تكلم الرياضيات بطلاقة

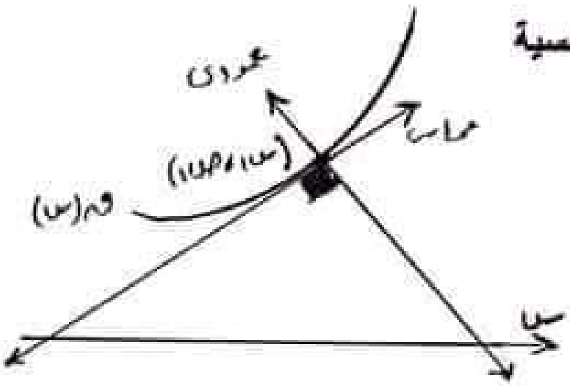
مع

د.خالد جلال

درس التطبيقات الهندسية

لطلاب وطالبات الفرع العلمي والصناعي

بدون دموع



التطبيقات الهندسية

تفسر المشتقة الاولى هندسيا بانها **ميل المماس** لمنحنى الاقتران ق(س) ويرمز للميل بالرمز م حيث م = قَ($س_1$) = ظاهـ حيث هـ زاوية ميل المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

<u>المطلوب بالدرس :</u>

١) ايجاد ميل المماس م، ميل العمودي

٢) ايجاد زاوية ميل المماس هـ

٣) ايجاد معادلة المماس، معادلة العمودي

٤) ايجاد احداثيات نقطة او نقط التماس

اولاً : ايجاد ميل المماس م ، ميل العمودي على المماس

١) نشتق بالقواعد العشرين السابقة

٢) نعوض باحداثيات نقطة التماس ينتج الميل م

٣) ميل العمودي = ــ مقلوب ميل المماس

ثانيا : ايجاد زاوية ميل المماس هـ

١) نجد الميل م

٢) نضع م = ظاهـ

٣) نقوم بحل المعادلة السابقة ان امكن

ظاهـ = ± ١
ظاهـ = صفر
ظاهـ = ± $\sqrt{٣}$
ظاهـ = ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ثالثا : ايجاد معادلة المماس، معادلة العمودي على المماس

معادلة المماس: ص − $ص_1$ = م (س − $س_1$)

معادلة العمودي: ص − $ص_1$ = − $\frac{١}{م}$ (س − $س_1$)

لإيجاد المعادلات السابقة لا بد من وجود ما يلي وبالترتيب :

١)احداثيات نقطة التماس

اذا اعطى س نعوض بالاقتران لإيجاد ص
اذا اعطى ص نعوض بالاقتران لإيجاد س
اذا اعطى (س، ، ص،) نتأكد هل هي نقطة تماس ام لا
لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = صفر ثم نجد س
لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = صفر ثم نجد ص
لإيجاد نقطة تقاطع منحنيين ق(س) ، هـ(س) نضع ق(س) = هـ(س)

٢) الميل م

٣) ثم نعوض بالمعادلات

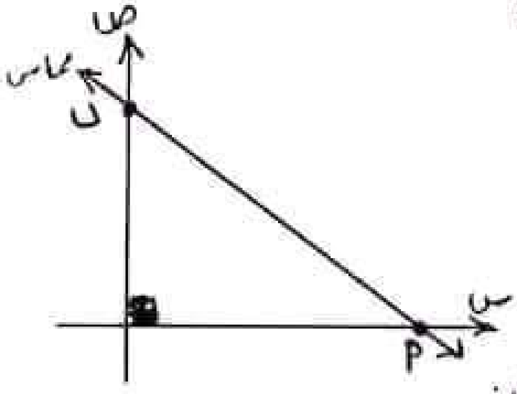
يوجد نوعان من الاسئلة

١) نص مباشر (مثل: جد معادلة المماس والعمودي على المماس المنحنى ق(س))

٢) نص غير مباشر (جد مساحة مثلث)

