالي $\mathcal{A}'=\frac{7}{9}\mathcal{A}$.

لإحراز تقدم

16 رباعي دائري

$ABCD$ رباعي دائري (رباعي مرسوم في دائرة) مركزها O. نعلم أنَّ $\widehat{ADC}=72^\circ$. احسب قياس الزاوية $\widehat{ABC}$.

الحل:



$\widehat{AOC}$ مركزية وتشترك مع المحيطية $\widehat{ADC}$ بالقوس $\widehat{ABC}$،

إذن $\widehat{AOC}=2\times\widehat{ADC}=2\times72^\circ=144^\circ$.

فالمركزية $\widehat{AOC}$ التي تقابل القوس $\widehat{ADC}$، قياسها يساوي

$360^\circ-144^\circ=216^\circ$. وهذه تشترك مع المحيطية $\widehat{ABC}$

بالقوس $\widehat{ADC}$، نستنتج أنَّ $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\times216^\circ=108^\circ$.

17 وتران متعامدان

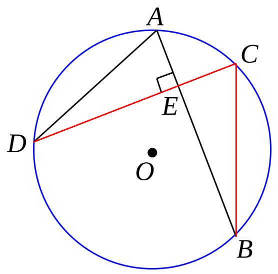
A و B و C و D أربع نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. الوتران $[AB]$ و $[CD]$ متعامدان في E. $\widehat{BCD}=69^\circ$.

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{ADC}$.

2. ① ارسم المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث EBC، ولتكن F نقطة تلاقيه مع $[BC]$.

② ما طبيعة المثلث EFC؟ تحقق من إجابتك.

③ استنتج قياس الزاوية $\widehat{CEF}$.



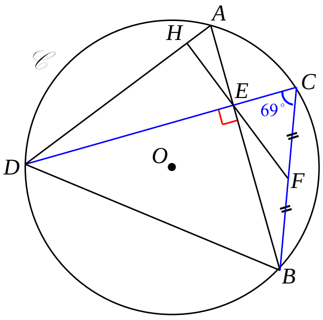
3. يقطع المستقيمُ (EF) القطعة المستقيمة $[AD]$ في النقطة H.

① ما قياس الزاوية $\widehat{DEH}$؟ لماذا؟

② استنتج قياس الزاوية $\widehat{DHE}$ في المثلث DEH.

③ استنتج أيضاً دور المستقيم (EH) في المثلث ADE.

الحل:



1. في المثلث BCE القائم في E، $\widehat{ABC}=90^\circ-69^\circ=21^\circ$.

$\widehat{ADC}$ و $\widehat{ABC}$ محيطيتان تقابلان القوس $\widehat{AC}$، فهما متساويتان،

إذن $\widehat{ADC}=21^\circ$.

2. ① و ② في المثلث BCE القائم في E، المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصفه، أي $EF=\frac{1}{2}BC=CF$، فالمثلث EFC متساوي الساقين في F.

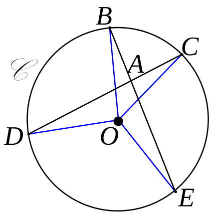
③ زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متساويتان، إذن $\widehat{CEF}=\widehat{ECF}=69^\circ$.

3. ① $\widehat{DEH}$ و $\widehat{CEF}$ متقابلتان بالرأس، إذن $\widehat{DEH}=\widehat{CEF}=69^\circ$.

② في المثلث DHE، $\widehat{DHF}=180^\circ-(\widehat{ADC}+\widehat{DEH})=180^\circ-(21^\circ+69^\circ)=90^\circ$.

③ وجدنا أنَّ $\widehat{DEH}=90^\circ$، إذن $(EH)\perp(AD)$، فالقطعة $[EH]$ هي الارتفاع المتعلق بالوتر في المثلث ADE القائم في E.

18 زاوية داخلية في دائرة



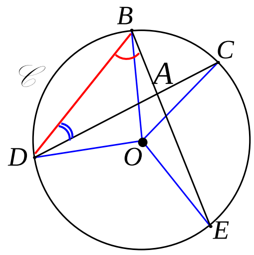
A و B و C و D أربع نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. $\widehat{BOC}=50^\circ$ و $\widehat{DOE}=120^\circ$. (BE) و (DC) متقاطعتان في A.

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{DAE}$. ($\widehat{DAE}$ زاوية داخلية في الدائرة)

2. اكتب نصّاً بحساب قياس الزاوية الداخلية في الدائرة.

الحل:

معلومة: الزاوية الداخلية في الدائرة هي تلك التي يقع رأسها داخل الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة. والزاوية المركزية حالة خاصة من الزاوية الداخلية.



1. نرسم الوتر $[BD]$

$\widehat{DAE}$ زاوية خارجية في المثلث ABD،

إذن $\widehat{DAE}=\widehat{DBE}+\widehat{BDC}\cdots(*)$

$\widehat{DBE}$ زاوية محيطية تشترك مع المركزية $\widehat{DOE}$ بالقوس $\widehat{DE}$،

إذن $\widehat{DBE}=\frac{1}{2}\widehat{DOE}=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ\cdots(1)$

$\widehat{BDC}$ زاوية محيطية تشترك مع المركزية $\widehat{BOC}$ بالقوس $\widehat{BC}$،

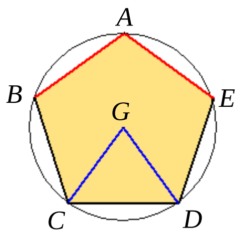
إذن $\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\frac{1}{2}\times50^\circ=25^\circ\cdots(2)$

نعوض من (1) و (2) في (*) فنحصل على $\widehat{DAE}=60^\circ+25^\circ=85^\circ$.

2. تكتب العلاقة (*) بعد الأخذ بالعلاقتين (1) و (2) بالشكل $\widehat{DAE}=\frac{1}{2}(\widehat{DOE}+\widehat{BOC})$.

أي إنَّ: قياس الزاوية الداخلية في الدائرة يساوي نصف مجموع قياسي الزاويتين المركزيتين المقابلتين للقوسين المحددتين بضلعي الزاوية الداخلية وبامتداديهما.

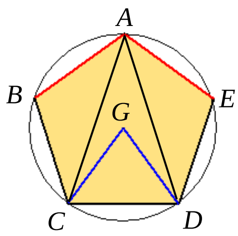
19 مخمس منتظم ودائرة



$ABCDE$ مخمس منتظم مركزه G.

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{CGD}$.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{EAB}$.



الحل:

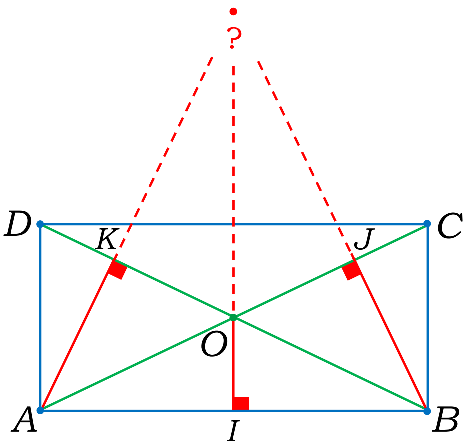
1. $\widehat{CGD} = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

2. $\widehat{BGC} = \widehat{CGD} = \widehat{DGE} = 72^\circ$ لأنها زوايا مركزية تقابل أقواساً متساوية.

إذن $\widehat{EAB} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = \dfrac{1}{2}(\widehat{BGC} + \widehat{CGD} + \widehat{DGE}) = \dfrac{1}{2}(72^\circ + 72^\circ + 72^\circ) = 108^\circ$.

20

نتأمّل مستطيلاً $ABCD$ يتقاطع قطراه في O.



1. سمِّ كل رباعي دائري في الشكل مع التعليل.

2. أثبت أن المستقيمات (BJ) و (AK) و (IO) تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل:

1. $ABCD$ رباعي دائري لأن $A + C = 180^\circ$.

$AIOK$ رباعي دائري لأن $I + K = 180^\circ$.

$BIOJ$ رباعي دائري لأن $J + I = 180^\circ$.

يوجد العديد من الرباعيات الدائرية ولكن غير مسماة.

2. نعلم أن الارتفاعات تتلاقى في نقطة واحدة ونلاحظ أن المستقيمات الملونة باللون الأحمر هي ارتفاعات المثلث AOB فهي تتلاقى في نقطة واحدة أي المستقيمات (BJ) و (AK) و (IO) تتلاقى في نقطة واحدة.

4

الوحدة الرابعة
مجسمات ومقاطع

1. تذكرة بالمجسمات
2. الكرة
3. مقاطع مجسمات

مخطط بناء الوحدة

مكونات الوحدة	عدد الحصص	الشهر	الاسبوع
1- تذكرة بالمجسمات	2	آذار	الثاني
2- الكرة	2	آذار	الثالث
3- مقاطع مجسمات	4	آذار	الرابع
		نيسان	الأول
تمرينات ومسائل	6	نيسان	الثاني
			الثالث
			الرابع
اختبار	1	أيار	الأول
المجموع	15		9

هذا التوزيع تقريبي وبإمكان المدرس أن يخطط بموجبه حسب مستوى طلابه من صف لآخر ممكن اضافة أو اختصار حصة لهذا التوزيع .

مفردات لغوية وترميز

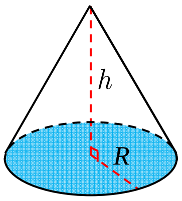
المصطلح	التوضيح
سطح كروي	**السطح الكروي** ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$.
مجسم كروي	**المجسم الكروي** ذات المركز O ونصف القطر R هي مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \le R$.
الدائرة الكبرى	**الدائرة الكبرى** هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة.
مقطع مجسم بمستوٍ	مقطع مجسم بمستوٍ هو مجموعة النقاط المشتركة بين المجسم والمستوي.

ما سيتعلمه الطالب في هذه الوحدة:

المرتكزات المعرفية	نقاط التعلم الأساسية
الهرم – المخروط – الموشور – الأسطوانة	الكرة – مساحة الكرة – حجم الكرة
المكعب – متوازي المستطيلات	مقطع مجسم بمستوٍ – رسم المقطع بأبعاده التامة

مجسمات ومقاطع

انطلاقة نشطة



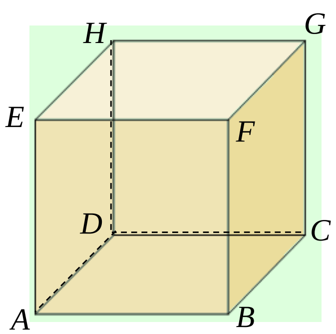
في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. **حجم هرم** ارتفاعه h ومساحة قاعدته S:

① $\mathcal{V} = \frac{1}{3} S \times h$ ② $\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} S \times h$ ③ $\mathcal{V} = S \times h$

2. **حجم مخروط** ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته R هو:

① $\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} Rh$ ② $\mathcal{V} = \pi R^2 h$ ③ $\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} R^2 h$



3. **تعرُّف وجهين متوازيين**

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. الوجه الموازي للوجه $EFGH$ هو

① $CDHG$ ② $BCGF$ ③ $ABCD$

4. **تعرُّف وجه يوازيه حرف**

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. الحرف HD يوازي الوجه .

