الدرس الثاني : الكسور الجزئية

الدرس الثاني : تجزئة الكسور

- مقدمـــة ومراجعة
- تجزئـــة الكســـور
- تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية مختلفة
- تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية، أحدها مُكرّر
- تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غيرمُكرّر، ولا يُمكن تحليله
- تجزئة مقدار نسـبي ، درجة كثير الحدود في بسـطه مُسـاوِية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها
- اسئلة اتدرب واحل المسائل
- اسئلة مهارات التفكير العليا

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

مقدمة

- المقدار النسبي هو كسر بسطه كثير حدود ومقامه كثير حدود
- تجزئة الكسور تستخدم لتبسيط الكسور الجبرية المعقدة عن طريق تفكيكها إلى كسور أبسط
- هذه العملية ضرورية في مجالات مثل حساب التفاضل والتكامل

مراجعة **جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها**

هو عملية دمج كسرين جبريين أو أكثر في كسر نسبي واحد، عن طريق توحيد المقامات وقد يُتبع ذلك بتبسيط الناتج إن أمكن

خطوات الجمع (الطرح) :

⇐ تحليل مقامات الكسور (إن أمكن) لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات (LCM)

⇐ توحيد المقامات بضرب كل كسر بما يُكمل مقامه إلى المقام المشترك

⇐ جمع (طرح) البسوط مع الحفاظ على المقام الموحد

⇐ تبسيط الكسر الناتج (إن وُجدت عوامل مشتركة)

عند جمع مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ لهُما المقامُ نفسُهُ أوْ طرحِهما، يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ ويبقى المقامُ نفسُهُ.

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{3x}{y+2}+\frac{x}{y+2}=\frac{3x+x}{y+2}=\frac{4x}{y+2}$

2) $\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-5}=\frac{2+3}{x-5}=\frac{5}{x-5}$

3) $\frac{4}{x+7}-\frac{3}{x+7}=\frac{4-3}{x+7}=\frac{1}{x+7}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

مراجعة جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}=\frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right)+\frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$

$=\frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)}+\frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)}=\frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$

$=\frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30}=\frac{5x+8}{x^2+x-30}$

2) $\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}$

3) $\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2}$

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

مراجعة **جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها**

مثال أوجـد ناتـــج ما يلـي $\left(\frac{2}{(x-1)}-\frac{3}{(x+1)}\right)$

$$\frac{2}{(x-1)}-\frac{3}{(x+1)} = \frac{2\,(x+1)+3\,(x-1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{2x+2-3x+3}{x^2+x-x-1}$$

$$= \frac{-x+5}{x^2-1}$$

مثال أوجـد ناتـــج ما يلـي $\left(\frac{-3}{(x-2)}+\frac{5}{(x+1)}\right)$

$$\frac{-3}{(x-2)}+\frac{5}{(x+1)} = \frac{-3\,(x+1)+5\,(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{-3x-3+5x-10}{x^2+x-2x-2}$$

$$= \frac{2x-13}{x^2-x-2}$$

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

تجزئة الكسور

تجزئة الكسور هي العملية العكسية للجمع/الطرح

فكرة الكسور الجزئية هي البدء بالكسر الأخير والرجوع به إلى الكسرين الأصليين

يعتمد نجاح التجزئة بشكل كبير على القدرة على تحليل مقام الكسر الأصلي

شروط تجزئة مقدار نسبي إلى كسور جزئية هي

1) أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام
2) يجب أن يكون المقام قابلا للتحليل إلى عوامل خطية أو غير خطية، متكررة أو غير متكررة،

وهذا ما يحدد حالات التجزئة المختلفة

تعتمد عملية تجزئة المقادير الجبرية النسبية على عوامل المقام

يوجـد ثلاث حالات مختلفة من التجزئة تبعًا لنوع عوامل المقام، وهي:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية، أحدها مُكرَّر.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله (مُميِّزه سالب).

