حسب المنهاج الجديد

منصة تلاخيص منهاج أردني تقدم للكم

النيرد في مادة الفيزياء

الوحدة الرابعة من مادة الفيزياء الصف الأول ثانوي

الحركة التوافقية البسيطة

الأستاذ معاذ أبو يحيى والأستاذ عز الدين أبو رمان

مدرسة الفيزياء

يمكنكم متابعة شروحاتنا والتواصل معنا من خلال :

0795360003 مدرسة الفيزياء مدرسة الفيزياء

الأستاذ معاذ أمجد أبو يحيى

0795360003

You Tube

تجدون شرح المادة على قناتنا اليوتيوب قناة مدرسة الفيزياء

منهاجي

متعة التعليم الهادف

مقدمة دوسية النيرد

بسم الله، والصلاة والسلام على خير معلم الناس الخير نبينا محمد وعلى آله وصحبة أجمعين ، أما بعد :

مدرسة الفيزياء فكرةٌ قد بدأناها في السنة الماضية واليوم نُكمل المسيرَ معكم في المنهاج الجديد لمادة الفيزياء للصف الأول ثانوي، أردنا الا نكون رقمًا عاديا سهلًا كما هو حال الكثيرين للآسف وإنما حدث مميز وذكرى تُخلد في ذاكرة كل طالب ومعلم وولي أمر.

اليوم أكاد أجزم وأنا كُلّي ثقة بأن ملفاتنا هي الأولى من نوعها التي تُعطي كل هذا الاهتمام والشمولية والتنوع لمادة جديدة ليست من مواد مرحلة التوجيهي وهذا العمل واللهِ ليس شطارةً وإبداعاً منا وإنما من فضل وتوفيق الله تعالى لنا ودعاء أحبتنا بالخير لنا.

في هذه الدوسية قُمنا بترتيب طرح المواضيع والمحتوى والأفكار وإضافة ملاحظات وشروحات لأساليب حل الأسئلة وطريقة التعامل معها ورسومات توضيحية ملونة ومُصممة خصيصًا لهذه الدوسية، وقُمنا بجمع وإضافة أسئلة وتدريبات على مختلف أفكار المادة وحل أسئلة فكر والواجبات والتمارين الواردة في الكتاب المدرسي، وفي نهاية كل درس وضعنا لكم مُرفق حل أسئلة الدروس وأسئلة إضافية وإثرائية على كل موضوع رئيسي حتى نتمم عليكم كل ما تحتاجونه في المادة وكل ما هو لازم لحصول الطالب على العلامة الكاملة.

في النهاية نسأل الله للجميع العلم النافع والعمل الصالح والتوفيق والسداد والإخلاص والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

أ.معاذ أمجد أبو يحيى ، أ.عز الدين أبو رمان

محتويات الكورس

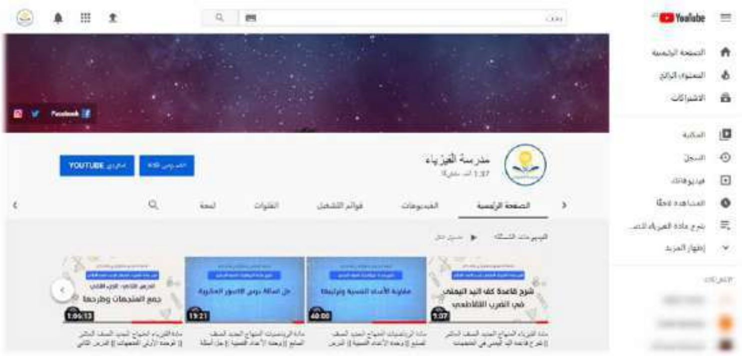
الوحدة الرابعة : الحركة التوافقية البسيطة

تابعونا على مجموعة مدرسة الفيزياء على الفيس بوك :

تجدون فيها كل ما يخص المادة من أوراق عمل وامتحانات وشروحات

تابعونا على قناة مدرسة الفيزياء على اليوتيوب :

تجدون فيها شرح جميع دروس المادة وحل أسئلة المادة



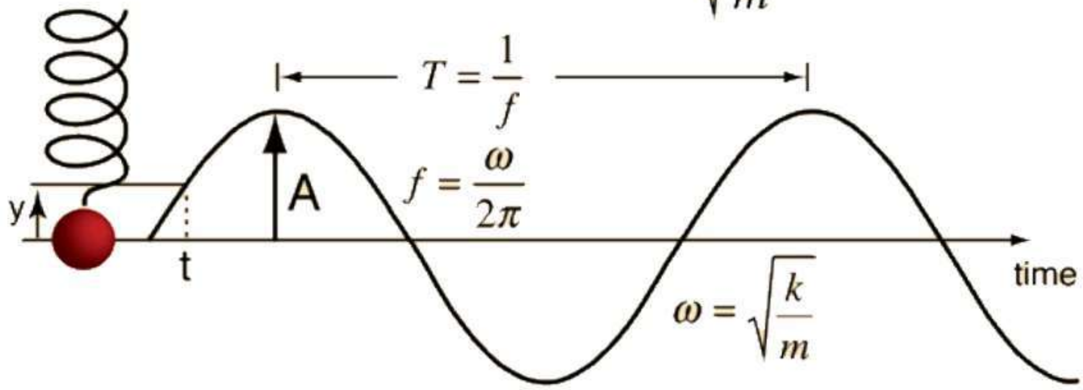
تابعونا على منصة تلاخيص منهاج أردني على الفيس بوك :

تجدون فيها تلاخيص وشروحات المواد الدراسية لمختلف الصفوف

الوحدة الرابعة من مادة فيزياء الصف الأول ثانوي

الحركة التوافقية البسيطة

$$y = A\sin\omega t = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$



▪ ما تحتاجه قبل البداية:

☑ أساس رياضي جيد للعمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة والعشرية.
☑ أساس رياضي جيد للعمليات الحسابية على الأسس والجذور.
☑ معرفة ممتازة في إجراء القسمة الطويلة للأعداد الصحيحة والعشرية.
☑ معرفة ممتازة في مهارات التعويض والترتيب وإيجاد الكمية المجهولة.
☑ معرفة جيدة في مفهوم إيجاد جيب وجتا الزوايا والزاوية المرجعية.
☑ معرفة جيدة في تطبيقات قوانين نيوتن من تحليل القوة والمركبات وإيجاد المحصلة.

الوحدة الرابعة : الحركة التوافقية البسيطة

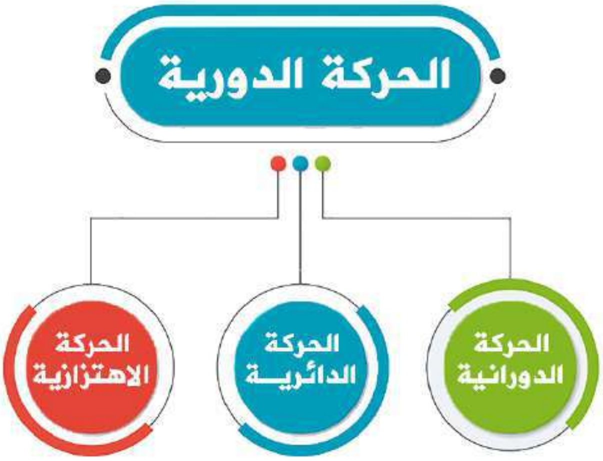
الدرس الأول : خصائص الحركة التوافقية البسيطة

■ الحركة كمفهوم عام:

الحركة تدل على التغير المستمر في موقع الجسم مقارنةً بالأجسام الثابتة حوله.

■ أنواع الحركة:

- **الحركة الانتقالية:** الحركة التي يتغير فيها موقع الجسم مع الزمن وقد تكون أفقية مثل حركة السيارة أو القطار على طريق مستقيم أو رأسية مثل السقوط الحر أو في اتجاه منحنى مثل حركة المقذوفات.
- **الحركة الدائرية:** حركة جسم في مسار دائري حول محور دوران يكون خارج الجسم مثل حركة سيارة على دوار.
- **الحركة الدورانية:** حركة الجسم حول محور ثابت يكون موجود داخله مثل دوران الأرض حول نفسها.
- **الحركة الاهتزازية:** هي حركة دورية تكرر نفسها ذهابًا وإيابًا على المسار نفسه في فترات زمنية متساوية حول موقع الاتزان وهي ستكون موضوع دراستنا في هذا الفصل.



سؤال وضح ما المقصود بالحركة الدورية؟

هي الحركة التي تُكرر نفسها على المسار نفسه في فترات زمنية متساوية وتشمل الحركة التذبذبية أو الاهتزازية والحركة الدورانية والحركة الدائرية.

سؤال وضح ما المقصود بالحركة التذبذبية؟

هي حركة دورية تكرر نفسها ذهابًا وإيابًا على المسار نفسه في فترات زمنية متساوية حول موقع الاتزان.

سؤال أعطِ مثالاً على الحركة التذبذبية (الاهتزازية)؟

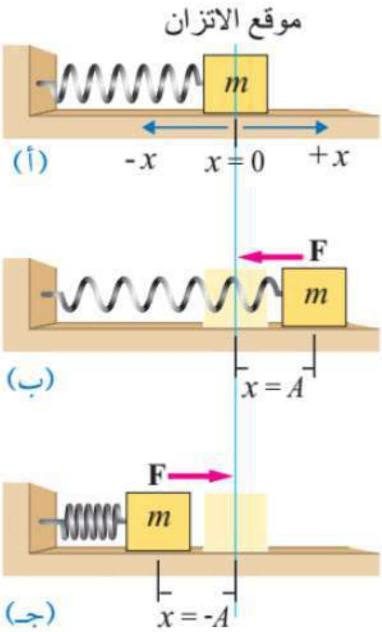
- تذبذب البندول البسيط.
- حركة الأرجوحة.
- اهتزاز وتر آلة موسيقية.
- تذبذب الذرات في جزيئات المادة الصلبة.

ملاحظات مهمة

✪ الحركة التذبذبية تعتبر نوع خاص من الحركة الدورية لذلك كل حركة تذبذبية هي حركة دورية لكن ليس كل حركة دورية هي حركة تذبذبية.

✪ تُشكل الحركة التذبذبية الأساس النظري لدراسة الموجات.

مفهوم الحركة التوافقية البسيطة (Simple Harmonic Motion)

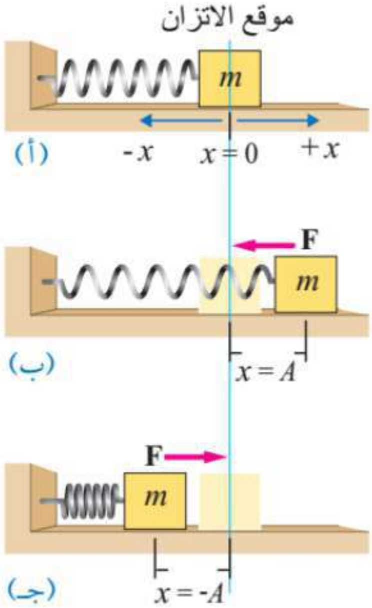


- لدراسة الحركة التوافقية البسيطة نفترض أن لدينا نابض مهمل الكتلة ومثبت من طرف بينما يتصل الطرف الآخر بجسم كتلته (m) يتحرك على سطح أفقي أملس.

الحالة (أ) : موقع الاتزان $(x = 0)$

- في موقع الاتزان $(x = 0)$ تكون القوة المحصلة المؤثرة في الجسم تساوي صفرًا وتكون إزاحة الجسم تساوي صفرًا واستطالة النابض وانضغاطه يساوي صفرًا.
- إذا تمت إزاحة الجسم عن موقع الاتزان سواء إلى اليمين (استطالة) أو إلى اليسار (انضغاط) فإن النابض دائما سيؤثر بقوة في الجسم لإعادته إلى موقع الاتزان.
- إذا قمنا بسحب الجسم وتركه فإنه يتذبذب حول موضع الاتزان.

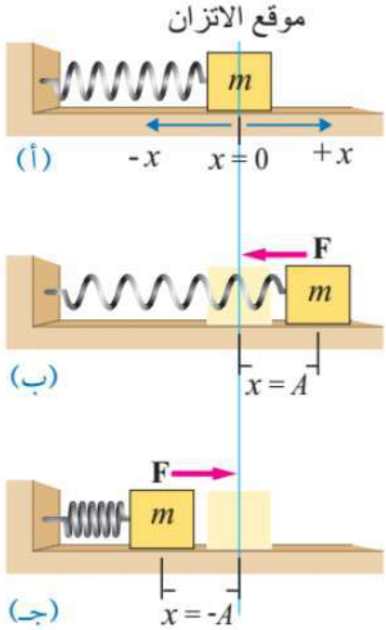
$$[x = 0] , [F = 0] , [a = 0] , [v_{\text{عند العودة}} = max]$$



الحالة (ب) : استطالة $(x = A)$

- في الحالة (**ب**) يكون الجسم في الموقع المبين عند أقصى إزاحة $(x = A)$.
- تسمى أقصى إزاحة يتحرّكها الجسم من موقع الاتزان سعة الذبذبة $(Amplitude \equiv A)$.
- يكون للقوة المعيدة والتسارع قيمة عظمى عند $(x = A)$.
- يكون اتجاه كل من القوة والتسارع نحو مركز الاتزان أي باتجاه محور $(-x)$ بينما مقدار السرعة (v) يساوي صفرًا إذ يسكن الجسم لحظيًا عند الموقع $(x = A)$.
- عند عودة الجسم لليسار فإن مقدار السرعة يزداد ليصل إلى قيمته العظمى عند مروره بموقع الاتزان.
- عند عودة الجسم لليسار يقل مقدار كل من الإزاحة والقوة المعيدة والتسارع ليصبح كل منها يساوي صفرًا لحظة المرور بموقع الاتزان.

$$[x = +A] , [F = Max , -x] , [a = Max , -x] , [v = 0]$$



الحالة (جـ) : انضغاط $(x = -A)$

- تستمر حركة الجسم إلى اليسار مبتعدًا عن موقع الاتزان ويقل مقدار سرعة الجسم تدريجيا إلى أن تصبح سرعته صفرًا عند وصوله إلى أقصى إزاحة $(x = -A)$.
- يزداد مقدار كل من الإزاحة والقوة المعيدة والتسارع عن حركة الجسم من موقع الاتزان إلى اليسار حتى تصل كل من الإزاحة والقوة المعيدة والتسارع إلى القيمة العظمى عند الموقع $(x = -A)$.
- في الحالة (**جـ**) عند الموقع $(x = -A)$ يكون اتجاه كل من القوة والتسارع نحو مركز الاتزان أي باتجاه محور $(+x)$ بينما مقدار السرعة (v) يساوي صفرًا إذ يسكن الجسم لحظيًا عند الموقع $(x = A)$.
- تستمر هذه الحركة التذبذبية في غياب قوى الاحتكاك بينما إذا كان هنالك قوى احتكاك فإن الجسم سيتوقف عن التذبذب بعد مدة زمنية معينة.

$$[x = -A] , [F = Max , +x] , [a = Max , +x] , [v = 0]$$

سؤال **وضح ما المقصود (قوة الإرجاع)؟**

القوة التي تؤثر في الجسم المهتز لإعادته إلى موقع الاتزان.

لحساب مقدار القوة المُعيدة (قوة الإرجاع) أو (القوة التي يؤثر بها النابض) في حالة حركة الجسم المتصل بالنابض والمتحرك أفقيًا نستخدم العلاقة الآتية والتي تُعرف باسم **قانون هوك**:

$$F = -kx$$

k : ثابت النابض أو ثابت المرونة , x : إزاحة الجسم من موقع الاتزان

الخصائص	X=0	X=A	X=-A
السعة	0	A	-A
السرعة	max	0	0
قوة الإرجاع	0	max	max
التسارع	0	max	max

ملاحظات مهمة

- يعتمد ثابت النابض (الزنبرك) على صلابة النابض وخصائص أخرى للنابض.
- وحدة قياس ثابت النابض هي (N/m).

سؤال **ما دلالة الإشارة السالبة في قانون هوك؟**

تدل الإشارة السالبة في قانون هوك على أن اتجاه القوة المُعيدة يكون دائما باتجاه معاكس لإزاحة الجسم ونحو موقع الاتزان.

سؤال **وضح ما المقصود بالحركة التوافقية البسيطة؟**

هي حركة تتناسب فيها القوة المُعيدة طرديا مع إزاحة الجسم عن موضع اتزانه وتعمل هذه القوة على إعادة الجسم لموضع اتزانه.

سؤال **ما الشروط اللازم توافرها حتى تُسمى الحركة التذبذبية بالحركة التوافقية البسيطة؟**

1. أن يتناسب مقدار القوة المُعيدة طرديا مع إزاحة الجسم من موقع الاتزان.
2. أن يكون اتجاه القوة المُعيدة باتجاه موقع الاتزان دائما ومُعاكسًا لاتجاه الإزاحة.

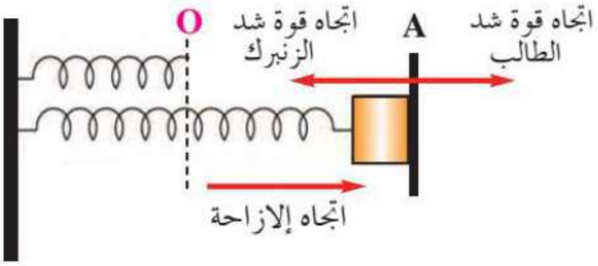
وباختصار بسيط في الحركة التوافقية البسيطة يجب أن تتحقق العلاقة الآتية :

$$F \alpha - x$$

بما أن التسارع يكون دائما باتجاه القوة فهذا يعني أيضا أن التسارع سيكون دائما باتجاه موقع الاتزان ومُعاكسًا لاتجاه الإزاحة ويتناسب مقداره طرديًا مع مقدار الإزاحة.

$$a \alpha - x$$

سؤال **قام طالب بشد نابض أفقي مسافة (15 mm) بواسطة قوة مقدارها (0.18 N)، احسب مقدار ثابت هوك للنابض.**



عندما قام الطالب بشد النابض بقوة في اتجاهه، تكونت قوة الشد في النابض بنفس المقدار ولكن باتجاه معاكس، حيث أن قوة شد النابض هي التي تعاكس اتجاه الإزاحة وتعمل على إرجاع طرق النابض لموقع الاتزان.

$$F = -kx \rightarrow -0.18 = -k\times(15\times10^{-3}) \rightarrow k = 12 \text{ N/m}$$

سؤال إضافي NERD **في النظام المعزول يمكن أن يتحرك الجسم المهتز تحت تأثير نابض حركة توافقية بسيطة إلى المالانهاية ولكن هذا لا يحدث في الواقع. فسّر ذلك.**

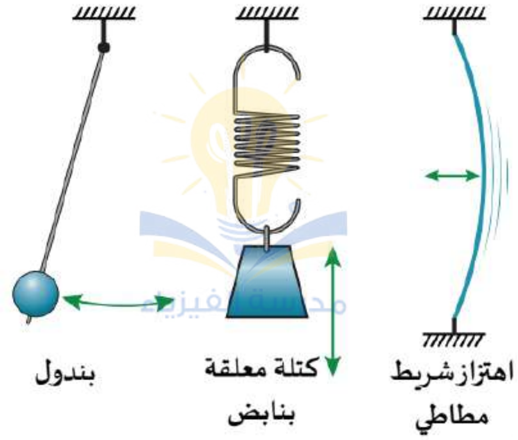
وذلك بسبب بوجود قوى الاحتكاك التي تحد من سرعة الجسم المهتز وتفقد الطاقة بالتدريج.

سؤال إضافي NERD **تعتبر حركة القمر حول الأرض حركة دورية منتظمة، فهل تعتبر هذه الحركة توافقية بسيطة؟ ولماذا؟**

لا، وذلك لعدم وجود قوى إرجاع كما أن حركة القمر لا تتخذ مسار الحركة التوافقية البسيطة بحيث تمر من خلال موقع الاتزان ولكنها حركة دورانية حول مركز معين.

سؤال إضافي **أعطِ مثالاً على تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة؟**

☑ اهتزاز شريط مطاطي.
☑ كتلة معلقة بنابض بشكل رأسي.
☑ بندول.



أتحقَّقُ: ما العوامل التي تعتمد عليها القوة المُعيدة في الحركة التوافقية البسيطة لجسم يتصل بنابض على سطح أفقي أملس؟

ثابت النابض (علاقة طردية) ومقدار إزاحة الجسم من موقع الاتزان (علاقة طردية).

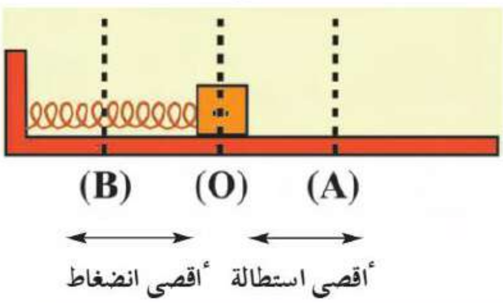
أُفكِّرُ: ما الكميتان من الكميات المتجهة الآتية في الحركة التوافقية البسيطة :

(الإزاحة، القوة المعيدة، السرعة، التسارع) اللتان يكون اتجاههما دائما:

أ. متعاكسًا؟ (القوة المُعيدة والإزاحة) وكذلك (التسارع والإزاحة).

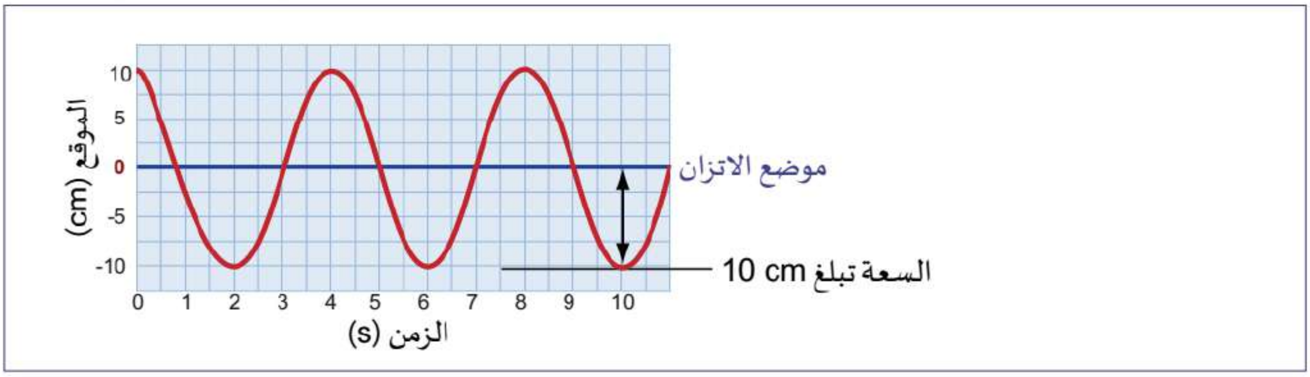
ب. بالاتجاه نفسه؟ القوة المُعيدة والتسارع.

لمعرفة الخصائص الأخرى للحركة التوافقية البسيطة سنقوم بدراسة كل من السعة والزمن الدوري وغيره من الخصائص..



■ سعة الذبذبة (A):

أقصى إزاحة يتحرّكها الجسم من موقع الاتزان.
أو أقصى إزاحة للجسم بعيدًا عن موضع سكونه (اتزانه).



■ دورة الذبذبة الكاملة:

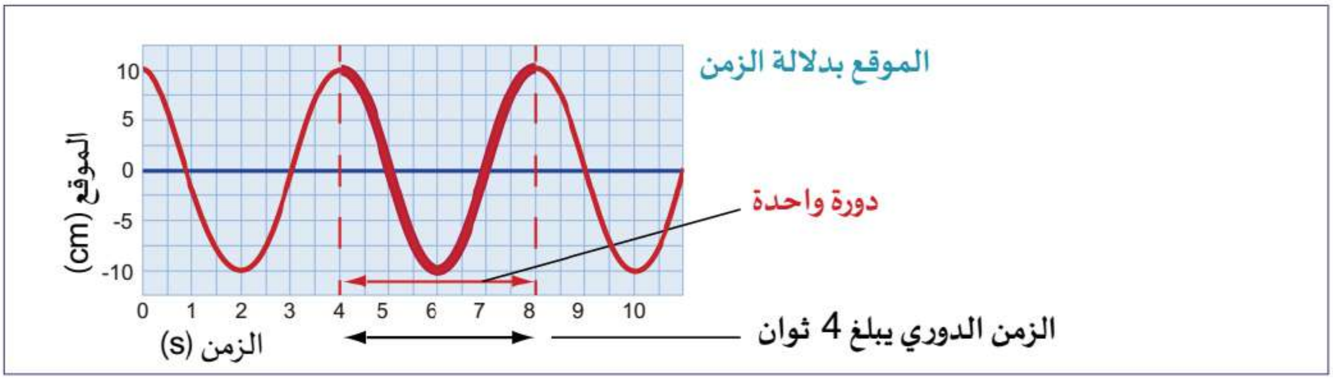
الحركة التي يحدثها الجسم المهتز في زمن معين كي يمر بالنقطة الواحدة في مسار حركته مرتين متتاليتين في نفس الاتجاه.