① $EFGH$ ② $ABCD$ ③ $ABFE$

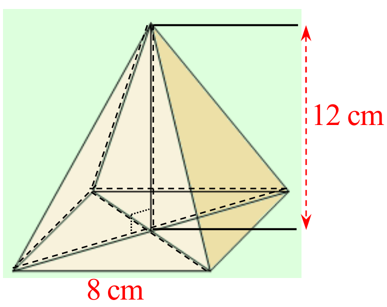
5. **تمايز مفردات**

الهرم المنتظم الذي رأسه S، وأحد رؤوس قاعدته A، هو الهرم الذي

① ارتفاعه هو الحرف $[SA]$.

② قاعدته مضلع منتظم مركزه O وارتفاع الهرم هو $[SO]$.

③ أطوال أضلاع قاعدته متساوية.



6. **حساب حجم هرم**

هرم منتظم ارتفاعه 12 cm وقاعدته مربع طول ضلعه 8 cm.

حجم هذا الهرم يساوي.

① 256 cm^3 ② 220 cm^3 ③ 1232 cm^3

7. حساب حجم مخروط دوراني

مخروط دوراني ارتفاعه $24\ \text{cm}$ ومساحة قاعدته نصف قطر قاعدته $32\ \text{cm}^2$. حجم هذا الهرم يساوي

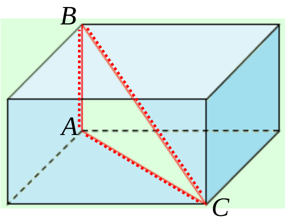
① $256\ \text{cm}^3$ ② $220\ \text{cm}^3$ ③ $1232\ \text{cm}^3$

8. تكبير

إذا كبرنا العدد 1.6 بنسبة $5/4$، حصلنا على

① 2 ② 2.5 ③ 3.125

9. استعمال مبرهنة فيثاغورث



في متوازي المستطيلات المرسوم جانباً، المثلث ABC قائم الزاوية في A،
$BC = 29\ \text{cm}$ و $AC = 20\ \text{cm}$. الطول AB يساوي

① $9\ \text{cm}$ ② $21\ \text{cm}$ ③ $35.2\ \text{cm}$

10. حساب طول محيط دائرة

دائرة، طول قطرها $7\ \text{cm}$، طول محيطها يساوي

① $7\pi\ \text{cm}$ ② $3.5\pi\ \text{cm}$ ③ $12,25\pi\ \text{cm}$

11. حساب مساحة قرص دائري

دائرة، طول قطرها $6\ \text{cm}$، مساحتها تساوي

① $6\pi\ \text{cm}^2$ ② $9\pi\ \text{cm}^2$ ③ $36\pi\ \text{cm}^2$

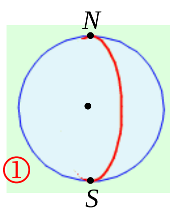
12. تغيير وحدة قياس السعة

$235\ \text{L}$ يساوي

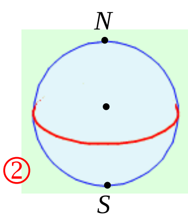
① $0.235\ \text{m}^3$ ② $2.35\ \text{m}^3$ ③ $23.5\ \text{m}^3$

13. مصطلحات في الكرة الأرضية

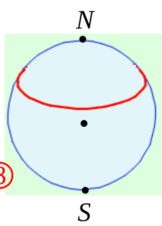
يرمز N إلى القطب الشمالي، ويرمز S إلى القطب الجنوبي. خط الاستواء مرسوم على الشكل ②



①



②



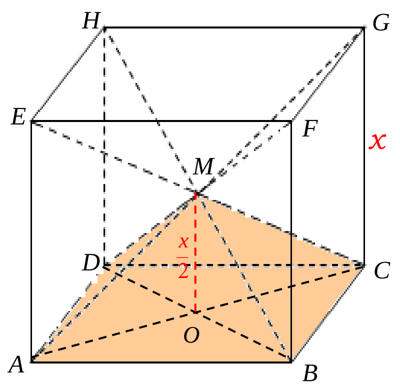
③

1 تذكرة بالمجسمات

نشاط « صيغة لحجم هرم في حالة خاصة وتوليد المخروط »

1. حجم الهرم

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه x نرمز إلى مساحة المربع $ABCD$ بالرمز $\mathcal{S}$. ونرمز بالرمز $\mathcal{V}'$ إلى حجم المكعب $ABCDEFGH$. ونرمز بالرمز $\mathcal{V}$ إلى حجم الهرم $M-ABCD$. كما نرمز بالرمز h إلى الارتفاع $[OM]$ لهذا الهرم.



① أثبت أن $AEGC$ متوازي أضلاع .

② استنتج $OM=\frac{1}{2}CG$

③ اكتب $\mathcal{V}'$ بدلالة x و $\mathcal{S}$.

④ اشرح لماذا $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\times\mathcal{S}\times x$.

⑤ جد العدد k الذي يحقق $\mathcal{V}=k\times\mathcal{S}\times h$.

⑥ استنتج حجم الهرم.

الحل:

① $AE=CG$ و $AE\parallel CG$ فالرباعي $AEGC$ متوازي أضلاع .

② في المثلث ACG ، M منتصف $[AG]$ و O منتصف $[AC]$

فحسب المبرهنة الأولى في المنتصفات يكون $OM=\frac{1}{2}CG$.

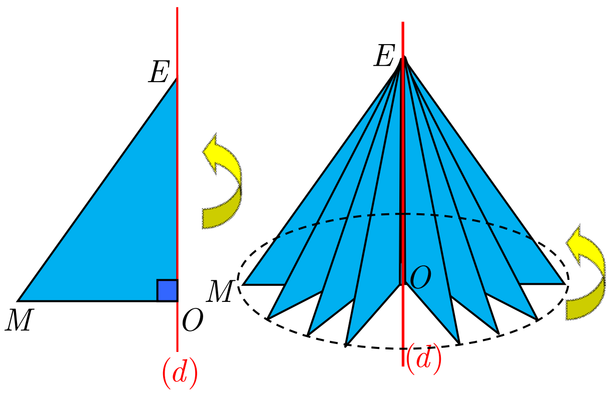
③ المكعب هو موشور قائم قاعدته مربع حجمه ناتج جداء مساحة القاعدة بالارتفاع أي $\mathcal{V}'=\mathcal{S}\times x$.

④ بما أنّ المكعب تم تقسيمه إلى 6 أهرامات طبوقة يكون $\mathcal{V}=\frac{\mathcal{S}\times x}{6}=\frac{1}{6}\times\mathcal{S}\times x$.

⑤ من العلاقة $OM=\frac{1}{2}CG$ نجد $h=\frac{x}{2}$ إذن $x=2h$ ومنه بالتعويض:

$\mathcal{V}=k\times\mathcal{S}\times h=\frac{1}{6}\times\mathcal{S}\times 2h$ إذن $k=\frac{1}{3}$.

⑥ نستنتج أنّ حجم الهرم $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{S}\times h$.



2. المخروط الدوراني

1. ارسم على ورق مقوى، مثلثاً EMO قائم الزاوية في O بحيث يكون $EO = 12\text{ cm}$ و $EM = 13\text{ cm}$.

2. ثبِّتْ الضلع $[EO]$ على قلمٍ بشريط لاصق ثم دوِّر القلم.

3. في حالة الدوران دورةً كاملة حول المحور (d)، ما طبيعة الخط الذي ترسمه النقطة M؟

الحل:

ترسم النقطة M دائرة .

تحقق من فهمك

① احسب حجم هرم ارتفاعه 15 cm، وقاعدته مربع طول ضلعه 12 cm.

② مخروط دوراني ارتفاعه 12 cm وطول قطر قاعدته 20 cm. احسب مساحته الجانبية وحجمه.

الحل:

① حساب الحجم:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{S} \times h = \frac{1}{3} \times (12)^2 \times 15 = 720\text{ cm}^3 .$$

② حساب مساحة القاعدة:

$$\mathcal{S} = \pi r^2 = \pi (10)^2 = 100\pi\text{ cm}^2$$

حساب الحجم:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{S}h = \frac{1}{3}(100\pi) \times 12 = 400\pi\text{ cm}^3$$

تدرب

① احسب، في كل حالة، محيط ومساحة الشكل.

❶ مربع طول ضلعه 6 cm.

❷ مستطيل بعداه 3 cm و 4 cm.

❸ مثلث ABC قائم في A و $AB = 4\text{ cm}$ و $AC = 3\text{ cm}$ و $BC = 5\text{ cm}$.

الحل:

❶ المحيط: $P = 4a = 4\times 6 = 24\,\text{cm}$

المساحة: $\mathcal{S} = a^2 = 6^2 = 36\,\text{cm}^2$

❷ المحيط: $P = 2(a+b) = 2(3+4) = 14\,\text{cm}$

المساحة: $\mathcal{S} = a\times b = 3\times 4 = 12\,\text{cm}^2$

❸ المحيط: $P = a+b+c = 3+4+5 = 12\,\text{cm}$

المساحة: $\mathcal{S} = \dfrac{4\times 3}{2} = 6\,\text{cm}^2$

② $[AH]$ و $[BK]$ ارتفاعان في المثلث ABC. احسب مساحة هذا المثلث في كل من الحالتين:

❶ $AB = 5$ cm و $AC = 6$ cm و $BK = 3$ cm.

❷ $AB = 13$ cm و $AH = 12$ cm و $BC = 15$ cm.

الحل:

❶ $\mathcal{S} = \dfrac{\beta\times h}{2} = \dfrac{6\times 3}{2} = 9\,\text{cm}^2$

❷ $\mathcal{S} = \dfrac{\beta\times h}{2} = \dfrac{15\times 12}{2} = 90\,\text{cm}^2$

③ أسطوانة دورانية، ارتفاعها $h = 10$ dm ونصف قطر قاعدتها $R = 3$ dm.

❶ احسب محيط قاعدة هذه الأسطوانة.

❷ احسب مساحة قاعدة هذه الأسطوانة.

❸ احسب حجم هذه الأسطوانة.

الحل:

❶ محيط القاعدة: $P = 2\pi R = 2\pi\times 3 = 6\pi\,\text{cm}$

❷ مساحة القاعدة: $\mathcal{S} = \pi R^2 = \pi\times 3^2 = 9\pi\,\text{cm}^2$

❸ حجم الأسطوانة: $\mathcal{V} = \mathcal{S}\times h = 9\pi\times 10 = 90\pi\ \text{cm}^3$

④ احسب حجم ومساحة سطح مكعب طول حرفه 6 cm.

الحجم: $\mathcal{V} = x^3 = 6^3 = 216\ \text{cm}^3$

مساحة السطح: $\mathcal{S} = 6x^2 = 6\times 6^2 = 216\,\text{cm}^2$

⑤ احسب المساحة الجانبيَّة لموشور قائم قاعدته مثلَّث أطوال أضلاعه 12 cm، 10 cm، 8 cm وارتفاعه 14 cm.