خطوات تجزئة مقدار نسبي بسطه أقل درجة من مقامه ومقامه يحلل إلى عوامل خطية غير متكررة

1) تحليل المقام قم بتحليل مقام المقدار النسبي إلى عوامله الخطية الأولية وغير المتكررة
2) تجزئة الكسر لكل عامل خطي في المقام مثل $a\,x+b$ ننشئ كسرًا جزئيًا مقامه هذا العامل وبسطه ثابت مجهول

إذا كان هناك (n) عامل خطي غير متكرر، سيكون لديك (n) كسرًا جزئيًا بهذه الصورة $\frac{A}{a\,x+b}$

3) توحيد المقامات: اضرب بسط كل كسر جزئي في جميع عوامل مقامات الكسور الجزئية الأخرى التي لا توجد في مقامه الخاص
4) مساواة البسط بالبسط الأصلي: بعد توحيد المقامات في الطرف الذي يحتوي على الكسور الجزئية، ستحصل على بسط جديد

هذا البسط الجديد يساوي بسط المقدار النسبي الأصلي

5) إيجاد قيم الثوابت: استخدم طريقة التعويض الذكي باختيار قيم لـ x تجعل بعض الأقواس في المعادلة تساوي صفرًا

أو طريقة مقارنة المعاملات لتشكيل نظام معادلات وإيجاد قيم الثوابت المجهولة (مثل (A)، (B)، (C) إلخ)

6) كتابة التجزئة النهائية بعد إيجاد قيم الثوابت، قم بتعويضها في الكسور الجزئية التي أنشأتها في الخطوة رقم 2

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية مختلفة

إذا كان $Q(x)$ كثير حدود يُمكِن تحليله تحليلًا كاملًا من دون تكرار أيِّ عامل في الصورة الآتية:

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)(a_3 x + b_3)\ldots(a_n x + b_n)$$

فإنَّه يُمكِن تجزئة المقدار الجبري النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث درجة P أقل من درجة Q، في الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \frac{A_3}{a_3 x + b_3} + \cdots + \frac{A_n}{a_n x + b_n}$$

مثال 1 أُجزِّئ $\frac{2x - 13}{x^2 - x - 2}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{2x-13}{x^2-x-2} = \frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{2x - 13 = A(x+1) + B(x-2)}$$

تعويض $x = 2$ يحذف المُتغيِّر B، ويجعل المعادلة بمُتغيِّر واحد، وهو A؛ ما يجعل إيجاد قيمته مُمكِنًا.

بتعويض $x = 2$ $\Rightarrow$ $2(2) - 13 = A(2+1) + B(2-2)$

$\Rightarrow$ $-9 = 3A$ $\Rightarrow$ $A = -3$

تعويض $x = -1$ يحذف المُتغيِّر A، ويجعل المعادلة بمُتغيِّر واحد، وهو B؛ ما يجعل إيجاد قيمته مُمكِنًا.

بتعويض $x = -1$ $\Rightarrow$ $2(-1) - 13 = A(-1+1) + B(-1-2)$

$\Rightarrow$ $-15 = -3B$ $\Rightarrow$ $B = 5$

$$\Rightarrow \frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = \frac{-3}{(x-2)} + \frac{5}{(x+1)}$$

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

أتحقق من فهمي ① a) أُجزِّئ المقدار النسبي التالي $\frac{x}{x^2-5x+6}$ الى كسور جزئية

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \quad x = A(x-3)+B(x-2)$$

بتعويض $x=2$ $\Rightarrow$ $2 = A(x-3)+B(2-2)$ $\Rightarrow 2 = A(2-3) \Rightarrow B = -2$

بتعويض $x=3$ $\Rightarrow$ $3 = A(3-3)+B(x-2)$ $\Rightarrow 3 = B(x-2) \Rightarrow B = 3$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-2)}+\frac{-2}{(x-3)}$$

أتحقق من فهمي ① b) أُجزِّئ المقدار النسبي التالي $\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$ الى كسور جزئية

$$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\frac{x^2+x-6}{(x-1)(x+4)(x+2)}$$

$$=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+4)}+\frac{C}{(x+2)}$$

$$x^2+x-6=A(x+2)(x+4)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+4)$$

$$x=1 \Rightarrow -4=15A \quad \Rightarrow A=-\frac{4}{15}$$

$$x=-4 \Rightarrow 6=10B \quad \Rightarrow B=\frac{3}{5}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4=-6C \quad \Rightarrow C=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\frac{-4}{15(x-1)}+\frac{3}{5(x+4)}+\frac{2}{3(x+2)}$$