■ الزمن الدوري (T):

الزمن اللازم لعمل اهتزازه أو دورة كاملة أو الزمن اللازم لمرور جسم مهتز بنقطة واحدة مرتين متتاليتين وفي نفس الاتجاه.

$$T = \frac{t}{n}$$

t : الزمن الكلي ، n : عدد الدورات أو التذبذبات



■ التردد (f):

عدد الدورات التي يحدثها الجسم في وحدة الزمن.

ويمكن حساب مقدار التردد بالاستعانة بالعلاقة الآتية :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{n}{t}$$

T : الزمن الدوري ، f : التردد ، t : الزمن الكلي ، n : عدد الدورات أو التذبذبات

سؤال إضافي NERD **ملف محرك كهربائي يعمل (6000) اهتزازه كل (5 min)، فاحسب مقدار تردد دوران الملف والزمن الدوري له.**

$$T = \frac{t}{n} = \frac{5\times60}{6000} = \rightarrow T = 0.05\ \text{s}$$

$$f = \frac{n}{t} = \frac{6000}{5\times60} = \rightarrow f = 20\ \text{Hz or } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.05} = 20\ \text{Hz}$$

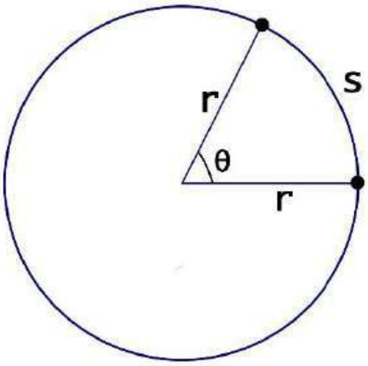
سؤال إضافي NERD **نابض يكمل اهتزازة كاملة كل (0.33 s). ما هو تردد النابض؟**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.33} \rightarrow f = 3\ \text{Hz}$$

سؤال إضافي NERD **تعتبر حركة القمر حول الأرض حركة دورية منتظمة، فهل تعتبر هذه الحركة توافقية بسيطة؟ ولماذا؟**

لا، وذلك لعدم وجود قوى إرجاع كما أن حركة القمر لا تتخذ مسار الحركة التوافقية البسيطة بحيث تمر من خلال موقع الاتزان ولكنها حركة دورانية حول مركز معين.

▪ الإزاحة الزاوية (θ):



الزاوية التي يقطعها الجسم عند حركته في مسار دائري.

$$\theta = \frac{s}{r}$$

s : المسافة المقطوعة أول طول القوس , r : نصف قطر الدائرة

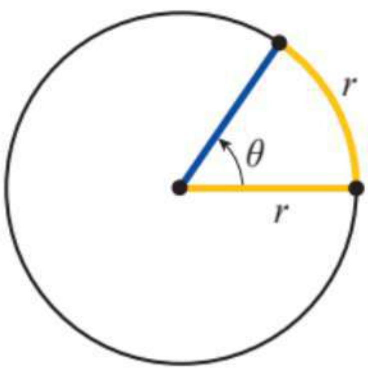
ملاحظات مهمة

- تُقاس الإزاحة الزاوية (θ) بوحدة الـ (rad) والزمن بوحدة (s).

سؤال إضافي NERD **يركض وليد حول مسار دائري قطره (8.5 m). أحسب الإزاحة الزاوية إذا قطع وليد مسافة (60 m) على المسار.؟**

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{60}{4.25} \rightarrow \theta = 14.12\ \text{rad}$$

▪ الراديان:

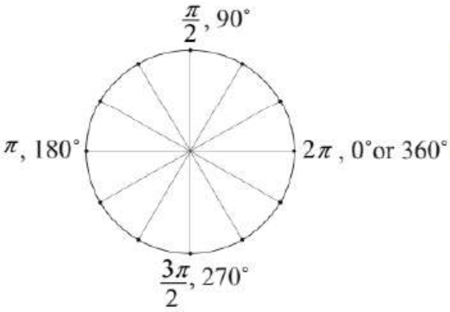


زاوية مركزية في دائرة تقابل قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة.

☑ للتحويل من راديان إلى درجات يمكننا استخدام العلاقة الآتية:

$$\theta^{o} = \theta_{rad} \times \frac{180^{o}}{\pi}$$

☑ للتحويل من درجات إلى راديان يمكننا استخدام العلاقة الآتية:



$$\theta_{rad} = \theta^o \times \frac{\pi}{180^o}$$

سؤال إضافي NERD **كم يبلغ مقدار الزاوية (30°) بالراديان؟**

$$\theta^o \times \frac{\pi}{180^o} \rightarrow 30\,^o \times \frac{\pi}{180^o} = \frac{3.14}{6} = 0.52\,rad$$

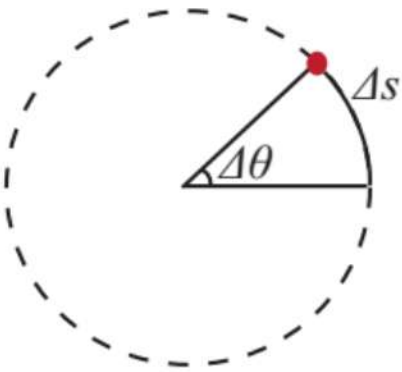
سؤال إضافي NERD **كم يبلغ مقدار الزاوية (6.28 rad) بالدرجات؟**

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 6.28\,rad \times \frac{180^o}{\pi} = \frac{6.28\times180^o}{3.14} = 360^o$$

ملاحظات مهمة

- الزاوية الكاملة بالدرجات تساوي (360°) والتي تكافئ بالراديان ($2\pi\ rad$) و ($6.28\ rad$).

■ السرعة الزاوية (ω) في حالة الحركة الدورانية :



الزاوية التي يمسحها نصف قطر القرص في وحدة الزمن.

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

θ : الإزاحة الزاوية , t : الزمن

إذا كانت الإزاحة الزاوية لدورة كاملة (2π) فإن الزمن المستغرق هو الزمن الدوري وبالتالي فإن السرعة الزاوية :

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

θ : الإزاحة الزاوية , t : الزمن , T : الزمن الدوري , f : التردد

ملاحظات مهمة

- تُقاس الإزاحة الزاوية (θ) بوحدة الـ (rad) والزمن بوحدة (s).
- تُقاس السرعة الزاوية (ω) بوحدة الـ (rad/s) أو بوحدة $(rad.s^{-1})$.
- الوحدات الأخرى التي يمكن أن تُقاس بها السرعة الزاوية (deg/s) أو بوحدة (rev/s).
- السرعة الزاوية كمية متجهة ويعتمد اتجاهها على إشارة السرعة الزاوية.
  - إذا كانت $(+)$ فإن اتجاه الدوران يكون عكس عقارب الساعة.
  - إذا كانت $(-)$ فإن اتجاه الدوران يكون مع عقارب الساعة.

سؤال إضافي NERD **احسب السرعة الزاوية للأرض بوحدة (rad/s) عند دورانها:**

أ - حول محورها.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{24\times60\times60} = 7.27\times10^{-5}\ rad/s$$

أ - حول الشمس.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{365\times24\times60\times60} = 2\times10^{-7}\ rad/s$$

▪ التردد الزاوي (ω) في حالة الحركة التبذبذبية:

عدد الدورات في وحدة الزمن مضروبًا بـ (2π).

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

r : نصف قطر الدائرة , s : المسافة المقطوعة أول طول القوس

- التردد الزاوي والسرعة الزاوية لهما نفس الرمز.

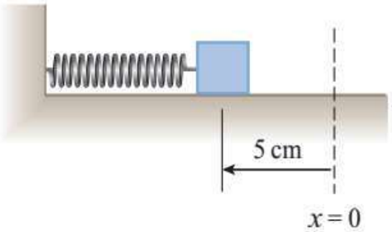
سؤال إضافي NERD **عندما تهتز أوتار الجيتار، تعود إلى موضع اتزانها من أقصى إزاحة لها خلال $(0.00227\ s)$، احسب التردد والتردد الزاوي لتلك الأوتار.**

$$T = 0.00227 \times 4 = 0.00908\ s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.00908} \rightarrow f = 110\ Hz$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(110) \rightarrow \omega = 691\ rad/s$$

؟ سؤال ضُغط جسم متصل بنابض موضوع على سطح أفقي أملس إلى نقطة تبعد مسافة (5 cm) عن موقع اتزانه كما في الشكل، وتُرك يتذبذب ذهابًا وإيابًا. إذا كان مقدار القوة المُعيدة عند تلك النقطة (4 N) فأجيب عما يأتي:



أ - ما مقدار سعة الذبذبة؟

$$A = 5\times10^{-2}\ \text{m} = 0.05\ \text{m}$$

ب - أحسب ثابت النابض.

$$F = -kx \rightarrow 4 = -k\times(-5\times10^{-2}) \rightarrow k = 80\ \text{N/m}$$

جـ - أحسب القوة المُعيدة وفسر إشارتها، عندما يُصبح الجسم على بُعد (2 cm) عن موقع الاتزان في أثناء عودته.

$$F_{2cm} = -kx = (-80)(-2\times10^{-2}) = 1.6\ \text{N}$$

الإشارة الموجبة تعني أن اتجاه القوة نحو $(+x)$ أي مُعاكس لاتجاه الإزاحة.

ملاحظات مهمة

- يُطبق قانون هوك على النابض والزنبرك بشرط أن يبقى التناسب ثابتا بين القوة المُعيدة والإزاحة أما إذا أصبح التناسب غير ثابت فإنه لا يمكن تطبيق قانون هوك.
- كمثال لا يمكن تطبيق قانون هوك على الأشرطة المطاطية لأن التناسب بين القوة والإزاحة غير ثابت.
- النوابض والزنبركات التي يُطبق عليها قانون هوك تسمى نوابض وزنبركات مرنة والتي لا يُطبق عليها قانون هوك تكون غير مرنة.
- هنالك حالات تزيد بها قوة النابض عن حد معين مما يسبب ازدياد استطالة النابض بشكل كبير وعندئذ لا تكون القوة متناسبة طرديًا مع الإزاحة فلا يمكن تطبيق قانون هوك.

سؤال إضافي NERD **ما الفرق بين السعة والإزاحة في الحركة الاهتزازية؟**

السعة خاصية ثابتة للاهتزاز على عكس الإزاحة فهي تعتمد على الزمن وتتغير كل ثانية.

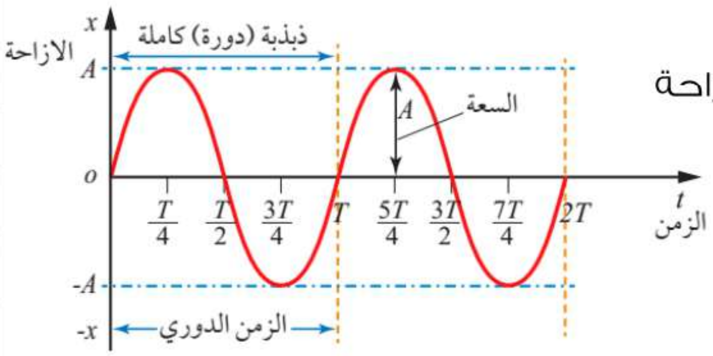
الإزاحة والتردد الزاوي في الحركة التوافقية البسيطة

إزاحة الجسم المهتز بحركة توافقية بسيطة يمكن أن تُمثل بدالة جيب أو دالة جيب التمام ويعتمد ذلك على نقطة بداية الحركة للجسم المهتز.

يمكن تلخيص منحنيات الإزاحة مع الزمن حسب موضع بدأ حركة الجسم المهتز إلى:

1. **حركة جسم تبدأ من موضع الاتزان (x=0).**
2. **حركة جسم تبدأ من موضع أقصى إزاحة (x=A).**

❶ حركة جسم تبدأ من موضع الاتزان (x=0).

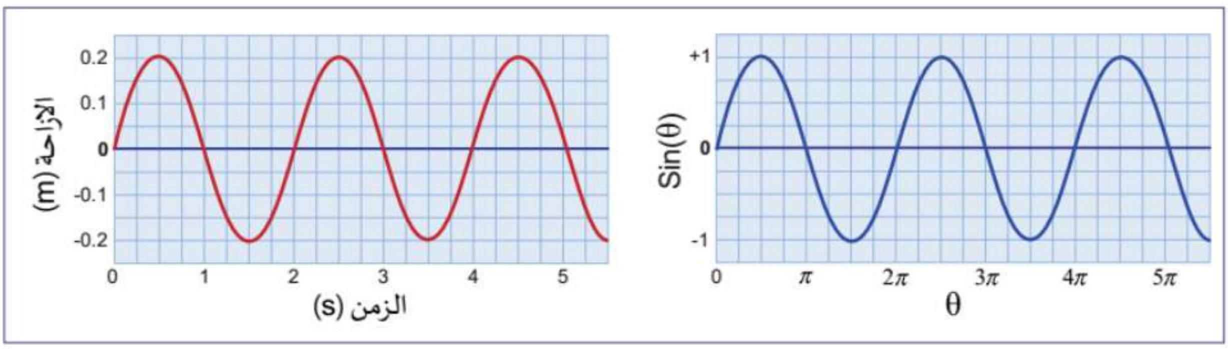


- يمثل الشكل الرسم البياني لمنحنى تغير الإزاحة مع الزمن لتذبذب جسم متصل بنابض بدأ حركته من موضع الاتزان $(x = 0)$.

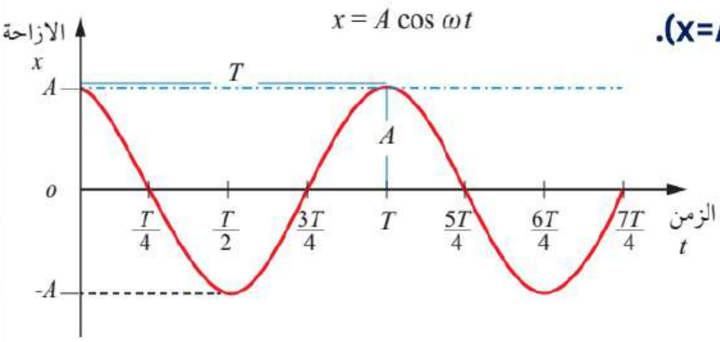
$$x(t) = A\sin\theta = A\sin(\omega t)$$

التردد الزاوي : ω , الإزاحة الزاوية θ , سعة الذبذبة : A

- هذا المنحنى هو اقتران جيبي (sin graph) لأنه مماثل لمنحنى اقتران الـ (sin).



❷ حركة جسم تبدأ من موضع أقصى إزاحة (x=A).



- يمثل الشكل الرسم البياني لمنحنى تغير الإزاحة مع الزمن لتذبذب جسم متصل بنابض بدأ حركته من موضع أقصى إزاحة $(x = A)$.

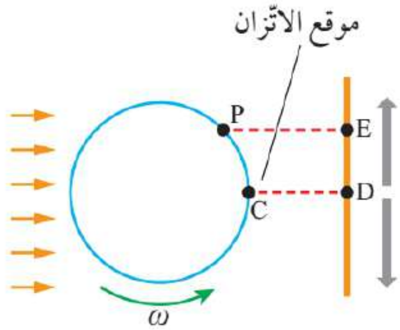
$$x(t) = A\cos\theta = A\cos(\omega t)$$

التردد الزاوي : ω , الإزاحة الزاوية θ , سعة الذبذبة : A

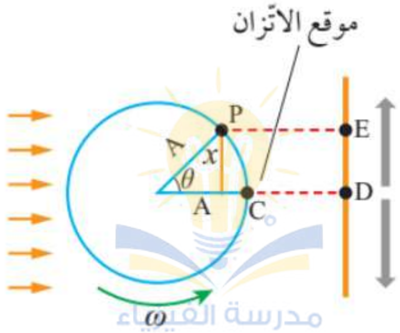
- هذا المنحنى هو اقتران جيب التمام (cos graph) لأنه مماثل لمنحنى اقتران الـ (cos).

الآن السؤال كيف تمت معرفة المعادلات الخاصة باقتران الإزاحة عند كل موضع؟

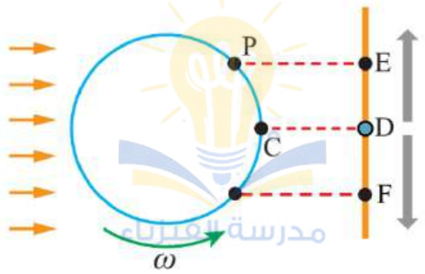
العلاقة بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة



- يمكننا دراسة العلاقة بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة من خلال جهاز مكبس محرك السيارة الذي يقوم بتحويل الحركة الاهتزازية –إلى الأعلى والأسفل– إلى حركة دورانية في عجلات السيارة.
- نلاحظ في الشكل المجاور أننا قمنا بتثبيت كرة على طرف قرص نصف قطره (A) يدور في مستوى رأسي.



- إذا قمنا بإسقاط أشعة ضوئية متوازية من جانب القرص الأيسر باتجاه موازٍ لسطحه كما في الشكل فإن ظل الكرة سيظهر على الشاشة الموضوع على يمين القرص.
- مع دوران القرص وحركة الكرة على محيط الدائرة فإن الظل سيتحرك أيضا على الشاشة إلى الأعلى والأسفل حول موقع نقطة الاتزان وهي النقطة (D).



- حركة ظل الكرة هنا تماثل الحركة التوافقية البسيطة لجسم متصل بنابض بدأ بالتذبذب من موقع الاتزان (D).
- عند الزمن $(t = 0)$ تكون الكرة في الموقع (C) وظلها في الموقع (D) على الشاشة والذي يعتبر هو موقع الاتزان وبعد فترة زمنية (t) تصبح الكرة عند الموقع (P) وظلها عند الموقع (E).

يمكن حساب مقدار الإزاحة التي قطعها ظل الكرة بالنسبة للزمن بشرط بدء الحركة من موقع الاتزان عند $(x = 0)$ و $(t = 0)$ من خلال العلاقة الآتية :

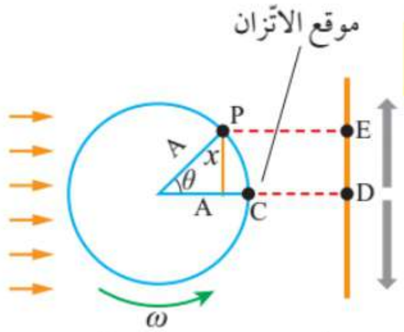
$$x(t) = A\sin\theta = A\sin(\omega t)$$

التردد الزاوي : ω ، الإزاحة الزاوية : θ ، سعة الذبذبة : A

ملاحظات مهمة

- أي حركة توافقية بسيطة تبدأ من موقع الاتزان تُمثل بيانيًا باقتران الجيب كما في الشكل.

؟ سؤال أثبت أن إزاحة ظل الكرة أو المسافة بين النقطة (D) و(E) تُعطى بالعلاقة:



$$x(t) = A\sin\theta = A\sin(\omega t)$$

$$\sin\theta = \frac{x}{A} \rightarrow x(t) = A\sin(\theta)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

يمكن حساب مقدار الإزاحة التي قطعها ظل الكرة بالنسبة للزمن بشرط بدء الحركة من أقصى إزاحة (A) عند $(t = 0)$ يمثل بيانيا باقتراب جيب التمام لتصبح العلاقة الآتية :

$$x(t) = A\cos\theta = A\cos(\omega t)$$

A : سعة الذبذبة ، θ : الإزاحة الزاوية ، ω : التردد الزاوي

ملاحظات مهمة

- أي حركة توافقية بسيطة تبدأ من موقع أقصى إزاحة تُمثل بيانيًا باقتران جيب التمام (اقتران الجتا) كما وضحنا سابقاً.
- معادلة الجيب وجيب التمام هما حالة خاصة من معادلة الحركة التوافقية البسيطة.

سؤال إضافي NERD عربة صغيرة مرتبطة بنابض تهتز من موضع الاتزان بسعة مقدارها (5 cm) وبزمن دوري مقداره (2.5 s)، كم تبلغ إزاحتها عند $(t = 0.4\ s)$؟

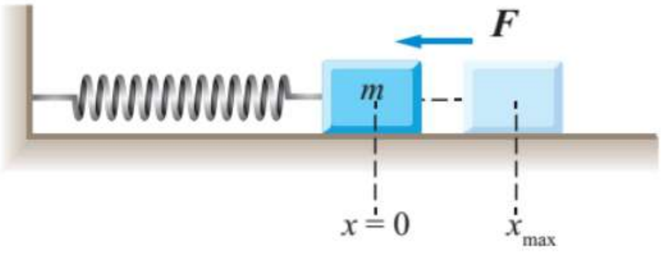
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.5} \rightarrow f = 0.4\ \text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(0.4) \rightarrow \omega = 0.8\pi$$

$$(\omega t) = (0.8\pi \times 0.4) = (0.32\pi)\ rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 0.32\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 57.6^o$$

$$x(t) = A\sin(\omega t) \rightarrow x(t) = 0.05\sin(57.6^o) = 0.05 \times 0.84 = 0.042\ m$$



سـؤال يتصل جسم بطرف نابض موضوع على سطح أفقي أملس سُحب الجسم إلى أقصى إزاحة عن موقع الاتزان كما في الشكل، ثم تُرك ليبدأ بالتذبذب عند الزمن $(t = 0)$،
فإذا علمت أن معادلة تغير الإزاحة مع الزمن:

$$x(t) = 0.05cos(\frac{\pi}{2} t)$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (m) والزمن بوحدة (S). جد :

أ - السعة والتردد الزاوي.

$$x(t) = Acos(\omega t) \rightarrow x(t) = 0.05cos(\frac{\pi}{2} t)$$

$$A = 0.05 \text{ m} \quad , \quad \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad.s}^{-1}$$

ب - الزمن الدوري والتردد.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 4 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{4} \text{ s}^{-1}$$

جـ - الإزاحة بعد نصف ثانية من بدء الحركة.

$$(\omega t) = (\frac{\pi}{2} \times 0.5) = (0.25\pi) \; rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 0.25\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 45^o$$

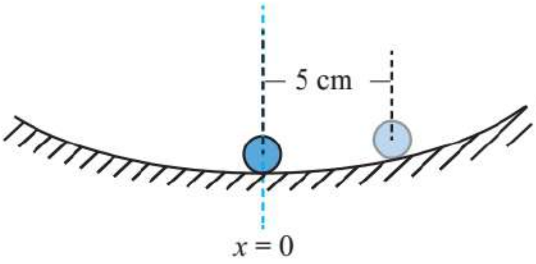
$$x(t) = Acos(\omega t) \rightarrow x(t) = 0.05cos(45^o) = 0.05 \times 0.70$$

$$x(t) = 0.035 \; m = 3.5 \; cm$$

سؤال إضافي علل : عندما تسقط كرة مرنة على الأرض ثم ترتد وتتكرر الحركة فإن حركتها لا تعتبر توافقية بسيطة.

لعدم وجود قوة مُعيده تُرجع الكرة إلى موضع الاتزان.

