جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

دليل مدرس الرياضيات

للصف الثالث المتوسط

تأليف

محمد عبد الغفور الجواهري
د . طارق شعبــان رجب
د . سديــل عــادل فتــاح
د . هاشم محمد حمـزة
مــهــدي مــال الله مـكــي
منـعـم حسيـن عـلوان

الطبعة الاولى
1433هـ / 2012 م

الخبير اللغوي

هاشم عبد الله طاهر

المشرف العلمي على الطبع

مهدي مال الله مكي

المشرف الفني على الطبع

زيـد غـانـم سعـيد

المركز التقني لأعمال ما قبل الطباعة

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمّة :

اخي المدرس ..... اختي المدرسة

يسرنا ان نقدم بين ايديكم هذا الكتاب لمادة الرياضيات للصف الثالث المتوسط آملين ان يكون لكم المرشد ويساعدكم في اداء رسالتكم لتحقيق الاهداف المنشودة من تدريس الرياضيات .

ونؤكد على انه جاء عوناً لتعزيز ودعم الانشطة المقدمة في كتاب الطالب والمجال مفتوح لكم كي تبدعوا وتقدموا كل مايعينكم في التدريس وفقاً لمستويات طلابكم .

وقد تم ترتيب هذا الكتاب وفق ترتيب الدروس في كتاب الطالب ويشتمل على :

اولاً : المحتوى العلمي الذي يتضمن المفاهيم والمصطلحات والحقائق والتعميمات والاهداف السلوكية لكل فصل

ثانياً : خلفية علمية

ثالثاً : خطوات سير الدرس وتتضمن التمهيد والعرض

رابعاً : مجموعة من الانشطة الاثرائية وبعض الاخطاء الشائعة وكيفية معالجتها

خامساً : حل التدريبات والتمرينات

سادساً : التقويم

كما نثمن جهود الخبير العلمي الدكتور اياد غازي الذي ساهم بأنجاز هذا الكتاب :

وختاماً نأمل منكم ان تفسحوا المجال امام طلبتكم كي يكتشفوا القواعد الرياضية بأنفسهم وتشجعوهم وتنوعوا في طرائق تدريسكم ونرجو ان تقدموا لنا ملاحظاتكم ومقترحاتكم في سبيل الرقي بعملية تعليم وتعلم الرياضيات نحو الافضل .

والله وليّ التوفيق والسؤدد .

المؤلفون

الخطة السنوية لرياضيات الصف الثالث المتوسط

	الفصل	عدد الحصص لكل فصل	المفردات بكل فصل	عدد الحصص لكل مفردة
1	الفصل الاول	15	التطبيق انواع التطبيق تركيب التطبيقات	5 5 5
2	الفصل الثاني	15	الاعداد الحقيقية الجذور التربيعية الجذور التكعيبية	5 5 5
3	الفصل الثالث	15	الحدوديات تحليل الحدوديات الثلاثية تحليل المربع الكامل	5 5 5
4	الفصل الرابع	19	المتباينات الجمل الرياضية المعادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين المعادلات الكسرية	5 5 5 4
5	الفصل الخامس	10	الهندسة المثلث	5 5
6	الفصل السادس	15	الدائرة الاقواس التماس	3 6 6
7	الفصل السابع	10	الهندسة الاحداثية احداثيات نقطة منتصف قطعة مستقبم في مستوى الاحداثي	5 5
8	الفصل الثامن	15	الانعكاس الدوران التكبير	5 5 5
9	الفصل التاسع	6	المثلثات النسب المثلثية النسب المثلثية للزوايا الخاصة	2 2 2
10	الفصل العاشر	5	الاحصاء	5
	المجموع	125		125

مقدمة :-

تؤدي الرياضيات الحديثة دوراً كبيراً في حياتنا المعاصرة بحيث عدت حجر الزاوية في كل تقدم علمي وتقني في هذا العصر. وبما اننا جزء من هذا العصر نحس بتقدمه ونتأثر بتطوره ، فكان لزاما علينا ان نغير مناهجنا الدراسية بصورة عامة والرياضيات بصورة خاصة لتتماشى مع التطورات العالمية ، ولنقوم بتهيئة المواطن القادر على الابتكار والتفكير والمتفهم للتطورات العلمية الحديثة ليكون اكثر استعداداً لتقبل تطوراتها وتطبيقاتها وليعتمد على التفكير العلمي والاسلوب الرياضي لحل المشكلات في المجتمع.

مبادئ اساسيه في اعداد المواد التعليمية :-

ان المدرس الذي يقوم بتدريس مادة الرياضيات لصفوف المرحله المتوسطة (الثالث) لابد ان يعي الكثير من المبادئ الاساسيه التي تزوده بالمعرفة حول مادة الرياضيات ومناهجها من وجهة نظر حديثة وترشده الى الوسائل والطرائق التدريسية والتقويمية في تعليم طلابه.

ان من اهم المبادئ الرئيسة :

1 - مراعاة مراحل تطور التفكير عند المتعلمين من حيث مراحل النمو العقلي مقارنة بأعمار الطلاب فيبدأ المدرس بالاعتماد على المحسوسات ومن ثم شبه المحسوسات لينتقل الى المجردات .

2 - الاهتمام بمجالات الاهداف (معرفية ، وجدانية ، مهارية).

ففي مستويات المجال المعرفي نهتم بالمستويات (معرفة ، استيعاب ، تطبيق) واذا لزم الامر نرتقي بهم الى مستويات اعلى . اما في المجال الوجداني فنهتم بميول واتجاهات الطلاب الايجابية نحو الرياضيات. كذلك من الضروري التأكيد على الجانب الوجداني والمجال العملي (المهاري) وتنميته بشكل كبير.

3 - الاهتمام بالمفاهيم الرياضية والتأكيد على اكتسابها من قبل الطلاب وان المعرفة الرياضية تراكمية (هرمية) فالمفاهيم الاولية اساسية لبناء اكبر.

4 - الاهتمام بالمهارات بقدر الاهتمام بالمفاهيم مع التركيز على الجوانب الاساسية والرئيسة في التوصل الى مهارات جيدة.

5 - الاهتمام بحل المسائل لانها اداة رئيسة لتنمية التفكير السليم . حيث تقدم بعض المسائل التي تتناول مواقف حياتية بعد كل موضوع مع التأكيد على الاستراتيجيات الخاصة بحل مسألة رياضية.

6 - الاهتمام بالمفاهيم والمهارات الهندسية واعطائها ما نستحقه من العناية لانها جزء مهم وضروري ضمن مناهج الرياضيات ومفرداتها.

7 - مراعاة الفروق الفردية بين المتعلمين لانهم مختلفون في سرعة تقبلهم للمادة وفي درجة التفكير والذكاء وعلى المدرس اتاحة الفرص الكافية لجميع الطلاب للمشاركه والعمل كل حسب قدراته وامكاناته.

8 - التدرج في التعليم من السهل الى الصعب ومن البسيط الى المعقد.

9 - تقديم المساعدة اللازمة للمدرس من خلال:

أ - تحديد الاهداف السلوكية لكل موضوع

ب - اعطاء خلفية علمية للموضوعات لتعميق الافكار

جـ - تحديد الوسائل التعليمية المناسبة

د - اعطاء طرائق تدريسية متنوعة لتدريس الموضوعات

هـ - تحديد اسئلة لتقويم تحصيل الطلاب

توجيهات عامة

1 - الكتاب مقدم لمدرس الثالث المتوسط للاستفادة من المعلومات والتوجيهات ولايكون وسيلة مساعدة للطالب.

2 - اثراء خلفية المدرس العلمية وتقديم ماهو حديث في مادة الرياضيات وطرائق تدريسها والوسائل التعليمية والتقويمية.

3 - اعتبار الطالب محور اساسي في العملية التعليمية ومشاركته في جميع اجزاء الدرس وانشطته بشكل نشط وفعال وايجابي والمدرس هو المرشد والموجه للطالب.

4 - الاهتمام بالتخطيط للموضوع بشكل عام (خطة سنوية) حيث توزع مفردات المادة بأكملها على اسابيع السنة الدراسية . كذلك الاهتمام بالخطة اليومية وكيفية تقديم موضوع الدرس من المقدمة الى الخاتمة.

5 - اختيار الوسائل والمعينات التربوية المناسبة لموضوع الدرس من ادوات ومصورات واجهزة وامثلة حياتية.

6 - مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب وذلك بتقديم وسائل وانشطة وامثلة متنوعة ومختلفة في المستوي (بسيط، متوسط، صعب).

7 - اتباع طرائق تدريسية متنوعة تتلائم وموضوع الدرس وبما يكون مناسباً ومنها :-

أ- طريقة المحاضرة : تستخدم في بداية تقديم الموضوع (مقدمة) وفي نهاية الدرس (الخاتمة) .

ب- المناقشة: محاورة الطلاب من خلال طرح الاسئلة والامثلة العددية واللفظية المناسبة لموضوع الدرس فالمدرس يسأل والطالب يجيب وربما يحدث العكس او طالب يسأل وآخر يجيب .

جـ- الاكتشاف : يهيء المدرس فرصاً للطالب كي يكتشف هو المعلومة فيستطيع الطالب التوصل الى القاعدة او القانون من خلال الامثلة المحلولة والحالات الخاصة التي يقدمها المدرس له.

د- التعليم الفردي: من خلال استخدام الطالب للكتاب المقرر والاجابة عن الاسئلة، لتشجعهم على التعلم الفردي الذي يراعي مبدأ الفروق الفردية.

هـ- حل المشكلات :تعد اساساً لحل المشكلات الرياضية لانها تنمي التفكير الرياضي.

و- التعلم التعاوني :- للعمل بشكل تعاوني وتنمية روح المساعدة والتعاون بين الطلاب يقسم المدرس طلاب الصف الى مجموعات صغيرة (5-3) طلاب تعطى لهم أعمال يؤدونها بها ويتوصلون الى حلولها.

ز- وهناك طرائق واساليب اخرى متنوعة منها استخدام الالعاب والالغاز على وفق قواعد محددة مسبقاً.

8 - استخدام وسائل التقويم التي تقيس مستوى تحصل الطلاب ويقسم التقويم الى تقويم (قبلي) في بداية الدرس لمعرفة مقدار مالدى الطلاب من معلومات على الموضوع .وتقويم (تكوين) يكون خلال الدرس ومستمر طيلة وقت الدرس وخلال الشرح . اما التقويم (البعدي) يكون في نهاية الدرس والذي يحدد مدى تحقيق الاهداف السلوكية.

9 - التزام المدرس بالسلوك الجيد الذي يساعد في تنمية ميول واتجاهات سليمة وقيم ايجابية في التعرف والسلوك واتجاهات سليمة نحو مادة الرياضيات ومن خصائص سلوك المدرس :-

- اعتماد قيادة ديموقراطية يكون فيها الاحترام المتبادل والعلاقات الانسانية (المحبة والعطف والتعاون) بين المدرس وطلابه.
- الشخصية القوية والاتزان الانفعالي والمظهر اللائق للمدرس.
- الكفاية العلمية والاخلاص والامانة وابتكار وسعة خيال ويعتمد التخطيط.
- للمدرس صوت واضح مسموع ونطق سليم ومتمكن من ادارة الصف ولديه نظرة شاملة لجميع الطلاب وحركته مناسبة.
- يستخدم السبورة بشكل منظم ويستخدم التقنيات التربوية مثل الرسومات والاجهزة.
- يجذب انتباه طلابه باعطاء مقدمة مثيرة للموضوع مثل عرض وسيلة ايضاح او اعطاء مثال حياتي او بيان اهميته واستخداماته في الحياة.
- تشخيص الصعوبات في التعلم الموجودة عند الطلاب ومحاوله التأكيد على علاجها بأساليب مختلفة.

أهداف تدريس الرياضيات بالمرحلة المتوسطة

الصف الثالث المتوسط

اولاً : اهداف المجال المعرفي

أ. اكتساب بعض المعلومات الرياضياتية المتمثلة في معرفة :

1. التطبيقات .

2. مجموعة الاعداد الحقيقية .

3. المفاهيم المتعلقة بالحدوديات وتحليلها والعامل المشترك الاكبر والمضاعف المشترك الاصغر .

4. مفاهيم متعلقة بالمقادير الجبرية .

5. حل المعادلات والمتباينات في مجموعة الاعداد الحقيقية .

6. مفاهيم اولية متصلة بالحل البياني وتمثيله.

7. بعض الاشكال الهندسية المستوية .

8. بعض المبرهنات الخاصة بالمثلث والدائرة .

9. بعض المفاهيم الهندسية الخاصة بالمسافة في المستوي الاحداثي .

10. بعض التحويلات الهندسية على المستوي (الانعكاس ، الانسحاب ، الدوران ، التكبير ، التشابه).

11. حساب المثلثات .

12. بعض المفاهيم الاحصائية .

ب – اكتساب بعض اساليب التفكير الرياضي :

1. تدريب الطلبة على الاكتشاف والتجريد والتعميم وصياغة القواعد والقوانين بأسلوبهم .

2. استخدام التفكير الرياضي بما يتناسب مع نمو الطلبة من خلال استعمال اساليب مختلفة : الاستقراء ، الاستنتاج ، الاستدلال ، التصنيف التقدير ، التخطيط ، البرهان .

3. تكوين وتقويم الحدس الرياضياتي والحجج الرياضياتية .

4. انماء القدرة على التفكير المنطقي المتسلسل للتوصل الى الحل الصحيح .

5. تحليل الموقف لتحديد المعطيات والمطلوب .

6. انتقاء العلاقات الرياضياتية التي تؤدي الى الحل .

7. اختيار العمليات الرياضياتية المناسبة للوصول الى الحل .

8. التحقق من صحة الحل ومعقوليته .

9. ابتكار اساليب جديدة لحل المسائل الرياضياتية.

10. تعميم الحلول والاستراتيجيات التي تعلمها الطلاب في مواقف ومشكلات جديدة .

ج- التواصل الرياضياتي :

تعليم الرياضيات في هذه المرحلة يجب ان يتضمن فرصاً للتواصل بلغة الرياضيات بحيث يستطيع الطلبة :

1 . نمذجة المواقف شفاهة او كتابة او بأستخدام المحسوسات او بالصور او بالرسوم البيانية او بالرموز الجبرية .

2 . التعبير عن مايفكر فيه الطلبة من مواقف رياضياتية بوضوح .

3 . نمو استيعاب الطلبة للافكار الرياضية المتضَمنة في المسائل .

4 . توظيف مهارات القراءة والاستماع والمشاهدة والفحص والتبصير في تفسير وتقويم الافكار الرياضياتية .

5 . مناقشة الافكار الرياضياتية وتكوين حجج وبراهين حدسية ومقنعة .

6 . توضيح اهمية الرموز ودورها في تطوير الافكار الرياضية .

ثانياً : اكتساب المهارات والاساليب الرياضياتية :

1 . تمثيل التطبيقات ودراسة خواصها .

2 . اجراء العمليات على مجموعة الاعداد الحقيقية .

3 . اجراء العمليات على المقادير والتطبيقات الجبرية .

4 . حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الاولى بيانياً وجبرياً .

5 . حل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين انياً .

6 . حل المعادلات التربيعية ذات المجهول الواحد جبرياً .

7 . اثبات بعض المبرهنات الخاصة بالمثلث والدائرة .

8 . ترجمة التعابير اللفظية الرياضياتية الى لغة الرموز وبالعكس .

9 . صياغة قاعدة او علاقة باستخدام الرموز .

10 . حل المسائل اللفظية والمشكلات الحياتية .

11 . ايجاد المسافة بين نقطتين في المستوي الاحداثي .

12 . استخدام قانون المسافة لبيان نوع المثلث .

13 . استخدام الانعكاس لاثبات التناظر في الشكل .

14 . برهنة حقائق باستخدام المعلومات الخاصة بهندسة التحويلات .

15 . ايجاد النسب المثلثية للزوايا .

16 . تنظيم بعض البيانات الاحصائية وجدولتها وتمثيلها وحساب المتوسطات الحسابية .

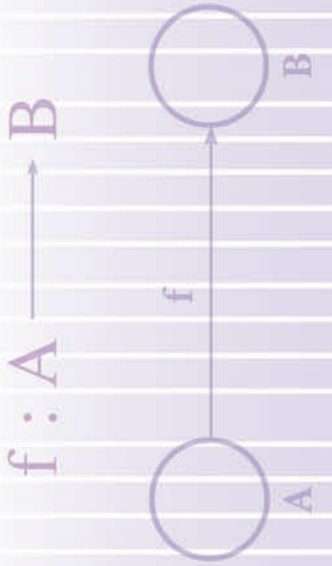
17 . تنمية الحس الهندسي والمكاني .

ثالثاً : المجال الانفعالي وتنمية الجانب الوجداني ويتمثل في :

1. الرغبة في دراسة الرياضيات وتكوين اتجاهات ايجابية نحوها .
2. تقدير الدور الحضاري والاجتماعي للمعرفة الرياضياتية وتطويرها .
3. تقدير دور الرياضيات في خدمة ميادين المعرفة الاخرى .
4. الاستمتاع بالتفكير الرياضياتي في تناول الجوانب الترفيهية للرياضيات مثل الالغاز والمغالطات ، الخدع الحسية .
5. تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في تطوير الرياضيات .
6. تقدير دور الرياضيات في التقدم العلمي والتقني .
7. الميل للقراءة الحرة في الرياضيات وتاريخها .
8. تذوق النواحي الجمالية للبنية الرياضياتية والاشكال الهندسية المتنوعة.
9. الموضوعية والثقة بالنفس في اتخاذ القرارات والدقة والوضوح والايجاز عند الكتابة او التعبير .
10. الشعور بالرضا والارتياح عند حل المسائل والمشكلات.

الفصل الاول

التطبيقات Mappings



[1–1] التطبيق .

[1–2] نوع التطبيق .

[1–3] المخطط البياني للتطبيق .

[1–4] تركيب التطبيقات .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
الأعداد الطبيعية	N
الأعداد الصحيحة	Z
الأعداد النسبية	Q
تركيب التطبيقين f , g	gof أو fog

1 - تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التطبيق
- المجال
- المجال المقابل
- مدى التطبيق
- التطبيق الشامل
- التطبيق المتباين
- التطبيق المتقابل
- المخطط البياني للتطبيق
- تركيب التطبيقات **gof**

الحقائق والتعميمات

- لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث ان $(x,y) \in r$
- المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل
- يكون التطبيق شاملاً اذا كان

المدى = المجال المقابل

- يكون التطبيق متباين اذا كانت العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المجال المقابل
- التطبيق تقابل اذا كان تطبيقاً شاملاً ومتبايناً
- تركيب التطبيقين **f,g**

$$(fog)_{(x)} = f(g(x))$$

$$(gof)_{(x)} = g(f(x))$$

الخوارزميات والمهارات

- يعرف التطبيق
- يتعرف على مجال التطبيق
- يجد مدى التطبيق
- يرسم المخطط السهمي للتطبيق
- يميز بين انواع التطبيق
- يرسم المخطط البياني للتطبيق
- يجد تركيب تطبيقين

2 – الاهداف السلوكية

في نهاية الفصل ينبغي ان يكون الطالب قادراً على ان :

1 – يعرف التطبيق
2 – يكتب التطبيق على شكل ازواج مرتبة
3 – يمثل التطبيق بمخطط سهمي
4 – يتعرف على مجال التطبيق
5 – يجد مدى التطبيق
6 – يميز التطبيق الشامل
7 – يميز التطبيق المتباين
8 – يميز التطبيق المتقابل
9 – يميز بين انواع التطبيق
10 – يرسم المخطط البياني للتطبيق
11 – يعرف تركيب التطبيقات
12 – يجد تركيب تطبيقين

3 – خلفية علمية للمدرس

سبق وان درسنا العلاقة (Relation) وهي مجموعة الازواج المرتبة (x,y) حيث x المسقط الاول ، y المسقط الثاني وبصورة رياضية نعبر عن العلاقة r من المجموعة A الى B بالشكل التالي :

$$r = \{(x , y) : x \in A , y \in B\}$$

مع ملاحظة ان x , y ليست بالضرورة ان تكون أعداداً .

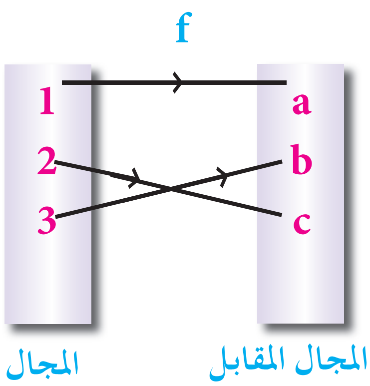
سنتعرف بشكل مناسب في هذه المرحلة على نوع خاص من العلاقة سُميّ « التطبيق » (تعريفه ، انواعه).
وعرفناه كمايلي : التطبيق $f : A \longrightarrow B$ يعني لكل عنصر من عناصر المجال A (Doman) عنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل (Codomain) او بشكل رياضي :

$$f = \{(x , y) : x \in A , y \in B , y= f(x)\}$$

كما موضح في المخطط السهمي ان العلاقة f تمثل تطبيقاً :

المجال = $\{1 , 2 , 3\}$ ، المجال المقابل = $\{a , b , c\}$

$f = \{(1 , a) , (2 , c) , (3 , b)\}$

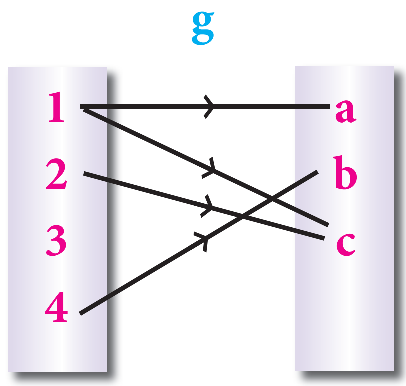


اما المخطط المجاور للعلاقة g فلا يمثل تطبيقاً لانه :

(*) 3 لم يرتبط باي عناصر المجال المقابل

(*) 1 ارتبط بالعنصرين c,a .

مما سبق يتوضح ان كل تطبيق هو علاقة والعكس غير صحيح بشكل عام .