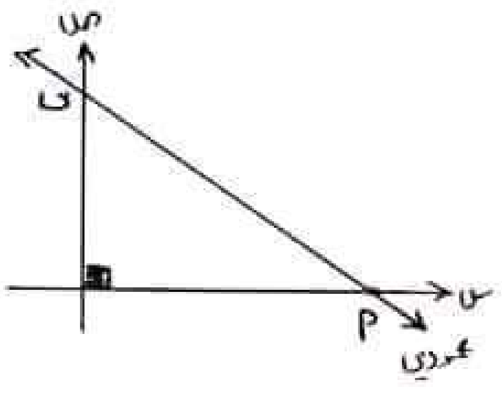
حالات المثلث

١) **يتكون المثلث من المماس ومحوري الاحداثيات كما بالشكل:**



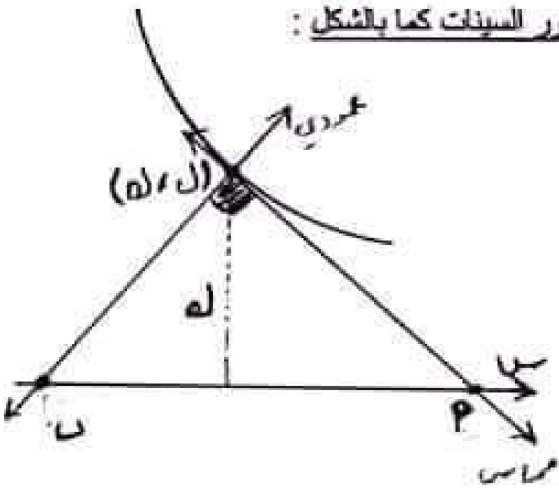
- نجد معادلة المماس
- عند أ : نضع ص =٠ ثم نجد س
- عند ب : نضع س = ٠ ثم نجد ص
- ثم نطبق في قانون المساحة = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

٢) **يتكون المثلث من العمودي ومحوري الاحداثيات كما بالشكل :**



- نجد معادلة العمودي
- عند أ : نضع ص = ٠ ثم نجد س
- عند ب : نضع س = ٠ ثم نجد ص
- ثم نطبق في قانون المساحة = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

٣) يتكون المثلث من المماس والعمودي على المماس ومحور السينات كما بالشكل :

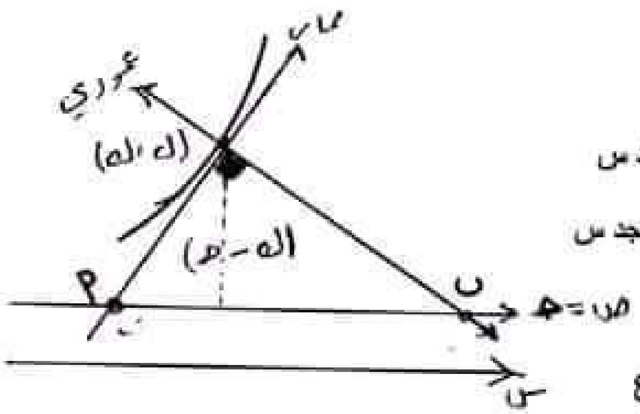


* نجد معادلة المماس ، معادلة العمودي
* عند أ : نضع ص = ٠ في معادلة المماس ثم نجد س
* عند ب : نضع ص = ٠ في معادلة العمودي ثم نجد س
* نجد مسافة أ ب
* نطبق في قانون المساحة = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ك

٤) يتكون المثلث من المماس والعمودي على المماس ومستقيم يوازي محور السينات

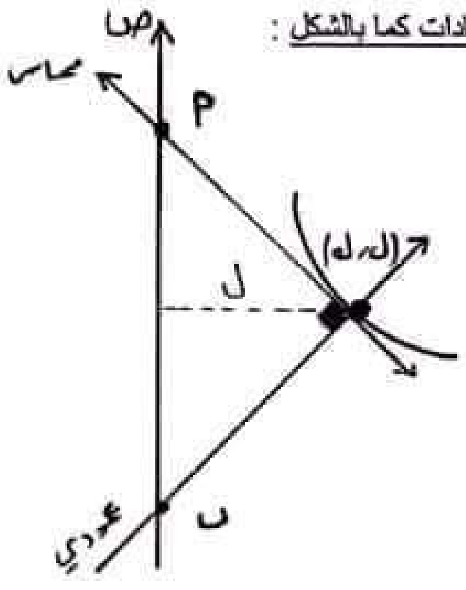
ص= حـ كما بالشكل:



