المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

التعلّم المبني على المفاهيم والنتاجات الأساسية

الرياضيات

الصف الحادي عشر

للفروع: العلمي، والأدبي، والصناعي، والفندقي والسياحي

النّاشر
وزارة التّربية والتّعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسيّة

أشرف على تأليف هذه المادة التعليمية كل من:

د. نواف العقيل العجارمة/ الأمين العام للشؤون التعليمية
د. نجوى ضيف الله القبيلات/ الأمين العام للشؤون الإدارية والمالية
د. محمد سلمان كنانة/ مدير إدارة المناهج والكتب المدرسية
د. أسامة كامل جرادات/ مدير المناهج
د. زايد حسن عكور/ مدير الكتب المدرسية
نقْين أحمد جوهر/ عضو مناهج الرياضيات

المتابعة والتنسيق: د. زبيدة حسن أبوشويمة/ ر.ق المباحث المهنية

لجنة التّأليف:

د. سميرة حسن أحمد   تهاني عبد الرحمن العملة
لينا فتحي الجمل

التحرير العلمي: نقْين أحمد جوهر   **التحرير اللغوي**: ميسرة عبد الحليم صويص
التحرير الفني: نداء فؤاد أبو شنب   **التصميم**: عمر ابو عليان
الرسم: بلال نوري ديرانيه   **الإنتاج**: سليمان أحمد الخلايلة

دقق الطباعة: د. سميرة حسن أحمد   راجع الطباعة: نقْين أحمد جوهر

الطبعة الأولى   **1442هـ / 2021م**

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قائمة المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدّمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

وبعد، فانطلاقًا من رؤية وزارة التربية والتعليم إلى تحقيق التعليم النوعي المتميّز على نحوٍ يلائم حاجات الطلبة، وإعداد جيل من المتعلمين على قدر من الكفاية في المهارات الأساسية اللازمة للتكيّف مع متطلبات الحياة وتحدياتها، مزوّدين بمعارف ومهارات وقِيَم تساعد على بناء شخصياتهم بصورة متوازنة.

بُنِيَ هذا المحتوى التعليمي على المفاهيم والنتاجات الأساسية لمبحث الرياضيات للصف الحادي عشر للفروع: العلمي، والأدبي، والصناعي، والفندقي والسياحي الذي يشكّل أساس الكفاءة العلميّة لدى الطلبة، ويركّز على المفاهيم التي لا بدّ منها لتمكين الطّلبة من الانتقال إلى المرحلة اللاحقة انتقالًا سلسًا من غير وجود فجوة في التّعلّم؛ لذا حرصنا على بناء المفهوم بصورة مختزلة ومكثّفة ورشيقة بعيدًا عن التوسّع الأفقيّ والسّرد وحشد المعارف؛ إذْ عُني بالتّركيز على المهارات، وإبراز دور الطّالب في عملية التّعلّم، بتفعيل إستراتيجية التعلّم الذاتيّ، وإشراك الأهل في عملية تعلّم أبنائهم.

وقد اشتمل هذا المحتوى التعليمي على أربعة موضوعات رئيسة، يتضمّن كلٌّ منها المفاهيم الأساسيّة لتعلّم مهارات الرياضيات ومحاورها، بأسلوبٍ شائق ومركَّز.

لذا؛ بني هذا المحتوى على تحقيق النتاجات العامة الآتية:

- توظيف نظريات خاصة بالعلاقات بين أوتار الدائرة، وأقطارها، ومماسّاتها، والزوايا فيها لإيجاد وقياسات زوايا وأطوالٍ مجهولةٍ في الدائرةِ.
- ايجاد النسب المثلثية الأساسية (الجيب، جيب التمام، الظل) لزاوية معطاة ضمن الدورة الواحدة والعكس.
- التعرف إلى الاقترانات (كثيرات الحدود، والنسبي، والجذر التربيعي) وتحديد مجال ومدى كل منها وتمثيلها البياني.
- إيجاد مقاييس التشتت: (المدى، والانحراف المعياري، والتباين) لبيانات منظمة في جدول تكراري ذي فئات.

والله ولي التوفيق

المجالُ: الهندسةُ والقياسُ

المحورُ: الدائرةُ

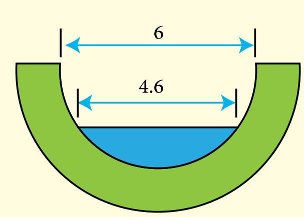
١

أوتارُ الدائرةِ وأقطارُها ومماسّاتُها

- أتعرَّفُ العلاقاتِ بينَ أوتارِ الدائرةِ وأقطارِها ومماسّاتِها.
- أُوظِّفُ هذهِ العلاقاتِ في إيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ في الدائرةِ.

قناةٌ مائيَّةٌ مقطعُها العرضيُّ على شكلِ نصفِ دائرةٍ، طولُ قطرِها 6m وعرضُ سطحِ الماءِ فيها 4.6m

أجدُ عمقَ الماءِ في القناةِ.

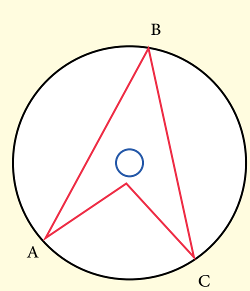


٢

الزوايا في الدائرةِ

- أتعرَّفُ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرةِ.
- أُوظِّفُ هذهِ العلاقاتِ في إيجادِ قياساتِ زوايا وأطوالٍ مجهولةٍ في الدائرةِ.

هلْ توجدُ علاقةٌ بينَ قياسَي الزاويتَينِ ABC، AOC في الدائرةِ O المرسومةِ في الشكلِ الآتي؟



٣

معادلةُ الدائرةِ

- أجدُ مركزَ الدائرةِ وطولَ نصفِ قطرِها؛ إذا علمتُ معادلتَها بصورتِها القياسيَّةِ أوِ العامَّةِ.
- أكتبُ معادلةَ الدائرةِ؛ إذا أُعطيتُ معلوماتٍ كافيةً.

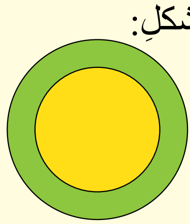
دائرتانِ مشتركتانِ بالمركزِ، معادلَتاهُما:

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 9$$

و

$$x^2 + y^2 + 12x + 2 = 0$$

كما في الشكلِ:



هلْ يُمكنُني حسابُ عرضِ الممرِّ الناتجِ بينَهما؟

أختبرُ نفسي

1) المثلَّثُ ABC قائمُ الزاويةِ
في B, AB = 4cm
BC=3cm أجدْ AC

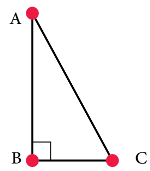
2) المثلَّثُ ABC قائمُ الزاويةِ في B.
AB=10cm , AC=20cm
أجدْ BC.

3) أحسُبُ المسافةَ بينَ النقطتَينِ
لكلٍّ ممّا يأتي:

- (-1,6) , (-5,3)
- (-1,-2) , (-3,6)
- (0.75 , 6), (2, 0.5)

أتذكَّرُ

أوَّلًا: نظريَّةُ فيثاغورس:



إذا كانَ ABC مثلَّثًا قائمَ الزاويةِ في B؛ فإنَّ:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

مثالٌ: ABC مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في B فيه BC=3cm , AB=8cm
أجدْ AB.

الحلُّ

تعويضٌ في نظريَّةِ فيثاغورس: $(AB)^2 + (3)^2 = (8)^2$

تبسيطٌ: $(AB)^2 + 9 = 64$

طرحُ 9 منْ طرفَي المعادلةِ: $(AB)^2 = 64 - 9 = 55$

أخذُ الجذرِ التربيعيِّ لطرفَي المعادلةِ: $AB = \sqrt{55} \approx 7.4 \text{ cm}$

أهملُ الإشارةَ السالبةَ لأن الطول موجبٌ $AB = 7.4 \text{ cm}$

ثانيًا: المسافةُ بينَ نقطتَينِ:

المسافةُ d بينَ النقطتَينِ $(x_1 , y_1),(x_2 , y_2)$ هيَ:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

مثالٌ: المسافةُ بينَ النقطتَينِ (3 , 7) , (2 , 5) هيَ:

تعويضٌ $(x_2 , y_2) = (3 , 7)$
و $(x_1 , y_1) = (2 , 5)$: $d = \sqrt{(3-2)^2 + (7-5)^2}$

تبسيطٌ: $= \sqrt{1^2 + 2^2}$

تبسيطٌ: $= \sqrt{(1+4)} = \sqrt{5} \approx 2.2$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أوتارُ الدائرةِ وأقطارُها ومماسّاتُها

ماذا سأتعلَّم؟

- العلاقاتُ التي تربطُ بينَ أوتارِ الدائرةِ وأقطارِها ومماسّاتِها.

الساعةُ

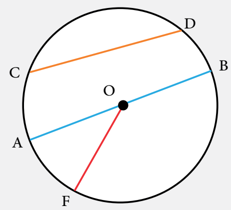
أرادتْ حنينُ صنعَ ساعةِ حائطٍ دائريَّةٍ؛ فأحضرتْ قطعةَ خشبٍ دائريَّةً وعقاربَ ومحرِّكًا للعقاربِ، ثمَّ درَّجتِ القطعةَ الخشبيَّةَ وأرادتْ تثبيتَ العقاربِ في مركزِ الدائرةِ. أساعدُ حنينَ على تحديدِ مركزِ الدائرةِ؛ لتُثَبِّتَ العقاربَ عندَهُ.

مفاهيمُ خاصَّةٌ بالدائرةِ:

الدائرةُ

وترُ الدائرةِ هوَ: ....
مثل: $\overline{CD}$

قطرُ الدائرةِ هوَ: ....
مثل: $\overline{AB}$



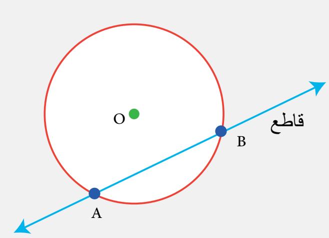
مركزُ الدائرةِ O هوَ: ....

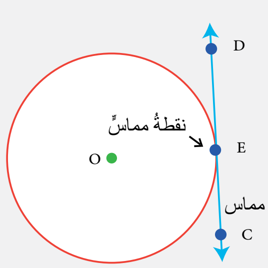
نصفُ قطرِ الدائرةِ هو: ....
مثل: $\overline{OF}$

القاطعُ: مستقيمٌ يقطعُ الدائرةَ في نقطتَينِ ويحوي وترًا فيها.

المماسُّ: مستقيمٌ أو جزءٌ منْ مستقيمٍ يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقط.

نقطةُ التماسِّ: نقطةُ التقاءِ المماسِّ بالدائرةِ.



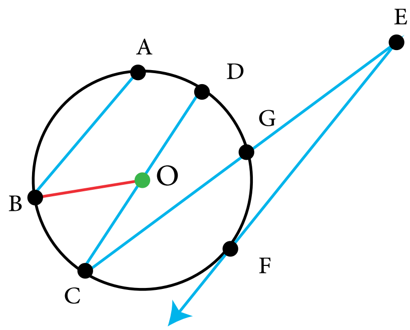


مثالٌ (1)

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O أُسمّي:

1) وترًا. 2) قطرًا. 3) نصفَ قطرٍ.

4) قاطعًا. 5) مماسًّا. 6) نقطةَ التماسِّ.



الحلُّ

1) $\overline{AB}$ وترٌ؛ لأنَّهُ قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بينَ نقطتَينِ على الدائرةِ.

2) $\overline{CD}$ قطرٌ؛ لأنَّهُ وترٌ يمرُّ في مركزِ الدائرةِ.

3) $\overline{OB}$ نصفُ قطرٍ؛ لأنَّهُ قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بينَ المركزِ ونقطةٍ على الدائرةِ.

4) $\overleftrightarrow{EC}$ قاطعٌ؛ لأنَّهُ ....

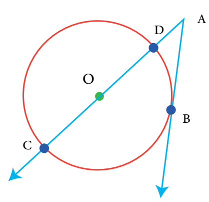
5) $\overleftrightarrow{EF}$ مماسٌّ لأنَّهُ: ....

6) F نقطةُ التماسِّ؛ لأنَّها ....

أحاولُ

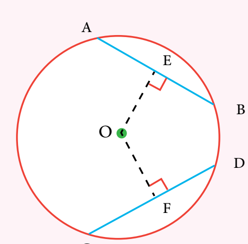
يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O، أُسمّي:

1) قاطعًا للدائرةِ. 2) وترًا للدائرةِ. 3) مماسًّا للدائرةِ.



نظريّاتٌ تُبيِّنُ علاقاتٍ بينَ أوتارِ الدائرةِ، ونصفِ قطرِها، والعمودِ على الوترِ، وطولِ الوترِ.

• الوترانِ المتطابقانِ في الدائرةِ، يبعدانِ البُعدَ نفسَهُ عنْ مركزِها.



مثالٌ بالرموزِ

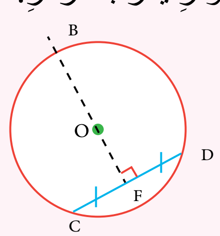
إذا كانَ $AB = CD$ فإنَّ: $OE = OF$

• الوترانِ اللذانِ يبعدانِ البُعدَ نفسَهُ عنِ المركزِ متطابقانِ.

مثالٌ بالرموزِ

إذا كانَ $OE = OF$ فإنَّ: $AB = CD$

• العمودُ المنصِّفُ للوترِ يمرُّ بالمركزِ.



مثالٌ بالرموزِ:

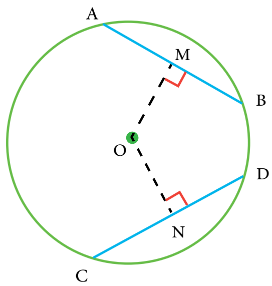
إذا كانَ $\overline{CD} \perp \overline{BF}$ و $CF = FD$؛ فإنَّ $\overline{BF}$ يمرُّ بالمركزِ.

• العمودُ المارُّ بالمركزِ يُنصِّفُ الوترَ.

مثالٌ بالرموزِ:

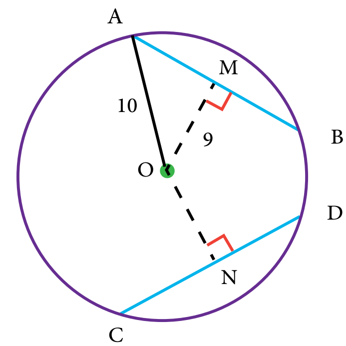
إذا كانَ $\overline{CD} \perp \overline{BF}$ و $\overline{BF}$ يمرُّ بالمركزِ؛ فإنَّ: $CF = FD$

مثال (2)



في الشكلِ المجاورِ، دائرةٌ مركزُها O وطولُ نصفِ قطرِها 10cm، ON = 9cm = OM أجدُ طولَ الوترَينِ $\overline{CD}$, $\overline{AB}$.

الحلُّ



المثلَّثُ AMO قائمُ الزاويةِ في M، إذنْ:

نظريَّةُ فيثاغورس: $(AO)^2 = (OM)^2 + (AM)^2$

تعويضُ AO=10، OM=9: $(10)^2 = (9)^2 + (AM)^2$

تبسيطٌ: $100 = 81 + (AM)^2$

تبسيطٌ: $(AM)^2 = 100 - 81 = 19$

أخذُ الجذرِ التربيعيِّ لطرفَي المعادلةِ: $AM = \sqrt{19} \approx 4.4$

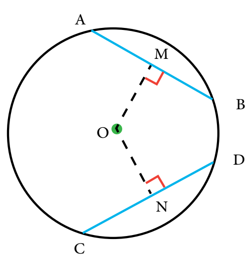
$\overline{OM}$ عمودٌ على الوترِ ويمرُّ بالمركزِ. إذنْ: يُنصِّفُ الوترَ:

$$AB = 2\ AM$$
$$= 2 \times \sqrt{19} \approx 8.8\ cm$$

وترانِ يبعدانِ البُعدَ نفسَهُ عنِ المركزِ؛ فهُما متساويانِ:

$$CD = AB = 2\sqrt{19} = 8.8\ cm$$

أحاول

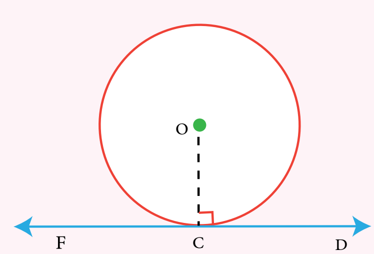


في الشكلِ المجاورِ، دائرةٌ مركزُها O و $\overline{CD}$، $\overline{AB}$ وترانِ للدائرةِ وM منتصفُ $\overline{AB}$ وN منتصفُ $\overline{DC}$ ON = OM=6cm ، AB = 16 cm

فأجدُ CD , OB.