? سؤال تتذبذب كرة بحركة توافقية بسيطة في وعاء أملس مقعر كما في الشكل، فإذا بدأت الحركة من موقع الاتزان ($x = 0$) عند الزمن ($t = 0$) وكانت سعة الذبذبة (5 cm) والزمن الدوري (860 ms)، أحسب:



أ - التردد الزاوي.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.86} = 2.33\pi\ rad/s$$

ب - إزاحة الكرة بعد مرور (250 ms) من بدء الحركة.

$$(\omega t) = (2.33\pi \times 250 \times 10^{-3}) = (0.58\pi)\ rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 0.58\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 104.85^o$$

$$x(t) = Asin(\omega t) \rightarrow x(t) = 0.05sin(104.85^o)$$

$$x(t) = 0.05 \times 0.96 = 0.048\ m = 4.8\ cm$$

تمرين يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة باتجاه أفقي، بحيث يُكمل دورة واحدة في زمن (3 s). إذا بدأ الجسم الحركة عند الزمن ($t = 0$) من موقع الاتزان باتجاه محور ($+x$) وكانت سعة الذبذبة (4 cm)، فأجيب عما يأتي:

أ - أكتب معادلة تغير الإزاحة مع الزمن.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\times3.14}{3} = 2.09\ rad/s$$

$$x(t) = Asin(\omega t) \rightarrow x(t) = 0.04sin(\frac{2\pi}{3}t) = 0.04sin(2.09t)$$

ب - أحسب الإزاحة بعد مرور (0.6 s) من بدء الحركة.

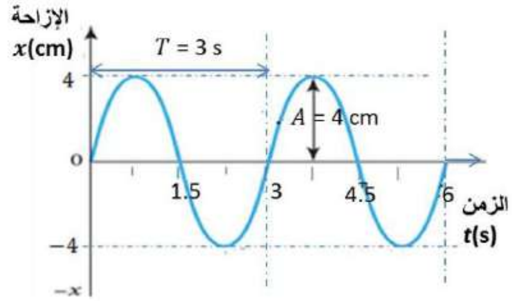
$$(\omega t) = (\frac{2\pi}{3} \times 0.6) = (0.4\pi)\ rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 0.4\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 72^o$$

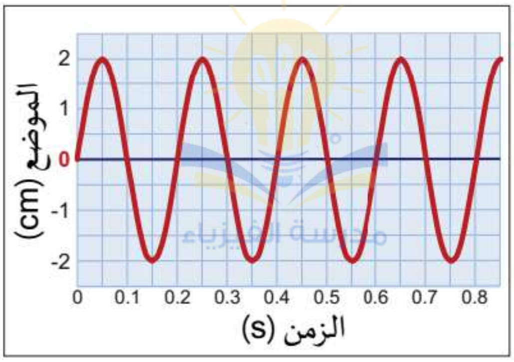
$$x(t) = Asin(\omega t) \rightarrow x(t) = 0.04sin(72^o) = 0.04 \times 0.95$$

$$x(t) = 0.038\ m = 3.8\ cm$$

جـ - أرسم منحنى الإزاحة - الزمن لدورتين كاملتين.



سؤال إضافي NERD يظهر الرسم البياني حركة كتلة تهتز حول نقطة اتزان ثابتة. استخدم الرسم البياني لتحديد كل من الزمن الدوري والتردد الزاوي.



$T = 0.2\ s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2} = \frac{2\times 3.14}{0.2} = 31.4\ rad/s$$

سؤال إضافي NERD في الاهتزازة الكاملة الواحدة المسافة الكلية التي يقطعها الجسم المهتز تعادل :

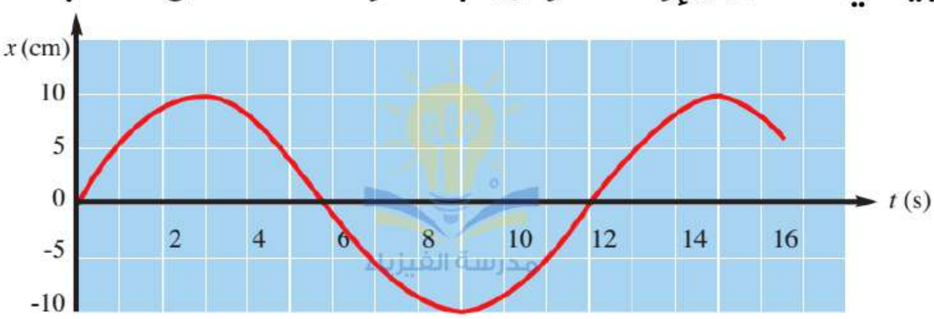
أ) 2A ب) 3A جـ) 4A د) 6A

سؤال إضافي NERD عندما يصل البهلوان (في عروض السيرك) في الأرجوحة إلى موضع الاتزان فإن القوة الكلية المؤثرة على اتجاه حركته تساوي صفرًا في ذلك الموضع، إلا أنه يستمر في التأرجح. فسر ذلك.

بسبب القصور الذاتي للبهلوان.

كويز تايم TEST يمثل الرسم البياني منحنى (الإزاحة-الزمن)، بعد دراستك للشكل احسب مقدار كل من:

السعة، الزمن الدوري، التردد.



كويز تايم TEST تتعرض كتلة لحركة توافقية بسيطة سعتها (4 mm) وترددها (0.32 Hz). تتساوى إزاحة الكتلة مع سعتها عند ($t = 0\ s$). ما المعادلة التي تصف إزاحة هذه الحركة؟

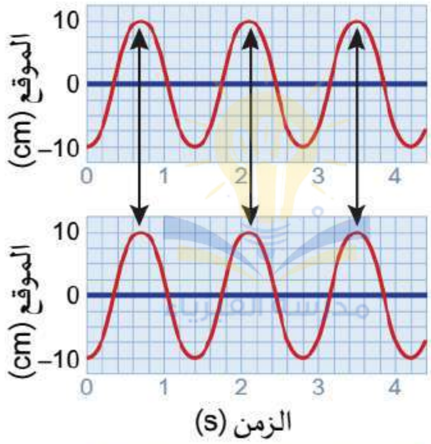
فرق الطور في الحركة التوافقية البسيطة

? سؤال **وضح ما المقصود بكل مما يلي :**

الطور : وصف لموقع الجسم في أثناء تذبذبه.
أو موقع الجسم المهتز في لحظة معينة بالنسبة إلى دورته الكاملة.

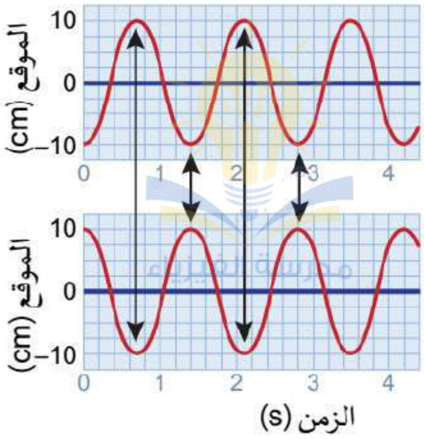
زاوية الطور : الزاوية اتي تُحدد موقع الجسم عند أي لحظة زمنية وتساوي $(\omega t + \phi)$.

ثابت الطور : الزاوية التي تبدأ عندها حركة الجسم ويرمز لها بالرمز (ϕ).



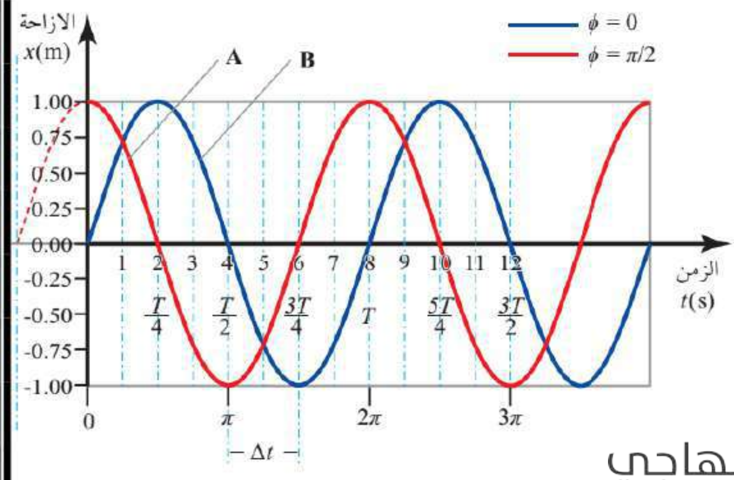
❶ اهتزاز جسمان متفقان في الطور.

- يمثل الرسم البياني حركة جسمين مهتزين متساويان في الزمن الدوري والسعة ومتفقين في الطور لأن كل منهما يكون في الموقع نفسه عند اللحظة الزمنية نفسها.



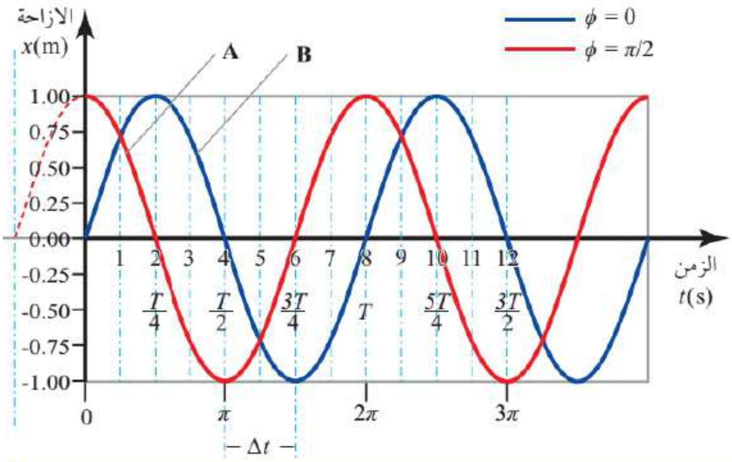
❷ اهتزاز جسمان متعاكسين في الطور.

- يمثل الرسم البياني حركة جسمين مهتزين متساويان في الزمن الدوري والسعة ومتعاكسين في الطور حيث فرق الطور بين الجسمين (180^o).



❸ اهتزاز جسمان مختلفان في الطور.

- لو افترضنا أن لدينا نظامين (A,B) يتحرك كل منهما حركة توافقية بسيطة ومتساويان في الزمن الدوري والسعة لكن أحد النابضين تحرك قبل الآخر بزمن معين (Δt) كما في الشكل، فإن ذلك يؤدي لحدوث فرق في زاوية الطور بينهما وبالتالي يصبح الجسمين مختلفين في الطور.



- هذا يعني أن النابضين لن يمرا من موقع الاتزان نفسه في الوقت نفسه ولن يصلا أقصى إزاحة في الوقت نفسه أيضا بسبب الاختلاف في زاوية الطور نتيجة لاختلاف زمن بدء الحركتين.
- الفرق في الزمن (Δt) بين حركة النابضين يكافئ الفرق في زاوية الطور بين الحركتين $(\omega\Delta t)$.

$$\text{الفرق في زاوية الطور} = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t$$

? سؤال بناءً على المعلومات المبينة في الشكل أعلاه الذي يمثل منحنى (الإزاحة-الزمن) لحركة نابضين (A, B) أجيب عما يأتي:

أ - أي المنحنيين يتقدم على الآخر؟

المنحنى (A) يتقدم على المنحنى (B) بربع دورة $(\frac{T}{4})$.

ب - أحسب الفرق في زاوية الطور بين حركتي النابضين.

$$\omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{2\pi}{8}(6-4) = \frac{\pi}{2}$$

ملاحظات مهمة

- بشكل عام تُعطى معادلة الإزاحة للحركة التوافقية البسيطة بالنسبة إلى الزمن بالعلاقة الآتية:

$$x(t) = Asin(\omega t + \phi)$$

- إذا بدأ الجسم من أقصى إزاحة $(x = A)$ عند $(t = 0)$:

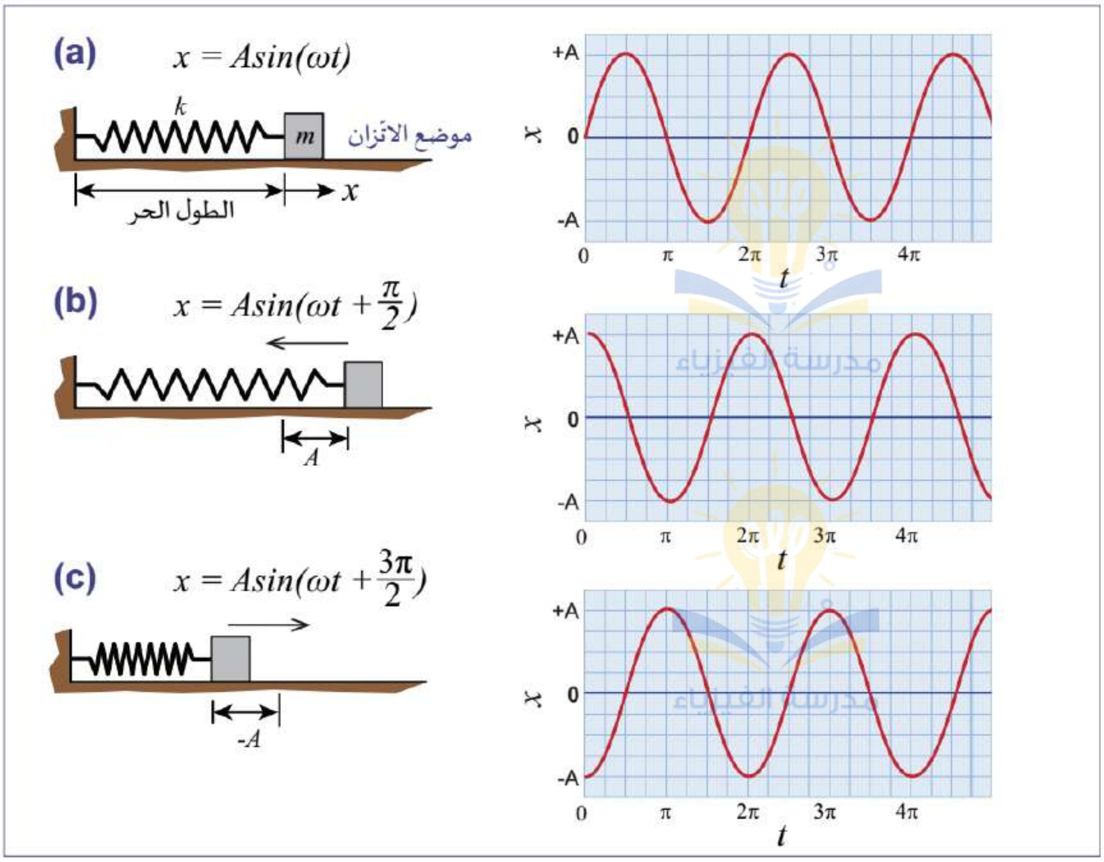
$$x(t) = Asin(\omega t + \phi)$$

$$A = Asin(0 + \phi) \rightarrow sin(\phi) = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

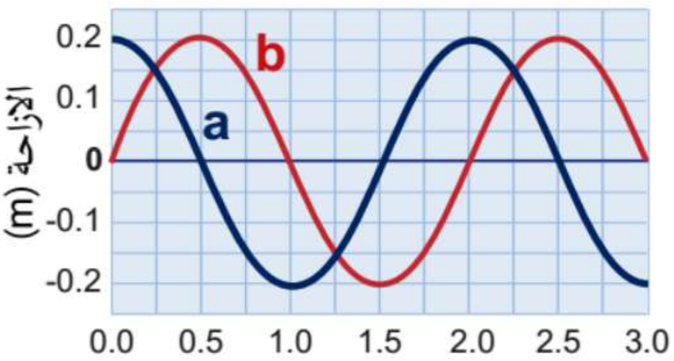
$$x(t) = Asin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = Acos(\omega t)$$

- إذا بدأ الجسم من أقصى إزاحة تكون دائما زاوية الطور $(\frac{\pi}{2})$.

- الرسوم البيانية لإزاحة حركة اهتزازية تبدأ بزوايا طور مختلفة.



سؤال إضافي NERD **بناءً على المعلومات المبينة في الشكل الذي يمثل منحنى (الإزاحة-الزمن) لحركة نابضين (A, B) أجيب عما يأتي:**



أ - أي المنحنيين يتقدم على الآخر؟

المنحنى (A) يتقدم على المنحنى (B) بربع دورة $(\frac{T}{4})$.

ب - الزمن الدوري والسعة لكل من النابضين؟

$$A = 0.2\ m \quad , \quad T = 2\ s$$

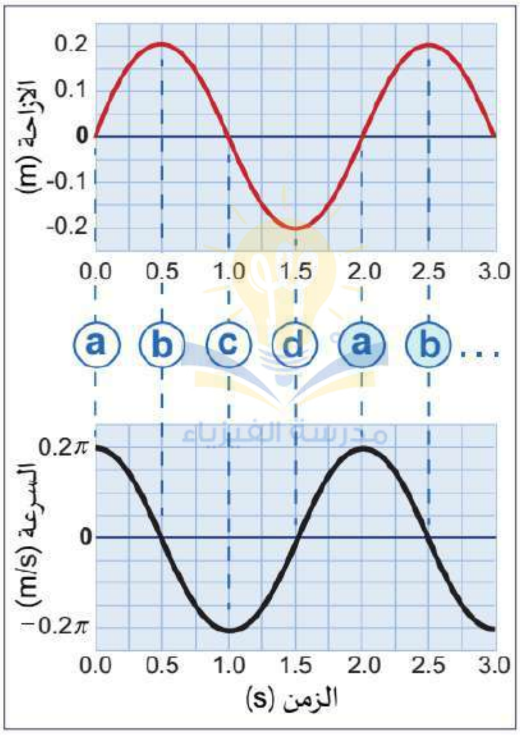
جـ - تردد كل من النابضين؟

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5\ m$$

د - أحسب الفرق في زاوية الطور بين حركتي النابضين.

$$\omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t = \frac{2\pi}{2} (1 - 0.5) = \frac{\pi}{2}$$

السرعة والتسارع في الحركة التوافقية البسيطة



❶ السرعة في الحركة التوافقية البسيطة.

- يمكننا استنتاج الرسم البياني للسرعة من الرسم البياني للإزاحة بعد تطبيق خاصية رياضية على معادلة الإزاحة وهي خاصية التفاضل (الاشتقاق).
- معادلة (الإزاحة–الزمن) عند اللحظة عند بدء الحركة من موقع الاتزان عند $(x = 0)$ و $(t = 0)$.

$$x(t) = Asin(\omega t)$$

- سرعة الجسم عند أية لحظة تساوي مشتقة معادلة (الإزاحة–الزمن) عند اللحظة نفسها.

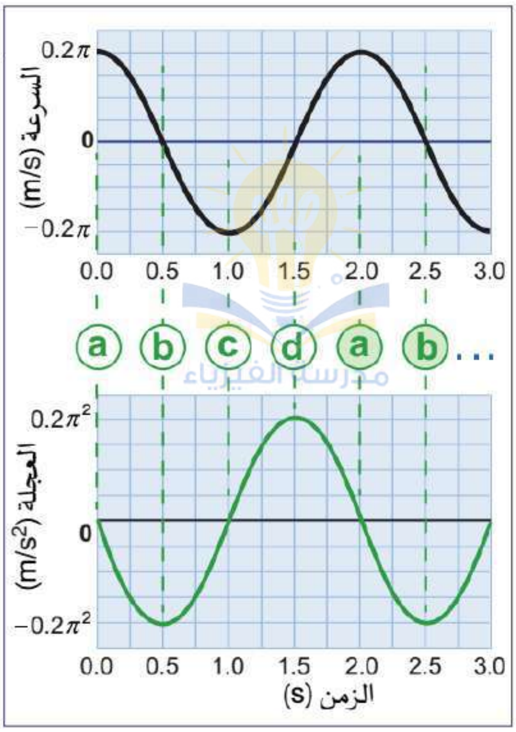
$$v(t) = \omega Acos(\omega t)$$

- تصل السرعة إلى قيمتها العظمى عندما يكون $(cos(\omega t) = 1)$ وبالتالي تصبح المعادلة كالآتي:

$$v_{max} = \omega A$$

$$v(t) = v_{max}cos(\omega t)$$

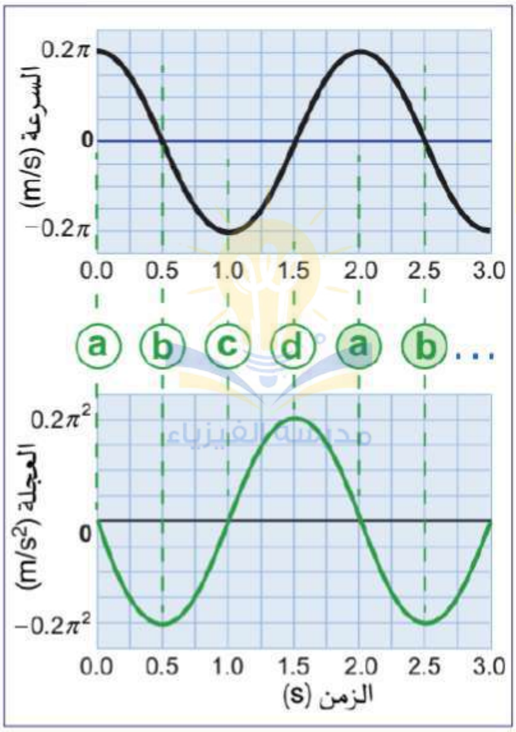
- للسرعة قيم عظمى عند النقاط التي تكون الإزاحة عندها صفرًا وهي (a,c) والسرعة تساوي صفرًا عند النقاط التي تكون للإزاحة عندها قيم قصوى (b,d).
- تردد منحنيات الإزاحة والسرعة متساويان.



❷ التسارع في الحركة التوافقية البسيطة.

- يمكننا استنتاج الرسم البياني للسرعة من الرسم البياني للسرعة بعد تطبيق خاصية رياضية على معادلة السرعة وهي خاصية التفاضل (الاشتقاق).
- تسارع الجسم عند أية لحظة يساوي مشتقة معادلة (السرعة–الزمن) عند اللحظة نفسها.

$$a(t) = -\omega^2 Asin(\omega t) = -\omega^2 x$$



- تصل السرعة إلى قيمتها العظمى عندما يكون ($sin(\omega t) = -1$) وبالتالي تصبح المعادلة كالآتي :

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$a(t) = -a_{max} sin(\omega t)$$

- للتسارع قيم عظمى عند النقاط التي تكون السرعة عندها صفرًا وهي (b,d) والتسارع يساوي صفرًا عند النقاط التي تكون للسرعة عندها قيم قصوى (a,c).
- تردد منحنيات السرعة والتسارع متساويان.
- بما أن القوة المعيدة هي القوة المحصلة المؤثرة في الجسم المتصل بالنابض فإن الجسم سيكتسب تسارعًا حسب القانون الثاني لنيوتن.

ملاحظات مهمة

- تنطبق المعادلات السابقة للإزاحة والسرعة والتسارع عند بدأ الجسم حركته من موقع الاتزان ($x = 0$) عند الزمن ($t = 0$).
- إذا بدأ الزمن عند لحظة زمنية معينة فإننا نستخدم نفس المعادلات لكن زاوية الطور تصبح مساوية لـ($\omega t + \phi$) حيث نقوم بإضافة ثابت الطور (الزاوية التي بدأ الجسم عندها الحركة).
- إذا بدأ الزمن عند لحظة معينة يمكننا إعادة اشتقاق معادلات السرعة والتسارع.