بيان التطبيق : مجموعة جميع الازواج المرتبة

مجال التطبيق : مجموعة المساقط الاولى لجميع الازواج المرتبة المكونة لبيان التطبيق

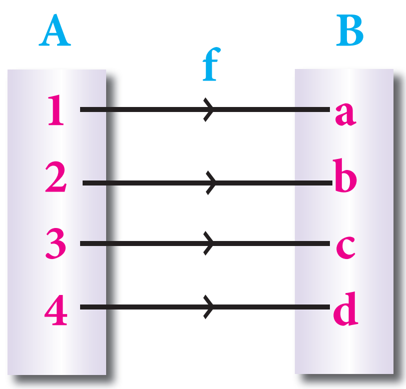
مدى التطبيق (Range) : مجموعة صور عناصر المجال تحت تأثير قاعدة الاقتران وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل ويرمز له Ran

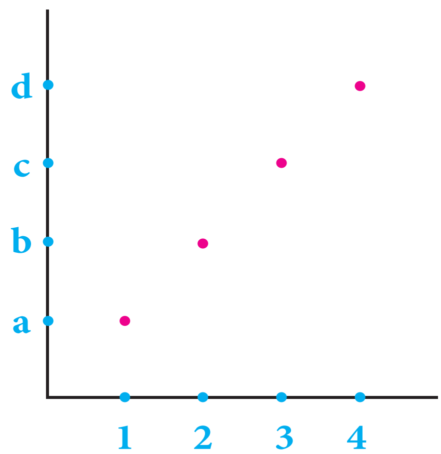
انواع التطبيق :

1) التطبيق الشامل Surjective mapping (onto mapping)

يكون التطبيق شاملاً اذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل B هو صورة لعنصر واحد او اكثر من عناصر المجال A

او بعبارة أخرى اذا كان المدى = المجال المقابل

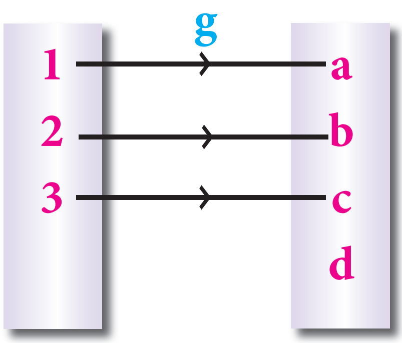




تمثيل التطبيق f سهمياً

تمثيل التطبيق f بيانيا

f تطبيق شامل



g تطبيق غير شامل لان

المدى ≠ المجال المقابل

$\{a, b, c, d\} \neq \{a, b, c\}$

2) التطبيق المتباين Injective mapping (one – to – one mapping)

يكون التطبيق f متبايناً اذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل B هو صورة لعنصر واحد فقط من عناصر المجال A او اذا كانت العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المجال المقابل

اي : $\forall x_1 \,,\, x_2 \in A \,,\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

او بصورة اخرى : اذا كان : $f(x_1) = f(x_2)$ فان $x_1 = x_2$

3) التطبيق المتقابل Bijective mapping (one – to – one , onto mapping)

يكون f تطبيق تقابل اذا كان شاملاً ومتبايناً

التطبيق العكسي (النظير) Inverse mapping

اذا كان f تطبيقاً متبايناً (one – to – one mapping) فان التطبيق العكسي الى f يرمز له (f^{-1}) هو التطبيق الناتج من عكس جميع الازواج المرتبة المكونة له اي ان :

$$f^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in f\}$$

* لاحظ ان : $\frac{1}{f} \neq f^{-1}$

فمثلاً ليكن f تطبيق من A الى B حيث $A = \{1,2,3,4\} \,,\, B = \{2,3,4,5\}$

حيث : $f(x) = x + 1$

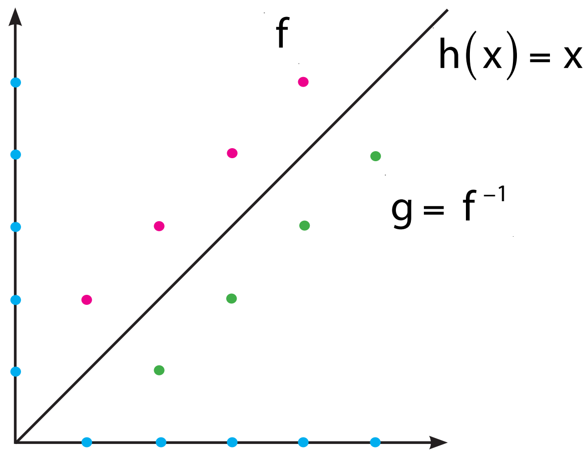
واضح ان f تطبيق تقابل اي ان f مستوفٍ شرط وجود التطبيق العكسي (f^{-1}) (يكفي ان يكون f متباين)

في هذه الحالة لو عكست الاسهم اي سوف نعرف تطبيقاً جديداً g حيث $g : B \to A \,,\, g(x) = x - 1$

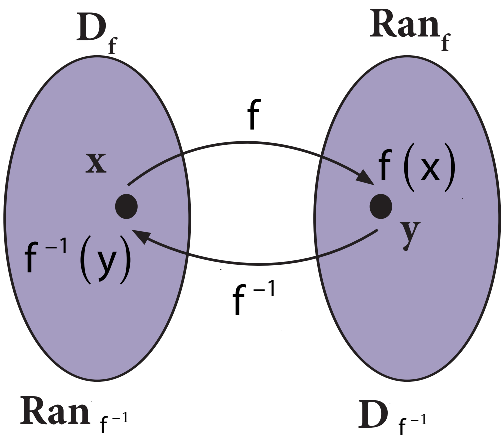
فان : $g = \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4)\}$ اي عكس الازواج المرتبة المكونة الى f لذلك فان :

$g = f^{-1}$

يسمى h التطبيق الذاتي (المحايد)

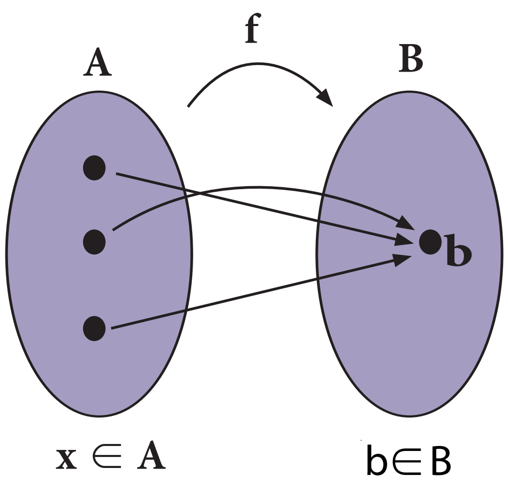


يمكن ان نلخص الشرح اعلاه بالمخطط الآتي :



التطبيق الثابت Constant mapping

يسمى التطبيق $f : A \to B$ تطبيقاً ثابتاً اذا وفقط اذا وجد عنصر وحيد $b \in B$ بحيث انه لكل $x \in A$ فان $f(x) = b$



تساوي التطبيقات : Equality of mappings

ليكن $f : A \to B$ ، $g : A_1 \to B_1$ تطبيقاً فان $f = g$ اذا تحققت جميع الشروط الآتية :

$(*)A_1 = A \qquad (*)B_1 = B \qquad (*)f(x) = g(x) \quad , \quad \forall x \in A$

$(D_g = D_f)$

لاحظ الامثلة الآتية (للمدرس) :

ملاحظة :

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \ , \ x \geq 0 \\ -x \ , \ x < 0 \end{cases}$$

1) $f : \{1, -1, 2, -2\} \to \{1, 2\} \ , \ f(x) = |x|$

$g : \{1, -1, 2, -2\} \to \{1, 2\} \ , \ g(x) = \sqrt{x^2}$

لاحظ ان : g,f تطبيقان متساويان (f=g)

$2)\ f:\{0,1\}\to\{1,2\}\ ,\ f(x)=2-x$

$g:\{0,1\}\to\{1,2\}\ ,\ g(x)=x+1$

بسهولة يمكن الاستنتاج بان $f \neq g$

$3)\ f:\{1,-1,2\}\to\{1,4\}\ ,\ f(x)=x^2$

$g:\{1,2\}\to\{1,4\}\ ,\ g(x)=x^2$

$f \neq g$ لان $D_f \neq D_g$

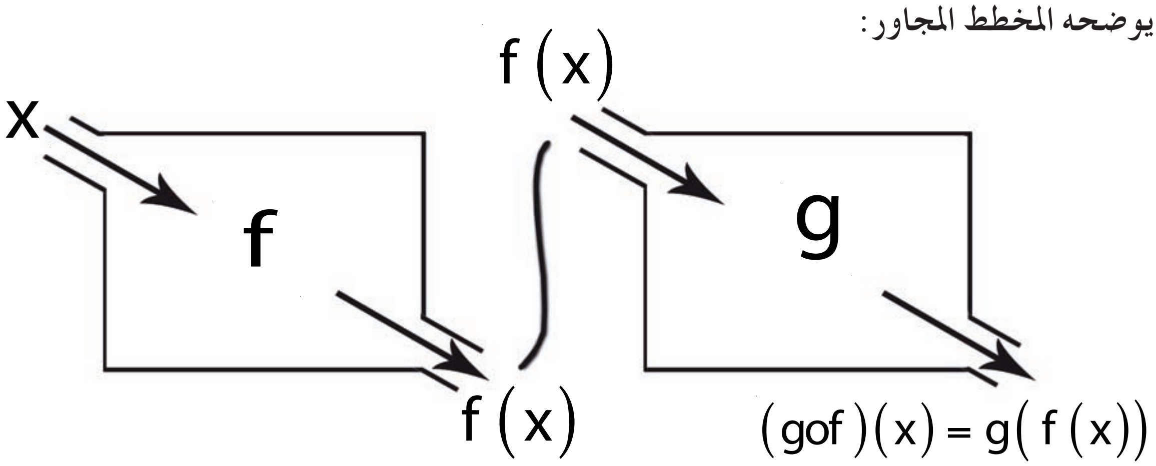
تركيب التطبيقات : Composition of mappings

لتكن كل من C, B, A مجموعة غير خالية وكانت كل من :

$f: A \to B$

$g: B \to C$

تطبيقاً فانه يمكن ايجاد تطبيق جديد من **A** الى **C** يقرأ **g** بعد **f** او **g circle f** ورمزياً (gof) كما يوضحه المخطط المجاور:



مع ملاحظة ان : $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$

وكما وضحنا بمثال في الكتاب المقرر بان تركيب تطبيقين ليست عملية ابدالية اي انه وبشكل عام : $(fog) \neq (gof)$ حتى لو حدث ذلك لمجموعة محدودة من العناصر كما في المثالين الآتيين

لاحظ المثالين الآتيين:

اولاً:

$f: N \to N\ ,\ f(x)=x+1$

$g: N \to N\ ,\ g(x)=x^2$

$(fog)(0)=f(g(0))=f(0)=1$

$(fog)(1)=f(g(1))=f(1)=2$

$(fog)(3)=f(g(3))=f(9)=10$

$$\vdots$$

$$(gof)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1$$

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = 4$$

$$(gof)(3) = g(f(3)) = g(4) = 16$$

$$\vdots$$

لاحظ $(fog) \neq (gof)$

ثانياً :

$$f : N \to N \quad , \quad f(x) = x$$

$$g : N \to N \quad , \quad g(x) = x^2$$

$$(fog)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$$

$$(fog)(1) = f(g(1)) = f(1) = 1$$

$$(fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 4$$

$$\vdots$$

$$(gof)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$$

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$$

$$(gof)(2) = g(f(2)) = g(2) = 4$$

$$\vdots$$

لاحظ $(fog) = (gof)$

لكنْ هذا لايعني ان التركيب عملية ابدالية .

مثلاً :

$f : N \to N$ حيث $f(x) = x + 1$ هو شامل ومتباين ، تقابل

$g : N \to N$ حيث $g(x) = 2x + 1$ كذلك هو شامل ومتباين ، تقابل

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

$$= f(2x+1)$$

$$= f(2x+1)+1$$

$$(fog)(x) = 2x + 2$$

وهو كما نلاحظ شامل ومتباين ، تقابل

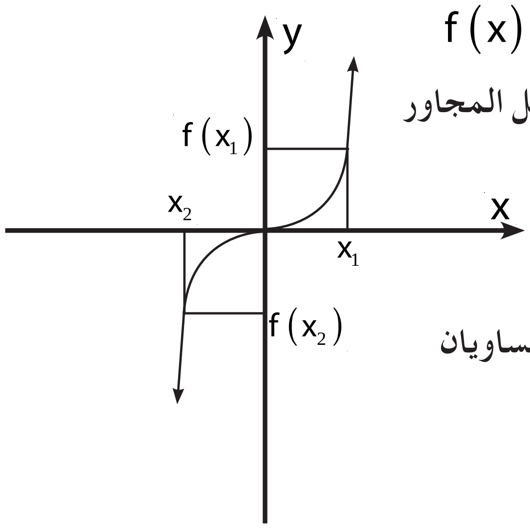
ويشبه كل من **f,g**

مما سبق عرضه يمكن ملاحظه الجدول الآتي

f	g	fog
متباين	متباين	متباين
شامل	شامل	شامل
تقابل	تقابل	تقابل

الدوال الحقيقية Real Functions :

هذا الموضوع هو أمتداد واكمال لموضوع التطبيقات فالدالة بعناصرها الثلاثة (المجال - المجال المقابل - قاعدة الاقتران) سوف تكون الموضوع الاساسي في المراحل اللاحقة لان دراستنا في هذه المرحلة اقتصرت على موضوع التطبيقات لكن دراسة الدالة بتفاصيلها يسمح بحرية أفضل للمناقشة وهو للمدرس فقط .



مثال 1 : ليكن **f** تطبيقاً من **R** الى **R** معرف كما يلي : $f(x) = x^3$

المخطط البياني لهذا التطبيق في المستوي الاحداثي من الشكل المجاور

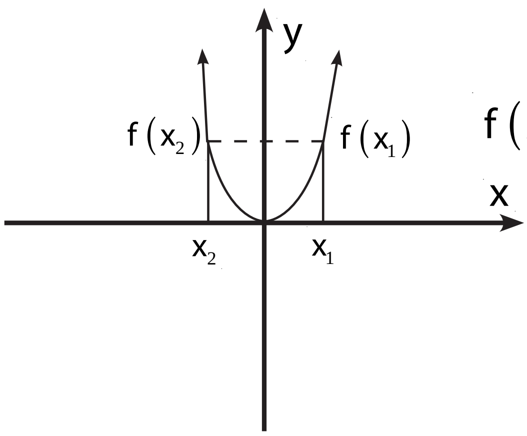
نلاحظ وبسهولة انه تطبيق متباين

لان $x_1 \neq x_2 \Leftarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

او بصورة أخرى لايوجد عددان حقيقيان مختلفان مكعباهما متساويان

اوبطريقة اخرى لو فرضنا ان $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore\ x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$



بينما في التطبيق الآتي : $f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = x^2$

نلاحظ ان : $x_1 \neq x_2$ لكن $f(x_1) = f(x_2)$ غير متباين

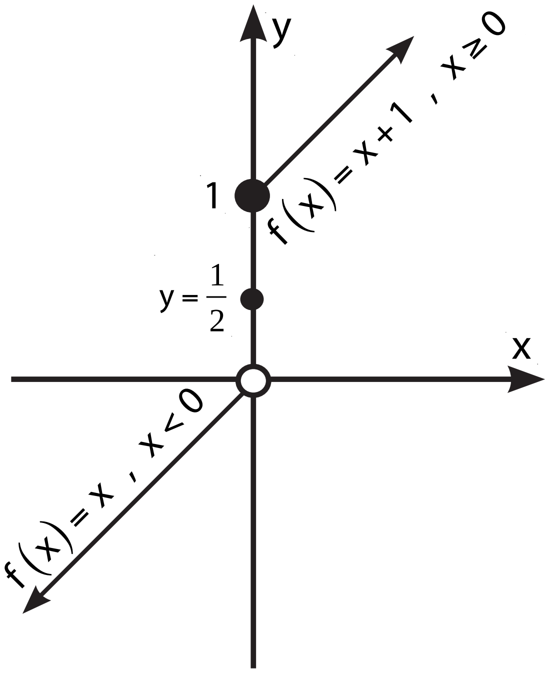
بالاضافة الى ذلك فانه غير شامل

لان المدى = $\{y : y \in R\ ,\ y \geq 0\}$

$\neq R$ (المجال المقابل)

مثال 2 : لتكن $f : R \to R$ معرف كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \forall x \geq 0 \\ x & , \forall x < 0 \end{cases}$$



التمثيل البياني للدالة **f** يسمى منحني الدالة (**Graph**) يمكن الاستنتاج وبسهولة بان **f** ليست شاملة (المدى $\neq$ المجال المقابل) وذلك لوجود عنصر واحد في الاقل (عدد حقيقي في المجال المقابل وليكن $y = \frac{1}{2}$ لايمثل صورة لاي عنصر **x** في المجال) .

أي بشكل آخر : لاتوجد $x \in R$ بحيث ان $f(x) = \frac{1}{2}$

مثال 3 : لتكن $f(x) = 3 - x \quad , \quad g(x) = x^2 + 1$

وكانت $(fog)(a) = (gof)(a) - 4$ جد قيمة $a \in R$

الحل /

قانون $(fog)(x) = f(g(x))$

$$= f(x^2+1)$$

$$= 3 - (x^2+1)$$

$$= 2 - x^2$$

$(fog)(a) = 2 - a^2 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$$= (3-x)^2 + 1$$

$$= x^2 - 6x + 10$$

$(gof)(a) = a^2 - 6a + 10 \cdots\cdots\cdots (2)$

$2 - a^2 = a^2 - 6a + 10 - 4$

$2 - a^2 = a^2 - 6a + 6$

$\Rightarrow 2a^2 - 6a + 4 = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$\Rightarrow (a-1)(a-2) = 0$

اما : $a = 1$

او : $a = 2$

4 – المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

تهيئة الطلبة :

– البدء بمراجعة لما درسه الطالب في الصف الثاني المتوسط حول موضوع العلاقات من خلال مناقشة عدد من الامثلة الحياتية مثل العلاقة بين الاباء والابناء والتذكير بالمجال والمجال المقابل.

– اعط عدد من العلاقات من مجموعة الى اخرى ووضحها بالمخططات السهمية بحيث يقترن كل عنصر من عناصر المجال مع عنصر وحيد من عناصر المجال المقابل على ان يكون العرض في صورة حوار يكون العنصر الفاعل فيه الطلبة انفسهم.

– من خلال المخططات السهمية وضح للطلبة بأن كل من تلك العلاقات تطبيقاً وهو موضوع درسنا.

5 – تدريس الموضوع

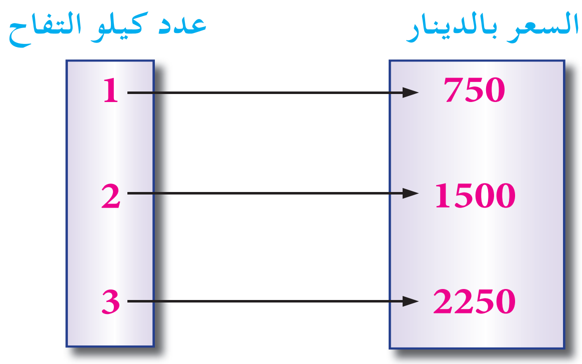
– تقديم مفهوم التطبيق من خلال مجموعة من الامثلة لمعرفة اي منها يمثل تطبيقاً .

– تقسيم الطلبة الى مجموعات كل منها لديها قائد يجمع اجاباتهم.

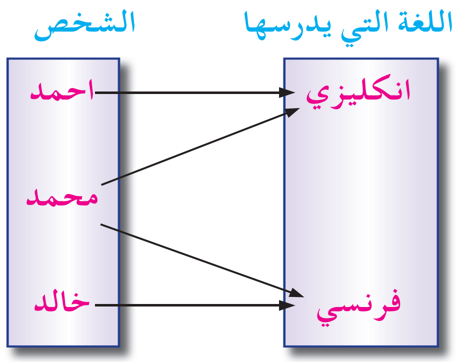
– تعرض المجموعات ماتوصلت اليه.

– يتأكد المدرس من توصل الطلبة لمعرفة التطبيق وتقديم التغذية الراجعة المناسبة لهم.

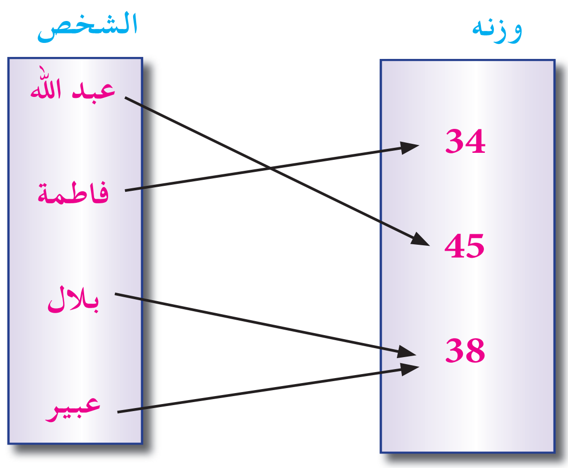
ويمكن استخدام الامثلة الآتية او الامثلة المعطاة في الكتاب المقرر:



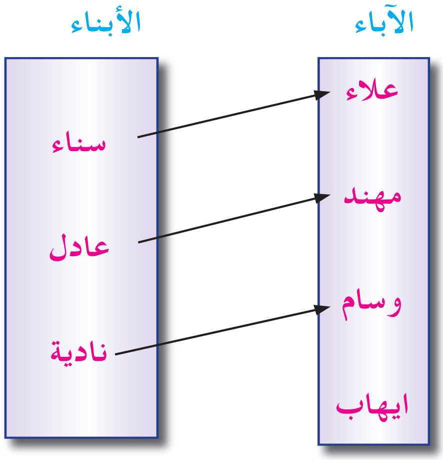
الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3



الشكل 4

الشكل (1) يمثل تطبيق لان كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد في المجال المقابل.

الشكل (2) لايمثل تطبيق لان (محمد) ارتبط بعنصرين في المجال المقابل.

الشكل (3) يمثل تطبيقاً لان كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد في المجال المقابل.

الشكل (4) لايمثل تطبيق لان هناك عنصر (إيهاب) في المجال لم يرتبط بعنصر في المجال المقابل.

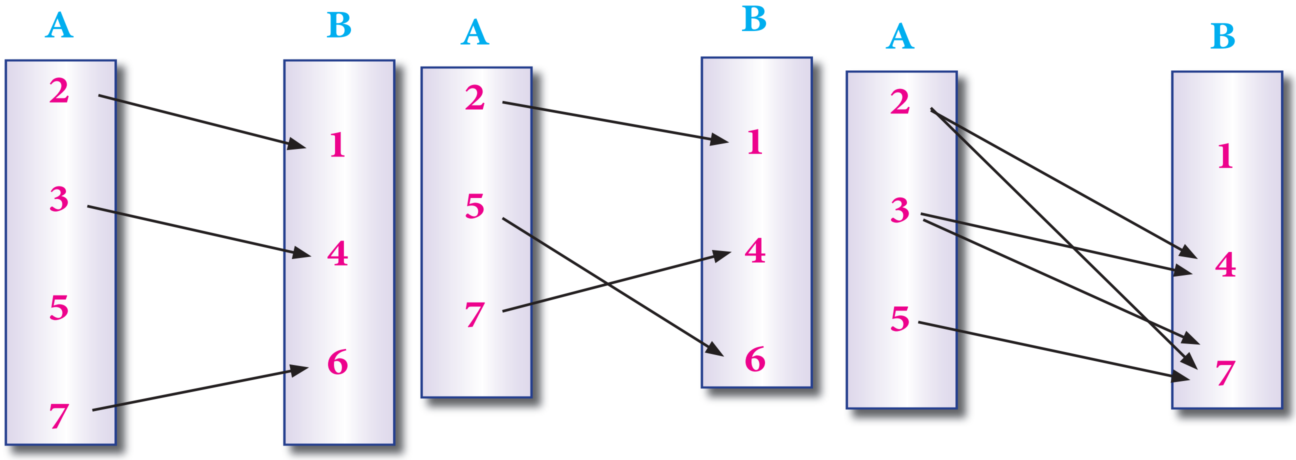
* وضح للطلاب بأن كل تطبيق هو علاقة ولكن ليس كل علاقة تكون تطبيق.
* وضح ان المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل.
* وضح بأن هناك فرقاً بين الزوج المرتب (a,b) والمجموعة الثنائية $\{a,b\}$ حيث $(a,b) \neq \{a,b\}$

الأخطاء الشائعة ومعالجتها

عليك تنبيه الطلبة انه ليس من الضروري ان يكون لكل عنصر في المجال المقابل قرين في المجال أي قد تكون بعض عناصر المجال المقابل هي ليست صورة لعنصر في المجال (كما في الشكل 4).

التقويم

بين ايا من المخططات السهمية الآتية تمثل تطبيقاً من A الى B ولماذا؟

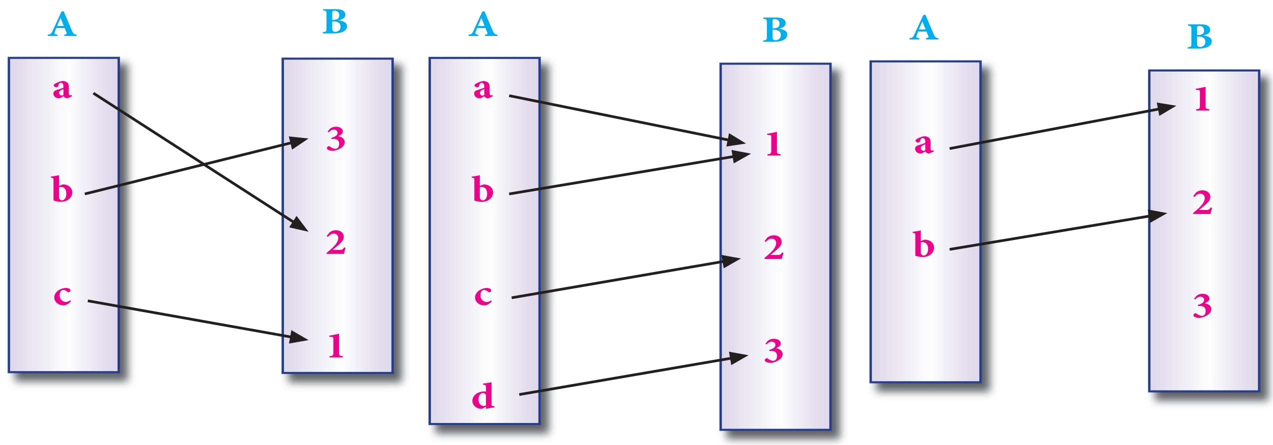


نوع التطبيق : من الممكن توضيح انواع التطبيق بأستخدام احدى الطرق الآتية :

اولاً :

تمييز التطبيقات بواسطة المخطط السهمي

متباين   شامل   تقابل

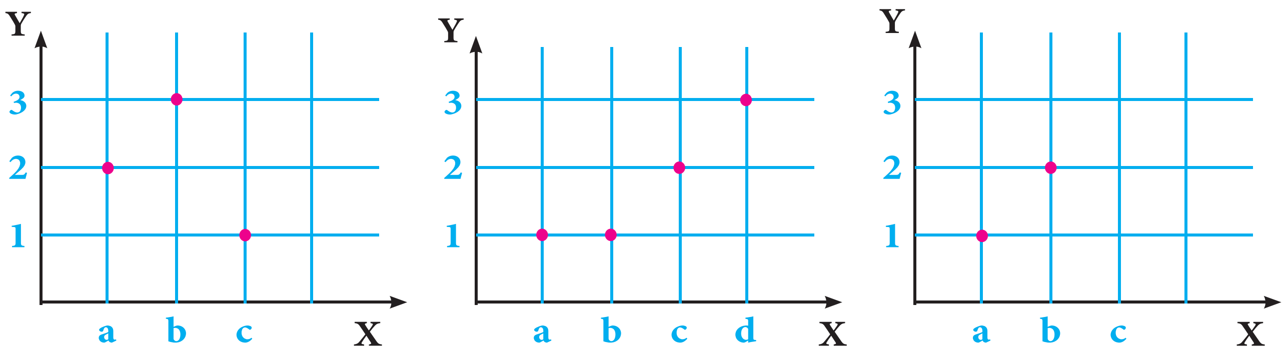


متباين	شامل	تقابل
إذا وصل لكل عنصر في المجال المقابل سهم او أقل يسمى تطبيقاً متبايناً . او العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المجال المقابل .	إذا وصل لكل عنصر في المجال المقابل سهم او أكثر يسمى تطبيقاً شاملاً . اي : المدى = المجال المقابل	إذا وصل لكل عنصر في المجال المقابل سهم واحد فقط يسمى تطبيقاً تقابلاً .