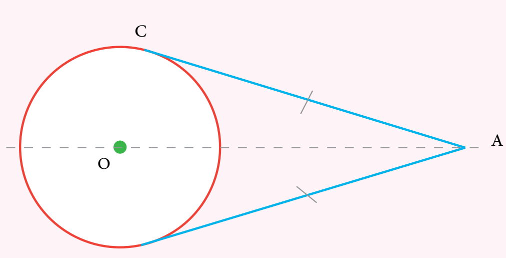
نظرياتُ المماسِ ونصفُ القطرِ

• مماسُّ الدائرةِ عموديٌّ على نصفِ القطرِ المرسومِ منْ نقطةِ التماسِّ.



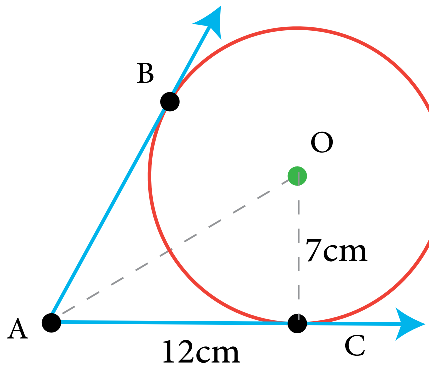
بالرموزِ: $\overline{OC} \perp \overline{FD}$

• المماسّانِ المرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها متساويانِ.



بالرموزِ: AC = AB

مثالٌ (3)



بنـاءً علـى الشـكلِ المجـاورِ الـذي فيـهِ دائـرةٌ مركزُها O ومماسّـانِ للدائـرةِ مـنَ النقطـةِ A؛ أجـدُ AB ، AO.

الحلُّ

المثلَّثُ ACO قائمُ الزاويةِ في C لأنَّ $\overline{OC} \perp \overline{AC}$ (نظريَّةُ نصفِ القطرِ المماسّ).

نظريَّةُ فيثاغورس: $(AO)^2 = (AC)^2 + (OC)^2$

تعويضُ OC=7 ، AC=12 : $(AO)^2 = (12)^2 + (7)^2$

بالتربيعِ والجمعِ: $(AO)^2 = 144 + 49$

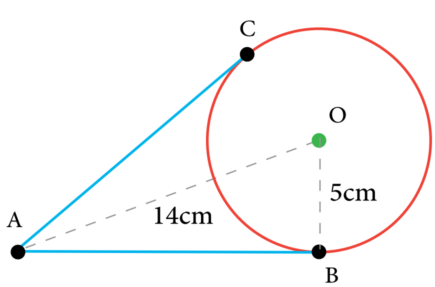
$= 193$

الجذرُ التربيعيُّ: $AO = \sqrt{193} \approx 13.9 \text{ cm}$

المماسّانِ للدائرةِ من نقطةٍ خارجَها متساويانِ: $AB = AC = \sqrt{193}$

$\approx$ cm 13.9

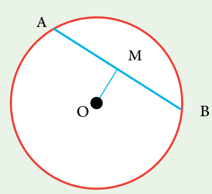
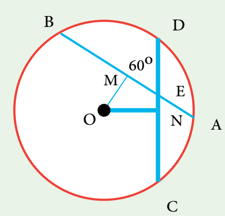
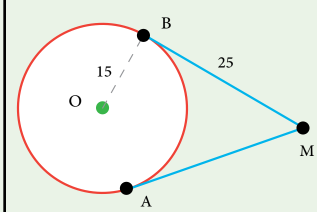
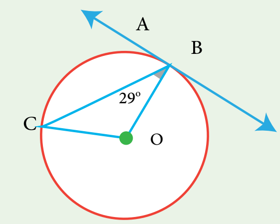
أحاول



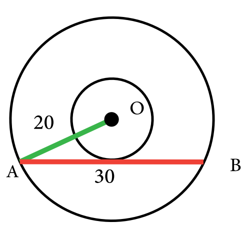
بِنـاءً علـى الشـكلِ المجـاورِ الـذي فيـهِ دائـرةٌ مركزُهـا O ، ونصـفُ قطرِهـا 5cm , $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ مماسّـانِ للدائـرةِ مـنْ نقطـةٍ خارجَهـا، AO = 14 cm. أجدُ AC.

أختبرُ تعلُّمي

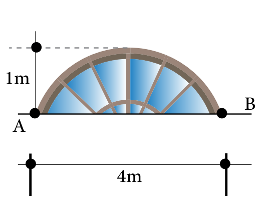
1) لكلِّ فقرةٍ ممّا يأتي 4 إجاباتٍ واحدةٌ مِنها صحيحةٌ. أختارُ الإجابةَ الصحيحةَ لكلِّ فقرةٍ:

(1)	(2)	(3)	(4)
			
O مركزُ الدائرةِ، $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ AB=8cm, OM=3cm طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ بالسنتيمتراتِ يُساوي	M منتصفُ $\overline{AB}$، N منتصفُ $\overline{CD}$ $m\angle BED = 60°$ $m\angle MON =$....	AM = ...	$m\angle OBC = 2g°$ $m\angle ABC =$....
a) $\sqrt{73}$ b) $\sqrt{55}$ c) 5 c) 10	a) 60° b) 90° c) 120° d) 30°	a) 15cm b) 25cm c) 20cm d) 10cm	a) 29° b) 58° c) 61° d) 90°

2) يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرتَينِ مشتركتَينِ في المركزِ، طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ الكبرى 20cm و $\overline{AB}$ وترٌ للدائرةِ الكبرى ومماسٌّ للدائرةِ الصغرى، AB=30cm. أجدُ المسافةَ بينَ الدائرتَينِ.



3) يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ نافذةً مصمَّمةً على شكلِ قوسِ دائرةٍ، طولُ قطرِها 4m، فإذا كانَ ارتفاعُ قوسِ النافذةِ فوقَ منتصفِ قاعدتِها يُساوي 1m؛ فأجدُ عرضَ قاعدةِ النافذةِ AB.



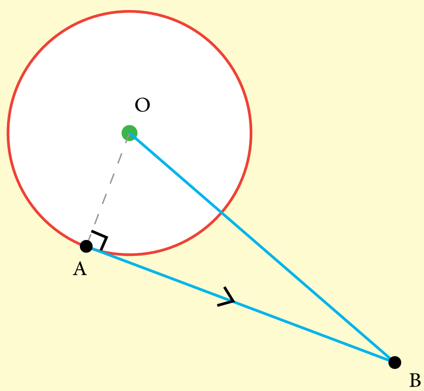
الزوايا في الدائرةِ

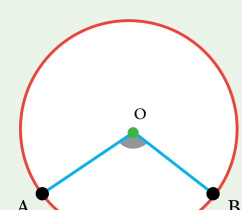
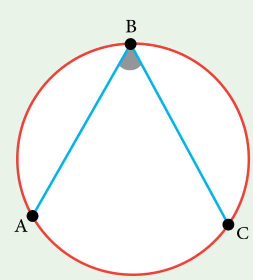
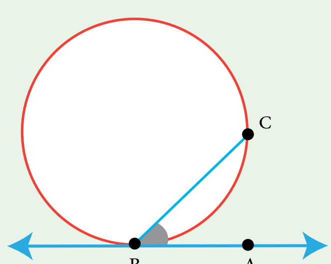
ماذا سأتعلَّمُ؟

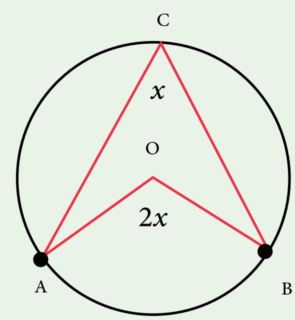
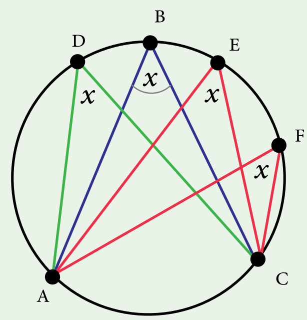
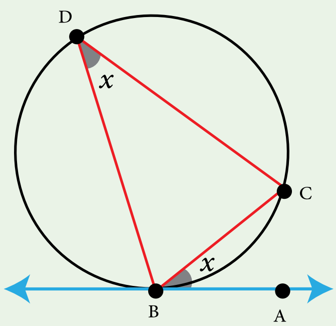
- الزاويةُ المركزيَّةُ.
- الزاويةُ المحيطيَّةُ.
- الزاويةُ المماسِّيَّةُ.

طائرةٌ

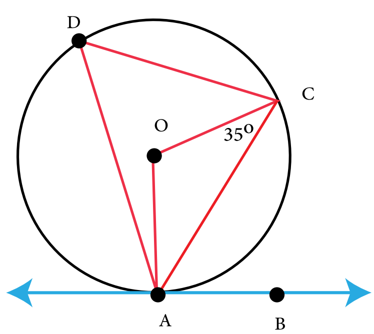
تسلكُ طائرةٌ مسارًا دائريًّا مركزُهُ O، ونصفُ قطرِهِ 50km أطلق ضوء كشّافٍ منَ الطائرةِ وهيَ في الموقعِ A نحوَ الموقعِ B، الذي يبعدُ عنِ الرادارِ الموجودِ في مركزِ الدائرةِ O، مسافة 90km ما بُعدُ الموقعِ B عنِ الطائرةِ عندَ تلكَ اللحظةِ؟



أنواعُ الزوايا في الدائرةِ		
الزاويةُ المركزيَّةُ	**الزاويةُ المحيطيَّةُ**	**الزاويةُ المماسِّيَّةُ**
الزاويةُ التي يقعُ رأسُها على مركزِ الدائرةِ، وضِلعاها نصفا قطرَينِ فيها.	الزاويةُ التي يكونُ رأسُها على الدائرةِ، وضِلعاها وترانِ في الدائرةِ.	الزاويةُ المحصورةُ بينَ المماسِّ والوترِ المرسومِ منْ نقطةِ التماسِّ.
		
مثال	**مثال**	**مثال**
$\angle AOB$ زاويةٌ مركزيَّةٌ.	$\angle ABC$ زاويةٌ محيطيَّةٌ.	$\angle ABC$ زاويةٌ مماسِّيَّةٌ.

العلاقاتُ بينَ الزوايا في الدائرةِ		
الزاويةُ المركزيَّةُ والزاويةُ المحيطيَّةُ	**الزوايا المحيطيَّةُ**	**الزاويةُ المماسِّيَّةُ و الزاويةُ المحيطيَّةُ**
قياسُ الزاويةِ المركزيَّةِ يُساوي ضعفَ قياسِ الزاويةِ المحيطيَّةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ.	قياساتُ الزوايا المحيطيَّةِ المرسومةِ على قوسٍ واحدٍ جميعِها متساويةٌ.	قياسُ الزاويةِ المماسِّيَّةِ يُساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيَّةِ المشتركةِ معَها بالقوسِ.
 **مثال:** $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	 **مثال:** $m\angle ADC = m\angle ABC$ $= m\angle AEC = m\angle AFC$	 **مثال:** $m\angle ABC = m\angle BDC$

مثال (1)



بناءً على الشكلِ المجاورِ، الذي فيهِ دائرةٌ مركزُها O، $\overline{AB}$ مماسٌّ، $m\angle OCA = 35°$. أجدُ قياسَ كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $m\angle COA$ (2) $m\angle ADC$ (3) $m\angle BAC$

الحلُّ

مجموعُ قياساتِ زوايا المثلَّثِ 180°: (1) $m\angle COA + m\angle OAC + m\angle OCA = 180°$

قياساتُ زوايا القاعدةِ في المثلَّثِ المتطابقِ الضلعَينِ متساويةٌ: $m\angle COA + 35° + 35° = 180°$

تبسيطٌ: $m\angle COA + 70° = 180°$

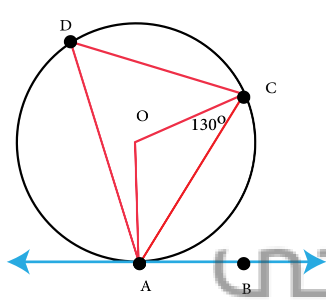
بطرحِ 70° منْ طرفَي المعادلةِ: $m\angle COA = 180° - 70° = 110°$

قياسُ الزاويةِ المحيطيَّةِ يُساوي نصفَ قياسِ الزاويةِ المركزيَّةِ المرسومتانِ على القوسِ نفسِهِ: (2) $m\angle ADC = \frac{1}{2} \times m\angle AOC$

تعويضُ $m\angle AOC = 110°$: $m\angle ADC = \frac{1}{2} \times 110° = 55°$

زاويةٌ مماسِّيَّةٌ ومحيطيَّةٌ مشتركتانِ بالقوسِ نفسِهِ: (3) $m\angle BAC = m\angle ADC = 55°$

أحاول

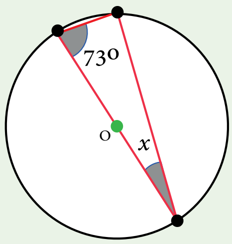
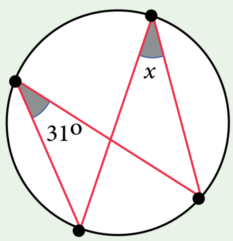
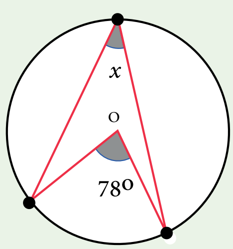
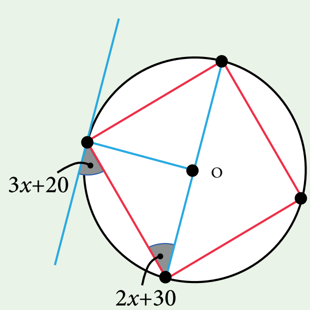


بناءً على الشكلِ المجاورِ، الذي فيهِ دائرةٌ مركزُها O ، $\overline{AB}$ مماسٌّ، $m\angle AOC = 130°$. أجدُ قياسَ كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $m\angle ADC$ (2) $m\angle BAC$

أختبرُ تعلُّمي

أختـارُ مـنَ العمـودِ B قيمـةَ x فـي كلٍّ مـنَ الدوائـرِ فـي العمـودِ A؛ وأُبـرِّرُ إجابَتـي؛ علمًا بـأنَّ O هـيَ مركـزُ الدائـرةِ.

(A)	(B)
	73°
	31°
	39°
	59
	17°
	62°
	64°
	8
	26°

معادلةُ الدائرةِ

ماذا سأتعلَّمُ؟

الصورةُ القياسيَّةُ لمعادلةِ الدائرةِ.

- الصورةُ العامَّةُ لمعادلةِ الدائرةِ.

أبراجٌ

صُمِّمَ برجُ هاتفٍ خلويٍّ خاصٌّ؛ لخدمةِ دائرةٍ طولُ نصفِ قطرِها 19km يقعُ البرجُ عندَ النقطةِ (5 , 3-) على مستوى إحداثيّاتٍ تُمثِّلُ وحداتُها بالكيلومتراتِ. هلْ مستعملُ الهاتفِ الخلويِّ عندَ النقطةِ (8,0) ضمنَ نطاقِ الخدمةِ؟

الدائرةُ: النقاطُ جميعهُا التي تبعدُ بُعدًا ثابتًا عنْ مركزِها، ويُمكنُني كتابةُ معادلةِ الدائرةِ بصورتَيْها القياسيَّةِ والعامَّةِ.

الصورةُ القياسيَّةُ

معادلةُ الدائرةِ التي إحداثيّا نقطةِ مركزِها (a, b)، وطولُ نصفِ قطرِها r هيَ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

مثالٌ: الدائرةُ

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

إحداثيّا مركزِها $(3, -4)$،

"لماذا $b = -4$؟".

وطولُ نصفِ قطرِها $r = \sqrt{16} = 4$

إذنْ: طولُ نصفِ قطرِها 4 وحداتِ طولٍ.