☑ **التردد الزاوي في نظام (كتلة-نابض) أفقي أو رأسي يُعطى بالعلاقة الآتية:**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

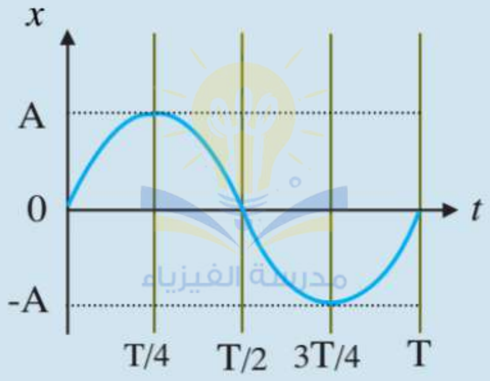
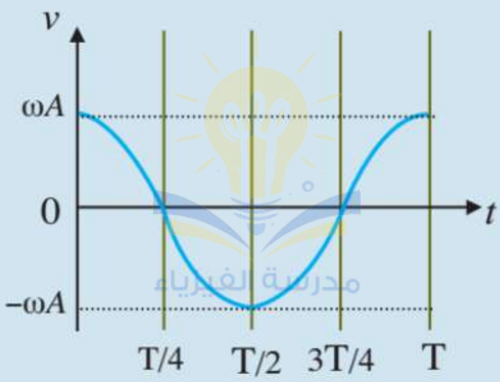
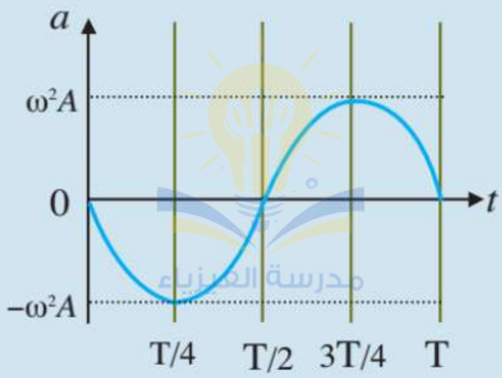
k : ثابت النابض , m : كتلة الجسم المتصل بالنابض بإهمال كتلة النابض نفسه

show that :

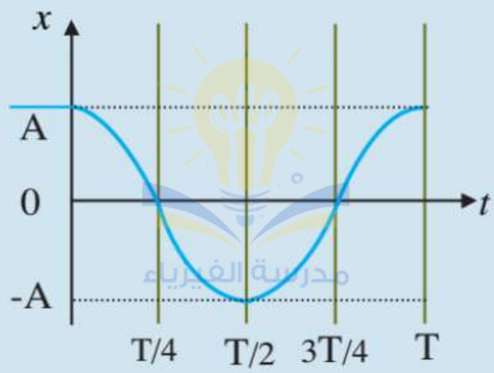
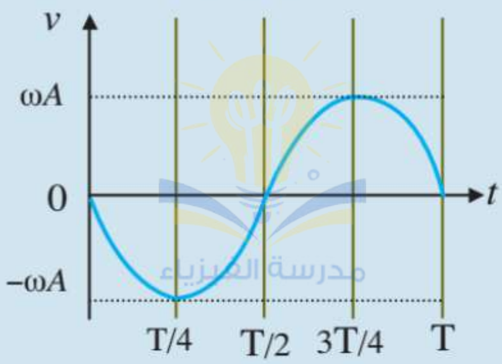
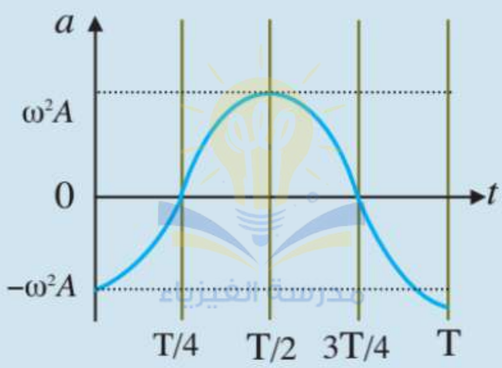
$$F = ma = -kx \rightarrow ma = -kx \rightarrow m(-\omega^2 x) = -kx \rightarrow m(-\omega^2) = -k$$

$$m(\omega^2) = k \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

☑ **حركة الجسم تبدأ من موضع الاتزان:**

المنحنى	الرسم البياني للمنحنى	العلاقة الجيبية للمنحنى
الإزاحة – الزمن		$x = A\sin(\omega t)$ ■ x هي إزاحة الجسم عن موضع الاتزان . ■ A هي سعة الحركة. ■ ω هي السرعة الزاوية.
السرعة – الزمن		$v = \omega A\cos(\omega t)$
التسارع – الزمن		$a = -\omega^2 A\sin(\omega t)$ $= -\omega^2 x$

☑ حركة الجسم تبدأ من أقصى إزاحة:

المنحنى	الرسم البياني للمنحنى	العلاقة الجيبية للمنحنى
الإزاحة – الزمن		$x = A\cos(\omega t)$
السرعة – الزمن		$v = -\omega A \sin(\omega t)$
التسارع – الزمن		$a = -\omega^2 A\cos(\omega t)$ $= -\omega^2 x$

☑ **الزمن الدوري في نظام (كتلة-نابض) يُعطى بالعلاقة الآتية:**

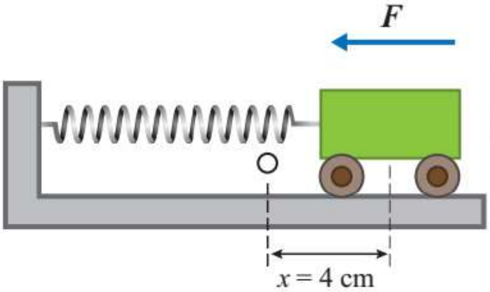
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

k : ثابت النابض , m : كتلة الجسم المتصل بالنابض بإهمال كتلة النابض نفسه

show that :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

? سؤال عربة كتلتها ($2\ kg$) تتصل بأحد طرفي نابض موضوع على سطح أفقي أملس، بينما الطرف الآخر للنابض مثبت في الجدار كما في الشكل، سُحبت العربة إزاحة ($x = +4\ cm$) عن موقع الاتزان، ثم تُركت تتذبذب بدءاً من الزمن ($t = 0$). فإذا كان ثابت النابض ($32\ N/m$) فأجيب عما يأتي:



أ - أحسب التردد الزاوي.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4\ rad/s$$

ب - أكتب معادلات تغير كل من الإزاحة والسرعة مع الزمن.

$$x = A = 4\ cm$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \rightarrow A = A\sin(0 + \phi) \rightarrow \sin(\phi) = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 0.04\sin(4t + \frac{\pi}{2})$$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) = 4 \times 0.04\cos(4t + \frac{\pi}{2})$$

$$v(t) = 0.16\cos(4t + \frac{\pi}{2})$$

Another solution:

$$x(t) = A\cos(\omega t) = 0.04\cos(4t)$$

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t) = -4 \times 0.04\sin(4t) = -0.16\sin(4t)$$

سؤال إضافي NERD **في السؤال السابق أكتب معادلة تغير التسارع مع الزمن:**

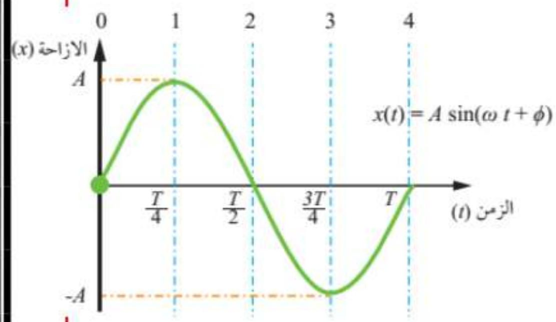
$$a(t) = -\omega^2 A sin(\omega t + \phi) = -16 \times 0.04\ sin(4t + \frac{\pi}{2})$$

$$a(t) = -0.64\ sin(4t + \frac{\pi}{2})$$

Another solution:

$$a(t) = -\omega^2 A cos(\omega t) = -16 \times 0.04 cos(4t) = -0.64\ cos(4t)$$

أفكّر: **حدد النقطة على منحنى (الإزاحة - الزمن) في الشكل المجاور التي تكون عندها:**



- السرعة قيمة عظمى سالبة والتسارع يساوي صفرًا.

تقاطع الخط رقم (2).

- السرعة تساوي صفرًا والتسارع قيمة عظمى موجبة.

تقاطع الخط رقم (3).

أفكّر: **هل يتغير الزمن الدوري في نظام (كتلة - نابض) بتغير سعة الذبذبة؟ وضح إجابتك..**

الزمن الدوري في نظام (كتلة – نابض) لا يتغير بتغير سعة الذبذبة وإنما يتغير بتغير كتلة الجسم أو ثابت النابض أو كليهما.

سؤال إضافي NERD **جسم كتلته (m) يتحرك حركة توافقية بسيطة تحت تأثير نابض، ماذا يحدث للزمن الدوري والتردد إذا ازدادت كتلة الجسم أربعة أضعاف ما كانت عليه ؟**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T^{\therefore} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}} = \sqrt{4} \times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2T$$

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow f^{\therefore} = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \times f$$

? سـؤال يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة الإزاحة الآتية :

$$x(t) = 0.08sin(1.33t + \frac{\pi}{5})$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (m) والزمن بوحدة (S). جد:

أ - السعة والتردد الزاوي والزمن الدوري وثابت الطور.

$$A = 0.08\ m \quad , \quad \omega = 1.33\ rad/s \quad , \quad \phi = \frac{\pi}{5}\ rad = 36^o$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\times 3.14}{1.33} = 4.72\ s$$

ب - القيمة العظمى للسرعة.

$$v_{max} = \omega A = 1.33 \times 0.08 = 0.11\ \text{m/s}$$

جـ - أكتب معادلة تغير السرعة مع الزمن.

$$v(t) = \omega A cos(\omega t + \phi) = 1.33 \times 0.08 cos(1.33t + \frac{\pi}{5})$$

$$v(t) = 0.106 cos(1.33t + \frac{\pi}{5})$$

د - زاوية الطور بعد بدء الحركة بثلاث ثوانٍ.

$$(\omega t + \phi) = (1.33 \times 3 + \frac{\pi}{5}) = (3.99 + 0.63) = 4.62\ rad$$

$$(\omega t + \phi) = (4.62)\ rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 4.62 \times \frac{180^o}{3.14} = 265^o$$

سؤال إضافي NERD جسم كتلته (m) بدأ بالتذبذب في حركة توافقية بسيطة من أقصى إزاحة تحت تأثير نابض، بحيث يُكمل الدورة الواحدة في فترة زمنية مقدارها (3.4 s)، فإذا كان ثابت النابض $(32\ N/m)$ فاحسب مقدار كتلة الجسم المُعلق بالنابض.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{3.4} = 1.82\ rad/s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{32}{(1.82)^2} = 9.66\ kg$$

سؤال إضافي **جسمن مرتبطان بنابضين يتحركان حركة توافقية بسيطة، أيهما له زمن دوري أكبر إذا علمت أن ثابت هوك متساوياً في النابضين وأحد الجسمين كتلته ضعف كتلة الآخر.**

الجسم الذي له زمن دوري أكبر هو الجسم الذي كتلته أكبر أو ضعف كتلة الجسم الآخر.

سؤال إضافي **هل يختلف الزمن الدوري للجسم المهتز تحت تأثير نابض على سطح الأرض عن الزمن الدوري لنفس الجسم على القمر؟ فسر إجابتك..**

لا، لأن الزمن الدوري للجسم المهتز تحت تأثير نابض لا يعتمد على تسارع الجاذبية كما هو موضح في المعادلة الآتية:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

تمرين **يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة الإزاحة الآتية:**

$$x(t) = 0.1sin(\pi t + \pi)$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (m) والزمن بوحدة (S). جد:

أ - التردد والتردد الزاوي.

$$A = 0.1\ m\ ,\ \omega = \pi\ rad/s = 3.14\ rad/s\ ,\ \phi = \pi\ rad$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5\ Hz$$

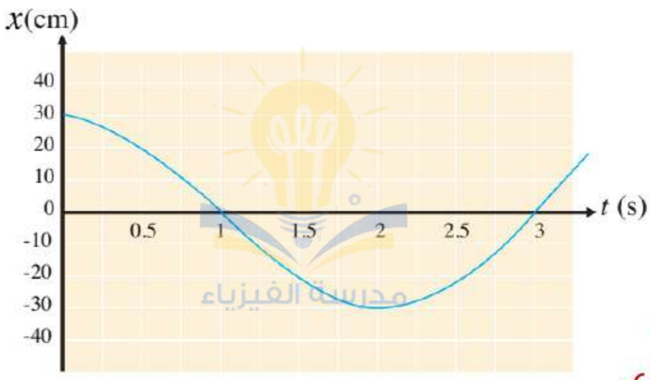
ب - سرعة الجسم بعد (0.5 s) من بدء الحركة.

$$(\omega t + \phi) = (\pi \times 0.5 + \pi) = (1.5\pi)\ rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 1.5\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 270^o$$

$$v(t) = \omega A cos(\omega t + \phi) = \pi \times 0.1cos(270^o) = 3.14 \times 0.1 \times 0 = 0\ m/s$$

سؤال إضافي يمثل الرسم البياني منحنى تغير إزاحة جسم مهتز (x) خلال فترة زمنية (t)، ادرسه ثم احسب كل مما يلي:



أ - السرعة عند $(t = 0)$.

بما أن الجسم يبدأ حركته عند أقصى إزاحة فإن سرعته عند $(t = 0)$ تساوي صفرًا.

ب - أقصى سرعة.

يظهر لنا من الرسم أن الزمن الدوري اللازم لإكمال نصف اهتزازه يساوي $(2\ s)$ وبالتالي فإن الزمن الدوري للاهتزازة الكاملة يساوي $(4\ s)$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = 1.57\ rad/s$$

$$v_{max} = \omega A = 1.57 \times 0.3 = 0.471\ m/s$$

جـ - التسارع عند $(t = 1\ s)$.

بما أن الجسم عند $(t = 1\ s)$ يكون عند موضع الاتزان، فإن التسارع = صفرًا.

سؤال إضافي يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة التسارع الآتية:

$$a(t) = 0.29 sin(\pi t + \pi)$$

إذ يُقاس التسارع بوحدة (m/s^2) والزمن بوحدة (s). جد:

أ - السرعة الزاوية للحركة (ω).

$$\omega = \pi\ rad/s$$

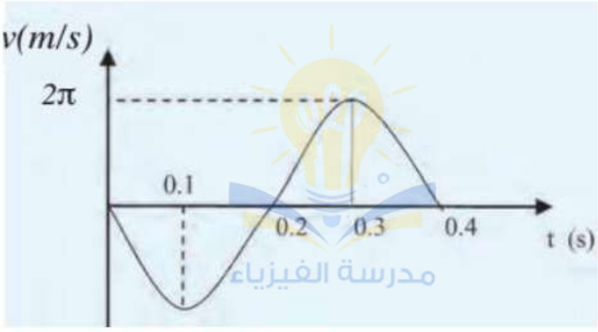
ب - سعة الحركة (A).

$$A\omega^2 = 0.48 \rightarrow A \times \pi^2 = 0.48 \rightarrow A = 0.029\ m$$

جـ - سرعة الجسم بعد (0.5 s) من بدء الحركة.

$$(\omega t) = (\pi \times 0.5) = (0.5\pi)\ rad \rightarrow \theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 0.5\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 90^o$$

$$v(t) = A\omega cos(\omega t + \pi) = 0.029\pi cos(90^o) = 0\ m/s$$



سؤال إضافي NERD **الشكل البياني يمثل العلاقة بين (السرعة-الزمن) لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة طبقًا للمعادلة**

$$v(t) = -\omega A sin(\omega t)$$

أوجد كلاّ من:

أ - السرعة الزاوية للحركة (ω).

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi\ rad/s$$

ب - سعة الحركة (A).

$$\omega A = 2\pi \rightarrow (5\pi)A = 2\pi \rightarrow A = 0.4\ m$$

جـ - إزاحة جسم بعد زمن قدره ($1\ s$) من بداية الحركة.

$$(\omega t) = (5\pi \times 1) = (5\pi)\ rad \rightarrow \theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 5\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 900^o$$

$$x(t) = Acos(\omega t) = 0.4cos(900^o) = 0.4 \times -1 = -0.4\ m$$

د - أقصى تسارع لحركة الجسم.

$$a_{max} = \omega^2 A = (5\pi)^2 \times 0.4 = 10\pi^2\ m/s^2$$

د - تسارع الجسم عند قطعه إزاحة ($0.2\ m$).

$$a = -\omega^2 x = -(5\pi)^2 \times 0.2 = -5\pi^2 = -49.3\ m/s^2$$

كويزتايم TEST **يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة الإزاحة الآتية:**

$$x(t) = 5sin(t + \frac{\pi}{5})$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (cm) والزمن بوحدة (s) وبدأ الحركة من الزمن ($t = 0$) جد إزاحة الجسم وسرعته بعد ($0.02\ s$) من بدء الحركة.

كويزتايم TEST **يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة الإزاحة الآتية:**

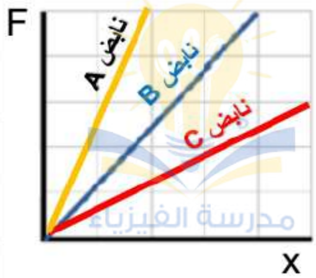
$$x(t) = 0.15cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6})$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (m) والزمن بوحدة (s) جد كلاً من إزاحة الجسم بعد ($4\ s$) من بدء الحركة وزاوية الطور بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

أسئلة إضافية وإثرائية

? سؤال

يمثل المنحنى المجاور تأثير قوة الشد في ثلاثة نوابض معلقة رأسي بعد تعليق كتلة كل نابض مقدارها (0.5 kg)، رتب هذه النوابض تنازليًا تبعًا لقيمة النابض؟



? سؤال

في الشكل المجاور تم سحب كتلة معلقة بنابض مسافة (1 cm)، إذا علمت أن ثابت النابض (90 N/m) وأقصى تسارع للكتلة ($0.16\ m/s^2$) فاحسب:

أ - الزمن الدوري للنظام. ب - كتلة الجسم.

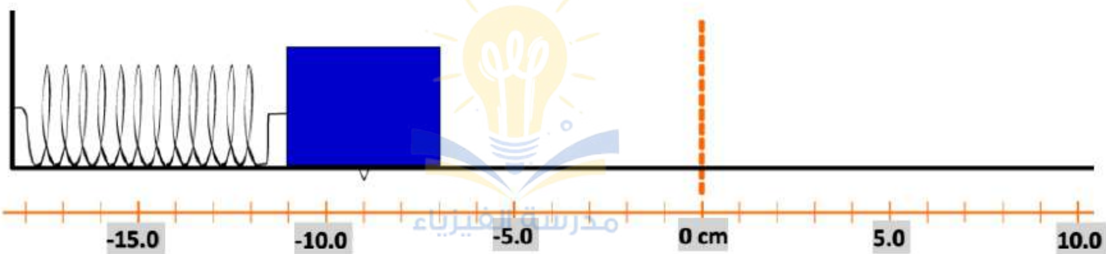
? سؤال

في الشكل المجاور جسم كتلته (400 g) ثُبت في الطرف الحر لنابض مرن، فإذا سُحب الجسم لمسافة (9 cm)، إذا علمت أن مقدار السرعة للنظام تساوي (40 cm/s) عند الإزاحة (2.5 cm). احسب:

أ - التردد الزاوي للنظام.

ب - ثابت النابض.

جـ - تسارع النظام عند منتصف المسافة بين موضع الاتزان وأقصى إزاحة.



أسئلة إضافية وإثرائية

? سؤال

يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة التسارع الآتية:

$$a(t) = 2\pi^2 sin(\pi t + \frac{3\pi}{2})$$

إذ يُقاس التسارع بوحدة (m/s^2) والزمن بوحدة (s). جد:

أ - إزاحة الجسم عند (1 s).　　　ب - سرعة الجسم عند (1.2 s).

? سؤال

كرة كتلتها (0.5 kg) متصلة بنابض بحركة توافقية بسيطة. الشكل المجاور يوضح منحنى التسارع – الزمن للحركة، جد :

أ - سعة الاهتزازة.　　　ب - إزاحة الكرة عند (2 s).

? سؤال

يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة التسارع الآتية:

$$x(t) = 0.04 sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (m) والزمن بوحدة (s). مثل بيانيًا منحنى التسارع بدلالة الزمن.

أسئلة إضافية وإثرائية

? سؤال

يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة التسارع الآتية:

$$x(t) = 0.04sin(\pi t + \frac{3\pi}{2})$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (m) والزمن بوحدة (S). مثل بيانيًا منحنى الإزاحة بدلالة الزمن.

? سؤال

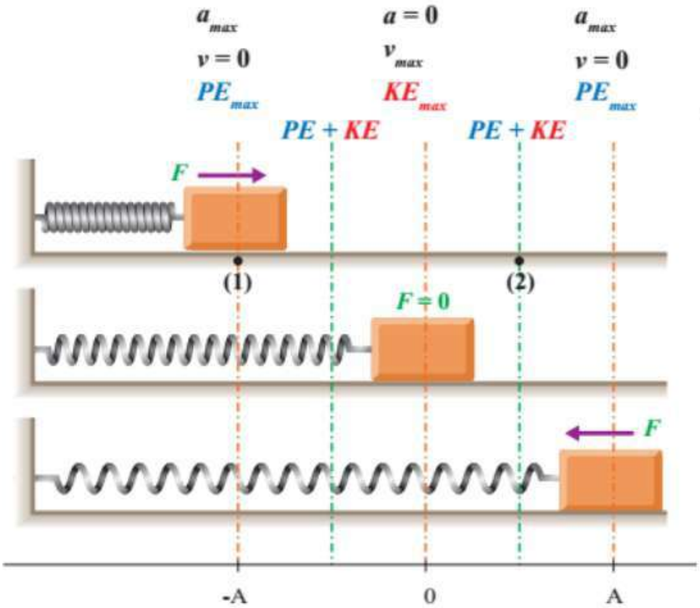
يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة حسب معادلة التسارع الآتية:

$$x(t) = 0.04sin(2\pi t)$$

إذ تُقاس الإزاحة بوحدة (m) والزمن بوحدة (S). مثل بيانيًا منحنى السرعة بدلالة الزمن.

الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة

- تكون الطاقة الكلية للنظام ثابتة في ظل غياب القوى غير المحافظة مثل قوى الاحتكاك والشد.
- لو افترضنا جسمًا له كتلة ومتصل بنابض موضوع على سطح أفقي أملس عند موقع الاتزان $(x = 0)$ كما في الشكل.



- إذا ضغطنا النابض نحو اليسار بواسطة قوة خارجية إزاحة قصوى $(x = -A)$ فإن الشغل المبذول من القوة يُختزن على شكل طاقة وضع مرونية.
- طاقة الوضع المرونية تحتزن في الجسم المرن عند التأثير عليه بقوة تعمل على تغيير شكله مثل ضغط أو استطالة النابض.
- تتغير طاقة الوضع للنظام أثناء اهتزاز الكتلة عندما ينضغط النابض أو يستطيل.

- يمكننا حساب مقدار طاقة الوضع المرونية المختزنة في نابض استطال أو انضغط إزاحة معينة بالعلاقة الآتية:

$$PE = \frac{1}{2} k x^2$$

x : مقدار استطالة أو انضغاطة النابض ، k : ثابت النابض

- يمكننا حساب مقدار أقصى طاقة وضع مرونية مختزنة في النابض بالعلاقة الآتية:

$$PE_{max} = \frac{1}{2} k A^2$$

? سؤال ما تحولات الطاقة في أثناء تذبذب جسم يتصل بنابض على سطح أفقي أملس؟

☑ إذا تركنا الجسم يبدأ بحركة التذبذب من موقع $(x = -A)$ حيث تكون $(v = 0)$ ولطاقة الوضع المرونية قيمة عظمى تبدأ بعدها تحولات الطاقة.

☑ تتناقص طاقة الوضع المرونية وتزداد الطاقة الحركية لتتحول طاقة الوضع المرونية كاملة إلى طاقة حركية عند موقع الاتزان $(x = 0)$.

☑ ثم تتزايد طاقة الوضع المرونية وتقل الطاقة الحركية إلى أن تتحول الطاقة كاملة إلى طاقة وضع مرونية عند الإزاحة القصوى على الطرف الآخر $(x = +A)$.

☑ الطاقة الميكانيكية في الحركة التوافقية البسيطة:

- قوة النابض عبارة عن قوة محافظة بسبب غياب قوى الاحتكاك لذلك فإن الطاقة الميكانيكية تكون محفوظة.

$$ME = PE + KE = constant$$

- مجموعة طاقة الوضع المرونية والطاقة الحركية عند أي نقطتين خلال مسار حركة الجسم المتصل بنابض يكون متساويًا.