الحل:

حساب المساحة الجانبيَّة:

$$\begin{aligned} S_L &= \mathrm{P}\times h \\ &= (8+10+12)\times 14 \\ &= 30\times 14 \\ &= 420\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

⑥ وعاء بهيئة مخروط دوراني، ارتفاعه $OE = 100\ \mathrm{mm}$ ونصف قطر قاعدته $OM = 50\ \mathrm{mm}$.

احسب حجم هذا الوعاء.

الحل:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3}\left(\pi r^2\right)h \\ &= \frac{1}{3}\left(\pi\times 50^2\right)\times 100 \\ &= \frac{250000\pi}{3}\mathrm{mm}^3 \end{aligned}$$

⑦ هرم ارتفاعه $36\ \mathrm{m}$ وحجمه $156\ \mathrm{m}^3$. ما مساحة قاعدته؟

الحل:

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\mathcal{S}\times h$ ومنه $156 = \frac{1}{3}\times\mathcal{S}\times 36$ أي $156 = 12\times\mathcal{S}$

وبالتالي $\mathcal{S} = \frac{156}{12} = 13\,\mathrm{m}^2$

⑧ احسب مساحة السَّطح الجانبيّ لأسطوانة دورانية محيط قاعدتها $12\ \mathrm{cm}$ وارتفاعها $22\ \mathrm{cm}$.

الحل:

حساب مساحة السطح الجانبيّ:

$$\begin{aligned} S_L &= \mathrm{P}\times h \\ &= 12\times 22 \\ &= 264\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

⑨ احسب حجم ومساحة سطح متوازي مستطيلات أبعاده $5\ \mathrm{cm}$ و $4\ \mathrm{cm}$ و $3\ \mathrm{cm}$.

الحل:

حساب الحجم:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= x\times y\times z \\ &= 3\times 4\times 5 \\ &= 60\,\mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

4

حساب مساحة السطح:

$$S_T = P \times h + 2\mathcal{S}_b = 2(3+4)\times 5 + 2\times(3\times 4)$$
$$= 70 + 24 = 94\,\text{cm}^2$$

⑩ احسب حجم هرم ارتفاعه 21 cm، وقاعدته MNP مثلث قائم في M وفيه $MN = 15$ cm و $NP = 25$ cm.

الحل:

المثلث MNP قائم في M فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$NP^2 = NM^2 + MP^2$ إذن $25^2 = 15^2 + MP^2$

وبالتالي $MP^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400$

ومنه $MP = 20\,\text{cm}$.

الحجم:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times \mathcal{S}\times h$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{MN\times MP}{2}\times 21$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{20\times 5}{2}\times 21$$
$$= 350\ \text{cm}^3$$

الكرة

نشاط « استنتاج مساحة سطح الكرة وحجمها»

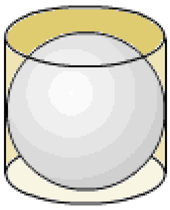

كرة قدم


كرة بيليارد

كرة القدم: شكل كروي مجوَّف، له في الرياضيات شكل سطح كروي.

كرة البيليارد: شكل كروي مليء، له في الرياضيات شكل مجسم كروي.

1. مساحة كرة، حجم كرة



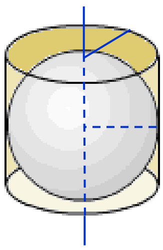
نُقش على مدفن أرخميدس الشكل المرسوم جانباً، وهو عبارة عن أسطوانة بداخلها كرة تمس قاعدتيها وجوانبها.

1. مساحة كرة

① احسب ارتفاع الأسطوانة ونصف قطر قاعدتها بدلالة R نصف قطر الكرة.

② احسب مساحة السطح الجانبي للأسطوانة بدلالة R.

③ دوَّن أرخميدس النص الآتي « مساحة سطح هذه الكرة تساوي مساحة السطح الجانبي للأسطوانة التي تحوي الكرة». استفد من مقولة أرخميدس لكتابة مساحة سطح الكرة بدلالة R ولتكن S.



الحل:

① ارتفاع الأسطوانة: $h = 2R$. نصف قطر قاعدة الأسطوانة $r = R$

② مساحة السطح الجانبي للأسطوانة: $S_L = P \times h = 2\pi rh = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$

2. حجم كرة

① احسب حجم الأسطوانة بدلالة R.

② كما دوَّن أرخميدس النص «حجم تلك الكرة يساوي ثُلثي حجم الأسطوانة التي تحوي الكرة». استفد من مقولة أرخميدس لكتابة حجم الكرة بدلالة R وليكن هذا الحجم $\mathcal{V}$.

الحل:

① حجم الأسطوانة:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}' &= s \times h\\ &= \pi R^2 \times h\\ &= \pi R^2 \times 2R\\ &= 2\pi R^3\end{aligned}$$

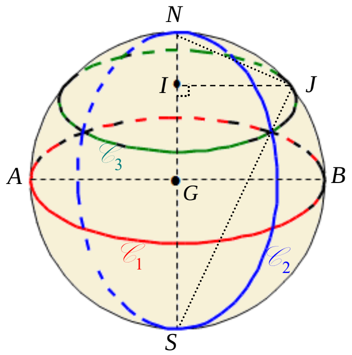
② حجم الكرة:

بالاستفادة من مقولة أرخميدس نجد

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{2}{3}\mathcal{V}' \\ &= \frac{2}{3}\times 2\pi R^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

2. دوائر على سطح كروي

الشكل المرافق تمثيل لسطح كروي مركزه G ونصف قطره 2.5 cm. $[NS]$ و $[AB]$ اثنان من أقطاره.



الدوائر: $\mathscr{C}$ (بالأسود ومركزها G) و $\mathscr{C}_1$ (بالأحمر ومركزها G) و $\mathscr{C}_2$ (بالأزرق ومركزها G) و $\mathscr{C}_3$ (بالأخضر ومركزها I) مرسومة على هذا السطح.

1. أي الدوائر الأربع تمتلك أصغر نصف قطر؟

2. نسمي كلاً من الدوائر $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ المشتركة بالمركز G، دائرة كبرى في السطح الكروي. ما طول نصف قطر كلٍّ منها؟

3. I نقطة من $[NS]$ تُحقّق $IN = 1.5\text{ cm}$. احسب طول نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}_3$.

الحل:

1. الدائرة التي تمتلك أصغر نصف قطر هي $\mathscr{C}_3$.

2. طول نصف قطر كل من الدوائر $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ يساوي طول نصف قطر السطح الكروي 2.5 cm.

3. حساب طول نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}_3$

المثلث GIJ قائم في I فيه $GJ = R = 2.5\text{ cm}$ و $GI = GN - IN = 2.5 - 1.5 = 1\text{ cm}$.

فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$GJ^2 = GI^2 + IJ^2$ إذن $2.5^2 = 1^2 + IJ^2$ ،

وبالتالي $IJ^2 = 2.5^2 - 1^2 = 6.25 - 1 = 5.25$

ومنه $IJ = \sqrt{5.25}\text{ cm}$.

أو $IJ = \sqrt{5.25} = \sqrt{\frac{525}{100}} = \sqrt{\frac{25\times 21}{25\times 4}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

تحقق من فهمك

① احسب مساحة سطح كروي نصف قطره $7.5\ \text{cm}$.

② احسب حجم كرة نصف قطرها $24\ \text{m}$.

الحل:

① دستور مساحة سطح كروي هو $\mathcal{S} = 4\pi \times R^2$، بالتعويض نجد:

$$\mathcal{S} = 4\pi \times (7.5)^2$$
$$= 225\pi\ \text{cm}^2$$

② حسب دستور حجم الكرة $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \times R^3$، يكون:

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \times 24^3$$
$$= 18432\pi\ \text{cm}^3$$

تدرّب

① $\mathcal{W}$ هي الكرة التي مركزه O ونصف قطره $5\ \text{cm}$. A و B و C و D نقاط من الفراغ تحقق $OA = 3\ \text{cm}$ و $OB = 5\ \text{cm}$ و $OC = 7\ \text{cm}$ و $BD = 6\ \text{cm}$. ما وضع كلٍّ من تلك النقاط بالنسبة إلى الكرة $\mathcal{W}$؟

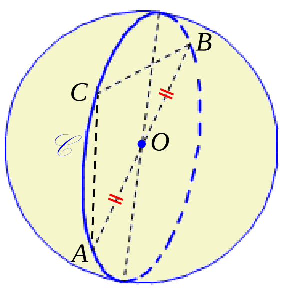
الحل:

النقطة A تقع داخل الكرة $\mathcal{W}$ لأنّ $OA < R$.

النقطة B تقع على الكرة $\mathcal{W}$ لأنّ $OA = R$.

النقطة C تقع خارج الكرة $\mathcal{W}$ لأنّ $OA > R$.

النقطة D تقع خارج الكرة $\mathcal{W}$ لأنّ $BD > 2R$.



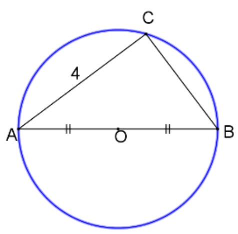
② A و B نقطتان متقابلتان قطرياً على سطح كروي $\mathcal{W}$ مركزه O ونصف قطره $2.5\ \text{cm}$. C نقطة من دائرة كبرى $\mathcal{C}$ مارة بالنقطتين A و B مع $AC = 4\ \text{cm}$.

1. ارسم الدائرة $\mathcal{C}$ بأبعادها التامة ووضِّع عليها النقاط A و B و C.

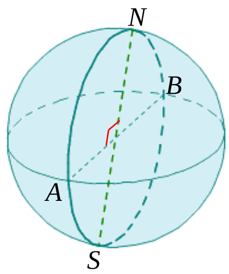
2. ما طبيعة المثلث ABC؟ احسب الطول BC.

الحل:

1. الرسم:



2. المثلث ABC قائم الزاوية في C وحسب فيثاغورث نجد $BC = 3$



③ سطح كروي مركزه O ونصف قطره 5 cm. $[AB]$ و $[NS]$ قطران متعامدان في هذا السطح .

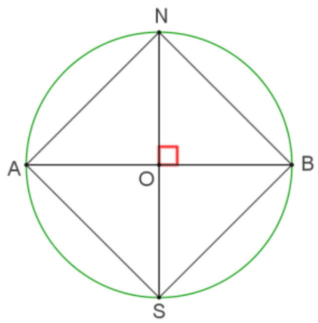
1. ما طبيعة الرباعي $ANBS$ ؟

2. ارسم $ANBS$ بأبعاده التامة.

الحل:

1. الرباعي $ANBS$ مربع لأن قطراه متناصفان ومتعامدان ومتساويان.

2. الرسم:



④ حساب حجم كرة بدلالة قطرها

كرة قطرها d.

1. أثبت أنَّ حجم هذه الكرة $\mathcal{V}$ يُعطى بالقانون $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\pi d^3$.

2. احسب بدلالة d مساحة سطح هذه الكرة.