الصورةُ العامَّةُ

بفكِّ التربيعِ في الصورةِ القياسيَّةِ؛ نحصلُ على معادلةِ الدائرةِ:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

وإحداثيّا نقطةِ مركزِها $(-f , -g) = (a , b)$

(سالبُ نصفِ معاملِ y، سالبُ نصفِ معاملِ x) = $(-f , -g)$

وطولُ نصفِ قطرِها: $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

حيثُ $a^2 + b^2 - c > 0$

مثالٌ: الدائرةُ $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 2 = 0$

إحداثيّا نقطةِ مركزِها:

$$\left(\frac{-8}{2} , \frac{-(-6)}{2}\right) = (-4 , 3)$$

طولُ نصفِ قطرِها:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 - 2} = \sqrt{23} \approx 4.8$$

إذنْ: طولُ نصفِ قطرِها 4.8 وحداتِ طولٍ.

مثالٌ (1)

أميّزُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ ممّا يأتي، وأجدُ إحداثيَّي نقطةِ المركزِ وطولَ نصفِ القطرِ للمعادلةِ التي تُمثّلُ دائرةً.

(1) $2x^2 + y^2 + 8x + 6y + 1 = 0$

(2) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$

(3) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 12y - 12 = 0$

الحلّ

(1) $2x^2 + y^2 + 8x + 6y + 1 = 0$

ليستْ معادلةَ دائرةٍ؛ لأنَّ معاملَي x^2 ، y^2 ليسا متساويَين:

(2) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$

معاملا x^2 ، y^2 متساويانِ؛ فأتحقّقُ منْ شرطِ ما تحتَ الجذرِ:

أعوّضُ $a = \frac{-4}{2} = -2$ ، $b = \frac{-6}{2} = -3$ ، $c = 20$

$a^2 + b^2 - c = (-2)^2 + (-3)^2 - 20 = -7$

ليستْ معادلةَ دائرةٍ لأنَّ $a^2 + b^2 - c < 0$

(3) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 12y - 12 = 0$

معاملا x^2 ، y^2 لا يساويانِ 1، لكنَّهُما متساويانِ:

بالقسمةِ على 2 (معاملُ x^2 ، y^2).

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 6 = 0$

أعوّضُ $a = \frac{-4}{2} = -2$ ، $b = \frac{-6}{2} = -3$ ، $c = -6$

$a^2 + b^2 - c = (-2)^2 + (-3)^2 + 6$

$= 19$

إذنْ: معادلةُ دائرةٍ لأنَّ $a^2 + b^2 - c > 0$

ويكونُ إحداثيّا نقطةِ مركزُ الدائرةِ $(a , b) = (-2 , -3)$

وطولُ نصفِ القطرِ $\sqrt{19}$ وحدةَ طولٍ

أحاول

أجدُ إحداثيَّي نقطةِ المركزِ وطولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي معادلتُها $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 17 = 0$

حالاتٌ يُمكنُني إيجادُ معادلةِ الدائرةِ فيها

1. معلوميَّةُ إحداثيي نقطةِ مركزِ الدائرةِ (a, b) وطولِ نصفِ قطرِها r أوْ طولِ قطرِها d ، ($r = \frac{1}{2} d$).

2. معلوميَّةُ مركزِ الدائرةِ (a , b) ونقطةٍ عليْها.

مثالٌ (2)

أجدُ معادلةَ الدائرةِ في الحالاتِ الآتيةِ:

1) مركزُها (1 ,2) وطولُ نصفِ قطرِها 10 وحداتٍ.

2) مركزُها (5 , 1) وتمرُّ بالنقطةِ (4 , 2).

الحلُّ

1) مركزُها (1 ,2) وطولُ نصفِ قطرِها 10 وحداتٍ.

معادلةُ الدائرةِ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

المركزُ $(a,b) = (1,2)$ فأُعوِّضُ $a = 1 , b = 2$ و $r = 10$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (10)^2$$

تبسيطٌ:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

2) مركزُها (5 , 1) وتمرُّ بالنقطةِ (4 , 2).

طولُ نصفِ القطرِ r هوَ المسافةُ بينَ مركزِ الدائرةِ وأيِّ نقطةٍ علَيْها:

$$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

تعويضٌ، $(x_1 , y_1) = (1 , 5)$ ، $(x_2 , y_2) = (2 , 4)$

$$= \sqrt{(2-1)^2+(4-5)^2}$$

تبسيطٌ:

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

معادلةُ الدائرةِ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 2$$

أحاول

أجدُ معادلة الدائرة في الحالاتِ الآتيةِ:

1) مركزُها (1- , 3) وطولُ قطرِها 12 وحدةً.

2) مركزُها (3- , 2) وتمرُّ بالنقطة (1 , 1).

أختبرُ تعلُّمي

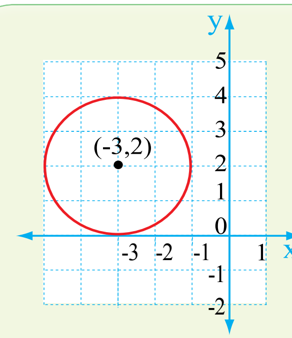
1) أجدُ إحداثيَّي نقطةِ المركزِ، وطولَ نصفِ القطرِ لكلِّ دائرةٍ في ما يأتي:

a) $(x + 5)^2 + (y - 2.25)^2 = 17$

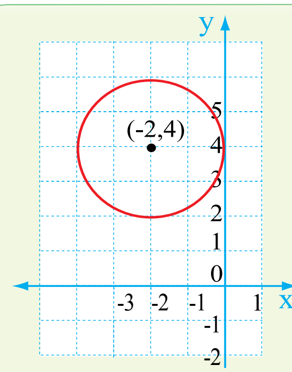
b) $x^2 + y^2 + 6x - 20y - 1 = 0$

c) $5x^2 + 5y^2 + 100x + 60y + 20 = 0$

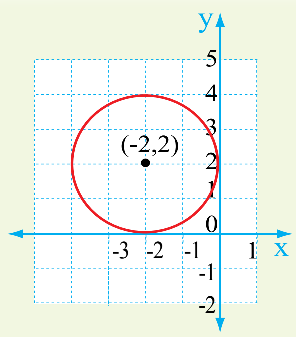
2) أجدُ معادلةَ الدائرةِ؛ بناءً على الرسمِ في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي:



الدائرةُ مركزُها (-3,2)
وتمسُّ محورَ x.
المعادلةُ:..................



الدائرةُ مركزُها (-2,4)
وتمسُّ محورَ y.
المعادلةُ:..................



الدائرةُ مركزُها (-2,2)
وتمسُّ محورَي x,y.
المعادلةُ:..................

3) ليكنْ $x^2 + y^2 - 6x + 4y = d$ معادلةَ دائرةٍ. أجدُ كلًّا ممّا يأتي:

(1) إحداثيّا نقطةِ مركزِ الدائرةِ.

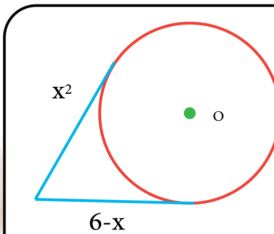
(2) قيمةُ الثابتِ d علمًا بأنَّ طولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ 6 وحداتِ طولٍ.

4) أوجدتْ فاطمةُ إحداثيَّي نقطةِ المركزِ وطولَ نصفِ القطرِ للدائرةِ: $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y = 0$؛ فكانتْ إجابتُها: "أقسمُ المعادلةَ على العددِ 2 لتصبحَ $x^2 + y^2 + 2x + 3y = 0$ إذنْ: إحداثيّا مركزِ الدائرةِ (-2,-3)".
ما الخطأُ الذي وقعتْ بِهِ فاطمةُ؟

التقويمُ الختاميُّ

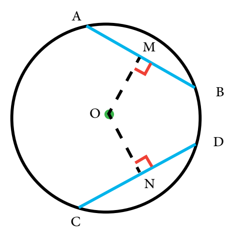
نشاطٌ

الشـبكةُ الآتيـةُ تضـمُّ أسـئلةً متبوعـةً بإجابـاتٍ محيطـةٍ بـكلِّ سـؤالٍ. كلُّ سـؤالٍ لـهُ إجابـةٌ صحيحـةٌ واحـدةٌ تنقلُني إلـى السـؤالِ التالـي. أتَّبعُ الإجاباتِ الصحيحـةَ للخروجِ منَ الشـبكةِ:



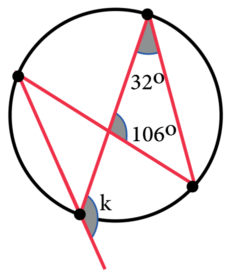
الدائرةُ O يمرُّ بِها مماسّانِ؛ فإنَّ قيمةَ x تساوي:

$x = -6$



AB=12cm, OM=3cm
ON=6cm, CD=.........

$138°$



قياسُ الزاويةِ k يُساوي:

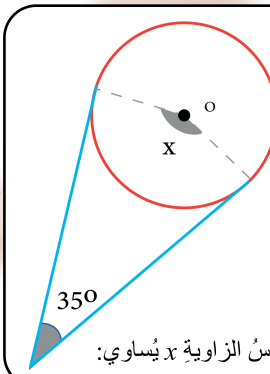
$x = 3 , 2$

$x = -3 , 2$

$x = 6$

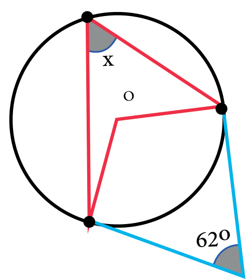
$32°$

$42°$



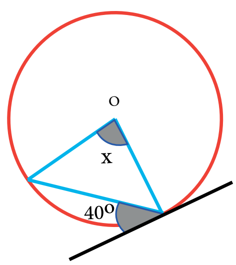
قياسُ الزاويةِ x يُساوي:

$59°$



قياسُ الزاويةِ x يُساوي:

$80°$



قياسُ الزاويةِ x يُساوي:

$145°$

$(2x-2)^2+(2y+4)^2=12$

إحداثيّا نقطةِ مركزِ الدائرةِ وطولِ نصفِ قطرِها:

O (1,-2)

$r = \sqrt{3}$

المجال: الهندسةُ والقياسُ

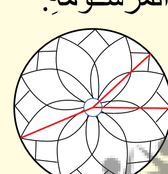
المحور: حسابُ المثلَّثاتِ

١

النسبُ المثلَّثيَّةُ

- أتعرَّفُ الوضعَ القياسيَّ للزاويةِ.
- أجدُ النسبَ المثلَّثيَّةَ الأساسيَّةَ، لزاويةٍ في وضعِها القياسيِّ علمتُ إحداثيَّي ضلعِ انتهائِها.

أرادَ فارسٌ الرسمَ على قرصٍ مدمجٍ؛ فثبَّتَهُ على ورقةِ رسمٍ بيانيٍّ رُسِمَ علَيْها المستوى الإحداثيُّ؛ بحيثُ جعلَ نصفَ قطرِ القرصِ وحدةً واحدةً، وجعلَ مركزَهُ نقطةَ الأصلِ. أُساعدُ فارسًا في رسمِ الزوايا؛ لتقسيمِ القرصِ، وأُعيِّنُ إحداثيّاتِ النقاطِ المشتركةِ بينَ القرصِ والزاويةِ المرسومةِ.

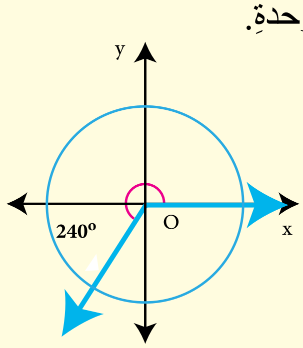


٢

النسبُ المثلَّثيَّةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ

- أجدُ النسبَ المثلَّثيَّةَ الأساسيَّةَ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.
- أجدُ الزاويةَ إذا علمتُ إحدى نسبِها المثلَّثيَّةِ؛ باستعمالِ الزوايا المشهورةِ أوِ الآلةِ الحاسبةِ.

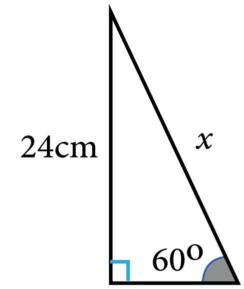
أجدُ إحداثيَّي نقطةِ تقاطعِ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ $240°$ في الوضعِ القياسيِّ معَ دائرةِ الوحدةِ.



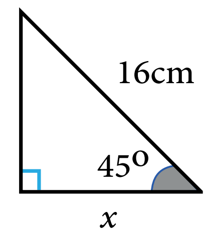
أختبر نفسي

أجـدُ قيمــةَ x المجهولــةَ فــي كلٍّ ممّــا يأتــي:

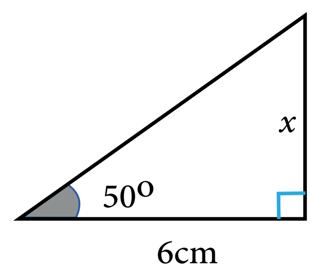
1)



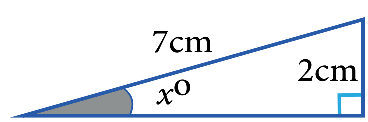
2)



3)



4)



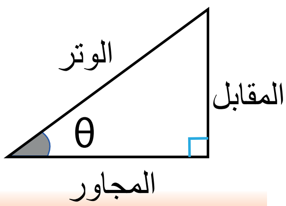
أتذكَّرُ

النسـبُ المثلَّثيَّــةُ الأساسـيَّةُ للزوايـا الحـادَّةِ، وعلاقتُهـا بأضـلاعِ المثلَّـثِ القائـمِ.

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاورُ}}{\text{الوترُ}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}}$$

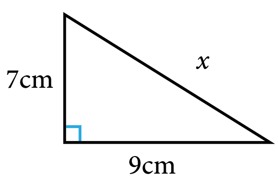
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابلُ}}{\text{المجاورُ}}$$



مثالٌ

أجـدُ قيمــةَ x فــي كلٍّ مــنَ المثلَّثــاتِ القائمــةِ الآتيــةِ:

1)



نظريَّةُ فيثاغورس: $x^2 = 9^2 + 7^2$

تبسيطٌ: $x^2 = 81 + 49$

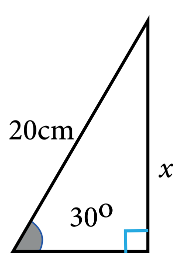
جمعٌ: $x^2 = 130$

بأخذِ الجذرِ للطرفَينِ: $x = \pm\sqrt{130}$

أُهمِلُ الإشارةَ السالبةَ؛ لأنَّ x يُمثِّلُ طولَ:

$x = \sqrt{130}$ cm

2)



قانونُ الجيبِ: $\sin 30° = \frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}}$

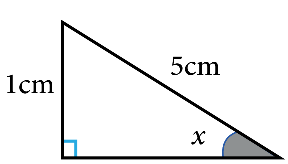
تعويضٌ: $\sin 30° = \frac{x}{20}$

ضربُ المعادلةِ بـ 20: $x = 20\sin 30°$

تعويضٌ: $x = 20\times 0.5$

إيجادُ ناتجِ الضربِ: $x = 10$ cm

3)



قانونُ الجيبِ: $\sin x = \frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}}$

أُعوِّضُ: $\sin x = \frac{1}{5}$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ:

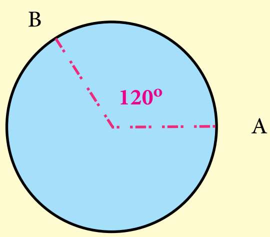
$x = \sin^{-1}(\frac{1}{5}) = 11.54°$

النسبُ المثلَّثيَّةُ

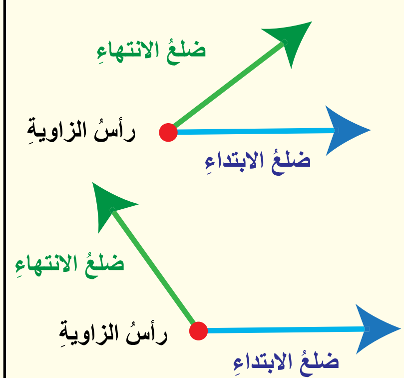
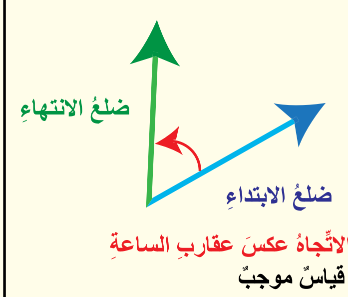
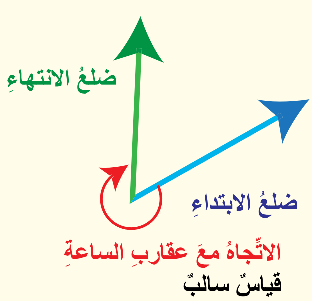
ماذا سأتعلَّمُ؟
- الوضعُ القياسيُّ للزاويةِ.
- دائرةُ الوحدةِ.
- ربطُ النسبِ المثلَّثيَّةِ بدائرةِ الوحدةِ.