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية، أحدها مُكرَّر

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل خطّي مُكرَّر n من المَرّات، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمَّن الحدود الآتية: $\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$

مثال 2 أُجزِّئ $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{-x^2+2x+4}{x(x^2-4x+4)}=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)(x-2)}=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$x(x-2)^2\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}=x(x-2)^2\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-x^2+2x+4=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx}$$

بتعويض $x=0$ $\Rightarrow -(0)^2+2(0)+4=A(0-2)^2+B(0)(0-2)+C(0)$

$$\Rightarrow 4=4A \Rightarrow A=1$$

بتعويض $x=2$ $\Rightarrow -(2)^2+2(2)+4=A(2-2)^2+B(2)(2-2)+C(2)$

$$\Rightarrow 4=2C \Rightarrow C=2$$

بتعويض أيّ قيمة أُخرى للمُتغيِّر x (مثل: $x=1$) في المعادلة الناتجة، إضافةً إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

بتعويض $A=1,\ C=2, x=1$ $\Rightarrow -(1)^2+2(1)+4=(1)(1-2)^2+B(1)(1-2)+(2)(1)$

$$\Rightarrow 5=3-B \Rightarrow 2=-B \Rightarrow B=-2$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية: $\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$

أتحقَّق من فهمي 2 أُجزِّئ $\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}$$

$$x^2+8x+4=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$$

$$x=2 \Rightarrow 24=4C \quad \Rightarrow C=6$$

$$x=0 \Rightarrow 4=-2B \quad \Rightarrow B=-2$$

$$x=1 \Rightarrow 13=-A+2+6 \quad \Rightarrow A=-5$$

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{-5}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{6}{(x-2)}$$

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غيرمُكرَّر، ولا يُمكن تحليله

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا جبريًّا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله وهو (ax^2+bx+c)، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمَّن الحدَّ $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

اذا كان في المقام عباره تربيعيه لا تحلل فإن البسط سيكون كثير حدود من الدرجه الاولى على صوره ثابت مضروبا في x زائد ثابت

مثال 3 أُجزِّئ $\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}$ إلى كسور جزئية.

بما أنَّ المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يُمكِن تحليله

⟸ فإن بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتًا، وبسط الآخر سيكون مقدارًا خطيًّا.

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}=\frac{A(x^2+9)}{(x+1)(x^2+9)}+\frac{(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)}$$

$$=\frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)}$$

$$x^2-3x+16=A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)$$

بتعويض $x=-1$ $\Longrightarrow (-1)^2-3(-1)+16=A((-1)^2+9)+(B(-1)+C)(-1+1)$

$\Longrightarrow 20=10A \Longrightarrow A=2$

بتعويض $x=0, A=2$ $\Longrightarrow (0)^2-3(0)+16=2((0)^2+9)+(B(0)+C)(0+1)$

$\Longrightarrow 16=18+C \Longrightarrow C=-2$

بتعويض $x=1, A=2, C=-2$ $\Longrightarrow (1)^2-3(1)+16=2((1)^2+9)+(B(1)+(-2))(1+1)$

$\Longrightarrow 14=2B+16 \Longrightarrow -2=2B \Longrightarrow B=-1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية: $\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{2}{x+1}+\frac{-x-2}{(x^2+9)}$

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

أتحقَّق من فهمي 3 أُجزِّئ $\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$21-7x = A(x^2+3) + (Bx+C)(x+5)$$

$$x=-5 \Rightarrow 56 = 28A \quad \Rightarrow A=2$$

$$x=0 \Rightarrow 21 = 6+5C \quad \Rightarrow C=3$$

$$x=1 \Rightarrow 14 = 8+(B+3)(6) \quad \Rightarrow B=-2$$

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} = \frac{2}{x+5} + \frac{-2x+3}{x^2+3}$$

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

تجزئة مقدار نسبي ، درجة كثير الحدود في بسطه مُساوِية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها

تجزئة مقادير نسبية مختلفة في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث P و Q كثيرا حدود، ولا يوجد بينهما عوامل مشتركة، وكانت درجة P مُساوِية لدرجة Q أو أكبر منها

⟸ فيجب أوَّلًا تجهيز المقدار النسبي باستعمال القسمة الطويلة، وذلك بقسمة P على Q

مثال 4 أُجزِّئ $\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}$ إلى كسور جزئية.