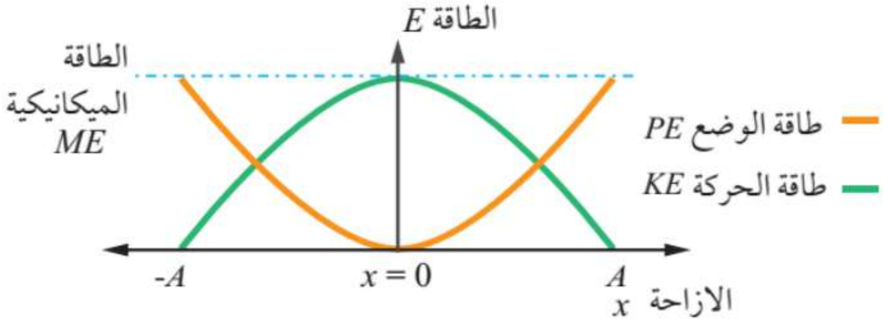
$$PE_1 + KE_1 = PE_2 + KE_2$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

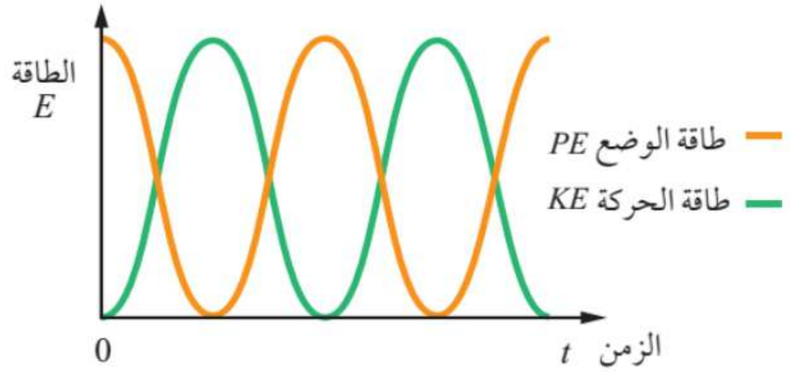
- تكون الطاقة الميكانيكية في الحركة التوافقية البسيطة محفوظة في غياب القوى غير المحافظة والقيمة العظمى لطاقة الوضع المرونية تساوي القيمة العظمى للطاقة الحركية وتساوي الطاقة الميكانيكية.

$$ME = PE_{max} = KE_{max}$$

- يمثل الشكل تغيرات كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع المرونية والطاقة الميكانيكية مع الإزاحة في الحركة التوافقية البسيطة.



- يمثل الشكل تغيرات كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع المرونية مع الزمن في الحركة التوافقية البسيطة بدءًا من أقصى ارتفاع.



- يمكننا حساب مقدار الطاقة الحركية العظمى عند موقع الاتزان إذا علمنا مقدار القيمة العظمى للسرعة:

$$KE_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m(\omega A)^2$$

- عند أي من النقطتين على طرفي مسار الحركة $(x = +A)$ أو $(x = -A)$ فإن الطاقة الميكانيكية تكون مساوية لطاقة الوضع المرونية حيث السرعة تساوي صفراً:

$$ME = PE + KE = \frac{1}{2} kA^2 + \frac{1}{2} m(0)^2 = \frac{1}{2} kA^2 = PE_{max}$$

- تتناسب الطاقة الميكانيكية في الحركة التوافقية البسيطة طردياً مع مربع السعة.

☑ **السرعة العظمى في نظام (كتلة-نابض) تُعطى بالعلاقة الآتية:**

$$v_{max} = \pm\, \omega A = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

show that : عند موقع الاتزان تتحول طاقة الوضع المرونية العظمى إلى طاقة حركية عظمى.

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m(v_{max})^2 \rightarrow (v_{max})^2 = (\frac{k}{m})A^2$$

$$v_{max} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} A = \pm\, \omega A$$

☑ **سرعة الجسم عند أي نقطة على مسار حركة النابض تُعطى بالعلاقة الآتية:**

$$v = \pm\, \omega \sqrt{(A^2 - x^2)}$$

show that : بشكل عام عند أي نقطة على مسار حركة الجسم المتصل بنابض إذا بدأ من أقصى إزاحة

$$\frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$

$$\frac{1}{2} kA^2 + \frac{1}{2} m(0)^2 = \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 \rightarrow \frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x_2^2\right)} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\left(A^2 - x_2^2\right)} = \pm\, \omega \sqrt{(A^2 - x_2^2)}$$

أفكِّر: إذا ضُغط النابض في الشكل بحيث تتضاعف الإزاحة القصوى $(x = -2A)$

فماذا يحدث لكل من:

أ) الطاقة الميكانيكية:

$$ME = PE_{max} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$ME^{\cdot} = PE_{max}^{\cdot} = \frac{1}{2}k(2A)^2 = \frac{1}{2}k4A^2 = 4PE_{max} = 4ME$$

ب) القيمة العظمى لسرعة الجسم المتذبذب:

$$v_{max} = \omega A \rightarrow v_{max}^{\cdot} = \omega(2A) = 2\omega A = 2v_{max}$$

جـ) القيمة العظمى لتسارع الجسم المتذبذب:

$$a_{max} = \omega^2 A \rightarrow a_{max}^{\cdot} = \omega^2(2A) = 2\omega^2 A = 2a_{max}$$

أتحقَّقُ: جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة، عند أي موقع / مواقع يمتلك:

أ. طاقة حركية فقط.

عند موقع الاتزان $(x = 0)$.

ب. طاقة وضع فقط.

عند أقصى إزاحة $(x = A, x = -A)$.

جـ. طاقة وضع وطاقة حركية معًا.

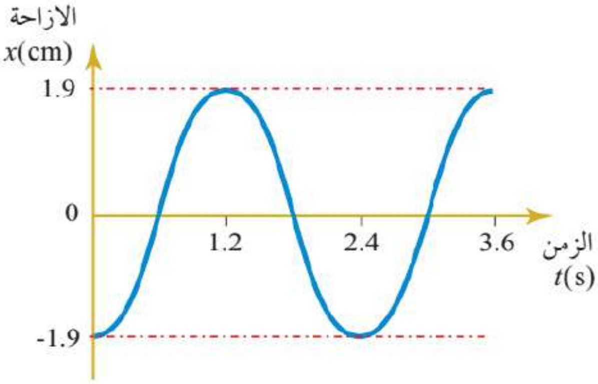
عند الموقع $(0 < x < A \ , -A < x < 0)$.

ملاحظات مهمة

- قد تكون سرعة الجسم موجبة أو سالبة اعتمادًا على اتجاه حركة الجسم عند تلك النقطة.

أفكِّر: في اللحظة التي يكون فيها الجسم عند أقصى إزاحة عن موقع الاتزان في أثناء حركته حركة توافقية بسيطة، أي الكميات الآتية : (السرعة، التسارع، طاقة الحركة، طاقة الوضع المرونية) تكون لها قيمة عظمى عند تلك اللحظة؟

التسارع وطاقة الوضع المرونية.



? سـؤال يتذبذب جسم كتلته (75 g) يتصل بنابض في حركة توافقية بسيطة كما في الشكل ، مستعيناً بالبيانات المثبتة على الشكل أحسب:

أ - التردد الزاوي.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{2.4} = 2.61 \text{ rad/s}$$

ب - الطاقة الحركية العظمى.

$$KE_{max} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega A)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times (75\times 10^{-3}) \times (2.61\times 1.9)^2 \rightarrow KE_{max} = 9.2\times 10^{-5} \text{ J}$$

جـ - طاقة الوضع المرونية العظمى.

$$KE_{max} = PE_{max} = 9.2\times 10^{-5} \text{ J}$$

د - طاقة الوضع المرونية والطاقة الحركية بعد (0.6 s) من بدء الحركة.

يكون الجسم عند موضع الاتزان بعد (0.6 s) من بدء الحركة.

$$PE_{max} = 0 \text{ J}$$

$$KE_{max} = 9.2\times 10^{-5} \text{ J}$$

? سـؤال ضُغط الجسم كتلته (0.2 kg) يتصل بنابض موضوع على سطح أفقي أملس إلى أقصى إزاحة (10 cm)، وتُرك ليتحرك حركة توافقية بسيطة. إذا كان ثابت النابض (19.6 N/m) فأحسب:

أ - الطاقة الميكانيكية.

$$ME = PE_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\times 19.6\times (0.1)^2 = 0.098 \text{ J}$$

ب - الطاقة الحركية العظمى.

$$KE_{max} = ME = 0.098 \text{ J}$$

جـ - طاقة الوضع المرونية والطاقة الحركية عندما تكون إزاحة الجسم نصف السعة.

$$PE_{x=0.05} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 19.6\times (0.05)^2 = 0.0245 \text{ J}$$

$$ME = PE_{x=0.05} + KE_{x=0.05} \rightarrow KE_{x=0.05} = ME - PE_{x=0.05}$$

$$KE_{x=0.05} = 0.098 - 0.0245 = 0.0735 \text{ J}$$

د - سرعة الجسم عندما تصبح إزاحته (2 cm) عن موقع الاتزان.

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\left(A^2 - x_2^2\right)} = \pm\sqrt{\frac{19.6}{0.2}}\sqrt{((0.1)^2 - (0.02)^2)}$$

$v = \pm\, 0.97\ m/s$ J → تحدد الإشارة حسب اتجاه الحركة

تمرين **كتلة مقدارها (83 g) متصلة بنابض وتتذبذب بحركة توافقية بسيطة على سطح أفقي أملس. إذا كانت سعة الذبذبة (7.6 cm) والطاقة الحركية العظمى للكتلة (320 mJ) فأحسب:**

أ - ثابت النابض.

$$PE_{max} = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow 320 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times k \times (0.076)^2 \rightarrow k = 110.8\ \text{N/m}$$

$$v_{max} = 2.77\ m/s$$

$$v_{max} = \omega A \rightarrow 2.77 = \omega \times 7.6 \times 10^{-2} \rightarrow \omega = 36\ rad/s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{110.8}{0.083}} = 36.5$$

ب - الزمن الدوري.

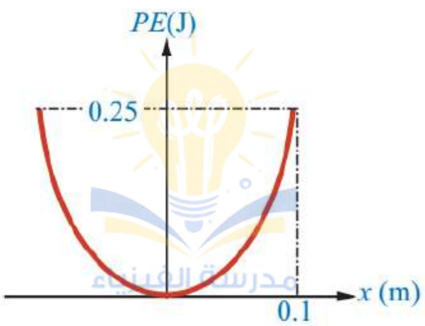
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{36.5} = 0.172\ \text{s}$$

جـ - سرعة الجسم عندما تصبح إزاحته ($x = -5\ cm$).

$$v = \pm\,\omega\sqrt{\left(A^2 - x_2^2\right)} = \pm\, 36.5\sqrt{((0.076)^2 - (-0.05)^2)}$$

$v = \pm\, 2.09\ m/s$ → تحدد الإشارة حسب اتجاه الحركة

سؤال إضافي NERD **عربة كتلتها (0.5 kg) تتصل بنابض على سطح أفقي أملس، وتتحرك حركة توافقية بسيطة مُثلث العلاقة بين طاقة الوضع للعربة والإزاحة كما في الشكل. أحسب مستعيناً بالشكل مما يأتي:**



أ - الطاقة الميكانيكية.

$$ME = PE_{max} = 0.25\ \text{J}$$

ب - ثابت النابض.

$$PE_{max} = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow 0.25 = \frac{1}{2} \times k \times (0.1)^2 \rightarrow k = 50\ N/m$$

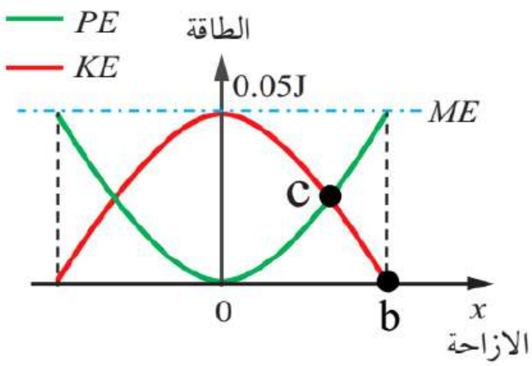
جـ - طاقة الوضع المرونية، عندما تكون العربة على بعد (5 cm) من موقع الاتزان.

$$PE_{x=0.05} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times (0.05)^2 = 0.0625\ J$$

د - القيمة العظمى للتسارع.

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A = \frac{50}{0.5} \times 0.1 = 10\ m/s^2$$

سؤال إضافي NERD يوضح الشكل المجاور تغيرات كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع المرونية مع الإزاحة لجسم كتلته (0.4 kg) يتصل بنابض ويتحرك حركة توافقية بسيطة على سطح أفقي أملس. مستعينًا بالشكل أجيب عما يأتي:



أ - أحسب كلاً من ثابت النابض والزمن الدوري إذا علمت أن سعة الذبذبة (10 cm).

$$A = 10 \times 10^{-2}\ m \ \ ,\ \ m = 0.4\ kg$$

$$PE_{max} = KE_{max} = 0.05\ J = 5 \times 10^{-2}\ J$$

$$PE_{max} = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow 5 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times k \times (10 \times 10^{-2})^2$$

$$k = 10\ N/m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{4\times10^{-1}}{10}} \rightarrow T = 1.25\ s$$

ب - طاقة الوضع المرونية والطاقة الحركية بعد (0.5 s) من بدء الحركة.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.25} = 1.6\pi\ rad/s$$

$$(\omega t) = (1.6\pi \times 0.5) = (0.8\pi)\ rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 0.8\pi \times \frac{180^o}{\pi} = 144^o$$

$x(t) = Asin(\omega t) = 0.1cos(144^o) = 0.05\ m$

$PE_{x=0.05} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (0.05)^2 = 0.0125\ J$

$KE_{max} = PE_{max} = ME = 0.05\ J$

$ME = PE_{x=0.05} + KE_{x=0.05} \rightarrow KE_{x=0.05} = ME - PE_{x=0.05}$

$KE_{x=0.05} = 0.05 - 0.0125 = 0.0375\ J$

جـ - الطاقة الحركية بعد (0.625 s) من بدء الحركة.

$(\omega t) = (1.6\pi \times 0.625) = (\pi)\ rad$

$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow \pi \times \frac{180^o}{\pi} = 180^o$

$x(t) = Asin(\omega t) = 0.1cos(180^o) = -0.1\ m$

$v = \pm\ \omega\sqrt{(A^2 - x_2^2)} = \pm\ 1.6\pi\ \sqrt{((-0.1)^2 - (-0.1)^2)}$

$v = 0\ m/s \rightarrow KE_{t=0.625} = 0\ J$

د - ماذا تمثل نقطة التقاطع (C) والنقطة (b)؟

(C) تمثل النقطة التي تتساوى فيها الطاقة الحركية مع طاقة الوضع المرونية ومجموع كل منهما يساوي الطاقة الميكانيكية.

(b) تمثل سعة الذبذبة.

سؤال إضافي NERD **جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة على المحور الأفقي، حيث يتغير تسارعه مع الزمن وفق المعادلة :**

$$a(t) = -36\pi^2 cos(2\pi t)$$

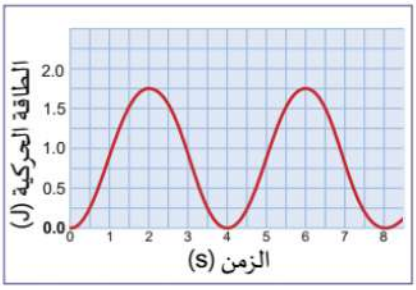
حيث الإزاحة تُعطى بـ (cm) والزمن بوحدة (s). احسب سرعة الجسيم عندما تصبح إزاحته (4 cm).

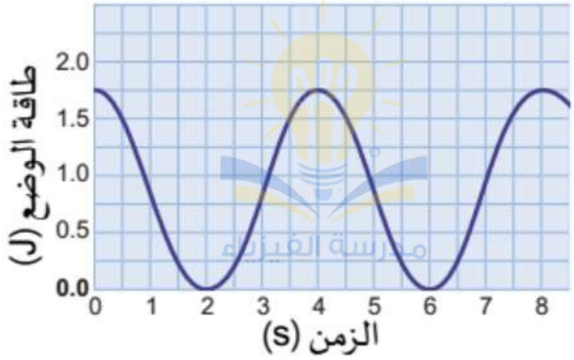
$\omega = 2\pi \rightarrow A\omega^2 = 36\pi^2 \rightarrow A(2\pi)^2 = 36\pi^2 \rightarrow A = 9\ cm$

$v = \pm\ \omega\sqrt{(A^2 - x_2^2)} = \pm\ 2\pi\ \sqrt{((0.09)^2 - (0.04)^2)}$

$v = \pm\ 0.5\ m/s$

سؤال إضافي NERD يمثل الرسم البياني التغير في الطاقة الحركية بالنسبة إلى الزمن لكتلة في حركة توافقية بسيطة. أنشئ رسمًا بيانيًا للتغير في طاقة الوضع بدلالة الزمن للكتلة نفسها.





سؤال إضافي NERD يخضع نظام مهتز لحركة توافقية بسيطة حيث تكون طاقته الكلية (E):

أ - كم تبلغ الطاقة الحركية وطاقة الوضع عندما تكون الإزاحة نصف السعة؟

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega\sqrt{(A^2 - x^2)})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$KE = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - (\frac{A}{2})^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - \frac{A^2}{4})$$

$$KE = \frac{1}{2}m\omega^2(\frac{4A^2}{4} - \frac{A^2}{4}) = \frac{1}{2}m\omega^2(\frac{3A^2}{4})$$

$$KE = \frac{1}{2}m\omega^2\,\frac{3}{4}A^2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{3}{4} \times KE_{max} = \frac{3}{4}E$$

$$E = KE + PE \rightarrow E = \frac{3}{4}E + PE \rightarrow PE = \frac{1}{4}E$$

أ - تكون الطاقة الحركية مساوية لطاقة الوضع عند موقع معين، فما هو ذلك الموقع؟

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega\sqrt{(A^2 - x^2)})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$KE = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

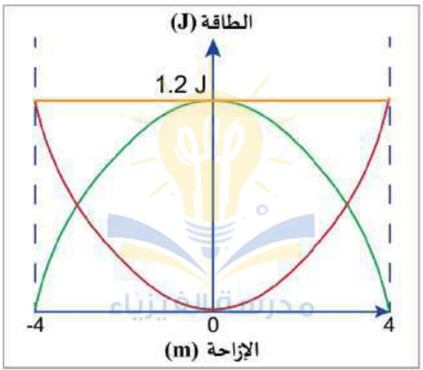
$$PE = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow KE = PE$$

$$\cancel{\frac{1}{2}k}(A^2 - x^2) = \cancel{\frac{1}{2}k}x^2 \rightarrow (A^2 - x^2) = x^2 \rightarrow A^2 = 2x^2$$

$$A^2 = 2x^2 \rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

كويزتايم TEST

يبين الرسم البياني المقابل تبادل الطاقة الحركية وطاقة الوضع لجسم كتلته (0.5 kg) يخضع لحركة توافقية بسيطة.



أ - احسب طاقة الوضع عندما تكون الإزاحة (1 cm).

ب - احسب الطاقة الحركية عندما تكون الإزاحة (1 cm).

كويزتايم TEST

كيس ملاكمة كتلته (0.65 kg) مُعلق بسقف. عندما يُلكم الكيس يتعرض لحركة توافقية بسيطة. فإذا كانت الطاقة الميكانيكية الكلية للاهتزازة (55 J) فكم تبلغ أقصى سرعة لكيس الملاكمة؟

أسئلة إضافية وإثرائية

? سؤال

كم عدد المرات التي تتساوى فيها طاقة الحركة وطاقة الوضع خلال اهتزاز كتلة متصلة بنابض على سطح أفقي.

? سؤال

جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة فإذا كانت القيمة العظمى للسرعة ($16\sqrt{2}\ m/s$) فاحسب مقدار سرعته عند تساوي طاقتي الوضع والحركة.

? سؤال

حركة توافقية بسيطة تكون فيها أكبر قيمة لقوة الإرجاع (10 N) والطاقة الكلية (0.5 J) فاحسب سعة الاهتزازة.

? سؤال

ماذا يحدث في الحالات الآتية للطاقة الكلية لنظام مهتز بحركة توافقية بسيطة:

أ - إذا زادت سعة الاهتزازة للضعف.

ب - إذا قلت سعت الاهتزازة للربع.

أسئلة إضافية وإثرائية

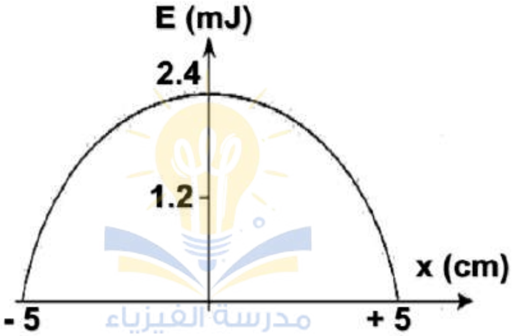
سؤال

يخضع جسيم لحركة توافقية بسيطة سعتها (8 cm) وترددها (14 Hz)، بافتراض أن إزاحة الجسم عند (t=0) كانت (8 cm) وكان الجسيم في حالة سكون فجد معادلة الإزاحة لحركة الجسيم.

سؤال

يبين الرسم البياني المجاور التغير في طاقة الحركة أثناء اهتزاز كتلة مقدارها (0.5 kg) مُعلقة في نهاية نابض.

إذا كانت حركة الكتلة حركة توافقية بسيطة، أجب عما يلي:



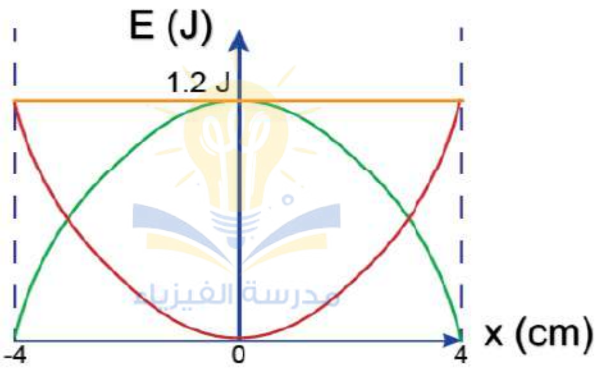
أ - ما الطاقة الكلية للنظام؟ ب - احسب ثابت النابض.

جـ - احسب مقدار أقصى سرعة للكتلة المُعلقة بالنابض.

د - احسب مقدار طاقة الوضع المرونية للنظام عندما تكون الإزاحة (2 cm).

سؤال

يبين الرسم البياني المقابل، تبادل الطاقة الحركية وطاقة الوضع المرونية لنظام كتلة - نابض، بحيث يخضع النظام لحركة توافقية بسيطة، إذا علمت أن الكتلة مقدارها (0.05 kg) فاحسب :



أ - مقدار طاقة الوضع المرونية للنظام عندما تكون الإزاحة (2 cm).

ب - مقدار طاقة الحركة للنظام عندما تكون الإزاحة (3 cm).

جـ - إزاحة الكتلة عن موضع الاتزان عند اللحظة التي تتساوى فيها طاقة الحركة للنظام مع طاقة الوضع المرونية.

حل أسئلة مراجعة الدرس الأول من الوحدة الثانية

سؤال 1 ما مدى صحة الجملة الآتية: كل حركة دورية هي حركة تذبذبية وكل حركة تذبذبية هي حركة توافقية بسيطة؟ أدعم إجابتك بأمثلة..

غير صحيحة فليس كل حركة دورية هي حركة تذبذبية فحركة الكوكب حول الشمس تعتبر دورية لكن ليست تذبذبية ولا توافقية بسيطة.

وليس كل حركة تذبذبية هي حركة توافقية فهنالك شروط للحركة التوافقية البسيطة يجب تحقيقها وهما أن يتناسب مقدار القوة المَعيدة طرديا مع إزاحة الجسم وأن يكون اتجاه القوة المُعيدة باتجاه موقع الاتزان دائما ومُعاكسًا لاتجاه الإزاحة.