مطعمٌ

تناولَ سعيدٌ وعائلتُهُ الطعامَ في مطعمٍ أرضيَّتُهُ مستديرةٌ ومتحرِّكةٌ بشكلٍ دائريٍّ. تحرَّكتِ الأرضيَّةُ بزاويةٍ مقدارُها $120°$ عكسَ عقاربِ الساعةِ. هلْ يختلفُ مكانُ طاولةِ سعيدٍ وعائلتِهِ؛ إذا تحرَّكتِ الأرضيَّةُ بزاويةٍ مقدارُها $240°$ معَ عقاربِ الساعةِ؟



مفاهيمُ خاصَّةٌ بالزاويةِ:

<table>
<tr><th colspan="3">الزاويةُ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">تعريفُها
شعاعانِ لهُما نقطةُ البدايةِ نفسُها، تُسمّى النقطةُ المشتركةُ رأسَ الزاويةِ، وأحدُ الشعاعانِ ضلعَ الابتداءِ والشعاعَ الآخرَ ضلعَ الانتهاءِ.
أمثلةٌ

</td><td colspan="2">قياسُ الزاويةِ
للزاويةِ قياسٌ موجبٌ وآخرُ سالبٌ.</td></tr>
<tr><td>القياسُ الموجبُ: عندَ الاتِّجاهِ عكسَ عقاربِ الساعةِ منْ ضلعِ الابتداءِ إلى ضلعِ الانتهاءِ.
أمثلةٌ

</td><td>القياسُ السالبُ: عندَ الاتِّجاهِ معَ عقاربِ الساعةِ منْ ضلعِ الابتداءِ إلى ضلعِ الانتهاءِ.
أمثلةٌ

</td></tr>
</table>

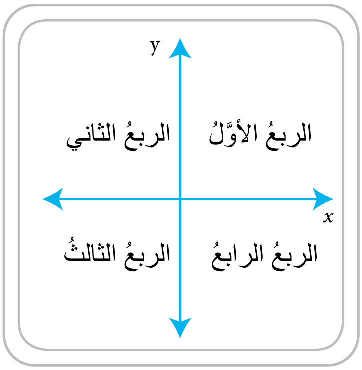
الوضعُ القياسيُّ للزاويةِ والزوايا الربعيَّةِ

تكونُ الزاويـةُ المرسـومةُ علـى المسـتوى الإحداثـيِّ فـي الوضـعِ القياسـيِّ؛ إذا حقَّقتْ الزاويـةُ ثلاثـةَ شـروطٍ، هـيَ:

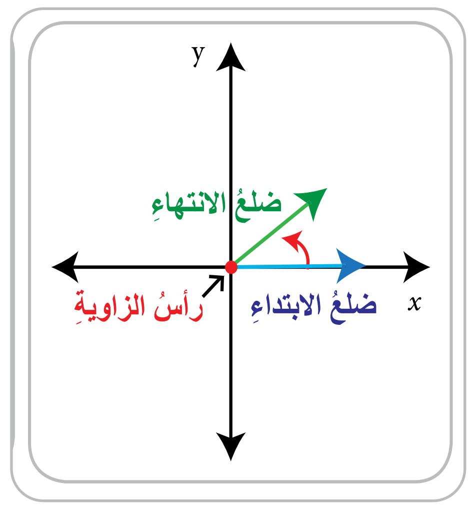
1) يقعُ رأسُ الزاويةِ عندَ نقطةِ الأصلِ.

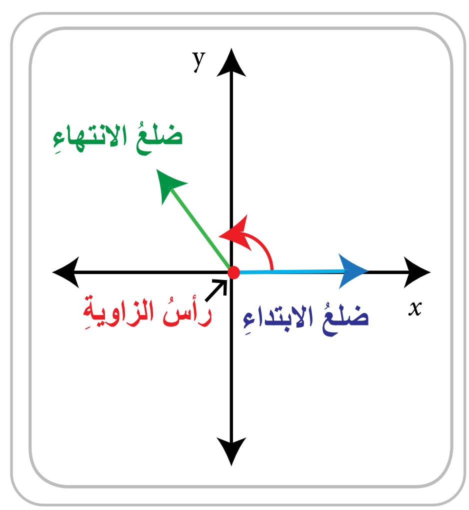
2) ينطبقُ ضلعُ الابتداءِ على محورِ x الموجبِ.

3) يقعُ ضلعُ الانتهاءِ في أحدِ الأرباعِ، أوْ على أحدِ المحاورِ الرئيسةِ للمستوى الإحداثيِّ.

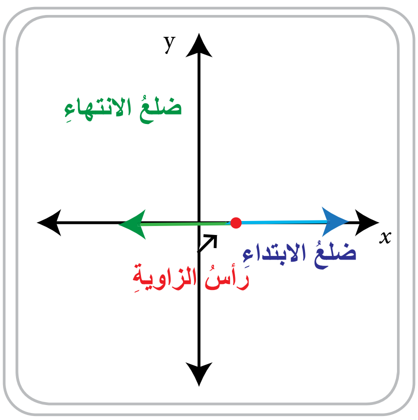


أمثلةٌ لزوايا في الوضعِ القياسيِّ:



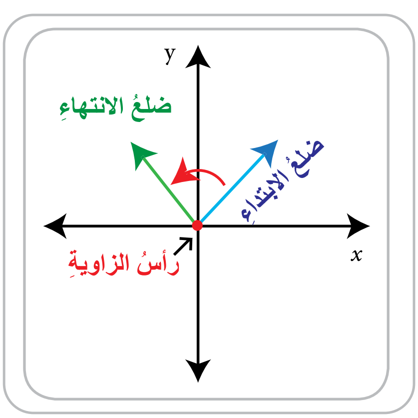


أمثلةٌ على زوايا ليستْ في الوضعِ القياسيِّ:



الزاويـةُ ليسـتْ فـي الوضعِ القياسـيِّ؛ لأنَّ رأسَـها:

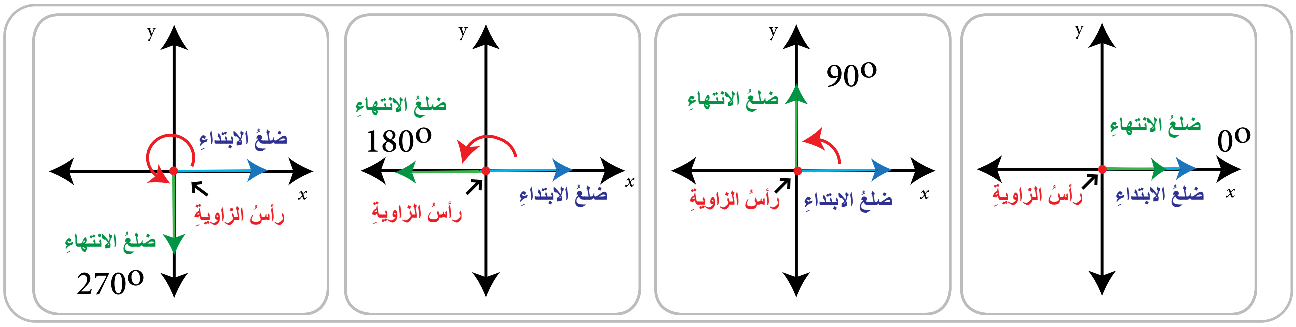
....



الزاويـةُ ليسـتْ فـي الوضـعِ القياسـيِّ؛ لأنَّ ضلـعَ الابتـداءِ: ....

إرشـادٌ: تقـعُ الزاويـةُ فـي الربـعِ الـذي يقـعُ فيـهِ ضلـعُ انتهائِهـا، وهـيَ مرسـومةٌ فـي الوضـعِ القياسـيِّ. فمثـلًا: الزاويـةُ التـي قياسُـها $120°$ تقـعُ فـي الربـعِ الثانـي؛ لأنَّ ضلـعَ انتهائِهـا يقـعُ فـي الربـعِ الثانـي.

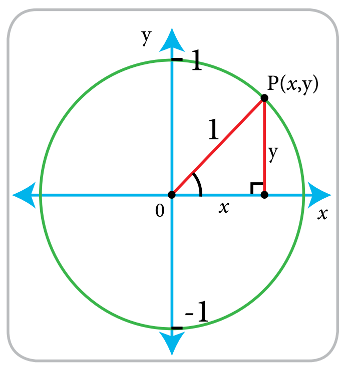
الزاويـةُ الربعيَّةُ: زاويـةٌ فـي الوضـعِ القياسـيِّ ينطبـقُ ضلـعُ الانتهـاءِ لَهـا علـى أحدِ المحـاورِ الرئيسـةِ فـي المسـتوى الإحداثـيِّ.



دائـرةُ الوحـدةِ: دائـرةٌ علـى المسـتوى الإحداثـيِّ يقـعُ مركزُهـا فـي نقطـةِ الأصـلِ، ونصـفُ قطرِهـا وحـدةٌ واحـدةٌ.

يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $P(x , y)$.

فتكونُ النسبُ المثلَّثيَّةُ الأساسيَّةُ هيَ:



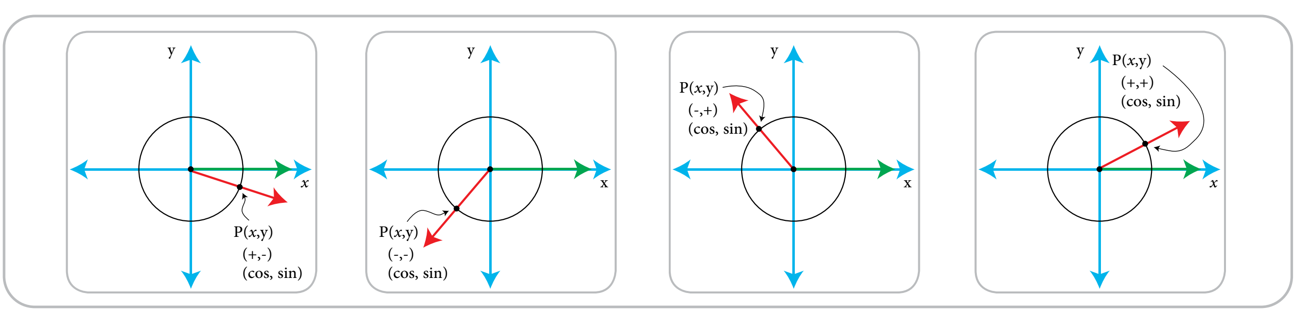
$$\cos\theta = \frac{\text{المجاورُ}}{\text{الوترُ}} = \frac{x}{1} = x \ ,$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}} = \frac{y}{1} = y \ ,$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابلُ}}{\text{المجاورُ}} = \frac{y}{x}$$

إشـارةُ النسـبِ المثلَّثيَّةِ الأساسيَّةِ: يُحـدِّدُ الربـعُ الـذي تقـعُ فيـهِ الزاويـةُ إشـارةَ النسـبِ المثلَّثيَّـةِ. وهـوَ نفسُـهُ موقـعُ النقطـةِ $P(x , y)$.

بالنظـرِ إلـى تمثيـلِ الزوايـا الآتـي، أسـتنتجُ إشـارةَ كلٍّ مـنْ $\tan\theta$, $\cos\theta$, $\sin\theta$ حسـبَ الربـعِ الـذي تقـعُ فيـهِ الزاويـةُ.



1 الزاويةُ في الربعِ الأوَّلِ
النسبُ المثلَّثيَّةُ الموجبةُ: ....
النسبُ المثلَّثيَّةُ السالبةُ: ....

2 الزاويةُ في الربعِ الثاني
النسبُ المثلَّثيَّةُ الموجبةُ: ....
النسبُ المثلَّثيَّةُ السالبةُ: ....

3 الزاويةُ في الربعِ الثالثِ
النسبُ المثلَّثيَّةُ الموجبةُ: ....
النسبُ المثلَّثيَّةُ السالبةُ: ....

4 الزاويةُ في الربعِ الرابعِ
النسبُ المثلَّثيَّةُ الموجبةُ: ....
النسبُ المثلَّثيَّةُ السالبةُ: ....

مثال (1)

أجدُ النسبَ المثلَّثيَّةَ الأساسيَّةَ لكلِّ زاويةٍ θ ممّا يأتي، والمرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، ويقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ بالنقاطِ الآتيةِ:

(1) P (0.8 , 0.6)   (2) P (-1 , 0)   (3) $P\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (4) P (0 , -1)

الحلُّ

(1) P (0.8 , 0.6)

$\cos\theta = x = 0.8$ $\sin\theta = y = 0.6$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0.6}{0.8} = = \frac{3}{4}$

(2) P (-1 , 0)

$\cos\theta = x = -1$ $\sin\theta = y = 0$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

(3) $P\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\cos\theta = x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin\theta = y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2$

(4) P (0 , -1)

$\cos\theta = x = 0$ $\sin\theta = y = -1$

$\tan\theta$ غيرُ معرَّفةٍ؛ لأنَّهُ لا يُمكنُني القسمةُ على صفرٍ

أحاول

أجدُ النسبَ المثلَّثيَّةَ الأساسيَّةَ لكلِّ زاويةٍ θ ممّا يأتي، والمرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، ويقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ بالنقاطِ الآتيةِ:

(1) P (- 0.8 , - 0.6)   (2) P (1 , 0)

(3) $P\left(\sqrt{\frac{3}{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ (4) P (0 , 1)

أنفِّذُ النشاطَ للإجابةِ عنِ السؤالِ الآتي: هلْ تُساعدُني معرفةُ نسبةٍ مثلَّثيَّةٍ واحدةٍ والربعِ الذي تقعُ فيه الزاويةُ على حسابِ بقيَّةِ النسبِ المثلَّثيَّةِ الأساسيَّةِ؟

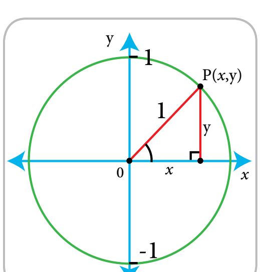
نشاطٌ

أُطبِّقُ نظريَّةَ فيثاغورس على المثلَّثِ المجاورِ: $x^2 + \dots = \dots$

أُعوِّضُ بكلٍّ ممّا يأتي: $\cos\theta = x$ ، $\sin\theta = y$

فأحصلُ على: $\cos^2\theta + \dots\dots = \dots\dots\dots$

وأيضًا: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \dots\dots$



مثال (2)

إذا كانتْ θ زاويةً تقعُ في الربعِ الثالثِ، وكانَ $\tan\theta = 3$؛ فأجدُ قيمةَ كلٍّ منْ $\cos\theta, \sin\theta$.

الحلُّ

تعويضٌ: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 3$

بالضربِ التبادليِّ: $\sin\theta = 3\cos\theta$........ (1)

نظريَّةُ فيثاغورس: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ...(2)

تعويضُ المعادلةِ (1) في (2). $\cos^2\theta + (3\cos\theta)^2 = 1$

تربيعُ $3\cos\theta$: $\cos^2\theta + 9\cos^2\theta = 1$

تبسيطٌ: $10\cos^2\theta = 1$

قسمةُ الطرفَينِ على 10: $\cos^2\theta = \dfrac{1}{10}$

أخذُ الجذرِ التربيعيِّ لطرفَي المعادلةِ فينتجُ حلّانِ: $\cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

أُهمِلُ الإشارةَ الموجبةَ؛ لأنَّ ضلعَ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثالثِ،

والنسبةُ cos سالبةٌ للزاويةِ في الربعِ الثالثِ: $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

تعويضٌ: $\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

أحاولُ

إذا كانتْ θ زاويةً تقعُ في الربعِ الثالثِ، وكانَ $\cos\theta = 0.3$ ؛ فأجدُ قيمةَ كلٍّ منْ $\tan\theta$، $\sin\theta$.