الحل:

1. لدينا $R = \frac{d}{2}$ ومنه

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3 \\ &= \frac{1}{6}\pi d^3\end{aligned}$$

2. دستور مساحة سطح كروي هو $S = 4\pi \times R^2$، إذن:

$$\begin{aligned}S &= 4\pi \times R^2 \\ &= 4\pi \times (\frac{d}{2})^2 \\ &= \pi d^2\end{aligned}$$

⑤ مخروط، أسطوانة، كرة

لدينا مخروط $\mathcal{C}$ وأسطوانة $\mathcal{A}$ وكرة $\mathcal{S}$ نصف قطر الكرة R يساوي نصف قطر قاعدة المخروط ويساوي نصف قطر قاعدة الأسطوانة. ارتفاع المخروط $2R$ يساوي ارتفاع الأسطوانة.

1. احسب بدلالة R القيمة التامة لحجم كل من هذه المجسمات.

2. جد علاقة بين حجوم هذه المجسمات.

الحل:

1. حجم المخروط $\mathcal{C}$: $\mathcal{V}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{3}\mathcal{S}\times h = \frac{1}{3}(\pi R^2)(2R) = \frac{2}{3}\pi R^3$

حجم الأسطوانة $\mathcal{A}$: $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \mathcal{S}\times h = (\pi R^2)(2R) = 2\pi R^3$

حجم الكرة $\mathcal{S}$: $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

2. نلاحظ أنّ: $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} + \mathcal{V}_{\mathcal{C}} = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{6}{3}\pi R^3 = 2\pi R^3 = \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ أي $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} + \mathcal{V}_{\mathcal{C}} = \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$.

⑦ عددان متساويان

كرة $\mathcal{S}$ نصف قطرها R سنتيمتراً. كم يجب أن تكون قيمة R ليكون العدد الدال على حجم هذه الكرة مساوياً العدد الدال على مساحة سطح هذه الكرة ؟

الحل:

العدد الدال على حجم الكرة هو $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$، العدد الدال على مساحة سطح هذه الكرة هو $\mathcal{S} = 4\pi R^2$

ومنه $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$ أي $\frac{1}{3}R = 1$ إذن يجب أن تكون قيمة $R = 3$.

⑧ حجم الكرة الأرضية

سنعتبر في هذه المسألة أنَّ نصف قطر الكرة الأرضية يساوي $6400\ \text{km}$.

1. احسب حجم الكرة الأرضية بالكيلومترات المكعبة.

2. الشمس هي الأخرى مجسم كروي نصف قطرها يساوي 109 أمثال نصف قطر الكرة الأرضية.

انسخ وأكمل: « حجم الشمس يساوي ...... أمثال حجم الأرض »

الحل:

1. $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(6400)^3 = \frac{4}{3}\pi(64\times 10^2)^3 = \frac{10\ 485\ 76\times 10^6\ \pi}{3}\text{km}$

2. « حجم الشمس يساوي 109^3 أمثال حجم الأرض »

4

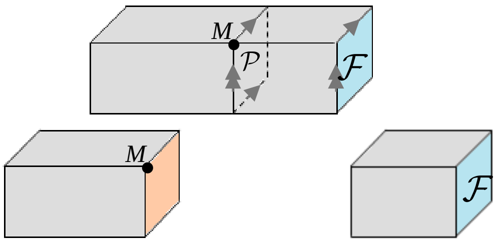
مقاطع مجسمات

نشاط «مقاطع مجسمات شهيرة»

مقطع مجسم بمستوٍ هو مجموعة النقاط المشتركة بين المجسم والمستوي.

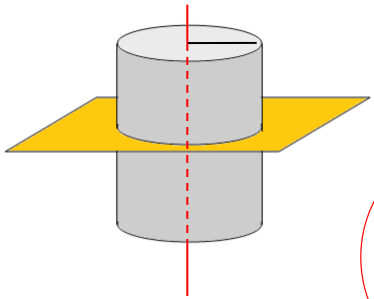
عند الرسم الفراغي يمكن أن تبدو الأطوال والزوايا غير حقيقية مثلاً يظهر أحياناً المربع في الرسم الفراغي وكأنه متوازي أضلاع. لذلك يكون من المناسب رسم هذا الشكل جانباً بأبعاده التامة.

1. مقطع يوازي وجه في متوازي مستطيلات



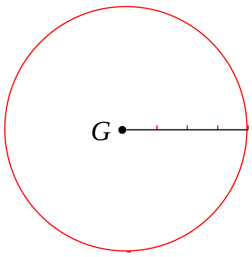
السطح الملون بالأحمر هو مقطع لمتوازي المستطيلات بمستوٍ $\mathcal{P}$ يمر بالنقطة M ويوازي الوجه $\mathcal{F}$ الملون بالأزرق.

2. مقطع يوازي قاعدة أسطوانة دورانية

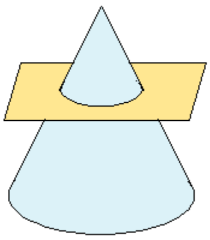


نقطع أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها 4 cm بمستوٍ يوازي قاعدتها.

- ما طبيعة المقطع؟ ارسم هذا المقطع. دائرة
- هذا المقطع يعامد محور الأسطوانة.

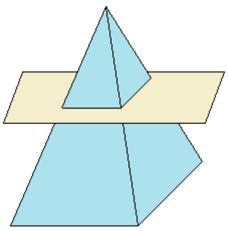


3. مقطع مخروط دوراني بمستوٍ يوازي قاعدته



تجد في الشكل المرافق مستوياً يقطع مخروطاً ويوازي مستوى قاعدته. بأية هيئة يبدو لك المقطع؟ دائرة

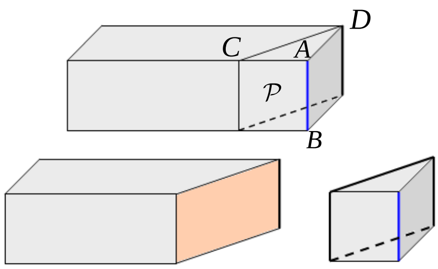
4. مقطع هرم بمستوٍ يوازي قاعدته



تجد في الشكل المرافق مستوياً يقطع هرماً منتظماً قاعدته مربع بمستوٍ يوازي مستوى قاعدته.

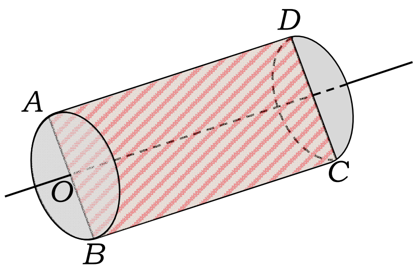
بأية هيئة يبدو لك المقطع؟ مربع

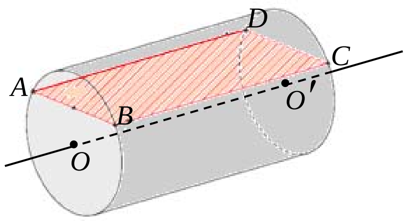
5. مقطع يوازي حرف في متوازي مستطيلات



السطح الملون بالأحمر هو مقطع لمتوازي المستطيلات بمستوٍ $\mathcal{P}$ يحوي القطعة المستقيمة $[CD]$ ويوازي الحرف $[AB]$. مستطيل.

6. مقطع يوازي محور اسطوانة





قرصا قاعدتي أسطوانة دورانية مركزاهما O و O' ونصف قطر كلٍّ منهما 3 cm. ارتفاع هذه الأسطوانة $OO' = 6$ cm.

A و B نقطتان من القاعدة التي مركزها O حيث $AB = 4$ cm. نقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ $(\mathcal{P})$ يوازي محورها (OO').

ما طبيعة المقطع؟ وما الأبعاد التامة لهذا المقطع في كلٍّ من الحالتين:

① المستوي $(\mathcal{P})$ يمر بالنقطة O.

② المستوي $(\mathcal{P})$ يمر بالنقطتين A و B.

الحل:

① طبيعة المقطع مستطيل.

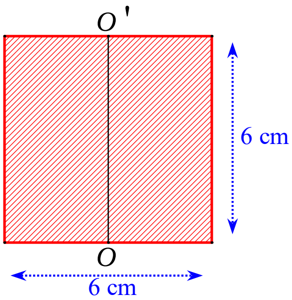
$AB = 2 \times r = 2 \times 3 = 6$ cm ، $AD = OO' = 6$ cm.

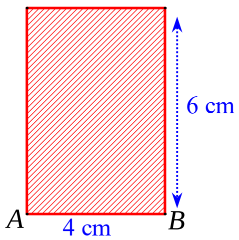
لاحظ أنَّ المقطع هو مربع طول ضلعه 6 cm.

② طبيعة المقطع مستطيل.

$AB = 4$ cm ، $AD = OO' = 6$ cm.

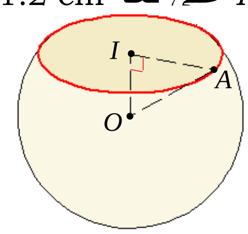
ملاحظة: يمكن اضافة طلب ارسم المقطع بأبعاده التامة





7. مقطع سطح كروي بمستوٍ

كرة تنس (جوفاء) نصف قطرها 2 cm. قُطعت هذه الكرة بمستوٍ يمر بنقطة I على بعد 1.2 cm عن مركزها O.



1. كيف يبدو لك مقطع الكرة بذلك المستوي؟

2. لتكن A نقطة من المقطع.

① ما طول $[OA]$ ؟

② استعمل مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIA القائم في I لحساب الطول IA.

3. استنتج طبيعة هذا المقطع.

الحل:

1. يبدو المقطع دائرة (يمكن أن يجيب الطالب شكل بيضوي).

2.

① طول $[OA]$: $OA = r = 2\,\text{cm}$.

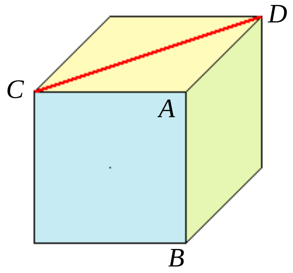
② بحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIA القائم في I نجد:

$OA^2 = OI^2 + IA^2$ ومنه $IA^2 = OA^2 - OI^2 = 2^2 - 1.2^2 = 4 - 1.44 = 2.56$

وبالتالي $IA = \sqrt{2.56} = 1.6\ \text{cm}$.

3. نستنتج أنّ المقطع دائرة مركزها النقطة I ونصف قطرها $1.6\ \text{cm}$

تحقق من فهمك



① في الشكل المرافق، ما طبيعة مقطع المكعب بمستوٍ:

① يوازي الوجه الملون بالأزرق؟

② يوازي الوجه الملون بالأخضر؟

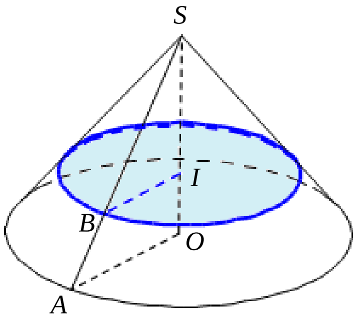
③ يوازي الحرف $[AB]$ ويحوي القطعة $[CD]$؟

الحل:

① المقطع هو مربع.