سؤال 2 بدأ جسم بالتذبذب في حركة توافقية بسيطة من أقصى إزاحة (15 cm) بحيث يُكمل الدورة الواحدة في فترة زمنية مقدارها (3.4 s) أحسب:

أ - التردد.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3.4} = 0.29\ Hz$$

ب - التردد الزاوي.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{3.4} = 1.82\ rad/s$$

$$or \rightarrow \omega = 2\pi f = 2\times 3.14\times 0.29 = 1.82\ rad/s$$

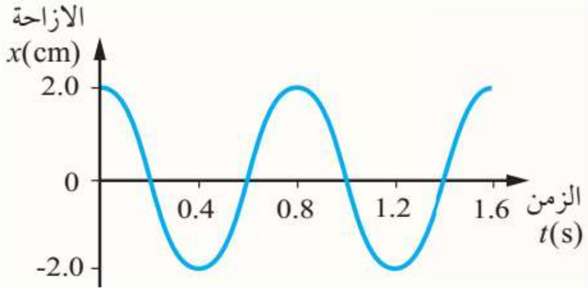
جـ - الإزاحة بعد (3 s) من بدء الحركة.

$$(\omega t) = (1.82\times 3) = (5.46)\ rad$$

$$\theta_{rad}\times\frac{180^o}{\pi} \rightarrow 5.46\times\frac{180^o}{3.14} = 312.99^o$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) = 0.15\cos(312.99^o) = 0.15\times 0.68 = 0.102\ m$$

سؤال 3 يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة، فإذا بدأ بالتذبذب من أقصى إزاحة عن موقع اتزانه ومُثلت العلاقة بين الإزاحة والزمن بيانياً كما في الشكل، فأجيب عما يأتي:



أ - ما مقدار كل من السعة والزمن الدوري.

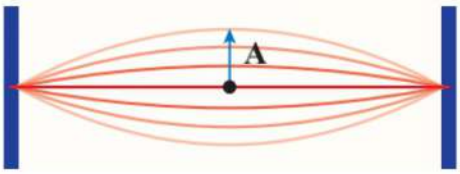
$$A = 2\ cm = 0.02\ m \quad , \quad T = 0.8\ s$$

ب - أكتب معادلة تغير الإزاحة مع الزمن لحركة الجسم.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{0.8} = 7.85\ rad/s$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) = 0.02\cos(7.85t)$$

سؤال 4 سُحب وتر آلة موسيقية من نقطة في منتصف إزاحة (A) كما في الشكل وتُرك يتذبذب ذهاباً وإياباً في حركة توافقية بسيطة بتردد (5 Hz) وسعة (10 mm) فإذا بدأ التذبذب من أقصى إزاحة عند الزمن ($t = 0$) من السكون فأجيب عما يأتي:



أ - ما مقدار القيمة العظمى لسرعة النقطة على الوتر.

$$A = 10 \times 10^{-3}\ m = 0.01\ m \quad , \quad f = 5\ Hz$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 5 = 10\pi\ rad/s = 31.4\ rad/s$$

$$v_{max} = A\omega = 0.01 \times 31.4 = 0.314\ m/s$$

ب - أحسب سرعة النقطة على الوتر عند الزمن ($t = 0.12\ s$).

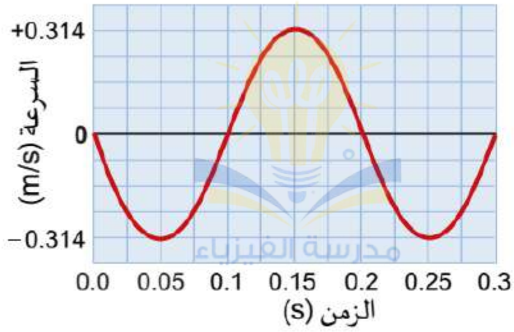
$$(\omega t + \phi) = (10\pi \times 0.12 + \frac{\pi}{2}) = (10 \times 3.14 \times 0.12 + \frac{3.14}{2})$$

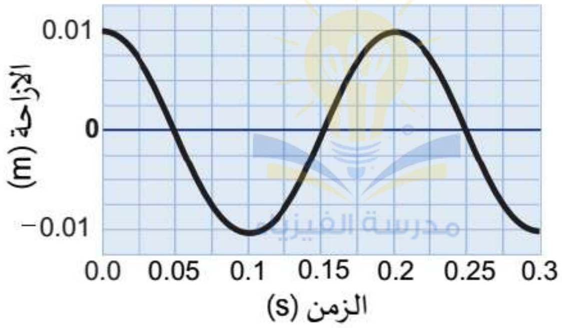
$$(\omega t + \phi) = (5.338)\ rad$$

$$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 5.338 \times \frac{180^o}{3.14} = 306^o$$

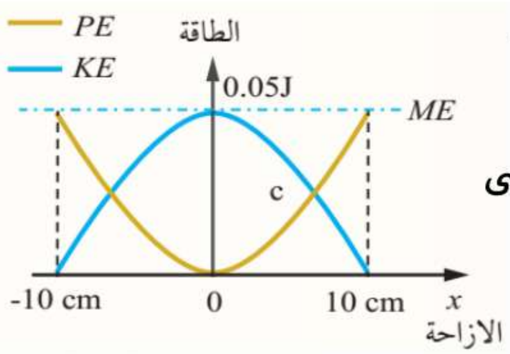
$$v_{t=0.12\ s} = v_{max}\cos\ (\omega t + \phi) = 0.314 \times \cos\ (\ 306^o) = 0.18\ m/s$$

جـ - أرسم العلاقة البيانية بين الإزاحة والزمن، وكذلك بين السرعة والزمن.





سؤال 5 **يوضح الشكل المجاور تغيرات كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع المرونية مع الإزاحة لجسم كتلته (400 g) يتصل بنابض ويتحرك حركة توافقية بسيطة على سطح أفقي أملس. مستعيناً بالشكل أجيب عما يأتي:**



أ - أحسب كلاً من ثابت النابض والزمن الدوري.

$$A = 10 \times 10^{-2}\ m \quad , \quad m = 400 \times 10^{-3}\ kg = 4 \times 10^{-1}\ kg$$

$$PE_{max} = KE_{max} = 0.05\ J = 5 \times 10^{-2}\ J$$

$$PE_{max} = \frac{1}{2} kA^2 \rightarrow 5 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times k \times (10 \times 10^{-2})^2$$

$$k = 10\ N/m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{4\times10^{-1}}{10}} \rightarrow T = 1.25\ s$$

ب - ما مقدار طاقة الوضع المرونية عند موقع الاتزان ؟

$$PE_{x=0} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (0)^2 = 0$$

جـ - أحسب سرعة الجسم لحظة مروره بموقع الاتزان؟

سرعة الجسم لحظة مروره بموقع الاتزان تساوي القيمة العظمى للسرعة.

$$v_{max} = \pm\ \omega A = \pm\ 5 \times 0.1 = \pm\ 0.5\ m/s$$

د - ماذا تمثل نقطة التقاطع (C)؟

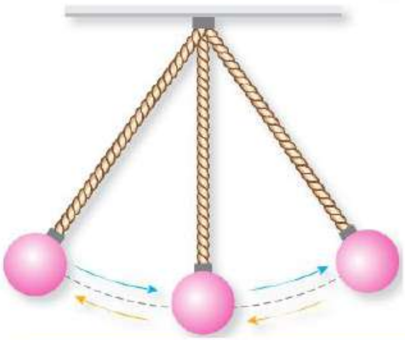
تمثل النقطة التي تتساوى فيها الطاقة الحركية مع طاقة الوضع المرونية ومجموع كل منهما يساوي الطاقة الميكانيكية.

الوحدة الرابعة : الحركة التوافقية البسيطة

الدرس الثاني: تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة

■ أمثلة وتطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة:

البندول البسيط ، نظام (كتلة–نابض) رأسي.



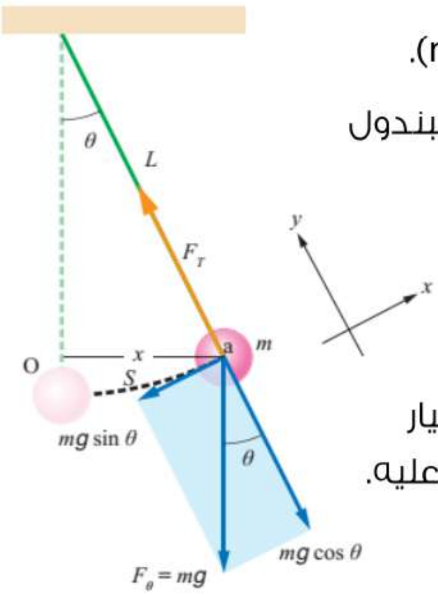
؟ سؤال ما البندول البسيط وممّ يتكون وما طريقة عمله؟

- جسم (كرة) ذي كتلة صغيرة معلقة بخيط رفيع مهمل الكتلة مثبت على حامل.
- إذا سُحب الجسم إلى جهة معينة عن موقع الاتزان وتُرك فإنه يتأرجح ذهابًا وإيابًا على المسار نفسه حول موقع الاتزان.

ملاحظات مهمة

✪ حركة البندول تعتبر حركة دورية ويمكن وصفها بإنها حركة توافقية بسيطة لأن القوة المُعيدة تتناسب طرديًا مع مقدار الإزاحة واتجاه القوة المُعيدة باتجاه معاكس لاتجاه الإزاحة.

مفهوم الحركة التوافقية البسيطة في البندول البسيط



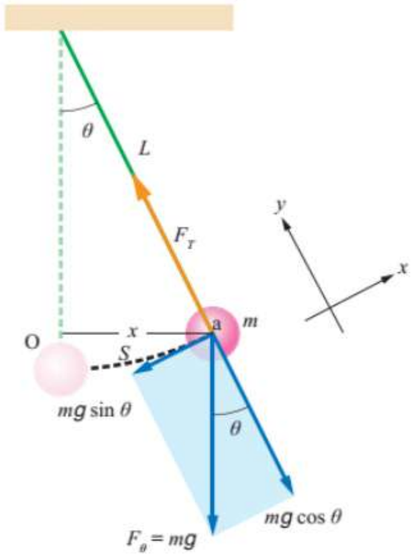
- لو افترضنا أن طول خيط البندول (L) وكتلة الكرة المعلقة به (m).
- إذا أزيحت الكرة نحو اليمين إلى النقطة (a) بحيث يمسح خيط البندول زاوية (θ) وتقطع الكرة مسافة قوسية (s) عن موقع الاتزان (O)
- الشكل يبين مخطط الجسم الحر لكرة معلقة ويمثل دائرة نصف قطرها (L).
- إذا تُركت الكرة تتذبذب على طول القوس الدائري وليس في خط مستقيم فيمكننا دراسة القوى المؤثرة على الكرة لو تم اختيار محور (x) باتجاه يوازي المماس للقوس ومحور (y) باتجاه عمودي عليه.

$$\sum F_y = F_T - mg\cos\theta = 0$$

$$\sum F_x = -mg\sin\theta \rightarrow \text{القوة المُعيدة}$$

- القوة المُعيدة المؤثرة في الكرة باتجاه موقع الاتزان في هذه الحالة هي مركبة القوة الأفقية.

- إذا كانت الزاوية (θ) صغيرة ($\theta \leq 10^{o}$) فيمكننا افتراض أن ($sin\theta$) يساوي الزاوية (θ) نفسها تقريبا بالتقدير الدائري !



$$\sum F_x = -mg\theta = -mgsin\theta = -mg\frac{x}{L}$$

$$\sum F_x = -(\frac{mg}{L})x = -(k)x$$

$$k = (\frac{mg}{L})$$

- بعد الترتيب والتجهيز تبين أن هذه المعادلة الأخيرة تتبع للشكل العام لمعادلة القوة المُعيدة في قانون هوك.

يمكن حساب مقدار القوة المُعيدة في حالة البندول البسيط من خلال العلاقة الآتية :

$$F = -mg\theta = -mgsin\theta = -mg\frac{x}{L} = -kx$$

طول خيط البندول : L ، كتلة الجسم المُعلق : m ، زاوية خيط البندول : θ ، تسارع الجاذبية : g

يمكن حساب مقدار ثابت النابض من خلال العلاقة الآتية:

$$k = \frac{mg}{L}$$

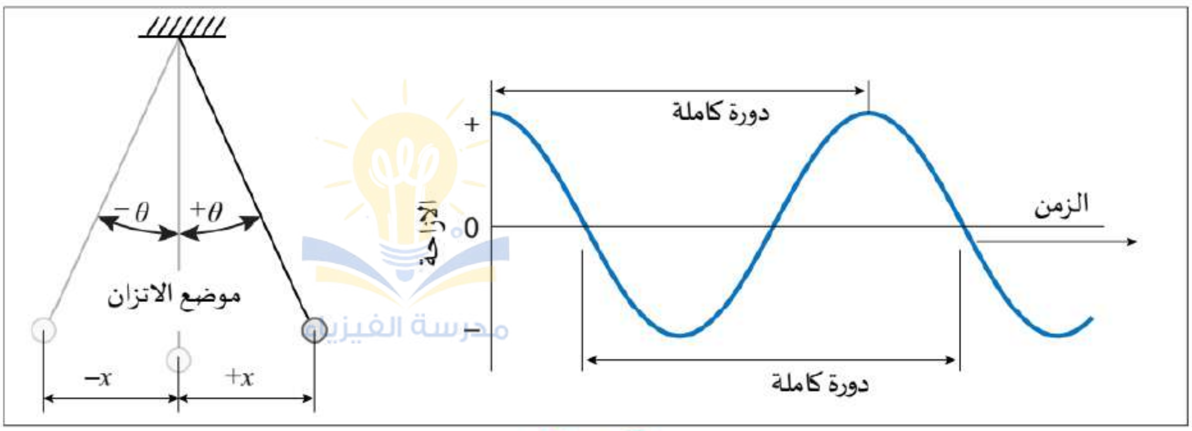
كتلة الجسم المُعلق : m ، طول خيط البندول : L ، تسارع الجاذبية : g

ملاحظات مهمة

- تنطبق معادلة القوة المُعيدة وثابت النابض أعلاه فقط في حالة الزوايا الصغيرة.

$$sin\theta \approx \theta$$

☑ دورة حركة البندول:



☑ التردد الزاوي للبندول يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

show that :

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(\frac{mg}{L})}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

☑ الزمن الدوري للبندول يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

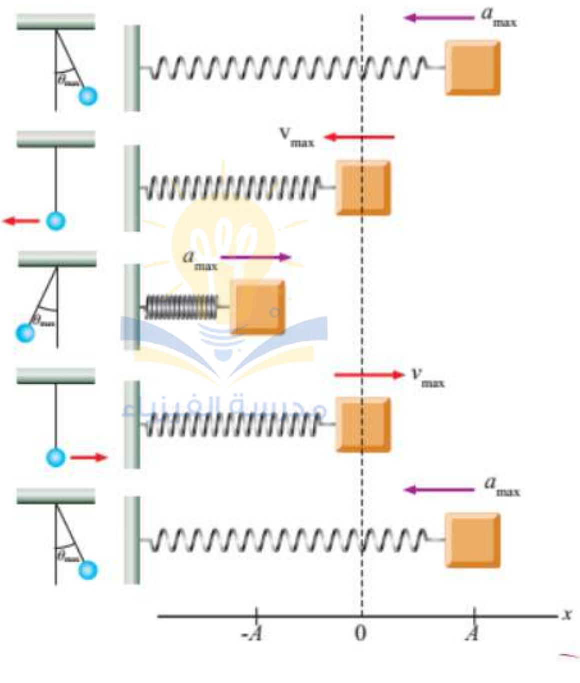
show that :

$$T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

✓ أتحقَّقُ: **ما العوامل التي يعتمد عليها الزمن الدوري للبندول البسيط؟**

طول الخيط ،تسارع السقوط الحر في المنطقة الموضوع فيها البندول.

☑ يبين الجدول نقاط التشابه بين حركة نظام (كتلة-نابض) أفقي وحركة البندول البسيط :



t	x	v	a	KE	PE
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}mv^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}mv^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

ملاحظات مهمة

- الزمن الدوري للبندول البسيط الذي يحقق شروط الحركة التوافقية يبقى ثابتا ولا يتغير ما دام كل من طول الخيط وتسارع السقوط الحر ثابتًا.
- الزمن الدوري للبندول البسيط لا يتغير بتغير الزاوية (θ) بشرط:

$$\theta \leq 10^{o}$$

؟ سؤال **استخدم جيولوجي بندول طوله (17.1 cm) لقياس مقدار تسارع السقوط الحر في منطقة على سطح الأرض، فإذا أكمل البندول (72) دورة في مدة زمنية (60 s). أحسب تسارع السقوط الحر في تلك المنطقة.**

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60}{72} = 0.833\ s$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T^{2} = 4\pi^{2}(\frac{L}{g}) \rightarrow g = 4\pi^{2}\ \frac{L}{T^{2}}$$

$$g = 4 \times (3.14)^{2} \times \frac{17.1\times 10^{-2}}{10} \rightarrow g = 9.73\ m/s^{2}$$

تمرين **ما مقدار الزمن الدوري للبندول نفسه على سطح القمر، حيث مقدار تسارع السقوط ($1.62\ m/s^2$).**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{17.1\times 10^{-2}}{1.62}} = 2.04\ s$$

؟ سؤال **يتذبذب بندول الساعة بحيث يُكمل دورة واحدة في الثانية. إذا علمت أن سعة حركته التوافقية البسيطة تساوي (4 cm) فأحسب:**

أ - سرعة البندول لحظة مروره بموقع الاتزان.

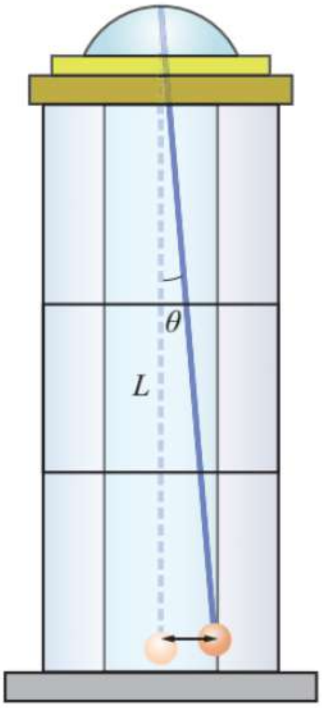
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{1} = 0.628\ rad/s$$

$$v_{max} = \omega A = 6.28 \times 0.04 = 0.25\ m/s$$

ب - تسارع البندول لحظة مروره بموقع الاتزان.

تسارع البندول لحظة مروره بموقع الاتزان يساوي صفرًا حيث القوة المُعيدة تساوي صفرًا.

? سـؤال أراد مصطفى قياس ارتفاع برج فلاحظ وجود حبل معلق في سقف البرج ويصل إلى الأرض تقريباً. ربط كرة كتلتها (10 kg) بالطرف السفلي للحبل وأزاحه مسافة مقدارها (3 m) عن موقع اتزانه وتركه يتذبذب كما في الشكل، وحسب زمن الذبذبة الواحدة للبندول (عن طريق قياس زمن عدة ذبذبات) فكان (10 s). أحسب:



أ - ارتفاع البرج.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2\left(\frac{L}{g}\right) \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{(10)^2 \times 10}{4\times(3.14)^2} \rightarrow L = 25.3\ m$$

ب - التردد والتردد الزاوي للبندول.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} = 0.1\ Hz$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{10} = 0.628\ rad/s$$

جـ - مقدار القوة المُعيدة عند أقصى إزاحة.

$$F = -mg\frac{x}{L} = -10\times10\times\frac{3}{25.3} = -11.86\ N$$

سؤال إضافي NERD قام أحمد وعبدالله بصنع بندول صغير ليكون بمثابة ساعة إيقاف بدائية. حيث قاما بتعليق كتلة فلزية ثقيلة بخيط على حامل في المختبر واكتشفا أن الزمن الدوري للبندول (T) يبلغ (0.5 s). فكم يبلغ طول خيط البندول؟

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \rightarrow L = \frac{(0.5)^2\times10}{4\times(3.14)^2} \rightarrow L = 0.06\ m$$

سؤال إضافي NERD مستعيناً بالشكل، إذا تحركت الكرة من السكون بدءاً من النقطة (A) نحو موضع الاتزان فإن القوة المؤثرة عليها تساوي :

أ - mg ب - $+mgsin\theta$

جـ - $-mgsin\theta$ د - $mgcos\theta$

سؤال إضافي NERD بندول بسيط طول خيطه (1 m) ومقدار الكتلة المُعلقة بالطرف الحر من خيطه (100 g) أزيح عن موضع اتزانه (10^o) ثم تُرك ليهتز حول موضع اتزانه فإذا علمت أن قيمة تسارع الجاذبية ($10\ m/s^2$) فاحسب كل مما يلي:

أ - الزمن الدوري.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{1}{10}} = 1.98\ s$$

ب - قوة الإرجاع عندما تكون الإزاحة (5^o).

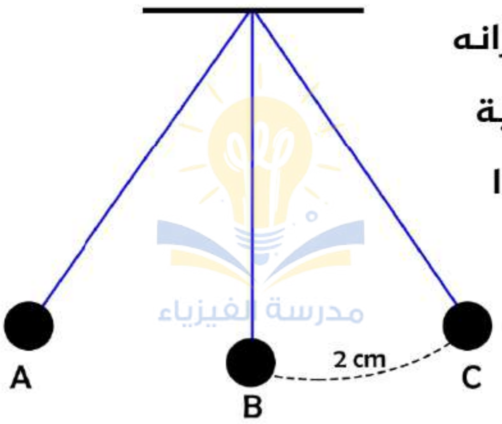
$$F = -mg\sin\theta = -0.1 \times 10 \times \sin 5^o = -0.087\ N$$

جـ - مقدار قوة الإرجاع العُظمى.

$$F = \pm\, mg\sin\theta = \pm\, 0.1 \times 10 \times \sin 10^o = \pm\, 0.17\ N$$

وضعنا ($\pm$) لأنه لم يحدد إذا كانت أقصى إزاحة موجبة أم أقصى إزاحة سالبة.

سؤال إضافي NERD بندول بسيط طوله (L) أزيح عن موضع اتزانه مسافة معينة كما في الشكل الآتي ليتحرك حركة توافقية بسيطة ويعمل (5) اهتزازات خلال زمن قدره (2 s). معتمداً على البيانات المثبتة في الشكل أجب عما يلي:



أ - عند أي موضع تكون سرعة الكرة المُعلقة أكبر ما يمكن؟

عند الموقع (B).

ب - كم يبلغ طول خيط البندول؟

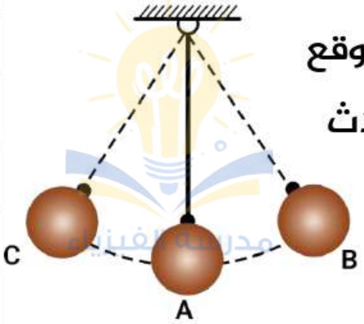
$$T = \frac{t}{n} = \frac{2}{5} = 0.4\ s$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \rightarrow L = \frac{(0.4)^2 \times 10}{4 \times (3.14)^2} \rightarrow L = 0.04\ m$$

جـ - جد المسافة التي يقطعها البندول في زمن يساوي ربع الزمن الدوري؟

من خلال الشكل يظهر لنا أن البندول يقطع مسافة (2 cm) كل ربع دورة.

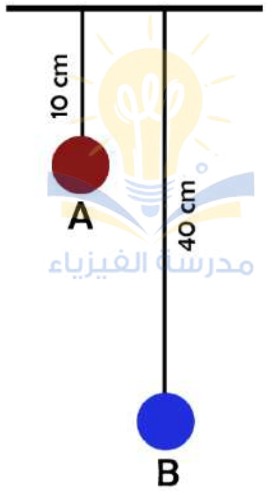
سؤال إضافي



الشكل الآتي يمثل حركة بندول بسيط ينتقل من موقع الاتزان إلى الموقع (B) خلال زمن (2 s). ما الزمن المستغرق لعمل ثلاث اهتزازات متتالية؟

$$\frac{1}{4}T = 2 \rightarrow T = 8\,s \rightarrow t = Tn = 8 \times 3 = 24\,s$$

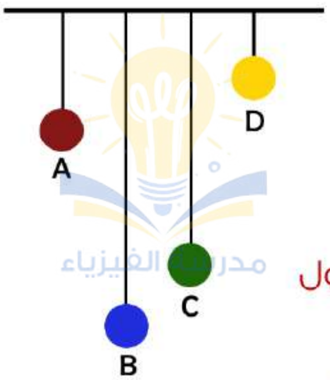
سؤال إضافي



مستعينًا بالشكل المجاور، يوضح عدد (2) بندول يتحرك كل منهما حركة توافقية بسيطة جد النسبة بين الزمن الدوري للبندول (A) والبندول (B).

