الوحدة الرابعة

التكامـــل

الثاني الثانوي العلمي

حل تمارين الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

٠٧٩٨٩٥٩٠٧١

Scanned with CamScanner

١) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = $\frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران

ق(س) = (س+١)$^{-٢}$ ، س ≠ −١

٢) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = جا^{٢}س هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = جا٢س.

٣) إذا كان م(س) = س^{٣} + ٥س^{٢} − ٣س + جـ ، معكوسًا لمشتقة الاقتران ق، فجد ق(−٢).

٤) إذا كان م(س) = ٢س^{٤} + $\sqrt{س^{٢}+٣}$ معكوسًا لمشتقة الاقتران ق ، فجد ق(١).

٥) إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} فجد م معكوسًا لمشتقة الاقتران ق؛ علمًا بأنَّ م(٢) = ٥

٦) إذا كان الاقترانان م$_{١}$(س)، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان

م$_{١}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٥ ، م$_{٢}$(٢) = ٤ فجد قاعدة م$_{٢}$(س) .

٧) إذا كان ص = $\sqrt[٥]{٣س^{٢}-٤س+١٢}$ دس ، فجد $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=-٢}$

٨) إذا كان ∫ق(س) دس = س^{٣} − س^{٢} + ٢س + ١ ، فجد قَ(− ٣).

٩) إذا كان ∫ق(س) دس = جاس − جتاس + ٣. فأثبت أنَّ ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$)=٢

١٠) جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$

ب) ق(س) = قاس جتاس

جـ) ق(س) = $\frac{١}{\sqrt{٢س}}$

د) ق(س) = ٥ + ٥ ظا^{٢}س

١١) إذا كان م(س) معكوسًا لمشتقة الاقتران ق حيث ق(س)= ظتاس + ١، فجد مَ ($\frac{\pi}{٤}$).

Scanned with CamScanner

س١ $ه(س)$ متصل على $ح - \{-١\}$

$م'(س) = \frac{(س+١)^{٢} \times ١ - س \times ١ \times (س+١)}{(س+١)^{٤}} = \frac{١}{(س+١)^{٢}}$

$= (س+١)^{-٢} = ه(س)$

$\therefore م(س)$ هو معكوس لمشتقة $ه(س)$.

س٢ $ه(س)$ متصل.

$م'(س) = ٢$ جاس جتاس $=$ جا٢س

$\therefore م(س)$ هو معكوس لمشتقة $ه(س)$

س٣ $م'(س) = ه(س)$

$ه(س) = ٣س^{٢} + ١٠س - ٣$

$ه(-٢) = ٣(-٢)^{٢} + ١٠(-٢) - ٣$

$= ١٢ - ٢٠ - ٣$

$= -١١$

س٤ $م'(س) = ه(س)$

$ه(س) = ٨س^{٣} + \frac{٤س}{\sqrt{س^{٢}+٣}}$

$ه(١) = ٨(١)^{٣} + \frac{١}{\sqrt{١+٣}}$

$= ٨ + \frac{١}{٢}$

$= ٨\frac{١}{٢}$.

س٥ $ه(س) = ٣س^{٢}$

$م(س) = س^{٣} + ﺟ$

$م(٢) = ٢^{٣} + ﺟ$

$٥ = ٨ + ﺟ \Leftarrow ﺟ = -٣$

$\therefore م(س) = س^{٣} - ٣$

س٦ $م_{١}(٢) = ٣(٢)^{٢} - ج(٢) + ٥$

$= ١٢ - ٤ + ٥ = ١٣$

$م_{٢}(س) - م_{١}(س) = ٤ - ١٣ = -٩$

$م_{٢}(س) = م_{١}(س) + (-٩)$

$= ٣ج^{٢} - ٢ج + ٥ - ٩$

$= ٣ج^{٢} - ٢ج - ٤$.

س٧ $ص = \int_{٥}^{\sqrt{٣س^{٢} - ٤ج + ١٢}} د س$

$\frac{دص}{دج} = \sqrt{٣س^{٢} - ٤ج + ١٢}$

$\left| \frac{دص}{دج} \right|_{ج=-٢} = \sqrt{٣(-٢)^{٢} - ٤(-٢) + ١٢}$

$= \sqrt{١٢ + ٨ + ١٢}$

$= \sqrt{٣٢}$

$= ٢$

Scanned with CamScanner

س٨ ج) $\int (س^3 - س^2 + 3س + 1)\,دس$

نشتق الطرفين

$م(س) = 3س^2 - 2س + 3$

$م'(س) = 6س - 2$

$م'(-3) = 6 \times -3 - 2$

$= -18 - 2 = -20$

س٩ ج) $\int (جاس - جتاس + 3)\,دس$

نشتق الطرفين

$م(س) = جتاس + جاس$

$م(\frac{\pi}{2}) = صفر + 1 = 1$

$م'(س) = -جاس + جتاس$

$م'(\frac{\pi}{2}) = -1 + صفر = -1$

$م(\frac{\pi}{2}) - م'(\frac{\pi}{2}) = 1 - -1 = 2$

س١٠ أ) $م(س) = \frac{1}{س^2} \Leftarrow$

$م(س) = \frac{1}{س} + د$

ب) $م(س) = قاس \cdot جتاس$

$= \frac{1}{جتاس} \times جتاس$

$= 1$

$م(س) = س + د$

جـ) $م(س) = \frac{1}{\sqrt{س}}$.

$م(س) = 2\sqrt{س} + د$

س٧ ج) $م(س) = 5 + 5ظاس$.

$= 5(1 + ظا^2س)$

$= 5قا^2س$

$م(س) = 5ظاس + د$

س١١ $م(س) = ظتاس + 1$

$م'(س) = م(س) = ظتاس + 1$

$م''(س) = -قتا^2س$.

$م''(\frac{\pi}{4}) = -قتا^2\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{جا^2\frac{\pi}{4}}$

$= -\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$

$= -\frac{1}{\frac{1}{2}}$

$= -2$

Scanned with CamScanner

١) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \left(س^{٦} + \frac{٣}{س^{٥}} - \sqrt[٥]{س^{٢}} \right) ء س$

ب) $\int (٥ + ٣ص)^{٤} ء ص$

جـ) $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} ء س$

د) $\int (٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥)^{٥} ء س$

هـ) $\int \frac{(س+٣)^{٢} - ٩}{س} ء س$

و) $\int (١ - س)(س - ١)^{٥} ء س$

ز) $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}} ء س$

ح) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١} ء س$

ط) $\int \sqrt[٣]{س} \left(\sqrt[٣]{س} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{س}} \right) ء س$

ي) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + ٢س + ٣} ء س$

٢) إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة؛ بحيث إنَّ قَ(س)=٣ س^{٢} − ٢ ، وكانت النقطة (٠،١) تقع على منحناه. فجد قاعدة الاقتران ق.

٣) إذا كان قً(س)= $\frac{٦}{\sqrt{س}}$ ، ومنحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١)، فجد قاعدة ق(س).

٤) إذا كان $\int (قَ(س) + ٢س) ء س = س^{٣} + ب س^{٢} + ١$ ، وكان قَ(١) = ٥، ق(٢) = ٧، فجد ق(−٢).

٥) إذا كان قً(س) = −٤ جتا٢س ، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية قيمتها (−٢) عند س= $\frac{\pi}{٢}$، فجد قاعدة الاقتران ق .

Scanned with CamScanner

(التكامل غير المحدود)

٦) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \left(\frac{٥}{\text{جا}^٢س} - \frac{٣}{\text{جتا}^٢س}\right) \text{د}س$

ب) $\int \frac{\text{جا}^٢س + \text{جتا}^٢س}{١ + \text{جتا}٢س} \text{د}س$

جـ) $\int (\text{ظتاس} - \text{قتاس})^٢ \text{د}س$

د) $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^٢س}{١ - \text{جا}^٢س} \text{د}س$

هـ) $\int \frac{١ - \text{حا}^٢س}{\text{جا}^٢ \frac{س}{٢} \times \text{جتا}^٢ \frac{س}{٢}} \text{د}س$

و) $\int \frac{١ - \text{جا}٢س}{\text{جاس} - \text{جتاس}} \text{د}س$

ز) $\int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتاس}} \text{د}س$

ح) $\int \frac{\text{د}س}{\text{جا}^٢س - \text{جا}^٤س}$

ط) $\int \text{قاس}(\text{ظاس} + \text{جتاس}) \text{د}س$

ي) $\int \text{جا}٦س \, \text{جا}٤س \, \text{د}س$

ك) $\int \text{جتا}^٢س \, \text{د}س$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^٣س - ٥}{١ - \text{جا}^٢س} \text{د}س$

م) $\int \text{جتا}٣س \, \text{جتا}٧س \, \text{د}س$

ن) $\int (\text{جتا}^٤س - \text{جا}^٤س) \text{د}س$

س) $\int \frac{١}{\text{قاس} - ١} \text{د}س$

ع) $\int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}} \text{د}س$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

أ) $\int (س^{٦} + \frac{٣}{س^{٥}} - ٦س^{٤}) \, دس$

$= \int (س^{٦} + ٣س^{-٥} - س^{\frac{٤}{٥}}) \, دس$

$= \frac{س^{٧}}{٧} + \frac{٣س^{-٤}}{-٤} - \frac{س^{\frac{٩}{٥}}}{\frac{٩}{٥}} + ﺟ$

$= \frac{س^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤س^{٤}} - \frac{٥}{٧} \sqrt[٥]{س^{٧}} + ﺟ$

ب) $\int (٥ + ٣ص)^{٤} \, دص$

$= \frac{(٥ + ٣ص)^{٥}}{٣ \times ٥} + ﺟ$

$= \frac{(٥ + ٣ص)^{٥}}{١٥} + ﺟ$

ج) $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} \, دس$

$\int \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{س - ٢} \, دس$

$= \int (س^{٢} + ٢س + ٤) \, دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٤س + ﺟ$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} + ٤س + ﺟ$

د) $\int (٤س^{٣} + ٢٠س + ٢٥)^{٥} \, دس$

$= \int ((٢س + ٥)^{٢})^{٥} \, دس$

$= \int (٢س + ٥)^{١٠} \, دس = \frac{(٢س + ٥)^{١١}}{٢ \times ١١} + ﺟ$

$= \frac{(٢س + ٥)^{١١}}{٢٢} + ﺟ$

هـ) $\int \frac{(س + ٣)^{٢} - ٩}{س} \, دس$

نحلل فرق بين مربعين

$\int \frac{(س + ٣ - ٣)(س + ٣ + ٣)}{س} \, دس$

$\int \frac{س(س + ٦)}{س} \, دس = \int (س + ٦) \, دس$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٦س + ﺟ$

و) $\int (١ - س)(س - ١)^{٥} \, دس$

$= - \int (س - ١)(س - ١)^{٥} \, دس$

$= - \int (س - ١)^{٦} \, دس$

$= - \frac{(س - ١)^{٧}}{٧} + ﺟ$

Scanned with CamScanner

تابع س١

ز) $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{س^{3}} - \frac{5}{س^{3}}$ ، دس =

توحيد مقامات لما داخل الجذر

$= \int_{3}^{\infty} \frac{5-س}{س^{3}}$ دس

$= \int_{3}^{\infty} \frac{5-س}{\sqrt[3]{س^{4}}}$ دس

$= \int_{3}^{\infty} \frac{(5-س)^{\frac{1}{3}}}{س}$ دس

$= \int_{3}^{\infty} (5-س)^{\frac{1}{3}}$ دس $= \frac{(5-س)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}\times -1} + ث$

$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(5-س)^{4}} + ث$

ط) $\int \sqrt{س}\left(\sqrt{س^{3}} + \frac{5}{\sqrt{س}}\right)$ دس =

$= \int \left(\sqrt{س}\times\sqrt{س^{3}} + \frac{5}{\sqrt{س}}\times\sqrt{س}\right)$ دس

$= \int (س^{2} + 5)$ دس $= \int (س^{\frac{4}{3}} + 5)$ دس =

$= \frac{س^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 5س + ث$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{س^{5}} + 5س + ث$.

ي) $\int \frac{5س}{\sqrt{٧ص+٣} + \sqrt{٢ص+٣}}$ دص ×

مضروب بالمرافق

$= \frac{\sqrt{٧ص+٣} - \sqrt{٢ص+٣}}{\sqrt{٧ص+٣} - \sqrt{٢ص+٣}}$

$= \int \frac{5س(\sqrt{٧ص+٣} - \sqrt{٢ص+٣})}{(٣+٢ص) - (٣+٧ص)}$ دص =

$= \int \frac{5س(\sqrt{٧ص+٣} - \sqrt{٢ص+٣})}{-٣ص - ٣+٧ص}$ دص =

$= \int \frac{5س((٧ص+٣)^{\frac{1}{2}} - (٢ص+٣)^{\frac{1}{2}})}{5س}$ دص

$= \frac{(٧ص+٣)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times ٧} - \frac{(٢ص+٣)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times ٢} + ث$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(٧ص+٣)^{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{(٢ص+٣)^{3}} + ث$

ع) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - 1}$ دس =

إخراج $\sqrt{س}$ عامل مشترك .

$= \int \frac{\sqrt{س}(\sqrt{س} - 1)}{\sqrt{س} - 1}$ دس =

$= \int \sqrt{س}$ دس $= \int س^{\frac{1}{2}}$ دس =

$= \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ث = \frac{2}{3}\sqrt{س^{3}} + ث$

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

تابع س١

ل) ∫ (٣ - ٢ب)^٧ دس =

(٣ - ٢ب)^٧ س + د .

لأن ما بداخل الأقواس ثابت .

س٢ هـ' = ٣س^٢ - ٢ .

هـ(س) = ∫ (٣س^٢ - ٢) دس

هـ(س) = س^٣ - ٢ك + د

هـ(٠) = ٠ - ٠ + د

د = ١

∴ هـ(س) = س^٣ - ٢ك + ١

س٣ يمر بالنقطة (٠،٤) ← هـ(٤) = صفر

ميل المماس = ١ ← هـ'(٤) = ١

هـ(س) = ∫ ٦ / √ك دك = ∫ ٦ ك^(-١/٢) دك

هـ(س) = ٦ س^(١/٢) / (١/٢) + د

هـ'(س) = ١٢ √س + د

هـ'(٤) = ١٢ √٤ + د

١ = ٢٤ + د ← د = -٢٣

هـ'(س) = ١٢ √س - ٢٣

هـ(س) = ∫ (١٢ س^(١/٢) - ٢٣) دك =

١٢ س^(٣/٢) / (٣/٢) - ٢٣ك + د

هـ(س) = ٨ √س^٣ - ٣ك + د

هـ(٤) = ٨ √٤^٣ - ٣ × ٤ + د

صفر = ٦٤ - ٩٢ + د

صفر = -٢٨ + د ⇐ د = ٢٨

هـ(س) = ٨ √س^٣ - ٣ك + ٢٨

س٤ ∫ (هـ'(س) + ٢ك) دك = س^٣ + ب س + ١

نشتق الطرفين

هـ'(س) + ٢س = ٣ك^٢ + ٢ب س .

هـ'(١) + ٢ × ١ = ٣(١)^٢ + ٢ب(١)

٥ + ٢ = ٣ + ٢ب

٧ = ٣ + ٢ب ⇐ ٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢

هـ'(س) + ٢ك = ٣ك^٢ + ٤ك^(-٢)

هـ'(س) + ٢س = ٣س^٢ + ٤س^(-٢)

هـ'(س) = ٣س^٢ + ٢س

هـ(س) = ∫ (٣ك^٢ + ٢ك) دك

هـ(س) = س^٣ + س^٢ + د

هـ(٢) = ٨ + ٤ + د

٧ = ١٢ + د ⇐ د = -٥

هـ(س) = س^٣ + س^٢ - ٥

هـ(-٢) = (-٢)^٣ + (-٢)^٢ - ٥

= -٨ + ٤ - ٥

= -٩

Scanned with CamScanner

س٥ ﻫ'(س) = -٤ جتا٢س.

قيمة صغرى محلية قيمتها (-٢) عندما

س = $\frac{\pi}{2}$ ⇐

ﻫ'($\frac{\pi}{2}$) = صفر ، ﻫ($\frac{\pi}{2}$) = -٢

ﻫ'(س) = ∫ -٤ جتا٢س . دس

ﻫ'(س) = $\frac{-٤ \text{ جا}٢س}{٢}$ + ﺟ

ﻫ'(س) = -٢ جا٢س + ﺟ

ﻫ'($\frac{\pi}{2}$) = -٢ جا٢$\frac{\pi}{2}$ + ﺟ

صفر = ٠ + ﺟ ⇐ ﺟ = صفر

ﻫ'(س) = -٢ جا٢س .

ﻫ(س) = ∫ -٢ جا٢س . دس

ﻫ(س) = جتا٢س + ﺟ

ﻫ($\frac{\pi}{2}$) = جتا٢$\frac{\pi}{2}$ + ﺟ

-٢ = -١ + ﺟ ⇐ ﺟ = -١

ﻫ(س) = جتا٢س - ١

س٦ جد كلاً من التكاملات التالية:

أ) ∫ ($\frac{٥}{\text{جا}^٢س}$ - $\frac{٣}{\text{جتا}^٢س}$) دس =

∫ (٥ قتا٢س - ٣ قا٢س) دس =

-٥ ظتاس - ٣ ظاس + ﺟ

ب) ∫ $\frac{\text{جا}٢س + \text{جتا}٢س}{١ + \text{جتا}٢س}$ دس =

∫ $\frac{١}{(١ + (٢\text{جتا}^٢س - ١)}$ دس =

∫ $\frac{١}{٢\text{جتا}^٢س}$ دس = ∫ $\frac{١}{٢}$ قا٢س . دس

= $\frac{١}{٢}$ ظاس + ﺟ

ج) ∫ (ظتاس - قتاس)^٢ دس =

∫ (ظتا٢س - ٢ ظتاس قتاس + قتا٢س) دس

∫ (قتا٢س - ١ - ٢ ظتاس قتاس + قتا٢س) دس =

∫ (٢ قتا٢س - ٢ ظتاس قتاس - ١) دس =

-٢ ظتاس + ٢ قتاس - س + ﺟ .

د) ∫ $\frac{\text{جاس} + \text{جتا}٢س}{١ - \text{جا}٢س}$ دس =

∫ $\frac{\text{جاس} + \text{جتا}٢س}{\text{جتا}٢س}$ دس = ∫ ($\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}٢س}$ + $\frac{\text{جتا}٢س}{\text{جتا}٢س}$) دس

= ∫ ($\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{١}{\text{جتاس}}$ + ١) دس =

∫ (ظاس قاس + ١) دس =

قاس + س + ﺟ

Scanned with CamScanner

تابع س٦

هـ) $\int \frac{1 - جا^2 س}{جا^2 \frac{س}{2} \times جتا^2 \frac{س}{2}} \, دس$

$جا^2 \frac{س}{2} جتا^2 \frac{س}{2} = \frac{1}{4} جا^2 س$

$جا^2 \frac{س}{2} = \frac{1}{2} جا س$

$= \int \frac{جتا^2 س}{\frac{1}{4} جا^2 س} \, دس$

$= \int ٤ \, ظتا^2 س \, . \, دى = \int ٤ (قتا^2 س - ١) \, دى$

$= ٤ (- ظتا س - س) + جـ$.

و) $\int \frac{١ - جا ٤س}{جا س - جتا ك} \, دس$

$جا^2 س + جتا^2 س = ١$

$\int \frac{جا^2 س + جتا^2 س - جا ٤ى}{جا س - جتا س} \, دى$

$\int \frac{جا^2 ى + جتا^2 ى - ٢ جا ك جتا ك}{جا س - جتا ك} \, دى$

$\int \frac{جا^2 س - ٢ جا س جتا ى + جتا^2 ى}{جا س - جتا ك} \, دس$

$\int \frac{(جا س - جتا ك)(جا ك - جتا ك)}{جا س - جتا ك} \, دى$

$\int (جا س - جتا ك) \, دس =$

$- جتا س - جا س + جـ$

ز) $\int \frac{جتا ٣س}{جتا س} \, دس =$

$جتا ٣س = جتا (٢ك + س) =$

$جتا ٢ك جتا س - جا ٢ك جا س$

$\int \frac{جتا ٢ك جتا ك - جا ٢ك جا ك}{جتا س} \, دس =$

$\int \frac{جتا ٢ك جتا س}{جتا س} - \frac{جا ٢ك جا ك}{جتا س} \, دى$

$\int (جتا ٢ك - \frac{٢ جا س جتا ك جا ك}{جتا س}) \, دى$

$\int (جتا ٢ك - ٢ جا^2 س) \, دس =$

$\int جتا ٢ك - ٢ \times \frac{1}{2} (١ - جتا ٢ك) \, دس =$

$\int (جتا ٢س - ١ + جتا ٢ك) \, دس =$

$\int (٢ جتا ٢س - ١) \, دس =$

$\frac{٢ جا ٢س}{٢} - س + جـ =$

$جا ٢س - س + جـ$.

منهاجي
منصة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

تابع س٦

ج) $\int \frac{دس}{جاس - جاس}$ =

$\int \frac{دس}{جاس(١-جاس)} = \int \frac{دس}{جاس \cdot جتاس}$

$\int \frac{دس}{(جاس جتاس)^{٢}} = \int \frac{دس}{(\frac{١}{٢} جا٢س)^{٢}}$

$\int \frac{دس}{\frac{١}{٤} جا^{٢}٢س} = \int ٤ قتا^{٢}٢س \, دس$

$= \frac{-٤}{٢} ظتا٢س + جـ = -٢ ظتا٢س + جـ$

هـ) $\int قاس (ظاس + جتاس) دس$ =

$\int (قاس ظاس + قاس جتاس) دس =$

$\int (قاس ظاس + \frac{١}{جتاس} \times جتاس) دس =$

$\int (قاس ظاس + ١) دس =$

$قاس + س + جـ$

و) $\int جا٦س جا٤س دس$ =

$\frac{١}{٢} \int (جتا(٦س - ٤س) - جتا(٦س + ٤س)) دس$

$= \frac{١}{٢} \int (جتا٢س - جتا١٠س) دس$

$= \frac{١}{٢} (\frac{١}{٢} جا٢س - \frac{١}{١٠} جا١٠س) + جـ$

$= \frac{١}{٤} جا٢س - \frac{١}{٢٠} جا١٠س + جـ$

ز) $\int جتا^{٢}س \, دس$ =

$= \frac{١}{٢} \int (١ + جتا٢س) دس =$

$= \frac{١}{٢} (س + \frac{١}{٢} جا٢س) + جـ =$

$\frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤} جا٢س + جـ$.

ل) $\int \frac{جتا^{٣}س - ٥}{١ - جاس} دس =$ ٠

$\int \frac{جتا^{٣}س - ٥}{جتاس} دس =$

$\int (\frac{جتا^{٢}س}{جتاس} - \frac{٥}{جتاس}) دس =$

$\int (جتاس - ٥ قاس) دس =$

$جاس - ٥ ظاس + جـ$

م) $\int (جتا٣س \, جتا٧س) دس =$

$\int \frac{١}{٢} (جتا(٣س+٧س) + جتا(٣س-٧س)) دس$

$= \int \frac{١}{٢} (جتا١٠س + جتا(-٤س)) دس$

$= \int \frac{١}{٢} (جتا١٠س + جتا٤س) دس$

$= \frac{١}{٢} (\frac{جا١٠س}{١٠} + \frac{جا٤س}{٤}) + جـ$

$= \frac{١}{٢٠} جا١٠س + \frac{١}{٨} جا٤س + جـ$

Scanned with CamScanner

تمارين ص ٦

ن) $\int (\text{ظتا}^4 س - \text{جا}^4 س)\, د ك =$

$\int (\text{ظتا}^2 س - \text{جا}^2 س)(\text{ظتا}^2 س + \text{جا}^2 س)\, د ك$

$= \int (\text{ظتا}^2 س \times 1)\, د س$

$= -\text{ظا} س + ب$

س) $\int \frac{1}{\text{قا} س - 1}\, د س =$

$\int \frac{1}{\frac{1}{\text{جتا} س} - 1}\, د ك =$

$\int \frac{1}{\frac{1 - \text{جتا} س}{\text{جتا} س}}\, د س =$

$\int \frac{\text{جتا} س}{1 - \text{جتا} س} \times \frac{1 + \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س}\, د ك =$

$\int \frac{\text{جتا} س (1 + \text{جتا} س)}{1 - \text{جتا}^2 س}\, د ك =$

$\int \frac{\text{جتا}^2 س + \text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س}\, د س =$

$\int (\frac{\text{جتا} س}{\text{جا} س} \times \frac{1}{\text{جا} س} + \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س})\, د س$

$\int (\text{قتا} س\, \text{ظتا} س + \text{ظتا}^2 س)\, د س$

$\int (\text{قتا} س\, \text{ظتا} س + \text{قا}^2 س - 1)\, د س$

$-\text{قتا} س - \text{ظتا} س - س + ب$

ع) $\int \frac{\text{جا} س}{1 - \text{جا} ك}\, د س =$

$\int \frac{\text{جا} س}{1 - \text{جا} ك} \times \frac{1 + \text{جا} ك}{1 + \text{جا} ك}\, د س =$

$\int \frac{\text{جا} س + \text{جا}^2 س}{1 - \text{جا}^2 س}\, د ك =$

$\int \frac{\text{جا} س + \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}\, د س =$

$\int \frac{\text{جا} س}{\text{جتا}^2 س} + \frac{\text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}\, د ك =$

$\int (\frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س} \times \frac{1}{\text{جتا} س} + \text{ظا}^2 س)\, د ك =$

$\int (\text{ظا} س\, \text{قا} س + \text{قا}^2 س - 1)\, د س =$

$\text{قا} س + \text{ظا} س - س + ب$

Scanned with CamScanner

١) احسب قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{س^{٢}}$ د س

ب) $\int_{-٢}^{٣} (س^{٢} - |س - ١|)$ د س

جـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا٢س د س

د) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ (س + جتاس) د س

هـ) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \frac{\sqrt{١ + جا٢س}}{جاس + جتاس}$ د س

و) $\int_{٢}^{٢} (٩س - ٧)^{\circ}$ د س

ز) $\int_{-١}^{٣} (س - ١)(س^{٢} + س + ١)$ د س

ح) $\int_{١}^{١} \sqrt{س} (\sqrt{س} + ٢)^{٢}$ د س

ط) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$ د س

ي) $\int_{١}^{٣} \frac{٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥}{س^{٢}}$ د س

ك) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩س^{٢} - ١٢س + ٤}$ د س

ل) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جتاس − جاس) د س

٢) إذا كان ق(س) = $\int_{-٢}^{٢} (٤$ د س − ٣س^{٢}) د س ، فجد قَ (−١).

٣) إذا كان $\int_{ب}^{٢}$ ٢ب د س = −٣٠، حيث ب ∋ ح ، فجد قيمة الثابت ب .

٤) إذا كان $\int_{جـ}^{٠}$ س(١ − س) د س = ٠ ، حيث جـ ∋ ح ، فجد قيمة جـ .

٥) إذا كان $\int_{-١}^{٣} ($٣س^{٢} − ٢ $\int_{جـ}^{٣}$ ٣م د م) د س = −٢٠ ، فجد قيمة الثابت جـ.

Scanned with CamScanner

(التكامل المحدود)

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س & ، \ -٣ < س \geq ٠ \\ س & ، \ ٠ < س \geq ٤ \end{cases}$ ، فجد $\int_{-٣}^{٤}$ ق(س) ء س

٧) إذا كان $\int_{٢}^{ب}$ (٢س − ٣) ء س = ٢٠ ، فجد قيمة الثابت ب.

٨) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س) + $\frac{١}{س^{٢}}$ − ٦) ء س = ١٢ ، فجد $\int_{١}^{٣}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ − س^{٢}) ء س

٩) دون حساب تكامل المقدار $\int_{٠}^{\pi}$ $\frac{١}{٣ جتا^{٢}س + ٢}$ ء س بيّن أنَّ

$\frac{\pi}{٥} \geq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣ جتا^{٢}س + ٢}$ ء س $\geq \frac{\pi}{٢}$

١٠) إذا علمت أن م $\geq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}$ ء س $\geq$ ك ، فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دونَ حساب قيمة $\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}$ ء س

١١) إذا كان ق اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية ، وكان ق(٠) = ٥ ، قً(س) = ٤ ،

$\int_{١}^{٠}$ قَ(س) ء س = ٣ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

١٢) جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث $\int_{-١}^{١}$ ق(س) ء س = ٤ ، $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ء س = ٢

Scanned with CamScanner

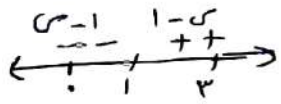
س ٩) $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{س^2}\,د س = \int_{2}^{\infty} س^{-2}\,د س$

$= \left[\frac{س^{-1}}{-1}\right]_{2}^{\infty} = \left[-\frac{1}{س}\right]_{2}^{\infty}$

$= \frac{1}{٨} + \frac{1}{٢} = \frac{-١+٤}{٨} = \frac{٣}{٨}$

ب) $\int_{1}^{3} (س^2 - ٤س - ١١)\,د س$

$س - ١ = صفر \Leftarrow س = ١$



$= \int_{0}^{3} س^2\,د س = \left[\frac{س^3}{٣}\right]_{0}^{3}$

$= \frac{٣^3}{٣} - \frac{(٠)^3}{٣} = ٩$

$\int_{1}^{3} (٤س - ١١)\,د س = \int_{1}^{2} (١-س)\,د س + \int_{2}^{3} (س-١)\,د س$

$= \left[س - \frac{س^2}{٢}\right]_{1}^{2} + \left[\frac{س^2}{٢} - س\right]_{2}^{3}$

$= ١ - \frac{١}{٢} - صفر + \frac{٣^2}{٢} - ٣ - (\frac{١}{٢} - ١)$

$= \frac{١}{٢} + \frac{٩}{٢} - ٣ - \frac{١}{٢} + ١$

$= \frac{٩}{٢} - ٢ = \frac{٩}{٢} - \frac{٤}{٢} = \frac{٥}{٢}$

$\int_{1}^{3} (س^2 - ٤س - ١١)\,د س =$

$٩ - \frac{٥}{٢} =$

$\frac{١٨}{٢} - \frac{٥}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

جـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جا س\,د س =$

$= -جتا س \Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$-جتا \frac{\pi}{٢} - (-جتا \frac{\pi}{٤})$

$-صفر - (-١ \times \frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢}$

د) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (س + جتا س)\,د س$

$= \left[\frac{س^2}{٢} + جا س\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \left(\frac{\pi^2}{٨} + ١\right) - \left(\frac{(\frac{\pi}{٤})^2}{٢} + ١\right)$

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{١ + جا س}}{جا س + جتا س}\,د س =$

$١ + جا ٢س = جا^2 س + جتا^2 س + ٢ جا س جتا س$

$= جا^2 س + ٢ جا س جتا س + جتا^2 س$

$= (جا س + جتا س)^2$

$\therefore \sqrt{١ + جا ٢س} = \sqrt{(جا س + جتا س)^2}$

$= |جا س + جتا س|$

$= جا س + جتا س$ لأن $جا س، جتا س$ موجبة في $(٠، \frac{\pi}{٤})$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{جا س + جتا س}{جا س + جتا س}\,د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{٤}} ١\,د س$

$= س \Big]_{0}^{\frac{\pi}{٤}} = \frac{\pi}{٤} - ٠ = \frac{\pi}{٤}$

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

س٨ و) $\int_{-2}^{2} (9س - 7)^5 \, دس$ = صفر .