أختبرُ تعلُّمي

1) أُحدِّدُ الربعَ الذي تقعُ فيهِ كلُّ زاويةٍ منَ الزوايا الآتيةِ؛ إذا رُسِمتْ في الوضعِ القياسيِّ:

(1) 43° (2) 290° (3) 110° (4) -110°

2) أجدُ النسبَ المثلَّثيَّةَ لكلِّ زاويةٍ θ منَ الزوايا الآتيةِ، والمرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ والتي تقطعُ دائرةَ الوحدةِ بالنقطةِ:

(1) $P\left(\dfrac{6}{\sqrt{45}} ، \dfrac{3}{\sqrt{45}}\right)$ (2) $P\left(\dfrac{-2}{5} , \dfrac{\sqrt{21}}{5}\right)$

3) أجدُ النسبتَينِ المثلَّثتَينِ الأساسيَّتَينِ الباقيتَينِ في الحالاتِ الآتيةِ:

1) $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$, $90° < \theta < 180°$ 2) $\tan\theta = -3$, $270° < \theta < 360°$

4) هلْ يُمكنُ لزاويةٍ θ مرسومةٍ في الوضعِ القياسيِّ، بحيثُ $\sin\theta = 0.5$ و $\tan\theta = -0.58$، أنْ يكونَ قياسُها 210° ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

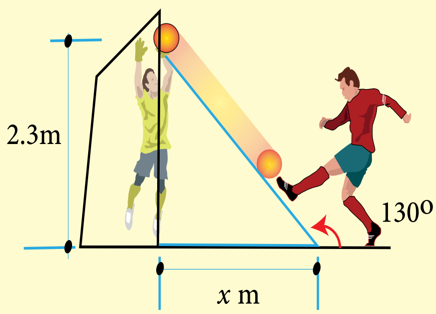
النسبُ المثلَّثيَّةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ

ماذا سأتعلَّمُ؟

- الزاويةُ المرجعيَّةُ.
- معكوسُ النسبةِ المثلَّثيَّةِ.

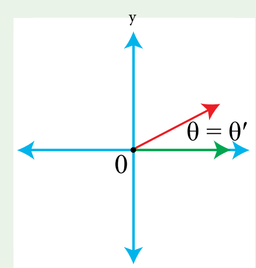
كرةُ قدمٍ

يقذفُ عمرُ كرةً إلى المرمى بزاويةٍ مقدارُها $130°$ معَ المحورِ الأفقيِّ الموجبِ، منْ بُعدِ x m، كما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ المجاورِ؛ فالتقطَها حارسُ المرمى على ارتفاعِ 2.3 m أجدُ المسافةَ x باستعمالِ إحدى النسبِ المثلَّثيَّةِ.

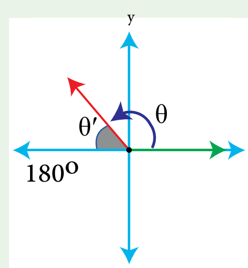


تُسمّى الزاويةُ الحادَّةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ الانتهاءِ للزاويةِ θ والمحورِ x الزاويةَ المرجعيَّةَ θ' للزاويةِ θ.

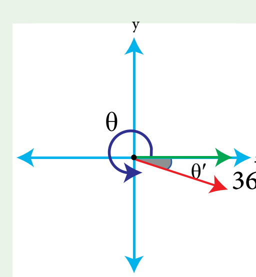
في الربعِ الأوَّلِ: $\theta' = \theta$



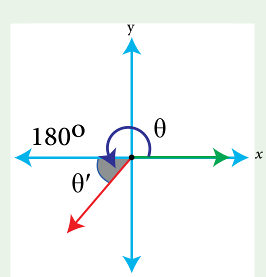
في الربعِ الثاني: $\theta' = 180° - \theta$



في الربعِ الرابعِ: $\theta' = 360° - \theta$



في الربعِ الثالثِ: $\theta' = \theta - 180°$



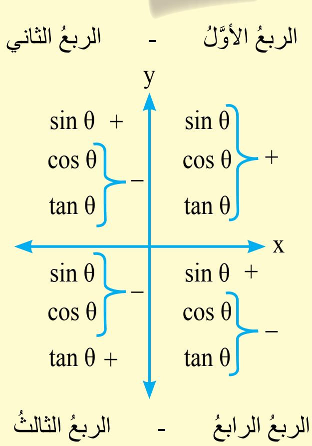
تُحدِّدُ القِيَمُ العدديَّةُ للنسبِ المثلَّثيَّةِ للزاويةِ θ'، باستعمالِ القِيَمِ العدديَّةِ للنسبِ المثلَّثيَّةِ للزاويةِ θ، ويُحدِّدُ الربعُ الذي تقعُ فيهِ الزاويةُ إشارةَ النسبةِ المثلَّثيَّةِ للزاويةِ θ.

أتذكَّرُ

النسبُ المثلَّثيَّةُ لزوايا خاصَّةٍ

θ	sin θ	cos θ	tan θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

أتذكَّرُ



مثالٌ (1)

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $\sin 120°$ (2) $\tan 330°$

الحلُّ

(1) $\sin 120°$

120° تقعُ في الربعِ الثاني:

الزاويةُ المرجعيَّةُ للزاويةِ في الربعِ الثاني: $\theta' = 180° - \theta$

تعويضُ $\theta = 120°$: $\theta' = 180° - 120° = 60°$

120° زاويةٌ في الربعِ الثاني، والنسبةُ sin موجبةٌ: $\sin 120° = + \sin 60°$

60° زاويةٌ خاصَّةٌ: $= + \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan 330°$

330° تقعُ في الربعِ الرابعِ:

الزاويةُ المرجعيَّةُ للزاويةِ في الربعِ الرابعِ: $\theta' = 360° - \theta$

تعويضُ $\theta = 330°$: $\theta' = 360° - 330° = 30°$

330° زاويةٌ في الربعِ الرابعِ، والنسبةُ tan سالبةٌ: $\tan 330° = - \tan 30°$

30° زاويةٌ خاصَّةٌ: $= - \frac{1}{\sqrt{3}}$

أحاول

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $\cos 225°$ (2) $\sin 330°$

يُمكنُ أنْ تكونَ الزاويةُ المرجعيَّةُ للزاويةِ θ ليستْ منَ الزوايا الخاصَّةِ. وفي هذِهِ الحالةِ؛ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ في إيجادِ النسبِ المثلَّثيَّةِ الأساسيَّةِ، كما هوَ موضَّحٌ في المثالِ الآتي.

مثالٌ (2)

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $\sin 200°$ (2) $\cos 320°$

الحلُّ

(1) $\sin 200°$

200° تقعُ في الربعِ الثالثِ:

الزاويةُ المرجعيَّةُ لزاويةٍ في الربعِ الثالثِ: $\theta' = \theta - 180°$

تعويضُ $\theta = 200°$: $\theta' = 200° - 180° = 20°$

200° زاويةٌ في الربعِ الثالثِ، والنسبةُ sin سالبةٌ: $\sin 200° = - \sin 20°$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ بالضغطِ على مفتاحِ Sin ثمَّ 20، ثمَّ مفتاح = كالآتي؛ لأحصلَ على النتيجةِ:

Sin 2 0 = 0.342020143332

بالتقريبِ لـ 3 منازل عشريَّةٍ: $\sin 200° = -\sin 20° = -0.342$

(2) $\cos 320°$

320° تقعُ في الربعِ الرابعِ:

الزاويةُ المرجعيَّةُ لزاويةٍ في الربعِ الرابعِ: $\theta' = 360° - \theta$

تعويضُ $\theta = 320°$: $\theta' = 360° - 320° = 40°$

320° زاويةٌ في الربعِ الرابعِ، والنسبةُ cos موجبةٌ: $\cos 320° = +\cos 40°$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ بالضغطِ على مفتاحِ cos ثمَّ 20، ثمَّ مفتاح = كالآتي؛ لأحصلَ على النتيجةِ:

cos 4 0 = 0.766044443311

بالتقريبِ لـ 3 منازل عشريَّةٍ: $\cos 320° = \cos 40° = 0.766$

أحاول

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $\sin 130°$

(2) $\cos 200°$

(3) $\tan 315°$

يُمكنُني إيجادُ الزاويةِ؛ إذا علمتُ إحدى النسبِ المثلَّثيَّةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثالٌ (3)

أجدُ قِيَمَ θ التي تجعلُ $\sin \theta = -0.65$ حيثُ $0° \leq \theta \leq 360°$

الحلُّ

θ تقعُ في الربعِ الثالثِ أو الرابعِ: $\sin \theta = -0.65$

الإشارةُ تُحدِّدُ الربعَ.

القيمةُ العدديَّةُ تُحدِّدُ الزاويةَ.

إيجادُ الزاويةِ المرجعيَّةِ؛ باستعمالِ معكوسِ النسبةِ المثلَّثيَّةِ: $\theta' = \sin^{-1}(0.65)$

استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ كما يأتي:

shift Sin 0 . 6 5 = 40.54160187

التقريبُ إلى منزلةٍ عشريَّةٍ واحدةٍ: $\theta' = \sin^{-1}(0.65) = 40.5°$

في الربعِ الثالثِ: $\theta' = \theta - 180° \Rightarrow \theta = \theta' + 180°$

تعويضُ $\theta' = 40.5°$

$\theta = 40.5° + 180° = 220.5°$

في الربعِ الرابعِ:

$\theta' = 360° - \theta \Rightarrow \theta = 360° - \theta'$

تعويضُ الزاويةِ المرجعيَّةِ θ':

$\theta = 360° - 40.5° = 319.5°$

أحاول

أجدُ قِيَمَ θ التي تجعلُ $\cos\theta = -0.41$ حيثُ $0° \le \theta \le 360°$

أختبرُ تعلُّمي

1) أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $\sin 135°$ (2) $\cos 240°$ (3) $\cos 300°$

(4) $\tan 90°$ (5) $\sin 42°$ (6) $\tan 318°$

2) أجدُ قيمةَ الزاويةِ θ مقرَّبةً إلى منزلةٍ عشريَّةٍ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ $0° \le \theta \le 360°$

(1) $\cos\theta = 0.32$ (2) $\sin\theta = -1$ (3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

3) تقولُ عبيرُ إنَّ قيمةَ الزاويةِ θ الوحيدةَ التي تجعلُ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ هيَ $30°$؛ فهلْ هيَ على صوابٍ؟ أُبرِّرُ إجابَتي.

4) أجدُ قيمةَ: $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + \ldots + \cos^2 177° + \cos^2 178° + \cos^2 179°$

التقويمُ الختاميُّ

نشاطٌ

خطواتُ النشاطِ:

1) أرسمُ المستوى الإحداثيَّ على ورقِ الرسمِ البيانيِّ.

2) أرسمُ الزاويةَ $110°$ على المستوى الإحداثيِّ في الوضعِ القياسيِّ باستخدامِ المنتقلةِ.

3) أرسمُ دائرةَ الوحدةِ (وهيَ دائرةٌ نصفُ قطرِها وحدةٌ واحدةٌ، ومركزُها نقطةُ الأصلِ).

4) أجدُ قيمةً تقريبيَّةً لإحداثيَّي نقطةِ تقاطعِ ضلعِ الانتهاءِ للزاويةِ، في الوضعِ القياسيِّ معَ دائرةِ الوحدةِ.

5) عن طريقِ الرسمِ؛ أجدُ قيمةً تقريبيةً لكلٍّ ممّا يأتي:

$\sin 110°$, $\cos 110°$, $\tan 110°$.

6) أجدُ الزاويةَ المرجعيَّةَ للزاويةِ $110°$.

7) أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ النسبِ المثلَّثيَّةِ الأساسيَّةِ للزاويةِ المرجعيَّةِ.

8) أُقارِنُ نتائجَ الخطوتَينِ 5 و7

9) أجدُ قيمةَ $\sin 250°$ و $\cos 250°$ و $\tan 250°$.

10) أجدُ قِيَمَ θ الممكنةَ جميعَها إلى أقربِ درجةٍ، التي تجعلُ $\cos\theta = 0.34$ ، حيثُ $0° \leq \theta \leq 360°$

المجال: الأنماطُ والجبرُ والاقترانات

المحور: الاقتراناتُ

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ	قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتُ النسبيَّةُ	تركيبُ الاقتراناتِ	الاقترانُ العكسيُّ
- أتعرَّفُ اقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ. - أجدُ ناتجَ عمليّاتِ الجمعِ والطرحِ والضربِ، على كثيراتِ الحدودِ.	- أجدُ ناتجَ قسمةِ اقترانٍ كثيرِ حدودٍ على آخرَ. - أتعرَّفُ الاقترانَ النسبيَّ، وأجدُ مجالَهُ ومداه.	- أتعرَّفُ الاقترانَ المركَّبَ وشروطَهُ. - أجدُ قاعدةَ اقترانٍ مركَّبٍ؛ إذا علمتُ قاعدتَي مركَّبتَيهِ.	- أتعرَّفُ الاقترانَ العكسيَّ وشروطَهُ. - أجدُ قاعدةَ الاقترانِ العكسيِّ، وأُحدِّدُ مجالَهُ ومداه. - أتعرَّفُ الاقترانَ الجذريَّ ومجالَهُ ومداه.
قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ بُعداها $(6x+5)$، و$(2x-1)$ وحدةَ طولٍ، حيثُ $x > ½$ ما طولُ السياجِ اللازمِ لإحاطةِ قطعةِ الأرضِ؟ وما مِساحةُ قطعةِ الأرضِ؟	لدى حسامٍ مبلغٌ منَ المالِ، وأرادَ توزيعَ زكاةِ أموالِهِ المقدرةِ بالمقدار $(2x^4 + x^3 + 4x^2 + 1)$ على $(2x+1)$ فقيرًا ما نصيبُ كلِّ فقيرٍ منْ أموالِ الزكاةِ؟	يزرعُ سعيدٌ عددًا منْ أشجارِ الزيتونِ على قطعةِ أرضٍ مِساحتُها (x) مترًا مربَّعًا، وقدْ قدَّرَ كمِّيَّةَ الإنتاجِ منَ الزيتونِ بالاقترانِ $f(x) = 30x$ ، كَما أرادَ التنبُّؤَ بإيرادِهِ منْ بيعِ (f) منَ المحصولِ وفقَ المعادلةِ: $g(f) = 2f-5$، فَما إيرادُ سعيدٍ منْ بيعِ إنتاجِ أرضِهِ بدلالةِ x؟	إذا كانَ $g(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ يُمثِّلُ حجمَ كرةٍ طولُ نصفِ قطرِها x cm. فما طولُ نصفِ قطرِ كرةٍ حجمُها $971cm^3$؟

أختبر نفسي

أوَّلًا: أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي بأبسطِ صورةٍ:

1) $5x + 4xy + 2x - 6xy$

2) $3x^2 + y^2 + x + 5y^2$

3) $2x(x + 4)$

4) $(5y + 1)(3x - y)$

5) $3x^4 \times 2x^5$

6) $\dfrac{18x^9}{2x^3}$

ثانيًا: أُمثِّلُ الاقتراناتِ الآتيةَ بيانيًّا:

1) $f(x) = 2x+1$

2) $g(x) = 2x^2 - 4x + 5$

3) $q(x) = 4 - x^2$

أتذكَّرُ

أولًا : أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي بأبسطِ صورةٍ:

1) $x^2 + 5 + 3xy - 4x^2 + 2$

$= (x^2 - 4x^2) + 3xy + (5 + 2)$

بتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ ذاتِ المتغيِّرِ والأُسِّ نفسِهِ:

$= -3x^2 + 3xy + 7$

2) $-2x^3 \times 5x^2 = (-2 \times 5)(x^3 \times x^2)$

$= -10x^5$ بضربِ الثوابتِ وجمعِ الأُسسِ:

3) $(2x + 3)(x - y) = 2x(x - y) + 3(x - y)$

$= 2x^2 - 2xy + 3x - 3y$

4) $\dfrac{6x^5}{2x^4} = 3x^{(5-4)} = 3x^1$ بقسمةِ الثوابتِ وطرحِ الأُسسِ:

ثانيًا : أُمثِّلُ الاقترانَ التربيعيَّ الآتيَ بيانيًّا:

$h(x) = x^2 - 2x + 3$

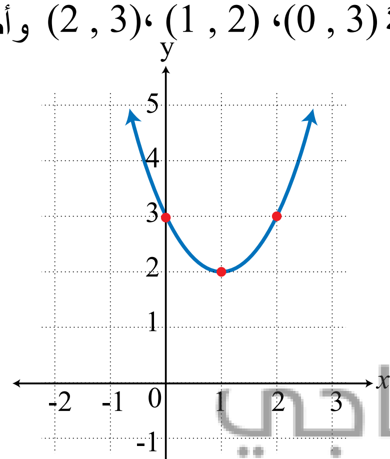
الاقترانُ $h(x)$: على الصورةِ $ax^2 + bx + c$

حيثُ: $a = 1$ ، $b = -2$ ، $c = 3$

أجدُ قيمةَ $\dfrac{-b}{2a}$ التي تُساوي $\dfrac{-(-2)}{2\times 1}$ وتُساوي 1، التي تُمثِّلُ الإحداثيَّ x لرأسِ المنحنى، ثم أُكوِّنُ جدولًا يحتوي على نقطةِ رأسِ المنحنى، ونقاطٍ قبلَها وبعدَها كالآتي:

x	0	$\frac{-b}{2a} = 1$	2
$h(x)$	3	2	3

أُعيِّنُ الأزواجَ المرتَّبةَ (0 , 3)، (1 , 2)، (2 , 3) وأَصِلُ بينَها بمنحنًى كالآتي:

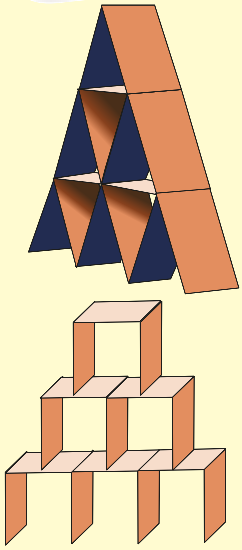


اقترانات كثيراتِ الحدودِ

ماذا سأتعلَّم؟

- اقترانُ وحيدِ الحدِّ بمتغيِّرٍ واحدٍ.
- كثيرُ الحدودِ.
- درجةُ كثيرِ الحدودِ.
- الصورةُ القياسيَّةُ.
- التمثيلُ البيانيُّ.
- جمعُ كثيراتِ الحدودِ وطرحُها وضربُها.