* نجد معادلة المماس ، معادلة العمودي
* عند أ : نضع ص = حـ في معادلة المماس ثم نجد س
* عند ب : نضع ص = حـ في معادلة العمودي ثم نجد س
* نجد مسافة أ ب
* نطبق في قانون المساحة = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × أ ب × (ك − حـ)

٥) يتكون المثلث من المماس والعمودي على المماس ومحور الصادات كما بالشكل :

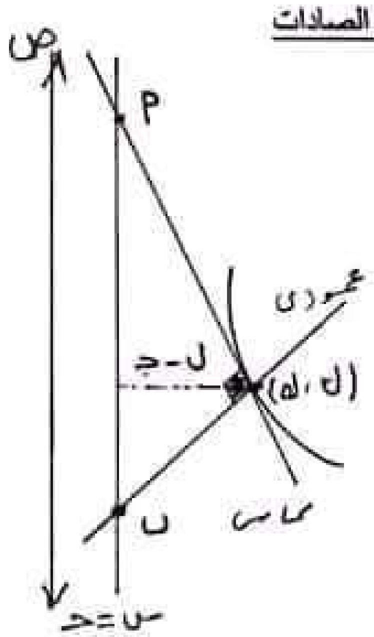


* نجد معادلة المماس ، معادلة العمودي
* عند أ : نضع س = ٠ في معادلة المماس ثم نجد ص
* عند ب : نضع س = ٠ في معادلة العمودي ثم نجد ص
* نجد مسافة أ ب
* نطبق في قانون المساحة = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ل

٦) يتكون المثلث من المماس والعمودي على المماس ومستقيم يوازي محور الصادات

س = حـ كما بالشكل:



* نجد معادلة المماس ، معادلة العمودي
* عند م : نضع س = حـ في معادلة المماس ثم نجد ص
* عند ب : نضع س = حـ في معادلة العمودي ثم نجد ص
* نجد مسافة م ب
* نطبق في قانون المساحة = $\frac{1}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

$$= \frac{1}{٢} \times \text{م ب} \times (\text{ل} - \text{حـ})$$

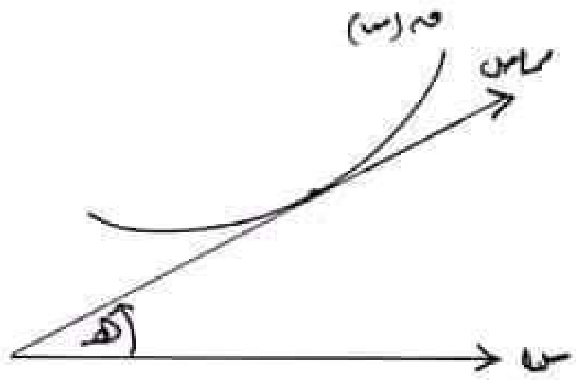
رابعا ايجاد احداثيات نقطة او نقط التماس

* لا بد من وجود الميل م
* نضع م = قَ(س)
* نقوم بحل المعادلة السابقة
* ينتج الاحداثي السيني لنقطة التماس
* نعوض بالاقتران الاصلي نجد ص
* ثم نجد معادلة المماس او العمودي اذا طلبت المعادلات

حالات وجود الميل

١) المماس لمنحنى ق(س) يصنع زاوية مقدارها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات نستفيد ما يلي : قَ(س) = ظاهـ

نقوم بحل المعادلة ينتج الاحداثي السيني لنقطة التماس ثم نجد ص ثم معادلة المماس والعمودي



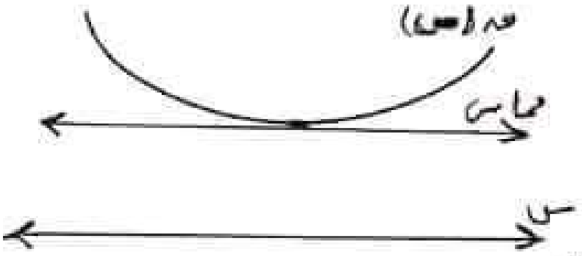
ملاحظة إذا كان المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س) يصنعان مع محور السينات مثلث متساوي الساقين فإن قَ(س) = ظا٤٥ ، قَ(س) = ظا١٣٥