بما أنَّ درجة البسط مُساوِية لدرجة المقام، فإنَّني أقسِم أوَّلًا البسط على المقام، ثمَّ أُجزِّئ.

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2+6x-16 \overline{)\,2x^2+13x+6} \\ (-)\ 2x^2+12x-32 \\ \hline x+38 \end{array}$$

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \boxed{\frac{x+38}{x^2+6x-16}}$$

$$\boxed{\frac{x+38}{x^2+6x-16}} = \frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)}{(x+8)(x-2)} + \frac{B(x+8)}{(x+8)(x-2)}$$

$$= \frac{A(x+8) + B(x-2)}{(x+8)(x-2)} \Rightarrow x+38 = A(x-2) + B(x+8)$$

بتعويض $x=-8$ $\Rightarrow -8+38 = A(-8-2) + B(-8+8)$

$$\Rightarrow 30 = -10A \Rightarrow A = -3$$

بتعويض $x=2$ $\Rightarrow 2+38 = A(2-2) + B(2+8)$

$$\Rightarrow 40 = 10B \Rightarrow B = 4$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية: $\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{-3}{x+8} + \frac{4}{x-2}$

أتحقّق من فهمي 4 أُجزِّئ $\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x} = 3+\frac{9x+4}{x^2+x} = 3+\frac{9x+4}{x(x+1)}$$

$$\frac{9x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}$$

$$9x+4 = A(x+1)+Bx$$

$$x=0 \Longrightarrow 4=A \qquad \Longrightarrow A=4$$

$$x=-1 \Longrightarrow -5=-B \quad \Longrightarrow B=5$$

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x} = 3+\frac{4}{x}+\frac{5}{(x+1)}$$

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

ملاحظـــــات

- اذا كـان المقام يحلل إلى عوامل خطية مختلفة ⟸ تجزئة مباشرة بثوابت في البسط
- اذا كـان المقام يحلل إلى عوامل خطية متكررة ⟸ تجزئة مع رفع درجة العامل المتكرر في المقام
- اذا كـان المقام يحتوي على عبارة تربيعية لا تحلل ⟸ تجزئة مع بسط خطي ($ax+b$)
- اذا كـان درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام ⟸ قسمة مطولة أولا
  ⟸ ثم تجزئة لباقي القسمة على المقسوم عليه

- عدد الكسور الجزئية الناتجة عن تجزئة كسر يعتمد على تحليل المقام إلى عوامله الأولية حيث ان كل عامل في المقام يقابله كسر جزئي أو أكثر.
  - إذا كان المقام يحتوي على عوامل خطية مختلفة ، فإن عدد الكسور الجزئية يساوي عدد هذه العوامل
  - إذا كان هناك عوامل خطية متكررة، فلكل عامل مكرر يتم إنشاء كسور جزئية بعدد مرات التكرار مع رفع قوة العامل في المقام في كل مرة
  - إذا كان المقام يحتوي على عوامل تربيعية لا تحلل، فلكل عامل تربيعي يقابله كسر جزئي واحد

أتدرّب وأحلّ المسائل أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1 $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+3)}$

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}$$

$$2x-5=A(x+3)+B(x+2)$$

$$x=-2 \Rightarrow -9=A \quad \Rightarrow A=-9$$

$$x=-3 \Rightarrow -11=-B \quad \Rightarrow B=11$$

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{-9}{(x+2)}+\frac{11}{(x+3)}$$