ز) $\int_{-1}^{3} (س - 1)(س^2 + س + 1) \, دس$ =

$\int_{-1}^{3} (س^3 - 1) \cdot دس = \left[\frac{س^4}{4} - س \right]_{-1}^{3}$

$= (\frac{1}{4} + 1) - 3 - \frac{81}{4}$

$= 16 - 4 - \frac{80}{4}$

ح) $\int_{1}^{4} س\sqrt{س} (4\sqrt{س} + 2) \, دس$ =

$= \int_{1}^{4} س\sqrt{س} (س + 3\sqrt{س} + 3) \, دس$ =

$= \int_{1}^{4} س^{\frac{1}{2}} (س + 3س^{\frac{1}{2}} + 3) \, دس$ =

$= \int_{1}^{4} (س^{\frac{3}{2}} + 3س + 3س^{\frac{1}{2}}) \, دس$ =

$\left[\frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} س^2 + 2س^{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{4}$

$\left(\frac{64}{5} + 24 + \frac{16}{3} \right) - 0 = \frac{64}{15} + \frac{360}{15} + \frac{70}{15}$

$= \frac{496}{15}$

ط) $\int_{2}^{4} \frac{1}{(س-1)^2} \, دس = \int_{2}^{4} (س-1)^{-2} \, دس$

$= \left[\frac{(س-1)^{-1}}{-1} \right]_{2}^{4} = \left[\frac{-1}{س-1} \right]_{2}^{4}$

$\frac{-1}{4-1} - \frac{-1}{2-1} = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.

ي) $\int_{1}^{3} \frac{2س^3 - 3س^2 + 5}{س^2} \, دس$ =

$\int_{1}^{3} (2س - 3 + \frac{5}{س^2}) \, دس$ =

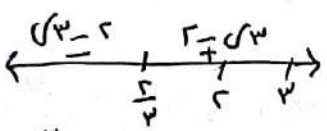
$\left[س^2 - 3س - \frac{5}{س} \right]_{1}^{3} = 9 - 9 - \frac{5}{3} - (1 - 3 - 5)$

$= -\frac{5}{3} + 8 = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

ك) $\int_{2}^{4} \sqrt{9س^2 - 12س + 4} \, دس$ =

$\int_{2}^{4} \sqrt{(3س - 2)^2} \, دس = \int_{2}^{4} |3س - 2| \, دس$

$3س - 2 = 0 \Leftarrow س = \frac{2}{3}$



$\int_{2}^{4} (3س - 2) \, دس = \left[\frac{3}{2} س^2 - 2س \right]_{2}^{4}$

$= (2)^2 \frac{3}{2} - 2 \times 2 - (\frac{3}{2}(2)^2 - 2 \times 2)$

$= 8 - 6 - (6 - 4) = \frac{16}{2} - 2 = 6$.

ل) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (جتاس - جاس) \, دس$ =

$= \left[جاس + جتاس \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$1 + 0 - (0 + 1) =$ صفر .

Scanned with CamScanner

س٢ اذا كان $\text{مـ}(س) = \int_{ج}^{٤} (٤ك - ٣ك^{٢})\,ك$

فجد $\text{مـ}'(-١)$.

الحل: $\text{مـ}(س) = \left[٤(-٢ - ٠) - ٣ك^{٢} \right]_{ج}^{س}\,ك$

$= \int (-٨ - ٣ك^{٢})\,ك س$

$\text{مـ}(س) = -٨ك - س^{٣} + ج$

$\text{مـ}'(س) = -٨ - ٣س^{٢}$.

$\text{مـ}'(-١) = -٨ - ٣ = -١١$.

س٣ اذا كان $\int_{ب}^{٢} ٣ب^{٢}\,س س = -٣٠$ حيث

ب ∈ ح ، فجد قيمة الثابت ب .

الحل: $\int_{ب}^{٢} ٣ب^{٢}\,س س = -٣٠$

$٣ب^{٢}(٢ - ب) = -٣٠$

$٤ب^{٢} - ٣ب^{٢} = -٣٠$

$ب^{٢} - ٤ب - ٣٠ = ٠$ ÷ ٢

$ب^{٢} - ٢ب - ١٥ = ٠$

$(ب - ٥)(ب + ٣) = ٠ \Leftarrow$ ب = ٥ ، -٣

س٤ اذا كان $\int_{ج}^{١} س(١ - س)\,س س = ٠$

حيث ج ∈ ح ، فجد قيمة ج .

$\int_{ج}^{١} س(١ - س)\,س س = \int_{ج}^{١} (س - س^{٢})\,س س$

$\left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{ج}^{١} = ٠$

$\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} - \frac{ج^{٢}}{٢} + \frac{ج^{٣}}{٣} = ٠$

$ج^{٢}(\frac{ج}{٣} - \frac{١}{٢}) = ٠$

ج = ٠ ، $\frac{ج}{٣} - \frac{١}{٢} = ٠ \Leftarrow \frac{ج}{٣} = \frac{١}{٢}$

$٢ج = ٣ \Leftarrow ج = \frac{٣}{٢}$.

س٥ اذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣ك^{٢} - ٢ك)\,م م = -٢٠$

فجد قيمة الثابت ج .

الحل: $\int_{٠}^{ج} ٣م^{٢}\,م م = \left[\frac{٣م^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{ج} = \frac{٣}{٢}ج^{٢} - ٠$

$= \frac{٣}{٢}ج^{٢}$.

$\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢ \times \frac{٣}{٢}ج^{٢})\,س س = -٢٠$

$\left[\frac{٣س^{٣}}{٣} - ٣ج^{٢}س \right]_{-١}^{٣} = -٢٠$

$٩ - ٩ج^{٢} - (-١ + ٣ج^{٢}) = -٢٠$

$٢٨ - ١٢ج^{٢} + ٢٠ = ٠$

$١٢ج^{٢} = ٤٨ \Leftarrow ج^{٢} = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$

$\Leftarrow ج^{٢} = ٤ \Leftarrow ج = \pm ٢$.

س٦ $\text{مـ}(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، ٠ \le س < ٤ \\ -س & ، -٣ \le س < ٠ \end{cases}$

$\int_{-٣}^{٤} \text{مـ}(س)\,س س = \int_{-٣}^{٠} -س\,س س + \int_{٠}^{٤} س^{٢}\,س س$

$= \left[\frac{-س^{٢}}{٢} \right]_{-٣}^{٠} + \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٤}$

$= ٠ - (\frac{-٩}{٢}) + \frac{٦٤}{٣} - ٠$

$= ٠ + \frac{٩}{٢} + \frac{١٢٨}{٦}$

$= \frac{٥٦}{٦} + \frac{١٢٨}{٦}$

$= \frac{١٨٤}{٦}$.

Scanned with CamScanner

٧) إذا كان $\int_{-٢}^{ب} (٢س - ٣)\,دس = ٢٠$ فجد قيمة الثابت ب.

الحل: $[س^٢ - ٣س]_{-٢}^{ب} = ٢٠$

$ب^٢ - ٣ب - (٤ - ٣×-٢) = ٢٠$

$ب^٢ - ٣ب + ٢ = ٢٠$

$ب^٢ - ٣ب - ١٨ = صفر$

$(ب - ٦)(ب + ٣) = صفر$

$ب = ٦$ ، $ب = -٣$

٨) $\int_{١}^{٣} (٢م(س) + \frac{١}{س^٢} - ٦)\,دس = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس + \int_{١}^{٣} (س^{-٢} - ٦)\,دس = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس + [\frac{س^{-١}}{-١} - ٦س]_{١}^{٣} = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس - [\frac{١}{س} + ٦س]_{١}^{٣} = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس - \frac{١}{٣} - ٦×٣ - (-١-٦) = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس - \frac{١}{٣} - ١٨ + ٧ = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس - \frac{١}{٣} - ١١ = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس - \frac{٣٤}{٣} = ١٢$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس = ١٢ + \frac{٣٤}{٣}$

$\int_{١}^{٣} ٢م(س)\,دس = \frac{٧٠}{٣}$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} م(س)\,دس = \frac{٧٠}{٦} = \frac{٣٥}{٣}$ ←

تابع س.

المطلوب $\int_{١}^{٣} (\frac{م(س)}{٢} - س^٢)\,دس =$

$\frac{١}{٢}\int_{١}^{٣} م(س)\,دس - [\frac{س^٣}{٣}]_{١}^{٣} =$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣} - (٩ - \frac{١}{٣}) =$

$\frac{٣٥}{٦} - ٩ + \frac{١}{٣} = \frac{٢٧}{٦} - ٩$

$= \frac{-١٧}{٦}$.

٩) $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٤ جتا^٢ س + ٢}\,دس$ بين أن

$\frac{\pi}{٥} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٤ جتا^٢ س + ٢}\,دس \leq \frac{\pi}{٢}$

$-١ \leq جتا س \leq ١$ في $[٠ ، \pi]$

بالتربيع $صفر \leq جتا^٢ س \leq ١$

$صفر \leq ٣ جتا^٢ س \leq ٣$

$٢ \leq ٣ جتا^٢ س + ٢ \leq ٥$

$\frac{١}{٥} \leq \frac{١}{٣ جتا^٢ س + ٢} \leq \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥}\,دس \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣ جتا^٢ س + ٢}\,دس \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\,دس$

$\frac{١}{٥}(\pi - ٠) \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣ جتا^٢ س + ٢}\,دس \leq \frac{١}{٢}(\pi - ٠)$

$\frac{\pi}{٥} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣ جتا^٢ س + ٢}\,دس \leq \frac{\pi}{٢}$.

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

س١٠ $\text{ه}(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$

$\text{ه}'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٩-س^٢}}$

$\text{ه}' = ٠ \leftarrow -٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$

أطراف المجال $٩ - س^٢ = ٠ \leftarrow س = \pm ٣$

النقاط الحرجة $\{٠، ٣، -٣\}$

$\text{ه}(٠) = ٣$ / $\text{ه}(٣) = ٠$ / $\text{ه}(-٣) = ٠$

$\Leftarrow$ صفر $\leq \text{ه}(س) \leq ٣$

$\int_{-٣}^{٣}$ صفر $دس \leq \int_{-٣}^{٣} \text{ه}(س) دس \leq \int_{-٣}^{٣} ٣ دس$

صفر $\leq \int_{-٣}^{٣} \text{ه}(س) دس \leq ٣(٣ - (-٣))$

صفر $\leq \int_{-٣}^{٣} \text{ه}(س) دس \leq ١٨$

أكبر قيمة لـ م هي صفر

أصغر قيمة لـ ن هي ١٨.

س١١ $\text{ه}(س) = م س^٢ + ب س + جـ$

$\text{ه}(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٥$

$\Leftarrow$ **جـ = ٥**

$\text{ه}'(س) = ٢م س + ب$

$\text{ه}''(س) = ٢م = ٤ \Leftarrow$ **م = ٢**

$\text{ه}'(س) = ٤س + ب$

$\int_{١}^{٢} (٤س + ب) دس = ٣$

$[٢س^٢ + ب س]_{١}^{٢} = ٣$

$٢ + ب - ٢ - ب = ٣ \Leftarrow ٢ + ب - ٨ - ٢ب = ٣$

$\Leftarrow$ **ب = ١**

$\therefore \text{ه}(س) = ٢س^٢ + س + ٥$

س١٢ $\text{ه}(س) = م س + ب$.

$\int_{-١}^{١} (م س + ب) دس = ٤$

$[\frac{م}{٢} س^٢ + ب س]_{-١}^{١} = ٤$

$\frac{م}{٢} + ب - (\frac{م}{٢} - ب) = ٤$

$\frac{م}{٢} + ب - \frac{م}{٢} + ب = ٤ \Leftarrow ٢ب = ٤$

$\Leftarrow$ **ب = ٢**

$\int_{١}^{٣} (م س + ٢) دس = ٢$

$[\frac{م}{٢} س^٢ + ٢س]_{١}^{٣} = ٢$

$\frac{٩م}{٢} + ٦ - (\frac{م}{٢} + ٢) = ٢$

$\frac{٩م}{٢} + ٦ - \frac{م}{٢} - ٢ = ٢$

$\frac{٨م}{٢} + ٤ = ٢$

$٤م = -٢$

$م = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$.

$\text{ه}(س) = -\frac{١}{٢} س + ٢$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف
Scanned with CamScanner

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ ٢س

ب) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ جا^{٣}٥س

جـ) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ |س^{٢} + ٤س − ٥|

د) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٥ س + ٣)

هـ) ق(س) = س^{٣} لـــو$_{هـ}$ س

و) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ (٢ + $\sqrt{\text{س}}$)

ز) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ س^{٣}ظاس

ح) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\right)$

ط) ق(س) = (لـــو$_{هـ}$ س)^{٣}

ي) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ $\frac{(٤\text{س}^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-٢\text{س})^{٥}}$

ك) ق(س) = لـــو$_{هـ}$ $\sqrt[٣]{٥\text{س}^{٣}+٤\text{س}}$

ل) ق(س) = ظا(لـــو$_{هـ}$ س)

٢) إذا كان ق(س) = لـــو$_{هـ}$ (س + $\sqrt{\text{س}^{٢}-١}$) أثبت أنَّ قَ(س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$

٣) إذا كان $\int$ (قَ(س) − س) ٤س = لـــو$_{هـ}$ |قاس + ظاس| + س^{٢} فأثبت أنَّ:

قَ(س) = ٣س + قاس

٤) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = لـــو$_{هـ}$ جاس هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ظتاس.

٥) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$ ٤س

ب) $\int \frac{١ + \text{جتاس}}{\text{س} + \text{حاس}}$ ٤س

جـ) $\int \frac{٥ + ٥\text{ظتاس}^{٢}}{\text{ظتاس}}$ ٤س

د) $\int \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٥}$ ٤س

Scanned with CamScanner

(اقران اللوغاريتم الطبيعي)

هـ) $\int \frac{س + ٥}{س}$ د س

و) $\int_{٣}^{٥} \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤}$ د س

ز) $\int_{-١}^{٢} \frac{|٢س|}{س^{٢} + ١}$ د س

ح) $\int \frac{جا ٣س}{١ + جتا ٣س}$ د س

ط) $\int \frac{٢س - ١}{س(س - ١)}$ د س

ي) $\int ظا س$ د س

٦) جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $(\frac{٢س}{س^{٢} + ٤})$

ب) ق(س) = $(\frac{٣ جتا ٣س}{٥ + جا ٣س})$

Scanned with CamScanner

س١ جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات:

م) $ق(س) = \log_{هـ} ٢س$

$ق'(س) = \frac{٢}{٢س} = \frac{١}{س}$.

ب) $ق(س) = \log_{هـ} حا^{٣} ٥س$.

$ق(س) = ٣ \log_{هـ} حا ٥س$.

$ق'(س) = \frac{٣ \times حتا ٥س \times ٥}{حا ٥س}$

$= ١٥ ظتا ٥س$.

جـ) $ق(س) = \log_{هـ} (٤س^{٢} + ٤س - ١٥)$

$ق'(س) = \frac{٨س + ٤}{٤س^{٢} + ٤س - ٥}$

د) $ق(س) = \log_{هـ} (٣س^{٢} + ٥س + ٣)$

$ق'(س) = \frac{٦س + ٥}{٣س^{٢} + ٥س + ٣}$

هـ) $ق(س) = س^{٣} \log_{هـ} س$.

$ق'(س) = س^{٣} \times \frac{١}{س} + \log_{هـ} س \times ٣س^{٢}$

$= س^{٢} + ٣س^{٢} \log_{هـ} س$

و) $ق(س) = \log_{هـ} (٢ + \sqrt{س})$

$ق'(س) = \frac{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}{٢ + \sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}(٢ + \sqrt{س})}$

$ق'(س) = \frac{١}{٤\sqrt{س} + ٢س}$.

ز) $ق(س) = \log_{هـ} (س^{٣} ظا س)$.

$ق(س) = \log_{هـ} س^{٣} + \log_{هـ} ظا س$.

$ق'(س) = \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}} + \frac{قا^{٢} س}{ظا س}$.

$= \frac{٣}{س} + \frac{قا^{٢} س}{ظا س}$.

ح) $ق(س) = \log_{هـ} (\frac{س}{س^{٢} + ١})$

$ق(س) = \log_{هـ} س - \log_{هـ} (س^{٢} + ١)$

$ق'(س) = \frac{١}{س} - \frac{٢س}{س^{٢} + ١}$.

ط) $ق(س) = (\log_{هـ} س)^{٣}$

$ق'(س) = ٣ (\log_{هـ} س)^{٢} \times \frac{١}{س}$.

$= \frac{٣}{س} (\log_{هـ} س)^{٢}$.

Scanned with CamScanner

تابع س١ .

ج) $ه(س) = \log_{هـ} \frac{(٤س^{٣}+٥)^{٦}}{(٨-٢ك)^{٥}}$

$ه(س) = \log_{هـ}(٤س^{٣}+٥)^{٦} - \log_{هـ}(٨-٢ك)^{٥}$

$= ٦ \log_{هـ}(٤س^{٣}+٥) - ٥ \log_{هـ}(٨-٢ك)$

$= \frac{٦ \times ٨س}{٤س^{٣}+٥} - \frac{٥ \times -٢}{٨-٢ك}$

$= \frac{٤٨س}{٤س^{٣}+٥} + \frac{١٠}{٨-٢ك}$.

د) $ه(س) = \log_{هـ}(س + \sqrt{س^{٢}-١})$

$ه'(س) = \frac{١ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-١}}}{س + \sqrt{س^{٢}-١}} \cdot$

توحيد المقامات في البسط .

$ه'(س) = \frac{\frac{\sqrt{س^{٢}-١} + س}{\sqrt{س^{٢}-١}}}{س + \sqrt{س^{٢}-١}}$

$ه'(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$ وهو المطلوب.

هـ) $ه(س) = \log_{هـ} \sqrt[٣]{٥س^{٣}+٤س}$

$ه(س) = \log_{هـ}(٥س^{٣}+٤س)^{\frac{١}{٣}}$.

$ه(س) = \frac{١}{٣} \log_{هـ}(٥س^{٣}+٤ك)$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{١٥س^{٢}+٤}{٥س^{٣}+٤ك}$.

و) $ه(س) = ظا(\log_{هـ} س)$

$ه'(س) = قا^{٢}(\log_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$.

س٢ $ه(س) = \log_{هـ}(س + \sqrt{س^{٢}-١})$

$ه'(س) = \frac{١ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-١}}}{س + \sqrt{س^{٢}-١}} \cdot$

توحيد المقامات في البسط .

$ه'(س) = \frac{\frac{\sqrt{س^{٢}-١} + س}{\sqrt{س^{٢}-١}}}{س + \sqrt{س^{٢}-١}}$

$ه'(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$ وهو المطلوب.

س٣ $\int_{هـ}^{س} (ه'(س) - س)$ دس $= \log_{هـ}|قاس + ظاس| + س^{٢}$

نشتق الطرفين

$ه'(س) - س = \frac{قاس ظاس + قا^{٢}س}{قاس + ظاس} + ٢ك$

$ه'(س) - س = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{قاس + ظاس} + ٢ك$

$ه'(س) - س = قاس + ٢س$.

$+س \quad +س$

$ه'(س) = ٣س + قاس$.

Scanned with CamScanner

$\frac{د}{دس}$ م(س) = $\frac{1}{س}$ ، س > ٠

م′(س) = $\frac{جتاس}{جاس}$ = ظتاس = ق(س)

فيكون م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س).

أ) $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٥}$ دس = لو|$س^{٣}$ + ٥| + جـ

ب) $\int \frac{١+جتاس}{س+جاس}$ دس =

لو|س + جاس| + جـ

جـ) $\int \frac{ظتاس + ٥}{ظتاس}$. دس

= $\int \frac{٥(١+ظتاس)}{ظتاس}$ دس

= $\int ٥$ قتاس دس

= −٥ لو|ظتاس| + جـ

د) $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٥}$ دس =

لو|$س^{٣}$ + ٥| + جـ

هـ) $\int \frac{س+٥}{س}$ دس =

$\int (\frac{س}{س} + \frac{٥}{س})$ دس = $\int (١ + \frac{٥}{س})$ دس

= س + ٥ لو|س| + جـ

و) $\int_{٢}^{٥} \frac{س-٢}{س^{٢}-٤}$. دس =

$\int_{٣}^{٥} \frac{س-٢}{(س-٢)(س+٢)}$ دس = $\int_{٣}^{٥} \frac{١}{س+٢}$. دس

= لو|س+٢|$]_{٣}^{٥}$

= لو|٥+٢| − لو|٣+٢|

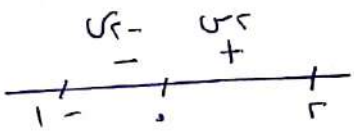
= لو٧ − لو٥

= لو$\frac{٧}{٥}$.

Scanned with CamScanner

س ز) $\int_{-1}^{2} \frac{|٤س|}{س^{٤}+١} \cdot دس$

٤س = ٠ ← س = ٠



$= \int_{-1}^{0} \frac{-٤س}{س^{٤}+١} \cdot دس + \int_{0}^{2} \frac{٤س}{س^{٤}+١} \cdot دس$

$= -\left[\text{لو}_{هـ}(س^{٤}+١) \right]_{-1}^{0} + \left[\text{لو}_{هـ}(س^{٤}+١) \right]_{0}^{2}$

$= -(\text{لو}_{هـ}١ - \text{لو}_{هـ}٢) + \text{لو}_{هـ}٥ - \text{لو}_{هـ}١$

$= -(٠ - \text{لو}_{هـ}٢) + \text{لو}_{هـ}٥ - ٠$

$\text{لو}_{هـ}٢ + \text{لو}_{هـ}٥ = \text{لو}_{هـ}(٢ \times ٥)$

$= \text{لو}_{هـ}١٠$

ع) $\int \frac{جا٣س}{١ + جتا٣س} \cdot دس =$

$-\frac{١}{٣} \int \frac{-٣ جا٣س}{١ + جتا٣س} \cdot دس =$

$-\frac{١}{٣} \text{لو}_{هـ}|١ + جتا٣س| + ج$

ط) $\int \frac{٢س - ١}{س(س-١)} دس =$

$\int \frac{٢س - ١}{س^{٢} - س} \cdot دس = \text{لو}_{هـ}|س^{٢} - س| + ج$

ي) $\int ظا س \, دس = \int \frac{جا س}{جتا س} \cdot دس$

$-\int \frac{-جا س}{جتا س} دس = -\text{لو}_{هـ}|جتا س| + ج$

ك م) د متصل

$م(س) = \int \frac{٢س}{س^{٢}+٤} دس$

$= \text{لو}_{هـ}|س^{٢}+٤| + ج$

ب) د متصل .

$م(س) = \int \frac{٣ جتا٣س}{٥ + جا٣س} دس$

$= \text{لو}_{هـ}|٥ + جا٣س| + ج$

Scanned with CamScanner

س٦ $ق(س) = ٣^{ل(س)}$. (نأخذ اللوغاريتم)

$\log_{هـ} ق(س) = \log_{هـ} ٣^{ل(س)}$

$\log_{هـ} ق(س) = ل(س) \times \log_{هـ} ٣$. نشتق

$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = \log_{هـ} ٣ \times ل'(س)$

$ق'(س) = ق(س) \times \log_{هـ} ٣ \times ل'(س)$

$ق(س) = ٣^{ل(س)} \times \log_{هـ} ٣ \times ل'(س)$.

س٧ $\int ق'(س) دس = هـ^{٤س} + جـ$.

نشتق الطرفين

$ق'(س) = -٣ هـ^{١-٣س}$.

$ق'(ب) = -٣ هـ^{١-ب^٢}$

$\frac{-٣ هـ^{١-ب^٢}}{-٣ ب} = \frac{-٣ ب هـ^{١-ب^٢}}{-٣ ب}$.

$هـ^{١-ب^٢} = ١ \Leftarrow ١-ب^٢ = صفر$

$\Leftarrow ب^٢ = ١ \Leftarrow ب = ١ ، -١$.

س٨ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} هـ^{٣ص} دص = \frac{١}{٣} هـ^{٣ص} + جـ$

ب) $\int_{٠}^{١} ٢ هـ^{٣س} دس = \frac{٢ هـ^{٣س}}{٣} \Big]_{٠}^{١} =$

$هـ^٣ - هـ^٠ = هـ^٣ - ١$

جـ) $\int_{١}^{٣} هـ^{٤س} دس = هـ^{٤س} \Big]_{١}^{٣}$

$هـ^{٤} (٣-١) = ٢ هـ^{٤}$.

د) $\int \frac{٤ هـ^{٤س} - ٣}{هـ^{٤س} - ٣س} دس =$

$\log_{هـ} |هـ^{٤س} - ٣س| + جـ$.

هـ) $\int \frac{هـ^{٣س} - ٢٧}{هـ^{س} - ٣} دس = \int \frac{(هـ^{س})^٣ - ٢٧}{هـ^{س} - ٣} دس$

$= \int \frac{(هـ^{س} - ٣)(هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩)}{هـ^{س} - ٣} دس$

$= \int (هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩) دس$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩س + جـ$

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ص = س + هـ^{٩س}

ب) ص = س^{٣} + هـ$^{٦-٥س^{٤}}$

جـ) ص = جاهـ^{٢س}

د) ص = $\sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

هـ) ص = هـ$^{\frac{١}{س}}$ + لو$_{هـ}\sqrt{س}$

و) ص = هـ^{٥} + لو$_{هـ}$ قاس

ز) ص = هـ$^{٤ لو_{هـ} س^{٣}+٢}$

ح) ص = $\frac{١ + هـ^{٢س}}{هـ^{٥س}}$

ط) ص = هـ^{٢} + س^{٣} هـ^{جاس}

ي) ص = (هـ$^{٤س+٥}$)^{٦}

٢) إذا كان ص = هـ^{ظاس} + أ لو$_{هـ}$ جتاس + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{د س}{١ + ظا^{٢}س}$

وكان $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = ٢هـ + ١، فجد قيمة الثابت أ .

٣) إذا كان قً (س) = جاس + هـ^{٢س} ، ق(٠) = $\frac{١}{٤}$، قَ(٠) = $\frac{١}{٢}$، فجد قاعدة الاقتران ق.

٤) إذا كان هـ$^{ص س}$ = س − ص، فأثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص^{٢} - ص س + ١}{س^{٢} - س ص + ١}$

٥) إذا كان ص = هـ^{أس} ، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تحقق المعادلة الآتية:

صً − ٥صَ + ٦ ص = صفرًا

٦) إذا كان ق(س) = ٣$^{ل(س)}$، حيث ل(س) قابل للاشتقاق؛ فأثبت أنَّ:

قَ(س) = ٣$^{ل(س)}$ × لَ(س) لـو$_{هـ}$ ٣

Scanned with CamScanner

٧) إذا كان $\int_{1}^{ب} ق'(س)\,د س = هـ^{-س^{٢}+١} + ٤هـ$ ، $ق'(ب) = -٢ب$ ، $ب \neq$ صفرًا فجد قيمة (قيم) الثابت ب.

٨) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{١}^{٢} هـ^{٧س}\,د س$

ب) $\int_{١}^{ب} ٣هـ^{٣س}\,د س$

جـ) $\int_{١}^{٣} هـ^{٤}\,د س$

د) $\int \frac{٤هـ^{٤س} - ٣}{هـ^{٤س} - ٣س}\,د س$

هـ) $\int \frac{هـ^{٣س} - ٢٧}{هـ^{س} - ٣}\,د س$

و) $\int هـ^{٥ + لو_{هـ} جتاس}\,د س$

ز) $\int_{١}^{هـ^{٢}} \frac{١}{هـ - ١}\,د س$

ح) $\int ٣س\,هـ^{٢ + لو_{هـ} س^{٢}}\,د س$

ط) $\int هـ^{٥س}\sqrt{هـ^{٢س} + ٤هـ^{س} + ٤}\,د س$

ي) $\int (هـ^{٢س+٥})^{٢}\,د س$

Scanned with CamScanner

أ) م) $ص = س + هـ^{٩س}$.