٢) <u>المماس افقي</u>

أو <u>المماس يوازي محور السينات</u>

أو <u>المماس عمودي على محور الصادات</u>

أو <u>العمودي على المماس يوازي محور الصادات</u>



نستفيد ما يلي : **قَ(س) = صفر**

نقوم بحل المعادلة ينتج الاحداثي السيني لنقطة التماس

ثم نجد ص ثم معادلة المماس والعمودي

<u>ملاحظة</u> : اذا كان لمنحنى ق(س) مماس افقي

عند (أ ، ب) فإن ق(أ) = ب

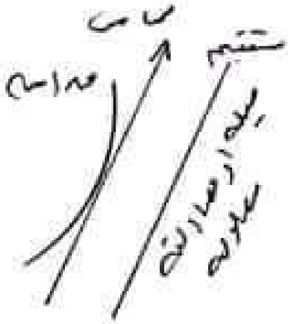
، قَ(أ) = صفر

٣) <u>المماس لمنحنى ق(س) يوازي مستقيم</u>

<u>ميله أو معادلته معلومه</u> نستفيد ما يلي :

قَ(س) = ميل المستقيم المعلوم

نقوم بحل المعادلة ينتج الاحداثي السيني لنقطة التماس ثم نجد ص ثم معادلة المماس والعمودي

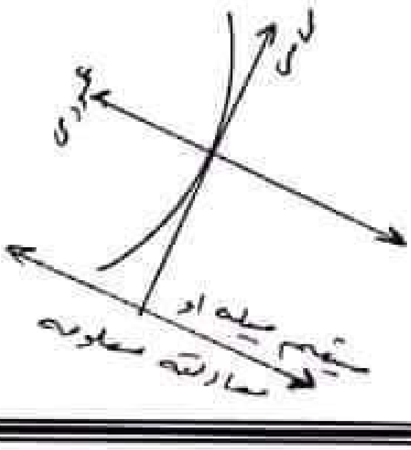


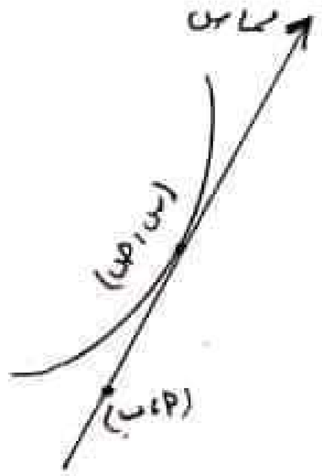
٤) العمودي على <u>المماس لمنحنى ق(س) يوازي</u>

<u>مستقيم ميله أو معادلته معلومه</u> نستفيد ما يلي :

قَ(س) = ـ مقلوب ميل المستقيم المعلوم

نقوم بحل المعادلة ينتج الاحداثي السيني لنقطة التماس ثم نجد ص ثم معادلة المماس والعمودي

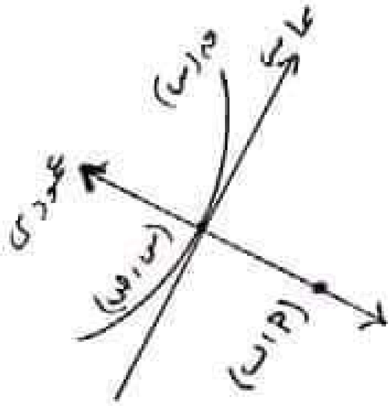




٥) المماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة الخارجية (أ ، ب) أو المماس لمنحنى ق(س) مرسوم من بالنقطة الخارجية (أ ، ب) نستفيد ما يلي :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ص} - \text{ب}}{\text{س} - \text{أ}}$$

نقوم بحل المعادلة ينتج الاحداثي السيني لنقطة التماس ثم نجد ص ثم معادلة المماس والعمودي