أشكالٌ بالبطاقاتِ



عددُ البطاقاتِ اللازمةِ لتكوينِ شكلٍ هرميٍّ عددُ صفوفِهِ x كَما في الشكلِ المجاورِ يُعطى بالاقترانِ: $f(x) = \frac{x}{2}(3x+1)$ ، وعددُ البطاقاتِ اللازمةِ لتكوينِ شكلِ درجٍ مكوَّنٍ منْ x منَ الصفوفِ كَما في الشكلِ المجاورِ يُعطى بالاقترانِ: $g(x) = x^2 + 2x$. فَما مجموعُ البطاقاتِ اللازمةِ لتكوينِ شكلَينِ هرميٍّ ودرجيٍّ مكوَّنٌ كلٌّ منْهُما منْ x صفًّا. وكمْ يزيدُ عددُ بطاقاتِ الشكلِ الدرجيِّ على الشكلِ الهرميِّ؟

الاقترانُ وحيدُ الحدِّ بمتغيِّرٍ واحدٍ، هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ ناتجُ ضربِ ثابتٍ بمتغيِّرٍ مرفوعٍ لأُسٍّ صحيحٍ غيرِ سالبٍ، مثل: 20 ، $\frac{1}{3}x^2$ ، $2x$

$f(x) = 2\,x^3$

معاملٌ — متغيِّرٌ — أُسٌّ صحيحٌ غيرُ سالبٍ

الاقترانُ كثيرُ الحدودِ، هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ وحيدُ الحدِّ أوْ مجموعُ وحيداتِ حدودٍ بمتغيِّرٍ واحدٍ، مثل:

اقترانُ وحيدِ الحدِّ: $f(x) = 5$

مجموعُ وحيداتِ حدودٍ: $g(x) = 2x^7 + x^2 - 3$

مجالُ اقترانِ كثيرِ الحدودِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ.

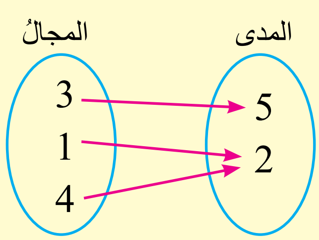
أتذكَّرُ

العلاقةُ: تربطُ عناصرَ بينَ مجموعتَينِ، تُسمّى المجموعةُ الأولى المجالَ، وتُسمّى المجموعةُ الثانيةُ المدى.

الاقترانُ: علاقةٌ يرتبطُ فيها كلُّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المدى.

أشكالُ الاقترانِ:

1) مخطَّطٌ سهميٌّ.



2) أزواجٌ مرتَّبةٌ:

مثلُ $\{(3,5), (1,2), (4,2)\}$

المجالُ $= \{3, 1, 4\}$ ، المدى $= \{5, 2\}$

3) قاعدةٌ تُعبِّرُ عنهُ، مثلُ: $f(x) = 2x + 1$

المجالُ: قيَمُ (x) ومجالُ الاقترانِ (f) هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ.

المدى: قيَمُ $f(x)$ بعدَ التعويضِ، ومدى الاقترانِ (f) هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ.

الصورةُ القياسيَّةُ لاقترانِ كثيرِ الحدودِ، هيَ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، x متغيِّرٌ،

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots , a_1 , a_0$ أعدادٌ حقيقيَّةٌ تُسمّى معاملاتِ الحدودِ، حيثُ $a_n \neq 0$.

يُسمّى a_n المعاملَ الرئيسَ، a_0 الحدَّ الثابتَ، n درجةَ كثيرِ الحدودِ وهوَ أكبرُ أُسٍّ لـ x.

ألاحظُ في اقترانِ كثيرِ الحدودِ الآتي، أنَّ الأُسسَ مرتَّبةٌ منَ الأكبرِ إلى الأصغرِ، ولم تُكتبِ الحدودُ التي معاملاتُها أصفارٌ.

$$f(x) = \frac{1}{2} x^5 + 9x^2 - x - 3$$

المعاملُ الرئيسُ هوَ $a_5 = \frac{1}{2}$ لأنَّ $\frac{1}{2}$

n=5 إذنْ: الاقترانُ منَ الدرجةِ الخامسةِ، وهوَ أكبرُ أُسٍّ لـ x.

الحدُّ الثابتُ -3 أيْ إنَّ $a_0 = -3$

كثيرُ الحدودِ الصفريُّ هوَ $f(x) = 0$، وهوَ كثيرُ حدودٍ معاملاتُهُ جميعُها أصفارٌ وليسَ لهُ درجةٌ.

مثالٌ (1)

أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ اقترانُ كثيرِ حدودٍ؟ وأيُّها ليسَ اقترانَ كثيرِ حدودٍ؟ أكتبُ الصورةَ القياسيَّةَ والدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ للاقترانِ كثيرِ الحدودِ مِنْها.

1) $f(x) = 5x - \sqrt{3}x^2 + 2$ 2) $g(x) = 4x^3 - x$ 3) $h(x) = 4x^{-2} + 1$

الحل

1) $f(x) = 5x - \sqrt{3}x^2 + 2$

كثيرُ حدودٍ مكوَّنٌ منْ مجموعِ وحيداتِ حدودٍ.

أرتِّبُ الحدودَ منَ الأُسسِ الأكبرِ إلى الأصغرِ؛ لأكتبَ كثيرَ الحدودِ بالصورةِ القياسيَّةِ.

$$f(x) = -\sqrt{3}x^2 + 5x + 2$$

وهوَ منَ الدرجةِ الثانيةِ؛ لأنَّ $n = 2$ وأنَّ المعاملَ الرئيسَ يُساوي $-\sqrt{3}$ لأنَّ $a_2 = -\sqrt{3}$ وأنَّ الحدَّ الثابتَ هوَ $a_0 = 2$

2) $g(x) = 4x^3 - x$

كثيرُ حدودٍ مكوَّنٌ منْ مجموعِ وحيداتِ حدودٍ، ومكتوبٌ بالصورةِ القياسيَّةِ $g(x) = 4x^3 - x$

وهوَ منَ الدرجةِ الثالثةِ؛ لأنَّ $n = 3$ وأنَّ المعاملَ الرئيسَ يُساوي 4؛ لأنَّ $a_3 = 4$ وأنَّ الحدَ الثابتَ هوَ $a_0 = 0$

3) $h(x) = 4x^{-2} + 1$

الاقترانُ ليسَ اقترانَ كثيرِ حدودٍ؛ لأنَّ المتغيِّرَ في الحدِّ $4x^{-2}$ مرفوعٌ للأُسِّ -2 وهوَ عددٌ صحيحٌ سالبٌ.

أُحاوِلُ

أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ اقترانُ كثيرِ حدودٍ؟ وأيُّها ليسَ اقترانَ كثيرِ حدودٍ؟ أكتبُ الصورةَ القياسيَّةَ والدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ للاقترانِ كثيرِ الحدودِ مِنْها.

1) $f(x) = 5 - \frac{3}{2} x^4$ 2) $g(x) = 7$ 3) $h(x) = 3\sqrt{x^3} + 2x + 1$

أتعلَّمُ مجالُ كثيرِ الحدودِ ومداه، هما مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أوْ مجموعةٌ جزئيَّةٌ مِنْها.

مثالٌ (2)

أُمثِّلُ بيانيًّا الاقترانَ $f(x) = x^3 + 2.5\, x^2 \,,\, -3 \le x \le 1$ وأُحدِّدُ مجالَهُ ومداه.

الحلُّ

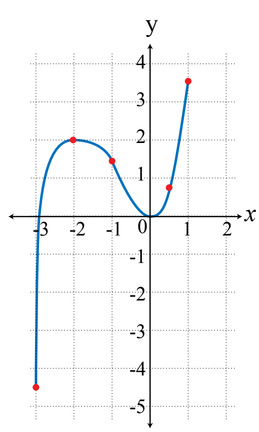
مجالُ الاقترانِ هوَ قِيَمُ x التي يُسمحُ بتعويضِها في الاقترانِ $f(x)$، وتُساوي $[\,-3 \,,\, 1\,]$.

والمدى هو نتائجُ التعويضِ في الاقترانِ $f(x)$ وهيَ $[\,f(-3) \,,\, f(1)] = [-4.5 \,,\, 3.5\,]$

أُكوِّنُ جدولَ القِيَمِ الآتي:

x	-3	-2	-1	0	0.5	1
$f(x)$	-4.5	2	1.5	0	0.75	3.5
$(x\,,\,y)$	(-3 , -4.5)	(-2 , 2)	(-1 , 1.5)	(0 , 0)	(0.5 , 0.75)	(1 , 3.5)

أُعيِّنُ الأزواجَ المرتَّبةَ على المستوى الإحداثيِّ، وأصلُ بينَها بخطٍّ منحنٍ كَما في الشكلِ المجاورِ.



أُحاوِلُ

أُمثِّلُ الاقترانَ

$g(x) = x^3 \quad , -2 \le x \le 2$ بيانيًّا.

جمعُ اقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ وطرحُها

لجمعِ اقترانَينِ كثيرَي الحدودِ؛ أُجمِّعُ الحدودَ المتشابهةَ (وهيَ التي تمتلكُ المتغيِّراتِ والأسسَ ذاتَها، ولا يُشترطُ تساوي المعاملاتِ)، ثمَّ أَجمعُ معاملاتِها، وأرمزُ لعمليَّةِ الجمعِ بـ $f(x) + g(x)$، وأرمزُ لعمليَّةِ طرحِ الاقترانِ $g(x)$ من $f(x)$ بـ $f(x) - g(x)$ وتُساوي $f(x) + (-\,g(x))$.

مثالٌ (3)

إذا كانَ $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - x$ ، $g(x) = -5x^3 - x^2 - 2x + 1$ ؛ فأجدْ ناتجَ $f(x) + g(x)$ و $f(x) - g(x)$

الحلُّ

1) $f(x) + g(x) = (5x^4 + 3x^2 - x) + (-5x^3 - x^2 - 2x + 1)$

$= 5x^4 + -5x^3 + (3x^2 + -x^2) + (-x + -2x) + 1$

$= 5x^4 + -5x^3 + (3 + -1)x^2 + (-1 + -2)x + 1$

$= 5x^4 + -5x^3 + 2x^2 + -3x + 1$

2) $f(x) - g(x) = (5x^4 + 3x^2 - x) - (-5x^3 - x^2 - 2x + 1)$

$= (5x^4 + 3x^2 - x) + (5x^3 + x^2 + 2x - 1)$

$= 5x^4 + 5x^3 + (3x^2 + x^2) + (-x + 2x) + (-1)$

$= 5x^4 + 5x^3 + (3 + 1)x^2 + (-1 + 2)x + (-1)$

$= 5x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 1x - 1$

أُحاوِلُ

إذا كانَ $g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 2$, $h(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$؛ فأجدُ ناتجَ: $h(x) + g(x)$ و $g(x) - h(x)$

ضربُ كثيراتِ الحدودِ

أرمزُ لعمليَّةِ ضربِ اقترانِ كثيرِ حدودٍ $f(x)$ في اقترانِ كثيرِ حدودٍ آخرَ $g(x)$ بالرمزِ $f(x) . g(x)$
عندَ ضربِ كثيراتِ حدودٍ؛ أستعملُ خاصيَّةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ.

أتذكَّرُ

خاصيَّةُ توزيعِ الضربِ على الجمعِ:

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

$(a+b) \times (c+d) =$

$(a \times c) + (a \times d) + (b \times c) + (b \times d)$

مثالٌ (4)

1) $f(x) . g(x) = (2x + 3) . (x^3 + x - 2)$

$= 2x . x^3 + 2x . x + 2x . (-2) + 3 . x^3 + 3 . x + 3 . (-2)$ بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ:

$= 2x^4 + 2x^2 + -4x + 3x^3 + 3x - 6$

بضربِ معاملاتِ الحدودِ، وتطبيقِ قاعدةِ ضربِ المقاديرِ الأُسيَّةِ.

$= 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + (-1)x + (-6)$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، وكتابةِ الناتجِ بالصورةِ القياسيَّةِ.

أتذكَّرُ

قاعدةُ ضربِ المقاديرِ الأُسيَّةِ:

$a^n . a^m = a^{n+m}$

أُحاوِلُ

إذا كانَ $f(x) = 2x^4 + x + 1$, $g(x) = 5x^2 + x$؛ فأجدُ ناتجَ: $f(x) . g(x)$

أختبرُ تعلُّمي

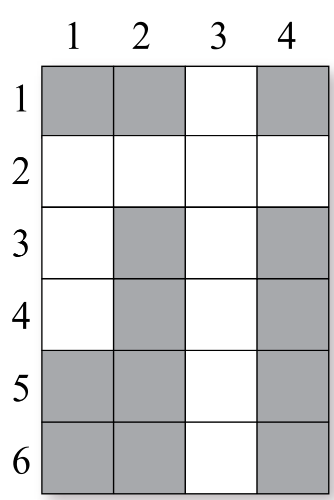
1) إذا كانَ $f(x) = x^5 -5x$ ، $g(x)= x^2 + 3x$؛ فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

(1) درجةُ $f(x)$ والمعاملُ الرئيسُ والحدُّ الثابتُ لهُ.

(2) الصورةُ القياسيَّةُ للاقترانِ $f(x)$.

(3) $f(x) + g(x)$ (4) $g(x) - f(x)$ (5) $f(x) . g(x)$

2) ليكنْ $f(x) = -4x^5 + 2x$, $g(x) = 2x -6x^2 + 2$. أملأُ المربَّعاتِ الفارغةَ في الشكلِ بالحدِّ الجبريِّ المناسبِ؛ بحيثُ تُحقِّقُ الآتيَ:



المربّعاتُ الأُفقيَّةُ:

(1) $4x^2$ (2) ناتجُ $f(x) + g(x)$

(3) النظيرُ الجمعيُّ للحدِّ $a_2 x^2$ للاقترانِ $g(x)$ ، $-8x^6$

(4) معكوسُ الحدِّ الثابتِ لـ $g(x)$، درجةِ $g(x)$ مضروبًا بـ $12 x^7$

المربّعاتُ العموديَّةُ

(1) ناتجُ $f(x) - g(x)$ (2) المعاملُ الرئيسُ لـ $g(x)$ مضروبًا بـ x^2

(3) ناتجُ $f(x) . g(x)$ (4) الحدُ الثابتُ لـ $g(x)$

هذهِ روابطُ لتمارينِ جمعِ كثيراتِ حدودٍ وطرحِها وضربِها:

https://www.ixl.com/math/algebra-1/add-and-subtract-polynomials-using-algebra-tiles

قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقترانات النسبيَّةُ

ماذا سأتعلَّمُ؟

- قسمةُ كثيراتِ الحدودِ.
- الاقترانُ النسبيُّ ومجالُهُ ومداهُ.