$\frac{دص}{دس} = ١ + ٩هـ^{٩س}$.

ب) $ص = س^{٣} + هـ^{٦-٥س^{٤}}$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + (-٢٠س^{٣}) هـ^{٦-٥س^{٤}}$.

جـ) $ص = جا هـ^{٣س}$.

$\frac{دص}{دس} = جتا هـ^{٣س} \times ٣هـ^{٣س}$.

د) $ص = \sqrt{١ + هـ^{٣س}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣هـ^{٣س}}{٢\sqrt{١+هـ^{٣س}}} = \frac{هـ^{٣س}}{\sqrt{١+هـ^{٣س}}}$.

هـ) $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ} ٤س$.

$ص = هـ^{س^{-١}} + \frac{١}{٢} لو_{هـ} س$.

$\frac{دص}{دس} = -١س^{-٢} هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{س}$.

و) $ص = هـ^{٥} + لو_{هـ} قاس$.

$\frac{دص}{دس} = صفر + \frac{قاس ظاس}{قاس}$.

$= ظاس$.

ز) $ص = هـ^{٤ لو_{هـ}(س^{٣}+٢)}$

$ص = هـ^{لو_{هـ}(س^{٣}+٢)^{٤}}$

$ص = (س^{٣}+٢)^{٤}$.

$\frac{دص}{دس} = ٤(س^{٣}+٢)^{٣} \times ٣س^{٢}$.

$= ١٢س^{٢}(س^{٣}+٢)^{٣}$.

ح) $ص = \frac{١ + هـ^{٣س}}{هـ^{٥س}} = \frac{١}{هـ^{٥س}} + \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٥س}}$.

$ص = هـ^{-٥س} + هـ^{-٣س}$.

$\frac{دص}{دس} = -٥هـ^{-٥س} - ٣هـ^{-٣س}$

ط) $ص = هـ^{٢} + س^{٣} جاس$.

$\frac{دص}{دس} = صفر + س^{٣} \times جتاس + جاس \times ٣س^{٢}$

$= س^{٣} جتاس + ٣س^{٢} جاس$.

ي) $ص = (هـ^{٤س+٥})^{٦}$.

$ص = هـ^{٢٤س+٣٠}$.

$\frac{دص}{دس} = ٢٤ هـ^{٢٤س+٣٠}$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف
Scanned with CamScanner

س٢ ص = هـ^{ظاس} + ٢ لو_هـ جاس + ∫ (٢س)/(١+ظاس) .

dص/dس = قاس هـ^{ظاس} × ٢ جاس/جتاس + صفر

= قاس هـ^{ظاس} − ٢ ظاس .

dص/dس |_{س=π/٤} = قا^٢ π/٤ هـ^{ظا π/٤} − ٢ ظا π/٤ .

= ٢هـ − ٢ × ١ = ٢هـ + ١

⇐ −٢ = ١ ⇐ ٢ = −١

س٣ ق′(س) = جاس + هـ^{س} .

ق(س) = ∫ (جاس + هـ^{س}) دس

ق(س) = −جتاس + ½ هـ^{٢س} + د

ق(٠) = −١ + ½ + د = ½ ⇐ د = ١

ق(س) = −جتاس + ½ هـ^{٢س} + ١

ق(س) = ∫ (−جتاس + ½ هـ^{٢س} + ١) دس

= −جاس + ¼ هـ^{٢س} + س + د

ق(٠) = ٠ + ¼ + ٠ + د = ¼

⇐ د = ٠

ق(س) = −جاس + ¼ هـ^{٢س} + س .

س٤ هـ^{ص س} = س − ص . نشتقه للطرفين

هـ^{ص س}(س ص′ + ص) = ١ − ص′ .

س هـ^{ص س} ص′ + ص هـ^{ص س} = ١ − ص′ .

س هـ^{ص س} ص′ + ص′ = ١ − هـ^{ص س} ص

ص′(س هـ^{ص س} + ١) = ١ − هـ^{ص س} ص

ص′ = (١ − هـ^{ص س} ص)/(١ + س هـ^{ص س}) .

= (١ − (س − ص) ص)/(١ + (س − ص) س)

= (١ − س ص + ص^٢)/(١ + س ص − س^٢) وهو المطلوب .

س٥ ص = هـ^{٣س} .

ص′ = ٣ هـ^{٣س} ، ص″ = ٩ هـ^{٣س} .

ص″ − ٥ ص′ + ٦ ص =

٩ هـ^{٣س} − ١٥ هـ^{٣س} + ٦ هـ^{٣س} =

هـ^{٣س}(٩ − ١٥ + ٦) = صفر

٩ − ١٥ + ٦ = صفر

(م − ٣)(م − ٢) = صفر

م = ٣ ، م = ٢

ش) $\int_{0}^{\ln 5} e^{x} + \ln e^{x}\, dx$

$= \int_{0}^{\ln 5} e^{x} + x \, dx$

$= \int_{0}^{\ln 5} e^{x} \, dx + \int_{0}^{\ln 5} x \, dx$

$= e^{x} \Big|_{0}^{\ln 5} + \frac{1}{2}x^{2} \Big|_{0}^{\ln 5}$

$= e^{\ln 5} - e^{0} + \frac{1}{2}(\ln 5)^{2} - 0$

$= 5 - 1 + \frac{1}{2}(\ln 5)^{2}$

$= 4 + \frac{1}{2}(\ln 5)^{2}$

ت) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

ث) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

ج) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

ح) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

خ) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

د) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

ذ) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

ر) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

ز) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

س) $\int_{0}^{\ln 5} e^{x} + \ln e^{x}\, dx$

$= \int_{0}^{\ln 5} e^{x} + x \, dx$

$= \int_{0}^{\ln 5} e^{x} \, dx + \int_{0}^{\ln 5} x \, dx$

$= e^{x} \Big|_{0}^{\ln 5} + \frac{1}{2}x^{2} \Big|_{0}^{\ln 5}$

$= e^{\ln 5} - e^{0} + \frac{1}{2}(\ln 5)^{2} - 0$

$= 5 - 1 + \frac{1}{2}(\ln 5)^{2}$

$= 4 + \frac{1}{2}(\ln 5)^{2}$

ت) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

ث) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

ج) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

ح) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

خ) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

د) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

ذ) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}(e^{x}+1)^{2}\, dx$

$u = e^{x} + 1$

$du = e^{x}\, dx$

$= \int_{2}^{3} u^{2}\, du$

$= \frac{1}{3}u^{3} \Big|_{2}^{3}$

$= \frac{1}{3}(e^{x}+1)^{3} \Big|_{0}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2}+1)^{3} - \frac{1}{3}(e^{0}+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(2+1)^{3} - \frac{1}{3}(1+1)^{3}$

$= \frac{1}{3}(3)^{3} - \frac{1}{3}(2)^{3}$

$= 9 - \frac{8}{3}$

$= \frac{19}{3}$

ر) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

ز) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$

$u = 1 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\, dx$

$= \int_{1}^{e} \frac{1}{u}\, du$

$= \ln |u| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln x| \Big|_{1}^{e}$

$= \ln |1 + \ln e| - \ln |1 + \ln 1|$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

منهاجي
منصة التعليم الهادف
Scanned with CamScanner

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{0}^{2} (س+3)\sqrt{س^2+6س}\ ؤس$

ب) $\int \frac{2س-3}{2س^2-6س-5}\ ؤس$

جـ) $\int \frac{2}{(4س^2-20س+25)^7}\ ؤس$

د) $\int_{3}^{4} \frac{7}{س^2-4س+4}\ ؤس$

هـ) $\int \frac{ظتا^2 \frac{1}{س}}{س^2}\ ؤس$

و) $\int \frac{(5+\sqrt{س})^7}{\sqrt{س}}\ ؤس$

ز) $\int \frac{1}{س^2}\sqrt{\frac{2س+1}{س}}\ ؤس$

ح) $\int_{1}^{هـ^2} \frac{1}{س\sqrt{1+لو_{هـ} س}}\ ؤس$

ط) $\int هـ^{س^3+2لو_{هـ} س}\ ؤس$

ي) $\int \frac{س^3}{(س+1)^5}\ ؤس$

ك) $\int \sqrt[3]{س^{\frac{-3}{4}}+1}\ ؤس$

ل) $\int جتا^3س(1+حاس)^7\ ؤس$

٢) إذا كان $\int_{1}^{8} ق(س)\ ؤس=18$ ؛ فجد قيمة $\int_{1}^{2} س^2 ق(س^3)\ ؤس$

٣) إذا كان $\int_{0}^{1} ق(س)\ ؤس=8$ ؛ فجد قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3جتا(2س)\ ق(جا2س)\ ؤس$

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int هـ^{جاس+لو_{هـ} جتاس}\ ؤس$

ب) $\int_{0}^{2} \frac{س^3}{\sqrt{(س^2+9)^3}}\ ؤس$

جـ) $\int \frac{1-ظا^2س}{جتا^2س}\ ؤس$

د) $\int \frac{جاس\sqrt{جا^2س+4}}{قاس}\ ؤس$

Scanned with CamScanner

هـ) $\int$ قتا^{٤} ٦س ظتا^{٣} ٦س ؏س

و) $\int$ جتا^{٤}س ؏س

ز) $\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{(١ + \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٥}}$ ؏س

ح) $\int$ جا٢س × هـ$^{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ؏س

ط) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}$ ؏س

ي) $\int$ قا^{٤}س ؏س

ك) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}(٢ + \sqrt{\text{س}})}$ ؏س

ل) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس} + ٣}}{٢ - ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ؏س

م) $\int$ جاس(١ + جتا٢س)$^{\circ}$ ؏س

ن) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^{٣}\text{س}}$ ؏س

س) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}} \sqrt{\frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}}}$ ؏س

ع) $\int$ جتا٢س(جاس − جتاس)^{٨} ؏س

٥) أثبت أنَّ $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س} - ١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}}$ ؏س = $\begin{cases} \frac{-١}{\text{ن}+١} & \text{، حيث ن عدد فردي} \\ \frac{١}{\text{ن}+١} & \text{، حيث ن عدد زوجي} \end{cases}$

٦) اكتب الفرض المناسب لإيجاد كلٍّ من التكاملات الآتية؛ بطريقة التكامل بالتعويض (دون إجراء التكامل):

أ) $\int$ جتا^{١٠}س جا^{٧}س ؏س

ب) $\int$ جتا^{٥}س جا^{٧}س ؏س

جـ) $\int$ ظا^{٥}س قا^{٤}س ؏س

د) $\int$ ظا^{٣}س قا^{٥}س ؏س

هـ) $\int$ ظتا^{٦}س قتا^{٤}س ؏س

و) $\int$ ظتا^{٧}س قتا^{٤}س ؏س

Scanned with CamScanner

١ أ) $\int_{0}^{2} (س+٣)\sqrt{س^{٢}+٦س}\ د س$

$ص = س^{٢}+٦س \leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٢س+٦ \leftarrow د س = \frac{د ص}{٢س+٦}$

عندما $س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ١٦$

$\int_{0}^{16} (س+٣)\sqrt{ص}\ \frac{د ص}{٢(س+٣)} = \frac{١}{٢}\int_{0}^{16} ص^{\frac{١}{٢}}\ د ص$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]_{0}^{16} = \frac{١}{٣}\left[\sqrt{ص^{٣}}\right]_{0}^{16}$

$= \frac{١}{٣}\left(\sqrt{١٦^{٣}} - \sqrt{٠^{٣}}\right) = \frac{١}{٣}(٦٤-٠) = \frac{٦٤}{٣}$

ب) $\int \frac{٣-٢ك}{٥-٦ك+٢ك^{٢}}\ د ك$

$ص = ٢ك^{٢}-٦ك+٥ \leftarrow \frac{د ص}{د ك} = ٤ك-٦ \leftarrow د ك = \frac{د ص}{٢(٢ك-٣)}$

$\int \frac{٢س-٣}{ص} \times \frac{د ص}{٢(٢ك-٣)} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{ص}\ د ص$

$= \frac{١}{٢}\ لو_{هـ}|ص| + د = \frac{١}{٢}\ لو_{هـ}|٢ك^{٢}-٦ك+٥| + د$

ج) $\int \frac{٢}{(٤س^{٢}-٢٠س+٢٥)^{٨}}\ د س$

$= \int \frac{٢}{((٢س-٥)^{٢})^{٨}}\ د ك = \int \frac{٢}{(٢س-٥)^{١٤}}\ د ك$

$= \int ٢(٢س-٥)^{-١٤}\ د ك = \frac{٢(٢س-٥)^{-١٣}}{-١٣ \times ٢} + د$

$= -\frac{١}{١٣}(٢س-٥)^{-١٣} + د$

$= \frac{-١}{١٣(٢س-٥)^{١٣}} + د$

د) $\int_{2}^{4} \frac{٨}{س^{٢}-٤س+٤}\ د س = \int_{2}^{4} \frac{٨}{(س-٢)^{٢}}\ د س$

$\int_{2}^{4} ٨(س-٢)^{-٢}\ د س = \left[\frac{٨(س-٢)^{-١}}{-١}\right]_{2}^{4}$

$= \left[\frac{-٨}{س-٢}\right]_{2}^{4} = -٨\left(\frac{١}{٤-٢} - \frac{١}{٢-٢}\right)$

$= -٨\left(\frac{١}{٢} - ١\right) = -٨ \times -\frac{١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

هـ) $\int \frac{ظتا^{٢}\frac{١}{س}}{س^{٢}}\ د س = \int ظتا^{٢}\frac{١}{س} \cdot \frac{١}{س^{٢}}\ د س$

$ص = \frac{١}{س} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{س^{٢}} \leftarrow د س = -س^{٢}\ د ص$

$\int \frac{١}{س^{٢}} ظتا^{٢}ص \times -س^{٢}\ د ص = -\int ظتا^{٢}ص\ د ص$

$= -\int(قتا^{٢}ص - ١)\ د ص$

$= -(-ظتاص - ص) + د$

$= ظتا\frac{١}{س} + \frac{١}{س} + د$

و) $\int \frac{(٥+٨س)^{٨}}{٨س}\ د س$

$ص = ٥+٨س \leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٨ \leftarrow د س = \frac{١}{٨}\ د ص$

$\int \frac{ص^{٨}}{٨س} \times \frac{١}{٨}\ د ص = \int \frac{ص^{٨}}{٨س \times ٨}\ د ص$

$= \frac{ص^{٩}}{٧٢} + د = \frac{(٥+٨س)^{٩}}{٧٢} + د$

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

أ) $\int \frac{1}{س^2} \sqrt{\frac{2س+1}{س}} \, د س$

$= \int \frac{1}{س^2} \left(2+\frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2}} \, د س$

$ص = 2 + \frac{1}{س} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{1}{س^2} \leftarrow د س = -س^2 \, د ص$

$= \int \frac{1}{س^2} \, ص^{\frac{1}{2}} \times -س^2 \, د ص = \int -ص^{\frac{1}{2}} \, د ص$

$= -\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + د = -\frac{2}{3} \sqrt{ص^3} + د$

$= -\frac{2}{3} \sqrt{\left(2+\frac{1}{س}\right)^3} + د$

ب) $\int هـ^{س^3 + 2 لو_هـ س} \, د س = \int هـ^{س^3 + لو_هـ س^2} \, د س$

$= \int هـ^{س^3} \times هـ^{لو_هـ س^2} \, د س = \int هـ^{س^3} \times س^2 \, د س$

$ص = س^3 \leftarrow \frac{د ص}{د س} = 3س^2 \leftarrow د س = \frac{د ص}{3س^2}$

$\int هـ^{ص} \times س^2 \times \frac{د ص}{3س^2} = \int \frac{1}{3} هـ^{ص} \, د ص$

$= \frac{1}{3} هـ^{ص} + د = \frac{1}{3} هـ^{س^3} + د$

ج) $\int_1^{هـ^3} \frac{1}{س \sqrt{1 + لو_هـ س}} \, د س$

$ص = \sqrt{1 + لو_هـ س} \leftarrow ص^2 = 1 + لو_هـ س$

$2ص \, د ص = \frac{1}{س} د س \leftarrow د س = 2س ص \, د ص$

عندما $س = 1 \leftarrow ص = 1$

عندما $س = هـ^3 \leftarrow ص = \sqrt{1 + لو_هـ هـ^3} = \sqrt{4} = 2$

$= \int_1^2 \frac{1}{س ص} \times 2س ص \, د ص$

$= \int_1^2 2 \, د ص = 2ص \Big]_1^2$

$= 2(2-1)$

$= 2$

د) $\int \frac{س^3}{(س+1)^5} \, د س = \int \frac{س^3}{(س+1)^3 \times (س+1)^2} \, د ك$

$= \int \left(\frac{س}{س+1}\right)^3 \times \frac{1}{(س+1)^2} \, د ك$

$ص = \frac{س}{س+1} \leftarrow \frac{د ص}{د ك} = \frac{(س+1) \times 1 - س \times 1}{(س+1)^2} = \frac{1}{(س+1)^2}$

$\Rightarrow د س = د ص \times (س+1)^2$

$\int ص^3 \times \frac{1}{(س+1)^2} \times (س+1)^2 \, د ص =$

$\int ص^3 \, د ص = \frac{ص^4}{4} + د$

$= \frac{1}{4} \left(\frac{س}{س+1}\right)^4 + د$

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

س١ ب) $\int \sqrt[3]{س^{-\frac{3}{4}}+1}\ .\ د س$ =

$\int \sqrt[3]{س^{-\frac{3}{4}}(1+س^{\frac{3}{4}})}\ .\ د س$ =

$\int س^{-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}}(1+س^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\ .\ د س$ =

$\int س^{-\frac{1}{4}}(1+س^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\ د س$.

ص $= 1+س^{\frac{3}{4}} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{3}{4} س^{-\frac{1}{4}} \leftarrow د ص = \frac{4\ د ص}{3 س^{-\frac{1}{4}}}$

$\int س^{-\frac{1}{4}} \times ص^{\frac{1}{3}} \times \frac{4}{3} \frac{د ص}{س^{-\frac{1}{4}}}$ =

$\frac{4}{3}\int ص^{\frac{1}{3}}\ د ص = \frac{4}{3}\times\frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}} + ث$

$= ص^{\frac{4}{3}} + ث = \sqrt[3]{(1+س^{\frac{3}{4}})^4} + ث$

ج) $\int$ جتا^{3}س (١ + جاس)^7 . د س

ص $= 1+$ جاس $\leftarrow \frac{د ص}{د س} =$ جتاس $\leftarrow د س = \frac{د ص}{جتاس}$

$\int$ جتا^{3}س ص^7 $\frac{د ص}{جتاس} = \int$ جتا^{2}س ص^7 د ص

$= \int (1-$ جا^{2}س) ص^7 د ص

$= \int (1-(ص-1)^2)$ ص^7 د ص

$= \int (1-(ص^2-2ص+1))$ ص^7 د ص

$= \int (-ص^2+2ص)$ ص^7 د ص ←

$= \int (-ص^9+2ص^8)$ د ص

$= \frac{-ص^{10}}{10} + \frac{2ص^9}{9} + ث$

$= \frac{(1+$ جاس$)^{10}}{10} + \frac{2}{9}(1+$ جاس$)^9 + ث$

س٢ $\int_1^2$ س^3 هـ (س^3) د س .

ص $= س^3 \leftarrow \frac{د ص}{د س} = 3س^2 \leftarrow د س = \frac{د ص}{3س^2}$

عندما س $= 1 \leftarrow$ ص $= 1$

س $= 2 \leftarrow$ ص $= 8$

$\int_1^2$ س^3 هـ (س^3) $\frac{د ص}{3س^2} = \frac{1}{3}\int_1^8$ هـ (ص) د ص

$= \frac{1}{3} \times 18 = 6$

س٣ $\int_0^{\frac{\pi}{3}}$ ٢ جتا(جاس) هـ (جاس) د س .

ص $=$ جاس $\leftarrow \frac{د ص}{د س} = 2$ جتاس جاس $\leftarrow د س = \frac{د ص}{2 جتاس جاس}$

س $= 0 \leftarrow$ ص $= 0$

س $= \frac{\pi}{3} \leftarrow$ ص $= \frac{1}{2}$

$\int_0^{\frac{1}{2}}$ ٢ جتاجاس هـ (ص) $\frac{د ص}{2 جتاجاس} = \int_0^{\frac{1}{2}}$ هـ (ص) د ص

$= \frac{3}{2} \times 8 = 12$.

Scanned with CamScanner

س ٢) $\int_{\text{هـ}}^{\text{جاس}} + \text{لوجتاس}$ هـ . دس =

$\int$ هـ$^{\text{جاس}}$ لوجتاس . دس = $\int$ هـ$^{\text{جاس}}$ × جتاس . دس

ص = جاس ← $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتاس ← $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$ = دس

$\int$ هـ$^{\text{ص}}$. جتاس . $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$ = $\int$ هـ$^{\text{ص}}$. دص

= هـ$^{\text{ص}}$ + جـ = هـ$^{\text{جاس}}$ + جـ .

ب) $\int_{0}^{2} \frac{\text{س}^3}{\sqrt{(\text{س}^2+9)^3}}$. دس = $\int_{0}^{2}$ س^3 (س^2 + ٩)$^{-\frac{3}{2}}$. دس

ص = س^2 + ٩ ← $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س ← $\frac{\text{دص}}{2\text{س}}$ = دس

س = ٠ ← ص = ٩

س = ٢ ← ص = ١٣

$\int_{9}^{13}$ س^3 ص$^{-\frac{3}{2}}$. $\frac{\text{دص}}{2\text{س}}$ = $\frac{1}{2}\int_{9}^{13}$ س^2 ص$^{-\frac{3}{2}}$. دص

لكن س^2 = ص − ٩

$\frac{1}{2}\int_{9}^{13}$ (ص − ٩) ص$^{-\frac{3}{2}}$. دص =

$\frac{1}{2}\int_{9}^{13}$ (ص$^{-\frac{1}{2}}$ − ٩ ص$^{-\frac{3}{2}}$) . دص =

$\frac{1}{2}\left[2\text{ص}^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}\cdot\frac{\text{ص}^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_{9}^{13}$ =

$\left[\sqrt{\text{ص}} + \frac{\sqrt{\text{ص}}}{9}\right]_{9}^{13}$ =

$\sqrt{13} + \frac{9}{\sqrt{13}} - \left(\sqrt{9} + \frac{9}{\sqrt{9}}\right)$ =

$\sqrt{13} + \frac{9}{\sqrt{13}} - (3 + \frac{9}{3}) = \sqrt{13} + \frac{9}{\sqrt{13}} - 6$.

جـ) $\int \frac{1 - \text{ظاس}}{\text{جتاس}}$ دس = $\int \frac{1}{\text{جتاس}}$ دس − $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}}$ دس =

$\int$ قاس . دس − $\int$ ظاس قاس . دس =

ص = ظاس ← $\frac{\text{دص}}{\text{قاس}}$ = دس

ظاس − $\int$ ص قاس . $\frac{\text{دص}}{\text{قاس}}$ =

ظاس − $\frac{\text{ص}^2}{2}$ + جـ = ظاس − $\frac{\text{ظاس}^2}{2}$ + جـ

د) $\int \frac{\text{جاس}\sqrt{\text{جاس}+4}}{\text{قاس}}$. دس =

$\int$ جاس جتاس $\sqrt{\text{جاس}+4}$. دس .

ص = جاس + ٤ ← $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جاس جتاس ← $\frac{\text{دص}}{\text{جاس جتاس}}$ = دس

$\int$ جاس جتاس $\sqrt{\text{ص}}$. $\frac{\text{دص}}{\text{جاس جتاس}}$ =

$\int \frac{1}{2}$ ص$^{\frac{1}{2}}$. دص = $\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ + جـ

$\frac{\sqrt{\text{ص}^3}}{3}$ + جـ = $\frac{1}{3}\sqrt{(\text{جاس}+4)^3}$ + جـ

هـ) $\int$ قتا^{4}س ظتا^{3}س دس =

$\int$ قتا^{4}س ص^3 $\frac{\text{دص}}{-6\text{ قتا}^2\text{س}}$ =

$-\frac{1}{6}\int$ قتا^{2}س . ص^3 دص =

$-\frac{1}{6}\int$ (١ + ظتا^{2}س) ص^3 دص = $-\frac{1}{6}\int$ (١ + ص^2) ص^3 دص =

$-\frac{1}{6}\int$ (ص^3 + ص^5) دص = $-\frac{1}{6}\left(\frac{\text{ص}^4}{4} + \frac{\text{ص}^6}{6}\right)$ + جـ

$-\frac{1}{6}\left(\frac{\text{ظتا}^4\text{س}}{4} + \frac{\text{ظتا}^6\text{س}}{6}\right)$ + جـ .

ص = ظتا٢س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − ٦ قتا^{2}س قتا٢س ظتا٢س

$\frac{\text{دص}}{-6\text{ قتا}^2\text{س قتا}2\text{س ظتا}2\text{س}}$ = دس

Scanned with CamScanner

هـ) $\int \text{جتا}^4 س \cdot \text{جا}^2 س \, دس = \int (\text{جتا}^2 س)^2 \cdot \text{جا}^2 س \, دس$

$= \int (\frac{1}{2}(1+\text{جتا}2س))^2 \cdot \frac{1}{2}(1-\text{جتا}2س) \, دس$

$= \frac{1}{8}\int (1+\text{جتا}2س)^2 (1-\text{جتا}2س) \, دس$

$= \frac{1}{8}\int (1+\text{جتا}2س)(1-\text{جتا}^2 2س) \, دس$

$= \frac{1}{8}\int (1+\text{جتا}2س)(\text{جا}^2 2س) \, دس$

$= \frac{1}{8}\int (\text{جا}^2 2س + \text{جتا}2س \cdot \text{جا}^2 2س) \, دس$

$= \frac{1}{8}\int (\frac{1}{2}(1-\text{جتا}4س) + \text{جتا}2س \cdot \text{جا}^2 2س) \, دس$

$= \frac{1}{8}\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}4س + \text{جتا}2س \cdot \text{جا}^2 2س) \, دس$

$= \frac{1}{8}(\frac{1}{2}س - \frac{1}{8}\text{جا}4س + \frac{1}{6}\text{جا}^3 2س) + ث$

$= \frac{1}{16}س - \frac{1}{64}\text{جا}4س + \frac{1}{48}\text{جا}^3 2س + ث$

لأنه الأس زوجي نستخدم هذه المتطابقة

متطابقة مرة ثانية

و) $\int \text{جتا}^4 س \, دس = \int (\text{جتا}^2 س)^2 \, دس$

$= \int (\frac{1}{2}(1+\text{جتا}2س))^2 \, دس$

$= \int \frac{1}{4}(1+2\text{جتا}2س+\text{جتا}^2 2س) \, دس$

$= \int \frac{1}{4}(1+2\text{جتا}2س+\frac{1}{2}(1+\text{جتا}4س)) \, دس$

$= \int \frac{1}{4}(1+2\text{جتا}2س+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{جتا}4س) \, دس$

$= \int \frac{1}{4}(\frac{3}{2}+2\text{جتا}2س+\frac{1}{2}\text{جتا}4س) \, دس$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}س + 2\times\frac{1}{2}\text{جا}2س + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\text{جا}4س) + ث$

$= \frac{3}{8}س + \frac{1}{4}\text{جا}2س + \frac{1}{32}\text{جا}4س + ث$

ز) $\int \frac{\text{جا}^3 س}{(1+\text{جتا}س)^5} \, دس = \int \text{جا}^2 س (1+\text{جتا}س)^{-5} \cdot \text{جا}س \, دس$

$ص = 1+\text{جتا}س \leftarrow \frac{دص}{دس} = -\text{جا}س \leftarrow دص = -\text{جا}س \, دس$

$= \int (1-\text{جتا}^2 س)(1+\text{جتا}س)^{-5} \cdot \text{جا}س \, دس$

$= \int -(ص-1)^2 \cdot ص^{-5} \, دص$

$= \int -(ص^2 - 2ص + 1)ص^{-5} \, دص$

$= \int -(ص^{-3} - 2ص^{-4} + ص^{-5}) \, دص$

$= -\frac{ص^{-2}}{-2} + \frac{2ص^{-3}}{-3} - \frac{ص^{-4}}{-4} + ث$

$= \frac{1}{2ص^2} - \frac{2}{3ص^3} + \frac{1}{4ص^4} + ث$

$= \frac{1}{2(1+\text{جتا}س)^2} - \frac{2}{3(1+\text{جتا}س)^3} + \frac{1}{4(1+\text{جتا}س)^4} + ث$

ح) $\int \text{جا}^2 س \cdot \text{جتا}^3 س \, دس$

$ص = \text{جتا}س \leftarrow \frac{دص}{دس} = -\text{جا}س \leftarrow دس = \frac{دص}{-\text{جا}س}$

$= \int \text{جا}^2 س \cdot ص^3 \cdot \frac{دص}{-\text{جا}س} = -\int \text{جا}س \cdot ص^3 \, دص$

$= -\int (1-\text{جتا}^2 س) ص^3 \, دص$

$= -\int (1-ص^2) ص^3 \, دص$

$= -\int (ص^3 - ص^5) \, دص$

$= -\frac{ص^4}{4} + \frac{ص^6}{6} + ث$

$= -\frac{1}{4}\text{جتا}^4 س + \frac{1}{6}\text{جتا}^6 س + ث$

ط) $\int \frac{\sqrt{س}^3}{\sqrt{س}^5 - س\sqrt{س}} \, دس$

$ص = \sqrt{س} \leftarrow س = ص^2 \leftarrow دس = 2ص \, دص$

$= \int \frac{ص^3}{ص^5 - ص^2} \times 2ص \, دص = \int \frac{2ص^4}{ص^3(ص^2-1)} \, دص$

$= \int \frac{2ص}{ص^2-1} \, دص = \ln|ص^2-1| + ث$

$= \ln|\sqrt{س}^2 - 1| + ث$

ي) $\int \text{قا}^2 س \, دس = \int \text{قا}س \times \text{قا}س \, دس$

$ص = \text{ظا}س \leftarrow \frac{دص}{دس} = \text{قا}^2 س \leftarrow دس = \frac{دص}{\text{قا}^2 س}$

$= \int (1+\text{ظا}^2 س) \text{قا}س \cdot \frac{دص}{\text{قا}^2 س}$

$= \int (1+ص^2) \, دص$

$= ص + \frac{ص^3}{3} + ث$

$= \text{ظا}س + \frac{1}{3}\text{ظا}^3 س + ث$

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

ع) $\int \frac{1}{\tan x(2+\tan x)}\,dx$

$y = \tan x \leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \leftarrow dx = \cos^2 x\,dy$

$\int \frac{1}{y(2+y)} \times \cos^2 x\,dy = \int \frac{2}{2+y}\,dy$

$= 2\ln|2+y| + c = 2\ln_e|2+\tan x| + c$

ل) $\int \frac{\sec^2 x + 3}{2 - 2\cos x}\,dx =$

$\int \frac{(\tan x+3)^{\frac{1}{3}}}{2(1-\cos x)} \cdot dx = \int \frac{(\tan x+3)^{\frac{1}{3}}}{2\sin^2 x} \cdot dx$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 x\,(\tan x+3)^{\frac{1}{3}} \cdot dx$

$y = \tan x + 3 \leftarrow dx = \frac{dy}{-\csc^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 x\, y^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{dy}{-\csc^2 x}$

$-\frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{3}}\,dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$

$-\frac{3}{8}(\tan x+3)^{\frac{4}{3}} + c$

م) $\int \sin x\,(1+\cos x)^5\,dx =$

$\int \sin x\,(1+2\cos^2 x - 1)^5\,dx =$

$\int \sin x\,(2\cos^2 x)^5\,dx =$

$\int \sin x \times 32\cos^{10} x \cdot dx$

$y = \cos x \leftarrow dx = \frac{dy}{-\sin x}$

$\int \sin x \times 32 \times y^{10} \times \frac{dy}{-\sin x} =$

$\int -32\,y^{10}\,dy = \frac{-32}{11}y^{11} + c$

$= \frac{-32}{11}\cos^{11} x + c$

ن) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)} \cdot dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x \cos^2 x}\,dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,dx =$

لكن

$|\cos x| = \cos x$ في $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x \cdot dx$

$y = \sin x \leftarrow dx = \frac{dy}{\cos x}$

$x = 0 \leftarrow y = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \leftarrow y = 1$

$\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x \cdot \frac{dy}{\cos x} = \int_0^1 -y^{\frac{1}{2}}\,dy$

$\left[-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$-\frac{2}{3}(0^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}})$

$-\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3}$

Scanned with CamScanner

س٤) ∫ جتاس (جاس - جتاس)^٩ دس.