ثانياً :

تمييز التطبيقات بواسطة المخطط البياني

متباين   شامل   تقابل



ثالثاً : خطة تدريس بديلة

اذا وجد الطلبة صعوبة في التمييز بين انواع التطبيق استخدم الاسلوب القصصي للتوضيح بتشبيه التطبيقات بالعوائل فهذا الاسلوب يثير انتباه الطلاب ويجعلهم أكثر حماساً للدرس.

فمن الممكن تشبيه التطبيقات بعوائل يحب أفرادها زيارة بعضهم البعض.

- عائلة التطبيق المتباين : لاتستقبل الكثير من الضيوف وبالعادة يقوم الفرد الواحد باستقبال ضيف واحد على الاكثر في بعض الايام واحياناً لايستقبل أحد .

- عائلة التطبيق الشامل: تحب استقبال الضيوف دائماً وترحب بكل من يأتي إليها لدرجة أن الفرد الواحد أحياناً يستقبل أكثر من ضيف ...... (سهم أو أكثر).

- عائلة تطبيق التقابل: تحب استقبال الضيوف ولكن بنظام حيث لايستقبل الفرد الواحد أكثر من ضيف واحد ..... (سهم واحد فقط).

تركيب التطبيقات

بعد ان درس الطالب تعريف التطبيق وتعلم كيفية ايجاد صور عناصر المجال بفعل قاعدة الاقتران من الممكن له الآن أيجاد صور مجموعة عناصر بفعل تطبيقين متتالين . كما في المثال البسيط الآتي:

مثال : لتكن A مجموعة طلاب عرب يدرسون في جامعة بغداد

$A =$ {احمد ، محمد ، عبد الله}

B : مجموعة المدن العربية التي ينتمي لها هؤلاء الطلبة

$B =$ {بغداد ، بيروت ، القاهرة}

C : مجموعة الدول العربية التي ينتمي اليها مجموعة عناصر B (العراق ، مصر ، لبنان) فاذا أقترن كل طالب (عنصر) من A بمدينة من B بواسطة التطبيق وليكن f اي ان:

$A \xrightarrow{f} B$

$f : A \to B$

f : احمد $\to$ بيروت

f : محمد $\to$ القاهرة

f : عبد الله $\to$ بغداد

$f =$ { (احمد ، بيروت) ، (محمد ، القاهرة) ، (عبر الله ، بغداد) }

والتطبيق g سوف يقرن كل عنصر من عناصر B (المدينة) بالدولة العربية من C اي ان:

$B \xrightarrow{g} C$

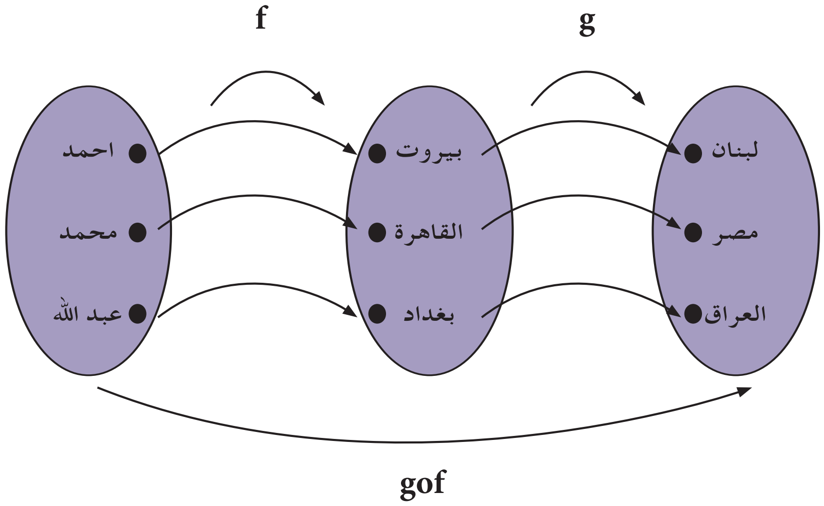
$g : B \to C$

g : بيروت $\to$ لبنان

g : القاهرة $\to$ مصر

g : بغداد $\to$ العراق

يظهر من اعلاه ان بالامكان ايجاد تركيب جديد من f , g يربط كل طالب من المجموعة A بالدولة من المجموعة C يعرف هذا التركيب الجديد gof وتقرأ (g بعد f) كما في المخطط



gof = { (احمد ، لبنان) ، (محمد ، مصر) ، (عبد الله ، العراق) }

يقدم المدرس مثالاً اخر عن طريق استرجاع ماطرح بهذا الخصوص في موضوع التطبيق مثلاً

$g:\{1,2,3\} \to N \quad , \quad g(x) = 2x$

$f:\{2,4,6\} \to Z \quad , \quad f(x) = x+5$

والمطلوب إيجاد $(fog)(x)$

يكلف الطلبة بايجاد $g(x)$ كونهم سبق ودرسوا موضوع التطبيق

يتأكد المدرس من توصل الطلبة للنتائج وعرضها كالاتي :

$g(1) = 2 \times 1 = 2$

$g(2) = 2 \times 2 = 4$

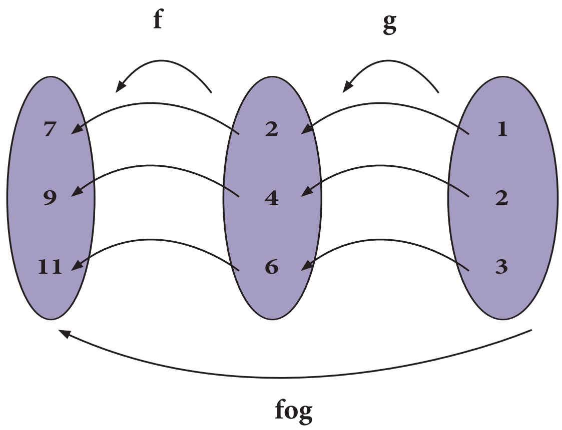
$g(3) = 2 \times 3 = 6$

وبنفس الطريقة يطلب ايجاد $f(x)$ ويثبت النتائج بالمخطط ايضاً

$f(2) = 2+5 = 7$

$f(4) = 4+5 = 9$

$f(6) = 6+5 = 11$



يوضح المدرس بان **fog** تعني تركيب التطبيق **f** بعد **g**

– ينبه الطلبة من المخطط ان

$$(fog)(1) = 7$$
$$(fog)(2) = 9$$
$$(fog)(3) = 11$$

ينتقل المدرس لكتابة تعريف تركيب التطبيقات $(fog)(x) = f\left(g(x)\right)$ ويشرح للطلبة بأن تركيب التطبيق يكون بفتح التركيب وادخال **g** القريبة على **x** وابقاء **f** بالخارج وعليه يكون

$(fog)(x) = f\left(g(x)\right)$ وعليه فان

$$(fog)(1) = 2\times 1 + 5 = 7$$
$$(fog)(2) = 2\times 2 + 5 = 9$$
$$(fog)(3) = 2\times 3 + 5 = 11$$

أي نفس النتائج من المخطط وعليه يتوقع ان يصل الطلبة الى فهم تركيب التطبيقات

- يطلب منهم حل التمارين وملاحظة حلولهم.

الاخطاء الشائعة ومعالجتها

يعتقد الطلبة ان $(fog) = (gof)$ على المدرس التوضيح بأن تركيب التطبيقات ليست عملية ابدالية بصورة عامة بمثال ويفضل عكس المثال اعلاه.

تمارين (1−1)

س1/ اذا كان B $\longrightarrow$ $r : A$ وكانت $A = \{a , b , c\}$ ، $B = \{3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$

1) $r = \{(a , 4) , (b , 7) , (c , 3)\}$

2) $r = \{(a , 3) , (b , 3) , (c , 3)\}$

اولاً: هل r تطبيقاً ولماذا؟ ثانياً: ارسم المخطط السهمي

س2/ اذا كانت A مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأصغر من 7

وكانت B مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر من 8

f علاقة من A الى B حيث $f(x) = x + 1$

أولاً: أرسم المخطط السهمي ثانياً: f يمثل تطبيقاً , لماذا ؟

س3/ اذا كانت $A = \{1 , 2 , -2 , -3\}$ وكان $g : A \longrightarrow Z$

جد مدى التطبيق اذا كان $g(x) = 5x - 3$.

س4/ لتكن A مجموعة المناطق الاثرية في العراق . حيث $A =$ {باب عشتار ، الحضر ، الملوية} ولتكن

$B =$ { كركوك ، الموصل ، البصرة ، ذي قار ، صلاح الدين ، بابل ، بغداد } .

وان $r : A \longrightarrow B$ انسب المناطق الاثرية لكل محافظة عراقية بمخطط سهمي تختاره .

12

س5/ اذا كان $f : N \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 2x + 8$

اولاً: اكتب مدى التطبيق

ثانياً: اذا كان $f(x) = 16$ فجد قيمة x

ثالثاً: اكتب مجموعة الازواج المرتبة التي تمثل التطبيق

س6/ اذا كانت $r = \{(1 , a) , (2 , b) , (3 , c) , (4 , d) , (5 , a)\}$

حيث $r : A \longrightarrow B$

1) جد كلاً من B , A .

2) أكتب مدى التطبيق.

3) ارسم المخطط السهمي.

س7/ اذا كان $f : A \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 2x^2 - x + 3$

حيث $A = \{1 , -1 , 0\}$

1) أكتب المدى.

2) اكتب مجموعة الازواج المرتبة التي تمثل التطبيق.

3) أرسم المخطط السهمي.

13

6 – حل التمرينات

حلول تمارين 1–1

س1/ اذا كان $r : A \longrightarrow B$ وكانت $A = \{a , b , c\}$ ، $B = \{3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$

$r = \{(a , 4) , (b , 7) , (c , 3)\}$

$r = \{(a , 3) , (b , 3) , (c , 3)\}$

اولاً : هل r تطبيقاً ولماذا؟ ثانياً : ارسم المخطط السهمي

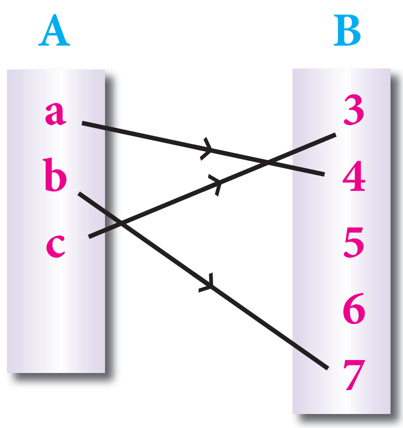
الحل /

اولاً :

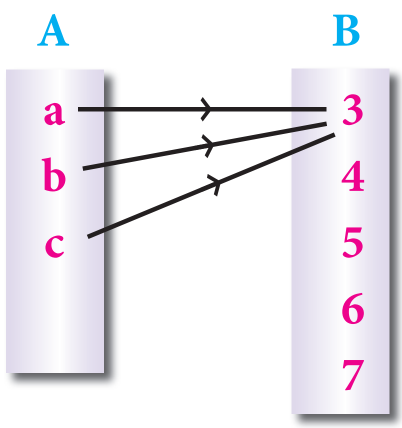
$r = \{(a , 4) , (b , 7) , (c , 3)\}$ تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في المجال A له صورة وحيدة في المجال المقابل B

$r = \{(a , 3) , (b , 3) , (c , 3)\}$ تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في المجال A ارتبط بعنصر واحد في المجال المقابل B وهو العدد 3

ثانياً :



(1)



(2)

س2/ اذا كانت A مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأصغر من 7

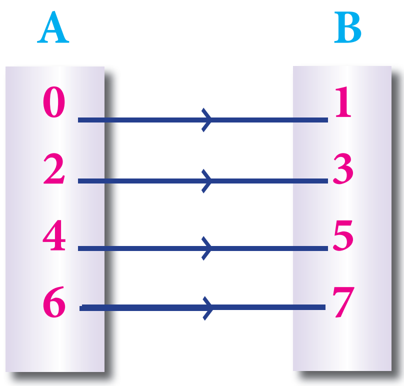
وكانت B مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر من 8

f علاقة من A الى B حيث $f(x) = x + 1$

أولاً : أرسم المخطط السهمي ثانياً : f يمثل تطبيقاً , لماذا ؟

الحل /

اولاً : $B = \{1 , 3 , 5 , 7\}$ ، $A = \{0 , 2 , 4 , 6\}$



$f(x) = x + 1$

$f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(4) = 4 + 1 = 5$

$f(6) = 6 + 1 = 7$

ثانياً : لان كل عنصر من A ارتبط بعنصر واحد من B

س3 / اذا كانت $A = \{1, 2, -2, -3\}$ وكان $g : A \longrightarrow Z$

جد مدى التطبيق اذا كان $g(x) = 5x - 3$.

الحل /

$g(x) = 5x - 3$

$g(1) = 5(1) - 3 = 2$

$g(2) = 5(2) - 3 = 7$

$g(-2) = 5(-2) - 3 = -13$

$g(-3) = 5(-3) - 3 = -18$

مدى التطبيق = $\{2, 7, -13, -18\}$

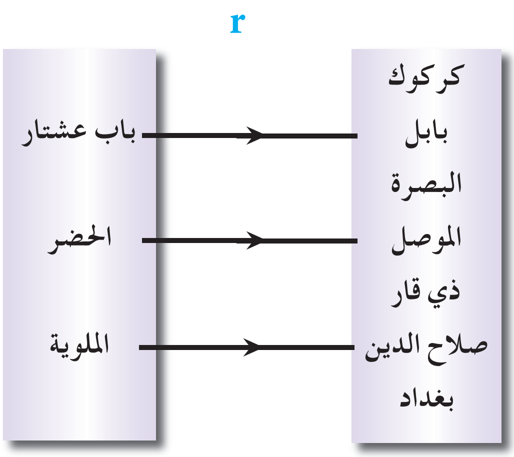
س4 / لتكن A مجموعة المناطق الاثرية في العراق . حيث A = {باب عشتار ، الحضر ، الملوية} ولتكن

B = { كركوك ، الموصل ، البصرة ، ذي قار ، صلاح الدين ، بابل ، بغداد } .

وان $r : A \longrightarrow B$ انسب المناطق الاثرية لكل محافظة عراقية بمخطط سهمي تختاره.

ملاحظة / على المدرس ان يذكر بالمخططات السهمية لطلبته ثم يختار منها مخطط سهمي.

الحل /



س5/ اذا كان $f : N \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 2x + 8$

اولاً: اكتب مدى التطبيق .

ثانياً: اذا كان $f(x) = 16$ فجد قيمة x .

ثالثاً: اكتب مجموعة الازواج المرتبة التي تمثل التطبيق.

الحل /

$f(x) = 2x + 8$

$f(0) = (2)(0) + 8 = 8$

$f(1) = (2)(1) + 8 = 10$

$f(2) = (2)(2) + 8 = 12$

$f(3) = (2)(3) + 8 = 14$

$\vdots \qquad \vdots$

اولاً: المدى = $\{8, 10, 12, 14, \dots\}$

ثانياً:

$f(x) = 16$

$2x + 8 = 16$

$2x = 16 - 8 \quad [\div 2]$

$x = 4 \in N$

ثالثاً: $f = \{(0,8), (1,10), (2,12), (3,14), \dots\}$

س6/ اذا كانت $r = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d), (5,a)\}$

حيث $r : A \longrightarrow B$

1) جد كلاً من A, B .

2) أكتب مدى التطبيق.

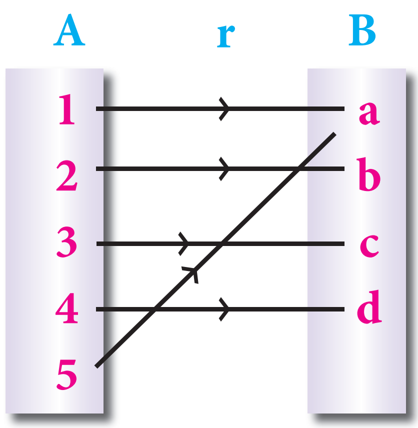
3) ارسم المخطط السهمي.

الحل /

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

المدى = $\{a, b, c, d\}$



س7 / اذا كان $f: A \longrightarrow Q$ ، $f(x) = 2x^2 - x + 3$

حيث $A = \{1, -1, 0\}$

1) أكتب المدى.

2) اكتب مجموعة الازواج المرتبة التي تمثل التطبيق.

3) أرسم المخطط السهمي.

الحل / 1)

$f(x) = 2x^2 - x + 3$

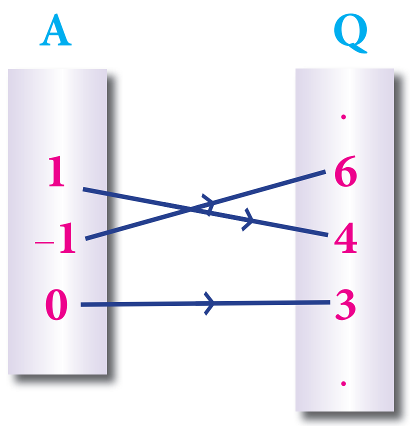
$f(1) = 2(1)^2 - 1 + 3 = 4$

$f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) + 3 = 6$

$f(0) = 2(0)^2 - 0 + 3 = 3$

2) المدى = $\{3, 4, 6\}$

3) $f = \{(1,4), (-1,6), (0,3)\}$



س1/ اذا كان $g : Z \longrightarrow N$ حيث $g(x) = x^2 + 3$

* اكتب g بذكر عناصرها على شكل ازواج مرتبة .

* اكتب المدى .

* بين نوع التطبيق .

س2/ اذا كان $f : N \longrightarrow N$ حيث $f(x) = 5x + 2$

$g : N \longrightarrow N$ حيث $g(x) = x + 3$

* اكتب fog بذكر الازواج المرتبة .

* مدى fog .

* بين نوع التطبيق fog.

س3/ اذا كان $f : Q \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 6x - 1$

$g : Q \longrightarrow Q$ حيث $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

جد قيمة x اذا علمت ان $(fog)(x) = 17$.

س4/ اذا كان $f : Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = x^3$

$g : Z \longrightarrow Z$ حيث $g(x) = 7$

فأن: * $(fog)(-1)$ يساوي : 7 ، 7- ، 343 ، 49-

* $(gof)(-1)$ يساوي : 7 ، 7- ، 1- ، 1

س5/ اذا كان $f : Q \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 3x + 4$

$g : Q \longrightarrow Q$ حيث $g(x) = 1 - 2x$

* جد $(fog)(3)$ ، $(gog)(x)$

* اذا كان $(gof)(x) = -43$ فجد قيمة x .

س6/ اذا كان $f : \{1, 2, 3, ...\} \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = 4x - 3$

1) اكتب مدى التطبيق .

2) بيان التطبيق f بذكر عناصره .

3) نوع التطبيق.

4) اذا كان $f(x) = 53$ جد قيمة x .

5) اذا كان $(fof)(x) = 1$ جد قيمة x .

حلول تمارين 2-1

س1 / اذا كان $g : Z \longrightarrow N$ حيث $g(x) = x^2 + 3$

1) اكتب g بذكر عناصرها على شكل ازواج مرتبة .

2) اكتب المدى.

3) بين نوع التطبيق.

الحل / 1)

$$g(x) = x^2 + 3$$

$$\vdots$$

$$g(-3) = (-3)^2 + 3 = 12$$
$$g(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$$
$$g(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$$
$$g(0) = (0)^2 + 3 = 3$$
$$g(1) = (1)^2 + 3 = 4$$
$$g(2) = (2)^2 + 3 = 7$$
$$g(3) = (3)^2 + 3 = 12$$

$$\vdots$$

$$g = \{ .., (-3, 12), (-2, 7), (-1, 4), (0, 3), (1, 4), (2, 7), (3, 12), .. \}$$

2) المدى = $\{3, 4, 7, 12, \ldots\}$

3) * ليس شاملاً لأن المدى ≠ المجال المقابل

ملاحظة للمدرس : يوضح بأن $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ تمثل المجال المقابل

* ليس متبايناً لأن $3 \neq -3$ ولكن $g(-3) = g(3) \Rightarrow 12 = 12$

ملاحظة للمدرس : يوضح المدرس لطلبته اذا وجد على الاقل عنصرين مختلفين في المجال لهما نفس الصورة في المجال المقابل.

اي التطبيق ليس تقابلاً لأنه لايحقق الشرطين

س2 / اذا كان $f : N \longrightarrow N$ حيث $f(x) = 5x + 2$

$g : N \longrightarrow N$ حيث $g(x) = x + 3$

* اكتب fog بذكر الازواج المرتبة .

* مدى fog .

* بين نوع التطبيق fog.

الحل /

$(fog)(x) = f[g(x)]$ .... قانون

$(fog)(0) = f[g(0)]$

$= f[0+3] = f(3) = 5(3) + 2 = 17$

$(fog)(1) = f[g(1)] = f[1+3] = f(4) = 5(4) + 2 = 22$

$(fog)(2) = f[g(2)] = f[2+3] = f(5) = 5(5) + 2 = 27$

* $(fog) = \{(0, 17), (1, 22), (2, 27), ..\}$

المدى = $\{17, 22, 27, ...\}$

التطبيق (fog) ليس شاملاً لان المدى ≠ المجال المقابل

التطبيق (fog) متبايناً لان $(fog)(x) = f(x+3) = 5(x+3) + 2 = 5x + 17$

التطبيق (fog) ليس تقابلاً

س3 / اذا كان $f : Q \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 6x - 1$

$g : Q \longrightarrow Q$ حيث $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

جد قيمة x اذا علمت ان $(fog)(x) = 17$.

الحل /

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$= f(\frac{1}{2}x^2 + 1)$

$= 6(\frac{1}{2}x^2 + 1) - 1$

$= 3x^2 + 6 - 1 = 3x^2 + 5$

$\therefore 3x^2 + 5 = 17$

$3x^2 = 17 - 5$

$3x^2 = 12 \quad [\div 3]$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \in Q$

س 4 / اذا كان $f: Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = x^3$

$g: Z \longrightarrow Z$ حيث $g(x) = 7$

فأن: $(fog)(-1)$ يساوي: 7 ، -7 ، 343 ، -49

$(gof)(-1)$ يساوي: 7 ، -7 ، -1 ، 1

الحل /

$(fog)(-1) = f[g(-1)] = f(7) = (7)^3 = 343$

$(gof)(-1) = g[f(-1)] = g(-1) = 7$

س 5 / اذا كان $f: Q \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 3x + 4$

$g: Q \longrightarrow Q$ حيث $g(x) = 1-2x$

- جد $(fog)(3)$, $(gog)(x)$

- اذا كان $(gof)(x) = -43$ فجد قيمة x .

الحل /

$(fog)(3) = f[g(3)] = f[1-(2)(3)] = f(-5) = 3(-5) + 4 = -15+4 = -11$

$(gog)(x) = g[g(x)] = g(1-2x) = 1-2(1-2x) = 1-2-4x = -1-4x$

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(3x+4) = 1-2(3x+4) = -6x-7 = -43 \Rightarrow 6x=36$

$x=6 \in Q$

س 6 / اذا كان $f: \{1, 2, 3, ...\} \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = 4x-3$

1) اكتب مدى التطبيق .

2) بيان التطبيق f بذكر عناصره .

3) نوع التطبيق .

4) اذا كان $f(x) = 53$ جد قيمة x .

5) اذا كان $(fof)(x) = 1$ جد قيمة x .