مصنعُ الألبانِ

يُنتجُ مصنعُ ألبانٍ يوميًّا، ما مقدارُهُ: $(2x^3 + 9x^2 + 10x + 3)$ لترًا منَ الحليبِ، يُرادُ تعبئتُها في عبوّاتٍ سعةُ كلٍّ منها $(2x+1)$ لترًا، فكم عبوّةً يُنتجُ المصنعُ يوميًّا؟

أتذكَّرُ

قاعدةُ قسمةِ المقاديرِ الأُسيِّةِ:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , a \neq 0$$

أُلاحظُ أنَّ إيجادَ عددِ العبوّاتِ المنتَجةِ في مسألةِ مصنعِ الألبانِ، يحتاجُ إلى إجراءِ عمليَّةِ قسمةِ كثيرِ حدودٍ على كثيرِ حدودٍ آخرَ.

يُمكنُني إجراءُ قسمةِ اقترانِ كثيرِ حدودٍ $f(x)$ على كثيرِ حدودٍ آخرَ $g(x)$ حيثُ $g(x) \neq 0$، إذا كانتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تُساوي درجةَ $g(x)$.

أُسمّي $f(x)$ المقسومَ و $g(x)$ المقسومَ عليهِ.

عندَ قسمةِ $f(x)$ على $g(x)$ ، أكتبُ الاقترانَ $f(x)$ بالصورةِ القياسيَّةِ مُضمِّنا الحدودَ جميعَها منَ الحدِّ ذي الأسِّ الأكبرِ إلى الثابتِ، وأكتبُ أصفارًا مكانَ معاملاتِ الحدودِ غيرِ الموجودةِ.

فمثلًا $f(x) = 3x^4 + x + 5$ تصبحُ:

$$f(x) = 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 5$$

أستعملُ خوارزميَّةَ القسمةِ:

ناتجُ القسمةِ

المقسومُ عليهِ ← $g(x) \overline{)\, f(x)}$ → المقسومُ

خطواتُ القسمةِ: أبدأُ ← قسمةٌ ← ضربٌ ← طرحٌ ← قفْ

أُكرِّرُ الخطواتِ إذا كانتْ درجةُ ناتجِ الطرحِ أكبرَ منْ أوْ تُساوي درجةِ المقسومِ عليهِ.

إذا كانتْ درجةُ ناتجِ الطرحِ أصغرَ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.

مثالٌ (1)

أجدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^2 + 5x^4 + 7$ على $g(x) = x + 2$

الحلُّ

أكتبُ $f(x)$ بالصورةِ القياسيّةِ مضمِّنًا الحدودَ التي معاملاتُها أصفارٌ كَما يأتي:

$$f(x)=5x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 7$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 - 10x2 + 22x - 44 \\
\hline
x + 2 & 5x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 7 \\
 & (-)\ \underline{5x^4 + 10x^3} \\
 & 0 + -10x^3 + 2x^2 + 0x + 7 \\
 & (-)\ \underline{-10x^3 - 20x^2} \\
 & +22x^2 + 0x + 7 \\
 & (-)\ \underline{22x^2 + 44x} \\
 & -44x + 7 \\
 & (-)\ \underline{-44x - 88} \\
 & 95
\end{array}
$$

أقسِمُ $5x^4$ على x، وأكتبُ الناتجَ فوقَ $5x^4$

أضرِبُ ناتجَ القسمةِ $5x^3$ في المقسومِ عليهِ $x + 2$

أطرحُ ناتجَ الضربِ منَ المقسومِ، ثمَّ أقسِمُ $-10x^3$ على x

أضرِبُ $-10x^2$ في $x + 2$

أطرحُ ثمَّ أقسِمُ $22x^2$ على x، ثمَّ أضرِبُ $22x$ في $x + 2$

أطرحُ ثمَّ أقسِمُ $-44x$ على x، ثمَّ أضرِبُ فأطرحُ.

درجةُ ناتجِ الطرحِ أقلُّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ، إذنْ: أتوقَّفُ عنِ القسمةِ

ناتجُ القسمةِ هوَ $h(x) = (5x^3 - 10x^2 + 22x - 44)$

وباقي القسمةِ $r(x) = (95)$

أتذكَّرُ

إذا كانَ باقي قسمةِ المقسومِ على المقسومِ عليهِ صفرًا؛ فإنَّ المقسومَ يقبلُ القسمةَ على المقسومِ عليهِ، ونقولُ إنَّ المقسومَ عليهِ عاملٌ منْ عواملِ المقسومِ.

للتحقُّقِ منْ صحَّةِ القسمةِ؛ أضرِبُ ناتجَ القسمةِ في المقسومِ عليهِ، وأُضيفُ للناتجِ باقيَ القسمةِ كالآتي:

$h(x) \times g(x) + r(x)$

$(5x^3 - 10x^2 + 22x - 44) \times (x + 2) + (95) =$ ....

أُلاحظُ أنَّ: ....

إذا كانَ $f(x) = h(x) \times g(x) + r(x)$؛ فإنَّ ناتجَ القسمةِ صحيحٌ.

أُحاولُ

أجدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 3x^2 + x^3 + 4$ على $g(x) = x + 1$ وأتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ.

الاقترانُ النسبيُّ هوَ اقترانٌ مكتوبٌ على الصورةِ $\frac{h(x)}{g(x)}$ حيثُ $h(x)$ و $g(x)$ كثيراتُ حدودٍ و $g(x) \neq 0$.

مجالُ الاقترانِ النسبيِّ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ عدا أصفارِ $g(x)$

أتذكَّرُ

أصفارُ الاقترانِ $g(x)$ هيَ قِيَمُ x التي تجعلُ $g(x) = 0$

مثالٌ (2)

أجدُ مجالَ الاقتراناتِ النسبيَّةِ الآتيةِ:

1) $\dfrac{2x^3 + x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ 2) $\dfrac{(x + 3)(x + 2)}{(x + 3)}$

الحلُّ

1) $\dfrac{2x^3 + x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

أجدُ أصفارَ المقامِ $x^2 + 3x + 2$؛ وذلكَ بحلِّ المعادلةِ $x^2 + 3x + 2 = 0$

بالتحليلِ $(x + 2)(x + 1) = 0$ إذنْ: أصفارُ المقامِ $x = -1 , x = -2$

مجالُ الاقترانِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ ما عدا 1- , 2- وأكتبُهُ بصورةِ المجموعةِ $\{x \mid x \neq -1, x \neq -2\}$

2) $\dfrac{(x + 3)(x + 2)}{(x + 3)}$

أجدُ أصفارَ المقامِ $(x+3)$ وذلكَ بحلِّ المعادلةِ $x + 3 = 0$ إذنْ: $x = -3$

مجالُ الاقترانِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ ما عدا 3-، وأكتبُهُ بصورةِ المجموعةِ $\{x \mid x \neq -3\}$

أُحاولُ

أجدُ مجالَ الاقترانِ النسبيِّ $\dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 2x}$

أختبرُ تعلُّمي

1) أُميِّزُ بينَ العباراتِ الصحيحةِ وغيرِ الصحيحةِ في ما يأتي، وأُبرِّرُ إجابتي:

(1) $(x+3)$ هوَ عاملٌ منْ عواملِ $(2x^2 + x - 15)$.

(2) $(x^3 + 7x^2 + 14x + 9)$ يقبلُ القسمةَ على $(x + 4)$.

(3) مجالُ الاقترانِ $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ.

2) أقترحُ اقترانًا نسبيًّا مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ ما عدا $x = -7$

3) لدى هُدى $(x^4 + 2x + 1)$ لترًا منَ العصيرِ، تريدُ توزيعَها في اجتماعٍ على كؤوسٍ تتَّسعُ كلُّ واحدةٍ منْها لـ $(x^2 + 1)$ لترًا. فهلْ تستطيعُ تعبئتَها في كؤوسٍ كاملةٍ منْ دونِ نقصٍ أوْ زيادةٍ؟

للاستزادةِ https://www.ixl.com/math/algebra-2/divide-polynomials-using-long-division

تركيبُ الاقتراناتِ

ماذا سأتعلَّمُ؟

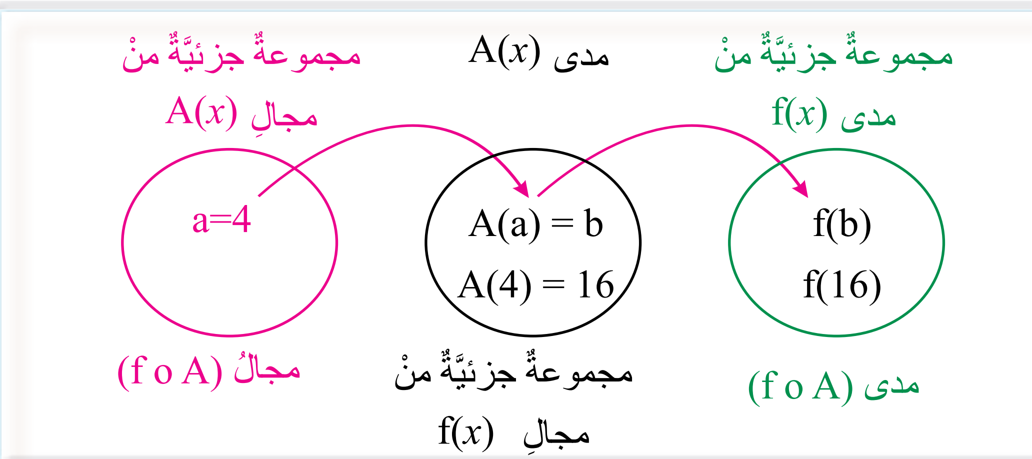
- الاقترانُ المركَّبُ.
- تركيب اقترانَين.
- شروطُ تركيبِ اقترانَين.

أحتاجُ إلى طلاءِ حائطٍ مربَّعِ الشكلِ مِساحتُهُ تُعطى بالعلاقةِ $A(x) = x^2$ حيثُ x طولُ ضلعِ الحائطِ بالأمتارِ. وكانتِ التكلفةُ اللازمةُ لطلاءِ الحائطِ بالدينارِ الأردنيِّ هيَ $f(A) = 1.5A$ حيثُ A مِساحةُ الحائطِ بالأمتارِ المربَّعةِ.
كيفَ أحسُبُ تكلفةَ طلاءِ جدارٍ طولُ ضلعِهِ 4m ؟

لحلِّ المسألةِ السابقةِ؛ سأُعوِّضُ $x = 4$ في اقترانِ $A(x)$ لإيجادِ المِساحةِ أوَّلًا، ثمَّ سأُعوِّضُ الناتجَ في الاقترانِ $f(A)$ لإيجادِ التكلفةِ؛ فتكونُ تكلفةُ الطلاءِ الكلِّيَّةُ JD24

ماذا لوْ أردتُ حسابَ تكلفةِ طلاءِ حائطٍ طولُ ضلعِهِ x m؟ ألاحظُ أنَّني أُطبِّقُ الاقترانَ $A(x)$ ثمَّ أُعوِّضُ المقدارَ الناتجَ في الاقترانِ $f(A)$

أُسمّي هذهِ العمليةَ تركيبَ الاقتراناتِ وأرمزُ لَها بالرمزِ: $(f \circ A)(x) = f(A(x))$ وأقرؤُها f بعدَ A لـ x
أيْ: تطبيقُ الاقترانِ A بدايةً ثمَّ تطبيقُ الاقترانِ f على الناتجِ. والشكلُ التالي يُوضِّحُ ذلكَ.



مثال (1)

إذا كانَ $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$، فأجدُ الآتيَ:

(1) مجالُ $f(x)$ ومدى $g(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$

(3) $(g \circ f)(x)$ (4) $(f \circ g)(1)$

الحلُّ

(1) مجالُ $f(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ، ومدى $g(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ الموجبةِ والصفرِ.
أُلاحظُ أنَّ مدى $g(x)$ هوَ مجموعةٌ جزئيَّةٌ منْ مجالِ $f(x)$

بتطبيقِ قاعدةِ تركيبِ الاقترانات وتعويضِ الاقتران $g(x)$:

$(2)\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2)$

بتطبيقِ قاعدةِ $f(x)$:

$f(x^2) = x^2 + 1 = x^2 + 1$

بتطبيقِ قاعدةِ تركيبِ الاقترانات وتعويضِ الاقتران $f(x)$:

$(3)\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

بتطبيقِ قاعدةِ $g(x)$:

$= g(x + 1) = (x + 1)^2$

ألاحظُ أنَّ $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

بتعويضِ قيمةِ $g(1) = (1)^2 = 1$ ثمَّ تعويضِ الإجابة في الاقترانِ $f(x)$:

$4)\ (f \circ g)(1) = f(g(1))$

$= f(1) = 1 + 1 = 2$

أستنتجُ: يُمكنُني إيجادُ $(f \circ g)(x)$ ، إذا كانَ مدى $g(x)$ مجموعةً جزئيَّةً منْ مجالِ $f(x)$ مجالُ $(f \circ g)(x)$ هوَ مجموعةٌ جزئيَّةٌ منْ مجالِ $g(x)$ ، ومدى $(f \circ g)(x)$ هوَ مجموعةٌ جزئيَّةٌ منْ مدى $f(x)$.

أُحاولُ

إذا كانَ $g(x) = x + 1$, $f(x) = x^2 + 1$؛ فأجِدْ: $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(x)$

أختبرُ تعلُّمي

1) إذا كانَ $f(x) = x + 1$، $g(x) = \sqrt{x}$ ؛ فأجِدْ $(f \circ g)(x)$ ، ثمَّ أجِدُ مجالَهُ ومداهُ.

2) أقترحُ اقترانَينِ $f(x)$ و $g(x)$ بحيثُ يكونُ ناتجُ تركيبِ $(f \circ g)(x)$ يُساوي $\dfrac{2}{x^2 + 1}$

3) هلْ $(f \circ h)(x) = (h \circ f)(x)$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

4) حوضُ ماءٍ على شكلِ نصفِ كرةٍ، يتسرَّبُ منهُ الماءُ بحيثُ يتحدَّدُ طولُ نصفِ قطرِ سطحِ الماءِ فيهِ وفقَ الاقترانِ $r(t) = \dfrac{18}{2t + 3}$، حيثُ t: الزمنُ بالثواني، و r: طولُ نصفِ القطرِ بالأمتارِ. أجِدُ مِساحةَ سطحِ الماءِ بعدَ مرورِ 12s

أتذكّر

مِساحةُ الدائرةِ $A(r)$

$A(r) = \pi r^2$

حيثُ r: طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ.

الاقترانُ العكسيُّ

ماذا سأتعلَّمُ؟

- الاقترانُ العكسيُّ.
- الاقترانُ واحدٌ لواحدٍ.
- الاقترانُ الجذريُّ.
- مجالُ الاقترانِ الجذريِّ ومداهُ.

المكعَّباتُ

تُستعملُ العلاقةُ $V(x) = x^3$ لإيجادِ حجمِ قطعٍ مكعَّبةِ الشكلِ عُلمَ طولُ ضلعِها x cm.
كيفَ أستطيعُ إيجادَ طولِ ضلعِ مكعَّبٍ حجمُهُ $8cm^3$ أوْ مكعَّبٍ حجمُهُ $64cm^3$؟ هلْ يُمكنُني استنتاجُ قاعدةٍ عامَّةٍ لذلكَ؟

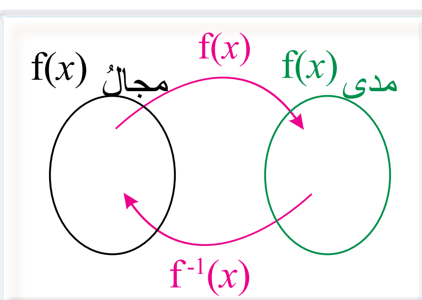
يُستعملُ الاقترانُ $f(x) = y = 100x$، للتحويلِ منْ وحدةِ المترِ (m) إلى وحدةِ السنتيمترِ(cm)، حيثُ x عددُ الوحداتِ بالمترِ، و y عددُ الوحداتِ بالسنتيمترِ بعدَ التحويلِ. والاقترانُ $f(x)$ خطيٌّ مجالُهُ ....، ومداهُ ....