= ∫ (جتاس - جاس) (جاس - جتاس)^٩ دس =

= ∫ (جتاس + جاس) (جتاس - جاس) (جاس - جتاس)^٩ دس

= - ∫ (جتاس + جاس) (جاس - جتاس) (جاس - جتاس)^٩ دس

= - ∫ (جتاس + جاس) (جاس - جتاس)^١٠ دس

ص = جاس - جتاس ← دس = دص / (جتاس + جاس)

= - ∫ (جتاس + جاس) ص^٩ · دص / (جتاس + جاس)

= - ∫ ص^٩ دص = - ص^١٠ / ١٠ + جـ

= - ١/١٠ (جاس - جتاس)^١٠ + جـ

س٥) ∫ (س - ١)^ن / س^(ن+٢) دس = ∫ (س - ١)^ن / س^ن × ١/س^٢ دس

= ∫ (١ - ١/س)^ن × ١/س^٢ دس

ص = ١ - ١/س ← دص/دس = ١/س^٢ ← دس = س^٢ دص

= ∫ ص^ن دص

= [ص^(ن+١) / (ن+١)] = ١/(ن+١) (٠ - (-١)^(ن+١))

= (-١)^(ن+١) / (ن+١)

اذا كانت ن عدد فردي فإن

ن + ١ عدد زوجي ← (-١)^(عدد زوجي) = ١

التكامل = ١ / (ن+١) حيث ن عدد فردي

واذا كانت ن عدد زوجي فإن

ن + ١ عدد فردي ← (-١)^(عدد فردي) = -١

التكامل = -١ / (ن+١) حيث ن عدد زوجي

س٦) ∫ جتا^ن جا^٣ دس.

أ) ∫ جتا^ن جا^٧ دس

ص = جتاس .

ب) ∫ جتا^٣ جا^٧ دس

ص = جاس .

ج) ∫ ظا^٣ قا^٤ دس

ص = ظاس

د) ∫ ظا^٣ قا^٣ دس

ص = قاس .

هـ) ∫ ظتا^٦ قتا^٤ دس

ص = ظتاس .

و) ∫ ظتا^٧ قتا^٤ دس .

ص = ظتاس .

Scanned with CamScanner

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{0}^{\pi}$ (٢س + ١) جتا ٣س دس

ب) $\int$ س^{٢} لـو$_{هـ}$ س دس

جـ) $\int_{-٢}^{١}$ ٥س $\sqrt{س + ٣}$ دس

د) $\int \frac{س \text{ جاس}}{\text{جتا}^{٣}س}$ دس

هـ) $\int$ قا^{٢}س لـو$_{هـ}$ ظاس دس

و) $\int \frac{س}{هـ^{٢س}}$ دس

ز) $\int$ جتا $\sqrt[٣]{س}$ دس

ح) $\int$ جتاس لـو$_{هـ}$ جاس دس

ط) $\int$ س(جاس + جتاس)^{٢} دس

ي) $\int$ هـ^{س} جتا٣س دس

ك) $\int \frac{\text{لـو}_{هـ}(س + ٣)}{\sqrt{س+٣}}$ دس

ل) $\int$ (س^{٢} − ٢س) $\sqrt{س + ٣}$ دس

م) $\int$ قا^{٢}س لـو$_{هـ}$ جاس دس

ن) $\int$ ٢ هـ^{س} جاس جتاس دس

س) $\int$ (س^{٣} + ٢س) هـ^{س} دس

ع) $\int \frac{س \text{ هـ}^{س}}{(١ + س)^{٢}}$ دس

٢) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = ٣ ، ق(١) = ٥ ، ق(٢) = ٨ ، فاحسب قيمة $\int_{١}^{٢}$ س قَ(س) دس

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية ح وكان

$\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = ١٠ ، ق(٢) = ٣ ، ق(١) = −١ ، فجد قيمة $\int_{١}^{٢}$ س^{٥} قَ(س^{٣} + ١) دس

Scanned with CamScanner

س٩) $\int (2ك+1)$ جتا٣ك دس .

ف = ٢ك+١ ← دف = ٢ دس

د هـ = جتا٣ك دك ← هـ = $\frac{1}{3}$ جا٣ك

$= (2ك+1) \times \frac{1}{3}$ جا٣ك $- \int \frac{1}{3}$ جا٣ك $\times 2$ دس

$= \frac{1}{3}(2ك+1)$ جا٣ك $+ \frac{2}{9}$ جتا٣ك $+$ د

$= \frac{1}{3}(2ك+1)$ جا٣ك $+ \frac{2}{9}$ جتا٣ك $+$ د

ب) $\int$ س^{2} لوهـ س دس .

ف = لوهـ س ← د ف = $\frac{1}{س}$ دس

د هـ = س^{2} دك ← هـ = $\frac{س^{3}}{3}$

$= لوهـ س \times \frac{س^{3}}{3} - \int \frac{س^{3}}{3} \times \frac{1}{س}$ دس

$= \frac{1}{3} س^{3}$ لوهـ س $- \frac{1}{2} \int س^{2}$ دس .

$= \frac{1}{3} س^{3}$ لوهـ س $- \frac{1}{2} \times \frac{س^{3}}{2} +$ د

$= \frac{1}{2} س^{3}$ لوهـ س $- \frac{1}{9} س^{3} +$ د

جـ) $\int_{-2}^{0}$ س $\sqrt{س+3}$ دس $= \int_{-2}^{0}$ س $(س+3)^{\frac{1}{2}}$ دس

ف = س ← د ف = دس

د هـ = $(س+3)^{\frac{1}{2}}$ دس ← هـ = $\frac{2}{3}(س+3)^{\frac{3}{2}}$

$= [س \times \frac{2}{3}(س+3)^{\frac{3}{2}}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} \frac{2}{3}(س+3)^{\frac{3}{2}} \times$ دس

$= [\frac{2}{3} س (س+3)^{\frac{3}{2}}]_{-2}^{0} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}(س+3)^{\frac{5}{2}}]_{-2}^{0}$

$= [\frac{2}{3} س (س+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(س+3)^{\frac{5}{2}}]_{-2}^{0}$

$= \frac{2}{3} \times 0 \times 3^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \times 3^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{3} \times (-2) \times 1^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \times 1^{\frac{5}{2}} \right)$

$= 0 - \frac{4}{15} \times 9\sqrt{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{15}$

$= \frac{4}{3} - \frac{4}{5}\sqrt{27} - \frac{4}{15}$

$= \frac{4}{3} - \frac{12}{5}\sqrt{3} - \frac{4}{15}$

$= \frac{20}{15} - \frac{36\sqrt{3}}{15} - \frac{4}{15} = \frac{16 - 36\sqrt{3}}{15}$

أ) $\int \frac{س \, جا^2 س}{جتا^3 س} \, دس$.

$ع = س \leftarrow دع = دس$

$دهـ = \frac{جا^2 س}{جتا^3 س} دس \leftarrow هـ = \int \frac{جا^2 س}{جتا^3 س} دس$

$ص = جتا س \leftarrow دس = \frac{دص}{-جا س}$

$\int \frac{جا^2 س}{جتا^3 س} دس = \int \frac{جا^2 س}{ص^3} \times \frac{دص}{-جا س}$

$= \int -\frac{1}{ص^3} دص = \int -ص^{-3} دص = -\frac{ص^{-2}}{-2}$

$= \frac{1}{2ص^2} = \frac{1}{2جتا^2 س} = \frac{1}{2} قا^2 س = هـ$

$\int \frac{س \, جا س}{جتا^3 س} دس = ع \times هـ - \int هـ \, دع$

$= س \times \frac{1}{2} قا^2 س - \int \frac{1}{2} قا^2 س دس$

$= \frac{1}{2} س قا^2 س - \frac{1}{2} ظا س + ج$.

ب) $\int قا^3 س لو_هـ ظا س \, دس$

$ص = ظا س \leftarrow دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int قا^3 س لو_هـ ص \frac{دص}{قا^2 س} = \int لو_هـ ص \, دص$

$ع = لو_هـ ص \leftarrow دع = \frac{1}{ص} دص$

$دهـ = دص \leftarrow هـ = ص$

$\int لو_هـ ص \, دص = ص لو_هـ ص - \int ص \times \frac{1}{ص} دص$

$= ص لو_هـ ص - \int 1 \, دص$

$= ص لو_هـ ص - ص + ج$

$= ظا س لو_هـ ظا س - ظا س + ج$

ج) $\int \frac{س}{هـ^{س}} دس = \int س \, هـ^{-س} دس$

$ع = س \leftarrow دع = دس$

$دهـ = هـ^{-س} دس \leftarrow هـ = -\frac{1}{هـ^{س}}$

$= س \times -\frac{1}{هـ^{س}} - \int -\frac{1}{هـ^{س}} \times دس$

$= -\frac{1}{هـ^{س}} س - \frac{1}{هـ^{س}} + ج$

$= -\frac{1}{هـ^{س}} س - \frac{1}{هـ^{س}} + ج$

د) $\int جتا^3 \sqrt{س} \, دس$

$ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^2 = س$

$2ص \, دص = دس$

$= \int 2ص^2 جتا^3 ص \, دص$

$ع = 2ص^2 \leftarrow دع = 4ص \, دص$

$دهـ = جتا^3 ص \, دص \leftarrow هـ = \int جتا^3 ص \, دص$

$= \int جتا^2 ص \, جتا ص \, دص$

$= \int (1 - جا^2 ص) جتا ص \, دص$

$= جا ص - \frac{1}{3} جا^3 ص$

$= جا \sqrt{س} - \frac{1}{3} جا^3 \sqrt{س}$

هـ) $\int جا^3 \sqrt{س} \, دس$

$ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^2 = س$

$2ص \, دص = دس$

$= \int 2ص^2 جا^3 ص \, دص$

$ع = 2ص^2 \leftarrow دع = 4ص \, دص$

$دهـ = جا^3 ص \, دص \leftarrow هـ = \int جا^3 ص \, دص$

$= \int جا^2 ص \, جا ص \, دص$

$= \int (1 - جتا^2 ص) جا ص \, دص$

$= -جتا ص + \frac{1}{3} جتا^3 ص$

$= -جتا \sqrt{س} + \frac{1}{3} جتا^3 \sqrt{س}$

Scanned with CamScanner

س ٤) ∫ جتاس لوجاس دس

ف: لوجاس ← دف = جتاس / جاس دس

دھ = جتاس دس ← ھ = جاس

= لوجاس × جاس − ∫ جاس × جتاس / جاس دس

= جاس لوجاس − جاس + ج

ط) ∫ س (جاس + جتاس)² دس =

∫ س (جا²س + ٢ جاس جتاس + جتا²س) دس =

∫ س (١ + ٢ جاس جتاس) دس =

∫ س (١ + جا٢س) دس =

∫ (س + س جا٢س) دس .

مباشر ↑ ↑ اجزاء

ف = س ← دف = دس

دھ = جا٢س دس ← ھ = −½ جتا٢س

= ½ س² + ∫ س جا٢س دس =

= ½ س² + س × −½ جتا٢س − ∫ −½ جتا٢س دس =

= ½ س² − ½ س جتا٢س + ¼ جا٢س + ج

= ½ س² − ½ س جتا٢س + ¼ جا٢س + ج

ي) ∫ ھ^س جتا٣س دس .

ف = ھ^س ← دف = ھ^س دس

دھ = جتا٣س دس ← ھ = ⅓ جا٣س .

= ھ^س × ⅓ جا٣س − ∫ ⅓ جا٣س × ھ^س دس

= ⅓ ھ^س جا٣س − ⅓ ∫ ھ^س جا٣س دس

↑ اجزاء مرة ثانية .

ف = ھ^س ← دف = ھ^س دس

دھ = جا٣س دس ← ھ = −⅓ جتا٣س

= ⅓ ھ^س جا٣س − ⅓ (ھ^س × −⅓ جتا٣س − ∫ −⅓ جتا٣س ھ^س دس)

= ⅓ ھ^س جا٣س + ⅑ ھ^س جتا٣س ÷ ⅑ ∫ ھ^س جتا٣س دس

∴ ∫ ھ^س جتا٣س دس =

⅓ ھ^س جا٣س + ⅑ ھ^س جتا٣س − ⅑ ∫ ھ^س جتا٣س دس

↑ نقل الى الطرف الآخر .

١٠/٩ ∫ ھ^س جتا٣س دس = ⅓ ھ^س جا٣س + ⅑ ھ^س جتا٣س .

⇐ ∫ ھ^س جتا٣س دس = ٩/١٠ (⅓ ھ^س جا٣س + ⅑ ھ^س جتا٣س)

Scanned with CamScanner

أ) $\int \frac{\log_{هـ}(س+٣)}{\sqrt{س+٣}}$ دس

ع = $\sqrt{س+٣}$ ← ع^{٢} = س + ٣

٢ع دع = دس

$= \int \frac{\log_{هـ} ع}{ع} \times ٢ع\,دع = ٢\int \log_{هـ} ع\,دع$

$= ٤\int \log_{هـ} ع \cdot دع$

ف = $\log_{هـ} ع$ ← ود = $\frac{١}{ع}$ دع

د ف = دع ← ف = ع

$= ٤(ع \log_{هـ} ع - \int ع \times \frac{١}{ع}\,دع)$

$= ٤(ع \log_{هـ} ع - \int دع)$

$= ٤(ع \log_{هـ} ع - ع) + ج$

$= ٤(\sqrt{س+٣} \log_{هـ} \sqrt{س+٣} - \sqrt{س+٣}) + ج$

ب) $\int (س^{٢} - ٢س)\sqrt{س+٣}$ دس

ف	د ف
$س^{٢} - ٢س$	$(س+٣)^{\frac{١}{٢}}$
$٢س - ٢$	$\frac{٢}{٣}(س+٣)^{\frac{٣}{٢}}$
٢	$\frac{٤}{١٥}(س+٣)^{\frac{٥}{٢}}$
صفر	$\frac{٨}{١٠٥}(س+٣)^{\frac{٧}{٢}}$

$= \frac{٢}{٣}\sqrt{(س+٣)^{٣}}(س^{٢} - ٢س) - \frac{٤}{١٥}\sqrt{(س+٣)^{٥}}(٢س - ٢)$

$+ \frac{١٦}{١٠٥}\sqrt{(س+٣)^{٧}}$.

ملاحظة: يمكن حل السؤال بالأجزاء مرتين .

م) $\int$ قاس لوهـ جاس دس

ف = لوهـ جاس ← ود = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ دس

د ف = قاس دس ← ف = ظاس

$= \text{ظاس لوهـ جاس} - \int \text{ظاس} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ دس

$= \text{ظاس لوهـ جاس} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ دس

$= \text{ظاس لوهـ س} - \int$ دس

$= \text{ظاس لوهـ س} - س + ج$

ن) $\int ٢هـ^{س}$ جاس جتاس دس =

$\int هـ^{س}$ جاجا دس

جاجا = ٢ جاس جتاس

ف = $هـ^{س}$ ← ود = $هـ^{س}$ دس

د ف = جاجا دس ← ف = $-\frac{١}{٢}$ جتاجا

$= هـ^{س} \times -\frac{١}{٢}\text{جتاجا} - \int -\frac{١}{٢}\text{جتاجا}\, هـ^{س}$ دس

$= -\frac{١}{٢} هـ^{س}$ جتاجا $+ \frac{١}{٢}\int$ $هـ^{س}$ جتاجا دس

$= -\frac{١}{٢} هـ^{س}$ جتاجا $+ \frac{١}{٢}(هـ^{س} \times \frac{١}{٢}$ جاجا $- \int \frac{١}{٢}$ جاجا $هـ^{س}$ دس)

$= -\frac{١}{٢} هـ^{س}$ جتاجا $+ \frac{١}{٤} هـ^{س}$ جاجا $- \frac{١}{٤}\int$ جاجا $هـ^{س}$ دس

نقل الى اطراف الأيمن

$\frac{٥}{٤}\int هـ^{س}$ جاجا دس $= -\frac{١}{٢} هـ^{س}$ جتاجا $+ \frac{١}{٤} هـ^{س}$ جاجا .

$\therefore \int هـ^{س}$ جاجا دس $= \frac{٤}{٥}(-\frac{١}{٢} هـ^{س}$ جتاجا $+ \frac{١}{٤} هـ^{س}$ جاجا$)$

$+ ج$

Scanned with CamScanner

١) $\int (س^3 + ٢س) هـ^{س}$ د س .

$ق$	$\frac{د ق}{د س}$
$س^3 + ٢س$	$هـ^{س}$
$٣س^2 + ٢$	$هـ^{س}$
$٦س$	$هـ^{س}$
٦	$هـ^{س}$
صفر	$هـ^{س}$

$= \int (س^3 + ٢س) هـ^{س}$ د س

$= (س^3 + ٢س) هـ^{س} - (٣س^2 + ٢) هـ^{س} + ٦س هـ^{س} - ٦ هـ^{س} + ج$.

---

٣) $\int_{١}^{٢} س$ ق$'$(س) د س

ق = س ← ق د = د س

د هـ = ق$''$(س) د س ← هـ = ق$'$(س)

$= [س \text{ ق}'(س)]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} \text{ق}'(س) د س$

$= ٢ \text{ق}'(٢) - ١ \text{ق}'(١) - ٣$

$= ٢ \times ٨ - ٥ - ٣ = ١٦ - ٨ = ٨$

---

٢) $\int_{١}^{٠} س^5$ ق$'$($س^3 + ١$) د س

ص = $س^3 + ١$ ← د ص = $٣س^2$ د س ← د س = $\frac{د ص}{٣س^2}$

عندما س = ٠ ← ص = ١

عندما س = ١ ← ص = ٢

$= \int_{١}^{٢} س^3$ ق$'$(ص) $\frac{د ص}{٣س^2} = \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣} س^2$ ق$'$(ص) د ص

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣} (ص - ١)$ ق$'$(ص) د ص .

ق = ص − ١ ← د ق = د ص

د هـ = ق$''$(ص) د ص ← هـ = ق$'$(ص)

$= \frac{١}{٣} [(ص - ١) \text{ق}'(ص)]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} \text{ق}'(ص) د ص$

$= \frac{١}{٣} ((٢ - ١) \text{ق}'(٢) - (١ - ١) \text{ق}'(١)) - ١٠$

$= \frac{١}{٣} (٣ - صفر - ١٠)$

$= \frac{١}{٣} \times -٧$

$= -\frac{٧}{٣}$.

---

٤) $\int \frac{س هـ^{س}}{(١ + س)^2}$ د س $= \int س هـ^{س} (١ + س)^{-٢}$ د س

ق = $س هـ^{س}$ ← د ق = $(س هـ^{س} + هـ^{س})$ د س

د هـ = $(١ + س)^{-٢}$ د س ← هـ = $\frac{(١ + س)^{-١}}{-١} = \frac{-١}{س + ١}$

$= س هـ^{س} \times \frac{-١}{س + ١} - \int \frac{-١}{س + ١} \times (س هـ^{س} + هـ^{س})$ د س

$= \frac{-س هـ^{س}}{س + ١} + \int \frac{١}{س + ١} \times هـ^{س} (س + ١)$ د س .

$= \frac{-س هـ^{س}}{س + ١} + \int هـ^{س}$ د س

$= \frac{-س هـ^{س}}{س + ١} + هـ^{س} + ج$

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

جد كلًا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{٩}^{١٦} \frac{٧}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$ ود س

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٢س}{س^{٢} - ٤س - ١٢}$ ود س

٣) $\int_{-١}^{١} \frac{|١ - س|}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ود س

٤) $\int \frac{س^{٣} + ٤س - ٨}{س^{٢} - ٩}$ ود س

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{٣س^{٢} + ٣}{٣س^{٢} - س - ٤}$ ود س

٦) $\int \frac{ظاس}{٢٥ - (لـو_{هـ} جتاس)^{٢}}$ ود س

٧) $\int \frac{١}{هـ^{س} + ١}$ ود س

٨) $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س} - ٣هـ^{س} - ٤}$ ود س

٩) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{س}}{س - ٤}$ ود س

١٠) $\int \frac{جتاس}{١ + ٣جاس - جتا٢س}$ ود س

١١) $\int لـو_{هـ} (س^{٢} - ٩)$ ود س

١٢) $\int \frac{س}{س^{٤} + س^{٢}}$ ود س

١٣) $\int_{٩}^{١٦} \frac{ود س}{س - ٣\sqrt{س} + ٢}$

١٤) $\int \frac{\sqrt{س - ٢} + ١}{\sqrt{٤س - ٨} - ٢}$ ود س

١٥) $\int \sqrt{١ - هـ^{س}}$ ود س

١٦) $\int \frac{قا^{٢}س}{٥ - قا^{٢}س}$ ود س

١٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٨ + جتا^{٢}س}$ ود س

١٨) $\int \frac{ود س}{س (لـو_{هـ} س)^{٢} - ٤س}$

Scanned with CamScanner

س 1) $\int \frac{7}{س^2 - 3س - 10}$ دس

$$\frac{7}{(س-5)(س+2)} = \frac{أ}{س-5} + \frac{ب}{س+2}$$

$$أ(س+2) + ب(س-5) = 7$$

$$س = -2 \leftarrow -7ب = 7 \leftarrow ب = -1$$

$$س = 5 \leftarrow 7أ = 7 \leftarrow أ = 1$$

$$\int \frac{7}{(س-5)(س+2)} دس = \int \left(\frac{1}{س-5} + \frac{-1}{س+2}\right) دس$$

$$= \ln|س-5| - \ln|س+2| + جـ$$

---

2) $\int_1^3 \frac{3س}{س^2 - 4س - 12}$ دس

$$\frac{3س}{س^2-4س-12} = \frac{أ}{س-6} + \frac{ب}{س+2}$$

$$أ(س+2) + ب(س-6) = 3س$$

$$س = -2 \leftarrow -8ب = -6 \leftarrow ب = \frac{3}{4}$$

$$س = 6 \leftarrow 8أ = 18 \leftarrow أ = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$\int_1^3 \frac{3س}{(س-6)(س+2)} دس = \int_1^3 \left(\frac{\frac{9}{4}}{س-6} + \frac{\frac{3}{4}}{س+2}\right) دس$$

$$= \left[\frac{9}{4}\ln|س-6| + \frac{3}{4}\ln|س+2|\right]_1^3$$

$$= \frac{9}{4}\ln|-3| + \frac{3}{4}\ln 5 - \frac{9}{4}\ln|-5| - \frac{3}{4}\ln 21$$

$$= \frac{9}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\ln 5 - \frac{9}{4}\ln 5$$

$$= \ln 3 - \ln 5 = \ln\left(\frac{3}{5}\right) .$$

---

3) $\int_0^1 \frac{|1-س|}{س^2 - 5س + 6}$ دس .

$1 - س = 0 \leftarrow س = 1$

	$س-1$	$1-س$
$1-$	$-$	$+$
1	$+$	$+$

$$\int_0^1 \frac{|1-س|}{س^2-5س+6} دس = \int_0^1 \frac{1-س}{(س-3)(س-2)} دس .$$

$$\frac{1-س}{(س-3)(س-2)} = \frac{أ}{س-3} + \frac{ب}{س-2}$$

$$أ(س-2) + ب(س-3) = 1-س .$$

$$س = 2 \leftarrow -ب = -1 \leftarrow ب = 1$$

$$س = 3 \leftarrow أ = -2$$

$$\int_0^1 \frac{1-س}{(س-3)(س-2)} دس = \int_0^1 \left(\frac{-2}{س-3} + \frac{1}{س-2}\right) دس$$

$$= \left[-2\ln|س-3| + \ln|س-2|\right]_0^1$$

$$= -2\ln 2 + \ln 1 - (-2\ln 3 + \ln 2)$$

$$= -2\ln 2 + \ln 1 + 2\ln 3 - \ln 2$$

$$= -2\ln 2 + صفر + 2\ln 3 - \ln 2$$

$$= 2\ln 3 - 2\ln 2 - \ln 2 .$$

Scanned with CamScanner

س ١ ع) $\int \frac{س^3 + ٤س - ٨}{س^4 - ٩}$ د س .

رتبة البسط ≥ رتبة المقام

$$\begin{array}{r|l} س^3 + ٤س - ٨ & س^4 - ٩ \\ \hline -س^3 \mp ٩س & س \\ \hline ١٣س - ٨ & \end{array}$$

$$\int \frac{س^3 + ٤س - ٨}{(س-٣)(س+٣)} د س = \int \left(س + \frac{١٣س - ٨}{(س^2-٩)} \right) د س$$

$$\frac{١٣س - ٨}{(س-٢)(س+٣)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+٣}$$

$$أ(س+٣) + ب(س-٣) = ١٣س - ٨$$

$$س = ٣ \leftarrow ٦أ = ٣١ \leftarrow أ = \frac{٣١}{٦} .$$

$$س = -٣ \leftarrow -٦ب = -٤٧ \leftarrow ب = \frac{٤٧}{٦}$$

$$\int \left(س + \frac{١٣س - ٨}{(س^2-٩)} \right) د س =$$

$$\frac{س^2}{٢} + \int \left(\frac{\frac{٣١}{٦}}{س-٣} + \frac{\frac{٤٧}{٦}}{س+٣} \right) د س$$

$$= \frac{س^2}{٢} + \frac{٣١}{٦} \ln|س-٣| + \frac{٤٧}{٦} \ln|س+٣| + ج$$

ه) $\int_{٠}^{١} \frac{٣س^2 + ٣}{٣س^3 - س - ٤} د س$.

درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} ٣س^3 + ٣ & ٣س^3 - س - ٤ \\ \hline -٣س^3 \mp س \mp ٤ & ١ \\ \hline س + ٧ & \end{array}$$

$$\int_{٠}^{١} \frac{٣س^3 + ٣}{٣س^3 - س - ٤} د س = \int_{٠}^{١} \left(١ + \frac{س + ٧}{٣س^3 - س - ٤} \right) د س$$

$$\frac{س + ٧}{(س-١)(٣س^2+٣س+٤)} = \frac{أ}{س-١} + \frac{ب س + ج}{٣س^2+٣س+٤}$$

$$أ(٣س^2+٣س+٤) + (ب س + ج)(س-١) = س + ٧$$

$$س = ١ \leftarrow ١٠أ = ٨ \leftarrow أ = \frac{٤}{٥} .$$

$$س = ٠ \leftarrow ٤أ - ج = ٧ \leftarrow ج = -\frac{٦}{٥} .$$

$$س = ٢ \leftarrow ١٠أ + ٦ب + ٢ج = ٩ \leftarrow ب = \frac{٢}{٥} .$$

$$\int_{٠}^{١} \left(١ + \frac{\frac{٤}{٥}}{س-١} + \frac{\frac{٢}{٥}س - \frac{٦}{٥}}{٣س^2+٣س+٤} \right) د س$$

$$\left[س + \frac{٤}{٥} \ln|س-١| + \frac{١}{٥} \ln|٣س^2+٣س+٤| \right]_{٠}^{١}$$

$$= ١ + \frac{٤}{٥} \ln ١ + \frac{١}{٥} \ln ١١ - \frac{١}{٥} \ln ٤ - (٠ + \frac{٤}{٥} \ln ١ + \frac{١}{٥} \ln ٤)$$

$$= ١ + \frac{٤}{٥} \ln ١ - \frac{١}{٥} \ln ٤ + \frac{١}{٥} \ln ١١ - \frac{١}{٥} \ln ٤$$

$$= ١ + \frac{٤}{٥} \times ٠ - \frac{١}{٥} \ln ٤ + \frac{١}{٥} \ln ١١ - \frac{١}{٥} \ln ٤$$

$$١ - \frac{١}{٥} \ln ٤ + \frac{١}{٥} \ln ١١ - \frac{١}{٥} \ln ٤ .$$

و) $\int \frac{ظاس}{٢٥ - (\ln جتاس)^2}$. د س =

ص = $\ln$ جتاس ← $\frac{د ص}{د س} = \frac{-جاس}{جتاس}$ = -ظاس

← د س = $\frac{د ص}{-ظاس}$.

$$= \int \frac{ظاس}{٢٥ - ص^2} \times \frac{د ص}{-ظاس} = \int \frac{-١}{٢٥ - ص^2} د ص$$

$$= \int \frac{١}{ص^2 - ٢٥} د ص = \int \frac{١}{(ص-٥)(ص+٥)}$$

$$\frac{١}{(ص-٥)(ص+٥)} = \frac{أ}{ص-٥} + \frac{ب}{ص+٥}$$

$$أ(ص+٥) + ب(ص-٥) = ١$$

$$ص = ٥ \leftarrow ١٠أ = ١ \leftarrow أ = \frac{١}{١٠}$$

$$ص = -٥ \leftarrow -١٠ب = ١ \leftarrow ب = -\frac{١}{١٠}$$

$$\int \left(\frac{\frac{١}{١٠}}{ص-٥} + \frac{-\frac{١}{١٠}}{ص+٥} \right) د ص$$

$$\frac{١}{١٠} \ln|ص-٥| - \frac{١}{١٠} \ln|ص+٥| + ج$$

$$\frac{١}{١٠} \ln \left| \frac{ص-٥}{ص+٥} \right| + ج$$

$$\frac{١}{١٠} \ln \left| \frac{\ln جتاس - ٥}{\ln جتاس + ٥} \right| + ج$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

تابع س٨ فرع (٦)

$$\frac{1}{(ص-٥)(ص+٥)} = \frac{أ}{ص-٥} + \frac{ب}{ص+٥}$$

$$أ(ص+٥) + ب(ص-٥) = 1$$

$$ص = -٥ \leftarrow -١٠ب = 1 \leftarrow ب = -\frac{1}{١٠}$$

$$ص = ٥ \leftarrow ١٠أ = 1 \leftarrow أ = \frac{1}{١٠}$$

$$\int \frac{1}{(ص-٥)(ص+٥)} دص = \int \left(\frac{\frac{1}{١٠}}{ص-٥} + \frac{-\frac{1}{١٠}}{ص+٥}\right) دص$$

$$= \frac{1}{١٠} لو_{هـ} |ص-٥| - \frac{1}{١٠} لو_{هـ} |ص+٥| + ج$$

$$= \frac{1}{١٠} لو_{هـ} \left|\frac{ص-٥}{ص+٥}\right| + ج$$

$$= \frac{1}{١٠} لو_{هـ} \left|\frac{ظا س - ٥}{ظا س + ٥}\right| + ج$$

---

٧) $\int \frac{1}{هـ^{س}+1} دس$.

$ص = هـ^{س} \rightarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \rightarrow \frac{دص}{هـ^{س}} = دس$

$$= \int \frac{1}{ص+1} \times \frac{دص}{هـ^{س}} .$$

$$= \int \frac{1}{ص+1} \times \frac{دص}{ص} = \int \frac{1}{ص(ص+1)} دص$$

$$\frac{1}{ص(ص+1)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+1}$$

$$أ(ص+1) + ب ص = 1$$

عندما $ص = -1 \leftarrow -ب = 1 \leftarrow ب = -1$

عندما $ص = 0 \leftarrow أ = 1$

$$\int \frac{1}{هـ^{س}+1} دس = \int \left(\frac{1}{ص} + \frac{-1}{ص+1}\right) دص$$

$$= لو_{هـ} |ص| - لو_{هـ} |ص+1| + ج$$

$$= لو_{هـ} |هـ^{س}| - لو_{هـ} |هـ^{س}+1| + ج$$

---

٨) $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س} - ٣هـ^{س} - ٤} دس$

$ص = هـ^{س} \rightarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \rightarrow \frac{دص}{هـ^{س}} = دس$

$$\int \frac{ص^{٣}}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} \times \frac{دص}{ص} = \int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} دص$$

درجة البسط = درجة المقام

$$ص^{٢} - ٣ص - ٤ \overline{)\ ص^{٢}}$$

$$-ص^{٢} + ٣ص + ٤$$

$$٣ص + ٤$$

$$\int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} دص = \int \left(1 + \frac{٣ص+٤}{ص^{٢} - ٣ص - ٤}\right) دص$$

$$\frac{٣ص+٤}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} = \frac{٣ص+٤}{(ص-٤)(ص+1)} = \frac{أ}{ص-٤} + \frac{ب}{ص+1}$$

$$أ(ص+1) + ب(ص-٤) = ٣ص + ٤ .$$

$ص = -1 \rightarrow -٥ب = 1 \rightarrow ب = -\frac{1}{٥}$.

$ص = ٤ \rightarrow ٥أ = ١٦ \rightarrow أ = \frac{١٦}{٥}$.

$$\int \left(1 + \frac{٣ص+٤}{(ص-٤)(ص+1)}\right) دص = \int \left(1 + \frac{\frac{١٦}{٥}}{ص-٤} + \frac{-\frac{1}{٥}}{ص+1}\right) دص$$

$$= ص + \frac{١٦}{٥} لو_{هـ} |ص-٤| - \frac{1}{٥} لو_{هـ} |ص+1| + ج$$

$$= هـ^{س} + \frac{١٦}{٥} لو_{هـ} |هـ^{س}-٤| - \frac{1}{٥} لو_{هـ} |هـ^{س}+1| + ج$$

Scanned with CamScanner

٩) $\int_{9}^{16} \frac{\sqrt{س}}{س-٤}$ د س .

$ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^{٢} = س \leftarrow ٢ص$ د ص $=$ د س

$س = ٩ \leftarrow ص = ٣$ / $س = ١٦ \leftarrow ص = ٤$

$= \int_{٣}^{٤} \frac{ص}{ص^{٢}-٤} \times ٢ص$ د ص $= \int_{٣}^{٤} \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-٤}$ د ص

درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} ٢ص^{٢} & ص^{٢}-٤ \\ \hline -٢ص^{٢}+٨ & ٢ \\ \hline ٨ & \end{array}$$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-٤}$ د ص $= \int_{٣}^{٤} (٢ + \frac{٨}{ص^{٢}-٤})$ د ص

$\frac{٨}{ص^{٢}-٤} = \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+٢}$

$أ(ص+٢) + ب(ص-٢) = ٨$

$ص = -٢ \leftarrow -٤ب = ٨ \leftarrow ب = -٢$

$ص = ٢ \leftarrow ٤أ = ٨ \leftarrow أ = ٢$

$\int_{٣}^{٤} (٢ + \frac{٨}{ص^{٢}-٤})$ د ص $=$

$\int_{٣}^{٤} (٢ + \frac{٢}{ص-٢} + \frac{-٢}{ص+٢})$ د ص $=$

$= [٢ص + ٢ لو_{هـ} |ص-٢| - ٢ لو_{هـ} |ص+٢|]_{٣}^{٤}$

$= ٢ \times ٤ + ٢ لو_{هـ} ٢ - ٢ لو_{هـ} ٦ - (٢ \times ٣ + ٢ لو_{هـ} ١ - ٢ لو_{هـ} ٥)$

$= ٨ + ٢ لو_{هـ} ٢ - ٢ لو_{هـ} ٦ - ٦ - صفر + ٢ لو_{هـ} ٥$

$= ٢ + لو_{هـ} ٤ - لو_{هـ} ٣٦ + لو_{هـ} ٢٥$

$= ٢ + لو_{هـ} (\frac{٤ \times ٢٥}{٣٦})$.

١٠) $\int \frac{جتاس}{١+٣جاس - جتاس}$ د ى $=$

$= \int \frac{جتاس}{١+٣جاس - (١-٢جا^{٢}س)}$ د س $=$

$\int \frac{جتاس}{٢جا^{٢}س + ٣جاس}$ د ى $=$

$ص = جاس \leftarrow$

$\frac{د ص}{د ى} = جتاس \leftarrow$

$\frac{د ص}{جتاس} = د ى$

$\int \frac{جتاس}{جتاس} \times \frac{د ص}{٢ص^{٢}+٣ص} = \int \frac{١}{ص(٢ص+٣)}$ د ص

$\int \frac{١}{٢ص^{٢}+٣ص}$ د ص $= \int (\frac{أ}{ص} + \frac{ب}{٢ص+٣})$ د ص

$\frac{١}{ص(٢ص+٣)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{٢ص+٣}$

$أ(٢ص+٣) + ب ص = ١$

$ص = ٠ \leftarrow ٣أ = ١ \leftarrow أ = \frac{١}{٣}$.

$ص = -\frac{٣}{٢} \leftarrow -\frac{٣}{٢}ب = ١ \leftarrow ب = -\frac{٢}{٣}$.

$\int (\frac{أ}{ص} + \frac{ب}{٢ص+٣})$ د ص $= \int (\frac{\frac{١}{٣}}{ص} - \frac{\frac{٢}{٣}}{٢ص+٣})$ د ص

$= \frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ $|ص| - \frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ $|٢ص+٣| + ج$

$= \frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ $|جاس| - \frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ $|٢جاس+٣| + ج$

منهاجي متعة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

س ١١) $\int_{هـ} \text{لو}(س^2-9)\,دس$

$ع = \text{لو}_{هـ}(س^2-9) \leftarrow دع = \frac{2س}{س^2-9}\,دس$

$دع = دس \leftarrow ع = س$

$\int \text{لو}_{هـ}(س^2-9)\,دس = \text{لو}_{هـ}(س^2-9)\times س - \int س \times \frac{2س}{س^2-9}\,دس$

$= س\,\text{لو}_{هـ}(س^2-9) - \int \frac{2س^2}{س^2-9}\,دس$

$\begin{array}{r|l} 2س^2 & س^2-9 \\ \hline & 2 \\ \hline 2س^2+18 & \\ \hline 18 & \end{array}$

$\int \frac{2س^2}{س^2-9}\,دس = \int (2 + \frac{18}{س^2-9})\,دس$

$\frac{18}{س^2-9} = \frac{أ}{س-3} + \frac{ب}{س+3}$

$أ(س+3) + ب(س-3) = 18$

$س = 3 \leftarrow 6أ = 18 \leftarrow أ = 3$

$س = -3 \leftarrow -6ب = 18 \leftarrow ب = -3$

$\int \frac{18}{س^2-9}\,دس = \int (\frac{3}{س-3} + \frac{-3}{س+3})\,دس$

$= 3\,\text{لو}_{هـ}|س-3| - 3\,\text{لو}_{هـ}|س+3| + ج$

$\int \frac{2س^2}{س^2-9}\,دس = 2س + 3\,\text{لو}_{هـ}|س-3| - 3\,\text{لو}_{هـ}|س+3| + ج$

$\therefore \int \text{لو}_{هـ}(س^2-9)\,دس =$

$س\,\text{لو}_{هـ}(س^2-9) - 2س + 3\,\text{لو}_{هـ}|س-3| - 3\,\text{لو}_{هـ}|س+3| + ج$

١٢) $\int \frac{س}{س^4+س^2}\,دس = \int \frac{س}{س^2(س^2+1)}\,دس$

$ص = س^2 \rightarrow دص = 2س\,دس \rightarrow دس = \frac{دص}{2س}$

$\int \frac{س}{ص(ص+1)} \times \frac{دص}{2س} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{ص(ص+1)}\,دص$

$\frac{1}{ص(ص+1)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+1}$

$أ(ص+1) + بص = 1$

$ص = -1 \rightarrow -ب = 1 \rightarrow ب = -1$

$ص = 0 \rightarrow أ = 1$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{ص(ص+1)}\,دص = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{ص} + \frac{1}{ص+1})\,دص$

$\frac{1}{2}(\text{لو}_{هـ}|ص| - \text{لو}_{هـ}|ص+1|) + ج$

$\frac{1}{2}(\text{لو}_{هـ}|س^2| - \text{لو}_{هـ}|س^2+1|) + ج$

$\frac{1}{2}\text{لو}_{هـ}|س^2| - \frac{1}{2}\text{لو}_{هـ}|س^2+1| + ج$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

Scanned with CamScanner

س١٣) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{س}}{س - ٣\sqrt{س} + ٣}$.

$ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^٢ = س \leftarrow ٢ص\,د ص = د س$

$س = ٩ \leftarrow ص = ٣$ / $س = ١٦ \leftarrow ص = ٤$

$$\int_{٣}^{٤} \frac{٢ص\,د ص}{ص^٢ - ٣ص + ٣} = \int_{٣}^{٤} \frac{٢ص}{(ص-٢)(ص-١)}$$

$$\frac{٢ص}{(ص-٢)(ص-١)} = \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص-١}$$

$أ(ص-١) + ب(ص-٢) = ٢ص$

$ص = ١ \leftarrow -ب = ٢ \leftarrow ب = -٢$

$ص = ٢ \leftarrow أ = ٤$

$$\int_{٣}^{٤} \left(\frac{٤}{ص-٢} + \frac{-٢}{ص-١} \right) د ص =$$

$$\left[٤ \ln_{هـ} |ص-٢| - ٢ \ln_{هـ} |ص-١| \right]_{٣}^{٤} =$$

$٤ \ln_{هـ} ٢ - ٢ \ln_{هـ} ٣ - (٤ \ln_{هـ} ١ - ٢ \ln_{هـ} ٢) =$

$٤ \ln_{هـ} ٢ - ٢ \ln_{هـ} ٣ - صفر + ٢ \ln_{هـ} ٢ =$

$٦ \ln_{هـ} ٢ - ٢ \ln_{هـ} ٣$

١٤) $\int \frac{د س}{\sqrt{٤س - ٨} - ٢}$

$\int \frac{\sqrt{س-٢} + ١}{٢\sqrt{س-٢} - ٢} د س$

$ص = \sqrt{س-٢} \leftarrow ص^٢ = س - ٢ \leftarrow ٢ص\,د ص = د س$

$\int \frac{٢ص\,د ص}{٢ص - ٢} \times \frac{ص+١}{ص+١} = \int \frac{٢ص^٢ + ٢ص}{ص^٢ - ١} د ص$

درجة البسط > درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} ٢ص^٢ + ٢ص & ص^٢ - ١ \\ \hline -٢ص^٢ \pm ٢ص & ٢ \\ \hline ٤ص & \end{array}$$

$$\int \left(٢ + \frac{٤ص}{ص^٢ - ١} \right) د ص$$

$$\int \left(٢ + \frac{٤ص}{(ص-١)(ص+١)} \right) د ص$$

$$\frac{٤ص}{(ص-١)(ص+١)} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$$

$أ = ٢$

$ب = -٢$

$٢ص + ٢ \ln_{هـ} |ص-١| - ٢ \ln_{هـ} |ص+١| + ج$

$٢\sqrt{س-٢} + ٢ \ln_{هـ} |\sqrt{س-٢} - ١| - ٢ \ln_{هـ} |\sqrt{س-٢} + ١| + ج$

١٥) $\int \sqrt{١ - ظا^٢ ص}\, د ص$

$ص = \sqrt{١ - ظا^٢ ص} \leftarrow ص^٢ = ١ - ظا^٢ ص \leftarrow ٢ص\,د ص = -ظا^٢ ص\,د ص$

$\Rightarrow د ص = \frac{-ظا^٢ ص}{٢ص\,د ص} \Rightarrow د ص = \frac{٢ص\,د ص}{ص^٢ - ١}$

$$\int \sqrt{١ - ظا^٢ ص}\, د ص = \int ص \times \frac{٢ص\,د ص}{ص^٢ - ١} =$$

$$\int \frac{٢ص^٢}{ص^٢ - ١} د ص = \begin{array}{r|l} ٢ص^٢ & ص^٢ - ١ \\ \hline -٢ص^٢ \pm ٢ & ٢ \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\int \left(٢ + \frac{٢}{(ص-١)(ص+١)} \right) د ص$$

$$\frac{٢}{(ص-١)(ص+١)} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$$

$أ = ١$

$ب = -١$

$٢ص + \ln_{هـ} |ص-١| - \ln_{هـ} |ص+١| + ج$

$٢\sqrt{١ - ظا^٢ ص} + \ln_{هـ} |\sqrt{١ - ظا^٢ ص} - ١| - \ln_{هـ} |\sqrt{١ - ظا^٢ ص} + ١| + ج$

Scanned with CamScanner

س ١٦) $\int \frac{\sec^2 س}{5 - \tan س}$ دس .

$= \int \frac{\sec^2 س}{(1+\tan س)(5-\tan س)}$ دس $= \int \frac{\sec^2 س}{4 - \tan^2 س}$ دس .

ص = ظا س ← $\frac{دص}{\sec^2 س}$ = دس

$= \int \frac{\sec^2 س}{4 - ص^2} \times \frac{دص}{\sec^2 س} =$

$\frac{1}{4 - ص^2} = \frac{أ}{2 - ص} + \frac{ب}{2 + ص}$.

$أ(2+ص) + ب(2-ص) = 1$

ص = -2 ← $4ب = 1$ ← $ب = \frac{1}{4}$

ص = 2 ← $4أ = 1$ ← $أ = \frac{1}{4}$

$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$ دص

$= \frac{1}{4} \ln_{هـ} |2 - ص| + \frac{1}{4} \ln_{هـ} |2 + ص| + ج$

$= \frac{1}{4} \ln_{هـ} |2 - ظا س| + \frac{1}{4} \ln_{هـ} |2 + ظا س| + ج$

---

١٧) $\int \frac{جتا س}{8 + جا س}$ دس $= \int \frac{جتا س}{8 + 1 - جا^2 س}$ دس

$= \int \frac{جتا س}{9 - جا^2 س}$ دس

ص = جا س
دص / دس = جتا س
دص / جتا س = دس

$= \int \frac{جتا س}{9 - ص^2} \times \frac{دص}{جتا س}$

$= \int \frac{1}{9 - ص^2}$ دص =

$\frac{1}{9 - ص^2} = \frac{أ}{3 - ص} + \frac{ب}{3 + ص}$

$أ(3+ص) + ب(3-ص) = 1$

ص = 3 ← $6أ = 1$ ← $أ = \frac{1}{6}$

ص = -3 ← $6ب = 1$ ← $ب = \frac{1}{6}$.

$\int \frac{1}{9 - ص^2}$ دص $= \int \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right)$ دص

$= \frac{1}{6} \ln_{هـ} |3 + ص| + \frac{1}{6} \ln_{هـ} |3 + ص| + ج$

$= -\frac{1}{6} \ln_{هـ} |3 - جا س| + \frac{1}{6} \ln_{هـ} |3 + جا س| + ج$

---

١٨) $\int \frac{س}{س (\ln_{هـ} س)^2 - 4س}$ دس $= \int \frac{دس}{س (\ln_{هـ} س)^2 - 4)}$.

ص = $\ln_{هـ}$ س ← $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$ ← دس = س دص

$= \int \frac{س \, دص}{س (ص^2 - 4)} = \int \frac{دص}{ص^2 - 4}$.

$\frac{1}{(ص-2)(ص+2)} = \frac{أ}{ص - 2} + \frac{ب}{ص + 2}$

$أ(ص+2) + ب(ص-2) = 1$

ص = 2 ← $4أ = 1$ ← $أ = \frac{1}{4}$

ص = -2 ← $-4ب = 1$ ← $ب = -\frac{1}{4}$.

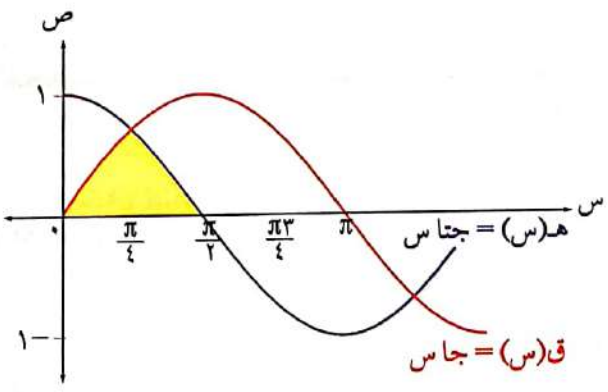
$\int \frac{دص}{ص^2 - 4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{ص - 2} + \frac{-\frac{1}{4}}{ص + 2} \right)$ دص

$= \frac{1}{4} \ln_{هـ} |ص - 2| - \frac{1}{4} \ln_{هـ} |ص + 2| + ج$

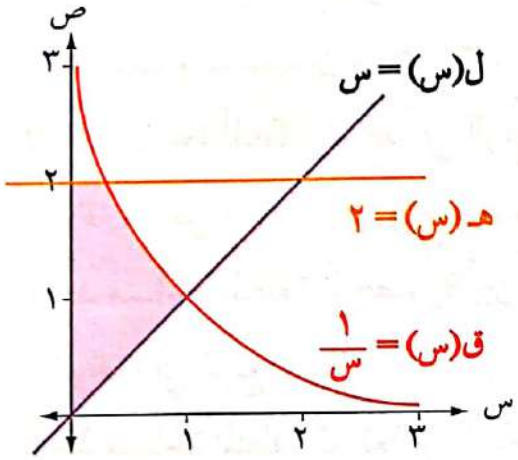
$= \frac{1}{4} \ln_{هـ} |\ln_{هـ} س - 2| - \frac{1}{4} \ln_{هـ} |\ln_{هـ} س + 2| + ج$

Scanned with CamScanner

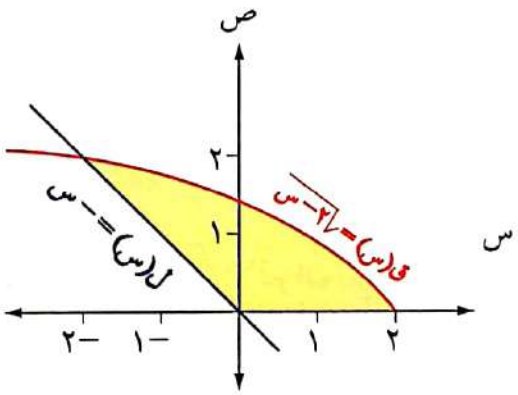
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبرعن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



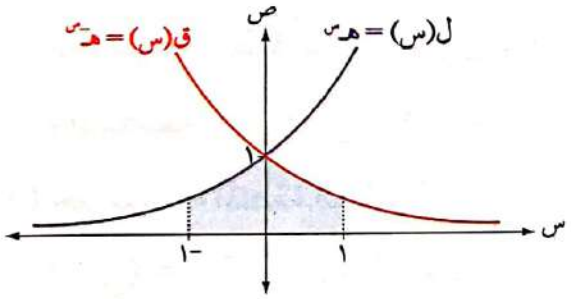
الشكل (٤-٢٤)



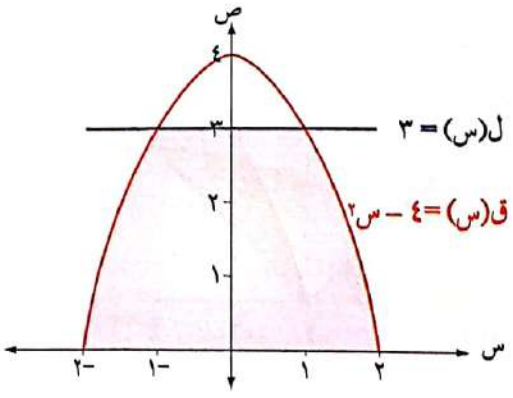
الشكل (٤-٢٥)



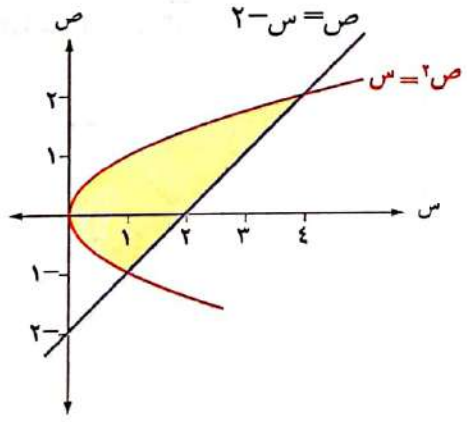
الشكل (٤-٢٦)



الشكل (٤-٢٧)



الشكل (٤-٢٨)



الشكل (٤-٢٩)

Scanned with CamScanner

(المساحة)

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤س^{٣} – ٤س ، ومحور السينات .

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٤س^{٣} – ٣س ، هـ(س) = ٥س

٤) إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} –٣، جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س= – ٣ ، س= ٢

٥) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول و المحصورة بين المستقيم ص = ٨س ، ومنحنى الاقتران ص = ٩ – س^{٢} ومحور السينات.

٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = جاس ، هـ(س) = جا٢س الواقعة في الربع الأول.

٧) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{٢}{س}$ ، ومحور السينات و المستقيم ٢س – ص = ٠ ، والمستقيم هـ – س = صفرًا (هـ : العدد النيبيري)

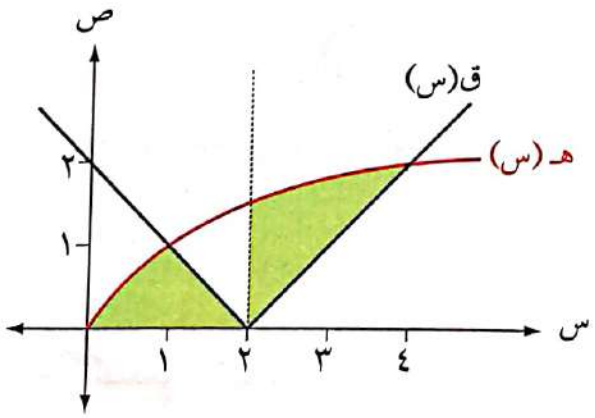
٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١ – س^{٢} ، ومحور الصادات والمستقيم س + ص = ٥ و المستقيم ص = س – ١

٩) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ١ + س^{٣} ، ل(س) = س^{٢} + ٥ والمستقيمين ص + س – ١ = ٠ ، ٣ – س = ٠

١٠) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} – ٤ ، والمستقيم ص = ٢ س + ٤ ، والمحورين الإحداثيين.

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة ص^{٢} = ٤س والمستقيم س – ص = ٣

١٢) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤ – ٣٠) حيث ق(س) = | س – ٢ | ، هـ(س) = $\sqrt{س}$



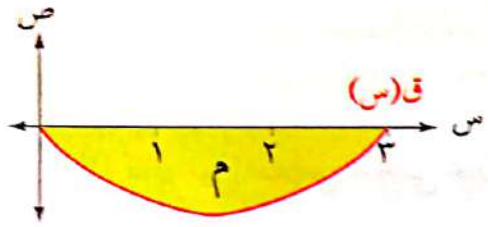
الشكل (٤–٣٠)

Scanned with CamScanner

(المساحة)

١٣) معتمدًا الشكل (٤ – ٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [٠، ٣] إذا كانت مساحة المنطقة (م) تساوي ٦ وحدات مربعة

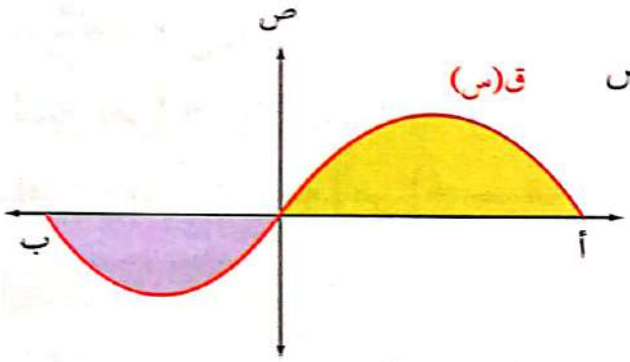
فجد $\int_{0}^{3} (٢ - ق(س)) \, د س$



الشكل (٤–٣١)

١٤) معتمدًا الشكل (٤ – ٣٢)،إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة مربعة

وكان $\int_{ب}^{أ} ق(س) \, د س = ٦$ فما قيمة $\int_{ب}^{أ} ق(س) \, د س$



الشكل (٤–٣٢)

Scanned with CamScanner

س١ التمرين (٤-٢٤)

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جا س \, دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتا س \, دس .$$

التمرين (٤-٢٥)

$ص = ص$	$ص = ك$
$ص = \frac{1}{ك}$	$ص = س$
$ك = 1$	$س = 1$
$س = \frac{1}{2}$	$س = 1 \div \frac{1}{2} \Leftarrow س = 1$

$$م = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (2 - س) \, دس + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\frac{1}{س} - س) \, دس .$$

التمرين (٤-٢٦)

$$م = \int_{-2}^{0} (س^2 - 4) \, دس + \int_{0}^{2} (4 - س^2) \, دس$$

التمرين (٤-٢٧)

$$م = \int_{-1}^{0} هـ^{س} \, دس + \int_{0}^{1} هـ^{-س} \, دس$$

التمرين (٤-٢٨)

$$4 - س^2 = 0 \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = \pm 2$$

$$م = \int_{-2}^{-1} (4 - س^2) دس + \int_{-1}^{1} 2 \, دس + \int_{1}^{2} (4 - س^2) دس .$$

التمرين (٤-٢٩)

$ص = س \Leftarrow ص = \pm \sqrt{س}$

$\sqrt{س} = س - 2$ نربع الطرفين

$س = س^2 - 4س + 4 \Leftarrow س^2 - 5س + 4 = 0$ نحو

$(س - 4)(س - 1) = 0 \Leftarrow س = 4 \text{ أو } س = 1$

$$م = \int_{0}^{1} \sqrt{س} - (-\sqrt{س}) \, دس + \int_{1}^{4} \sqrt{س} - (س - 2) \, دس$$

$$= \int_{0}^{1} (\sqrt{س} + \sqrt{س}) \, دس + \int_{1}^{4} (\sqrt{س} - س + 2) \, دس .$$

$$= \int_{0}^{1} (2\sqrt{س}) \, دس + \int_{1}^{4} (\sqrt{س} - س + 2) \, دس .$$

$ق(س) = 4س^3 - 4س$.