الحل /

$f(x) = 4x - 3$

$f(1) = 4(1) - 3 = 1$

$f(2) = 4(2) - 3 = 5$

$f(3) = 4(3) - 3 = 9$

$\vdots$

1) المدى = $\{1, 5, 9, ...\}$

2) $f = \{(1,1), (2,5), (3,9), ...\}$

3) ليس شاملاً ، متبايناً ، ليس تقابلاً

4) $f(x) = 4x - 3$

$4x - 3 = 53$

$4x = 53 + 3$

$4x = 56 \quad [\div 4]$

$x = 14 \in Z$

5) $(fof)(x) = 1$

$f(f(x)) = 1$

$f(4x - 3) = 1$

$4(4x - 3) - 3 = 1$

$16x - 15 = 1$

$16x = 1 + 15$

$16x = 16 \quad [\div 16]$

$x = 1 \in Z$

كل ماورد في الخلفية العلمية من امثلة أو أسئلة للمدرس فقط

7 – التقويم

* تمارين أثرائية للمدرس فقط :

1 – لتكن : $f(x) = A - x$, A ثابت ، بين ان : $(fof)(x) = x$

2 – اذا كانت : $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x - 1$ وكانت $(gof)(b) = b - 1$ جد قيمة b .
حيث $f : N \to N$, $g : N \to Z$, $b, x \in N$. الجواب : $b = 0, 2$

3 – اذا كانت : $f(x) = 3 - x$, $g(x) = x + 1$ هل ان (gof) تقابل ، بين ذلك
$f : Z \to Z$, $g : Z \to Z$ الجواب :تقابل

4 – اذا كانت : $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$ جد $a \in Z$ اذا كانت : $(fog)(a) = a^2$
$f : Z \to Z$, $g : Z \to Z$. الجواب : $a = \pm 1$

* اسئلة تحصيل للطالب

1 – لتكن $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = x^2 - 2$, $g : Z \to Z$
حيث $g(x) = 2 - x$ وكانت $(gof)(a) = 3$ جد $a \in Z$

2 – لتكن $f : Q \to Q$, $g : Q \to Q$ حيث $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 + x$ اثبت ان
$(gof)\left(\frac{-1}{2}\right) = (fog)\left(\frac{-1}{2}\right)$

2 الفصل الثاني

الأعداد الحقيقية

Real Numbers

[1 – 2] الحاجة الى المزيد من الاعداد .

[2 – 2] خواص الاعداد الحقيقية .

[3 – 2] الجذور التربيعية .

[4 – 2] الجذور التكعيبية .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الاعداد الحقيقية	**R**
الاعداد النسبية	**Q**
الاعداد غير النسبية	**H**
الجذر التربيعي	$\sqrt{\ }$
الجذر التكعيبي	$\sqrt[3]{\ }$

1 - تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الاعداد النسبية Q.
- الاعداد غير النسبية H
- مجموعة الاعداد الحقيقية R.
- خواص الاعداد الحقيقية.
- العمليات على الاعداد الحقيقية.
- الجذور التربيعية.
- الجذور التكعيبية.

الحقائق والتعميمات

- كل عدد حقيقي يمكن ان يُمثل بنقطة من نقاط المستقيم.
- مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي .... خاصية الانغلاق مع عملية الجمع
- حاصل ضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي.... خاصية الانغلاق مع عملية الضرب.
- لاي عددين حقيقيين a,b فأن $a+b=b+a$ .... خاصية الابدال مع عملية الجمع.
- لاي عددين حقيقيين a,b فأن $a-b=a+(-b)$ .... خاصية النظير الجمعي
- لاي عددين حقيقيين a,b فأن $a.b=b.a$ .... خاصية الابدال مع عملية الضرب .
- لاي عدد حقيقي a فأن $a+0=0+a=a$ العنصر المحايد الجمعي هو الصفر. (**Identity Element**)
- لاي عدد حقيقي a فأن $a.1=1.a=a$ العنصر المحايد الضربي هو 1.
- النظير الجمعي للعدد a هو $-a$ حيث $a+(-a)=(-a)+a=0$
- النظير الضربي للعدد $a\neq0$ ، a هو $\frac{1}{a}$ حيث $a\times(\frac{1}{a})=(\frac{1}{a})\times a=1$
- لاي من الاعداد الحقيقية a,b,c

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (الخاصية التجميعية)

$(a.b).c=a.(b.c)$ (الخاصية التجميعية)

$a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$ (الخاصية التوزيعية)

$a.(b-c)=(a.b)-(a.c)$ (الخاصية التوزيعية)

- لاي من الاعداد الحقيقية a,b,c ، $c\neq0$ ، $b\neq0$

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}$$

- خاصية العامل الصفري : اذا كان $a.b = 0$ فأن $a = 0$ او $b = 0$.

- لاي عددين حقيقيين a,b $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ والعكس صحيح حيث $b \geq 0$, $a \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ، $a \geq 0$ ، $b>0$ والعكس صحيح

$\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$ ، $a \geq 0$ والعكس صحيح

- اذا كان $a>0$ فأن $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

الخوارزميات والمهارات

- يجمع عددين حقيقيين .
- يطرح عدداً حقيقياً من اخر .
- يضرب عدداً حقيقياً في اخر .
- يقسم عدداً حقيقياً على اخر .
- يعين الجذر التربيعي لعدد حقيقي غير سالب .
- يعين الجذر التكعيبي لعدد حقيقي .

2 - الاهداف السلوكية

في نهاية هذا الفصل ينبغي ان يكون الطالب قادراً على ان :

- يتعرف على العدد النسبي .
- يتعرف على العدد الحقيقي .
- يميز بين العدد الحقيقي الموجب والعدد الحقيقي السالب .
- يميز بين مجموعة الاعداد النسبية وغير النسبية
- يمثل العدد الحقيقي على مستقيم الاعداد .
- يجمع عددين حقيقيين .
- يذكر خواص عملية الجمع على الاعداد الحقيقية .
- يوظف خاصيتي الابدال والتجميع لايجاد ناتج جمع ثلاثة اعداد او اكثر .
- يعين النظير الجمعي للعدد الحقيقي .
- يذكر قاعدة طرح عدد حقيقي من اخر .
- يطرح عددا حقيقيا من اخر .
- يذكر قاعدة ضرب عدد حقيقي في اخر .
- يضرب عددا حقيقيا في اخر .
- يذكر خواص عملية الضرب في الاعداد الحقيقية .
- يوظف خواص الابدال والتجميع والتوزيع لايجاد نواتج العمليات .

- يعين النظير الضربي للعدد الحقيقي.
- يذكر قاعدة قسمة عدد حقيقي على اخر.
- يقسم عددا حقيقيا على اخر.
- يعين الجذر التربيعي لعدد حقيقي غير سالب.
- يعين الجذر التكعيبي لعدد حقيقي.

3 - خلفية علمية للمدرس

ظهرت الحاجة للاعداد الحقيقية من خلال العمليات الرياضية المتنوعة ومنها حل المعادلات فمثلاً المعادلة $x - 5 = 0$ قيمة x التي تحقق المعادلة هي 5 وهي تنتمي الى مجموعة الاعداد الطبيعية **N** .

بينما المعادلة $x + 5 = 0$ فان قيمة $x = -5$ وهي لاتنتمي الى **N** بل تنتمي الى مجموعة الاعداد الصحيحة **Z** .

وينطبق ذلك على المعادلة $3x - 7 = 0$ حيث $x = \frac{7}{3}$ وهي لاتنتمي الى **N** او **Z** بل ينتمي الى مجموعة الاعداد النسبية $Q = \left\{\frac{a}{b}, a,b \in Z, b \neq 0\right\}$

اما المعادلة $x^2 - 3 = 0$ حيث قيم $x = \pm\sqrt{3}$ ومعلوم ان $\pm\sqrt{3}$ لاتنتمي الى اي من المجموعات السابقة.

هنا ظهرت الحاجة لوجود مجموعة ينتمي اليها مثل هذه الاعداد فكان مجموعة الاعداد الحقيقية **R** .

من ذلك نستنتج ان : $N \subset Z \subset Q \subset R$

يمكن تعريف الاعداد الحقيقية بأنها الاعداد التي يمكن التعبير عنها بكسور عشرية منتهية او دورية او دورية غير منتهية. اما الاعداد التي تنتمي الى **R** ولايمكن التعبير عنها باعداد نسبية فتدعى بالاعداد غير النسبية.

من ذلك فان مجموعة الاعداد الحقيقية هي اتحاد مجموعتي الاعداد النسبية وغير النسبية .

$(R,+,\times)$ يمثل حقل الاعداد الحقيقية وخواص هذا الحقل ذكرت في الكتاب المقرر بند (2-2-2) صفحة (34).

في صفحة (35) قواعد ضرب الاشارات . في هذه الخلفية سنعطي برهان لهذه الخواص.

البرهان :

1) $-(-a) = a$

$a \in R \Rightarrow -a \in R$

لذا فان النظير الجمعي للعدد $(-a)$ هو $-(-a)$

$(-a) + (-(-a)) = 0 \quad ....(1)$

$(-a) + (a) = 0 \quad ....(2)$

من (1) و(2) نجد ان $-(-a) = a$

$2)\ a(-b) = -(ab)$

البرهان

$$a(-b) = a((-1)b)$$
$$= (-1)(ab)$$
$$\therefore a(-b) = -(ab)$$

$3)\ (-a)(-b) = ab$

البرهان :

يترك البرهان للمدرس

القيمة المطلقة للاعداد الحقيقية

اذا كان $a \in R$ فان القيمة المطلقة للعدد a يرمز لها $|a|$ وتعرف كالاتي :

$$|a| = \begin{cases} a, & \forall a \geq 0 \\ -a, & \forall a < 0 \end{cases}$$

ويمكن ان نضع $\sqrt{a^2}$ بشكل آخر حيث

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \forall a \geq 0 \\ -a, & \forall a < 0 \end{cases}$$

لاحظ ان $-2 \neq \sqrt{(-2)^2}$ بينما $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

بصورة عامة $\sqrt{a} \geq 0 \ ,\ \forall a \geq 0$

زميلنا المدرس يجب التمييز بين $\sqrt{9}$ الذي يساوي (3) فقط بينما $a^2 = 9$ فان قيمة $a = \pm 3$

اما في حالة الجذور الفردية فإن :

$$\sqrt[3]{4^3} = 4 \quad , \quad \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \quad , \quad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

وهكذا وبصورة عامة فإن $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

اما القاعدة العامة للجذور فهي

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n = \text{عدد زوجي} \\ a, & n = \text{عدد فردي} \end{cases}$$

عند التطرق لمجموعة الاعداد النسبية Q يجب عدم الخوض في مسألة القسمة على الصفر :

في هذه الحالة سنناقش الان ثلاث حالات يدخل الصفر فيها وهي للمدرس فقط

$\star\ \dfrac{0}{a} = 0 \ldots\ldots (a \neq 0)$ حيث 0 هو العدد الوحيد الذي يضرب في a فيكون الناتج يساوي 0 .

$\star\ \dfrac{a}{0}$ لايوجد عدد يضرب في 0 يكون الناتج a

وتدعى $\frac{a}{0}$ غير محددة (معرفة)

او (∞) مع التأكيد ان (∞) رمز فقط (للتأكيد ∞ ليس عدد

$\frac{0}{0}$ *

هنا توجد مجموعة غير محددة من الاعداد التي اذا ضربت في **0** كان الناتج يساوي **0** .

اي غير معينة (**Inderminate**)

4 – المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

تهيئة الطلبة :

في البدء يوضح المدرس ان كل مشكلة حسابية واجهتنا دعت الى مجموعة جديدة من الاعداد وكل مجموعة تحوي التي قبلها .

ويقدم المثال الاتي :

قطعة ارض مربعة الشكل مساحتها **400** متر مربع بجانبها قطعة ارض صغيرة مساحتها **23** متر مربع ماطول ضلع كل من قطعتي الارض ؟

– يطلب من الطلبة حل السؤال بدفاترهم

– يكتب نتائج الطلبة على السبورة ويناقشها

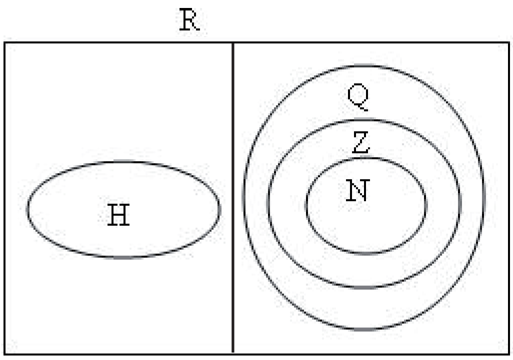
– يذكر للطلبة ان طول ضلع القطعة الاولى هو $\sqrt{400}$ اي 20 متراً اما طول ضلع القطعة الثانية هو $\sqrt{23}$

هنا يوضح المدرس ان 23 عدد نسبي اما $\sqrt{23}$ فهو عدد غير نسبي

– يطلب من الطلبة تعريف العدد النسبي

– يتطرق المدرس لتعريف الاعداد غير النسبية

5 – تدريس الموضوع



يوضيح المدرس ان الاعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية وغير النسبية مجموعات متداخلة ضمن مجموعة الاعداد الحقيقية .

أي ان مجموعة الاعداد الحقيقية هي اتحاد مجموعة الاعداد النسبية ومجموعة الاعداد غير النسبية .

نتيجة

– كل عدد طبيعي هو عدد صحيح ونسبي وحقيقي

– كل عدد صحيح هو عدد نسبي وحقيقي

– كل عدد نسبي عدد حقيقي

– كل عدد غير نسبي هو عدد حقيقي

لمعلوماتك

أبي الحسن القلصادي، أبرز علماء القرن التاسع الهجري، الخامس عشر الميلادي (815 - 891هـ ، 1412 - 1486م). وهو عالم بالحساب وفقيه، ومن أفضال القلصادي في علم الرياضيات إيجاده ظاهرة الاختزال واعتماده على الرموز في الحساب والجبر والمعادلات والمجاهيل. ثم مضى في أثره أحمد بن غازي المكناسي (841 - 919هـ ، 1477 - 1512م) فزاد في هذا المجال، وهكذا رمز للشيء وهو العدد المجهول بحرف ش = شيء الذي تم اختزاله ليغدو بعده (س)، وهو ما نستعمله إلى اليوم، واستعمل الغرب مقابله حرف S أو X، والرمز: ك = مكعب كما رمز للمجموع بحرف ل وهو مختصر من اصطلاح (المال) الذي يعني حصيلة الجمع عند العلماء العرب. كذلك اتخذ حرف ج = الجذر التربيعي، وكان يوضع في أعلى العدد. ثم طرأ تعديل على حرف جـ أي رمز الجذر، بعد أن انتقل إلى فرنسا فحوّل علماء الغرب زاويته إلى الأعلى وزاد عليه خطاً أفقياً على هذا النحو $\sqrt{}$ وبذلك استقر هذا الرمز وغدا عالمياً.

خواص الجذور

- دع الطلبة يكتشفون خواص الجذور بأنفسهم
- اعط المثال الاتي ليجد الطلبة الناتج

1) $\sqrt{0.81\times0.49}$ ، 2) $\sqrt{0.49\times0.81}$

حل المثال الاول :

$$\sqrt{0.81\times0.49}=\sqrt{(0.9)^2\times(0.7)^2}$$
$$=\sqrt{(0.9\times0.7)^2}$$
$$=0.9\times0.7=0.63$$

وعند حل المثال الثاني :

$$\sqrt{0.49}\times\sqrt{0.81}=0.7\times0.9=0.63$$

- اعط امثلة مشابهة ودع الطلبة يلاحظون تساوي النتائج ليتوصلوا للخاصية

لاي عددين حقيقيين **a,b**

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$ والعكس صحيح حيث $a\ge0$, $b\ge0$.

وبنفس الطريقة دع الطلبة يتوصلون لبقية الخواص

- عندما يكون لدينا مثلاً $\sqrt{0.16}$ احياناً يخطأ الطالب

ويكتب الناتج 0.8 او 0.04 لذلك يفضل توضيحه للطالب بأن الحل يكون بتحويل الكسر العشري الى صورة بسط ومقام مرفوعاً للاس 2 وايجاد قيمة الجذر بصورة صحيحة كالاتي :

$$\sqrt{0.16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

- التأكيد على ان عملية الطرح ليست ابدالية على مجموعة الاعداد الحقيقية أي ان

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

- لايجوز توزيع الجذرالتربيعي او التكعيبي على عمليتي الجمع والطرح كما يلي

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{a-b} \neq \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$$

ويمكن حل بعض الامثلة لتوضيح ذلك للطلبة

مثلاً :

$$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$5 \neq 3 + 4$$

$$5 \neq 7$$

تمارين (2-1)

س1 / ضع كل مما يأتي في ابسط صورة :

a) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{7} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{7}$

س2 / ضع كل مما يأتي في ابسط صورة :

a) $3\sqrt{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{3})$

b) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})$

c) $(4\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$

d) $\left(1-\sqrt{2}\right)^3$

e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

س3 / بين صحة او خطأ العبارات الاتية :

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

c) $\left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$

d) $\sqrt{12} = 2\sqrt{6}$

س4 / جد a^2 ، حيث $b \neq 0$ ، $\frac{a^2}{b}$ ، a^2b في كل مما يأتي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً :

a) $a = 2\sqrt{2}\ ,\ b = \sqrt{3}$

b) $a = -4\sqrt{3}\ ,\ b = -\sqrt{2}$

c) $a = \sqrt{2} - 2\ ,\ b = \sqrt{3}$

40

س5 / اختصر المقادير الاتية :-

a) $\sqrt{48} - 3\sqrt{75} - 2\sqrt{12}$

b) $\sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{\frac{1}{5}}$

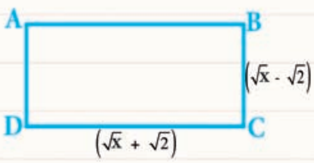
c) $2\sqrt{63} - 2\sqrt{\frac{1}{7}} - 3\sqrt{28}$

d) $5\sqrt{\frac{3}{10}} + 2\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{\frac{15}{32}}$

س6 / a) جد قيمة المقدار الاتي : $4x^2 - 2x + 5$ اذا كانت قيمة x هي :

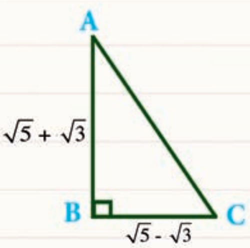
$$\sqrt{5}\ ,\ 1-\sqrt{2}\ ,\ \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})$$

b) جد قيمة x في الشكل المجاور اذا كانت مساحة المستطيل ABCD تساوي $14\ cm^2$



حيث $x > 2$

c) جد مساحة المثلث ABC



41

6 – حل التمرينات

حلول تمارين 1-2

س1 : ضع كل مما يأتي في ابسط صورة :

الحل :

a) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

$=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)+\left(5\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)$

$=3\sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{7}-\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{7}$

$=\left(\frac{1}{4}\sqrt{7}+\frac{3}{4}\sqrt{7}\right)-\frac{3}{2}\sqrt{5}$

$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{7}-\frac{3}{2}\sqrt{5}$

$=\frac{4}{4}\sqrt{7}-\frac{3}{2}\sqrt{5}$

$=\sqrt{7}-\frac{3}{2}\sqrt{5}$

س2 : ضع كل مما يأتي في ابسط صورة :

الحل :

a) $3\sqrt{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=(12)(2)-3\sqrt{6}$

$=24-3\sqrt{6} \;\; =3\left(8-\sqrt{6}\right)$

b) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) \;\; \left(3\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)$

$=(6)(3)-4\sqrt{15}+3\sqrt{15}-(2)(5)$

$=18-\sqrt{15}-10$

$=8-\sqrt{15}$

c) $\left(4\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$

$=\left(4\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$

$=(16)(6)-4\sqrt{18}-4\sqrt{18}+3$

$= 99 - 8\sqrt{18}$

$= 99 - 8\sqrt{(9)(2)}$

$= 99 - (8)\sqrt{9}.\sqrt{2}$

$= 99 - (8)(3)\sqrt{2}$

$= 99 - 24\sqrt{2} = 3\left(33 - 8\sqrt{2}\right)$

ممكن حل السؤال بطريقة اخرى

$\left(4\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 - (2)(4)\sqrt{6}.\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$

نكمل الحل ....

d) $\left(1 - \sqrt{2}\right)^3$

$= \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 \left(1 - \sqrt{2}\right)$

$= \left[1 - 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2\right]\left(1 - \sqrt{2}\right)$

$= \left(1 - 2\sqrt{2} + 2\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)$

$= \left(3 - 2\sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)$

$= 3 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4$

$= 7 - 5\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

$= \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right]$

$= \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left[3 - 2\right] \ldots\ldots\ldots \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$

$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$

حل آخر : يمكن فك الاقواس واكمال الحل:

$\left(3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

س3 : بين صحة أو خطأ العبارات الآتية

a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ ✗

b) $\sqrt{8}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ ✓

c) $\left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$ ✗

d) $\sqrt{12}=2\sqrt{6}$ ✗

س4 : جد a^2 ، حيث $b\neq 0$, $a^2b,\dfrac{a^2}{b}$ في كل مما يأتي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً

الحل :

a) $a=2\sqrt{2} \quad , \quad b=\sqrt{3}$

$$\frac{a^2}{b}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{3}}=\frac{(4)(2)}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$a^2b=\left(2\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}=(4)(2)\sqrt{3}$$

$$=8\sqrt{3}$$

b) $a=-4\sqrt{3} \quad , \quad b=-\sqrt{2}$

$$\frac{a^2}{b}=\frac{\left(-4\sqrt{3}\right)^2}{-\sqrt{2}}=\frac{(16)(3)}{-\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-48\sqrt{2}}{2}=-24\sqrt{2}$$

$$a^2b=\left(-4\sqrt{3}\right)^2.\left(-\sqrt{2}\right)=(16)(3).\left(-\sqrt{2}\right)$$

$$=-48\sqrt{2}$$

c) $a=\sqrt{2}-2 \quad , \quad b=\sqrt{3}$

$$\frac{a^2}{b}=\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}{\sqrt{3}}=\frac{2-4\sqrt{2}+4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(6-4\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}\left(3-2\sqrt{2}\right)}{3}$$

$$a^2b=\left(\sqrt{2}-2\right)^2.\left(\sqrt{3}\right)=\left(2-4\sqrt{2}+4\right)\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

س5 : اختصر المقادير الآتية :

الحل :

a) $\sqrt{48}-3\sqrt{75}-2\sqrt{12}$

$=\sqrt{(16)(3)}-3\sqrt{(25)(3)}-2\sqrt{(4)(3)}$

$=\sqrt{16}.\sqrt{3}-3\sqrt{25}.\sqrt{3}-2\sqrt{4}.\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}-(3)(5)\sqrt{3}-(2)(2)\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}-15\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=-15\sqrt{3}$

b) $\sqrt{20}-12\sqrt{5}-5\sqrt{\frac{1}{5}}$

$=\sqrt{(4)(5)}-12\sqrt{5}-5\sqrt{\frac{1}{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$=2\sqrt{5}-12\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{5}}{5}$

$=2\sqrt{5}-12\sqrt{5}-\sqrt{5}$

$=-11\sqrt{5}$

c) $\sqrt{63}-7\sqrt{\frac{1}{7}}-3\sqrt{28}$

$=\sqrt{(9)(7)}-7\sqrt{\frac{1}{7}}.\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}-3\sqrt{(4)(7)}$

$=3\sqrt{7}-7.\frac{\sqrt{7}}{7}-6.\sqrt{7}$

$=3\sqrt{7}-\sqrt{7}-6\sqrt{7}$

$=-4\sqrt{7}$

d) $5\sqrt{\frac{3}{10}}+2\sqrt{\frac{5}{6}}-\sqrt{\frac{15}{32}}$

$=5\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}+2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{32}}$

$=5\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}.\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$= 5\frac{\sqrt{30}}{10} + \frac{2\sqrt{30}}{6} - \frac{\sqrt{30}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{30}}{2} + \frac{2\sqrt{30}}{6} - \frac{\sqrt{30}}{8} = \frac{17\sqrt{30}}{24}$$

س6 : (a) جد قيمة المقدار الاتي $4x^2 - 2x + 5$ اذا كانت قيمة **x** هي:

$$\sqrt{5} \quad , \quad 1-\sqrt{2} \quad , \quad \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

الحل:

$$x = \sqrt{5}$$

$$= 4\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\left(\sqrt{5}\right) + 5$$

$$= (4)(5) - 2\sqrt{5} + 5$$

$$= 20 - 2\sqrt{5} + 5 = 25 - 2\sqrt{5}$$

$$x = 1 - \sqrt{2}$$

$$4\left(1-\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(1-\sqrt{2}\right) + 5$$

$$= 4\left(1 - 2\sqrt{2} + 2\right) - 2 + 2\sqrt{2} + 5$$

$$= 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right) - 2 + 2\sqrt{2} + 5$$

$$= 12 - 8\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 5$$

$$= 15 - 6\sqrt{2} \quad = 3\left(5 - 3\sqrt{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

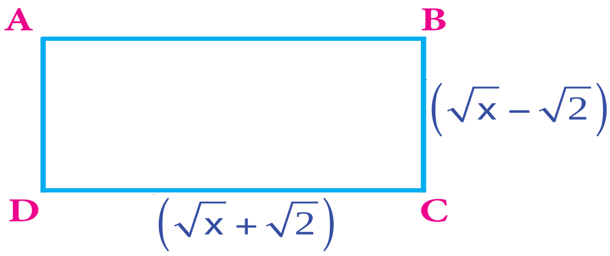
$$4\left[\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2 - 2\left[\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)\right] + 5$$

$$= 4\left[\frac{1}{4}\left(4 - 4\sqrt{3} + 3\right)\right] - \left[\left(2-\sqrt{3}\right)\right] + 5$$

$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 2 + \sqrt{3} + 5$$

$$= 10 - 3\sqrt{3}$$

b) جد قيمة x في الشكل المجاور اذا كانت مساحة المستطيل ABCD تساوي $14cm^2$ حيث $x > 2$



الحل :

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$= \left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$$

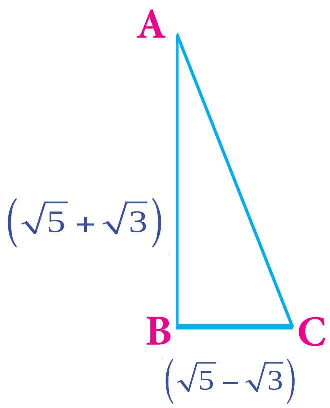
$$x+\cancel{\sqrt{2}\sqrt{x}}-\cancel{\sqrt{2}\sqrt{x}}-2=14$$

$$x-2=14$$

$$\therefore x=14+2$$

$$x=16$$

c) جد مساحة المثلث ABC



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(5+\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{\sqrt{15}}-3\right)$$

وحدة مربعة $1 = \frac{1}{2}(2)$

تمارين (2-2)

س1 / اختصر المقادير التالية :

a) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-24}-3\sqrt[3]{\frac{-1}{9}}$

b) $7\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{-16}+4\sqrt[3]{-128}$

c) $\sqrt[3]{32}+2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-(\sqrt[3]{-2})^2$

س2 / جد ناتج $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$

س3 / في الشكل المجاور : مكعب طول ضلعه $2\sqrt[3]{3}$ cm جد حجمه ومساحته الكلية .