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_A}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_B}{g}}} = \frac{\sqrt{\frac{0.1}{10}}}{\sqrt{\frac{0.4}{10}}} = \frac{\sqrt{0.01}}{\sqrt{0.04}} = \frac{1}{2}$$

سؤال إضافي

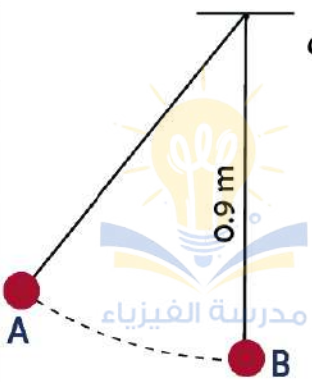


مستعينًا بالشكل المجاور، يوضح عدد (4) بندول متماثلة في الكتلة لكن مختلفة في طول خيط، حدد أي بندول يملك أكبر تردد زاوي وأيها يملك أقل تردد زاوي؟

من خلال المعادلة $\left(\omega^2 = \frac{g}{L}\right)$ يظهر لنا أن العلاقة بين التردد الزاوي وطول خيط البندول علاقة عكسية وبالتالي:

☑ البندول (D) يملك أكبر تردد زاوي. ☑ البندول (B) يملك أقل تردد زاوي.

سؤال إضافي



بندول بسيط يتحرك حركة توافقية بسيطة ويصل إلى أقصى إزاحة له عند الموقع (A) كما في الشكل الآتي. احسب مقدار الزمن اللازم لانتقال الكتلة المُعلقة من الموقع (B) إلى الموقع (A)؟

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.9}{10}} = 1.88\,s$$

$$\frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \times 1.88 = 0.47\,s$$

سؤال إضافي NERD **يتحرك بندول الساعة حركة توافقية بسيطة وفق المعادلة التالية :**

$$v(t) = 4cos(2t)$$

إذ تُقاس السعة بوحدة (cm) والزمن بوحدة (S). احسب كلاً من السعة والتردد الزاوي.

$v(t) = A\omega cos(\omega t) \rightarrow v(t) = 4cos(2t)$

$\omega = 2\ rad/s\ ,\ A\omega = 4 \rightarrow A \times 2 = 4 \rightarrow\ A = 2\ cm$

سؤال إضافي NERD **يتحرك بندول الساعة حركة توافقية بسيطة وفق المعادلة التالية :**

$$a(t) = 12cos(2.4t)$$

إذ تُقاس السعة بوحدة (m) والزمن بوحدة (S). احسب مقدار تسارع الجسم عند $(\frac{T}{4})$.

$a(t) = A\omega^2 cos(\omega t) \rightarrow a(t) = 12cos(2.4t)$

$\omega = 2.4\ rad/s\ ,\ A\omega^2 = 12 \rightarrow A(2.4)^2 = 12 \rightarrow\ A = 2.08\ m$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\times3.14}{2.4} = 2.61\ s \rightarrow \frac{T}{4} = \frac{2.61}{4} = 0.652\ s$

$(\omega t) = (2.4 \times 0.652) = (1.5)\ rad$

$\theta_{rad} \times \frac{180^o}{\pi} \rightarrow 1.5 \times \frac{180^o}{3.14} = 86^o$

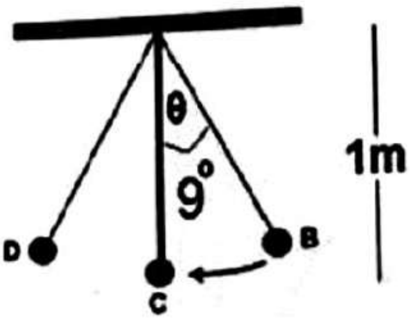
$a(t)\ =\ A\omega^2 cos(\omega t) \rightarrow a(t) = 12sin(86^o) = 12 \times 0.99$

$a(t) \approx 12\ m/s^2$

ملاحظات مهمة

- الزمن الدوري للبندول البسيط يتغير بتغير طول البندول ولا يعتمد على كتلة البندول.
- تسارع السقوط الحر يبقى ثابتًا بغض النظر عن طول الخيط أو كتلة الجسم ما دامت الزاوية $(\theta \leq 10)$.
- إذا كانت الزاوية $(\theta > 10)$ فإن قيمة تسارع السقوط الحر تختلف عن القيمة المحسوبة عند $(\theta \leq 10)$ لأن حركة البندول التذبذبية في هذه الحالة لا تُحقق شروط الحركة التوافقية البسيطة ولا تنطبق عليها العلاقات الخاصة بهذه الحركة.

كويز تايم TEST **الشكل التالي يوضح بندولاً بسيطًا كتلته (0.5 kg) أزيح للنقطة (B) بزاوية (θ) مقدارها (9^{o}) ثم تُرك ليهتز بحركة توافقية بسيطة، أحسب:**



أ - قوة الإرجاع عند النقطة (B) و (C).

ب - الزمن الدوري للبندول إذا كان طوله يساوي (1 m).

جـ - أكبر مقدار للتسارع.

تطبيقات البندول البسيط

▪ الساعة البندولية :

☑ ساعة أخترعها العالم الهولندي كريستان هايغنز تق وم هذه الساعة بتوظيف فكرة البندول البسيط.

☑ الزمن الدوري لبندول الساعة المثبت عند سطح البحر ($g = 9.81\ m/s^2$) يكون ثانية واحدة وبالتالي سيكون طوله:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1)^2 \times 9.81}{4\times(3.14)^2} \rightarrow L = 24.87\ cm$$

▪ الأرجوحة ▪ سرير الأطفال الهزاز

أفكِّرُ: علل: تسارع السقوط الحر لا يتغير بتغير طول خيط البندول.

يتغير بالارتفاع عن سطح الأرض فقط ولا يتغير بتغير طول خيط البندول لأن كل من طول خيط البندول والزمن الدوري متلازمان بالتغير بحيث يبقى التسارع ثابت حسب العلاقة الآتية:

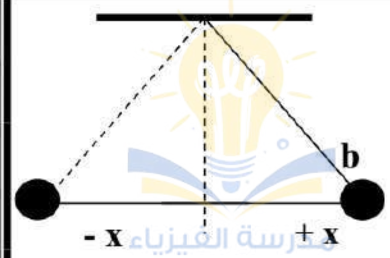
$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

أفكِّرُ: تعتمد الساعة البندولية على الزمن الدوري للبندول للحفاظ على دقة الزمن، أفترض أن طول ساق البندول قد أزداد فهل الزمن الذي تقيسه الساعة يبقى صحيحًا أم يقل أم يزداد ؟ فسر إجابتك ..

لو ازداد طول ساق البندول فإن الزمن الدوري سيزداد وبالتالي لن يبقى زمن القياس صحيحًا.

أسئلة إضافية وإثرائية

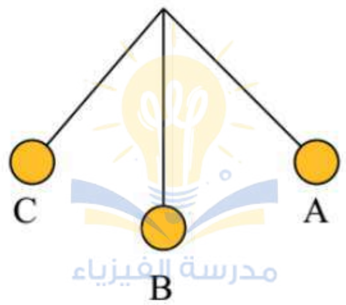
? سؤال



الشكل المقابل يمثل حركة كرة بندول بدأت من السكون من نقطة (b) فإذا عادت الكرة لنفس هذه النقطة مرة أخرى فأي الخيارات الآتية هو الصحيح :

	قوة الإرجاع	طاقة الحركة	طاقة الوضع	سرعة الكرة
☐	أكبر ما يمكن	صفر	صفر	أكبر ما يمكن
☐	أكبر ما يمكن	صفر	أكبر ما يمكن	صفر
☐	صفر	أكبر ما يمكن	صفر	أكبر ما يمكن
☐	أكبر ما يمكن	أكبر ما يمكن	صفر	صفر

? سؤال



أثناء حركة كتلة البندول من الموضع (B) إلى الموضع (C) فإن:

أ) سرعته تقل لأن اتجاه القوة في عكس اتجاه الحركة.

ب) طاقة حركته تزداد لأن اتجاه القوة في عكس اتجاه الحركة.

جـ) تسارعه يقل لأن اتجاه القوة في عكس اتجاه الحركة.

د) طاقته الكلية تزداد لأن اتجاه القوة في عكس اتجاه الحركة.

? سؤال

ماذا يحدث لتردد بندول بسيط إذا زادت كتلة الجسم المُعلق به إلى ثلاثة أمثال ما كانت عليه؟

? سؤال

الشكل المجاور يوضح كرة تتحرك حركة اهتزازية، إذا كانت سعة الاهتزازة للكرة (4 cm) فكم يبلغ مقدار القيمة التي يمثلها السهم الموضح أسفل الشكل.

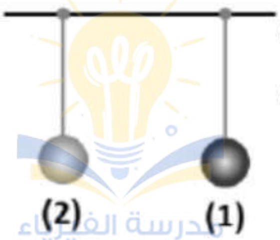
أسئلة إضافية وإثرائية

? سؤال

يهتز بندول في حركة توافقية بسيطة، إذا كانت كتلة الجسم المُعلق بالبندول البسيط (0.05 kg) وعند لحظة ما كانت زاوية ميل خط التعليق على الرأسي (5°)، اعتبر أن تسارع الجاذبية الأرضية ($10\ m/s^2$) فاحسب:

أ- مقدار قوة الشد في الخيط عند هذه اللحظة. ب- أكبر قيمة لقوة الشد في الخيط.

? سؤال



تم تعليق كرتين من مادتين مختلفتين، بحيث أن كتلة الكرة الأولى ضعف الكرة الثانية كما هو موضح بالشكل. إذا تم تحريك الكرتين بإزاحة (5 cm) بنفس الاتجاه وتركهما ليتحركا بحرية، ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين تسارع كل من البندولان؟

أ) لهما نفس قيمة التسارع.

ب) قيمة تسارع البندول الأول ضعف الثاني.

جـ) قيمة تسارع البندول الثاني ضعف الأول.

د) قيمة تسارع البندول الأول (16) ضعف الثاني.

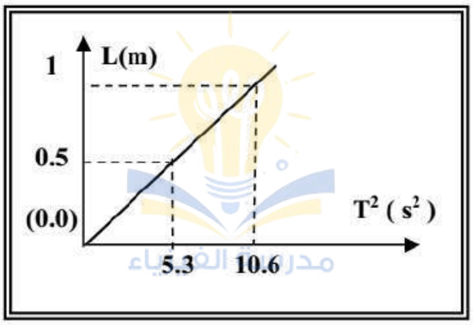
? سؤال

بندول كتلته (300 g) تم سحبه بزاوية (12°) عن موضع اتزانه. ما قيمة قوة الإرجاع المؤثرة على البندول؟

? سؤال

إذا كان الزمن الدوري لبندول بسيط. فاحسب مقدار الزمن الدوري الجديد إذا قل طول خيط البندول إلى ربع قيمته السابقة.

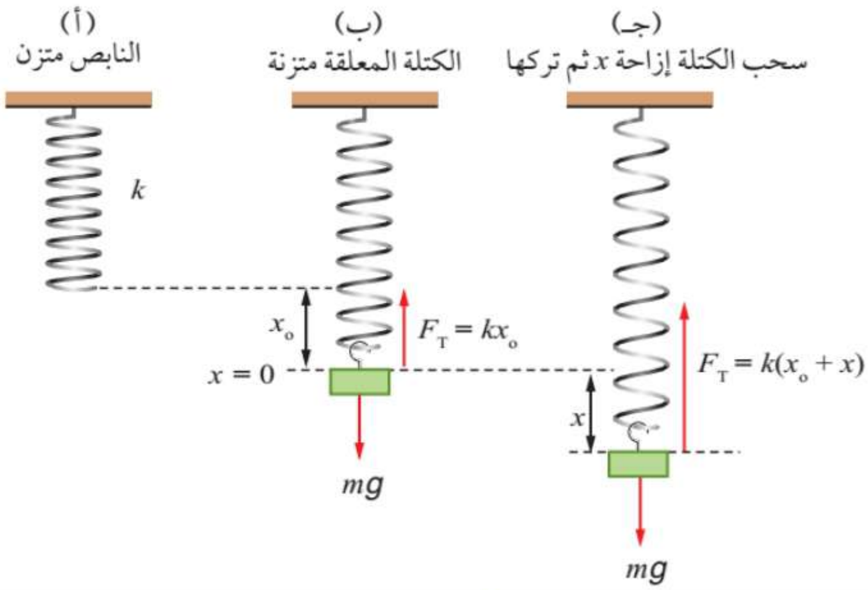
? سؤال



عند رسم العلاقة بين مربع الزمن الدوري (T^2) لبندول بسيط طول خيطه (L) في أحد المختبرات الفضائية تم الحصول على الخط البياني المقابل، فاحسب مقدار تسارع الجاذبية داخل المختبر.

نظام (كتلة-نابض) رأسي

- درسنا سابقًا حركة كتلة تتصل بنابض على سطح أفقي أملس ولكن هذه المرة سنقوم بدراسة حركة كتلة معلقه بنابض رأسيا ويتم سحبها للأسفل وتركها تتذبذب.



الحالة (أ) : النابض متزن

- إذا قُمنا بتعليق نابض بشكل رأسي دون تعليق أي جسم (كتلة) به فلن تحدث له استطالة عند إهمال كتلته.

الحالة (ب) : الكتلة مُعلقه بالنابض ومتزنة

- إذا عُلق جسم كتلته (m) بالنابض فإن وزن الجسم سيؤثر في النابض فيستطيل إزاحة (x_o) ويعتمد مقدار هذه الاستطالة على ثابت النابض.
- عندما يتزن الجسم تصبح قوة الشد في النابض رأسيا إلى الأعلى تساوي وزن الجسم المعلق وتعاكسه في الاتجاه.

$$[\sum F = 0] , [F_T = -kx_o] , [F_g = mg] , [F_T = F_g] , [kx_o = mg]$$

الحالة (جـ) : سحب الكتلة إزاحة (x) نحو الأسفل ثم تركها

- في هذه الحالة قُمنا بسحب الجسم إزاحة إضافية (x) نحو الأسفل وبالتالي فإن الإزاحة المقطوعة أصبحت $(x_o + x)$.
- مقدار قوة الشد في النابض يتغير ويُصبح $(F_T = k(x_o + x))$.
- هنا تُصبح القوة المُعيدة (F) التي تسحب الجسم رأسيا إلى الأعلى باتجاه موقع الاتزان عبارة عن محصلة قوة الشد لأعلى ووزن الجسم لأسفل.

هنا سنقوم بتوضيح العلاقة بين القوة المحصلة (القوة المُعيدة) وقوة الشد والوزن.

$$F = F_T - F_g = k(x_o + x) - mg = kx_o + kx - mg$$

$$F = kx_o + kx - mg = mg + kx - mg = kx$$

$$F = -kx = ma$$

☑ التسارع في نظام (كتلة-نابض) رأسي يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$a = -\frac{k}{m}x$$

☑ أقصى تسارع في نظام (كتلة-نابض) رأسي يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$a_{max} = \frac{k}{m}A$$

☑ الزمن الدوري في نظام (كتلة-نابض) رأسي يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

show that :

$$a = -\omega^2 x \rightarrow -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

? سـؤال جسم كتلته (150 g) معلق بطرف نابض ويتذبذب في حركة توافقية بسيطة بشكل رأسي، فإذا كان ثابت النابض (25 N/m) فأحسب:

أ - الزمن الدوري.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.15}{25}} = 0.487\ s$$

ب - التردد الزاوي.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{0.487} = 12.9\ rad/s \quad or \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

أتحقَّقُ: ما العوامل التي يعتمد عليها الزمن الدوري لجسم معلق بنابض رأسي يتذبذب لأعلى وأسفل في حركة توافقية بسيطة؟

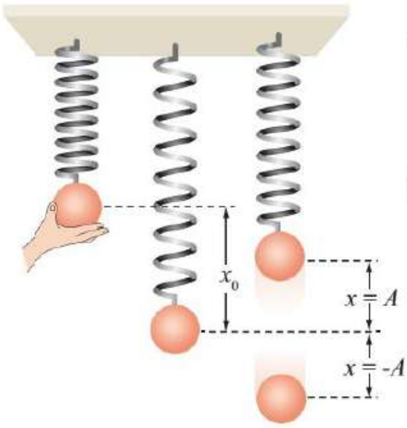
كتلة الجسم المعلق وثابت النابض.

أفكِّرُ: ما تأثير تغير تسارع السقوط الحر على كل من التردد الزاوي وموقع الاتزان في نظام (كتلة - نابض) الرأسي؟

الزمن الدوري في هذه الحالة لا يعتمد على تسارع السقوط الحر والتردد الزاوي يبقى ثابتًا لا يتغير.

عند تغير تسارع السقوط الحر يتغير وزن الجسم (mg) وتتغير الإزاحة حسب العلاقة ($F=-kx_o=-mg$) وبالتالي سيتغير موقع الاتزان.

? سـؤال علقت فدوى كرة بنابض رأسي وبعد استقرارها عند موقع الاتزان سحبتها إلى أسفل مسافة معينة كما في الشكل، ثم تركتها تتذبذب حول ذلك الموقع في حركة توافقية بسيطة بحيث تُكمل خمس دورات في ثانيتين. إذا كان ثابت النابض (350 N/m) فأحسب:



أ - التردد.

$$T = \frac{t}{n} = \frac{2}{5} = 0.4\ s \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.4} = 2.5\ Hz$$

ب - كتلة الكرة.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow 0.4 = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{m}{25}} \rightarrow m = 1.4\ kg$$

جـ - كلاً من تسارع الكرة والقوة المعيدة وقوة شد النابض عند موقع الاتزان.

$$x = 0 \rightarrow a = 0\ , F = 0$$

$$F = F_T - mg \rightarrow F_T = F + mg = 0 + 1.4 \times 10 = 14\ N$$

? سـؤال وضع طفل كتلته (5.4 kg) في كرسي نطاطة أطفال معلقة بنابض كما في الشكل، فاستطال بمقدار (24 cm) ليصل حالة الاتزان، سُحب الطفل إلى أسفل مسافة ما ثم تُرك الطفل يتذبذب بشكل رأسي في حركة توافقية بسيطة. بإهمال كتلة النطاطة أحسب:

أ - ثابت النابض.

$$F_T = mg \rightarrow F_T = 5.4 \times 10 = 54\ N$$

$$F_T = -kx_o \rightarrow 54 = -k \times (-0.24) \rightarrow k = 225\ N/m$$

ب - تردد الذبذبات.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{5.4}{225}} = 0.97\ s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.97} = 1.03\ Hz$$

تمرين عُلق جسم كتلته (7 kg) بنابض، ثم سُحب إلى أسفل وتُرك يتذبذب رأسيًا إلى أعلى وأسفل في حركة توافقية بسيطة. إذا كان الزمن الدوري لحركته (1.26 s) فأحسب:

أ - التردد الزاوي.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{1.26} = 4.98\ rad/s$$

ب - ثابت النابض.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow 1.26 = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{7}{k}} \rightarrow k = 174\ N/m$$

جـ - تسارع الجسم عندما يصبح على (0.15 m) من موقع الاتزان.

$$a = -\frac{k}{m}x = -\frac{174}{7} \times 0.15 = -3.73\ m/s^2$$

سؤال إضافي إذا علُقت كتلة في نهاية نابض فاستطال (0.85 m) كما في الشكل أدناه، فاحسب مقدار كل مما يلي:

أ - ثابت النابض.

$$F = mg \rightarrow F = 30.4 \times 10^{-3} \times 10 = 0.304\ N$$

$$F = -kx_o \rightarrow 0.304 = -k \times (-0.85) \rightarrow k = 0.35\ N/m$$

ب - التردد الزاوي.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{30.4\times10^{-3}}{0.35}} = 1.85\ s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{1.85} = 3.39\ rad/s$$

سؤال إضافي قفز لاعب من منطاد على ارتفاع عال بواسطة حبل نجاة قابل للاستطالة طوله (540 m) وعند اكتمال القفزة كان اللاعب معلقًا بالحبل الذي أصبح طوله(1710 m). ما مقدار ثابت النابض لحبل النجاة إذا كانت كتلة اللاعب (68 kg)؟

$$F = mg \rightarrow F = 68 \times 10 = 680\ N$$

$$F = -kx_o \rightarrow 680 = -k \times (-(1710 - 540)) \rightarrow k = 0.57\ N/m$$

سؤال إضافي يتذبذب جسم معُلق بنابض بشكل رأسي في حركة توافقية بسيطة بتردد (1.8 Hz) وسعة (3.6 cm)، أحسب سرعة الجسم عندما تصبح إزاحته (25%) من أقصى إزاحة خلال حركته للأسفل.

$$\omega = 2\pi f \rightarrow \omega = 2 \times 3.14 \times 1.8 = 11.3\ rad/s\ ,\ x = 3.6 \div 4 = 0.9\ cm$$

$$v = \pm\,\omega \sqrt{(A^2 - x^2)} = \pm\,11.3 \sqrt{(0.036)^2 - (0.009)^2} = 0.39\ m/s$$

سؤال إضافي يتذبذب جسم معُلق بنابض إلى أعلى وأسفل بحركة توافقية بسيطة بتردد (7500 Hz)، إذا علمت أن المسافة الكلية التي يتحركها الجسم من الأعلى إلى الأسفل في الدورة (30 cm) فأحسب السرعة العظمى للجسم المعُلق.

$$\omega = 2\pi f \rightarrow \omega = 2 \times 3.14 \times 7500 = 47100\ rad/s$$

$$v_{max} = \omega A \rightarrow v_{max} = 47100 \times 0.15 = 7065\ m/s$$

سؤال إضافي عُلق جسم بنابض، ثم سُحب إلى أسفل وتُرك يتذبذب رأسيًا في حركة توافقية بسيطة، إذا كانت سرعة النابض عند موقع الاتزان (3 m/s) والطاقة الحركية العظمى للكتلة (1620 mJ) فأحسب:

أ - كتلة الجسم المُعلق بالنابض.

$$KE_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \rightarrow 1620 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times m \times (9)^2$$

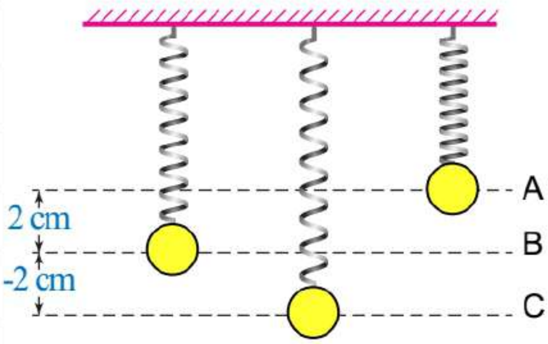
$$m = 0.04\ kg$$

ب - الزمن الدوري للنابض إذا كان مقدار استطالة النابض (0.75 m)

$$v_{max} = \omega A \rightarrow 3 = \omega \times 0.75 \rightarrow \omega = 4\ rad/s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow 4 = \sqrt{\frac{k}{0.04}} \rightarrow k = 0.64 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = 1.57\ s$$

سؤال إضافي عُلق جسم بنابض وبعد أن استقر عند الموقع (B) كما في الشكل، سُحب إلى أسفل عند الموقع (C)، ثم تُرك يتذبذب رأسيًا إلى الأعلى والأسفل بين الموقعين (A و C). إذا استغرق الجسم زمنًا قدره (1 s) عند حركته من النقطة (A) وعودته لنفس النقطة:



أ - الزمن الدوري.

$$T = 1\ s$$

ب - التردد الزاوي.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{1} = 6.28\ rad/s$$

جـ - تسارع الجسم عند الموقع (B).

$$a_{max} = \omega^2 A = (6.28)^2 \times 0 = 0\ m/s^2$$

د - تسارع الجسم عند الموقع (C). تسارع الجسم عند (C) يساوي القيمة العظمى للتسارع.

$$a_{max} = \omega^2 A = (6.28)^2 \times 0.02 = 0.78\ m/s^2\ ,\ -y$$

تطبيقات حياتية على الحركة التوافقية البسيطة

■ الآلات الموسيقية :

☑ عند العزف على الجيتار أو العود ينتج عن اهتزاز أوتار تلك الآلات أصوات تسمعها الأذن البشرية موسيقى.

☑ عند إزاحة الموسيقار لوتر الغيتار عن موقع اتزانه مسافة معينة ثم تركه فإنه يتذبذب حول موقع الاتزان ذهابًا وإيابا في حركة توافقية بسيطة.