2 $\dfrac{2x+22}{x^2+2x}$

$$\frac{2x+22}{x^2+2x}=\frac{2x+22}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$2x+22=A(x+2)+Bx$$

$$x=0 \Rightarrow 22=2A \quad \Rightarrow A=11$$

$$x=-2 \Rightarrow 18=-2B \quad \Rightarrow B=-9$$

$$\frac{2x+22}{x^2+2x}=\frac{11}{x}+\frac{-9}{(x+2)}$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

3 $\dfrac{4x-30}{x^2-8x+15}$

$$\frac{4x-30}{x^2-8x+15}=\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x-3)}$$

$$4x-30=A(x-3)+B(x-5)$$

$$x=5\Rightarrow -10=2A \quad \Rightarrow A=-5$$

$$x=3\Rightarrow -18=-2B \quad \Rightarrow B=9$$

$$\frac{4x-30}{x^2-8x+15}=\frac{-5}{(x-5)}+\frac{9}{(x-3)}$$

4 $\dfrac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}$

$$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$6x^2-7x+10=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$$

$$x=2\Rightarrow 20=5A \quad \Rightarrow A=4$$

$$x=0\Rightarrow 10=4-2C \quad \Rightarrow C=-3$$

$$x=1\Rightarrow 9=8+(B-3)(-1) \quad \Rightarrow B=2$$

$$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{4}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+1}$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

5 $\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}$

$$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{1-2x}$$

$$2-3x-4x^2=A(x-1)(1-2x)+Bx(1-2x)+Cx(x-1)$$

$$x=0\Rightarrow 2=-A \quad \Rightarrow A=-2$$

$$x=1\Rightarrow -5=-B \quad \Rightarrow B=5$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2-\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{4}C \quad \Rightarrow C=2$$

$$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}=\frac{-2}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{2}{1-2x}$$

6 $\frac{x}{8x^2-10x+3}$

$$\frac{x}{8x^2-10x+3}=\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=\frac{A}{(4x-3)}+\frac{B}{(2x-1)}$$

$$x=A(2x-1)+B(4x-3)$$

$$x=\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{1}{2}A \quad \Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}=-B \quad \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{8x^2-10x+3}=\frac{3}{2(4x-3)}+\frac{-1}{2(2x-1)}$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

7 $\dfrac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}$

$$\frac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}=\frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}$$

$$=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-5)}+\frac{C}{(2x+1)}$$

$$1=A(x-5)(2x+1)+B(x+3)(2x+1)+C(x+3)(x-5)$$

$$x=-3\Rightarrow 1=40A \quad \Rightarrow A=\frac{1}{40}$$

$$x=5\Rightarrow 1=88B \quad \Rightarrow B=\frac{1}{88}$$

$$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 1=-\frac{55}{4}C \quad \Rightarrow C=-\frac{4}{55}$$

$$\frac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}=\frac{1}{40(x+3)}+\frac{1}{88(x-5)}-\frac{4}{55(2x+1)}$$

8 $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

$$\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}=\frac{9x^2-9x+6}{(x-2)(x+2)(2x-1)}$$

$$=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(2x-1)}$$

$$9x^2-9x+6=A(x+2)(2x-1)+B(x-2)(2x-1)+C(x-2)(x+2)$$

$$x=2\Rightarrow 24=12A \quad \Rightarrow A=2$$

$$x=-2\Rightarrow 60=20B \quad \Rightarrow B=3$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{15}{4}=-\frac{15}{4}C \quad \Rightarrow C=-1$$

$$\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{3}{(x+2)}+\frac{-1}{(2x-1)}$$

أتدرّب وأحلّ المسائل أجزِّئ كُلا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

9 $\dfrac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}$

$$\frac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}=\frac{x^2-3x-5}{x^3-3x^2-4x+12}=\frac{x^2-3x-5}{(x-2)(x+2)(x-3)}$$

$$=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2-3x-5=A(x+2)(x-3)+B(x-2)(x-3)+C(x-2)(x+2)$$

$$x=2\Rightarrow -7=-4A \quad \Rightarrow A=\frac{7}{4}$$

$$x=-2\Rightarrow 5=20B \quad \Rightarrow B=\frac{1}{4}$$

$$x=3\Rightarrow -5=5C \quad \Rightarrow C=-1$$

$$\frac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}=\frac{7}{4(x-2)}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{-1}{(x-3)}$$