س4 / متوازي سطوح مستطيلة ابعاده : $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$, $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$ وحدة طول

جد حجمه في ابسط صورة .

س1 : اختصر المقادير التالية

a) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-24}-3\sqrt[3]{\frac{-1}{9}}$

$\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+3\sqrt[3]{\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{3}}$

$=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\frac{3}{27}}$

$=5\sqrt[3]{3}+\frac{\cancel{3}\sqrt[3]{3}}{\cancel{3}}$

$=6\sqrt[3]{3}$

b) $7\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{-16}+4\sqrt[3]{-128}$

$=7\sqrt[3]{(27)(2)}+\sqrt[3]{(8)(2)}-4\sqrt[3]{(64)(2)}$

$$= 21\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$$

c) $\sqrt[3]{32} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \left(\sqrt[3]{(-2)^2}\right)^2$

$$= \sqrt[3]{(8)(4)} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4}} - \left(\sqrt[3]{4}\right)^2$$

$$= 2\sqrt[3]{4} + \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\cancel{\sqrt[3]{8}}} - \sqrt[3]{16}$$

$$= \cancel{2\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} - \cancel{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$$

س2 : جد ناتج $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$

الحل :

$$\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$$

$$= \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$$

$$= 2 + 1 = 3$$

س3 : في الشكل مكعب طول ضلعه $2\sqrt[3]{3}$ **cm** جد حجمه ومساحته الكلية

الحل :

حجم المكعب = (طول الضلع) × (طول الضلع) × (طول الضلع)

$$= \left(2\sqrt[3]{3}\right)\left(2\sqrt[3]{3}\right)\left(2\sqrt[3]{3}\right) = 8\sqrt[3]{(3)^3}$$

$$= (8)(3) = 24\text{cm}^3$$

المساحة الكلية = **6** × مساحة وجه واحد

$$= 6\left[\left(2\sqrt[3]{3}\right)\left(2\sqrt[3]{3}\right)\right] = 24\sqrt[3]{9}\ \textbf{cm}^2$$

س4 : متوازي سطوح مستطيلة ابعاده $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$, $\frac{6}{\sqrt[3]{(3)}}$ وحدة طول جد حجمه في ابسط صورة

الحل :

الحجم $= \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{5}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{6}{\sqrt[3]{3}} = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{5}{\sqrt[3]{4}}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$

$$= \frac{15}{\sqrt[3]{8}}\cdot\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{6}{\sqrt[3]{3}} = \frac{15}{2}\cdot\frac{6\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}}$$

$= \frac{15}{2}\cdot\frac{6\sqrt[3]{9}}{3} = 15\sqrt[3]{9}$ وحدة مكعبة

كل ماورد في الخلفية العلمية من امثلة أو أسئلة
للمدرس فقط

7 – التقويم

* اسئلة تقويم للطالب

س1 : بسط كل مما يأتي :

1) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}$

2) $\sqrt{\frac{2}{3}}-5\sqrt{24}$

3) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{9}{8}}-\sqrt{\frac{1}{32}}$

4) $3\sqrt{\frac{1}{12}}-\sqrt{\frac{1}{15}}+5\sqrt{\frac{3}{5}}$

5) $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{-7}$

س2 :

a) مستطيل مساحته $\left(\sqrt{32}+\sqrt{18}\right)$ وحدة مساحة وعرضه $\left(2\sqrt{2}\right)$ وحدة جد طوله

b) مكعب حجمه $\left(7+5\sqrt{2}\right)$ وحدة مكعبة اثبت ان طول ضلعه $\left(\sqrt{2}+1\right)$ وحدة

c) متوازي سطوح مستطيلة مساحة قاعدته $\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1\right)$ وحدة مساحة وارتفاعه $\left(\sqrt[3]{4}+1\right)$ وحدة جد حجمه

d) مستطيل بعداه :

1) $\left(\sqrt{\sqrt{21}-\sqrt{5}},\sqrt{\sqrt{21}+\sqrt{5}}\right)$ وحدة

2) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{33}+\sqrt{6}},\sqrt[3]{\sqrt{33}-\sqrt{6}}\right)$ وحدة

جد مساحته

3 الفصل الثالث

الحدوديات

Polynomials

$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
العامل المشترك الأكبر	**GCF**
المضاعف المشترك الأصغر	**LCM**

1 - تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الحدّانية
- الحدودية
- تحليل الفرق بين مربعين
- تحليل الفرق بين مكعبين
- تحليل مجموع مكعبين
- تحليل الحدودية الثلاثية
- تحليل المربع الكامل
- العامل المشترك الاكبر
- المضاعف المشترك الاصغر
- اختصار الحدوديات النسبية
- ضرب الحدوديات النسبية
- قسمة الحدوديات النسبية
- جمع الحدوديات النسبية
- طرح الحدوديات النسبية

الحقائق والتعميمات

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- تكون الحدودية $ax^2 + bx + c$ مربعاً كاملاً اذا كان

$$\pm 2\sqrt{(ax^2)(c)} = bx$$

- **GCF** : يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة فقط وبأصغر أس.
- **LCM** : يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس.

الخوارزميات والمهارات

- يجد ناتج $(a+b)^2$
- يجد ناتج $(a-b)^2$
- يحلل الحدّانية عندما تكون على صورة الفرق بين مربعين
- يحلل الحدّانية عندما تكون على صورة الفرق بين مكعبين

- يحلل الحدّانية عندما تكون على صورة مجموع مكعبين
- يميز الحدودية الثلاثية التي على صورة المربع الكامل عن غيرها
- يحلل الحدودية الثلاثية على صورة المربع الكامل
- يجد الحد المفقود في الحدودية الثلاثية لتصبح مربعاً كاملاً
- يحلل الحدوديات بأستخراج العامل المشترك الاكبر
- يجد ناتج المضاعف المشترك الاصغر للحدوديات
- يختصر الحدوديات النسبية
- يجد ناتج جمع وطرح الحدوديات النسبية
- يجد ناتج ضرب وقسمة الحدوديات النسبية

2 - الاهداف السلوكية

في نهاية هذا الفصل ينبغي ان يكون الطالب قادراً على ان :

- يميز بين الحدودية وغير الحدودية
- يضرب حدانية في اخرى
- يحلل الحدانية عندما تكون على صورة الفرق بين مربعين
- يتعرف على الحدانية التي على صورة الفرق بين مكعبين
- يحلل الحدانية التي على صورة الفرق بين مكعبين
- يتعرف على الحدانية التي على صورة مجموع مكعبين
- يحلل الحدانية التي على صورة مجموع مكعبين
- يحلل الحدودية الثلاثية بالتجربة
- يميز الحدودية الثلاثية التي على صورة المربع الكامل عن غيرها
- يحلل الحدودية الثلاثية مستفيداً من المقدار المميز
- يجد الحد المفقود في الحدوية الثلاثية لتصبح مربعاً كاملاً
- يجد العامل المشترك الاكبر للحدوديات
- يجد المضاعف المشترك الاصغر للحدوديات
- يستخدم التحليل في اختصار الحدوديات النسبية
- يستخدم التحليل في ضرب وقسمة الحدوديات النسبية
- يستخدم التحليل في جمع وطرح الحدوديات النسبية

3 – خلفية علمية للمدرس

يعد موضوع الحدوديات (**Polynomials**) من المفردات المهمة في الرياضيات وكما معلوم فان الحدوديات تتكون من حد او مجموع عدة حدود فاذا كانت بمتغير واحد فتكتب بشكل :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$$

حيث : $a_0, a_1, a_2, ...a_n \in R$ تدعى المعاملات (**Coefficients**) ، $n \in N$

وان : تكون درجة الحدودية **n** اذا كان $a_0 \neq 0$.

وقد تكون بمتغيرين **x,y** فتكون مجموع الحدود التي بشكل Cx^my^n حيث $C \in R$ ثابت و **m** , **n** اعداد صحيحة غير سالبة .

ودرجة هذه الحدودية تساوي (**n+m**) لاعلى حد فيها

فمثلاً : درجة الحدودية $x^4 - 5x^3y^2 + 6xy - 8x + 1$ هي : $(3 + 2 = 5)$ الخامسة وتسمى الحدودية بعدد حدودها :

* اذا كانت من حد واحد تدعى احادية الحد (**Monomial**)
* اذا كانت من حدين تدعى حدانية (**Binomial**)
* اذا كانت من ثلاثة حدود تدعى ثلاثية الحدود (**Trinomial**)

ان تحليل الحدودية من حدين او ثلاثة ذكر بالتفصيل في المنهج المقرر ولاداعي للتطرق له ، هنا سنتطرق لطريقة مهمة في تحليل الحدوديات والامثلة الآتية توضحها حيث يمكن للمدرس ان يخفض درجة الحدودية باستخدام الطريقة ثم يحلل الناتج بالطرق المذكورة في الكتاب المقرر واذا كان الناتج لايحلل بالطرق السابقة يكرر الطريقة مرة اخرى وهكذا .

لنفرض لدينا الحدودية $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ والمطلوب تحليلها عند ذلك نتبع :

1) نجد قيمة $x = b$ بحيث تجعل القيمة العددية للحدودية بعد التعويض تساوي صفراً

2) نعمل الجدول الآتي

المعاملات	a_0	a_1	....	a_n
b		اجمع a_0b		
	a_0	$a_1 + a_0b$	وهكذا	**0**

يجب ان يكون ناتج هذا الحقل يساوي صفراً

امثلة / حلل **1**) x^2-3x+2

الحل / المعروف وحسب المنهج المقرر التحليل يكون $(x-2)(x-1)$

طريقة المعاملات

المعاملات	1	−3	2
$b=2$		اجمع 2	−2
	1	−1	0

$\boxed{(x-2)\quad(x-1)}$

2) حلل x^3+27

الحل / حسب الطرق السابقة يكون التحليل مجموع مكعبين اي $(x+3)(x^2-3x+9)$

نكتب الحدانية بشكل : $x^3+0x^2+0x+27$

المعاملات	1	0	0	27
$b=-3$		اجمع −3	اجمع 9	−27
	1	−3	9	0

$\boxed{(x+3)(x^2-3x+9)}$

3) حلل x^4-1

الحل / حسب الطرق السابقة يكون $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

نستطيع كتابة x^4-1 بشكل $x^4+0x^3+0x^2+0x-1$

المعاملات	1	0	0	0	−1
$b=1$		1	1	1	1
	1	1	1	1	0

$\boxed{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}$

المعاملات	1	1	1	1
$b=-1$		-1	0	-1
	1	0	1	0

$$(x+1)(x^2+0x+1)$$

$$\therefore x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

3) حلل $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$

الحل /

المعاملات	1	-2	-8	18	-9
$b=1$		1	-1	-9	9
	1	-1	-9	9	0

$$(x-1)(x^3-x^2-9x+9)$$

المعاملات	1	-1	-9	9
$b=1$		1	0	-9
	1	0	-9	0

$$(x-1)(x^2-0x-9)$$

$$(x-1)(x-3)(x+3)$$

∴ التحليل النهائي هو $(x-1)(x-1)(x-3)(x+3)$

4 – المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

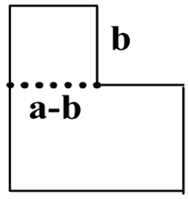
تهيئة الطلبة :

– مراجعة لما سبق ان درسه الطالب في موضوع الحدوديات بالاستعانة بالاشكال الهندسية فمثلاً لتحليل الفرق بين مربعين بعد ان يتم تذكير الطلبة بشروطها لان a^2-b^2 تمثل الفرق بين مربعين اما a^2+b^2 لاتمثل الفرق بين مربعين ولايمكن تحليلها في هذه المرحلة .

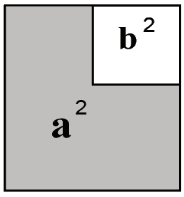
– يتم تمثيل a^2-b^2 باستخدام بطاقتين مربعتين طول ضلع الاولى **a** من الوحدات وطول ضلع الثانية **b** من الوحدات يمثل الحد الاول مساحة المنطقة المربعة التي طول ضلعها **a** من الوحدات ويمثل الحد الثاني مساحة

المنطقة المربعة التي طول ضلعها **b** من الوحدات

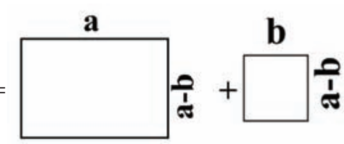
– نضع البطاقتين المربعتين كما في الشكل **1** ، بما ان التحليل للفرق بين مربعين يعني مساحة المنطقة المربعة الاولى ناقص مساحة المنطقة المربعة الثانية



= المساحة المظللة = $a^2 - b^2$



=



$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = a(a-b) + b(a-b) \\ \therefore a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{array}}$$

الشكل **1**

– الناتج سيمثل مساحة المنطقة المستطيلة **(a+b) (a−b)**

– بنفس الطريقة يتم تذكير الطلبة بمربع حدانية بالمثال المعروض في صفحة **50** وان الناتج يمثل حدودية ثلاثية

– وبعد ان يتذكر الطلبة الحدانية والحدودية يتم التطرق لموضوع الفرق بين مكعبين.

5 – تدريس الموضوع

– لتوضيح كيفية تحليل الفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين بضرب $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ وملاحظة الناتج .

– يطلب المدرس من احد الطلبة القيام بالضرب ليتم التوصل الى الناتج.

– يمكن البدء بمجموع مكعبين ومن خلاله يتم التوصل لقانون الفرق بين مكعبين كالاتي :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

أي ان :

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b^3)$$

$$= (a + (-b))(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

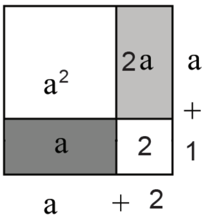
الأخطاء الشائعة ومعالجتها :

– يحلل الفرق بين مربعين او مكعبين او مجموع مكعبين قبل استخراج العامل المشترك الاعلى في حالة وجوده.

- تنبيه الطلبة الى ضرورة البدء باستخراج العامل اولاً .
- يخطأ الطلبة في الاشارة بين الحد الوسط والاخير عند تحليل الفرق او مجموع مكعبين
- تنبيه الطلبة الى ضرورة التأكد من ناتج التحليل بضرب العاملين او القوسين

تحليل الحدودية الثلاثية

تهيئة الطلبة



- بعد تذكر الطلبة بالحدودية الثلاثية اعطاء مثال لحدودية ثلاثية $a^2 + 3a + 2$ ثم تحليلها باستخدام الاشكال المستطيلة والمربعة كالاتي :

أي ان $a^2 + 3a + 2 = (a+2)(a+1)$

تدريس الموضوع

ax^2+bx+c

طرفين

$(\square + \triangle)(\square + \triangle)$

وسطين

$\square \cdot \square = a$

$\triangle \cdot \triangle = c$

$\triangle \cdot \square + \square . \triangle = b$

- وضح للطلبة بأنه لتحليل أي حدودية ثلاثية نكون جدول لايجاد عددين صحيحين حاصل ضربهما الحد المطلق (باستخدام عوامل العدد) ومجموعهما الحد الوسط
- اعط الطلبة الامثلة الموجودة في صفحة 54 ومن الجدول ستتمكن من تحديد العددين
- يمكن التحقق من صحة التحليل بضرب الوسطين والطرفين ثم ايجاد ناتج الجمع .

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

- قد يخطىء الطلبة في اختيار العدد المناسب للتحليل لذلك يجب التأكيد عليهم بالتحقق من صحة التحليل بالضرب .

تحليل المربع الكامل

تهيئة الطلبة

سبق وشرحنا كيفية ايجاد ناتج مربع الحدانية الذي يمثل حدودية ثلاثية ولكنها من نوع خاص نسميها حدودية ثلاثية على صورة المربع الكامل او مربعا كاملاً

مثلاً لإيجاد ناتج $(x-2)^2$

الناتج سيكون $x^2 - 4x + 4$ الذي يمثل الحدودية الثلاثية التي تعتبر مربعاً كاملاً

تدريس الموضوع

- بداية يذكر المدرس لطلبته بأنه لتحليل الحدودية التي تمثل المربع الكامل يجب ان يتوفر شرطان هما

1 - كلا من الحدين الاول والثالث مربعاً

2 - الحد الاوسط ناتجا من ضعف حاصل ضرب جذري الحدين الاول والثالث

ويمكن شرح الامثلة الموجودة بالكتاب

وبعد اعطاء الامثلة التي تمثل مربعا كاملاً وتمييزها عن الامثلة التي لاتمثل مربعا كاملاً يمكن اعطاء القاعدة الاتية للطلبة

تكون الحدودية ax^2+bx+c مربعاً كاملاً اذا كان $bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

بالاستعانة بالامثلة في الصفحة **60**

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

– قد يخطىء بعض الطلبة بالاشارة بين الحدين ينبغي التأكيد على ذلك والتحقق من صحة التحليل

العامل المشترك الاكبر والمضاعف المشترك الاصغر

تهيئة الطلبة :

– مراجعة سريعة لكيفية ايجاد العامل المشترك الاكبر والمضاعف المشترك الاصغر لعددين او اكثر وتذكير الطلبة بـأن العامل يمثل ضرب العوامل المشتركة بأصغر اس

اما المضاعف يمثل ضرب العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر اس ويمكن التوضيح بأن طريقة ايجاد العامل والمضاعف بالنسبة للحدوديات تكون بنفس الطريقة

تدريس الموضوع :

– اعط المثال الاتي لايجاد العامل المشترك الاصغر والمضاعف المشترك الاكبر للحدوديات

$3a(x-y), 6a(x-y)^2$

الحل :

$$6a(x-y)^2 = 2\times \boxed{3\times a(x-y)^2}$$
$$3a(x-y) = \boxed{3\times a(x-y)}$$

من ملاحظة الناتج نجد ان هناك عوامل مشتركة بين الحدين وعليه فأن العامل المشترك الاكبر سيكون حاصل ضرب $3a(x-y)$ ويرمز له بالرمز **GCF**

اما المضاعف المشترك الاصغر سيكون حاصل ضرب العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر اس أي $6a(x-y)^2$ ويرمز له بالرمز **LCM**

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

– ضرورة تنبيه الطلبة الى التمييز بين اكبر اس واصغر اس بالنسبة للعامل والمضاعف فاحياناُ في ايجاد العامل المشترك الاكبر يعتبرون الحد ذا الاس الاكبر هو العامل دون تحليل الحدوديات عليه ينبغي التأكيد على تحليل الحدوديات وبعدها يتم ايجاد العامل او المضاعف

استخدام التحليل في تبسيط المقادير الجبرية

تهيئة الطلبة :

– ذكر الطلبة بأنه اذا ضرب كل من البسط والمقام بعدد حقيقي لايساوي صفر فأن قيمة الكسر لاتتغير

– واذا قسم كل من البسط والمقام على عدد حقيقي لايساوي صفر فأن قيمة الكسر لاتتغير

تدريس الموضوع

– يذكر المدرس بان اختصار الكسور او تبسيط المقادير الجبرية يتم بخطوات وهي

1 – تحليل البسط الى العوامل

2 – تحليل المقام الى العوامل

3 – تحديد العامل المشترك بين البسط والمقام

4 – قسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك الاكبر .

ويوضح ذلك من خلال الامثلة المعروضة بالكتاب في صفحة 67

اما عند ضرب وقسمة الحدوديات النسبية ينبغي التأكيد على تحليل الحدوديات ثم تحويل القسمة الى ضرب مع قلب المقدار الثاني ليكون بسطه مقام ومقامه بسط ثم الاختصار

اما عند جمع وطرح الحدوديات النسبية ينبغي تحليل الحدوديات اولاً ثم توحيد المقامات بايجاد المضاعف المشترك الاصغر ثم القيام بجمع الحدود او طرحها والامثلة المعروضة بالصفحة 70 يمكن الاستعانة بها

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

– عند تبسيط الكسور لايجوز الاختصار بين البسط والمقام في حالة وجود اشارة + او – ينبغي التحليل باحدى الطرق التي تمت دراستها قبل الاختصار

– التأكيد عند جمع الكسور على استخدام قانون التوزيع بدقة وجمع الحدود المتشابهة

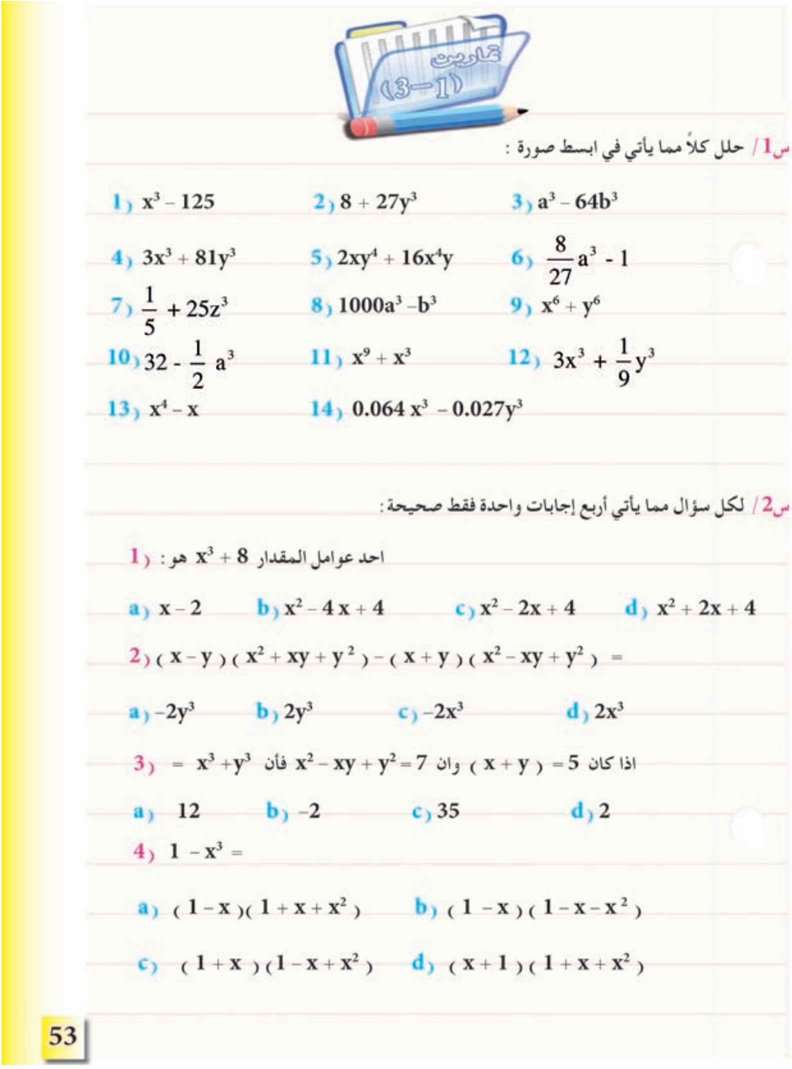
– يؤكد المدرس عن الحالة الشائعة خطأ :

$$\frac{x-y}{y-x}=1$$

مثال عددي كما يأتي :

$$\frac{9-5}{5-9}=\frac{4}{-4}=-1$$ كذلك في اعلاه

$$\boxed{\frac{x-y}{y-x}=\frac{-(y-x)}{y-x}=-1}$$



تمارين (3-1)

س1/ حلل كلاً مما يأتي في ابسط صورة :

1) $x^3 - 125$ 2) $8 + 27y^3$ 3) $a^3 - 64b^3$

4) $3x^3 + 81y^3$ 5) $2xy^4 + 16x^4y$ 6) $\frac{8}{27}a^3 - 1$

7) $\frac{1}{5} + 25z^3$ 8) $1000a^3 - b^3$ 9) $x^6 + y^6$

10) $32 - \frac{1}{2}a^3$ 11) $x^9 + x^3$ 12) $3x^3 + \frac{1}{9}y^3$

13) $x^4 - x$ 14) $0.064x^3 - 0.027y^3$

س2/ لكل سؤال مما يأتي أربع إجابات واحدة فقط صحيحة:

1) احد عوامل المقدار $x^3 + 8$ هو :

a) $x-2$ b) x^2-4x+4 c) x^2-2x+4 d) x^2+2x+4

2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x+y)(x^2-xy+y^2) =$

a) $-2y^3$ b) $2y^3$ c) $-2x^3$ d) $2x^3$

3) اذا كان $(x+y)=5$ وان $x^2-xy+y^2=7$ فان $x^3+y^3 =$

a) 12 b) -2 c) 35 d) 2

4) $1 - x^3 =$

a) $(1-x)(1+x+x^2)$ b) $(1-x)(1-x-x^2)$

c) $(1+x)(1-x+x^2)$ d) $(x+1)(1+x+x^2)$

53

6 – حل التمرينات

حل تمارين (3-1)

س1 : حلل كل مما يأتي في ابسط صورة :

1) $x^3 - 125 = (x-5)(x^2+5x+25)$

2) $8 + 27y^3 = (2+3y)(4-6y+9y^2)$

3) $a^3 - 64b^3 = (a-4b)(a^2+4ab+16b^2)$

4) $3x^3 + 81y^3 = 3(x^3+27y^3)$

$= 3(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

ملاحظة :ينبه الطالب ان القوس الكبير من تحليل فرق او مجموع المكعبين لايمكن تحليله في هذه المرحلة تفادياً للخلط بينه وبين المربع الكامل.