② المقطع هو مربع.

③ المقطع هو مستطيل.



② مخروط دوراني رأسه S وارتفاعه $20\,\text{cm}$. مركز هذه القاعدة هو النقطة O ونصف قطرها $16\,\text{cm}$. I نقطة من محوره $[SO]$ تحقق $SI = 14\ \text{cm}$. قُطع المخروط بمستوٍ $(\mathcal{P})$ مارٍ بالنقطة I وموازٍ لمستوي قاعدته. احسب، بالسنتيمتر المربع، مساحة مقطع المخروط بالمستوي $(\mathcal{P})$.

الحل:

المقطع هو تصغير لقاعدة المخروط، ونسبة التصغير: $k = \dfrac{SI}{SO}$

أي $k = \dfrac{14}{20} = 0.7$.

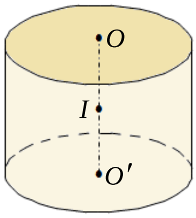
نرمز إلى مساحة قاعدة المخروط بالرمز $\mathcal{S}$، وإلى مساحة المقطع بالرمز $\mathcal{S}'$، فيكون $\mathcal{S}' = 0.7^2 \mathcal{S}$.

ولكن $\mathcal{S} = \pi \times OA^2 = \pi \times 16^2 = 256\pi\ \text{cm}^2$

إذن $\mathcal{S}' = 0.7^2 \times 256\pi = 125.44\pi\ \text{cm}^2$

تدرب

① في الشكل المرافق، O و O' هما مركزا قاعدتي الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها $R = 4\text{ cm}$ وارتفاعها $OO' = 6\text{ cm}$. النقطة I هي منتصف القطعة $[OO']$. ارسم بقيم تامة مقطع هذه الأسطوانة:



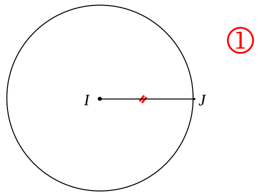
① بمستوٍ يمر بالنقطة I ويوازي قاعدتيه.

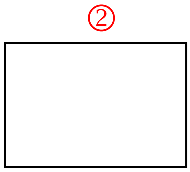
② بمستوٍ يحوي محورها (OO').

الحل:

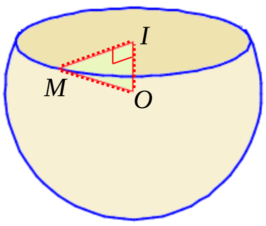
① المقطع هو دائرة مركزها I ونصف قطرها 4 cm

② المقطع هو مستطيل بعداه 6 cm ، 8 cm.





② $\mathscr{W}$ سطح كروي مركزه O ونصف قطره 5 cm. قُطع هذا السطح بمستوٍ على بعد 2 cm من O. مقطع $\mathscr{W}$ بهذا المستوي هو دائرة $\mathscr{C}$ مركزها I. M نقطة مشتركة بين السطح $\mathscr{W}$ والدائرة $\mathscr{C}$.

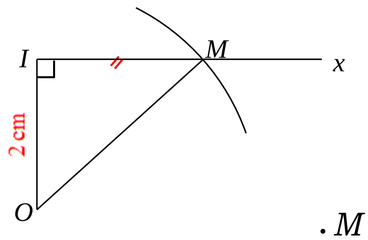


1. ارسم المثلث MOI بأبعاده التامة.

2. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ بأبعادها التامة.

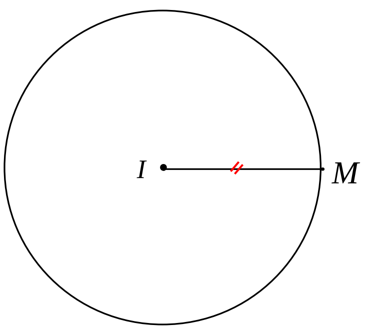
3. احسب نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}$.

الحل: **1**. نرسم:



- القطعة $[OI]$ بطول 2 cm.
- نصف المستقيم $[Ix)$ عمودياً على $[OI]$.
- قوساً دائرية مركزها O ونصف قطرها 5 cm فيقطع $[Ix)$ في M.
- نرسم القطعة $[OM]$، فنحصل على المثلث MOI القائم في I بقيم تامة لأطوال أضلاعه: $OI = 2\text{ cm}$ و $OM = 5\text{cm}$.

2. نفتح البيكار بفتحةِ $[IM]$ ونرسم بهذه الفتحة دائرة مركزها I. الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها IM هي المقطع.



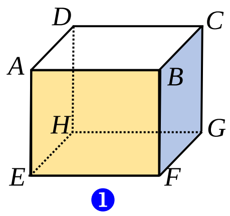
3. حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIM القائم في I:

$IM^2 + OI^2 = OM^2$ ، أي $IM^2 + 2^2 = 5^2$ ، إذن:

$IM^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$ ، ومنها $IM = \sqrt{21}$

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.



❶

(1) ليكن متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ الذي فيه $AB = 6\text{ cm}$ و $AD = 4\text{ cm}$ و $AE = 5\text{ cm}$. مقطع هذا المجسم بمستوٍ يوازي الوجه $ABFE$ هو

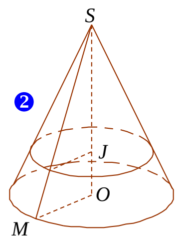
① مستطيل مساحته 24 cm^2.

② مستطيل مساحته 30 cm^2.

③ مستطيل مساحته 20 cm^2.

(2) أسطوانة دورانية، طول قطر قاعدتها 6 cm وارتفاعها 8 cm. مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يوازي قاعدتها هو

① قرص مساحته $9\pi\text{ cm}^2$ ② قرص مساحته $36\pi\text{ cm}^2$ ③ قرص مساحته 48 cm^2



❷

(3) مخروط دوراني، نصف قطر قاعدته $OM = 20\text{ cm}$ وارتفاعه $OS = 48\text{ cm}$. J نقطة من ارتفاعه $[OS]$ تحقق $SJ = 36\text{ cm}$. مقطع هذا المخروط بمستوٍ يمر بالنقطة J ويوازي قاعدته هو قرص دائري نصف قطره JI يساوي

① 20 cm ② 15 cm ③ 10 cm

(4) في الفراغ، مجموعة النقاط التي مسافاتها متساوية وتساوي 5 cm عن نقطة ثابتة O، هي

① دائرة ② كرة ③ مجسم كروي

(5) كرة مركزها O ونصف قطرها 5 cm.

M و N و P ثلاث نقاط تحقق $OM = 3\text{ cm}$ و $ON = 5\text{ cm}$ و $OP = 7\text{ cm}$.

النقطة التي لا تنتمي إلى الكرة هي ① M ② N ③ P

(6) كرة مركزها O وقطرها 8 cm.

مقطع هذه الكرة بمستوٍ يبعد عن O بمقدار 4 cm هو

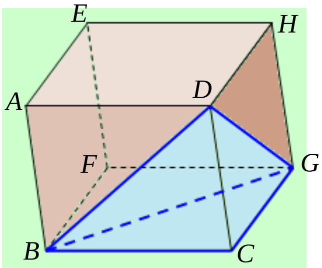
① دائرة نصف قطرها 3 cm ② قرص دائري نصف قطره 3 cm ③ نقطة

(7) كرة نصف قطرها 6 cm. حجمها يساوي

① $12\pi\text{ cm}^3$ ② $144\pi\text{ cm}^3$ ③ $288\pi\text{ cm}^3$

في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) $ABCDEFGH$ مكعب.



مقطع الهرم $BCDG$ بمستوٍ يوازي الوجه $ABCD$ هو

① مربع.

② مثلث قائم ومتساوي الساقين.

③ تصغير للمثلث BCD.

(2) القطعة المستقيمة $[AB]$ هي قطر في سطح كروي، إذن

① توجد على هذا السطح دائرة واحدة قطرها $[AB]$.

② دائرة قطرها $[AB]$ هي دائرة كبرى في هذا السطح .

③ A و B متقابلتان قطرياً.

(3) C و B نقطتان من سطح كروي مركزه A. النقطة I هي منتصف $[BC]$، إذن

① المستقيمان (AI) و (BC) متعامدان

② المستقيم (AI) هو محور القطعة $[BC]$

③ A و B متقابلتان قطرياً

قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) مقطع مكعب بمستوٍ يوازي أحد أحرفه يمكن أن يكون مربعاً.

(2) مقطع أسطوانة بمستوٍ يوازي محورها، يمكن أن يكون مربعاً.

(3) سطح كروي قطره 8 cm، يقطعه مستوٍ $(\mathcal{P})$ على مسافة 8 cm من مركزه. $(\mathcal{P})$ مماس للكرة.

(4) نقطع مخروطاً بمستوٍ يوازي قاعدته، فكانت مساحة المقطع نصف مساحة قاعدة المخروط. نستنتج أنِّ المستوي القاطع يقطع ارتفاع المخروط في منتصفه.

(5) نصف قطر كرة يساوي ثلاثة أمثال نصف قطر كرة أخرى، إذن مساحة سطح الكرة الكبرى تساوي ستة أمثال مساحة سطح الكرة الصغرى.

(6) بنقطةٍ M من كرة مركزها O، يمر مستقيم واحد عمودي على (OM).

(7) بنقطةٍ M من كرة مركزها O، يمر مستوٍ واحد عمودي على (OM).

الحل:

(1) موافق. فمثلاً مقطع المكعب بمستوٍ يوازي أحد وجوهه يكون مربعاً ويكون يوازي أحد حروف هذا الوجه.

(2) موافق. فمثلاً في حالة ارتفاع الأسطوانة يساوي قطر القاعدة يكون مقطع الأسطوانة بمستوٍ يمر من محورها، يكون مربعاً.

(3) غير موافق لأنّ بعد مركز الكرة عن المستوي أكبر من نصف قطر الكرة بل هو ضعفيه.

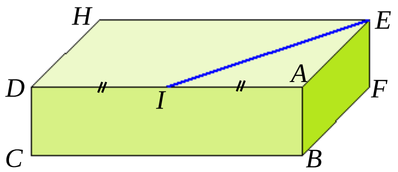
(4) غير موافق لأنّ مربع نسبة التصغير هنا يساوي النصف أي $k^2 = \frac{s'}{s} = \frac{1}{2}$ ومنه $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(5) غير موافق لأنّ $S_2 = 4\pi R_2^2 = 4\pi(3R_1)^2 = 9 \times (4\pi R_1^2) = 9S_1$.

(6) غير موافق. بل يوجد عدد لانهائي من المستقيمات.

(7) موافق.

4 أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المرافق هي:



$HE = 8$ cm و $BF = 3$ cm و $CD = 2$ cm.

النقطة I هي منتصف $[AD]$.

نقطع هذا المجسم بمستوٍ يوازي الحرف $[AB]$ ويحوي القطعة $[IE]$.

1. احسب الطول IE.