10 $\dfrac{(x-3)^2}{x^3-16x}$

$$\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}=\frac{(x-3)^2}{x(x+4)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+4)}+\frac{C}{(x-4)}$$

$$(x-3)^2=A(x+4)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x+4)$$

$$x=0\Rightarrow 9=-16A \quad \Rightarrow A=-\frac{9}{16}$$

$$x=-4\Rightarrow 49=32B \quad \Rightarrow B=\frac{49}{32}$$

$$x=4\Rightarrow 1=32C \quad \Rightarrow C=\frac{1}{32}$$

$$\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}=\frac{-9}{16x}+\frac{49}{32(x+4)}+\frac{1}{32(x-4)}$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

11 $\dfrac{7x-3}{x^2-8x+16}$

$$\frac{7x-3}{x^2-8x+16}=\frac{7x-3}{(x-4)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}$$

$$7x-3=A(x-4)+B$$

$$x=4\Rightarrow 25=B \quad \Rightarrow B=25$$

$$x=0\Rightarrow -3=-4A+25 \quad \Rightarrow A=7$$

$$\frac{7x-3}{x^2-8x+16}=\frac{7}{x-4}+\frac{25}{(x-4)^2}$$

12 $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$1=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$$

$$x=-1\Rightarrow 1=9A \quad \Rightarrow A=\frac{1}{9}$$

$$x=2\Rightarrow 1=3C \quad \Rightarrow C=\frac{1}{3}$$

$$x=0\Rightarrow 1=\frac{4}{9}-2B+\frac{1}{3} \quad \Rightarrow B=-\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{9(x+1)}+\frac{-1}{9(x-2)}+\frac{1}{3(x-2)^2}$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

13 $\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}$

$$\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$2x^2-x-6=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$$

$$x=0\Rightarrow -6=4A \quad \Rightarrow A=-\frac{3}{2}$$

$$x=-2\Rightarrow 4=-2C \quad \Rightarrow C=-2$$

$$x=1\Rightarrow -5=-\frac{27}{2}+3B-2 \quad \Rightarrow B=\frac{7}{2}$$

$$\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}=\frac{-3}{2x}+\frac{7}{2(x+2)}+\frac{-2}{(x+2)^2}$$

14 $\frac{x-3}{x^3+3x}$

$$\frac{x-3}{x^3+3x}=\frac{x-3}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$x-3=A(x^2+3)+(Bx+C)(x)$$

$$x=0\Rightarrow -3=3A \quad \Rightarrow A=-1$$

$$x=1\Rightarrow -2=-4+B+C \quad \Rightarrow B+C=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x=-1\Rightarrow -4=-4+B-C \quad \Rightarrow B-C=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(1)+(1) \quad \Rightarrow 2B=2 \quad \Rightarrow B=1, C=1$$

$$\frac{x-3}{x^3+3x}=\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

15 $\dfrac{x^2+2x+40}{x^3-125}$

$$\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}=\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\frac{A}{x-5}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+25}$$

$$x^2+2x+40=A(x^2+5x+25)+(Bx+C)(x-5)$$

$$x=5\Rightarrow 75=75A \quad \Rightarrow A=1$$

$$x=0\Rightarrow 40=25-5C \quad \Rightarrow C=-3$$

$$x=1\Rightarrow 43=31-4B+12 \quad \Rightarrow B=0$$

$$\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}=\frac{1}{x-5}+\frac{-3}{x^2+5x+25}$$

16 $\dfrac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}$

$$\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{x^3+216}$$

$$=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)}$$

$$\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)}=\frac{A}{x+6}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+36}$$

$$-30x^2+36x+648=A(x^2-6x+36)+(Bx+C)(x+6)$$

$$x=-6\Rightarrow -1080-216+648=108A \quad \Rightarrow A=-6$$

$$x=0\Rightarrow 648=-216+6C \quad \Rightarrow C=144$$

$$x=1\Rightarrow 654=-186+7B+1008 \quad \Rightarrow B=-24$$

$$\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}=-2+\frac{-6}{x+6}+\frac{-24x+144}{x^2-6x+36}$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجزِّئ كُلا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