$4س^3 - 4س = 0 \Leftarrow 4س(س^2 - 1) = 0$ نحو

$4س = 0 \Leftarrow س = 0$

$س^2 - 1 = 0 \Leftarrow س = \pm 1$

$$م = \int_{-1}^{0} |4س^3 - 4س| \, دس + \int_{0}^{1} |4س^3 - 4س| \, دس$$

$$= \int_{-1}^{0} (4س^3 - 4س) \, دس + \int_{0}^{1} (4س - 4س^3) \, دس$$

$$= [(س^4 - 2س^2)]_{-1}^{0} + [(2س^2 - س^4)]_{0}^{1} .$$

$$= (0 - 0) - (1 - 2) + (2 - 1) \quad \text{نحو}$$

$$= 1 + 1$$

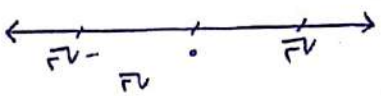
$= 2$ وحدة مساحة .

Scanned with CamScanner

س٣ ص = ٠

٤س٣ - ٣ك٢ = ٥ك ⇐ ٤ك٣ - ٨ك = صفر

٤س (س٢ - ٢) = ٠ ← س = ٠ ، ±√٢



م = ∫ من √٢ إلى ٠ ((٤ك٣ - ٣ك) - ٥ك) دك + ∫ من -√٢ إلى ٠ (٥ك - (٤ك٣ - ٣ك)) دك

= ∫ من -√٢ إلى ٠ (٤س٣ - ٨ك) دك + ∫ من ٠ إلى √٢ (٨س - ٤ك٣) دك

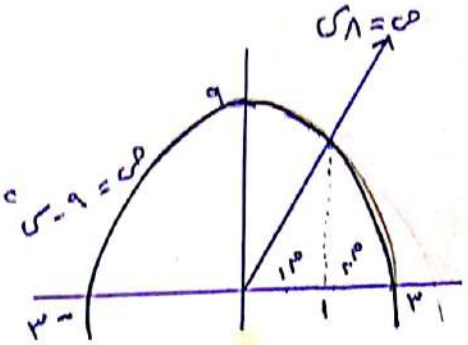
= [س٤ - ٤ك٢] من -√٢ إلى ٠ + [٤س٢ - س٤] من ٠ إلى √٢

= صفر - (٤ - ٨) + (٨ - ٤) - ٠

= ٤ + ٤ = ٨ وحدة مساحة .

س٥ ٨س = ٩ - سـ٢ ← سـ٢ + ٨ك - ٩ = صفر

(س + ٩)(ك - ١) = ٠ ← س = ٠ ، -١٦٩ .



م = ∫ من ٠ إلى ١ ٨ك دس + ∫ من ١ إلى ٣ (٩ - سـ٢) دس

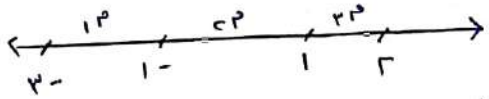
= [٤سـ٢] من ٠ إلى ١ + [٩س - س٣/٣] من ١ إلى ٣

= (٤ - ٠) + (٢٧ - ٩) - (٩ - ١/٣)

= ٤ + ١٨ - ٩ + ١/٣ = ١٣ + ١/٣ = ١٣ ١/٣ وحدة مساحة

س٤ ٢سـ٢ - ٣ = صفر ← ٣ك٢ = ٣ ←

كـ٢ = ١ ← س = ± ١



م = ∫ من -٣ إلى -١ (٣ك٢ - ١٣ك + ١٠) دك + ∫ من -١ إلى ١ (١٣ك٢ - ١٣) دك

+ ∫ من ١ إلى ٢ (١٣ك٢ - ١٣) دك .

م = ∫ من -٣ إلى -١ (٣ك٢ - ٣) دك + ∫ من -١ إلى ١ (٣ - ٣ك٢) دك

+ ∫ من ١ إلى ٢ (٣ك٢ - ٣) دس

= [سـ٣ - ٣س] من -٣ إلى -١ + [٣س - سـ٣] من -١ إلى ١ + [سـ٣ - ٣س] من ١ إلى ٢

= ٢ - ١٨ + ٢ - ٢ + ٢ - ٢

= ٢٠ + ٤ + ٤ = ٢٨ وحدة مساحة

س٦ جاس = جا٢س ← جاس - جاس كتا س = صفر

جاس - ٢جاس جتاس = صفر ← جاس (١ - ٢جتاس) = ٠

جاس = صفر ← س = ٠

١ - ٢جتاس = صفر ← جتاس = ١/٢ ← س = ±π/٣

٠ ، π/٣ ∈ [٠ ، ٢π/٣] .

م = ∫ من ٠ إلى π/٣ (جاس - جا٢س) دس + ∫ من π/٣ إلى ٢π/٣ (جا٢س - جاس) دس

= [-١/٢ جتا٢س + جتاس] من ٠ إلى π/٣ + [-١/٢ جتا٢س + جتاس] من π/٣ إلى ٢π/٣

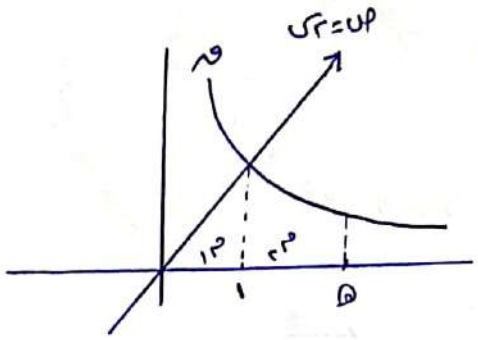
= (١/٤ + ١/٢) - (-١/٢ + ١) + (-١/٢ - ١) - (١/٤ + ١/٢)

= ١/٤ + ١/٢ + ١/٢ - ١ + ١/٢ + ١/٤

= ١/٤ + ١/٤ = ٢/٤ = ١/٢ وحدة مساحة .

Scanned with CamScanner

س٧



$٨ - س = ٢س \Leftarrow$ ص = ص $\Leftarrow$ ص = ٢س

$٥ - س =$ صفر $\Leftarrow$ س = ٥

$\frac{ص}{٢} = ٢س \Leftarrow ص = ٢ \Leftarrow س = \pm ١$

$$م = \int_{١}^{٥} ٢س \, دس + \int_{١}^{٥} \frac{٨ - س}{٢} \, دس$$

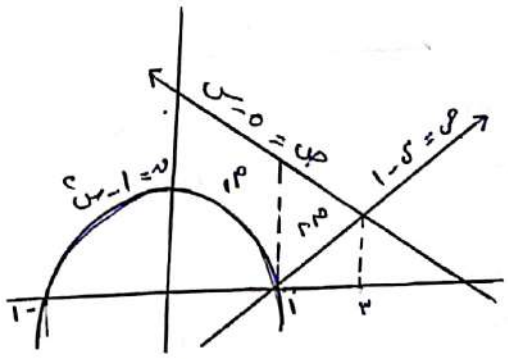
$$= [س^{٢}]_{١}^{٥} + [٤ لو_{هـ} |س|]_{١}^{٥}$$

$$= (٢٥ - ١) + ٤ (لو_{هـ} ٥ - لو_{هـ} ١)$$

$$= ٢٤ + ٤ (١ - ٠)$$

$$= ٢٤ + ٤ = ٢٨ \text{ وحدة مساحة}$$

س٨



ص = $١ - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س = \pm ١$

$١ - س^{٢} = س - ١ \Leftarrow س^{٢} + س - ٢ =$ صفر

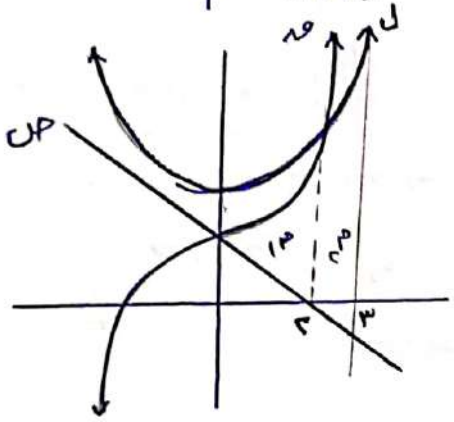
$(س + ٢)(س - ١) =$ صفر $\Leftarrow س = -٢ ، ١$

$س - ١ = ٥ - س \Leftarrow ٢س = ٦ \Leftarrow س = ٣$

$$م = \int_{-١}^{١} (٥ - س) - (١ - س^{٢}) \, دس + \int_{١}^{٣} (٥ - س) - (س - ١) \, دس$$

س٩

ص = ل	ص = ص	ل = ص
$١ + س^{٣} = س^{٢} + ٥$	$١ + س^{٣} = ١ - س$	$س^{٢} + ٥ = ١ - س$
$س^{٣} - س^{٢} - ٤ = ٠$	$س^{٣} + س^{٢} = ٠$	$س^{٢} + س + ٤ = ٠$
$س = ٢$	$س^{٢}(س + ١) = ٠$	لا تقاطع .
(٢ ، ٩)	$س = ٠$	
	(٠ ، ١)	



$$م = \int_{٠}^{٢} (س^{٣} + ١) - (١ - س) \, دس + \int_{٢}^{٣} س^{٢} + ٥ - (١ - س) \, دس$$

$$= \int_{٠}^{٢} (س^{٣} + س) \, دس + \int_{٢}^{٣} (س^{٢} + س + ٤) \, دس$$

$$= \left[\frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + ٤س\right]_{٢}^{٣}$$

$$= (٤ + ٢ - ٠) + ٩ + \frac{٩}{٢} + ١٢ - (\frac{٨}{٣} + ٢ + ٨)$$

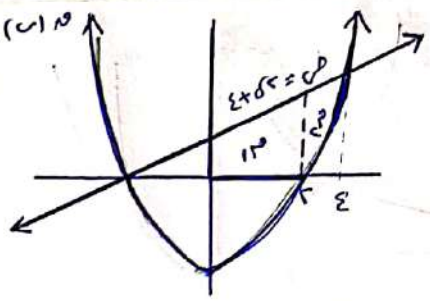
$$= ٢٧ - \frac{٨}{٣} - ١٠ + \frac{٩}{٢}$$

$$= ١٧ - \frac{٨}{٣} + \frac{٩}{٢}$$

$$= \frac{١٠٢ - ١٦ + ٢٧}{٦} = \frac{١١٣}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

Scanned with CamScanner

س١٠



$س^2 - ٤ = ٠ \leftarrow$ ص = ٢س + ٤

$س = \pm ٢$

$س^2 - ٤ = ٢س + ٤ \leftarrow ص^2 - ٢ص - ٨ =$ صفر

$(ص - ٤)(ص + ٢) = ٠ \leftarrow ص = ٤ ، -٢$

$م = \int_{-٢}^{٠} (٢س + ٤) \, دس + \int_{٠}^{٤} ((٢س + ٤) - (س^2 - ٤)) \, دس$

$= \int_{-٢}^{٠} (٢س + ٤) \, دس + \int_{٠}^{٤} (٢س - س^2 + ٨) \, دس$

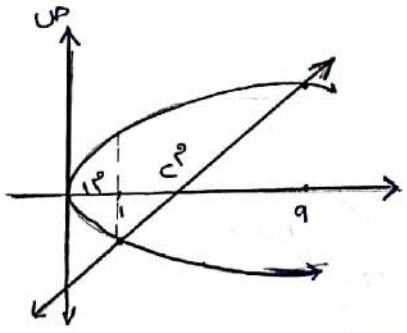
$= [س^2 + ٤س]_{-٢}^{٠} + [س^2 - \frac{س^3}{٣} + ٨س]_{٠}^{٤}$

$= ٠ - (٤ - ٨) + (١٦ - \frac{٦٤}{٣} + ٣٢) - ٠$

$= ٤ + ٨ + \frac{٨}{٣} - ٦٠$

$= ٦٠ - \frac{٦٤}{٣} = \frac{١٨٠ - ٦٤}{٣} = \frac{١١٦}{٣}$ وحدة مساحة

س١١



$ص^2 = ٤س \Rightarrow ص = \pm ٢\sqrt{س}$

$س - ص = ٣ \Rightarrow ص = س - ٣$

$\Rightarrow ٢\sqrt{س} = س - ٣$ نربع الطرفين

$(٢\sqrt{س})^2 = (س - ٣)^2$

$٤س = س^2 - ٦س + ٩$

$\Rightarrow س^2 - ١٠س + ٩ =$ صفر

$(س - ٩)(س - ١) =$ صفر $\leftarrow س = ٩ ، ١$

$\int_{١}^{٩} ٢\sqrt{س} \, دس - \int_{١}^{٩} (\frac{١}{٢}س + ٣ - ٢\sqrt{س}) \, دس$

$= \int_{١}^{٩} ٤\sqrt{س} \, دس + \int_{١}^{٩} (٤\sqrt{س} - س + ٣) \, دس$

$= [\frac{٤س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}]_{١}^{٩} + [\frac{٤س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^2}{٢} + ٣س]_{١}^{٩}$

$= [\frac{٨}{٣}\sqrt{س^3}]_{١}^{٩} + [\frac{٨}{٣}\sqrt{س^3} - \frac{س^2}{٢} + ٣س]_{١}^{٩}$

$= (\frac{٨}{٣} \times ٢٧ - \frac{٨١}{٢} + ٢٧) - (\frac{٨}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣)$

$= ٧٢ - \frac{٨١}{٢} + ٢٧ - \frac{٨}{٣} + \frac{١}{٢} - ٣$

$= ٩٦ - ٣٦ + ٢٤ - \frac{٨}{٣} = ٨٤ - \frac{٨}{٣} = \frac{٢٤٤}{٣}$ وحدة مساحة

س١٢ عندما $س < ٢ \leftarrow ٢ - س = |س - ٢|$

$س + |س| - ٢ = ٠ \leftarrow (|س| + ٢)(|س| - ١) =$ صفر

$\leftarrow |س| - ١ =$ صفر $\leftarrow س = ١$

عندما $س > ٢ \leftarrow س - ٢ = |س|$

$س - |س| - ٢ = ٠ \leftarrow (|س| - ٢)(|س| + ١) = ٠$

$\Rightarrow |س| - ٢ =$ صفر $\leftarrow |س| = ٢ \leftarrow س = ٤$

$م = \int_{١}^{٢} |س| \, دس + \int_{٢}^{٤} (٤ - س) \, دس + \int_{٢}^{٤} (|س| - (س - ٢)) \, دس$

$= [\frac{س^2}{٢}]_{١}^{٢} + [٤س - \frac{س^2}{٢}]_{٢}^{٤} + [\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^2}{٢} + ٢س]_{٢}^{٤}$

$= (٢ - \frac{١}{٢}) + (١٦ - ٨ - ٨ + ٢) + (\frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨ - \frac{٨}{٣}\sqrt{٢} + ٢)$

$= \frac{٣}{٢} + ٢ + \frac{٨}{٣} - \frac{٨}{٣}\sqrt{٢}$

$= \frac{٢٣}{٦} - \frac{٨}{٣}\sqrt{٢}$

$= \frac{٢٣ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$

Scanned with CamScanner

س١٣ المساحة تحت محور السينات = ٦

$$\Rightarrow \int_{0}^{3} م(س)\,دس = -٦$$

$$\int_{0}^{3} (-م(س))\,دس$$

$$= -\int_{0}^{3} م(س)\,دس$$

$$= -[٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٠س] + ٦$$

$$= ٦ + ٦$$

$$= ١٢$$

س١٤ م = ١٤ وحدة ربعية

$$\int_{ب}^{ج} م(س)\,دس = ٦ \Rightarrow \int_{ب}^{ج} م(س)\,دس = -٦$$

$$م = \int_{ب}^{ج} |م(س)|\,دس + \int_{ج}^{د} م(س)\,دس$$

$$١٤ = ٦ + \int_{ج}^{د} م(س)\,دس$$

$$\Rightarrow \int_{ج}^{د} م(س)\,دس = ١٤ - ٦$$

$$\int_{ج}^{د} م(س)\,دس = ٨$$

$$\therefore \int_{د}^{ج} م(س)\,دس = -٨$$

Scanned with CamScanner

١) حُلَّ كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

أ) $س^{٣}\ ص - ص\ س = ٠$

ب) $س - ٣\ ص = جتاس\ س$

جـ) $هـ^{-ص}\ جاس - \frac{ص}{س}\ جتا^{٢}س = ٠$

د) $قا^{٢}\frac{س}{٢}\ ص - جا^{٢}\frac{س}{٢}\ س = ٠$

هـ) $\frac{ص}{س} = ١ - ص + س^{٢} - ص\ س^{٢}$

و) $(س^{٢} + ٣س)\ \frac{ص}{س} = هـ^{-٢ص}(س+١)(س^{٢} - ٩)$

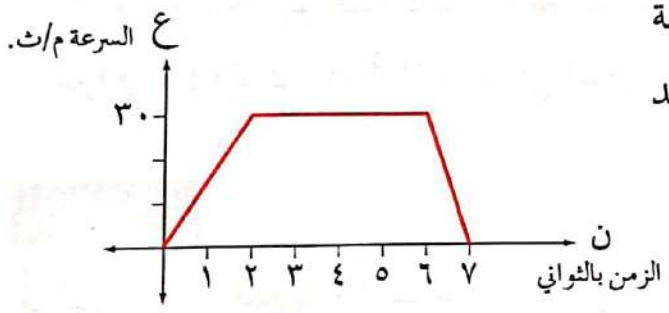
٢) آلة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار، إذا كانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{ق}{ن} = \frac{-٥٠٠}{(ن+١)^{٢}}$ حيث ق : قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها، فاحسب قيمة هذه الآلة بعد (٣) سنوات من شرائها.

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ،ص) يساوي $\frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س}+١}$

حيث هـ: العدد النيبيري .

فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأنَّ منحناها يمر بالنقطة (١، ٠)

٤) يمثل الشكل (٤-٣٣) العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم فجد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠ ، ٧]



الشكل (٤-٣٣)

Scanned with CamScanner

(المعادلات التفاضلية)

٥) ابتدأ جُسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقا للعلاقة ت = −٤ ع$^{\frac{٣}{٢}}$ ، حيث ع > ٠ ، ت: تسارع الجُسيم ، ع: سرعة الجُسيم فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤ سم/ث.
أثبت أن ف= ٢ن $\sqrt{ع}$.

٦) قذف جسم رأسيًّا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠)م/ث وبتسارع مقداره (−١٠) م/ث^{٢}، إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء حركته يساوي (٨٠)مترًا، فجد أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم.

٧) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{د ع}{د ن}$ = ٠,٠٢٥ ع ، حيث ع: عدد السكّان، ن: الزمن بالسنوات، إذا علمت أنَّ عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٥)، فجد عدد سكّانها بعد (٤٠) عامًا.

Scanned with CamScanner

أ) $س^{٣} دص - ص\,دس = صفر$

$س^{٣} دص = ص\,دس$

$\frac{دص}{ص} = \frac{دس}{س^{٣}}$

$\int \frac{دص}{ص} = \int س^{-٣}\,دس$

$لو|ص| = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ$

$لو|ص| = \frac{-١}{٢س^{٢}} + جـ$

ب) $دس - ٣دص = جتاس\,دس$

$دس - جتاس\,دس = ٣دص$

$(١ - جتاس)\,دس = ٣دص$

$\int (١ - جتاس)\,دس = \int ٣دص$

$س - جاس + جـ = ٣ص$

$ص = \frac{١}{٣}(س - جاس + جـ)$.

جـ) $هـ^{-ص} جاس - \frac{دص}{دس} جتا^{٢}س = صفر$

$هـ^{-ص} جاس = \frac{دص}{دس} جتا^{٢}س$.

$\frac{جاس}{جتا^{٢}س}\,دس = \frac{دص}{هـ^{-ص}}$.

$\int قاس\,ظاس\,دس = \int هـ^{ص}\,دص$

$هـ^{ص} = قاس + جـ$

$ص = لو_{هـ}|قاس + جـ|$

د) $قا^{٢}\frac{س}{٢}\,دص - جا^{٢}\frac{س}{٢}\,دس = صفر$.

$قا^{٢}\frac{س}{٢}\,دص = جا^{٢}\frac{س}{٢}\,دس$.

$دص = \frac{جا^{٢}\frac{س}{٢}}{قا^{٢}\frac{س}{٢}}\,دس$.

$دص = جا^{٢}\frac{س}{٢}\,جتا^{٢}\frac{س}{٢}\,دس$

$دص = (جا\frac{س}{٢}\,جتا\frac{س}{٢})^{٢}\,دس$

$دص = (\frac{١}{٢}جاس)^{٢}\,دس$

$\int دص = \int \frac{١}{٤} جا^{٢}س\,دس$

$ص = \int \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}(١ - جتا٤س)\,دس$

$ص = \frac{١}{٨}(س - \frac{١}{٤}جا٤س) + جـ$

هـ) $\frac{دص}{دس} = ١ - ص + س^{٢} - ص\,س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ١ - ص + س^{٢}(١ - ص)$

$\frac{دص}{دس} = (١ - ص)(١ + س^{٢})$

$\int \frac{دص}{١ - ص} = \int (١ + س^{٢})\,دس$

$-لو_{هـ}|١ - ص| = س + \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

Scanned with CamScanner

س١ و) $\frac{ص}{ص-٣}$ ص $= \frac{ك}{س+٣ع}$ س $= \frac{ك}{(س+١)(ع-٩)}$ ص

$\frac{ص}{ص-٣} = \frac{(س+١)(ع-٩)}{س+٣ع}$ ك ص

$\int \frac{ص}{ص-٣}$ ص $= \int \frac{(س+١)(س-٣)(س+٣)}{س(س+٣)}$ ك س

$\int \frac{ص}{ص-٣}$ ص $= \int \frac{(س+١)(س-٣)}{س}$ ك س

$\frac{١}{٢}$ هـ^{٢ص} $= \int \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س}$ ك س .

$\frac{١}{٢}$ هـ^{٢ص} $= \int (س - ٢ - \frac{٣}{س})$ ك س .

$\frac{١}{٢}$ هـ^{٢ص} $= \frac{س^٢}{٢} - ٢س - ٣$ لو$_{هـ}$ $|س| + ج$

هـ^{٢ص} $= ٢(\frac{س^٢}{٢} - ٢س - ٣$ لو$_{هـ}$ $|س| + ج)$

٢ص $=$ لو$_{هـ}$ $(٢(\frac{س^٢}{٢} - ٢س - ٣$ لو$_{هـ}$ $|س| + ج))$

ص $= \frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ $(٢(\frac{س^٢}{٢} - ٢س - ٣$ لو$_{هـ}$ $|س| + ج))$

ع $\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{-٥٠٠}{(ن+١)^٢}$

ف $= \int \frac{-٥٠٠}{(ن+١)^٢}$ ك ن

ف $= \frac{٥٠٠}{ن+١} + ج$

ف $= ٥٠٠ \times \frac{(ن+١)^{-١}}{-١} + ج$

ف $= \frac{٥٠٠}{ن+١} + ج$

ف $= ٥٠٠$ عندما ن $=$ صفر

$٥٠٠ = ٥٠٠ + ج \leftarrow ج = ٠$

ف $= \frac{٥٠٠}{ن+١}$

ف $(٣) = \frac{٥٠٠}{٤} = ١٢٥$ دينار

س٣ $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{هـ^{ص}}{هـ^{س}+١} \leftarrow \frac{ك ص}{ك س} = \frac{هـ^{-ص}}{هـ^{-س}+١} = \frac{\frac{١}{هـ^{ص}}}{\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١}}$

$\frac{ك ص}{ك س} = \frac{١}{هـ^{ص}(هـ^{س}+١)}$

هـ^{ص} ك ص $= \frac{١}{هـ^{س}+١}$ ك س

$\int$ هـ^{ص} ك ص $= \int \frac{١}{هـ^{س}+١}$ ك س

هـ^{ص} $=$ لو$_{هـ}$ $|هـ^{س}+١| + ج$

$(١، ٠) \leftarrow$ هـ^{٠} $=$ لو$_{هـ}$ $|هـ^{٠}+١| + ج$

$١ =$ لو$_{هـ}$ $|هـ+١| + ج$

$\Rightarrow ج = ١ -$ لو$_{هـ}$ $|هـ+١|$

هـ^{ص} $=$ لو$_{هـ}$ $|هـ^{س}+١| + ١ -$ لو$_{هـ}$ $|هـ+١|$

ص $=$ لو$_{هـ}$ $($ لو$_{هـ}$ $|هـ^{س}+١| + ١ -$ لو$_{هـ}$ $|هـ+١|)$

Scanned with CamScanner

$\because$ ف $= \int$ ع دن .

= المساحة تحت المنحنى .

$= \frac{1}{2}$ × مجموع القاعدتين × الارتفاع .

$= \frac{1}{2}(٧ + (-٦)) \times ٣٠$

$= \frac{1}{2} \times ١١ \times ٣٠$

$= ١٦٥$

$\because$ ت $= -٤$ ع$^{\frac{3}{2}}$

$\frac{دع}{دن} = -٤$ ع$^{\frac{3}{2}}$

$\frac{دع}{ع^{\frac{3}{2}}} = -٤$ دن .

$\int \frac{دع}{ع^{\frac{3}{2}}} = \int -٤$ دن

$\int$ ع$^{-\frac{3}{2}}$ دع $= \int -٤$ دن

-٢ ع$^{-\frac{1}{2}} = -٤$ ن $+$ جـ

$\frac{-٢}{ع^{\frac{1}{2}}} = -٤$ ن $+$ جـ

ع $= ٤$ عندما ن $=$ صفر

$\frac{-٢}{٢} = ٤ \times ٠ +$ جـ $\leftarrow$ جـ $= \frac{-٢}{٢} = -١$

$\therefore \frac{-٢}{ع^{\frac{1}{2}}} = -٤$ ن $- ١$

$\frac{٢}{ع^{\frac{1}{2}}} = ٤$ ن $+ ١ \Rightarrow ع^{\frac{1}{2}} = \frac{٢}{٤ن+١}$

ع $= \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}}$.

$\frac{دف}{دن} = \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}}$

دف $= ٤(٤ن+١)^{-٢}$ دن

$\int$ دف $= \int ٤(٤ن+١)^{-٢}$ دن .

ف $= \frac{٤(٤ن+١)^{-١}}{٤ \times -١} +$ جـ

ف $= \frac{-١}{(٤ن+١)} +$ جـ

بدأ الحركة من نقطة الأصل $\leftarrow$ ف $(٠) =$ صفر

ف $(٠) = \frac{-١}{٠+١} +$ جـ

صفر $= -١ +$ جـ $\Rightarrow$ جـ $= ١$

ف $= \frac{-١}{٤ن+١} + ١$ توحيد المقامات

ف $= \frac{-١}{٤ن+١} + \frac{٤ن+١}{٤ن+١}$

ف $= \frac{-١+٤ن+١}{٤ن+١}$

ف $= \frac{٤ن}{٤ن+١}$.

ف $= ٢$ن $\times \left(\frac{٢}{٤ن+١}\right)$

$= ٢$ن $\sqrt{ع}$.

Scanned with CamScanner

س٦ ن = $\frac{دع}{دن}$ = −١٠

دع = −١٠ دن .

∫ دع = ∫ −١٠ دن

ع = −١٠ن + جـ

ع (٠) = ٠ + جـ

٤٠ = جـ

ع = −١٠ن + ٤٠

ف = ∫ (−١٠ن + ٤٠) دن

= −٥ن^{٢} + ٤٠ن + جـ

ف (١) = −٥ + ٤٠ + جـ

٨٠ = ٣٥ + جـ ⇐ جـ = ٤٥

ف = −٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥ .

عند أقصى ارتفاع ع = صفر

−١٠ن + ٤٠ = صفر ← −١٠ن = −٤٠

⇐ ن = ٤ .

ف (٤) = −٥(٤)^{٢} + ٤٠ × ٤ + ٤٥

= −٨٠ + ١٦٠ + ٤٥

= ١٢٥ .

س٧ $\frac{دع}{دن}$ = ٠.٢٥ع .

$\frac{دع}{ع}$ = ٠.٢٥ دن

∫ $\frac{دع}{ع}$ = ∫ ٠.٢٥ دن

لو$_{هـ}$ ع = ٠.٢٥ن + جـ

ع = ٢٠٠٠٠٠ عندما ن = صفر

لو$_{هـ}$ ١٠٠٠٠٠ = صفر + جـ

⇐ جـ = لو$_{هـ}$ ٢٠٠٠٠٠ .