2. ارسم المقطع بأبعاده التامة.

الحل:

1. المثلث IAE قائم الزاوية في A. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

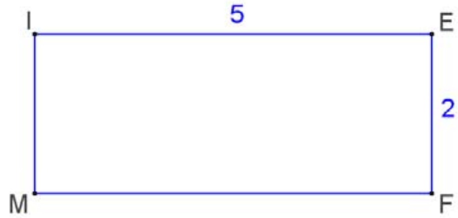
$IE^2 = IA^2 + AE^2$، إذن $IE^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$، وبالتالي $IE = 5$ cm.

2. نرمز إلى مسقط I على $[CB]$ بالرمز M،

فيكون $IM = CD = 2$.

نرسم مستطيل $IEFM$، بعداه

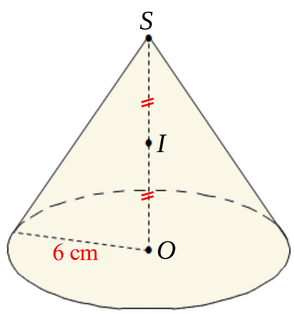
$EF = 2$ cm و $IE = 5$ cm.



5 مخروط دوراني رأسه S ومركز قاعدته O ونصف قطرها 6 cm.

ثمة مستوٍ يوازي قاعدة المخروط ويمر بالنقطة I منتصف $[SO]$.

ارسم بقيم تامة مقطع هذا المخروط

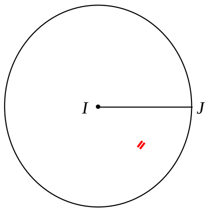


الحل:

المقطع هو تصغير لقاعدة المخروط ونسبة التصغير $k = \frac{1}{2}$.

نرمز إلى نصف قطر قاعدة المقطع بالرمز r'، فيكون $r' = kr = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm.

إذن المقطع هو دائرة مركزها I، ونصف قطرها $3\ \text{cm}$.



6 نقطع هرماً بمستوٍ يوازي قاعدته. ما طبيعة المقطع في كلٍ من الحالات الآتية:

① قاعدة الهرم مثلث متساوي الأضلاع.

② قاعدة الهرم مثلث قائم.

③ قاعدة الهرم مربع.

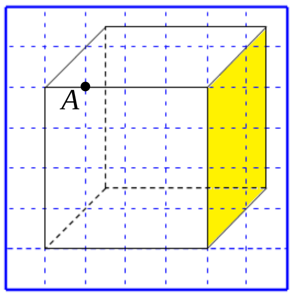
الحل:

① المقطع هو مثلث متساوي الأضلاع.

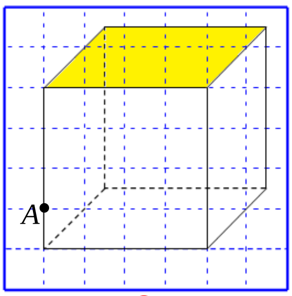
② المقطع هو مثلث قائم.

③ المقطع هو مربع.

7 في كلٍ من الحالتين ① و ②، ارسم المكعب، ثم ارسم مقطعه بمستوٍ يمر بالنقطة A ويوازي وجهه الملون بالأصفر.



①

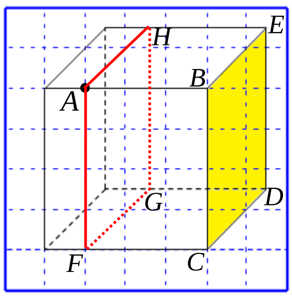


②

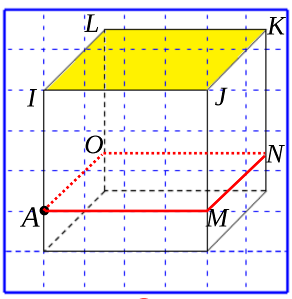
الحل:

① المقطع هو مستطيل $AFGE$ يطابق $BCDE$.

② المقطع هو مستطيل $AMNO$ يطابق $IJKL$.

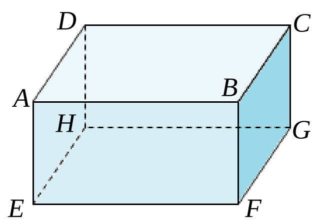


①



②

8 $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، أبعاده:



$AE = 4 \text{ cm}$ و $EF = 8 \text{ cm}$ و $FG = 6 \text{ cm}$.

احسب، في كل حالة، محيط ومساحة مقطع هذا المجسم:

① بمستوٍ يوازي الوجه $ABCD$.

② بمستوٍ يوازي الوجه $ADHE$.

③ بمستوٍ يوازي الوجه $ABFE$.

الحل:

المقطع في كل حالة هو مستطيل.

① محيط المقطع $P = 2\times(8+6) = 28 \text{ cm}$.

مساحة المقطع $S = 8\times 6 = 48 \text{ cm}^2$.

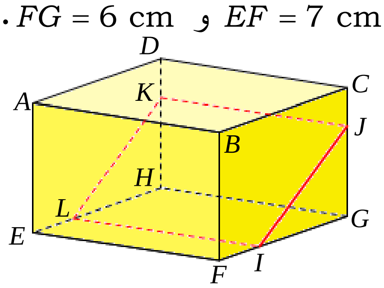
② محيط المقطع $P = 2\times(6+4) = 20 \text{ cm}$.

مساحة المقطع $S = 6\times 4 = 24 \text{ cm}^2$.

③ محيط المقطع $P = 2\times(4+8) = 24 \text{ cm}$.

مساحة المقطع $S = 4\times 8 = 32 \text{ cm}^2$.

9 $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه: $AE = 5 \text{ cm}$ و $EF = 7 \text{ cm}$ و $FG = 6 \text{ cm}$.



I نقطة من الحرف $[FG]$ تحقق $IG = 4 \text{ cm}$.

J نقطة من الحرف $[CG]$ تحقق $JG = 3.5 \text{ cm}$.

$IJKL$ مقطعٌ لهذا المجسم بمستوٍ يوازي الحرف $[AB]$.

1. ما طبيعة المقطع $IJKL$ ؟ جد بعديه.

2. ارسم المقطع $IJKL$ بأبعاده التامة.

الحل:

1. طبيعة المقطع $IJKL$ هو مستطيل.

المثلث IGJ قائم الزاوية في G. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

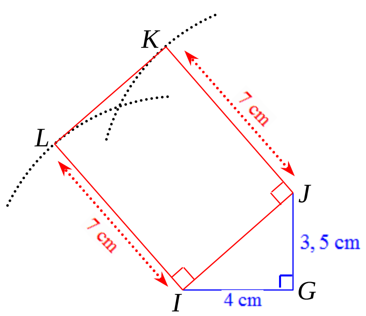
$IJ^2 = IG^2 + GJ^2$، إذن $IJ^2 = 4^2 + 3.5^2 = 16 + 12.25 = 28.25$،

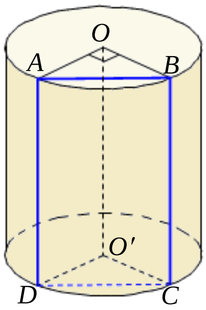
وبالتالي $IJ = \sqrt{28.25} \text{ cm}$.

2. نرسم المثلث IGJ القائم في G،

ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $IJKL$،

بحيث يكون طول $[IL]$ مساوياً 7 cm.





10 الشكل المرافق يمثل أسطوانة دورانية ارتفاعها 7 cm ونصف قطر قاعدتها 3 cm ومركزا قاعدتيه O و O'.

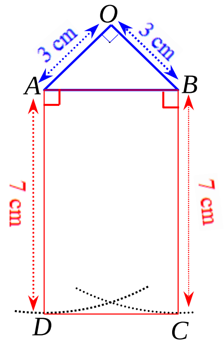
$ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يوازي محورها $(O'O)$.

1. ما طبيعة هذا المقطع؟

2. نعلم أنَّ $\widehat{AOB} = 90°$، ارسم هذا المقطع بأبعاده التامة.

3. احسب الطول AB.

الحل:



1. المقطع هو مستطيل.

2. لدينا $\widehat{AOB} = 90°$ و $OA = OB = r = 3$،

فالمثلث AOB قائم في O ومتساوي الساقين.

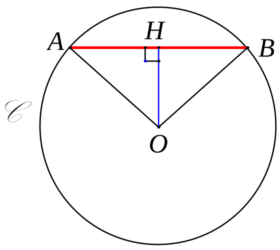
نرسم المثلث AOB القائم في O،

ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $ABCD$،

بحيث يكون طول $[AD]$ مساوياً 7 cm.

3. المثلث AOB قائم الزاوية في O. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$AB^2 = AO^2 + OB^2$، إذن $AB^2 = 3^2 + 3^2 = 18$، وبالتالي $AB = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.



11 الشكل المرافق $\mathscr{C}$ قرص دائري يمثل قاعدة أسطوانة دورانية ارتفاعها 11cm. مركز هذه القاعدة هو النقطة O.

H نقطة من $\mathscr{C}$ تحقق $OH = 6 \text{ cm}$.

$ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يمر بالنقطة H ويوازي محور الأسطوانة. نعلم أنَّ $AB = 16 \text{ cm}$.

1. احسب نصف قطر قاعدة الأسطوانة.

الحل:

المثلث AHO قائم الزاوية في H. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$OA^2 = OH^2 + HA^2$، إذن $OA^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$، وبالتالي $OA = 10 \text{ cm}$.

ومنه نصف قطر قاعدة الأسطوانة $r = OA = 10 \text{ cm}$.

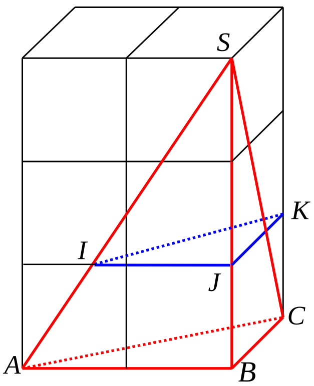
12 قُطع مخروط دوراني، نصف قطر قاعدته 15cm، بمستوٍ يوازي قاعدته ويقسم ارتفاعه، بدءاً من رأس المخروط، بنسبة $\frac{1}{3}$. احسب، بالسنتيمترات المربعة، مساحة المقطع.

الحل:

- المقطع هو تصغير لقاعدة المخروط، ونسبة التصغير: $k=\frac{1}{3}$.
- نرمز إلى مساحة قاعدة المخروط بالرمز $\mathcal{S}$، وإلى مساحة المقطع بالرمز $\mathcal{S}'$، فيكون $\mathcal{S}'=(\frac{1}{3})^2\mathcal{S}$.

ولكن $\mathcal{S}=\pi\times R^2=\pi\times 15^2=225\pi\ \text{cm}^2$،

إذن $\mathcal{S}'=\frac{1}{9}\times 225\pi=25\pi\ \text{cm}^2$.



13 $SABC$ هرم رأسه S محتوى في ستة مكعبات طبوقة طول حرف كل منها $1\ \text{cm}$ مرصوفة وفق الشكل المرافق.