17 $\dfrac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

$$\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-14x-58}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-14x-58}{(x+3)(x+5)}$$

$$\frac{-14x-58}{(x+3)(x+5)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+5)}$$

$$-14x-58=A(x+5)+B(x+3)$$

$$x=-3\Longrightarrow 42-58=2A \quad \Longrightarrow A=-8$$

$$x=-5\Longrightarrow 70-58=-2B \quad \Longrightarrow B=-6$$

$$\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-8}{(x+3)}+\frac{-6}{(x+5)}$$

18 $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

$$\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}=x^2+\frac{2x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$$

$$=x^2+\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$2x^2+x+5=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$$

$$x=2\Longrightarrow 15=5A \quad \Longrightarrow A=3$$

$$x=0\Longrightarrow 5=3-2C \quad \Longrightarrow C=-1$$

$$x=1\Longrightarrow 8=6-B+1 \quad \Longrightarrow B=-1$$

$$\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}=x^2+\frac{3}{x-2}+\frac{-x-1}{x^2+1}$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

19 أُبيِّن أنَّه يُمكِن كتابة $\frac{1}{x^2-a^2}$ في صورة $\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$، حيث a عدد حقيقي.

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x+a)}$$
$$1=A(x+a)+B(x-a)$$
$$x=a \implies 1=2aA \implies A=\frac{1}{2a}$$
$$x=-a \implies 1=-2aB \implies B=-\frac{1}{2a}$$
$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}+\frac{-1}{2a(x+a)}$$

20 إذا كان: $\frac{5x}{(x+3)^2}=\frac{p}{x+3}-\frac{3p}{(x+3)^2}$، فأجد قيمة p.

$$\frac{5x}{(x+3)^2}=\frac{p}{x+3}-\frac{3p}{(x+3)^2}=\frac{p(x+3)-3p}{(x+3)^2}$$
$$\implies p(x+3)-3p=5x$$
$$x=-2 \implies p-3p=-10$$
$$\implies p=5$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

21 إذا كان: $\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{px-37}{9(x^2+2)} - \frac{p}{9(x-1)} + \frac{8p}{3(x-1)^2}$، فأجد قيمة p.

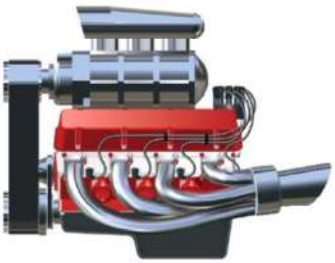
$$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{px-37}{9(x^2+2)} - \frac{p}{9(x-1)} + \frac{8p}{3(x-1)^2}$$

$$= \frac{(px-37)(x-1)^2 - p(x-1)(x^2+2) + 24p(x^2+2)}{9(x-1)^2(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow 9(x^2+8x+7) = (px-37)(x-1)^2 - p(x-1)(x^2+2) + 24p(x^2+2)$$

$$x = 1 \Rightarrow 144 = 72p$$

$$\Rightarrow p = 2$$



هندسة ميكانيكية: يُستعمَل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم مُحرِّك ديزل:

$$R(x) = \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}, \quad 0 \le x \le 1$$

حيث x مقدار جهد المُحرِّك، و $R(x)$ درجة الحرارة بالفهرنهايت:

22 أُجزِّئ الاقتران $R(x)$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)} = \frac{A}{(11-7x)} + \frac{B}{(7-4x)}$$

$$2000(4-3x) = A(7-4x) + B(11-7x)$$

$$x = \frac{11}{7} \Rightarrow -\frac{10000}{7} = \frac{5}{7}A \Rightarrow A = -2000$$

$$x = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{32000}{7} = -\frac{5}{4}B \Rightarrow B = 2000$$

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)} = \frac{-2000}{(11-7x)} + \frac{2000}{(7-4x)}$$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

23 إذا كان $R(x)$ يُمثِّل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقل درجة حرارة للعادم، فأجد كُلًّا من الاقترانين، مستعينًا بالسؤال السابق.

اقتران أعلى درجة حرارة هو $\frac{2000}{7-4x}$، اقتران أدنى درجة حرارة هو $\frac{2000}{11-7x}$.