عندما ن = ٤٠

لو$_{هـ}$ ع = ٠.٢٥ × ٤٠ + لو$_{هـ}$ ٢٠٠٠٠٠

لو$_{هـ}$ ع = ١ + لو$_{هـ}$ ٢٠٠٠٠٠

ع = هـ$^{١ + لو_{هـ} ٢٠٠٠٠٠}$

= هـ^{١} × هـ$^{لو_{هـ} ٢٠٠٠٠٠}$

= هـ × ٢٠٠٠٠٠

= هـ × ٢ × ١٠^{٥} نسمة

Scanned with CamScanner

منهاجي
منصة التعليم الهادف

١) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٢}^{٣} \sqrt[٣]{٤س + ١}$ ؤس

ب) $\int \frac{س\ قا^{٢} س - س\ ظا^{٢} س}{\sqrt[٣]{س}}$ ؤس

جـ) $\int \frac{\sqrt{س^{٢} - س^{٤}}}{س^{٥}}$ ؤس

د) $\int$ ظتاس لـو$_{هـ}$ جاس ؤس

هـ) $\int (س^{٨} - ٤س)^{٦}$ ؤس

و) $\int$ قا^{٤}س لـو$_{هـ}$ ظاس ؤس

ز) $\int \sqrt[٣]{٢س^{٥} - س^{٢}}$ ؤس

ح) $\int_{١}^{} \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ١}$ ؤس

ط) $\int$ جا(لـو$_{هـ}$ س) ؤس

ي) $\int \frac{س^{٣}}{٢س^{٤} + س^{٨}}$ ؤس

ك) $\int \frac{\sqrt{٤س + ١٢} - ٣}{\sqrt{س + ٣} + ٣}$ ؤس

ل) $\int$ لـو$_{هـ}$(س^{٢} + ٢س) ؤس

٢) حُلَّ المعادلة التفاضلية ٣ظاص $- \frac{ؤص}{ؤس}$ قاس = ٠

٣) إذا كان ص^{٢} = لـو$_{هـ}$ س ص $-$ هـ$^{س^{٢}}$ ، فجد $\frac{ؤص}{ؤس}$

٤) إذا كان م(س) = س^{٣} + ب س^{٢} $-$ ١ معكوسًا لمشتقة الاقتران ق(س) ، ق(٢) = ٢٤ ، فجد قيمة الثابت ب.

٥) إذا كان م(س) ،هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) ،

وكان $\int_{-١}^{٣}$ (م(س) $-$ هـ(س)) ؤس = ١٢ ، فجد $\int_{}^{٤}$ ٢س م(س) ؤس + $\int_{}^{}$ ٢س هـ(س)ؤس

٦) إذا كان $\int_{٣}^{١}$ (٢ق(س) + $\int_{}^{٢}$ ٢م ؤم) ؤس = ١٤ ، فجد $\int_{١}^{٣}$ ٣ق(س) ؤس

٧) إذا كان ق(س) = س^{٢} $-$ $\int$ (٣س^{٢} $-$ $\int_{}^{١}$ ٢ص ؤص) ؤس، فجد قَ(س)

Scanned with CamScanner

(أسئلة الوحدة)

٨) إذا كان $\int_{-١}^{١} (٤ق(س) + ٣)\,ﻫس = ١٨$ ، $\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\,ﻫس = ٢٠$ ، فجد

$\int_{٤}^{-١} (٢س - ق(س))\,ﻫس$

٩) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = أ $\sqrt[٣]{ع}$ ، ع > ٠ ، حيث ت :تسارع الجسيم ، ع:سرعة الجسيم. إذا تحرك الجسيم من السكون، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته ٨سم/ث بعد (٣) ثوانٍ من بدء حركته.

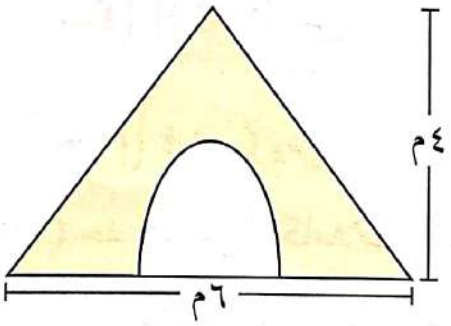
١٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ ص}}{١ - جتا^{٢}س}$ فجد قاعدة العلاقة ص علمًا بأنَّ منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤}، ٠)$

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة في الربع الأول و المحدودة بمنحنى الاقتران ق (س)= ٤ – $س^{٢}$ ، ومحور الصادات و المستقيمين ص= س – ٢ ، ص = ٦ – س

١٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

ق(س) = $\frac{٣}{س}$ ، هـ (س) = س – ٢ ، ل (س) = ٣

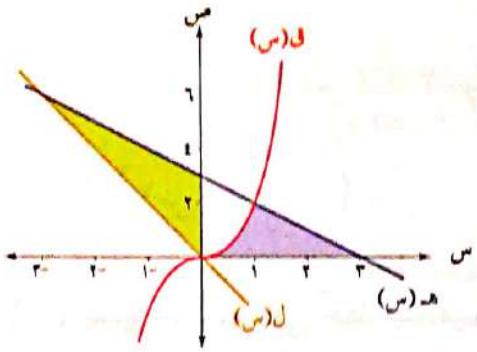
١٣) الشكل(٤–٣٤) يمثل الواجهة الأمامية لأحد المباني، مدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ – $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$. ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة؟ إذا علمت أنَّ سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار.



الشكل (٤–٣٤)

Scanned with CamScanner

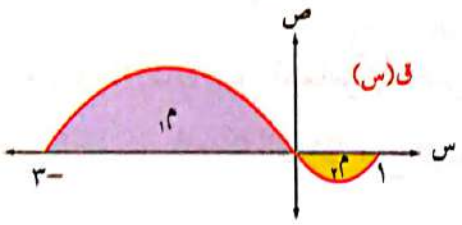
١٤) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبيّنتين في الشكل (٤ – ٣٥) حيث ق(س) = ٢س^{٣} ،
هـ(س) = ٣ – س ،ل (س) = – ٢س



الشكل (٤–٣٥)

١٥) اعتمادًا على الشكل (٤–٣٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [–٣ ، ١] حيث م$_{١}$ =(١٠) وحدات مربعة، م$_{٢}$ = (٤) وحدات مربعة، فجد

$\int_{-٣}^{٢}$ س ق(١–س^{٢}) ءس



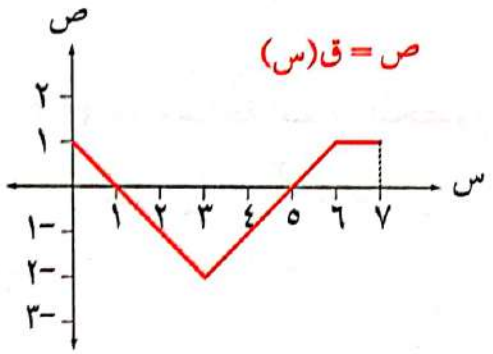
الشكل (٤–٣٦)

١٦) اعتمد على الشكل (٤ –٣٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في إيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $\int_{-٣}^{٧}$ ق(س) ءس

ب) $\int_{-٣}^{٧}$ |ق(س)| ءس

جـ) |$\int_{-٣}^{٧}$ ق(س) ءس|



الشكل (٤–٣٧)

١٧) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int$ جا$\sqrt{س}$ جتا$^{٣}\sqrt{س}$ ءس

ب) $\int$ س $\sqrt[٣]{س^{٢}+١}$ ءس

جـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$ $\frac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\text{ظاس} + ٢}$ ءس

د) $\int$ $\frac{\text{ظتاس قتاس}}{٩ - ٤\text{قتا}^{٢}\text{س}}$ ءس

هـ) $\int_{-٢}^{٢}$ س^{٤} هـ$^{س^{٣}+لوس}$ ءس

و) $\int$ جا٣س قتاس ءس

Scanned with CamScanner

ز) $\int \frac{٢ \text{ جا}^{٣}س \text{ جتاس}}{\text{جتا}^{٢}س} \, ﻫس$

ح) $\int \frac{س + \text{جاس}}{١ + \text{جتاس}} \, ﻫس$

ط) $\int \frac{٤ \text{ لو}_{هـ} س}{(س - ١)} \, ﻫس$

ي) $\int (\text{ظاس} + \text{قاس})^{١٠} \text{ قاس} \, ﻫس$

١٨) يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة (٤) بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان ق اقترانًا متصلاً على مجاله ، وكان $\int$ ق(س)ﻫس= هـ$^{\text{جا}٢س}$ – لو$_{هـ}$ جتاس– ١، فإن ق(٠) تساوي:

أ) ١ ب) هـ جـ) ٢هـ د) ٢

(٢) إذا كان $\int$ق(س) ﻫس = س^{٥} + جاس + ٣ ، فإنَّ ق(س) يساوي:

أ) ٥س^{٤} + جتاس ب) $\frac{١}{٦}$س^{٦} – جتاس + ٣س +جـ

جـ) ٥س^{٤}– جتاس جـ) $\frac{١}{٦}$س^{٦} – جتاس

(٣) إذا كان ق اقترانًا معرفًا على الفترة[–١ ، ٢] وكان ١ ≥ ق(س) ≥ ٤ فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٢}$ ٢ق(س) ﻫس؟

أ) ٦ ب) ٢٤ جـ) ٣ د) ١٢

(٤) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ ٢ق(س) ﻫس = ١٠ ، $\int_{-٢}^{١}$ ق(س) ﻫس = ٤ ، فإنَّ $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س)+ ٣) ﻫس يساوي:

أ) ٥ ب) ١٤ جـ) ٨ د) ٢٤

(٥) $\int_{أ}^{ب}$ قَ (هـ (س)) × هـَ (س) ﻫس يساوي:

أ) ق(ب) – ق(أ) جـ) ق(هـ (ب)) – ق(هـ (أ))

ب) قَ (ب) – قَ (أ) د) قَ (هـ (ب)) – قَ (هـ (أ))

Scanned with CamScanner

(أسئلة الوحدة)

(٦) إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق وكان

$\int_{-١}^{٢}$ (م(س) − هـ(س)) ؤس = ١٢ ، فما قيمة $\int_{-٢}^{٢}$ س(م(س) − هـ(س)) ؤس؟

أ) ٣ ب) ٤,٥ جـ) ١٢ د) ١٨

(٧) إذا كان $\int_{١}^{هـ}$ س ق(س) ؤس = ٤ ، فما قيمة $\int_{ب}^{٢}$ هـ^{س} ق($\sqrt{هـ^{س}}$) ؤس؟

أ) ١ ب) ٨ جـ) ٢ د) ٤

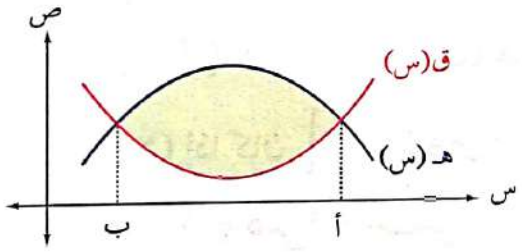
(٨) إذا كان ق(س) = هـ^{٢} + لـــو$_{هـ}$ جاس فإنَّ قَ (س) تساوي:

أ) ظتاس ب) − ظتاس جـ) ٢هـ + ظتاس د) هـ^{٢} + ظتاس

(٩) معتمدًا الشكل (٤−٣٨)، إذا علمت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق ، هـ تساوي(٦) وحدات مربعة وكان

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ؤس = ١٠ ، فإنَّ قيمة $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) ؤس =

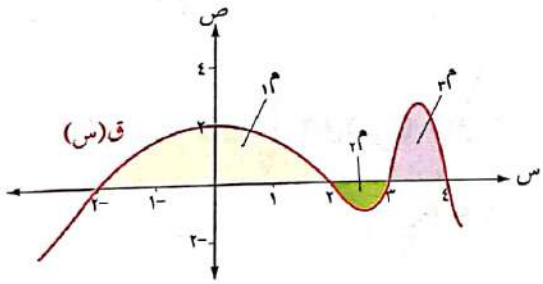
أ) ١٠ ب) ٦ جـ) ١ د) − ٤



الشكل (٤−٣٨)

* (١٠) معتمدًا الشكل (٤−٣٩) الذي يبين المساحة بين منحنى ق(س) ومحور السينات، إذا علمت أن م$_{١}$ = ٤,٨ وحدة مربعة، م$_{٢}$ = ٠,٨ وحدة مربعة، م$_{٣}$ = ٢ وحدة مربعة، فإنَّ $\int_{-٢}^{٤}$ ق(س) ؤس تساوي:

أ) ٥,٦ ب) ٦ جـ) ٦,٨ د) ٧,٦



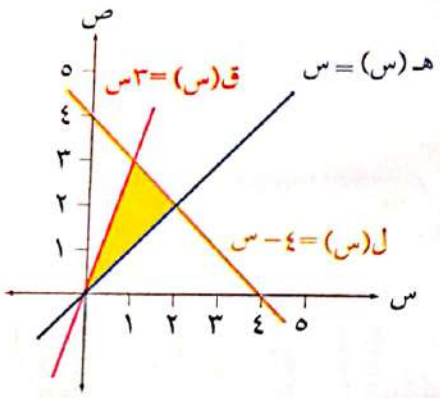
الشكل (٤−٣٩)

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

Scanned with CamScanner

(أسئلة الوحدة)

(١١) معتمدًا الشكل (٤ – ٤٠) ما مساحة المنطقة المظللة؟



الشكل (٤–٤٠)

أ) $\int_{0}^{1} (٣س - س)\, دس$

ب) $\int_{0}^{1} ٢س\, دس + \int_{1}^{٢} (٤ - ٢س)\, دس$

جـ) $\int_{0}^{1} ٢س\, دس + \int_{1}^{٢} (٤ - س)\, دس$

د) $\int_{1}^{٢} (٣س - س)\, دس$

Scanned with CamScanner

س ٣) ب) $\int_{2}^{3} \sqrt{٤س+١}\, دس$ =

$\int_{2}^{3} (٤س+١)^{\frac{1}{2}} دس = \left[\frac{(٤س+١)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times ٤}\right]_{2}^{3}$

$= \frac{1}{٦} \left[\sqrt{(٤س+١)^{3}}\right]_{2}^{3}$

$= \frac{1}{٦} (\sqrt{١٣^{3}} - \sqrt{٩^{3}})$

$= \frac{1}{٦} (\sqrt{١٣^{3}} - ٢٧)$.

ب) $\int \frac{س \, قتا^{٢}س - س \, ظا^{٢}س}{\sqrt{س^{3}}} دس$ =

$\int \frac{س (قتا^{٢}س - ظا^{٢}س)}{\sqrt{س^{3}}} دس$ =

$\int \frac{س \times ١}{س^{\frac{3}{2}}} دس = \int س^{-\frac{1}{2}} دس$

$\int س^{-\frac{1}{2}} دس = \frac{٣}{٥} س^{\frac{5}{2}} + ﺟ$

$= \frac{٣}{٥} \sqrt{س^{٥}} + ﺟ$

جـ) $\int \frac{\sqrt{س^{٦} - س^{٤}}}{س^{٥}} دس$ =

$\int \frac{\sqrt{س^{٤} (س^{-١} - ١)}}{س^{٥}} دس$ =

$\int \frac{س^{٢} \sqrt{س^{-١} - ١}}{س^{٥}} دس$ =

$\int \frac{1}{س^{٣}} (س^{-١} - ١)^{\frac{1}{2}} دس$.

$ص = س^{-١} - ١ \leftarrow \frac{دص}{دس} = -١ \times س^{-٢} \leftarrow \frac{دص}{-س^{٢}} = دس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}} \leftarrow دس = -س^{٢} \, دص$

$\int -\frac{1}{س^{٣}} \times ص^{\frac{1}{2}} \times -س^{٢} \, دص =$

$-\frac{1}{٢} ص^{\frac{3}{2}} + ﺟ = -\frac{1}{٣} ص^{\frac{3}{2}} + ﺟ$

$= -\frac{1}{٣} (س^{-١} - ١)^{\frac{3}{2}} + ﺟ$

د) $\int$ ظتاس $لو_{هـ}$ جاس دس

$ص = لو_{هـ} جاس \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{جتاس}{جاس} \leftarrow$

$دس = \frac{جاس}{جتاس} دص$

$\int \frac{جتاس}{جاس} \times ص \times \frac{جاس}{جتاس} دص =$

$\int ص \, دص = \frac{ص^{٢}}{٢} + ﺟ$

$= \frac{1}{٢} (لو_{هـ} جاس)^{٢} + ﺟ$

Scanned with CamScanner

س١ هـ) $\int (س^{٨} - ٤س)^{٦}\, دس$ =

$= \int (س(س^{٧} - ٤))^{٦}\, دس$ =

$\int س^{٦} (س^{٧} - ٤)^{٦}\, دس$.

$ص = س^{٧} - ٤ \leftarrow \frac{دص}{دس} = ٧س^{٦} \leftarrow ٧س^{٦} = دص$

$\int س^{٦} ص^{٦} \frac{دص}{٧س^{٦}}$ =

$\frac{١}{٧} \int ص^{٦}\, دص = \frac{ص^{٧}}{٤٩} + ج$

$\frac{١}{٤٩} (س^{٧} - ٤)^{٧} + ج$

و) $\int$ قاس لو ظاس دس .
هـ

$ص = ظاس \leftarrow دس = \frac{دص}{قاس^{٢}}$

$\int قاس لو_{هـ} ص \frac{دص}{قاس^{٢}}$ =

$\int قاس لو_{هـ} ص\, دص$ =

$\int (١ + ظاس) لو_{هـ} ص\, دص$ =

$\int (١ + ص^{٢}) لو_{هـ} ص\, دص$

$ف = لو_{هـ} ص \leftarrow دف = \frac{١}{ص} دص$

$دهـ = (١ + ص^{٢}) دص \leftarrow هـ = ص + \frac{ص^{٣}}{٣}$

$\int (١ + ص^{٢}) لو_{هـ} ص\, دص$

$لو_{هـ} ص \times (ص + \frac{ص^{٣}}{٣}) - \int (ص + \frac{ص^{٣}}{٣}) \times \frac{١}{ص} دص$

$(ص + \frac{ص^{٣}}{٣}) لو_{هـ} ص - \int (١ + \frac{ص^{٢}}{٣}) دص$

$(ص + \frac{ص^{٣}}{٣}) لو_{هـ} ص - (ص + \frac{ص^{٣}}{٩}) + ج$

$(ظاس + \frac{ظا^{٣}س}{٣}) لو_{هـ} ظاس - ظاس - \frac{ظا^{٣}س}{٣} + ج$

ز) $\int \sqrt[٣]{٤ص^{٥} - س^{٣}}\, دس = \int \sqrt[٣]{س^{٣}(٤ص^{٢} - ١)}\, دص$

$= \int س (٤ص^{٢} - ١)^{\frac{١}{٣}} دص$

$= \int ص^{\frac{١}{٣}} \frac{دص}{٤س}$.

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(٤ص^{٢} - ١)^{٤}} + ج$

$ص = ٤ص^{٢} - ١$
$\frac{دص}{دس} = ٤س$
$\frac{٤ص}{دص} = دس$

ح) $\int_{٠}^{١} \frac{هـ_{ص}}{هـ_{ص}^{٢} + ٢هـ_{ص} + ١} دص = \int_{٠}^{١} \frac{هـ_{ص}}{(هـ_{ص} + ١)^{٢}} دص$

$ص = هـ_{س} + ١ \leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ_{س} \leftarrow \frac{دص}{هـ_{س}} = دس$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٢$ / $س = ١ \leftarrow ص = هـ + ١$

$\int_{٢}^{هـ+١} \frac{ص}{هـ_{س}} \times \frac{دص}{هـ_{س}} = \int_{٢}^{هـ+١} ص^{-٢}\, دص = \left[\frac{ص^{-١}}{-١} \right]_{٢}^{هـ+١}$

$= \left[\frac{-١}{ص} \right]_{٢}^{هـ+١} = \frac{-١}{هـ+١} - \frac{-١}{٢}$

$= \frac{-١}{هـ+١} + \frac{١}{٢}$.

Scanned with CamScanner

أ) $\int$ جا$_{هـ}$(لو$_{هـ}$ س) دس .

ولـ = جا$_{هـ}$ س ← دولـ = جتا$_{هـ}$ س × $\frac{1}{س}$ دس

دهـ = دس ← هـ = س

= س جا$_{هـ}$ س − $\int$ س × جتا$_{هـ}$ س × $\frac{1}{س}$ دس

= س جا$_{هـ}$ س − $\int$ جتا$_{هـ}$ س دس .

↑ اجزاء

ولـ = جتا$_{هـ}$ س ← دولـ = −جا$_{هـ}$ س × $\frac{1}{س}$ دس

دهـ = دس ← هـ = س

= س جا$_{هـ}$ س − (س جتا$_{هـ}$ س − $\int$ س × −جا$_{هـ}$ س × $\frac{1}{س}$ دس)

= س جا$_{هـ}$ س − س جتا$_{هـ}$ س − $\int$ جا$_{هـ}$ س دس .

↳ الى الطرف الأيمن

٢ $\int$ جا$_{هـ}$ س دس = س جا$_{هـ}$ س − س جتا$_{هـ}$ س .

$\int$ جا$_{هـ}$ س دس = $\frac{1}{٢}$ (س جا$_{هـ}$ س − س جتا$_{هـ}$ س)

ب) $\int \frac{س^{٣}}{(س^{٤}+٣)^{٢}}$ دس = $\int \frac{س^{٢}}{ع^{٢}(ع+٣)}$ دس

ص = س^{٤} ← $\frac{دص}{دس}$ = ٤س^{٣} ← $\frac{دص}{٤س^{٣}}$ = دس

$\int \frac{س^{٣}}{ص(ص+٣)} \times \frac{دص}{٤س^{٣}} = \frac{١}{٤}\int \frac{١}{ص(ص+٣)}$ دص

$\frac{١}{ص(ص+٣)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+٣}$

$١ = أ(ص+٣) + ب ص$

ص = ٠ ← ١ = ٣أ ← أ = $\frac{١}{٣}$.

ص = −٣ ← ١ = −٣ب ← ب = $-\frac{١}{٣}$.

$\frac{١}{٤}\int \frac{١}{ص(ص+٣)}$ دص = $\frac{١}{٤}\int (\frac{\frac{١}{٣}}{ص} + \frac{-\frac{١}{٣}}{ص+٣})$ دص

$= \frac{١}{٤}(\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ \|ص\| − $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ \|ص+٣\|) + ﺟ

$= \frac{١}{٤}(\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ \|س^{٤}\| − $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ \|س^{٤}+٣\|) + ﺟ

ج) $\int \frac{\sqrt{٤ع+١٢} - ٣}{\sqrt{س+٢} + ٣}$ دس = $\int \frac{\sqrt{٤(س+٣)} - ٣}{\sqrt{س+٣} + ٣}$ دس

ص = $\sqrt{س+٣}$

ص^{٢} = س+٣

٢ص دص = دس

$= \int \frac{٢\sqrt{ع+٣} - ٣}{\sqrt{ع+٣} + ٣}$ ٢ص دص

$= \int \frac{٢ص - ٣}{ص+٣} \times ٢ص$ دص

$= \int \frac{٢ص^{٢} - ٦ص}{ص+٣}$ دص

$= \int (٢ص - ١٨ + \frac{٥٤}{ص+٣})$ دص

٢ص^{٢} − ٦ص	ص+٣
٢ص^{٢} + ٦ص	٢ص − ١٨
− ١٨ص	
− ١٨ص − ٥٤	
٥٤	

$= \frac{٢ص^{٢}}{٢} - ١٨ص + ٥٤$ لو$_{هـ}$ \|ص+٣\| + ﺟ

$= ٢ص^{٢} - ١٨ص + ٥٤$ لو$_{هـ}$ \|ص+٣\| + ﺟ

$= ٢(ع+٣) - ١٨\sqrt{ع+٣} + ٥٤$ لو$_{هـ}$ \|$\sqrt{ع+٣}$+٣\| + ﺟ

منهاجي

Scanned with CamScanner

س ١) $\int_{هـ}^{} \text{لو}(س^2 + 2س)\, دس$

$ع = \text{لو}_{هـ}(س^2 + 2س) \leftarrow دع = \frac{2س + 2}{س^2 + 2س}\, دس$

$دع = دس \Leftarrow هـ = س$

$= س\,\text{لو}_{هـ}(س^2 + 2س) - \int س \times \frac{2س + 2}{س^2 + 2س}\, دس$

$= س\,\text{لو}_{هـ}(س^2 + 2س) - \int \frac{2(س + 1)}{س(س + 2)}\, دس$

$= س\,\text{لو}_{هـ}(س^2 + 2س) - \int \left(2 - \frac{2}{س + 2}\right) دس$

$= س\,\text{لو}_{هـ}(س^2 + 2س) - 2س + 2\,\text{لو}_{هـ}|س + 2| + ج$

$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2س + 2 & س + 2 \\ & -2س - 4 \\ \hline & -2 \end{array}$

س ٣) $ص = \int_{هـ}^{س} \text{لو}_{هـ} ص - هـ^{س}$

$ص = \text{لو}_{هـ} س + \text{لو}_{هـ} ص - هـ^{س}$

$2ص ص' = \frac{1}{س} + \frac{1}{ص} ص' - 2س\, هـ^{س}$

$2ص ص' - \frac{1}{ص} ص' = \frac{1}{س} - 2س\, هـ^{س}$

$ص'\left(2ص - \frac{1}{ص}\right) = \frac{1}{س} - 2س\, هـ^{س}$

$ص' = \frac{\frac{1}{س} - 2س\, هـ^{س}}{2ص - \frac{1}{ص}}$

س ٤) $م(س) = س^3 + ب س^2 - 1$ فعلوماً المشتقة $م'(س)$

$\Leftarrow م'(س) = م(س) = 3س^2 + 2ب س$

$م(2) = 3 \times 4 + 2ب \times 2$

$24 = 12 + 4ب \Leftarrow 4ب = 12 \Leftarrow ب = 3$

س ٥) $م(س)، هـ(س)$ فعلومين لمشتقة $م(س)$

$م(س) - هـ(س) = \text{ثابت} = ج$

$\int_{-1}^{3} ج\, دس = 12 \Leftarrow ج(3 - -1) = 12 \Leftarrow ج = 3$

$\int_{0}^{4} 2س\, م(س)\, دس + \int_{0}^{4} 2س\, هـ(س)\, دس$

$= \int_{0}^{4} 2س\, م(س)\, دس - \int_{0}^{4} 2س\, هـ(س)\, دس$

$= \int_{0}^{4} 2س\,(م(س) - هـ(س))\, دس$

$= \int_{0}^{4} 2س \times 3\, دس = \int_{0}^{4} 6س\, دس$

$= 3س^2 \Big]_{0}^{4}$

$= 48 - 0$

$= 48$

س ٢) $\int_{هـ}^{} 3ظاص - \frac{دص}{دس} قاس = صفر$

$3ظاص = \frac{دص}{دس} قاس$

$\frac{دص}{3ظاص} = \frac{دس}{قاس}$

$\frac{1}{3} \frac{جتاص}{جاص} دص = جتاس\, دس$

$\int \frac{1}{3} \frac{جتاص}{جاص} دص = \int جتاس\, دس$

$\frac{1}{3}\,\text{لو}_{هـ}|جاص| = جاص + ج$

Scanned with CamScanner

٦) $\int_{-3}^{1} (2m(s) + \int_{-3}^{2} 3m(s)\,ds)\,ds = 14$

$\int_{-3}^{1} (2m(s) + [3m(s)]_{-3}^{2})\,ds = 14$

$\int_{-3}^{1} (2m(s) + 3 - 0)\,ds = 14$

$\int_{-3}^{1} (2m(s) + 3)\,ds = 14$

$\int_{-3}^{1} 2m(s)\,ds + 3(1-(-3)) = 14$

$2\int_{-2}^{1} m(s)\,ds - 8 = 14$

$2\int_{-2}^{1} m(s)\,ds = 22 \Rightarrow \int_{-2}^{1} m(s)\,ds = 11$

$\int_{1}^{3} 3m(s)\,ds = 3\int_{1}^{3} m(s)\,ds$

$= 3 \times -11$

$= -33$

٧) $m(s) = s^2 - \int (3s^2 - 2s)\,ds$

$m(s) = s^2 - \int (3s^2 - [s^2]_{-1}^{1})\,ds$

$= s^2 - \int (3s^2 - 1)\,ds$

$m(s) = s^2 - s^3 + s + c$

$m'(s) = 3s^2 - 3s + 1$

٨) $\int_{-1}^{3} (4m(s) + 3)\,ds = 18$

$4\int_{-1}^{3} m(s)\,ds + \int_{-1}^{3} 3\,ds = 18$

$4\int_{-1}^{3} m(s)\,ds + 3(3-(-1)) = 18$

$4\int_{-1}^{3} m(s)\,ds + 12 = 18$

$4\int_{-1}^{3} m(s)\,ds = 6 \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{3} m(s)\,ds = \frac{3}{2}}$

$2\int_{1}^{4} m(s)\,ds = 20 \Rightarrow \int_{1}^{4} m(s)\,ds = 10$

$\Rightarrow \boxed{\int_{1}^{4} m(s)\,ds = 10}$

$\int_{-1}^{4} m(s)\,ds = \int_{3}^{4} m(s)\,ds + \int_{-1}^{1} m(s)\,ds$

$= -10 - 3 = -13$

$\int_{-1}^{4} (3s - m(s))\,ds =$

$\int_{-1}^{4} 3s\,ds - \int_{-1}^{4} m(s)\,ds =$

$[s^3]_{-1}^{4} - -13 =$

$(-1)^3 - 4^3 + 13 =$

$1 - 16 + 13 =$

$14 - 16 = -2$

منهاجي
متعة التعليم الهادف
Scanned with CamScanner

س٩ $ت = ك ع^{\frac{3}{2}}$.