مقطع هذا الهرم بمستوٍ يوازي قاعدته هو المثلث IJK.

1. احسب حجم الهرم $SABC$.

2. احسب مساحة المثلث IJK.

3. احسب حجم الهرم $SIJK$.

الحل:

1. حجم الهرم $SABC$ يعطى بالقانون $\mathcal{V}_1=\frac{1}{3}\mathcal{S}h$ (1).

لدينا $h=3$ و قاعدته ABC مثلث قائم في B، فمساحته $\mathcal{S}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{2\times 1}{2}=1\ \text{cm}^2$،

إذن $\mathcal{V}_1=\frac{1}{3}\mathcal{S}h=\frac{1}{3}\times 1\times 3=1\ \text{cm}^3$.

2. المثلث IJK هو تصغير لقاعدة الهرم، ونسبة التصغير: $k=\frac{SJ}{SB}=\frac{2}{3}$.

نرمز إلى مساحة المثلث IJK بالرمز $\mathcal{S}'$، فيكون $\mathcal{S}'=(\frac{2}{3})^2\mathcal{S}$،

إذن $\mathcal{S}'=\frac{4}{9}\times 1=\frac{4}{9}\ \text{cm}^2$

3. حجم الهرم $SIJK$ يعطى بالقانون $\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\mathcal{S}'h'$ (2).

لدينا $h'=2$، إذن $\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\mathcal{S}h=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\times 2=\frac{8}{27}\ \text{cm}^3$.

يمكن اتباع طريقة ثانية، $\mathcal{V}_2=\left(\frac{2}{3}\right)^3\mathcal{V}_1=\frac{8}{27}\times 1=\frac{8}{27}\ \text{cm}^3$.

14 قطعنا هرماً منتظماً $SABCD$ بمستوٍ يوازي قاعدته، فوجدنا أنَّ المقطع هو مربع $EFGH$ مساحته تساوي $\frac{9}{25}$ من مساحة المربع $ABCD$.

1. المربع $EFGH$ تصغيرٌ للمربع $ABCD$. ما نسبة هذا التصغير؟

2. نعلم أنَّ حجم الهرم $SABCD$ هو $125\ \text{cm}^3$. ما حجم الهرم $SEFGH$؟

الحل:

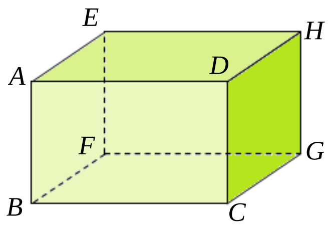
1. نسبة التصغير هي $k = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

2. نرمز إلى حجم الهرم $SABCD$ بالرمز $\mathcal{V}$، وإلى حجم الهرم $SEFGH$ بالرمز $\mathcal{V}'$،

فيكون $\mathcal{V}' = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \mathcal{V}$.

ولكن $\mathcal{V} = 125\ \text{cm}^3$ ، إذن $\mathcal{V}' = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times 125 = \frac{27}{125} \times 125 = 27\ \text{cm}^3$.

15 $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، أبعاده:



$AB = 5\ \text{cm}$ و $AD = 8\ \text{cm}$ و $AE = 6\ \text{cm}$.

نقطع هذا المجسم بمستوٍ يحوي A و H ويوازي الحرف $[AB]$.

احسب أبعاد المقطع.

الحل:

المقطع هو المستطيل $ABGH$.

المثلث ADH قائم الزاوية في D. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$AH^2 = AD^2 + DA^2$، إذن $AH^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$، وبالتالي $AH = 10\ \text{cm}$.

ومنه أبعاد المقطع $AB = 5\ \text{cm}$ و $AH = 10\ \text{cm}$.

16 مخروط دوراني، نصف قطر قاعدته $9\ \text{cm}$. قُطع بمستوٍ يوازي قاعدته وقطع ارتفاعه في نقطة تقسم الارتفاع بنسبة $\frac{2}{1}$ بدءاً من رأس المخروط.

احسب مساحة المقطع.

الحل:

- المقطع هو تصغير لقاعدة المخروط، ونسبة التصغير: $k = \frac{2}{3}$.
- نرمز إلى مساحة قاعدة المخروط بالرمز $\mathcal{S}$، وإلى مساحة المقطع بالرمز $\mathcal{S}'$، فيكون $\mathcal{S}' = (\frac{2}{3})^2 \mathcal{S}$.

ولكن $\mathcal{S} = \pi \times R^2 = \pi \times 9^2 = 81\pi\ \text{cm}^2$،

إذن $\mathcal{S}' = \frac{4}{9} \times 81\pi = 36\pi\ \text{cm}^2$.

17 يدور قرص دائري (مركزه O ونصف قطره $5\ \text{cm}$) حول أحد أقطاره. صِف المجسم الحاصل.

الحل:

المجسم هو مجسم كروي مركزه O ونصف قطره 5 cm.

18

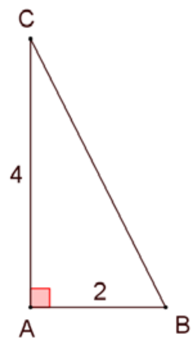
1. ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A، طولا ضلعيه القائمين $AB = 2\text{ cm}$ و $AC = 4\text{ cm}$.

2. ارسم الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث.

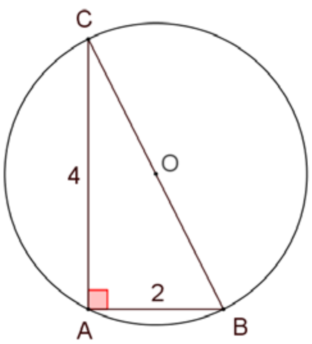
3. حول أي ضلع من أضلاع المثلث علينا أن ندور الشكل كي نحصل على سطح كروي؟

الحل:

.1



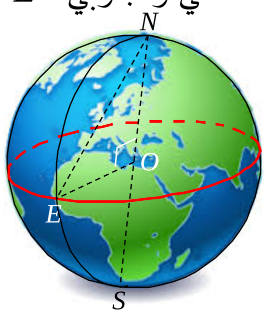
.2

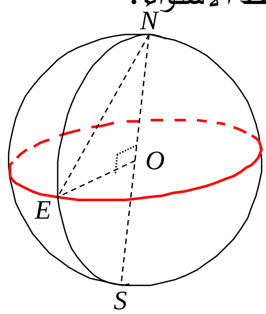


3. حول الضلع $[BC]$.

19 الشكل المرافق تمثيل للكرة الأرضية التي نصف قطرها 6 400 km.

N وS يرمزان على التوالي إلى القطبين الشمالي والجنوبي. E نقطة من خط الاستواء.





احسب المسافة بين النقطتين N و E.

الحل :

المثلث EON قائم الزاوية في O. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$EN^2 = EO^2 + ON^2$، إذن $EN^2 = 6400^2 + 6400^2 = 2 \times 6400^2$، وبالتالي

$EN = 6400\sqrt{2}\text{ km}$.

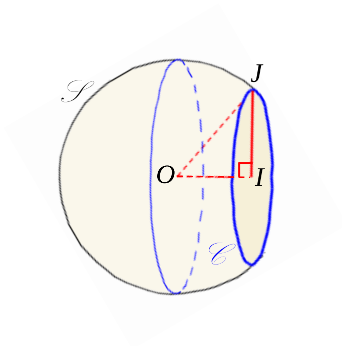
ومنه المسافة بين النقطتين N و E هي $6400\sqrt{2}\text{ km}$.

20 $\mathcal{W}$ سطح كروي مركزه O ونصف قطره 12 cm.

قُطع هذا السطح بمستوٍ $(\mathcal{P})$، فكان المقطع الدائرة $\mathcal{C}$

التي مركزها I و نصف قطرها 8 cm.

احسب المسافة OI.



الحل:

المثلث OIJ قائم الزاوية في I. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$OJ^2 = OI^2 + IJ^2$، إذن $12^2 = OI^2 + 8^2$، وبالتالي $OI^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$.

ومنه $OI = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ cm.

21 احسب مساحة سطح كروي في كلٍ من الحالات الآتية:

① طول قطره 10 cm.

② محيط دائرة كبرى فيه 28π cm.

الحل:

① دستور مساحة سطح كروي هو $\mathcal{S} = 4\pi \times R^2$، بالتعويض نجد: $\mathcal{S} = 4\pi \times (5)^2 = 100\pi\,\text{cm}^2$.

② محيط دائرة كبرى $P = 2\pi R$ بالتعويض نجد $28\pi = 2\pi R$ ومنه $R = 14$.

دستور مساحة سطح كروي هو $\mathcal{S} = 4\pi \times R^2$، بالتعويض نجد: $\mathcal{S} = 4\pi \times (14)^2 = 784\pi\,\text{cm}^2$.

4

22 احسب حجم كرة في كلٍ من الحالات الآتية:

① طول قطرها 10 cm.

② طول دائرة كبرى فيها 14π cm.

③ مساحة دائرة كبرى فيها $36\pi\ \text{cm}^2$.

الحل:

① حجم الكرة $\mathcal{V}$ بدلالة قطرها d يُعطى بالقانون $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\pi d^3$،

ومنه $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\pi \times 10^3$

إذن $\mathcal{V} = \frac{500}{3}\pi\ \text{cm}^3$.

② طول دائرة كبرى $P = 2\pi R$ بالتعويض نجد $14\pi = 2\pi R$ ومنه $R = 7$.

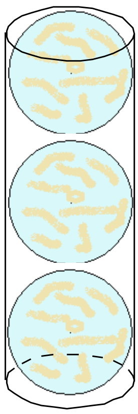
حسب دستور حجم الكرة $\mathcal{V}=\frac{4}{3}\pi\times R^3$ ، يكون: $\mathcal{V}=\frac{4}{3}\pi\times 7^3=\frac{1372}{3}\pi\ \text{cm}^3$.

③ مساحة دائرة كبرى $S=\pi R^2$ ، بالتعويض نجد $36\pi=\pi R^2$ ، ومنه $R=6$.

حسب دستور حجم الكرة $\mathcal{V}=\frac{4}{3}\pi\times R^3$ ، يكون:

$$\mathcal{V}=\frac{4}{3}\pi\times 6^3=288\pi\ \text{cm}^3$$

23 في الشكل المرافق، الدحلات الثلاث متماسة وتمس السطح الجانبي



للأنبوبة الأسطوانية التي نصف قطر قاعدتها يساوي $2.1\ \text{cm}$ وارتفاعها

يساوي $12.6\ \text{cm}$.

كما أنَّ الكرة السفلى تمس قاعدة الأنبوبة والعليا تمس سطحها.

احسب بالسنتيمترات المكعبة حجم الفراغ بين الأنبوبة والدحل.

الحل:

لدينا $R=2.1\ \text{cm}$ ، $h=12.6\ \text{cm}$.

- نعلم أنَّ حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع. ، فإذا رمزنا إلى حجم الأنبوبة بالرمز $\mathcal{V}$ ، كان

$$\begin{aligned}\mathcal{V}&=\pi r^2\times h\\&=\pi\times(2.1)^2\times 12.6\\&=55.566\pi\ \text{cm}^3\end{aligned}$$.