24 أحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $v=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}$ العلاقة بين سرعة سيّارة v بالكيلومتر لكل ساعة والزمن t بالساعات. هل يُمكِن كتابة الاقتران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحدهما $(t+2)$، ومقام الآخر (t^2-1)؟

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t-1)(t+1)}=\frac{A}{(t+2)}+\frac{B}{(t-1)}+\frac{C}{(t+1)}$$

$$t^2-5t+6=A(t-1)(t+1)+B(t+2)(t+1)+C(t+2)(t-1)$$

$$t=-2 \implies 20=3A \implies A=\frac{20}{3}$$

$$t=1 \implies 2=6B \implies B=\frac{1}{3}$$

$$t=-1 \implies 12=-2C \implies C=-6$$

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{1}{3}}{(t-1)}+\frac{-6}{(t+1)}$$

$$=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{1}{3}(t+1)-6(t-1)}{(t^2-1)}$$

$$=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{-17}{3}t+\frac{19}{3}}{(t^2-1)}$$

نعم يمكن.

نعم يمكِن كتابة الاقتران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحدهما $(t+2)$، ومقام الآخر (t^2-1)؟

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

25 $\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}$

$$\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}=\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}$$

26 $\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}$

$$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$$
$$2x^2+6x-5=A(x-2)^2+B(x-2)+C$$
$$x=2 \implies 15=C \implies C=15$$
$$x=3 \implies 31=A+B+15 \implies A+B=16 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x=1 \implies 3=A-B+15 \implies A-B=-12 \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$(1)+(2) \implies 2A=4 \implies A=2, B=14$$
$$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{14}{(x-2)^2}+\frac{15}{(x-2)^3}$$

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

27 $\dfrac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}$

$$\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}=\frac{3x^3+12x-20}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

$$=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x+2)}+\frac{D}{(x+2)^2}$$

$$3x^3+12x-20=A(x-2)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-2)^2+D(x-2)^2$$

$$x=2 \implies 28=16B \implies B=\frac{7}{4}$$

$$x=-2 \implies -68=16D \implies D=-\frac{17}{4}$$

$$x=0 \implies -20=-8A+7+8C-17 \implies -4A+4C=-5 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x=4 \implies 220=72A+63+24C-17 \implies 36A+12C=87 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$9\times(1)+(2) \implies 48C=42 \implies C=\frac{7}{8}, A=\frac{17}{8}$$

$$\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}=\frac{17}{8(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}+\frac{7}{8(x+2)}-\frac{17}{4(x+2)^2}$$

28 أكتشف الخطأ: بدأت رنيم خطوات تجزئة المقدار $\dfrac{5x+2}{(x+3)^2}$ كالآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+3}$$

أُحدِّد الخطأ الذي وقعت فيه رنيم، ثمَّ أُصحِّحه.

الخطأ الذي وقعت فيه رنيم هو أنها جعلت مقامي الكسرين متماثلين في حين أنه يجب أن تجعل مقام الكسر الثاني $(x+3)^2$. تكون الخطوة الأولى الصحيحة على النحو الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$$

مهارات التفكير العليا

29 تبريـر: إذا كان: $\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$، فأجـد قيمـة كلٍّ مـن A وB بدلالـة المُتغيِّريـن a وb، مُبـرِّرًا إجابتـي.

$$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$ax+b=A(x+1)+B(x-1)$$

$$x=1\Rightarrow a+b=2A\Rightarrow A=\frac{a+b}{2}$$

$$x=-1\Rightarrow -a+b=-2B\Rightarrow B=\frac{-a+b}{-2}=\frac{a-b}{2}$$

30 مسألة مفتوحة: أكتب اقترانًا نسبيًّا في صورة $\frac{f(x)}{g(x)}$، بحيث تحتوي مقامات كسوره الجزئية على عوامل خطِّية غير مُكرَّرة.

تتنوع الاجابـــات وتاليا مثال لاجابة محتملة

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-2x+7}{2x^3-7x^2+9}$$

$$=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x^2-x-3)}$$

$$=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+1}$$

$$=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{5}{3(2x-3)}+\frac{1}{2(x+1)}$$