$\frac{دع}{دن} = ك ع^{\frac{1}{2}}$.

$\frac{دع}{ع^{\frac{1}{2}}} = ك \, دن$

$\int ع^{-\frac{1}{2}} \, دع = \int ك \, دن$

$\frac{3}{2} ع^{\frac{1}{2}} = كن + جـ$

تحرك الجسم من السكون $\Rightarrow ع(٠) = ٠$

$٠ = ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٠$

$ع^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} كن$ ، $ع(٣) = ٨$

$٨^{\frac{3}{2}} = ك(٣)$

$\frac{3}{2} \times ٤ = ٣ك \Leftarrow ٦ = ٣ك \Leftarrow ك = ٢$

س١٠ $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{ص}}{١ - ظاس}$.

$\frac{هـ^{ص}}{دص} = \frac{دس}{جاس}$.

$\int هـ^{-ص} \, دص = \int قاس \, دس$.

$-هـ^{-ص} = -ظاس + جـ$

$(\frac{\pi}{4}, ٠) \rightarrow -هـ^{٠} = -ظا\frac{\pi}{4} + جـ$

$-١ = -١ + جـ \Leftarrow جـ = -١$

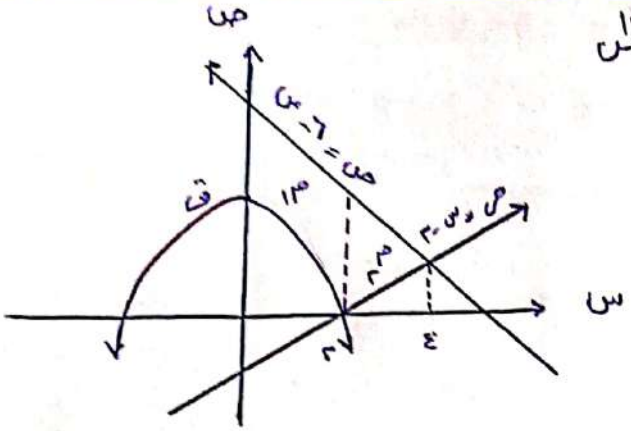
$-هـ^{-ص} = -ظاس - ١$

$هـ^{-ص} = ظاس + ١$

$-ص = لو_{هـ}(ظاس + ١)$

$ص = -لو(ظاس + ١) + جـ$

س١١



$٤ - س^{\frac{1}{2}} = س - ٢$	$س - ٢ = ٦ - س$
$س^{\frac{1}{2}} + س - ٦ = ٠$	$٢س = ٨$
$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$	$س = ٤$
$س = -٣$ ، ٤	

$م = \int_{٠}^{٢} [(٦ - س) - (٤ - س^{\frac{1}{2}})] \, دس + \int_{٢}^{٤} [(٦ - س) - (س - ٢)] \, دس$

$= \int_{٠}^{٢} (٢ - س + س^{\frac{1}{2}}) \, دس + \int_{٢}^{٤} (٨ - ٢س) \, دس$

$= [٢س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣}]_{٠}^{٢} + [٨س - س^{٢}]_{٢}^{٤}$

$= (٤ - ٢ + \frac{٨}{٣}) - صفر + (٣٢ - ١٦) - (١٦ - ٤)$

$= ٤ - ٢ + \frac{٨}{٣} + ١٦ - ١٦ + ٤$

$= ٦ + \frac{٨}{٣}$

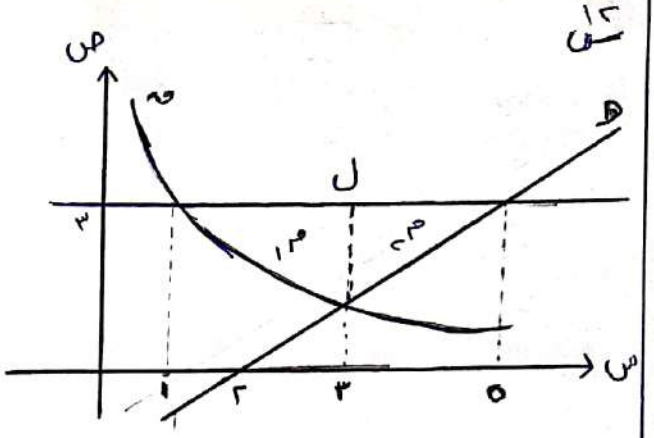
$= \frac{١٨}{٣} + \frac{٨}{٣}$

$= \frac{٢٦}{٣}$

$= ٨\frac{٢}{٣}$

Scanned with CamScanner

س١٢



ق = هـ	ق = ل	هـ = ل
$\frac{3}{5}$ س − ٢ = س − ٢	$\frac{3}{5}$ س = ٣	س − ٢ = ٣
س² − ٣س = ٠	٣س = ٣	س = ٥
(س − ٣)(س + ١) = ٠	س = ١	
س = ٣ ، −١		

$$م_1 = \int_1^2 (3 - \frac{3}{5}س)\,دس + \int_2^5 (3 - (س-2))\,دس$$

$$= \int_1^2 (3 - \frac{3}{5}س)\,دس + \int_2^5 (5 - س)\,دس$$

$$= [3س - 3\log_{هـ} |س| + 5س - \frac{1}{2}س^2]_1^2 + [\ldots]_2^5$$

$$= 9 - 3\log_{هـ} 2 - (3 - 3\log_{هـ} 1) + (25 - \frac{25}{2}) - (15 - \frac{9}{2})$$

$$= 9 - 3\log_{هـ} 2 - 3 + صفر + 25 - \frac{25}{2} - 15 + \frac{9}{2}$$

$$= 16 - 3\log_{هـ} 3 - \frac{16}{2}$$

$$= 8 - 3\log_{هـ} 2 .$$

س١٣ $2 - \frac{1}{2}س^2 = صفر \Leftarrow 2 = \frac{1}{2}س^2$

$\Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = \pm 2$.

المساحة تحت المنحنى $= \int_{-2}^{2} (4 - \frac{1}{2}س^2)\,دس$

$$= [4س - \frac{1}{6}س^3]_{-2}^{2} = (8 - \frac{8}{6}) - (-8 + \frac{8}{6})$$

$$= 16 - \frac{16}{6}$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ طول القاعدة $\times$ الارتفاع .

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

مساحة الجزء المظلل = مساحة المثلث − المساحة تحت المنحنى

$$= 12 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{36}{3} - \frac{16}{3} = \frac{20}{3} .$$

التكلفة = المساحة $\times$ سعر الوحدة المربعة

$$= \frac{20}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3} .$$

س١٤

ق = ل	ق = هـ
٣ − س = −٢س	٢س² = ٣ − س
س = −٣	٢س² + س − ٣ = ٠
	س = ١

$$م = \int_{-3}^{0} (3 - س + 2س)\,دس + \int_{0}^{1} 2س^2\,دس + \int_{1}^{3} (3 - س)\,دس$$

$$= \int_{-3}^{0} (3 + س)\,دس + \int_{0}^{1} 2س^2\,دس + \int_{1}^{3} (3 - س)\,دس$$

$$= [3س + \frac{1}{2}س^2]_{-3}^{0} + [\frac{2}{3}س^3]_{0}^{1} + [3س - \frac{1}{2}س^2]_{1}^{3}$$

$$= 0 - (-9 + \frac{9}{2}) + \frac{1}{2} - 0 + 9 - \frac{9}{2} - (3 - \frac{1}{2})$$

$$= 9 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - 3 + \frac{1}{2}$$

$$= 15 - \frac{16}{2}$$

$$= 15 - 8 = 7 .$$

Scanned with CamScanner

س١٥

$$\int_{-٣}^{١} م(س)\,د س = \int_{-٣}^{٠} م(س)\,د س + \int_{٠}^{١} م(س)\,د س$$

$$= ١٠ + ٤- = ٦$$

ج

$$\int_{١}^{٣-} س\, م(١-س^{٢})\,د س$$

ص = $١-س^{٢}$ ← $د ص = -٢س\,د س$ ← $د س = \frac{د ص}{-٢س}$

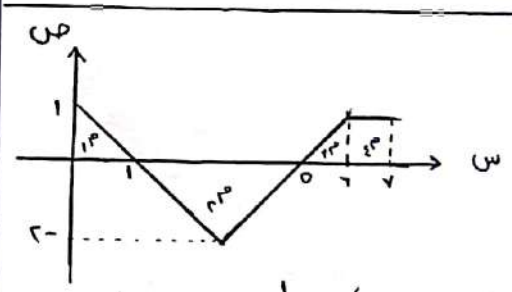
س = ١ ← ص = ٠

س = ٢ ← ص = -٣

$$\int_{١}^{٣-} س\, م(ص)\,\frac{د ص}{-٢س} = -\frac{١}{٢}\int_{٠}^{٣-} م(ص)\,د ص$$

$$= -\frac{١}{٢} \times -٦ = ٣$$

س١٦



$م_{١} = \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢} \leftarrow \int_{٠}^{١} م(س)\,د س = \frac{١}{٢}$

$م_{٢} = \frac{١}{٢}(٥-١) \times ٢ = ٤ \leftarrow \int_{١}^{٥} م(س)\,د س = ٤-$

$م_{٣} = \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢} \leftarrow \int_{٥}^{٦} م(س)\,د س = \frac{١}{٢}$

$م_{٤} = (٧-٦) \times ١ = ١ \leftarrow \int_{٦}^{٧} م(س)\,د س = ١$

أ) $\int_{٠}^{٢} م(س)\,د س = \frac{١}{٢} + ٤- + \frac{١}{٢} + ١$

$= ٢-$

ب) $\int_{٠}^{٢} |م(س)|\,د س = \frac{١}{٢} + ٤ + \frac{١}{٢} + ١$

$= ٦$

ج) $|\int_{٠}^{٢} م(س)\,د س| = |٢-|$

$= ٢$

س١٧ أ) $\int$ جا س جتا^{٣} س د س

ص = جتا س ← $د ص = -جا س\,د س$ ← $د س = \frac{د ص}{-جا س}$

$= \int جا س \times ص^{٣} \times ٢ص\,د ص$

$هـ = \int جا س\, جتا^{٣} س\,د س$ ← $د هـ = جا س\, جتا^{٣} س\,د س$ ← $هـ = \int جا س\, جتا^{٣} س\,د س$ (تعويض)

$= \int ص^{٤} \times -\frac{د ع}{جا س} = -\int ع^{٣}\,د ع$

$هـ = -\frac{ع^{٤}}{٤} = -\frac{١}{٤}$ جتا^{٤} س

$= \int جا س\, جتا^{٣} س \times ٢ص\,د ص$

$= ٢ص \times -\frac{١}{٤}$ جتا^{٤} س $- \int -\frac{١}{٤}$ جتا^{٤} س $\times ٢\,د ص$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٢}\int$ جتا^{٤} س $د ص$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٢}\int (جتا^{٢} س)^{٢}\,د ص$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٢}\int \left(\frac{١+جتا ٢ص}{٢}\right)^{٢} د ص$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٨}\int (١ + جتا ٢ص)^{٢}\,د ص$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٨}\int (١ + ٢جتا ٢ص + جتا^{٢} ٢ص)\,د ص$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٨}\left(١ + ٢جتا ٢ص + \frac{١}{٢}(١ + جتا ٤ص)\right) د ص$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٨}\left(\frac{٣}{٢} ص + جا ٢ص + \frac{١}{٨} جا ٤ص\right) + د$

$= -\frac{١}{٢}$ ص جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٨}\left(\frac{٣}{٢}$ جتا س $+$ جا س جتا^{٣} س $+ \frac{١}{٨} جا ٤$ جتا س $\right) + د$

$= -\frac{١}{٢}$ جتا^{٤} س $+ \frac{١}{٨}\left(\frac{٣}{٢}$ جتا س $+$ جا س جتا^{٣} س $+ \frac{١}{٨} جا ٤$ جتا س $\right) + د$

Scanned with CamScanner

س١٧ ب) $\int س \sqrt[3]{س^2+1}\, دس$

$= \int س (س^2+1)^{\frac{1}{3}} دس$.

$ص = س^2+1 \leftarrow \frac{دص}{دس} = 2س \leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$

$\int س \cdot ص^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{دص}{2س} = \frac{1}{2}\int ص^{\frac{1}{3}} دص$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}} + ج$

$= \frac{3}{8}(س^2+1)^{\frac{4}{3}} + ج$

ج) $\int \frac{قاس}{ظا^2 س - 2ظاس + 2}\, دس$

$ص = ظاس \leftarrow \frac{دص}{دس} = قا^2 س \leftarrow دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$س = 0 \leftarrow ص = 0$

$س = \frac{\pi}{4} \leftarrow ص = 1$.

$\int \frac{قاس}{ص^2 - 2ص + 2} \times \frac{دص}{قاس}$.

$\int \frac{قاس}{ص^2 - 2ص + 2}\, دص = \int \frac{ظاس + 1}{ص^2 - 2ص + 2}\, دص$

$\int \frac{ص + 1}{ص^2 - 2ص + 2}\, دص$

$ص^2 - 2ص + 2 \overline{)\, ص + 1}$

$-(ص^2 - 2ص + 2)$

$3ص - 1$

$= \int \left(1 + \frac{3ص - 1}{ص^2 - 2ص + 2}\right) دص$

$\frac{3ص - 1}{(ص-2)(ص-1)} = \frac{ب}{ص-1} + \frac{ب}{ص-2}$

$3ص - 1 = ب(ص-1) + ب(ص-2)$

$ص = 1 \leftarrow 2 = -ب \leftarrow ب = -2$

$ص = 2 \leftarrow 5 = ب$

$= \int \left(1 + \frac{5}{ص-2} + \frac{-2}{ص-1}\right) دص$

$= ص + 5 لو_{ه} |ص-2| - 2 لو_{ه} |ص-1|]_{\frac{1}{2}}^{1}$.

$= 1 + 5 لو_{ه} |1-2| - 2 لو_{ه} |1-1| - \left(\frac{1}{2} + 5 لو_{ه} \left|\frac{1}{2}-2\right| - 2 لو_{ه} \left|\frac{1}{2}-1\right|\right)$

$= 1 + 5 لو_{ه} 1 - 2 لو_{ه} 0 - \left(\frac{1}{2} + 5 لو_{ه} \frac{3}{2} - 2 لو_{ه} \frac{1}{2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2} + 5 لو_{ه} 2 + 2 لو_{ه} 1 - 5 لو_{ه} 3$.

$= \frac{1}{2} + 5 لو_{ه} 2 - 2 لو_{ه} 1 - 5 لو_{ه} 3$.

د) $\int \frac{ظاس قاس}{9 - 4 قا^2 س}\, دس$

$ص = قاس \leftarrow \frac{دص}{دس} = قاس ظاس \leftarrow دس = \frac{دص}{قاس ظاس}$

$\int \frac{ظاس قاس}{9 - 4ص^2} \times \frac{دص}{قاس ظاس}$

$\int \frac{1}{9 - 4ص^2}\, دص = \int \left(\frac{أ}{3 - 2ص} + \frac{ب}{3 + 2ص}\right) دص$

$أ(3+2ص) + ب(3-2ص) = 1$

$ص = -\frac{3}{2} \leftarrow 6ب = 1 \leftarrow ب = -\frac{1}{6}$.

$ص = \frac{3}{2} \leftarrow 6أ = 1 \leftarrow أ = \frac{1}{6}$.

$\int \frac{1}{9 - 4ص^2}\, دص = \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{3 - 2ص} + \frac{-\frac{1}{6}}{3 + 2ص}\right) دص$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} لو_{ه} |3 + 2ص| - \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} لو_{ه} |3 - 2ص| + ج$

$= \frac{1}{12} لو_{ه} |قا^2 س + 3| - \frac{1}{12} لو_{ه} |قا^2 س - 3| + ج$

$= \frac{1}{12} (لو_{ه} |قا^2 س + 3| - لو_{ه} |قا^2 س - 3|) + ج$

$= \frac{1}{12} لو_{ه} \left|\frac{قا^2 س + 3}{قا^2 س - 3}\right| + ج$

Scanned with CamScanner

ك) $\int_{0}^{\ln 8} \frac{س^{2} + لوس}{س هـ^{س}}$. دس .

$= \int_{0}^{\ln 8} \frac{س^{2}}{س هـ^{س}} \times \frac{لوس}{هـ^{س}}$. دس

$= \int_{0}^{\ln 8} س^{-1} \times هـ^{-س} لوس$. دس $= \int_{0}^{\ln 8} س^{-1} هـ^{-س}$ دس

ص $= س^{-1} \rightarrow \frac{دص}{دس} = -1 س^{-2} \rightarrow$ دص $= -$ دس / $\frac{دص}{س^{2}}$

س $= 0 \rightarrow$ ص $= \infty$ ، س $= \ln 8 \rightarrow$ ص $= -1$

$\int_{0}^{\ln 8} س^{-1} هـ^{-س}$ دس $= -\int_{\infty}^{-1} هـ^{ص}$ دص

$= \int_{-1}^{\infty} هـ^{ص}$ دص

دو $= ص \rightarrow$ دو $=$ دص

دهـ $= هـ^{ص}$ دص $\rightarrow$ هـ $= هـ^{ص}$

$= [ص هـ^{ص}]_{-1}^{\infty} - \int_{-1}^{\infty} هـ^{ص}$ دص

$= (\infty هـ^{\infty} - (-1) هـ^{-1}) - [هـ^{ص}]_{-1}^{\infty}$

$= (\infty هـ^{\infty} + هـ^{-1}) - (هـ^{\infty} - هـ^{-1})$

$= \infty هـ^{\infty} - هـ^{\infty} + 2 هـ^{-1}$

$= \infty (هـ^{\infty} - 1) + 2 هـ^{-1}$

ل) $\int$ جا^{3}س قتاس دس $=$

$\int \frac{جا^{3}س}{جتا س}$ دس $=$

$\int \frac{جا^{2}س \cdot جاس}{جتا س}$ دس $=$

$\int \frac{(1 - جتا^{2}س) جاس}{جتا س}$ دس $=$

$\int \frac{جاس}{جتا س} - \frac{جتا^{2}س \cdot جاس}{جتا س}$ دس $=$

$\int ظا س - جتا س$ دس $=$

$= -لو|جتا س| - جتا س + جـ$

م) $\int \frac{جا^{2}س}{جتا^{3}س}$ دس $=$

$\int \frac{جا^{2}س}{جتا^{2}س \cdot جتا س}$ دس $=$

$\int \frac{ظا^{2}س}{جتا س}$ دس $=$

$\int \frac{قا^{2}س - 1}{جتا س}$ دس $=$

$\int \frac{قا^{2}س}{جتا س} - \frac{1}{جتا س}$ دس $=$

$\int قا^{3}س - قاس$ دس $=$

$\int قا^{3}س$ دس $- \int قاس$ دس

$= \frac{1}{2} ظاس قاس + \frac{1}{2} لو|قاس + ظاس| - لو|قاس + ظاس| + جـ$

$= \frac{1}{2} ظاس قاس - \frac{1}{2} لو|قاس + ظاس| + جـ$

ن) $\int \frac{جا^{2}س جتا س}{جتا س}$ دس .

نستخدم المتطابقة جاس جتاص $= \frac{1}{2}$ (جا(س+ص) + جا(س-ص))

$= \int \frac{2 \times \frac{1}{2} (جا(3س + س) + جا(3س - س))}{جتا س}$. دس

$= \int \frac{جا 4س + جا 2س}{جتا س}$. دس

$= \int (\frac{جا 4س}{جتا س} + \frac{جا 2س}{جتا س})$. دس .

$= \int (\frac{2 جا 2س جتا 2س}{جتا س} + \frac{جا 2س}{جتا س})$ دس

$= -2 \times \frac{1}{2} جتا 2س + -\frac{1}{2} لو|جتا 2س| + جـ$

$= -جتا 2س - \frac{1}{2} لو|جتا 2س| + جـ$

Scanned with CamScanner

١٧) ج) $\int \frac{س + جاس}{1 + جتاس} \, دس =$

$\int \frac{س}{1+جتاس} \, دى + \int \frac{جاس}{1+جتاس} \, دى$

$\int \frac{س}{1+جتاس} \, دى = \int \frac{س(1-جتاس)}{(1+جتاس)(1-جتاس)} \, دس$

$\int \frac{س - س \, جتاس س}{1 - جتا^2 س} \, دس =$

$\int \frac{س - س \, جتاس}{جا^2 س} \, دى =$

$\int \left(\frac{س}{جا^2 س} - \frac{س \, جتاس}{جا^2 س} \right) دس$

$\int س \, قتا^2 س \, دى - \int س \, ظتاس \, قتاس \, دى$
(١) (٢)

(١) $\int س \, قتا^2 س \, دس$ (أجزاء)

فرض $س = و$ ومنه $دس = دو$

$دى = قتا^2 س$ ومنه $ى = -ظتاس$

$\int س \, قتا^2 س \, دى = س \times -ظتاس - \int -ظتاس \, دى$

$= -س \, ظتاس + \int \frac{جتاس}{جاس} \, دى$

$= -س \, ظتاس - لو |جاس| + ث$

(٢) $\int س \, ظتاس \, قتاس \, دس$ (أجزاء)

فرض $س = و$ ومنه $دس = دو$

$دى = ظتاس \, قتاس$ ومنه $ى = -قتاس$

$\int س \, ظتاس \, قتاس \, دى =$

$س \times -قتاس - \int -قتاس \, دس$

Scanned with CamScanner

س١٧ ج) $\int \frac{س + جاس}{1 + جتاس}$ دس =

$\int \frac{س}{1+جتاس}$ دس + $\int \frac{جاس}{1+جتاس}$ دس

① ②

① $\int \frac{س}{1+جتاس}$ دس = $\int \frac{س}{2جتا^2 \frac{س}{2}}$ دس =

$\int \frac{1}{2}$ س قا$^2 \frac{س}{2}$ دس

ف = $\frac{1}{2}$ س ⟹ دف = $\frac{1}{2}$ دس

دهـ = قا$^2 \frac{س}{2}$ دس ⟹ هـ = 2 ظا $\frac{س}{2}$.

$\int \frac{1}{2}$ س قا$^2 \frac{س}{2}$ دس =

$\frac{1}{2}$ س × 2 ظا $\frac{س}{2}$ − $\int$ 2 ظا $\frac{س}{2}$ × $\frac{1}{2}$ دس.

= س ظا $\frac{س}{2}$ − $\int \frac{جا \frac{س}{2}}{جتا \frac{س}{2}}$. دس

= س ظا $\frac{س}{2}$ + 2 لو$_هـ$ |جتا $\frac{س}{2}$|

② $\int \frac{جاس}{1+جتاس}$ دس = − لو$_هـ$ |1+جتاس|

∴ $\int \frac{س + جاس}{1+جتاس}$ دس =

س ظا $\frac{س}{2}$ + 2 لو$_هـ$ |جتا $\frac{س}{2}$| − لو$_هـ$ |1+جتاس|

+ د

ط) $\int \frac{4 لو_هـ س}{(س-1)^2}$ دس = $\int$ 4(س−1)$^{-2}$ لو$_هـ$ س دس

ف = 4 لو$_هـ$ س ⟹ دف = $\frac{4}{س}$ دس.

دهـ = (س−1)$^{-2}$ دس ⟹ هـ = $\frac{(س-1)^{-1}}{-1}$ = $\frac{-1}{س-1}$

= 4 لو$_هـ$ س × $\frac{-1}{س-1}$ − $\int \frac{-1}{س-1} \times \frac{4}{س}$ دس.

= $\frac{-4 لو_هـ س}{س-1}$ + $\int \frac{4}{(س-1)س}$ دس.

$\frac{4}{(س-1)س}$ = $\frac{ا}{س-1}$ + $\frac{ب}{س}$

ا س + ب (س−1) = 4

س = 0 ⟹ −ب = 4 ⟹ ب = −4

س = 1 ⟹ ا = 4

= $\frac{-4 لو_هـ س}{س-1}$ + $\int$ ($\frac{4}{س-1}$ − $\frac{4}{س}$) دس

= $\frac{-4 لو_هـ س}{س-1}$ + 4 لو$_هـ$ |س−1| − 4 لو$_هـ$ |س| + د

ي) $\int$ (ظاس + قاس)^{11} قاس دس.

ص = ظاس + قاس ⟹ $\frac{دص}{دس}$ = قا^{2}س + قاس ظاس

$\frac{دص}{قاس + قاس ظاس}$ = دس ⟹ $\frac{دص}{قاس(قاس + ظاس)}$ = دس.

$\int$ (ظاس + قاس)^{11} قاس دس

$\int$ ص^{11} قاس $\frac{دص}{قاس(قاس+ظاس)}$ = $\int$ ص^{11} × $\frac{دص}{ص}$

= $\int$ ص^9 دص

= $\frac{ص^{10}}{10}$ + د

= $\frac{(قاس + ظاس)^{10}}{10}$ + د

Scanned with CamScanner

س١٨ (١)

$\int_{-1}^{1} م(س)\,دس = هـ - لو_{هـ} هـ - ١$

نشتق الطرفين

$م(س) = ٢ جتا^{٢} س + \frac{جاس}{جتاس}$.

$م(٠) = ٢ \times ١^{٢} \times هـ^{٠} + \frac{٠}{١}$

$= ٢ \times ١ + ٠ = ٢$ (ج)

---

(٢) $\int م(س)\,دس = س^{٥} + جاس + ٣$

نشتق الطرفين

$م(س) = ٥س^{٤} + جتاس$. (أ)

---

(٣) $١ \le م(س) \le ٤$ ، $س \in [-١، ٢]$

$٢ \le ٢م(س) \le ٨$

$\int_{-١}^{٢} ٢\,دس \le \int_{-١}^{٢} ٢م(س)\,دس \le \int_{-١}^{٢} ٨\,دس$

$٦ \le \int_{-١}^{٢} ٢م(س)\,دس \le ٢٤$

أكبر قيمة هي ٢٤ . (ب)

---

(٤) $\int_{-٢}^{٣} ٢م(س)\,دس = ١٠ \Leftarrow \int_{-٢}^{٣} م(س)\,دس = ٥$

$\int_{١}^{٣} م(س)\,دس = \int_{١}^{-٢} م(س)\,دس + \int_{-٢}^{٣} م(س)\,دس$

$= -٤ + ٥ = ١$

$\int_{١}^{٣} (٢م(س) + ٣)\,دس = ٢\int_{١}^{٣} م(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ٣\,دس$

$= ٢ \times ١ + ٣(٣ - ١)$

$= ٢ + ٣ \times ٢$

$= ٢ + ٦$

$= ٨$ (د)

(٥) $\int_{أ}^{ب} هـ'(س) \times هـ'(م(س))\,دس =$

$م(هـ(س))]_{أ}^{ب} =$

$م(هـ(ب)) - م(هـ(أ))$. (د)

---

(٦) $م(س) - هـ(س) = ٤$

$\int_{-١}^{٢} (م(س) - هـ(س))\,دس = ١٢ \Leftarrow$

$\int_{-١}^{٢} ٤\,دس = ١٢ \leftarrow ٤ب - ٤(-١) = ١٢ \leftarrow$

$٣ب = ١٢ \leftarrow ب = ٤ \Leftarrow م(س) - هـ(س) = ٤$

$\int_{-١}^{٢} (م(س) - هـ(س))\,دس =$

$\int_{-١}^{٢} ٤\,دس \times ٤\,دس = \int_{-١}^{٢} ٨س\,دس$

$= \left[\frac{٨س^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{٢} = ٤س^{٢}]_{-١}^{٢} = ٤(٤ - ١) = ١٢$ (د)

---

(٧) $\int هـ^{س} م(\sqrt{هـ^{س}})\,دس$.

$ص = \sqrt{هـ^{س}} \leftarrow ص^{٢} = هـ^{س} \leftarrow ٢ص\,دص = هـ^{س}\,دس$.

$\leftarrow دس = \frac{٢ص\,دص}{هـ^{س}}$.

$س = ٠ \leftarrow ص = ١$ ، $س = ٢ \leftarrow ص = هـ$

$\int_{١}^{هـ} هـ^{س} م(ص) \times \frac{٢ص\,دص}{هـ^{س}} =$

$\int_{١}^{هـ} ٢ص\,م(ص)\,دص =$

$٢\int_{١}^{هـ} ص\,م(ص)\,دص =$

$٢ \times ٤ = ٨$ (ب)

Scanned with CamScanner

س١٨ (٨)

$م(س) = هـ^{س} + لو_{هـ} جاس$

$م'(س) = هـ^{س} + \frac{جتاس}{جاس}$

$م'(س) = ظتاس$ (ج)

(٩)

$م = \int_{م}^{ب} هـ(س)\,دس - \int_{م}^{ب} م(س)\,دس$

$٦ = \int_{م}^{ب} هـ(س)\,دس - ١٠$

$\Leftarrow \int_{م}^{ب} هـ(س)\,دس = ١٦$ (ج)

(١٠)

$\int_{-٤}^{٤} م(س)\,دس = \int_{-٢}^{٢} م(س)\,دس + \int_{٢}^{٣} م(س)\,دس + \int_{٣}^{٤} م(س)\,دس$

$= ٨٫٤ + -٨٫٠ + ٢$

$= ٦$ (ب)

(١١)

$م = \int_{١}^{٠} (٣س - س)\,دس + \int_{١}^{٢} (٤ - س - س)\,دس$

$= \int_{١}^{٠} ٢س\,دس + \int_{١}^{٢} (٤ - ٢س)\,دس$

(ب)

Scanned with CamScanner