5) $2xy^4 + 16x^4y = 2xy(y^3+8x^3)$

$= 2xy(y+2x)(y^2-2xy+4x^2)$

6) $\frac{8}{27}a^3 - 1 = \left(\frac{2}{3}a-1\right)\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{2}{3}a+1\right)$

7) $\frac{1}{5}+25Z^3=\frac{1}{5}\left(1+125Z^3\right)$

$=\frac{1}{5}\left(1+5Z\right)\left(1-5Z+25Z^2\right)$

فكرة أخرى للحل : يمكن توحيد المقامات :

$\frac{1+125Z^3}{5}=\frac{1}{5}\left(1+125Z^3\right)$

$=\frac{1}{5}\left(1+5Z\right)\left(1-5Z+25Z^2\right)$

8) $1000a^3-b^3=\left(10a-b\right)\left(100a^2+10ab+b^2\right)$

9) $x^6+y^6=\left(x^2+y^2\right)\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)$

10) $32-\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{2}\left(64-a^3\right)$

$=\frac{1}{2}\left(4-a\right)\left(16+4a+a^2\right)$

11) $x^9+x^3=x^3\left(x^6+1\right)$

$=x^3\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$

12) $3x^3+\frac{1}{9}y^3=\frac{1}{9}\left(27x^3+y^3\right)=\frac{1}{9}\left(3x+y\right)\left(9x^2-3xy+y^2\right)$

13) $x^4-x=x\left(x^3-1\right)$

$=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$

14) $0.064x^3-0.027y^3=\left(0.4x-0.3y\right)\left(0.16x^2+0.12xy+0.09y^2\right)$

أو بطريقة أخرى :

$\frac{64}{1000}x^3-\frac{64}{1000}y^3=\frac{1}{1000}\left(64x^3-27y^3\right)$

$=\frac{1}{1000}\left(4x-3y\right)\left(16x^2+12xy+9y^2\right)$

س2 : لكل سؤال مما يأتي اربع اجابات واحدة فقط صحيحة :

1) c **2) a** **3) c** **4) a**

تمارين (3-2)

س 1/ حلل كل مما ياتي :

1) $x^2 + 6x + 8$

2) $x^2 - 2x - 15$

3) $x^2 + 3x + 2$

4) $4x^2 + 21x + 27$

5) $x^2 + 11x - 80$

6) $4x^2 - 4x - 15$

7) $6x^2 - 7x - 20$

8) $x^2 + 20x + 100$

9) $16x^2 + 8x + 1$

10) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

س 2/ بين اي الحدوديات الاتية تمثل مربعاً كاملاً .

1) $x^2 - 18x + 81$

2) $x^2 - 7xy + 49y^2$

3) $4x^2 + 25 - 12x$

4) $4x^2 - 25 - 20x$

5) $8x^2 - 40x + 50$

6) $-x^2 - 2xy - y^2$

س3/ اكمل الحدوديات الاتية لتصبح مربعاً كاملاً :

1) ...... $- 32x + 64$

2) $x^2 - 12x +$ .....

3) $25x^2 -$ .... $+ 9y^2$

4) ...... $+ 24ab + 36b^2$

س4/ حدد الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1) قيمة m التي تجعل الحدودية $25x^2 - mx + 4$ مربعاً كاملاً تساوي

a) 30 b) 20 c) 10 d) -10

2) ان قيمة n التي تجعل الحدودية $y^2 + 12y - n$ مربعاً كاملاً هي :

a) 36 b) -36 c) 144 d) غير ذلك

س5 / جد (LCM) , (GCF) للحدوديات الأتية:

1) x^3+y^3 , x^2+xy, x^3-xy^2

2) x^4-16 , x^4+8x^2+16 , x^6+64

3) $3x^2-3x^2y^2$, $5x+5xy$, $x-xy-2xy^2$

4) $\frac{1}{2}x^2-2$, $2x^3-16$, $3x^2-x-10$

5) $(5x^2-3x)^3$, $5x^2+7x-6$, $10x^2-6x$

6) x^2-y^2 , x^3-y^3 , $(x-y)^4$, $7x-7y$

حل تمارين (2–3)

س1 : حلل كل مما يأتي :

1) $x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$

2) $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$

3) $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

4) $4x^2+21x+27=(4x+9)(x+3)$

5) $x^2+11x-80=(x+16)(x-5)$

6) $4x^2-4x-15=(2x+3)(2x-5)$

7) $6x^2-7x-20=(3x+4)(2x-5)$

8) $x^2+20x+100=(x+10)(x+10)=(x+10)^2$

9) $16x^2+8x+1=(4x+1)^2$

10) $4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$

س2 : بين أي الحدوديات الآتية تمثل مربعاً كاملاً :

1) $x^2 \quad -18x \quad +81$

$\downarrow \quad \Downarrow \quad \downarrow$

$(x)^2 \quad -2(x)(9) \quad 9^2$

$=-18x$ الحدودية مربع كامل

$\Rightarrow x^2-18x+81=(x-9)^2$

2) $x^2 \quad -7x \quad +49$

$\downarrow \quad \Downarrow \quad \downarrow$

$(x)^2 \quad -2(x)(7) \quad 7^2$

$=-14x \neq$ الحد الاوسط $(-7x)$

الحدودية ليست مربع كامل

3) $4x^2+25-12x$

نرتب اولاً الحدودية تنازلياً لتصبح : $4x^2-12x+25$

$4x^2 \quad -12x \quad +25$

$\downarrow \quad \Downarrow \quad \downarrow$

$(2x)^2 \quad -2(2x)(5) \quad 5^2$

$=-20x \neq$ الحد الاوسط $(-12x)$

الحدودية ليست مربع كامل

4) $4x^2 - 25 - 20x = 4x^2 - 20x - 25$

الحدودية ليست مربعاً كاملاً لان الحد الاخير (25−) سالب

5) $8x^2 - 40x + 50 =$

6) $-x^2 - 2xy - y^2 =$

ملاحظة : الحدودية في 5 ، 6 ليست مربعات كاملة على وضعها الحالي وبالامكان بعد اخراج عامل مشترك فيكون داخل القوس مربع كامل وكما يأتي :

$$2\left(4x^2 - 20x + 25\right)$$

$$= 2\left(2x - 5\right)^2$$

$$-\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = -\left(x + y\right)^2$$

س3 : اكمل الحدوديات الآتية لتصبح مربعاً كاملاً :

1) .... $- 32x + 64$

الحل / يمكن استخدام قانون الحد الاوسط فقط :

الحد الاوسط $= 2\sqrt{\text{الحد الاول}} \cdot \sqrt{\text{الحد الثالث}}$

$32x = 2\sqrt{\text{الحد الاول}} \cdot \sqrt{64} = 2(8)\sqrt{\text{الحد الاول}}$

$\sqrt{\text{الحد الاول}} = \dfrac{32x}{16} = 2x$

بتربيع الطرفين $\Rightarrow$ الحد الاول $= 4x^2$

$$\therefore 4x^2 - 32x + 64 = \left(2x - 8\right)^2 = \left[2\left(x - 4\right)\right]^2 = 4\left(x - 4\right)^2$$

2) $x^2 - 12x + ...$

الحد الاوسط $= 2\sqrt{\text{الحد الاول}} \cdot \sqrt{\text{الحد الثالث}}$

$12x = 2\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\text{الحد الثالث}} \Rightarrow 6 = \sqrt{\text{الحد الثالث}}$

بتربيع الطرفين نحصل على :

الحد الثالث $= 36$

$$\therefore x^2 - 12x + 36 = \left(x - 6\right)^2$$

3) $25x^2 - .... + 9y^2$

الحد الاوسط = $2\sqrt{\text{الحد الاول}} \cdot \sqrt{\text{الحد الثالث}}$

$= 2\sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{9y^2} = 2(5x)(3y)$

الحد الاوسط = **30xy**

$\therefore 25x^2 - 30xy + 9y^2 = (5x - 3y)^2$

4) $...... + 24ab + 36b^2$

$24ab = 2\sqrt{\text{الحد الاول}} \cdot \sqrt{36b^2} = 2\sqrt{\text{الحد الاول}} \cdot 6b$

$\sqrt{\text{الحد الاول}} = \dfrac{24ab}{12b} = 2a$

بتربيع الطرفين نحصل على:

الحد الاول = **4a²**

$\therefore 4a^2 + 24ab + 36b^2 = (2a + 6b)^2 = 4(a + 3b)^2$

س**4** :حدد الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) b **2) b**

س**5** : جد (**LCM**) , (**GCF**) للحدوديات الآتية

1) $x^3 + y^3 \ , \ x^2 + xy \ , \ x^3 - xy^2$

نحلل المقادير الجبرية تحليلاً كاملاً:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^2 + xy = x(x + y)$

$x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2)$

$= x(x - y)(x + y)$

$\therefore GCF = x + y \ , \ LCM = x(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)$

$= x(x - y)(x^3 + y^3)$

2) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

$= (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$

$x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2$

$x^6 + 64 = (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16)$

$\therefore GCF = x^2 + 4$, $LCM = (x-2)(x+2)(x^2+4)^2(x^4 - 4x^2 + 16)$

3) $3x^2 - 3x^2y^2 = 3x^2(1 - y^2)$

$= 3x^2(1-y)(1+y)$

$5x + 5xy = 5x(1+y)$

$x - xy - 2xy^2 = x(1 - y - 2y^2)$

$= x(1+y)(1-2y)$

$\therefore GCF = x(1+y)$, $LCM = 15x^2(1-y)(1+y)(1-2y)$

4) $\frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$

$= \frac{1}{2}(x-2)(x+2)$

$2x^3 - 16 = 2(x^3 - 8)$

$= 2(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

$3x^2 - x - 10 = (3x+5)(x-2)$

$GCF = \frac{1}{2}(x-2)$, $LCM = 2(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(3x+5)$

5) $(5x^2 - 3x)^3 = [x(5x-3)]^3$

$= x^3(5x-3)^3$

$5x^2 + 7x - 6 = (5x-3)(x+2)$

$10x^2 - 6x = 2x(5x-3)$

$GCF = 5x - 3$, $LCM = 2x^3(5x-3)^3(x+2)$

6) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$(x-y)^4 = (x-y)^4$

$7x - 7y = 7(x-y)$

$GCF = x - y$, $LCM = 7(x-y)^4(x+y)(x^2 + xy + y^2)$

تمارين (3-3)

س1/ بسط كلا مما ياتي :

1) $\dfrac{x^3+8}{x^3-2x^2+4x}$ 2) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

3) $\dfrac{12-4x}{x^2-2x-3}$ 4) $\dfrac{x(2x-1)-1}{x(x-1)}$

س2/ جد ناتج كل مما ياتي في ابسط صورة :

1) $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2+6x-16}$ 2) $\dfrac{x^2+9x+20}{x^2+5x-24}\div\dfrac{x^2+15x+56}{x^2+x-12}$

3) $\dfrac{x^2+x+1}{x^4-x}-\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$ 4) $\dfrac{x^2+4x-21}{x^2+14x+49}\div\dfrac{x-7}{2x^2-98}$

5) $(x^2-xy-2y^2)\div\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\cdot(x^3-8y^3)\right)$ 6) $\left(\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}\cdot\dfrac{x+y}{x-y}\right)\div\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\right)$

7) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{8}{x^2+2x-3}$ 8) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{5x-15}{(x-3)^2}-\dfrac{3x+1}{x^2-4x+3}$

9) $\left(\dfrac{x^3+27}{x+3}\div\dfrac{x^3-3x^2+9x}{x^2}\right)\div x$ 10) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}+1$

71

حلول تمارين (3-3)

س1 : بسط كلا مما يأتي :

1) $\dfrac{x^3+8}{x^3-2x^2+4x}=\dfrac{(x+2)\cancel{(x^2-2x+4)}}{x\cancel{(x^2-2x+4)}}=\dfrac{x+2}{x}$

ملاحظة1 : ينبه الطالب ان القوس الثاني (ثلاثية الحدود) من تحليل فرق ومجموع المكعبين لايتحلل والخلط في هذه الحالة يتم بينه وبين المربع الكامل.

2) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy-2y^2}=\dfrac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}(x-2y)}=\dfrac{x-y}{x-2y}$

ملاحظة 2 : ينبه الطالب انه في عملية الاختصار يتم حذف العوامل وليست الحدود

3) $\dfrac{12-4x}{x^2-2x-3}=\dfrac{4(3-x)}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{4\left[-\cancel{(3-x)}\right]}{\cancel{(3-x)}(x+1)}=\dfrac{-4}{x+1}$

ملاحظة 3 : ينبه الطالب بعمليه تغيير الاشارة في الحدانية كما في التالي :

$$x-y=-(y-x)$$

$$y-x=-(x-y)$$

وتعتبر هذه من المهارات الجبرية التي يلاقي الطالب فيها صعوبة اكثر من غيرها في اختصار الكسور :

اي ان :

$$\boxed{\frac{a-b}{b-a}=\frac{-(b-a)}{(b-a)}=-1}$$

4) $\dfrac{x(2x-1)-1}{x(x-1)}$

لاحظ ان بسط الكسر يجب تحليله بعد فتح الاقواس بينما المقام في أبسط صورة

$$\frac{2x^2-x-1}{x(x-1)}=\frac{(2x+1)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{2x+1}{x}$$

س2 : جد ناتج كل مما يأتي في ابسط صورة :

1) $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2+6x-16}$

$$=\frac{\cancel{(x+8)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}\cdot\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x+8)}\cancel{(x-2)}}=x+2$$

2) $\dfrac{x^2+9x+20}{x^2+5x-24}\div\dfrac{x^2+15x+56}{x^2+x-12}$

$$=\frac{(x+5)(x+4)}{(x+8)(x-3)}\div\frac{(x+8)(x+7)}{(x+4)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+5)(x+4)}{(x+8)\cancel{(x-3)}}\cdot\frac{(x+4)\cancel{(x-3)}}{(x+8)(x+7)}=\frac{(x+5)(x+4)^2}{(x+8)^2(x+7)}$$

3) $\dfrac{x^2+x+1}{x^4-x}-\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$

$$=\frac{\cancel{(x^2+x+1)}}{x(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}-\frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-1)}$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{(x-1)}=\frac{1-x}{x(x-1)}=\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{-1}{x}$$

4) $\dfrac{x^2+4x-21}{x^2+14x+49} \div \dfrac{x-7}{2x^2-98} = \dfrac{\cancel{(x+7)}(x-3)}{(x+7)^{\cancel{2}}} \div \dfrac{\cancel{(x-7)}}{2\cancel{(x-7)}(x+7)}$

$= \dfrac{(x-3)}{\cancel{(x+7)}} \cdot \dfrac{2\cancel{(x+7)}}{1} = 2(x-3)$

5) $\left(x^2-xy-2y^2\right) \div \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \cdot \left(x^3-8y^3\right)\right)$

$= (x+y)(x-2y) \div \left(\dfrac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{(x-y)^{\cancel{2}}} \cdot (x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)\right)$

$= \cancel{(x+y)}\cancel{(x-2y)} \cdot \dfrac{(x-y)}{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-2y)}\left(x^2+2xy+4y^2\right)} = \dfrac{x-y}{x^2+2xy+4y^2}$

6) $\left(\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y} \cdot \dfrac{x+y}{x-y}\right) \div \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\right)$

$= \dfrac{\cancel{(x-y)}^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-y)}} \cdot \dfrac{\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x-y)}} \cdot \dfrac{x^2}{(x-y)\cancel{(x+y)}} = \dfrac{x^2}{x-y}$

7) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{8}{x^2+2x-3} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{8}{(x-1)(x+3)}$

$= \dfrac{3(x+3)+2(x-1)+8}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{3x+9+2x-2+8}{(x-1)(x+3)}$

$= \dfrac{5x+15}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{5\cancel{(x+3)}}{(x-1)\cancel{(x+3)}} = \dfrac{5}{x-1}$

8) $\dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{5x-15}{(x-3)^2} - \dfrac{3x+1}{x^2-4x+3} = \dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{5\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}} - \dfrac{3x+1}{(x-3)(x-1)}$

$= \dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{5}{(x-3)} - \dfrac{3x+1}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{(x-3)^2+5(x-1)-(3x+1)}{(x-3)(x-1)}$

$= \dfrac{x^2-6x+9+5x-5-3x-1}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x-1)}} = 1$

$$9)\ \left(\frac{x^3+27}{x+3} \div \frac{x^3-3x^2+9x}{x^2}\right) \div x$$

$$= \left(\frac{\cancel{(x+3)}\left(x^2-3x+9\right)}{\cancel{(x+3)}} \div \frac{\cancel{x}\left(x^2-3x+9\right)}{x^{\cancel{2}}}\right) \div x$$

$$= \left(\frac{\cancel{\left(x^2-3x+9\right)}}{1} \cdot \frac{x}{\cancel{\left(x^2-3x+9\right)}}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$10)\ \frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}+1 = \frac{\cancel{(2x-1)}(2x+1)}{(2x-1)^{\cancel{2}}}+1$$

$$= \frac{2x+1}{2x-1}+1 = \frac{2x+1+2x-1}{2x-1} = \frac{4x}{2x-1}$$

كل ماورد في الخلفية العلمية من امثلة أو أسئلة

للمدرس فقط

4 الفصل الرابع

المتباينات

Inequalities

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
متباينة	$a,b \in R$ ، $a < b$
متباينة مزدوجة	$d < f(x) < c$
صائبة	T
خاطئة	F

1 - تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- العبارة
- نفي العبارة
- قيم الصواب للعبارة
- ادوات الربط
- العبارة المركبة
- الجمل المفتوحة
- المتباينة
- مجموعة حل المتباينة
- خواص المتباينات
- المعادلة
- درجة المعادلة
- المتغير
- المعادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين
- حل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين انياً
- المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد
- حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد
- حل المعادلات الكسرية

الحقائق والتعميمات

- اذا كان $a, b, c \in R$
- فأن

1) $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

3) $a < b \Rightarrow a - c < b - c$

4) $a < b$ عدد موجب $c \Rightarrow ac < bc$

5) $a < b$ عدد سالب $c \Rightarrow ac > bc$

6) $a < b$ عدد موجب $c \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

7) $a < b$ عدد سالب $c \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

الخوارزميات والمهارات

- حل المتباينات من الدرجة الاولى
- حل الجمل المركبة
- تمثيل مجموعة الحلول للمتباينة بيانياً
- حل المعادلات من الدرجة الاولى بمتغيرين (بيانياً ، آنياً)
- حل المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد
- حل المعادلات الكسرية

2 - الاهداف السلوكية

في نهاية هذا الفصل ينبغي ان يكون الطالب قادراً على ان :

- يتعرف على العبارة
- يتعرف على نفي العبارة
- يتعرف على قيم الصواب للعبارات
- يذكر خواص المتباينات
- يعبر عن جملة رياضية بمتباينة
- يحل المتباينة
- يحل المعادلات من الدرجة الاولى بمتغيرين بيانياً
- يحل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين انياً باستخدام
  1 - التعويض
  2 - الحذف
- يحل معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد باستخدام
  1 - طريقة التحليل
  2 - طريقة اكمال المربع
  3 - طريقة الدستور
- يعين مجموعة حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد
- يحل مسائل لفظية تتناول مشكلات حياتية

3 - خلفية علمية للمدرس

للمتباينات اهمية وتطبيقاتها كثيرة في مجال الرياضيات والاقتصاد وتبرز اهميتها بالترافق مع المعادلات الخطية في موضوع البرمجة الخطية.

فالبرمجة الخطية لمشكلة ماهي عملية تعظيم او اقلال دالة خطية للمتغيرات الاساسية في ظل مجموعة

المعادلات او المتباينات الخطية والكتاب المقرر اعطى فكرة جيدة عن حل المعدلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد وفي هذه الخلفية سنعطي فكرة اوسع في حل المتباينات من الدرجة الاولى (باستخدام خواص الحقل) والدرجة الثانية بمتغير واحد .

اولاً : حل متباينة من الدرجة الاولى بمتغير واحد

في حل هذه المتباينة نستخدم الحقل

الخاصية التوزيعية

- اضافة النظير الجمعي

- الضرب في النظير الضربي

الخاصية التجميعية

- العنصر المحايد للجمع

- العنصر المحايد للضرب

مثال1 : جد مجموعة حلول المتباينة : $3(x-2) \geq 5$

خاصية التوزيع $3x-6 \geq 5$

اضافة النظير الجمعي $3x-6+(6) \geq 5+(6)$

خاصية التجميع $3x+[-6+(6)] \geq 11$

$$3x+[0] \geq 11$$

العنصر المحايد الجمعي $3x \geq 11$

النظير الضربي $\frac{1}{3}(3x) \geq \frac{1}{3}(11)$

خاصية التجميع $\left[\left(\frac{1}{3}\right)(3)\right]x \geq \frac{11}{3}$

العنصر المحايد الضربي $x \geq \frac{11}{3}$

$$\therefore s=\left\{x: x \in R, x \geq \frac{11}{3}\right\}$$

ثانياً : حل متباينات الدرجة الثانية بمتغير واحد

1) نجعل احد طرفي المتباينة يساوي صفراً

2) نحلل المقدار الى : $(x-a)(x-b)=0$ ونجد العوازل $x=a, x=b$

3) نعمل المخطط للاختبار

	a	b	
$(x-a)$			الاشارة
$(x-b)$			الاشارة
$(x-a)(x-b)$			الاشارة

مثال2 : جد مجموعة حل المتباينه : $x^2 \le 9$

الحل / نجعل المتباينة بشكل : $x^2 - 9 \le 0$

نجعل : $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$-3 \qquad 3$

	-4	0	4	
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$	الاشارة
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	الاشارة
$(x-3)(x+3)$	$+$	$-$	$+$	الاشارة
		الحل		

$\therefore s = [-3, 3]$

مثال3 : حل المتباينة : $x^2 - 3x - 4 > 0$

الحل / $x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = 4, x = -1$

$-1 \qquad 4$

	-2	0	5
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

$s = R / [-1, 4]$

هناك طريقة اخرى لحل متباينات الدرجة الثانية او اية متباينة حدودية نوردها في المثال الاتي :

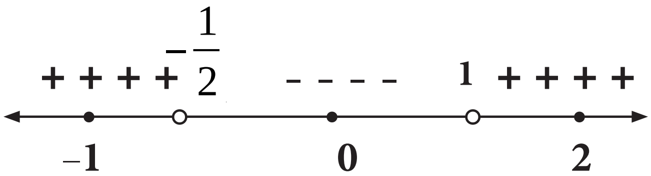
مثال : حل المتباينة : $2x^2 - x - 1 > 0$

الحل / نجعل $2x^2 - x - 1 = 0$

$$(2x+1)(x-1) = 0$$

اعداد تجزئة **Partition numbers** $\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 1$

نعين العددين $1, -\frac{1}{2}$ على مستقيم الاعداد فينقسم المستقيم الى ثلاث مجموعات عددية كما يلي :



نختبر اشارة المقدار : $(2x+1)(x-1)$ عند كل منطقة من المناطق الثلاث بأخذ قيمة واحد من كل منها كما في :

عندما $x = -1$

$$\Rightarrow (2x+1)(x-1) = (+)$$

عندما $x = 0$

$$\Rightarrow (2x+1)(x-1) = (-)$$

عندما $x = 2$

$$\Rightarrow (2x+1)(x+1) = (+)$$

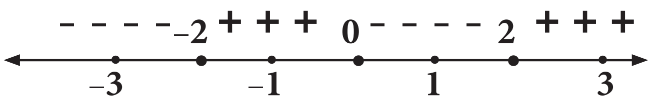
$\therefore$ مجموعة الحل = $\{x : x < 1\} \cup \left\{x : x < -\frac{1}{2}\right\}$ لاحظ ان اعداد التجزئة لم تدخل ضمن مجموعة الحل لعدم احتواء رمز التباين على المساواة