☑ ينتج عن طاقة تذبذب الوتر صوت موسيقي يتلاشى تدريجيًا نتيجة التناقص في طاقة الذبذبات.

■ القفز بالحبال المطاطية (بنجي) :

☑ البنجي عبارة عن نشاط رياضي ينطوي على القفز من مناطق شاهقة الارتفاع بينما يكون القافز مربوطًا بحبل مطاطي يُحقق مواصفات الأمان.

☑ يتم القفز من مناطق ثابتة كالجسور والمباني أو متحركة كالقفز من منطاد أو من طائرة عمودية.

☑ عندما يقفز الشخص ويصل إلى أقصى إزاحة يبدأ بالتذبذب إلى أعلى وأسفل وتكون الحركة توافقية بسيطة إذا تحققت شروطها.

■ البندول الإيقاعي (الرقاص) :

☑ هو جهاز يعمل عل إصدار صوت منتظم ومكرر على شكل تكّة أو نقرة بعد إكمال ذبذبة كاملة ويمكن تغيير الزمن الدوري للبندول عن طريق تغيير طول البندول.

☑ البندول الإيقاعي يُصدر نبضات صوتية يمكن ملاحظتها بصريًا كبندول الساعة.

☑ قد يكون البندول الإيقاعي ميكانيكيًا كما في الشكل أو كهربائيا أو إلكترونيا يمكن تحميله كتطبيق على الهاتف الخلوي.

☑ يُستخدم البندول الإيقاعي من قبل الموسيقيين للتأكد من أن العزف يجري بوتيرة تامة وأداء دقيق ويُستخدم كذلك في الساعات للحفاظ على دقة مماثلة لتلك المستخدمة في ساعات اليد.

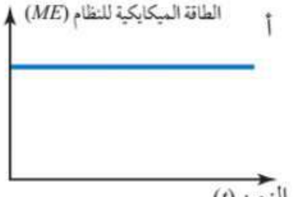
✔ أتحقَّقُ: ما مصدر القوة المُعيدة في كل من التطبيقات الثلاثة السابقة.

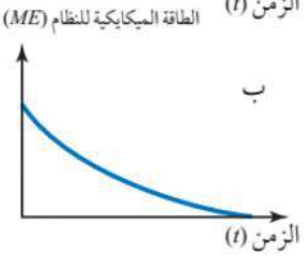
✓ الغيثار : قوة الشد في الوتر. ✓ بنجي : قوة المرونة في الحبل المطاطي.

✓ الرقاص : مركبة وزن الكتلة الثبتة على ساق البندول.

الحركة التوافقية المُخمدة

■ الطاقة الميكانيكية للنظام:





☑ عند دراسة الحركة التوافقية البسيطة قُمنا بافتراض عدم وجود قوى احتكاك لذلك فالنظام لا يفقد طاقة وسعة التذبذب تبقى ثابتة ويستمر في الحركة إلى اللانهاية.

☑ هذا الافتراض كان لتسهيل دراسة الحركة التوافقية وفهمها.

☑ في الواقع تقل سعة التذبذب مع الزمن بالتدريج حتى تتوقف الحركة التذبذبية بسبب وجود قوى مؤثرة في النظام مثل قوى الاحتكاك.

☑ تبدد قوى الاحتكاك طاقة النظام حتى تؤول إلى الصفر حيث تتحول الطاقة الميكانيكية إلى طاقة داخلية في الجسم والوسط الذي يتذبذب فيه لذلك تقل سعة الذبذبات.

☑ يُظهر الرسم البياني جانبًا العلاقة بين الطاقة الميكانيكية والزمن عند غياب قوى الاحتكاك وعند وجود قوى الاحتكاك.

? سؤال **وضح ما المقصود بالحركة التوافقية المُخمدة؟**

الحركة التذبذبية التي تقل سعتها مع الزمن بسبب قوى المقاومة مثل قوة الاحتكاك.

? سؤال **هل تعتبر الحركة التذبذبية في حالة التخامد حركة توافقية بسيطة؟**

لا تعتبر الحركة التذبذبية في حالة التخامد حركة توافقية بسيطة لأنها لا تحقق شروطها.

? سؤال **ما حالات التذبذب المتخامد ؟ أو ما حالات الحركة التوافقية المُخمدة؟**

- التخامد البسيط.
- التخامد القوي.
- التخامد الحرج.

---

❶ التخامد البسيط (تحت الحد) (Underdamped) :

⮌ يكون التخامد في النظام متوسطًا بحيث يتذبذب عدة مرات يتناقص فيها مقدار كل من السعة والطاقة بالتدريج قبل أن تصل إلى الصفر ويصل إلى موقع الاتزان.

⮌ من الأمثلة على أنظمة التخامد البسيط نظام حركة جسم يتصل بنابض على سطح أفقي بوجود قوة احتكاك بسيطة.

❷ التخامد القوي (فوق الحد) (Overdamped) :

- يكون التخامد في النظام كبير جدًا بحيث يصل النظام إلى موقع الاتزان دون أن يتذبذب.
- من الأمثلة على أنظمة التخامد القوي نظام غالق الباب الهيدروليكي (رداد الباب).

? سـؤال وضح ما نظام عمل رداد الباب؟

يوجد في داخل الرداد نابض ينضغط عند فتح الباب وعند فتح الباب يرتخي النابض ويؤثر بقوة في الزيت لدفعه عبر ثقب صغير لتعمل هذه القوة على تخميد النظام وإغلاق الباب ببطء.

❸ التخامد الحرج (Critically damped) :

- يكون التخامد في النظام كبير جدًا بحيث يصل النظام إلى موقع الاتزان في زمن أقصر من الزمن في حالة التخامد القوي دون أن يتذبذب.
- من الأمثلة على أنظمة التخامد القوي نظام ممتص الصدمات في المركبات (shock absorber).

? سـؤال وضح ما المقصود بالنظام الخاضع للاهتزاز القسري؟

النظام الذي تؤثر فيه قوى خارجية إضافية لشد النابض بتزويده بالطاقة للحفاظ على حركته .

ملاحظات مهمة

✪ بالنسبة إلى النظام الخاضع للاهتزاز القسري فإن القوة الخارجية الإضافية تبذل شغلًا يزود النظام بالطاقة باستمرار للتغلب على الطاقة الضائعة بسبب قوة الاحتكاك وغيرها من المقاومات.

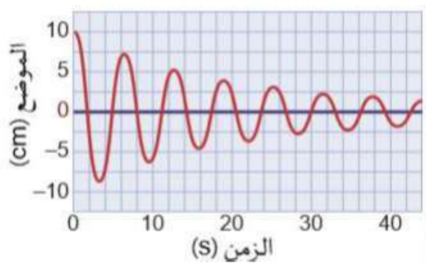
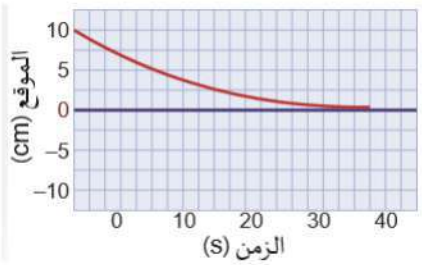
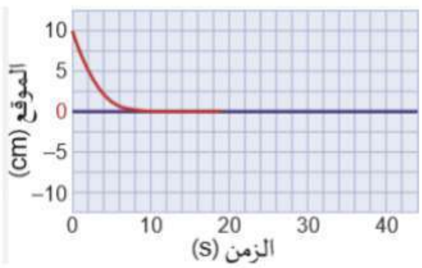
✓ أتحقَّقُ: **ما سبب تخامد أنظمة التذبذب الحرة؟ وما تأثير ذلك على كل من طاقة النظام وسعة التذبذب؟**

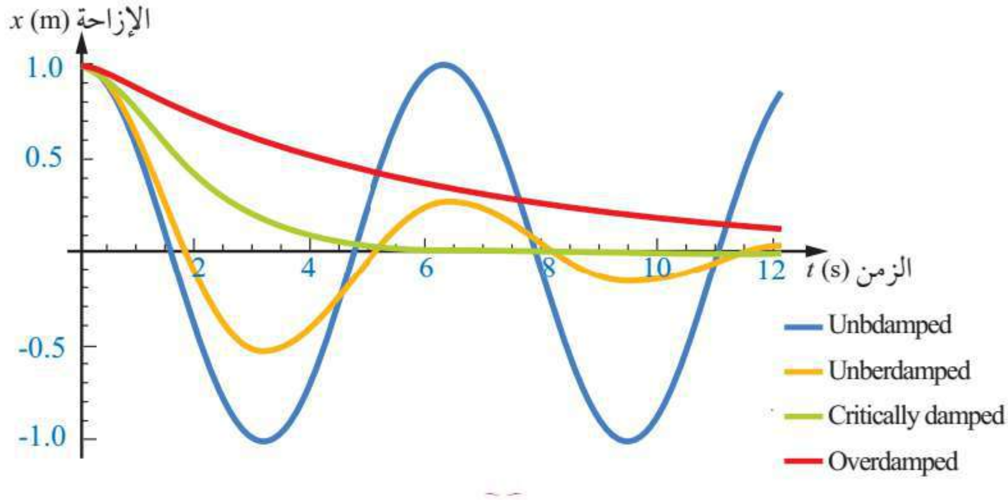
السبب هو وجود قوى تؤثر في النظام مثل قوة الاحتكاك وبالتالي يسبب ذلك نقصان طاقة النظام حتى تؤول إلى الصفر وتقل سعة التذبذب بالتدريج حتى تتوقف الحركة التذبذبية.

سؤال إضافي NERD هل يمكن أن يكون هنالك اهتزاز أو تذبذب غير متخامد كليًا ؟

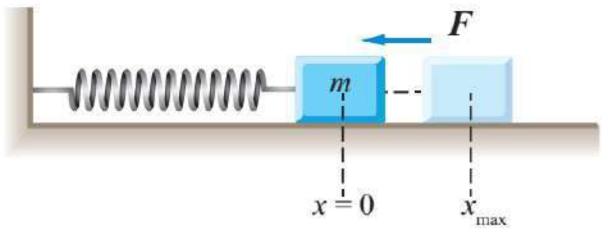
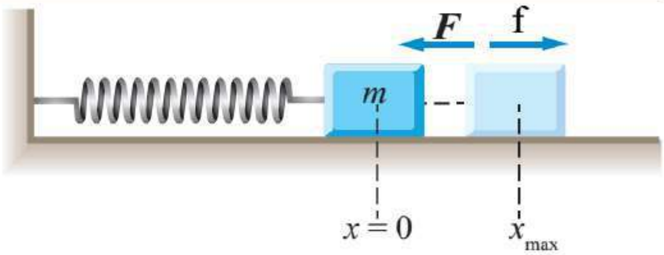
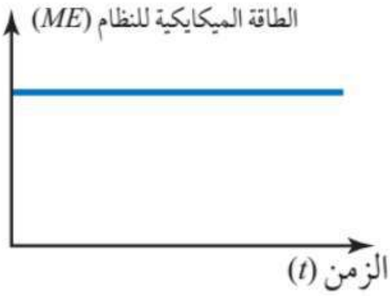
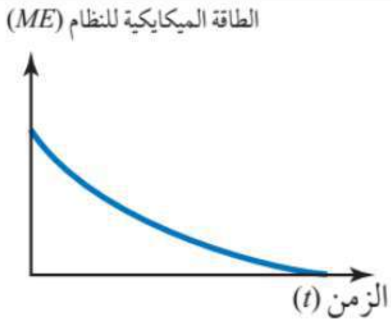
لا غير ممكن ذلك بسبب وجود قوى الاحتكاك ومقاومة الهواء مما يسبب نقصان السعة تدريجيًا.

✪ مقارنة بين حالات الحركة التوافقية التخامدية:

التخامد البسيط	التخامد القوي	التخامد الحرج
Underdamped	Overdamped	Criritically damped
		
نظام تقل فيه السعة بمرور الزمن مع بقاء التردد كما هو	نظام لا يسمح له بالاهتزاز ويعود إلى الاتزان في فترة زمنية طويلة جدا	نظام يحتاج فيه الجسم للعودة إلى الاتزان إلى أقصر وقت ممكن
تتناقص السعة خلال اهتزاز النظام عدد من الاهتزازات الكاملة	لا يهتز النظام وقد يتخطى النظام أحيانا موضع الاتزان	لا يسمح للنظام بالاهتزاز لأنه في بعض الحالات يكون ضار جدا
أمثلة ✓ اهتزاز أوتار الغيثار ✓ اهتزاز غشاء الطبلة ✓ اهتزاز بندول في الهواء ✓ الأرجوحة	**أمثلة** ✓ مخمدات حركة الأبواب ✓ حركة بندول بسيط في سائل كثيف ✓ مساند إيقاف الأدراج ✓ حركة مؤشر وقود السيارة	**أمثلة** ✓ ممتص الصدمات في السيارة ✓ وسائد التخامد التي توضع أسفل الآلات في المصانع
		



✪ مقارنة لنظامين يتحركان حركة توافقية بسيطة بوجود وغياب قوى الاحتكاك:

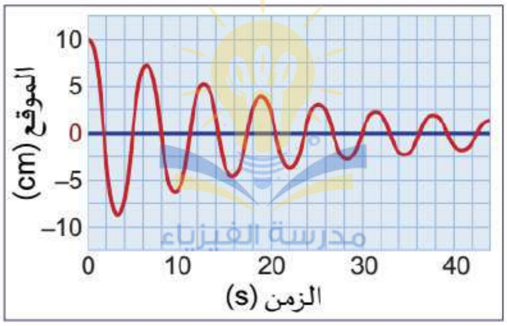
في غياب قوى الاحتكاك	بوجود قوى الاحتكاك
	
	

نوع الحركة	اهتزازية مثالية	نوع الحركة	اهتزازية تخامدية
الطاقة الكلية للنظام	ثابتة	الطاقة الكلية للنظام	غير ثابتة
القوى المؤثرة	قوى الإرجاع	القوى المؤثرة	قوى الإرجاع والاحتكاك
خصائص الحركة الاهتزازية	ثابتة	خصائص الحركة الاهتزازية	ثابتة ما عدا سعة الحركة (الطاقة)

سؤال إضافي NERD **عندما تصطدم سيارة بحفرة في الطريق، تمتص الإطارات طاقة التصادم وتنضغط. استخدم مبدأ التخامد لمعرفة تحولات الطاقة.**

يعمل ممتص الصدمات على تحويل طاقة الحركة الناتجة من الارتجاج إلى طاقة حرارية تتسرب في الهواء دون أن نشعر بها..

سؤال إضافي NERD **يمثل الرسم البياني إزاحة كتله مهتزة. ما هما الكميتان اللتان تبقيان ثابتتين؟**



التردد والزمن الدوري.

سؤال إضافي NERD **يتحرك بندول بسيط وكتلة مُعلقة بنابض بحركة توافقية بسيطة.**

أ - أي من هذه النظامين يعتمد فيه الزمن الدوري للحركة التوافقية على الكتلة؟

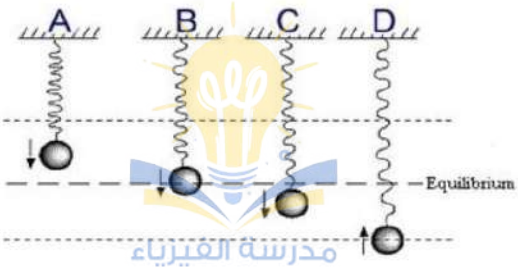
يعتمد الزمن الدوري للحركة التوافقية على الكتلة في نظام كتلة معلقة بنابض مهتز..

ب - أي من هذه النظامين يعتمد فيه الزمن الدوري للحركة التوافقية على السعة؟

لا يعتمد الزمن الدوري في أي من النظامين على سعة الحركة.

كويز تايم TEST **جسم معلق بزنبرك يهتز بحركة توافقية بسيطة حول موضع الاتزان المُشار له بالخط المتقطع.**

في أي حالة تكون أقل طاقة وضع للجسم؟



أسئلة إضافية وإثرائية

? سؤال

كُتلة مُعلقة بطرف نابض رأسي وتخضع لحركة توافقية بسيطة سعتها (2 cm). فإذا استغرقت ثلاث اهتزازات كاملة فترة (4 s) فاحسب تسارع الكتلة:

أ - عند موضع الاتزان. ب - عندما تكون الإزاحة عظمى.

? سؤال

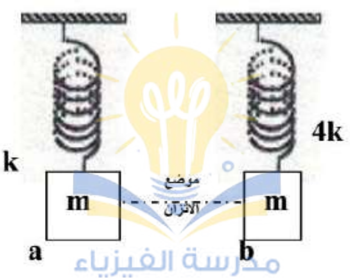
جسم كتلته (2 kg) مُعلق بنابض مهتز ثابته (100 N/m) يخضه لحركة توافقية بسيطة. عند اللحظة ($t = 1\ s$) تكون إزاحة الكتلة (0.129 m) وسرعتها (3.415 m/s):

أ - احسب سعة الاهتزاز باستخدام قانون حفظ الطاقة.

ب - احسب إزاحة الجسم وسرعته عند ($t = 0\ s$) علمًا بأن الجسم لم يبدأ من موضع الاتزان.

? سؤال

الشكل المقابل يوضح نابضان علُق بكل منهما كتلة (m)، إذا أزيحا عن موضعي اتزانهما مسافة (x) وتُركا للحركة فما العلاقة بين الزمن الدوري للبندول (a) والزمن الدوري للبندول (b).



أسئلة إضافية وإثرائية

? سؤال

جسم كتلته غير معلومة متصل بنابض ثابته (6.5 N/m) يتحرك حركة توافقية بسيطة بسعة حركة مقدارها (10 cm). عندما يكون الجسم عند منتصف المسافة بين نقطة الاتزان وأقصى إزاحة، فإن سرعته تكون (30 cm/s). احسب الزمن الدوري لحركة الجسم.

? سؤال

يشاهد سائق سيارة إشارة ضوئية على مسافة قريبة جدا، مما يؤدي إلى نقصان سرعته فورًا حتى لا يقطع الإشارة الضوئية، ما نوع الإخماد الذي يمثله مؤشر سرعة السيارة؟

? سؤال

نابض رأسي طوله (5 cm)، استطال بفعل ثقل من موضع اتزانه حتى أصبح طوله (10 cm)، فإذا كانت طاقة الوضع المختزنة فيه تساوي (15 J) فاحسب مقدار ثابت النابض.

? سؤال

كُتلة مُعلقة بطرف نابض رأسي وتخضع لحركة توافقية بسيطة. إذا كان أقصى تسارع له يساوي (8π m/s^2) وأقصى سرعة له (2 m/s) فاحسب مقدار الزمن الدوري لحركة الجسم.

? سؤال

سيارة لها أربع ممتصات صدمات تهتز صعودًا وهبوطًا عند مرور السيارة على مطب. إذا كانت كتلة السيارة (15000 kg) مزودة بأربعة نوابض، ثابت النابض لكل منها (6600 N/m) احسب الزمن الدوري لكل نابض..

? سؤال

جسم كتلته (4 kg) مُعلق بنابض يهتز بزمن دوري (2 s) في حكرة توافقية بسيطة، إذا رُبط جسم آخر كتلته (9 kg) بنفس النابض. ما الزمن الدوري للنابض الجديد؟

حل أسئلة مراجعة الدرس الثاني من الوحدة الثانية

سؤال 1 ما الشروط اللازم تحقيقها في البندول البسيط كي يتذبذب في حركة توافقية بسيطة؟ وما مصدر القوة المُعيدة في البندول؟

أن تتناسب القوة المُعيدة طرديًا مع مقدار الإزاحة وأن يكون اتجاه القوة المُعيدة باتجاه معاكس لاتجاه الإزاحة.

مصدر القوة المُعيدة في البندول البسيط : مركبة الوزن باتجاه المماس لاتجاه الحركة وذلك في حالة الزاويا الصغيرة فقط.

سؤال 2 يستخدم جد ليلى ساعة بندولية تعتمد على الزمن الدوري للبندول، وذات يوم لاحظ أن ساعته غير دقيقة فنظرت ليلى إلى ساعتها فكانت (5:15 PM) بينما ساعة جدها (5:00 PM) ، كيف يمكن لليلى ضبط ساعة جدها بحيث تقيس الزمن بدقة دون تقديم أو تأخير.

يمكن ذلك من خلال تغيير طول بندول الساعة بحيث يُكمل البندول ذبذبة واحدة خلال زمن مقداره ثانية واحدة كالآتي :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1)^2 \times 9.81}{4\times(3.14)^2} \rightarrow L = 24.87\ cm$$

سؤال 3 طفل كتلته (15 kg) يجلس في أرجوحة كتلتها (5 kg) مربوطة بحبل مثبت من الأعلى. إذا دُفع الطفل مسافة صغيرة ثم تُرك ليبدأ بالتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري (4 s) فأحسب:

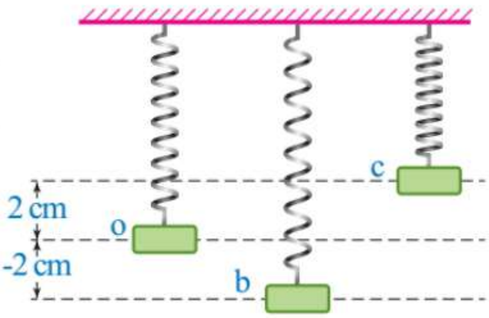
أ - التردد الزاوي.

$$m_{tot} = 15 + 5 = 20\ kg$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{4} = 1.57\ rad/s$$

ب - طول الحبل.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(4)^2 \times 10}{4\times(3.14)^2} \rightarrow L = 4.05\ m$$



سؤال 4 عُلق جسم بنابض وبعد أن استقر عند الموقع (o) كما في الشكل، سُحب إلى أسفل عند الموقع (b)، ثم تُرك يتذبذب رأسيًا إلى الأعلى والأسفل بين الموقعين (b و c). إذا استغرق الجسم زمنًا قدره (0.6 s) في أثناء حركته من (b) إلى (c) فأحسب:

أ - الزمن الدوري.

$$T = 2 \times 0.6 = 1.2\ s$$

ب - التردد الزاوي.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{1.2} = 5.23\ rad/s$$

جـ - تسارع الجسم عند الموقع (c).

تسارع الجسم عند (c) يساوي القيمة العظمى للتسارع.

$$a_{max} = \omega^2 A = (5.23)^2 \times 0.02 = 0.55\ m/s^2\ ,\ -y$$

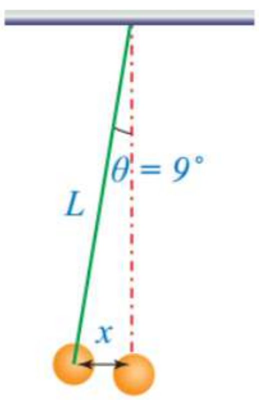
سؤال 5 ساعة بندولية يكمل بندولها ذبذبة واحدة في زمن مقداره ثانية واحدة عندما يكون طوله (L). إذا تضاعف طول البندول أربع مرات (4L)، فكم ذبذبة يكمل البندول في زمن مقداره ثانية واحدة.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T^{\because} = 2\pi\sqrt{\frac{4L}{g}} = \sqrt{4} \times 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \times 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T^{\because} = 2 \times T = 2 \times 1 = 2\ s$$

أي أن البندول لُكمل ذبذبة واحدة في زمن ($2s$) وبالتالي فهو يُكمل نصف ذبذبة واحدة في الثانية الواحدة.

سؤال 6 بندول بسيط كتلته (0.25 kg) وطوله (80 cm). إذا أزيح زاوية (9°) كما في الشكل ثم تُرك يتذبذب في حركة توافقية بسيطة، فأحسب:



أ - الزمن الدوري.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.8}{10}} = 5.59\ s$$

ب - أقصى إزاحة (x).

$$\sin\theta = \frac{x}{L} \rightarrow \sin 9^o = \frac{x}{0.8} \rightarrow x = 0.12\ m = 12\ cm$$

جـ - القيمة العظمى للسرعة.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{5.59} = 1.12\ rad/s$$

$$a_{max} = \omega^2 A = (1.12)^2 \times 0.12 = 0.15\ m/s^2\ ,\ -y$$

تم بحمد الله