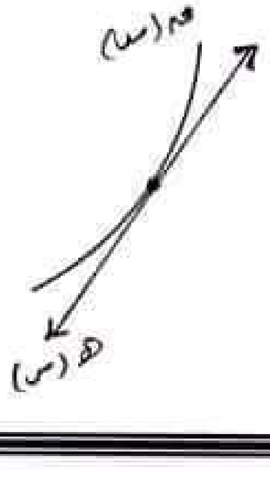
٦) العمودي على المماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة الخارجية (أ ، ب) أو العمودي على المماس لمنحنى ق(س) مرسوم من النقطة الخارجية (أ ، ب) نستفيد ما يلي :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{أ} - \text{س}}{\text{ص} - \text{ب}}$$

نقوم بحل المعادلة ينتج الاحداثي السيني لنقطة التماس ثم نجد ص ثم معادلة المماس والعمودي

خامسا حساب الثوابت (المجاهيل)

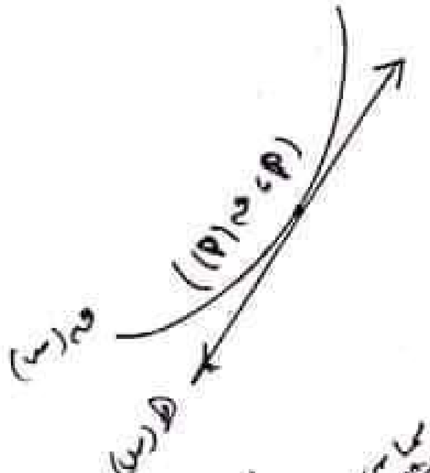
١) إذا علمت قاعدة المماس هـ(س) وقاعدة المنحنى ق(س) فإننا نستطيع حساب مجهول (ثابت) واحد كما يلي :



عند نقطة التماس فإن ق(س) = هـ(س)

، ق′(س) = هـ′(س)

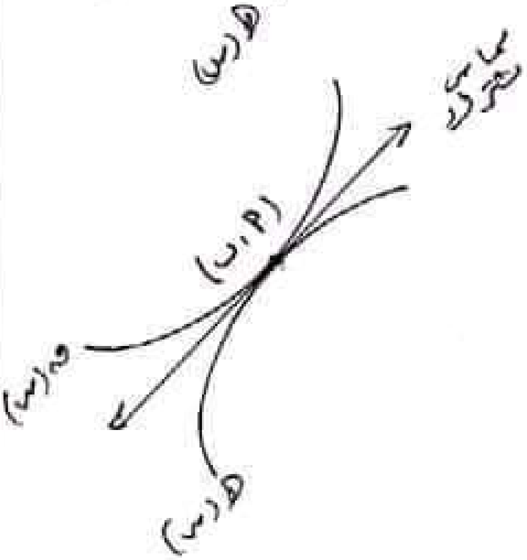
٢) إذا علمت قاعدة المماس هـ(س) وقاعدة المنحنى ق(س) والاحداثي السيني لنقطة التماس (أ ، ق(أ)) فإننا نستطيع حساب مجهولين (ثابتين) كما يلي :



عند نقطة التماس فإن ق(أ) = هـ(أ)

، قَ(أ) = هـَ(أ)

٣) إذا كان ق(س) و هـ(س) متماسين عند النقطة (أ ، ب) أو لهما مماس مشترك عند النقطة (أ ، ب) فإننا نستطيع حساب ٤مجاهيل (٤ ثوابت) كما يلي : عند نقطة التماس فإن



ق(أ) = هـ(أ) ، قَ(أ) = هـَ(أ)

ق(أ) = ب ، هـ(أ) = ب

ملاحظات :

١) لإثبات تعامد منحنيين نثبت ان حاصل ضرب ميلهما يساوي – ١

٢) لإيجاد نقطة تعامد ق(س) و هـ(س) فإننا نجد ميل الاول قَ(س) وميل الثاني هـَ(س) ثم نقوم بحل المعادلة قَ(س) × هـَ(س) = – ١

د.خالد جلال

٠٧٩٩٩٤٨١٩٨