مثال : حل المتباينة : $x^3 - 4x \le 0$

الحل / نجعل $x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

اعداد التجزئة $\Rightarrow x = 0, x = \pm 2$



اشارة المقدار $x(x^2 - 4)$

$\therefore$ مجموعة الحل : $[0,2] \cup \{x : x \le -2\}$

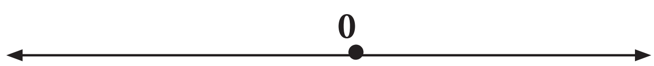
توضيح : وردت في مجموعة تمارين (1-4) س12 المتباينة : $2(P-1)-3>2P+3$ والتي يعتقد البعض انها خاطئة لانه عند حلها يختزل المتغير P كما يوضح الحل الآتي :
(السؤال صحيح تماماً)

$$2(P-1)-3>2P+3$$
$$2P-5>2P+3$$
$$\Rightarrow -5>3$$

وهذه عبارة خاطئة اي ان مجموعة حلول هذه المتباينة = ϕ
ولايمكن تمثيل مجموعة الحل : **No Graph**
اما الحالة الاخرى كما في المثال الآتي :

$$3(1-y)<5-3y$$
$$3-3y<5-3y$$
$$\Rightarrow 3<5$$

وهذه عبارة صائبة



$\therefore$ مجموعة الحل = **R**

(**) نعرف الآن بمثال لخطأ شائع في موضوع حل معادلات الدرجة الثانية بمتغير واحد وهو : $x\in R, x^2=4x$

الطريقة الخاطئة	الطريقة الصحيحة
$x^2=4x$ بقسمة طرفي المعادلة على x : $\Rightarrow \frac{x^2}{x}=\frac{4x}{x}\Rightarrow x=4$ والخطأ في هذه الطريقة هو فقدان احدى القيم التي تحقق المعادلة بحذف المتغير x والذي نحن بصدد ايجاد قيمته لذلك لايجوز حذف متغير المعادلة والذي قيمته هي احد حلولها.	$x^2=4x$ $x^2-4x=0$ $x(x-4)=0$ اما : $x=0$ او : $x=4$ $s=\{0,4\}$

نفس الحالة في المعادلة الآتية : $x(x-1)=3(x-1)$
حيث لايجوز حذف $(x-1)$ من الطرفين حاول حل المعادلة باكثر من طريقة
(**) من المهارات الجبرية الاخرى في حل المعادلات هي ايجاد علاقة بين احد المتغيرات بدلالة الاخرى

مثلاً : في القانون الآتي : $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ (الربط الكهربائي على التوازي)

المطلوب مثلاً ايجاد R_1 بدلالة R_2 و R_{eq} :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

بضرب الطرفين في $R_{eq}\,R_1\,R_2$: L.C.M

$$\Rightarrow R_1\,R_2 = R_{eq}\,R_2 + R_1\,R_{eq}$$

$$R_1\,R_2 - R_1\,R_{eq} = R_{eq}\,R_2$$

$$R_1\left(R_2 - R_{eq}\right) = R_{eq}\,R_2$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{R_{eq}\,R_2}{R_2 - R_{eq}}$$

وهذه المهارة مفيدة في مراحل لاحقة كما في الانشطة الآتية :

جد **x** بدلالة **y** $\qquad y = \dfrac{2x-1}{1+x}$

جد **r** بدلالة **s,t** $\qquad s = \dfrac{1+rt}{1+r}$

القانون العام للعدسات والمرايا

جد **v** بدلالة **f,u** $\qquad \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}$

(**) من الاخطاء الشائعة الاخرى في حل المعادلات نعرضه في المثال الآتي :

<table>
<tr>
<td>
والحل الصحيح هو تبسيط المعادلة وجعل احد طرفيها يساوي صفر .
$x^2 - x - 2 = 4$
$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$
$(x-3)(x+2) = 0$
$\therefore x = 3, x = -2$
$s = \{3, -2\}$

$a.b = 0$
اما : $a = 0$
او : $b = 0$
</td>
<td>
$(x+1)(x-2) = 4$
يقوم الطالب خطأ بتطبيق قاعدة العامل الصغرى :
اما : $x + 1 = 4$
$\Rightarrow x = 3$
او : $x - 2 = 4$
$\Rightarrow x = 6$
ويكتب مجموعة الحل $\{3,6\}$
وعند التحقيق بالمعادلة اصلاً نجد ان $x = 6$ لاتحقق المعادلة
</td>
</tr>
</table>

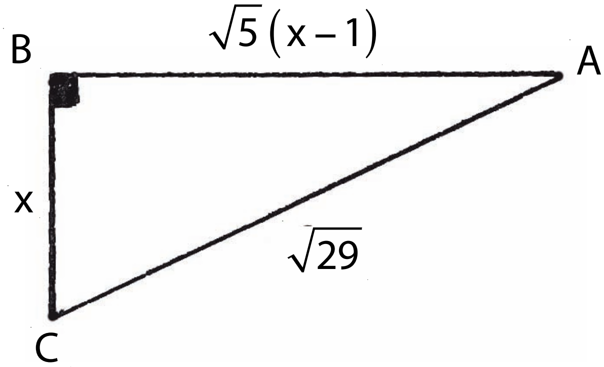
اسئلة اثرائية :

س1 : حل المتباينات الآتية

1) $2x^2 > 32$ 2) $x^2 - 5x \le 0$ 3) $x^2 - 4x > -3$

س2 : جد طول ضلع المربع الذي يجب قطعه من الزوايا الاربعة لقطعة كستطيلة بعدها 6cm, 10cm للحصول على متوازي سطوح مستطيلة بعد ثني الاطراف بحيث تكون مساحة القاعدة $(32cm^2)$.

س3 : في الشكل المجاور : جد مساحة المثلث ABC .



4 – المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

الوسائل التعليمية : سبورة ، طباشير ملون

خطوات سير الدرس

التمهيد

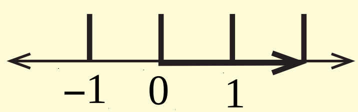
– يطلب المدرس من طلبته اعطاء بعض الجمل ويحاول ان يوضح لهم بأن كل جملة خبرية ذات معنى يمكن الحكم عليها بأنها صائبة او خاطئة ولايمكن ان تكون صائبة وخاطئة في آن واحد وهي مايطلق عليها عبارة اما الجملة الخبرية التي تتضمن مجهولاً او اكثر تسمى عبارة مفتوحة

– يميز المدرس بين العبارة البسيطة والمركبة بامثلة فالعبارة البسيطة تحمل خبراً واحداً اما العبارة المركبة تحمل اكثر من خبر

بعد ذلك ينتقل المدرس لتعريف المتباينة وهي جملة خبرية تتكون من وضع احد رموز التباين بين تعبيرين جبريين ويكتب امثلة عليها ويتوصل مع الطلبة لذلك التعريف .

5 – تدريس الموضوع

– بعد اعطاء الامثلة على المتباينة وضح للطلاب بجدول كالاتي :

المتباينة لفظياً	المتباينة رياضياً	التمثيل على خط الاعداد
الاعداد الحقيقية الاكبر من او تساوي صفر	$x \ge 0$	

- اشرح المثال الموجود في ص 76

- وضح بأن الفرق الوحيد بين خصائص المتباينات وخصائص المعادلات هو عند الضرب بعدد سالب او القسمة على عدد سالب

- اكد الفرق في التمثيل على خط الاعداد بين المتباينات التي تحتوي على الرمزين < , > والتي تحتوي على الرمزين ≥ , ≤ بشرح الامثلة الموجودة في صفحة 79

- وضح للطلبة معنى حل المتباينة

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

عدم تغيير رمز الاكبر او الاصغر عند الضرب او القسمة بعدد سالب يمكن معالجة ذلك بشرح امثلة بسيطة على الاعداد .

المعادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين

الوسائل التعليمية : سبورة ، طباشير ملون ، لوحة بيانية

خطوات سير الدرس

التمهيد :

- دع طلبتك يكتبون عدد من المعادلات الخطية من الدرجة الاولى

- حاول وضع متغير اخر على المعادلات التي كتبها الطلاب واسألهم ماعدد المجاهيل في كل معادلة ووضح لهم بأنها تسمى معادلات من الدرجة الاولى بمتغيرين واكتب لهم الصيغة العامة لها واكد بأن كل من المتغيرين مرفوع بأس واحد .

تدريس الموضوع

- بعد ان تعرف الطلاب على المعادلة حاول ان تشرح لهم كيفية حلها بكتابة جدول فلايجاد قيمة احد المتغيرات وليكن y مثلاً نقوم بأعطاء قيم لـ x ونعوضها بالمعادلة لنحصل منها على قيمة المتغير الاخر y

- استعن بالامثلة الموجودة في صفحة 84 ، 85

- ان مجموعة الازواج المرتبة التي حصلت عليها من الجدول ستمثل مجموعة حل المعادلة ويمكن تمثيلها بيانياً بالمستوي الاحداثي واذكر انه خلافاً لمعادلة الدرجة الاولى ذات متغير واحد والتي لها حل واحد فأن معادلة الدرجة الاولى ذات متغيرين لها عدد غير منته من الحلول في مجموعة الاعداد الحقيقية .

- بعد ان قمت بتحديد الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي حاول ان تصل بين النقاط ليظهر خط مستقيم

- لتمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين يمكن ان نكتفي بـأخذ نقطتين فقط

- اكد بأن المخطط البياني للمعادلة الخطية من الدرجة الاولى بمتغيرين يكون قطعة مستقيم اوشعاع او مستقيم يعتمد على مجموعة تعويض المتغير x

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

من الاخطاء الشائعة تعيين الزوج المرتب (2,4−) في المستوي الاحداثي مكان الزوج المرتب (2− , 4) وعلاج ذلك يكون بتدريب الطلبة بدرجة كافية على تعيين الازواج المرتبة في المستوي وتوضيحها لهم.

حل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين انياً :

خطوات سير الدرس

التمهيد :

- وضح للطلاب بأن هناك عدة طرق لحل المعادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين
- اذكر الطرق التي ستحل من خلالها المعادلتين وهي الطريقة البيانية والتحليلية (التعويض ، الحذف) وطرق اخرى سيتم شرحها لاحقاً في مراحل اخرى.

تدريس الموضوع :

- كلف الطلاب بحل مثال 1 في صفحة 86 على شكل مجموعات ثنائية بحيث يكمل احدهما الجدول الاول والاخر الجدول الثاني ثم يقارنان النتائج بين الجدولين ويستنتجان الحل المشترك للمعادلتين .
- حاول ان تدعهم يجدون بأن الزوج المرتب (2,1) هو الحل الوحيد المشترك بين المعادلتين .
- وضح للطلاب بأن المعادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين عند اخذهما معاً نطلق عليهما اسم نظام معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين
- اكد بأن حل النظام هو زوج مرتب واحد يكون حلاً لكل من المعادلتين ودع الطلاب يمثلون الحل على المستوي الاحداثي وستكون نقطة تقاطع المستقيمين هي مجموعة حل النظام.
- وضح للطلاب بأن محاولة حل نظام معادلتين بالجدول ليست مقبولة دائماً واذكر لهم ان من الطرق العامة لحل النظام هي طريقتي التعويض والحذف.
- اشرح لهم طريقة التعويض بالمثال الموجود في صفحة 87 وتتلخص بتحويل احدى المعادلتين الى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين x,y من احدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الاخرى لنحصل منها على مجموعة حل النظام.
- اشرح طريقة الحذف بالاستعانة بالخطوات الموضحة في صفحة 89
- اذكر ان حذف احد المتغيرين يتطلب احياناً ان نضرب المعادلتين بعددين مختلفين ثم نجمعهما او نطرحهما وناقش بعض الامثلة الموجودة في الصفحات 89 ، 90 ، 91 ، 92 حسب الحاجة

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

- من الاخطاء الشائعة التي تواجه الطلاب عدم دقة التمثيل البياني للمعادلات بمتغيرين مما يؤدي الى الحصول على زوج مرتب لايمثل مجموعة الحل الصحيح عند تعويضه بالمعادلة وعلاج ذلك يكون باستخدام اللوحة البيانية.

– نقل احد المتغيرات في المعادلة بمتغيرين من طرف الى اخر دون مراعاة اثر ذلك على اشارته للبدء في الحل بطريقة التعويض ويمكن علاج ذلك بتدريب الطلبة على امثلة كافية.

– عدم التفريق بين خطوات الحل بطريقتي الحذف والتعويض بسبب عدم التمكن من كليهما وعلاج ذلك يكون باتقان احدى الطريقتين قبل الانتقال للطريقة الثانية

المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

خطوات سير الدرس

التمهيد :

– اسأل الطلاب ان يكتبوا معادلات بمتغير واحد ثم ضع اس المتغير 2 .

– وضح بأن المعادلة تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد.

– تأكد من ان الطلاب يحللون الحدوديات بأنواعها المختلفة.

تدريس الموضوع :

– اشرح بعض الامثلة الموجودة في صفحة 96 ، 97 ، 98 ، 99

– وضح للطلاب ان حل المعادلة يتم بتحليلها الى عاملين ومن ثم الاعتماد على حقيقة اذا كان $a \times b = 0$ فأن $a = 0$ او $b = 0$.

– اكد على اهمية التحقق من صحة الحل ويتم ذلك من خلال تعويض الحل بالمعادلة الاصلية.

– اعط امثلة اخرى على معادلات من الدرجة الثانية مستحيلة الحل في مجموعة الاعداد الحقيقة أي ان مجموعة الحل خالية.

– اشرح طريقة اكمال المربع بتذكير الطلاب بتحليل المربع الكامل بأستخدام القطع الكارتونية التي تمثل مربعات او مستطيلات لاكمال الحدودية لتصبح مربعا كاملا ومن ثم التوصل الى التعميم وهو اضافة مربع نصف معامل x الى طرفي المعادلة لتصبح مربعا كاملا .

– اكد على ضرورة اضافة مربع نصف معامل x لطرفي المعادلة لتبقى المعادلة كما هي .

– استعن بالمثال الموجود في صفحة 101

– اشرح طريقة الدستور بوضع المعادلة بالصورة العامة ثم تعيين معاملات x^2,x والحد المطلق

– تطبيق القانون والاستعانة بالمثال الموجود في صفحة 103

– وضح بأن نوع جذري المعادلة تتعين بحسب قيمة المقدار المميز والشرح موضح في صفحة 103 .

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

– قد يخطأ الطلاب بتعيين المعاملات العددية للمتغيرات بدون اخذ اشارة المعامل وعليه ضرورة التأكيد على تعيين المعامل مع اشارته.

– ضرورة تنبيه الطلاب على ان المقدار المميز عندما يساوي عدداً سالباً فأن المعادلة ليس لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية.

المعادلات الكسرية

خطوات سير الدرس

التمهيد :

- ذكر الطلاب بتبسيط المقادير الجبرية واعط امثلة متنوعة
- دع الطلبة يحلون تلك الامثلة بأنفسهم .

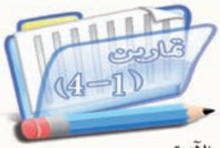
تدريس الموضوع :

- اعط امثلة في حالة كانت المقامات متشابهة ومختلفة .
- اذا كانت المقامات مختلفة وضح للطلاب بأن الخطوة الاولى التخلص من الكسور بالضرب بالمضاعف المشترك الاصغر
- التأكيد على ضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الاصغر .
- اشرح الامثلة الموجودة في صفحة **109** ، **110** ، **111**
- تنبيه الطلاب الى انه من الممكن اختصار الكسور قبل جمعها او طرحها .
- اعطاء امثلة على مسائل لفظية يحولها الطلاب الى صيغ رياضية تستدعي استخدام المعادلات الكسرية .

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

- هناك قيم عند استخراجها والتعويض بالمعادلة الاصلية يكون ناتج المقام يساوي صفر فأن مجموعة الحل بهذه الحالة تساوي مجموعة خالية .

6 – حل التمرينات



س1 / أبحث في صحة كل من العبارات الآتية :

1) $(-2)^3 = -8$ و 7 عدد أولي.

2) $\sqrt{15} = \sqrt{5}.\sqrt{3}$ أو (-3) يقع على يمين -2 على خط الأعداد.

3) قياس كل زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع $60°$ و كل مستطيل مربع.

4) الصفر عدد غير نسبي أو $\sqrt{6} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

5) $\sqrt[3]{-64} = -4$ و $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

س2 / حل كلا من المتباينات الاتية ومثل مجموعة الحل على خط الاعداد .

(1) $2x+3\leq 9$ (2) $5-2y>4$ (3) $3Z+5>17$ (4) $9\leq 5-3t$

(5) $\frac{3k+5}{2}>4$ (6) $\frac{2p-5}{-3}\leq 2$ (7) $2(2p-1)\leq 6-(p+8)$

(8) $\frac{1}{3}t+\frac{7}{12}>\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}$ (9) $-10\leq 2b-3\leq 9$ (10) $-4<\frac{3m+2}{2}<5$

(11) $\frac{-1}{3}y\neq\frac{1}{2}$ (12) $2(p-1)-3>2p+3$ (13) $10p-8<8+7p$

س3 /

a) اذا كانت درجة زيد في امتحان الرياضيات في الشهر الاول (66) وكان يريد الحصول على معدل في الرياضيات يتراوح بين 70 ، 80 درجة فكم تتراوح الدرجة التي يجب ان يحصل عليها في الامتحان الثاني؟

b) جد مجموعة الاعداد الصحيحة التي اذا اضيفت اليها 6 كان الناتج بين -3 ، 7 .

س4 / استبدل علامة الاستفهام فيما يلي باحد الرمزين > او < .

a) اذا كانت $a-b=1$ فان $a ? b$. b) اذا كانت $a-b=-2$ فان $a ? b$.

83

تمارين (4-1)

س1 : ابحث في صحة كل من العبارات الاتية :

1) $(-2)^3 = -8$ و 7 عدد اولي ... صائبة

2) $\sqrt{15} = \sqrt{5}\ .\ \sqrt{3}$ او (-3) يقع على يمين (-2) على خط الاعداد ... صائبة

3) قياس كل زاوية في المثلث المتساوي الاضلاع $60°$ وكل مستطيل مربع .... خاطئة

4) الصفر عدد غير نسبي و $\sqrt{6} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ... خاطئة

5) $\sqrt[3]{-64} = -4$ و $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ .... صائبة

س2: حل كلا من المتباينات الآتية ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد

1) $2x+3 \le 9$

$2x+3+(-3) \le 9+(-3)$... باضافة(-3) للطرفين

$2x \le 6$ تبسيط

$\frac{2x}{x} \le \frac{6}{2}$ بالقسمة على(2)

$\Rightarrow x \le 3$

3

$\therefore s = \{x : x \in R \ , \ x \le 3\}$

2) $5-2y > 4$

$5+(-5)-2y > 4+(-5)$... باضافة(-5) للطرفين

$-2y > -1$

$\frac{-2y}{-2} < \frac{-1}{-2}$ بالقسمة على(-2) مع مراعاة تغيير اتجاه التباين

$y < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\therefore s = \{y : y \in R \ , \ y < \frac{1}{2}\}$

3) $3Z+5 > 17$

$3Z+5+(-5) > 17+(-5)$

$3Z > 12$

$\frac{3Z}{3} > \frac{12}{3} \Rightarrow Z > 4$

4

$\therefore s = \{Z : Z \in R \ , \ Z > 4\}$

4) $9 \le 5-3t$

$\frac{-4}{3}$

$9-5 \le 5-5-3t \Rightarrow 4 \le -3t$

$\frac{-4}{3} \ge t$ بالقسمة على(-3)

$\therefore s = \{t : t \in R, t \le \frac{-4}{3}\}$

5) $\frac{3k+5}{2} > 4$

$3k+5 > 8$ بضرب الطرفين في **2**

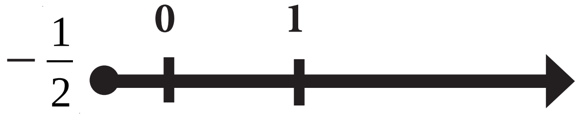
$3k > 3 \Rightarrow k > 1$

$\therefore s = \{k : k \in R,\ \ k > 1\}$

6) $\frac{2p-5}{-3} \leq 2$

$\Rightarrow 2p-5 \geq -6$ بضرب الطرفين في **(−3)**

$2p \geq -1$



$\Rightarrow p \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore s = \{p : p \in R,\ \ p \geq -\frac{1}{2}\}$

7) $2(2p-1) \leq 6-(p+8)$

$4p-2 \leq 6-p-8...$ ازالة اقواس

$4p+p \leq -2+2$ تبسيط

$5p \leq 0$

$\Rightarrow p \leq 0$

$\therefore s = \{p : p \in R,\ \ p \leq 0\}$

8) $\frac{1}{3}t + \frac{7}{12} > \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$

$4t + Z > 6t + 9$ بضرب الطرفين في **12**

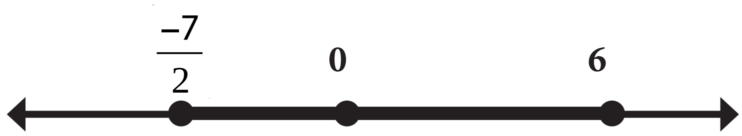
$-2t > 2$

$\Rightarrow t < -1$ بقسمة الطرفين على **−2**

9) $-10 \leq 2b-3 \leq 9$

$-10+3 \leq 2b-3+3 \leq 9+3$

$-7 \leq 2b \leq 12$



$\frac{-7}{2} \leq \frac{2b}{2} \leq \frac{12}{2}$

$\Rightarrow \frac{-7}{2} \leq b \leq 6$

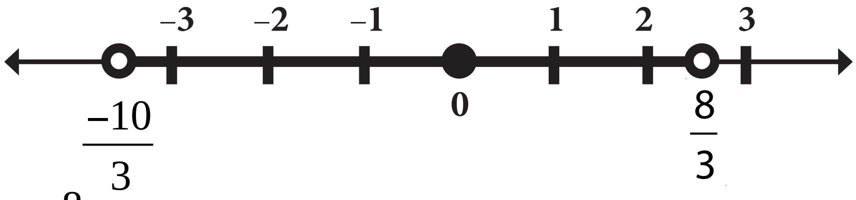
$\therefore s = \{b : b \in R,\ \frac{-7}{2} \le b \le 6\}$

10) $-4 < \frac{3m+2}{2} < 5$

$-8 < 3m+2 < 10$ بضرب الطرفين في **2**

$-10 < 3m < 8$

$\frac{-10}{3} < m < \frac{8}{3}$

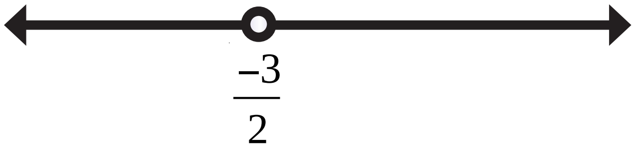


$\therefore s = \{m : m \in R, \frac{-10}{3} < m < \frac{8}{3}\}$

11) $\frac{-1}{3} y \ne \frac{1}{2}$

$(\frac{-1}{3} y)(-3) \ne \frac{1}{2}(-3)$ بضرب الطرفين في **3**−

$y \ne \frac{-3}{2}$



$\therefore s = \{y : y \in R,\ y \ne \frac{-3}{2}\}$

12) $2(p-1) - 3 > 2p + 3$

$2p - 2 - 3 > 2p + 3$

$\Rightarrow -5 > 3$

وهذه العبارة خاطئة

$\therefore s = \phi$

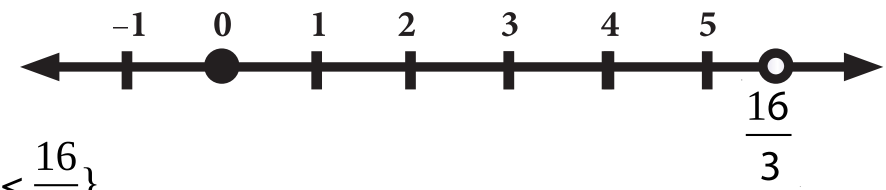
ولايمكن تمثيل مجموعة الحل

(**No Graph**)

13) $10p - 8 < 8 + 7p$

$10p - 7p < 8 + 8$

$3p < 16$



$\therefore s = \{p : p \in R,\ p < \frac{16}{3}\}$

س3 : a : نفرض الدرجة التي يأخذها زيد في الامتحان الثاني = x

بضرب الطرفين في 2 $\therefore 70 < \frac{x+66}{2} < 80$

$140 < x + 66 < 160$

$74 < x < 94$

$\therefore$ الدرجة تراوح بين 74 ، 94

b : نفرض العدد الصحيح = x

$\therefore -3 < x + 6 < 7$

$-9 < x < 1$

$\therefore$ مجموعة الاعداد الصحيحة = $\{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

س4 : a : اذا كانت : $a - b = 1$ فان $a > b$ لان الفرق بينهما موجب

او ان : اذا كانت $a - b > 0$ فان $a > b$

b : اذا كانت $a - b = -2$ فان $a < b$

تمارين (4-2)

س1 / حل كلاً من المعادلتين الآتيتين بطريقة التعويض :

a) $\left.\begin{array}{l}2x+3y=13\\3x-2y=0\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}x-2y=11\\2x-3y=18\end{array}\right\}$

س2 / حل كلاً من المعادلتين الآتيتين بطريقة الحذف :

a) $\left.\begin{array}{l}3x-4y-12=0\\5x+2y+6=0\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}0.1x-3y=12\\0.2x-4y=24\end{array}\right\}$

ثم تحقق من صحة الحل .