نرمز إلى حجم إحدى الدحلات الثلاث بالرمز $\mathcal{V}'$ ، وحسب دستور حجم الكرة $\mathcal{V}'=\frac{4}{3}\pi\times R^3$ ، يكون:

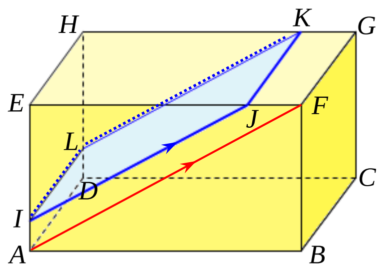
$$\begin{aligned}\mathcal{V}'&=\frac{4}{3}\pi\times 2.1^3\\&=12.348\pi\ \text{cm}\end{aligned}$$

- حجم الفراغ بين الأنبوبة والدحل هو $\mathcal{V}-3\mathcal{V}'$.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}-3\mathcal{V}'&=55.566\pi-3\times 12.348\pi\\&=18.522\pi\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

24 ربط المراحل

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 15\text{ cm}$ و $BC = 6\text{ cm}$ و $CG = 8\text{ cm}$.



J نقطة من $[EF]$ تحقق $EJ = 12\text{ cm}$.

$IJKL$ هو مقطع $ABCDEFGH$ بمستوٍ يوازي الحرف $[FG]$ كما أنَّ (IJ) و (AF) متوازيان.

1. ما طبيعة المقطع $IJKL$؟ احسب مساحته.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{JIK}$ إلى أقرب درجة.

الحل:

1. المقطع $IJKL$ هو مستطيل. $JK = 6\text{ cm}$.

المستقيم (IJ) يقطع $[EA]$ و $[EF]$ ضلعي المثلث على التوالي في I و J ويوازي ضلعه الثالث $[AF]$، فيكون، حسب مبرهنة النسب المتساوية: (1) $\dfrac{EI}{EA} = \dfrac{EJ}{EF} = \dfrac{IJ}{AF}$.

المثلث ABF قائم الزاوية في B. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$AF^2 = AB^2 + BF^2$، إذن $AF^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$، وبالتالي $AF = 17\text{ cm}$.

بالتعويض في (1) نجد: $\dfrac{EI}{EA} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{IJ}{17}$.

من التناسب $\dfrac{12}{15} = \dfrac{IJ}{17}$ نجد $IJ = \dfrac{4}{5} \times 17 = \dfrac{68}{5}\text{ cm}$.

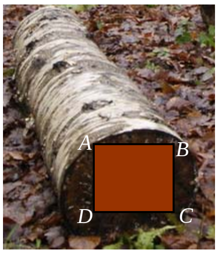
2. في المثلث IJK القائم الزاوية في J، لدينا:

$$\tan \widehat{JIK} = \frac{JK}{IJ} = \frac{6}{\frac{68}{5}} = \frac{15}{34}$$

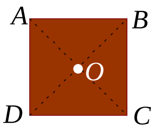
باستخدام الآلة الحاسبة نجد $\widehat{JIK} \simeq 24^\circ$.

4

لإحراز تقدم



25 جذع شجرة أسطواني ارتفاعه $6\ \text{m}$ وقاعدته قرص دائري مركزه Oونصف قطره $20\ \text{cm}$. نريد أن نفتح مجرىً في هذا الجذع بهيئة متوازي مستطيلات ارتفاعه $6\ \text{m}$ وقاعدته $ABCD$ مربع مركزه O وطول قطره $40\ \text{cm}$.



1. احسب القيمة التامة لحجم جذع الشجرة.

2. احسب مساحة المربع $ABCD$.

3. احسب حجم المجرى.

الحل:

1. جذع الشجرة عبارة عن أسطوانة، ارتفاعها $h = 600\ \text{cm}$، ونصف قطر قاعدتها $r = 20\ \text{cm}$، فيكون حجمها $\mathcal{V} = \pi r^2 \times h = \pi 20^2 \times 600 = 240000\ \text{cm}^3$.

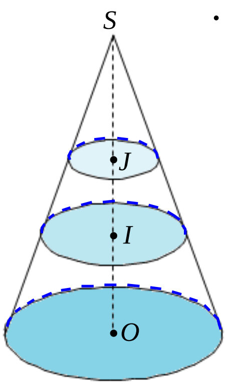
2. مساحة المربع $ABCD$ الذي طول قطره $40\ \text{cm}$، هي $\mathcal{S} = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{40^2}{2} = \dfrac{1600}{2} = 800\ \text{cm}^2$.

3. حساب حجم المجرى:

$$\mathcal{V} = \mathcal{S} \times h = 800 \times 600 = 480000\ \text{cm}^3$$

26 مخروط ومقاطع

في الشكل المرافق، $(\mathscr{C})$ مخروط رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها O. قُطع هذا المخروط بمستويين يوازيان مستوي قاعدته. فكان المقطع بأحد المستويين الدائرة $\mathscr{C}_I$ التي مركزها I ونصف قطرها $8\ \text{cm}$، وبالمستوي الآخر، كان المقطع الدائرة $\mathscr{C}_J$ التي مركزها J ونصف قطرها $5\ \text{cm}$.



نعلم أيضاً أنَّ $SJ = 15\ \text{cm}$ و $OI = 12\ \text{cm}$.

1. احسب الطول SI، ثم استنتج كلاً من JI و SO ارتفاع المخروط (C).

2. احسب نصف قطر قاعدة المخروط (C)، استنتج حجمه.

3. احسب حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها J.

4. احسب حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها I.

5. احسب حجم جذع المخروط الذي قاعدتاه الدائرتان $\mathscr{C}_I$ و $\mathscr{C}_J$.

الحل:

سنرمز لنصف قطر قاعدة المخروط $(\mathscr{C})$ بالرمز R وإلى ارتفاعه بالرمز h وإلى حجمه بالرمز $\mathcal{V}$.

سنرمز لنصف قطر قاعدة المخروط $\mathscr{C}_I$ بالرمز r_1 وإلى ارتفاعه بالرمز h_1 وإلى حجمه بالرمز $\mathcal{V}_1$.

سنرمز لنصف قطر قاعدة المخروط $\mathscr{C}_J$ بالرمز r_2 وإلى ارتفاعه بالرمز h_2 وإلى حجمه بالرمز $\mathcal{V}_2$.

1. حساب الطول SI،

لدينا $\frac{r_2}{r_1} = \frac{SJ}{SI}$ ، بالتعويض، نجد $\frac{5}{8} = \frac{15}{SI}$، ومنه $SI = 24 \text{ cm}$.

حساب كلاً من JI و SO:

$JI = SI - SJ = 24 - 15 = 9 \text{ cm}$.

$S0 = SI + IO = 24 + 12 = 36 \text{ cm}$.

2. حساب نصف قطر قاعدة المخروط (C)،

لدينا $\frac{r_2}{R} = \frac{SJ}{SO}$، بالتعويض، نجد $\frac{5}{R} = \frac{15}{36}$، ومنه $R = 12 \text{ cm}$.

حساب حجمه:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}(\pi R^2) \times h = \frac{1}{3}(\pi 12^2) \times 36 = 1728\pi \text{ cm}^3.$$

3. حساب حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها J:

$$\mathcal{V}_2 == \frac{1}{3}(\pi {r_2}^2) \times h_2 = \frac{1}{3}(\pi 5^2) \times 15 = 125\pi \text{ cm}^3$$

4. حساب حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها I:

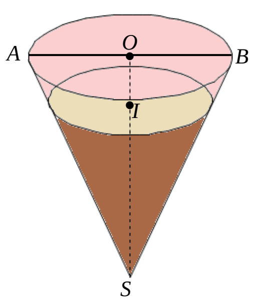
$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3}(\pi {r_1}^2) \times h_1 = \frac{1}{3}(\pi 8^2) \times 24 = 512\pi \text{ cm}^3$$

5. إذا رمزنا إلى حجم جذع المخروط الذي قاعدتاه الدائرتان $\mathscr{C}_I$ و $\mathscr{C}_J$ بالرمز $\mathcal{V}'$

$\mathcal{V}' = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = 512\pi - 125\pi = 387\pi \text{ cm}^3$.

27 قرن بوظة

قرن بوظة بهيئة مخروط دوراني $(\mathscr{C})$. ارتفاعه $SO = 12 \text{ cm}$ وقطر قاعدته $AB = 10 \text{ cm}$.



1. احسب باللترات سعة هذا القرن، واحسب طول المولد $[SA]$.

2. إذا كان $51.2\ \%$ من البوظة هي من الشوكولاتة ممثلة بالمخروط $(\mathscr{C}_1)$ الذي رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها I والباقي من الفريز ممثلة بجذع

المخروط الذي قاعدتاه الدائرتان اللتان مركزاهما I و O.

① احسب باللترات سعة المخروط $(\mathscr{C}_1)$.

② المخروط $(\mathscr{C}_1)$ تصغير للمخروط $(\mathscr{C})$ بنسبة k. اشرح لماذا $k^3 = 0.512$. تحقق من أنَّ $k = 0.8$.

③ استنتج كلاً من ارتفاع المخروط $(\mathscr{C}_1)$ ونصف قطر قاعدته.

الحل:

1. حساب سعة القرن باللترات:

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}(\pi r^2) \times h = \frac{1}{3}(\pi 5^2) \times 12 = 100\pi \text{ cm}^3$، ومنه سعة القرن باللترات $\mathcal{V} = \frac{\pi}{10}\ L$.

المثلث SOA قائم الزاوية في O. فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$SA^2 = SO^2 + 0A^2$، إذن $SA^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$، وبالتالي $SA = 13 \text{ cm}$.

2. إذا رمزنا لحجم المخروط $(\mathscr{C}_1)$ الذي رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها I بالرمز $\mathcal{V}'$

① حساب سعة المخروط $(\mathscr{C}_1)$ باللترات:

لدينا $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = \frac{51.2}{100} = 0.512$

ومنه $\mathcal{V}' = 0.512 \times \mathcal{V} = 0.512 \times \frac{\pi}{10} = 0.0512\pi\ L$

② لما كان المخروط $(\mathscr{C}_1)$ تصغير للمخروط $(\mathscr{C})$ بنسبة k، كان $\mathcal{V}' = k^3 \times \mathcal{V}$، ومنه

$k^3 = \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = 0.512$.

نلاحظ أنّ $0.8^3 = 0.512$ وهذا ما يثبت أنّ $k = 0.8$.

③ إذا رمزنا إلى ارتفاع المخروط $(\mathscr{C}_1)$ بالرمز h'، وإلى نصف قطر قاعدته بالرمز R'، كان

ارتفاع المخروط

$$\begin{aligned} h' &= 0.8 \times h \\ &= 0.8 \times 12 \\ &= 9.6 \text{ cm} \end{aligned}$$

نصف قطر قاعدته

$$\begin{aligned} R' &= 0.8 \times R \\ &= 0.8 \times 5 \\ &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$