ويُمكنُني إيجادُ اقترانٍ للتحويلِ منْ وحدةِ السنتيمترِ إلى المترِ، ويُسمّى مثلُ هذا الاقترانِ **الاقترانَ العكسيَّ**.

ويُرمزُ للاقترانِ العكسيِّ لـ $f(x)$ بالرمزِ $f^{-1}(x)$

وأجدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ بجعلِ مدى $f(x)$ مجالًا لـ $f^{-1}(x)$، وجعلِ مجالِ $f(x)$ مدى لـ $f^{-1}(x)$، أيْ بعكسِ المجموعتَينِ.

ويكونُ للاقترانِ $f(x)$ اقترانٌ عكسيٌّ إذا كانَ كلُّ عنصرٍ في مداهُ هوَ صورةٌ لعنصرٍ واحدٍ فقطْ في مجالِهِ، ومثلُ هذا الاقترانِ يُسمّى **اقترانَ واحدٍ لواحدٍ**. (أيْ لا تتكرَّرُ الصورةُ نفسُها لعنصرَينِ مختلفَينِ).



مثالٌ (1)

أجدُ المجالَ والمدى والاقترانَ العكسيَّ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، ثمَّ أجدُ مجالَ الاقترانِ العكسيِّ الناتجِ ومداهُ:

(1) $\{(2,3), (4,5), (6,7)\}$ (2) $f(x) = 2x + 1$

الحلُّ

1) المجالُ= $\{2, 4, 6\}$، والمدى = $\{7, 5, 3\}$. وبعكسِ الأزواجِ المرتَّبةِ يكونُ الاقترانُ العكسيُّ هوَ: $\{(3,2), (5,4), (7,6)\}$. ومجالُ الاقترانِ العكسيِّ = $\{3, 5, 7\}$، والمدى = $\{2, 4, 6\}$.

2) $f(x) = 2x + 1$

مجالُ الاقترانِ f هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ، ومداه أيضًا مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ.

لإيجادِ الاقترانِ العكسيِّ أُسمّى $f(x)$ بـ y ثمَّ أكتبُ x بدلالةِ y:

$$y = 2x + 1$$

بطرحِ العددِ 1 من طرفَي المعادلةِ:

$$y - 1 = 2x$$

بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على العددِ 2:

$$\frac{y-1}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

بإعادةِ تسميةِ x بـ $f^{-1}(x)$ والمتغيرِ y بـ x

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

ويكونُ مجالُ $f^{-1}(x)$ مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ، كذلكَ مدى $f^{-1}(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ.

أُحاولُ

أجدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منْ:

1) $f(x) = \frac{x+1}{3}$

2) $g(x) = x^3$

الاقترانُ الجذريُّ

صورتُهُ $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيثُ n عددٌ صحيحٌ.

إذا كانَ n فرديًّا

فمجالُ $f(x)$ = مجالُ $g(x)$

مثالٌ:

مجالُ $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ هو $\{x | x \neq 0\}$

مجالُ $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + x - 6}$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ.

إذا كانَ n زوجيًّا؛

فمجالُ $f(x)$ = مجموعةُ قِيَمِ x التي تجعلُ $g(x) \geq 0$

$= \{x \mid g(x) \geq 0\}$

مثالٌ:

$n = 2$ ، $f(x) = \sqrt{x - 1}$

مجالُ $f(x)$ = مجموعةُ قِيَمِ x التي تجعلُ $x-1 \geq 0$

ويساوي $\{x \mid x \geq 1\}$

مثالٌ (2)

أجدُ المجالَ والمدى للاقترانِ الجذريِّ $f(x) = \sqrt{x+1}$ ثمَّ أجدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لهُ.

أتذكّرُ

$\{x| x \geq a\} = [a , \infty)$

$\{x | x > a\} = (a , \infty)$

$\{x| x \leq a\} = (-\infty , a]$

$\{x | x < a\} = (-\infty , a)$

الحلُّ

1) المجالُ هوَ مجموعةُ قِيَمِ x التي تجعلُ $x + 1 \geq 0$

لحلِّ المتباينةِ السابقةِ أُضيفُ العددَ -1 لطرفَي المتباينةِ؛ فأحصلُ على

$x \geq -1$. إذنْ: المجالُ هوَ $\{x | x \geq -1\} = [-1 , \infty)$

2) المدى هوَ نواتجُ تعويضِ المجالِ في الاقترانِ، ويُساوي $[0 , \infty)$.

3) لإيجادِ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f(x)$:

$y = \sqrt{x+1}$

بتربيعِ الطرفَينِ:

$y^2 = (\sqrt{x+1})^2$

$y^2 = x + 1$

بإضافةِ العددِ -1 لطرفَيِ المعادلةِ

$y^2 - 1 = x$

بتسميةِ x بـ $f^{-1}(x)$ والمتغيرِ y بـ x

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$

أُحاولُ

أجدُ المجالَ والمدى للاقترانِ، ثمَّ أجدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

أختبرُ تعلُّمي

1) أجدُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجدَ) لكلٍّ ممّا يأتي:

(1) $f(x) = x + 2$ (2) $g(x) = x^2 \;,\; x \geq 0$ (3) $h(x) = x^3 - 11$

2) أجدُ المجالَ والمدى للاقترانِ $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3}}$، ثمَّ أجدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ

3) أقترحُ اقترانًا $f(x)$ بحيثُ يكونُ $f(x) = f^{-1}(x)$ ، وأبررُ إجابتي.

التقويمُ الختاميُّ

١) أُكملُ المخطّطَ الآتيَ:

الاقتراناتُ التي درستُها

كثيراتُ الحدودِ
وصورتُها القياسيَّةُ هيَ:
....

الاقترانُ النسبيُّ
وصورتُهُ العامَّةُ
....

الاقترانُ الجذريُّ
وصورتُهُ العامَّةُ
....

العملياتُ على كثيراتِ الحدودِ:
الجمعُ والطرحُ و.............
و..............

مجالُ الاقترانِ النسبيِّ
....

مجالُ الاقترانِ الجذريِّ
....

2) ألعبُ معَ الاقتراناتِ:

ليكنْ $f(x) = x^3 + 2x + 1$, $h(x) = 2 - x$, $g(x) = x^2 + 1$. أملأُ المربَّعاتِ المتقاطعةَ المجاورةَ بحيثُ تُحقِّقُ الآتيَ:

المربَّعاتُ الأفقيَّةُ:

1) x^3 - f (x)

2) - 3 . $h^{-1}(x)$

3) x . g(x)

المربَّعاتُ العموديَّةُ:

1) $(hoh^{-1})(x)$

2) f(x) – h(x)

3) 2 h (x) - 10

	1	2	3
1			
2			
3			

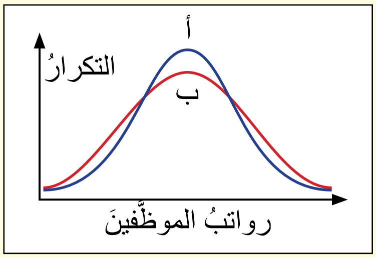
المجال: معالجةُ البياناتِ والاحتمالُ

المحورُ: تحليلُ البياناتِ

مقاييسُ التشتُّتِ لجدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ

- أجدُ مقاييسَ التشتُّتِ: (المدى، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ) لبياناتٍ منظَّمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ.

أمامي تمثيلانِ بيانيّانِ لرواتبِ موظفّينَ في مؤسَّستَينِ مختلفتَينِ.



أيُّ المؤسَّستَينِ رواتبُ موظَّفيها الأكثرُ تشتُّتًا؟

أختبر نفسي

الوسطُ الحسابيُّ

أجدُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ المنظَّمةِ في الجدولِ التكراريِّ، في كلٍّ ممّا يأتي:

1)

الفئاتُ	2 - 4	5 - 7	8 - 10
التكرارُ	3	6	9

2)

الفئاتُ	5 - 9	10 - 14	15 - 19
التكرارُ	3	8	9

أتذكَّرُ

الوسطُ الحسابيُّ لبياناتٍ مبوَّبةٍ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ هوَ

$$\frac{\text{مجموعُ حواصلِ ضربِ مراكزِ الفئاتِ في تكرارِها}}{\text{مجموعِ التكرارِ}}$$

وبالرموزِ: $\overline{x} = \dfrac{\sum x\,f}{\sum f}$

حيثُ: $\overline{x}$ الوسطُ الحسابيُّ، x مراكزُ الفئاتِ، f التكرارُ.

مثال: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ المنظَّمةِ في الجدولِ الآتي:

الفئاتُ	1 - 5	6 - 10	11 - 15	المجموعُ
التكرارُ	4	11	5	20

الحلُّ

أوَّلًا: أجدُ مركزَ الفئةِ لكلِّ فئةٍ في الجدولِ، حيثُ:

$$\text{مركزُ الفئةِ} = \frac{\text{الحدَّ الأدنى} + \text{الحدِّ الأعلى}}{2} = x$$

فمركزُ الفئةِ $(1 - 5)$ هوَ: $3 = \dfrac{1+5}{2}$

ثانيًا: أُنظِّمُ جدولًا يتضمَّنُ الفئاتِ والتكرارَ ومراكزَ الفئاتِ، وحاصلَ ضربِ مراكزِ الفئاتِ في تكرارِها كالآتي:

الفئاتُ	التكرارُ f	x	x f
1 - 5	4	3	12
6 - 10	11	8	88
11 - 15	5	13	65
	20		165

ثالثًا: أُطبِّقُ قانونَ الوسطِ الحسابيِّ:

$$\overline{x} = \frac{\sum x\,f}{\sum f} = \frac{165}{20} = 8.25$$

مقاييسُ التشتُّتِ لجدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ

ماذا سأتعلَّمُ؟

- المدى.
- الانحرافُ المعياريُّ.
- التباينُ.

ملاحظةٌ بحرِّيَّةٌ

يرغبُ باحثٌ في عملِ دراسةٍ على طلبةِ الصفِّ العاشرِ في مدرسةٍ ما، فاطَّلَعَ على علاماتِ شعبتَي (أ) و(ب) لمبحثِ الرياضياتِ كَما في الجدولِ المجاورِ.
أيُّ الصفَّينِ يُفضِّلُ الباحثُ عملَ دراستِهِ علَيْهِ؟ لماذا؟

فئاتُ العلاماتِ	تكرارُ الشعبةِ أ	تكرارُ الشعبةِ ب
$60 < x \le 70$	2	31
$70 < x \le 80$	5	7
$80 < x \le 90$	3	6
$90 < x \le 100$	10	8
المجموعُ	20	22

أصفُ تجمُّعَ أوْ تشتُّتَ البياناتِ باستعمالِ مقاييسِ التشتُّتِ، وهي: المدى، والتباينُ، والانحرافُ المعياريُّ. وكلَّما زادتْ قيمةُ أيٍّ منْ هذِهِ المقاييسِ زادَ التشتُّتُ والتباعدُ بينَ البياناتِ. توجدُ حالتانِ للبياناتِ؛ أنْ تكونَ مفرداتٍ، أوْ أنْ تكونَ منظَّمةً في جداولَ تكراريَّةٍ.

مقاييسُ التشتُّتِ للمفرداتِ

1) المدى R هوَ الفرقُ بينَ أكبرِ قيمةٍ وأصغرِ قيمةٍ للبياناتِ.

2) التباينُ يُساوي الوسطَ الحسابيَّ لمربَّعاتِ انحرافاتِ القِيَمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ، وتُعطى بالقانونِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

حيثُ x قِيَمُ البياناتِ، و n عددها $\quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

3) الانحرافُ المعياريُّ = σ

مثالٌ (1)

البياناتُ الآتيةُ تُمثِّلُ درجاتِ الحرارةِ في 5 أيّامٍ في شهرِ شُباطَ: 8 ,9 ,15 ,18 ,20 أجدُ المدى والتباينَ والانحرافَ المعياريَّ.

الحلُّ

1) المدى: أكبرُ قيمةٍ؛ مطروحًا منْها أصغرُ قيمةٍ: $\quad R = 20 - 8 = 12$

2) التباينُ:

أ) أحسُبُ الوسطَ الحسابيَّ باستعمالِ القانونِ.

$$\bar{x} = \frac{20 + 18 + ...+.....+ 8}{5} = \frac{\quad}{5} =$$

ب) أكمِلِ الجدولَ الآتيَ:

x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
20	$20 - 14 = 6$	36
15	1	
9	- 5	25
8		
18		
المجموع	0	114

التباينُ $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{114}{5} = 5.7$

الانحرافُ المعياريُّ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{5.7}$

مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريَّةِ

1) المدى هوَ الفرقُ بينَ الحدِّ الفعليِّ الأعلى لآخرِ فئةٍ، والحدِّ الفعليِّ الأدنى لأوَّلِ فئةٍ.

2) التباينُ يُعطى بالقانونِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}$$

إذْ إنَّ: x مركزُ الفئةِ و$\bar{x}$ الوسطُ الحسابيُّ وf تكرارُ الفئةِ.

3) الانحرافُ المعياريُّ = $\sqrt{\text{التباين}}$ = σ

مثالٌ (2)

يُمثِّلُ الجدولُ التكراريُّ الآتي الأجرَ اليوميَّ لمجموعةٍ منَ العمالِ.

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لأجورِهم.

الفئات	التكرار
$5 < x \le 10$	6
$10 < x \le 15$	9
$15 < x \le 20$	5

الحلُّ

1) لإيجادِ التباينِ؛ أكمِلُ الجدولَ الآتيَ:

الفئات	f	x	xf	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
$5 < x \le 10$	6	7.5	45	-4.75	22.56	135.36
$10 < x \le 15$	9	12.5	112.5	0.25	0.06	0.56
$15 < x \le 20$	5					
المجموع	20		245			273.5

$$\bar{x} = \frac{245}{20} = 12.25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{273.5}{20} \approx 13.685$$

الانحرافُ المعياريُّ: $\sigma = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{13.685} = 3.7$

أُحاولُ

الجدولُ الآتي يُبيِّنُ زمنَ التأخيرِ عنِ الدوامِ بالدقائقِ لموظَّفي مؤسَّسةٍ ما. أُكمِلُ الجدولَ لأجدَ الوسطَ الحسابيَّ والتباينَ ، والانحرافَ المعياريَّ σ.

الفئاتُ	التكرارُ f	مركزُ الفئةِ x	xf	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
$5 < x \leq 9$	2					
$9 < x \leq 13$	7					
$13 < x \leq 17$	5					
المجموعُ						

$\bar{x} =$ $\sigma^2 =$ $\sigma =$

أختبِرُ تعلُّمي

1) جُمعتْ بياناتُ دراسةٍ ما في جدولٍ تكراريٍّ، فكانَ $\sum xf = 150$ ، $\Sigma x = 18$ ، $\Sigma(x - \bar{x})^2 f = 450$، حيثُ x مركزُ كلِّ فئةٍ وf التكرارُ و$\bar{x}$ الوسطُ الحسابيُّ. أُكمِلُ الفقراتِ 1، 2، 3 في العمودِ الأوَّلِ بما يناسبُها منَ العمودِ الثاني:

أ) إذا كانَ التباينُ يُساوي 15؛ فإنَّ حجمَ عيِّنةِ الدراسةِ (مجموعِ التكراراتِ):	3.9
ب) الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ يُساوي:	30
جـ) الانحرافُ المعياريُّ يُساوي:	5

2) أُكمِلُ الجدولَ الآتيَ؛ لإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ والتباينِ والانحرافِ المعياريِّ:

الفئاتُ	التكرارُ f	مركزُ الفئةِ x	xf	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
$1 < x \leq 4$	2					
$4 < x \leq 7$	7					
$7 < x \leq 10$	5					
المجموعُ						

$\bar{x} =$ $\sigma^2 =$ $\sigma =$

تَمَّ بِحَمْدِ اللّٰهِ تَعالى