س3 / حل كلاً معادلتين مما يأتي بيانياً وحقق الناتج بطريقة أخرى :

a) $3x+2y=12$
$x+y=5$

b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2$
$2(x+1)+3(y-3)=2$

س4 / هل ان { (3 ، 2) } مجموعة حل المعادلتين الاتيتين بين ذلك :

$\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

$\frac{3y}{2} + \frac{x}{3} = 4$

س5 / اذا كانت $\{(2,-1)\}$ هي مجموعة حل المعادلتين: $2x-ay=3$ ، $bx-2y=-2$

جد a , b حيث a , b ثوابت حقيقية

93

تمارين (4-2)

س1 : حل كل من المعادلتين الاتيتين بطريقة التعويض :

a) $2x+3y=13 \ldots(1)$

$3x-2y=0 \ldots(2)$

من المعادلة (2)

$$3x=2y \Rightarrow \boxed{x=\frac{2y}{3}} \ldots\ldots(*)$$

نعوض في (1) عن قيمة **x** من(*)

$$2\left(\frac{2y}{3}\right)+3y=13$$

$$\frac{4y}{3}+3y=13$$

$$4y+9y=(3)(13)$$

$$13y=(3)(13)$$

$$\therefore y=3$$

من (*) : لايجاد x

$$\therefore x = \frac{(2)(3)}{3} = 2$$

$\therefore s = \{(2,3)\}$

b) $x - 2y = 11 \ldots (1)$

$2x - 3y = 18 \ldots (2)$

من (1) نجد x بدلالة y

$\boxed{x = 11 + 2y} \ldots\ldots (*)$

نعوض في (2)

$2(11 + 2y) - 3y - 18 = 0$

$22 + 4y - 3y - 18 = 0$

$y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4$

نعوض في (*) لايجاد x :

$x = 11 + 2(-4)$

$= 11 - 8 = 3$

$\therefore s = \{(3, -4)\}$

س2 : حل كل من المعادلتين الآتيتين بطريقة الحذف :

a) $3x - 4y - 12 = 0 \ldots (1)$

$5x + 2y + 6 = 0 \ldots\ldots (2)$

بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 نحصل على

$3x - \cancel{4y} - 12 = 0 \ldots\ldots (1)$

$10x + \cancel{4y} + 12 = 0 \ldots\ldots (2)$ بالجمع

$13x = 0 \Rightarrow x = 0$

نعوض في (1) لايجاد y

$3(0) - 4y - 12 = 0$

$-4y = 12 \Rightarrow y = -3$

$\therefore s\{(0, -3)\}$

b) $0.1x - 3y = 12 \ldots\ldots (1)$

$0.2x - 4y = 24 \ldots\ldots (2)$

بضرب طرفي الاولى في 4 وطرفي المعادله (2) في 3 :

$0.4x - \cancel{12y} = 48 \ldots\ldots (1)$

$\pm 0.6x \ \pm \cancel{12y} = \pm 72 \ldots\ldots (2)$ بالطرح

$-0.2x = -24$

$\therefore x = \frac{-24}{-0.2} \Rightarrow x = 120$

نعوض في (1)

$(0.1)(120) - 3y = 12$

$12 - 3y = 12$

$\Rightarrow y = 0$

$\therefore s = \{(120, 0)\}$

ملاحظة : يمكن ضرب طرفي المعادلتين (1) ، (2) في 10 للتخلص من الفارزة العشرية ، اكمال الحل .

س3 : حل كل معادلتين كما يأتي بيانياً وحقق الاجابة بطريقة أخرى :

الحل :

a) $3x + 2y = 12 ......(1)$

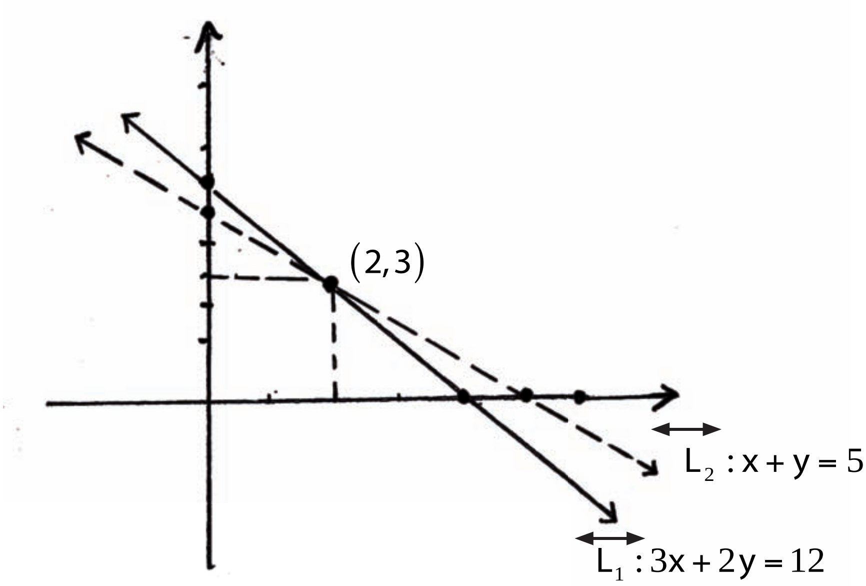
$x + y = 5 ....(2)$

x	y	(x,y)
0	6	(0,6)
4	0	(4,0)
2	3	(2,3)

$\overleftrightarrow{L_1} : 3x + 2y = 12$

x	y	(x,y)
0	5	(0,5)
5	0	(5,0)
2	3	(2,3)

$\overleftrightarrow{L_2} : x + y = 5$



b) حل المعادلتين جبرياً تعويض او حذف

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 ....(1)$

$2(x+1) + 3(y-3) = 2 ....(2)$

تبسط كل من المعادلتين بازالة الكسور في الاولى او الاقواس في الثاني :

$3x + 2y = 12............(1)$

$2x + 2 + 3y - 9 = 2$

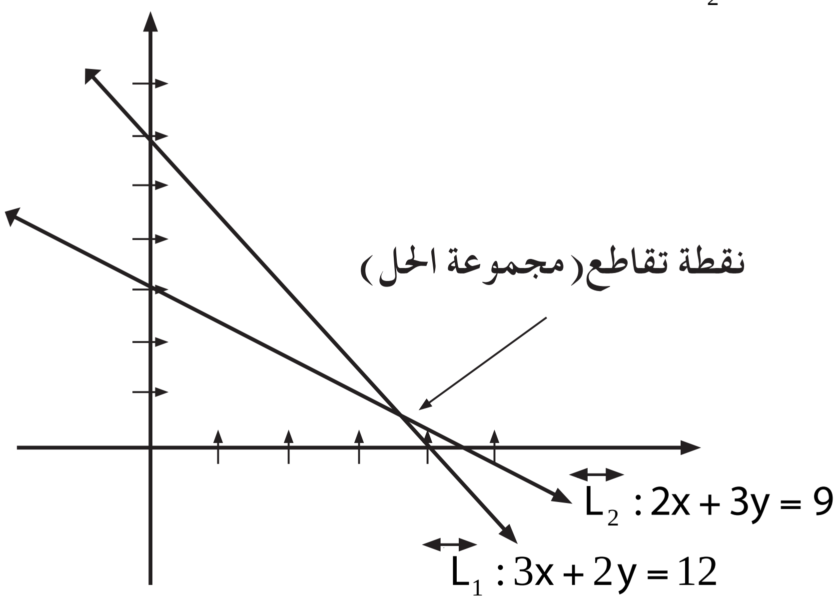
$2x + 3y = 9..............(2)$

x	y	(x,y)
0	3	(0,3)
$\frac{9}{2}$	0	$(\frac{9}{2},0)$
1	$\frac{7}{3}$	$(1,\frac{7}{3})$

$\overleftrightarrow{L_2} : 2x + 3y = 9$

x	y	(x,y)
0	6	(0,6)
4	0	(4,0)
1	$\frac{9}{2}$	$(1,\frac{9}{2})$

$\overleftrightarrow{L_1} : 3x + 2y = 12$



ملاحظة : نحل المعادلاتين آنياً لإيجاد نقطة تقاطع (x,y) والتي تمثل مجموعة الحل وهي $\left\{\left(\frac{18}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$

س4 : هل ان {(3,2)} مجموعة حل المعادلتين

$\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1.......(1)$

$\frac{3y}{2} + \frac{x}{3} = 4.......(2)$

الحل : لكي يكون الزوج المرتب (3,2) حلاً لكلتا المعادلتين يجب ان يحقق المعادلتين (1) و(2) :

1) $\frac{2\times 3}{3} - \frac{2}{2} = 1$

$2 - 1 = 1$

$1 = 1$

$2)\ \frac{3\times2}{2}-\frac{3}{3}=4$

$3+1=4$

$4=4$

$\therefore$ $\{(3,2)\}$ هي مجموعة حل المعادلتين

س5: اذا كانت $\{(2,-1)\}$ هي مجموعة حل المعادلتين ، جد **a,b**

$bx-2y=-2.......(1)$

$2x-ay=3.........(2)$

نعوض $x=2$, $y=-1$ في كلتا المعادلتين لان $(2,-1)$ يحقق المعادلتين .

المعادلة (1 : $b(2)-2(-1)=-2$

$2b+2=-2 \Rightarrow 2b=-4$

$\Rightarrow b=-2$

المعادلة (2 : $2(2)-a(-1)=3$

$4+a=3 \Rightarrow a=-1$

تمارين (3-4)

س1 / حل كلا من المعادلات الاتية :

1- $(x+1)(x-3) = 12$

2- $y^2=7y$

3- $3t^2-4=-11t$

4- $(2x-1)^2 = (2x-1)$........ باكثر من طريقة

5- $x^2-5=3x$ بالدستور

6- $4x^2+9=12x$

7- $\frac{1}{3}x^2=\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}$........ بالدستور

س2 / طول مستطيل يقل عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار ($1m$) فاذا كانت مساحة المستطيل ($44m^2$)

جد ابعاد المستطيل .

س3 / ثلاثة أعداد موجبة $(x+1)$ ، x ، $(x-1)$ مجموع مربعاتها يساوي (149) .

جد هذه الاعداد .

س 4 / ما العدد الذي اذا اضيف (5) الى مربعه كان الناتج (30) ؟

112

س5 / مثلث طول قاعدته يزيد عن ارتفاعه بمقدار ($1cm$) فاذا زاد كل من أرتفاعهُ وقاعدتهُ بمقدار ($2cm$) أصبحت مساحته ($21cm^2$) جدطول القاعدة والارتفاع .

س6 / قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ($y\ cm$) قطعت من زواياها اربعة مربعات متساوية طول ضلع كل منها ($2cm$) وثنيت بعدها فتكون صندوق على شكل متوازي سطوح مستطيله بدون غطاء حجمه ($242\ cm^3$) . جد طول القطعة المربعة .

س7 / مثلث قائم الزاويه طول أحد ضلعيه القائمين يزيد ($2cm$) عن الضلع القائم الاخر وطول وتره يقل ($2cm$) عن ضعف طول الضلع القائم الصغير . جد أطول اضلاع المثلث وما مساحته .

س8 /

a- ما قيمة الثابت (m) التي تجعل للمعادلة جذرين متساويين ؟

$$m(y^2+y+1)=y+1$$

b- ماقيمة الثابت (n) التي تجعل جذري المعادلة متساويين ؟

$$w^2-16=n(w+4)$$

س9 / حل المعادلات الاتية وحقق صحة الاجابة في كل منها :

a) $\frac{3y+5}{2y-1}=\frac{6y+2}{5y-4}$

b) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2-x}=\frac{2}{x^2-4}$

c) $\frac{y-7}{y^2-2y}=\frac{y}{y-2}-\frac{y+4}{y}$

d) $\frac{2y}{1-3y}=\frac{5}{3y-1}$

113

تمارين (3-4)

س1 : حل كلاً من المعادلات الآتية :

1) $(x+1)(x-3)=12$

$x^2-2x-3-12=0$....... ازالة اقواس

$x^2-2x-15=0$

$(x-5)(x+3)=0$

اما $x=5$

او $x=-3$

$\therefore s=\{-3,5\}$

ملاحظة : ينبه الطالب عند حل هذه المعادلة بالقاعدة الاساسية وهي :

اذا كانت : $ab=0$ فاما $a=0$ او $b=0$

2) $y^2=7y$

$y^2-7y=0 \Rightarrow y(y-7)=0$

ملاحظة : ينبه الطالب بعدم امكانية حذف y من الطرفين لان في هذه الحالة نفقد احدى القيم التي تحقق المعادلة

اما $y=0$

او $y=7$

$\therefore s=\{0,7\}$

3) $3t^2-4=-11t$

$3t^2+11t-4=0$

$(3t-1)(t+4)=0$

اما $3t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

او $t=-4$

$\therefore s=\left\{\frac{1}{3},-4\right\}$

4) $(2x-1)^2=(2x-1)$

$(2x-1)^2-(2x-1)=0$

$(2x-1)[2x-1-1]=0$....... تحليل

$(2x-1)(2x-2)=0$

اما $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

او $2x-2=0 \Rightarrow x=1$

$\therefore s=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

5) $x^2-5=3x$

$x^2-3x-5=0$....... وضع المعادلة بالصورة القياسية

$a=1, b=-3, c=-5$...... تعين معاملات الحدود

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$...... القانون

$\therefore x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-5)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}$

اما $x=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$

او $x=\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$

$\therefore s=\left\{\dfrac{3+\sqrt{29}}{2},\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\right\}$

6) $4x^2+9=12x$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\therefore 2x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$

$s=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

ملاحظة : نوضح للطالب التحليل بصورة اخرى

$(2x-3)(2x-3)=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$ مكررة في الحل ولا تكتب في مجموعة الحل.

7) $\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$ بالدستور

تيسيط الطرفين بالضرب في **6** :

$x^2 = 3x - 5$

$x^2 - 3x + 5 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}$

$\therefore$ المعادلة ليست لها حل في **R** لان

$\sqrt{-11} \notin R$

$\therefore s = \phi$ او $\{\ \}$

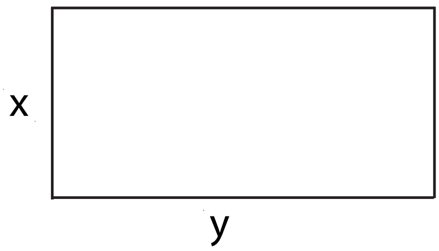
او يقال ان جذراها تخيليان .

س2 : طول مستطيل يقل عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار (**1m**) فاذا كانت مساحة المستطيل ($44m^2$)

جد ابعاد المستطيل .

نفرض العرض = **x**

نفرض الطول = **y**



ملاحظة : المساحة = الطول × العرض = **xy**

$3x - y = 1.....(1)$

$xy = 44.........(2)$

من **1** :

$\boxed{y = 3x - 1}........(*)$

نعوض في (**2**) للحصول على معادلة بمتغير واحد :

$x(3x-1) - 44 = 0$

$3x^2 - x - 44 = 0$

$(3x+11)(x-4) = 0$

اما $3x + 11 = 0$

$\therefore x = -\frac{11}{3}$ (غير ممكن)

$\therefore x = 4$

نعوض في (*) :

$\Rightarrow y = 11$

∴ الطول = **11m**

العرض = **4m** .

س3 : ثلاثة أعداد موجبة $(x+1)$ ، x ، $(x-1)$ مجموع مربعاتها يساوي (**149**) . جد هذه الاعداد .

الحل :

$$(x+1)^2 + x^2 + (x-1)^2 = 149$$

$$x^2 \cancel{+2x} + 1 + x^2 + x^2 \cancel{-2x} + 1 = 149$$ ازالة الاقواس

$$3x^2 - 147 = 0$$ ...... بالقسمة على (**3**)

$$x^2 - 49 = 0$$

$$(x+7)(x-7) = 0$$

اما : $x = -7$ (تهمل حسب شرط السوال)

او : $x = 7$

∴ الاعداد : **6، 7، 8**

س 4 : ما العدد الذي اذا اضيف (**5**) الى مربعه كان الناتج (**30**) ؟

الحل : نفرض العدد = **x**

$$\therefore x^2 + 5 = 30$$

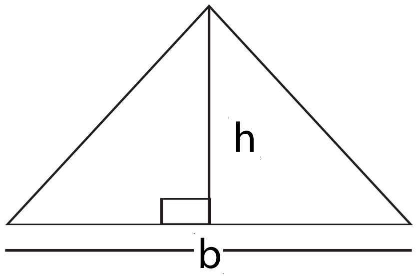
$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

∴ العدد المطلوب **5**– او **5**

س5 : مثلث طول قاعدته يزيد عن ارتفاعه بمقدار (**1cm**) فاذا زاد كل من أرتفاعهُ وقاعدتهُ بمقدار (**2cm**) أصبحت مساحته (**$21cm^2$**) جدطول القاعدة والارتفاع .

الحل :



نفرض ارتفاع المثلث = **h**

نفرض القاعدة = **b**

$$b = h + 1........(1)$$

بعد الزيادة : الارتفاع = **h + 2**

القاعدة = $b+2$

المساحة = $\frac{1}{2}$ (القاعدة) (الارتفاع)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(b+2)(h+2)=21.......(2)$$

نعوض عن b : من (1) في (2)

$$\frac{1}{2}(h+3)(h+2)=21 \Rightarrow h^2+5h+6=42$$

$$h^2+5h-36=0 \Rightarrow (h+9)(h-4)=0$$

اما : $h=-9$ (غير ممكن) $h-4=0 \Rightarrow h=4, b=5$

س6 : قطعة مربعة الشكل طول ضلعها (ycm) قطعت من زواياها اربعة مربعات متساوية طول ضلع كل منها (2cm) وثنيت بعدها فتكون صندوق على شكل متوازي سطوح مستطيله بدون غطاء حجمه (242 cm^3) . جد طول القطعة المربعة .

الحل : من ملاحظة الشكل ادناه : ابعاد الصندوق : 2 (الارتفاع)

(y − 4) طول ضلع القاعدة المربعة

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول × العرض × الارتفاع

$$\therefore 2(y-4)^2=242$$

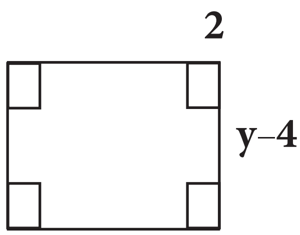
$(y-4)^2=121$ ..... بالقسمة على 2

$y-4=\pm 11$ بجذر الطرفين

اما : $y-4=11 \Rightarrow y=15$

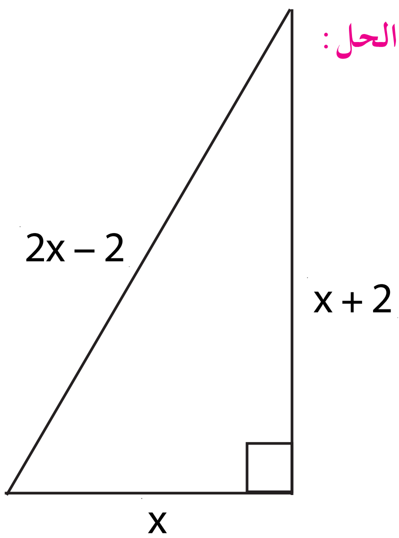
او : $y-4=-11 \Rightarrow y=-7$ (غيرممكن)

∴ طول ضلع القطعة المربعة = 15cm



س7 : مثلث قائم الزاويه طول أحد ضلعيه القائمين يزيد (2cm) عن الضلع القائم الاخر وطول وتره يقل (2cm) عن ضعف طول الضلع القائم الصغير . جد اطوال اضلاع المثلث وما مساحته .

الحل :



نفرض طول الضلع القائم الصغير = x

∴ طول الضلع القائم الآخر = x + 2

∴ طول الوتر = 2x − 2

$x^2+(x+2)^2=(2x-2)^2$ .... فيثاغورس

$x^2+x^2+4x\cancel{+4}=4x^2-8x\cancel{+4}$ ازالة الاقواس

$$2x^2-12x=0$$
$$2x(x-6)=0$$
$\therefore x=0$ (غير ممكن)

$$x=6$$

$\therefore$ اطوال اضلاع المثلث : **6** ، **8** ، **10** سنتمتر

مساحة المثلث = حاصل ضرب الضلعين القائمين $\frac{1}{2}$ = الارتفاع . القاعدة . $\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot(6)\cdot(8)$$
$$=24cm^2$$

س8: a) ما قيمة الثابت (**m**) التي تجعل للمعادلة جذرين متساويين ؟

$$m\left(y^2+y+1\right)=y+1$$

$$my^2+my+m-y-1=0$$

$my^2+(m-1)y+(m-1)=0$ ترتيب المعادلة بالصورة القياسية

$$a=m\ ,\ b=m-1\ ,\ c=m-1$$

يكون لمعادلة الدرجة الثانية حل واحد فقط (جذران متساويان) اذا كان المقدار المميز = صفر

$$b^2-4ac=0$$
$$(m-1)^2-4m(m-1)=0$$
$$(m-1)[m-1-4m]=0$$
$$(m-1)[-3m-1]=0$$

ملاحظة : يمكن التحقق من صحة الحل بالتعويض عن قيم **m** بالمعادلة اصلاً

اما : $m-1=0\Rightarrow m=1$

او : $-3m-1=0\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$

b- ماقيمة الثابت (**n**) التي تجعل جذرا المعادلة متساويين ؟

$$w^2-16=n(w+4)$$

$$w^2-16=nw+4n$$
$$w^2-nw-16-4n=0$$
$$a=1\ ,\ b=-n\ ,\ c=-16-4n$$

المميز = صفر

$$\Rightarrow b^2-4ac=0$$
$$(-n)^2-4(-16-4n)=0$$

$n^2 + 64 + 16n = 0$

$n^2 + 16n + 64 = 0$

$(n+8)^2 = 0 \Rightarrow n = -8$

س9 / حل المعادلات الاتية وحقق صحة الاجابة في كل منها :

a) $\frac{3y+5}{2y-1} = \frac{6y+2}{5y-4}$

$(3y+5)(5y-4) = (2y-1)(6y+2)$ ...... حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$15y^2 + 13y - 20 = 12y^2 - 2y - 2$

$3y^2 + 15y - 18 = 0$ بالقسمة على 3

$y^2 + 5y - 6 = 0$

$(y+6)(y-1) = 0 \Rightarrow y = -6, y = 1$

التحقيق : نعوض عن $y = -6$ بالمعادلة الاصلية

الطرف الايسر : $\frac{-18+5}{-12-1} = \frac{-13}{-13} = 1$

الطرف الايمن : $\frac{-36+2}{-30-4} = \frac{-34}{-34} = 1$

نعوض عن $y = 1$:

الطرف الايمن : $\frac{3+5}{2-1} = 8$

الطرف الايسر : $\frac{6+2}{5-4} = 8$

$\therefore s = \{-6, 1\}$

b) $\frac{5}{x+2} + \frac{3}{2-x} = \frac{2}{x^2-4}$

ملاحظة :

$a - b = -(b-a)$

$\frac{5}{(x+2)} + \frac{3}{-(x-2)} = \frac{2}{(x-2)(x+2)}$

$\frac{5}{(x+2)} - \frac{3}{(x-2)} = \frac{2}{(x-2)(x+2)}$

$5(x-2) - 3(x+2) = 2$.........LCM بالضرب في

$5x-10-3x-6-2=0$

$2x-18=0 \Rightarrow x=9$

$\therefore s=\{9\}$

c) $\dfrac{y-7}{y^2-2y}=\dfrac{y}{y-2}-\dfrac{y+4}{y}$

$\dfrac{y-7}{y(y-2)}=\dfrac{y}{y-2}-\dfrac{y+4}{y}$ ...... تحليل

بضرب طرفي المعادلة في $y(y-2)$

$(y-7)=y^2-(y+4)(y-2)$

$y-7=y^2-(y^2+2y-8)$

$y-7=\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-2y+8$

$y+2y=8+7 \Rightarrow 3y=15$

$\therefore y=5$

$s=\{5\}$: يمكن التحقيق بسهولة في المعادلة الاصلية

d) $\dfrac{2y}{1-3y}=\dfrac{5}{3y-1}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$2y(3y-1)=5(1-3y)$

$6y^2-2y=5-15y$

$6y^2+13y-5=0$

$(3y-1)(2y+5)=0$

اما : $3y-1=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$

او : $2y+5=0 \Rightarrow y=\dfrac{-5}{2}$

التحقيق : ($\dfrac{1}{3}$) لايحقق المعادلة

$\dfrac{-5}{2}$ تحقق المعادلة

$\therefore s=\left\{\dfrac{-5}{2}\right\}$

كل ماورد في الخلفية العلمية من امثلة أو أسئلة للمدرس فقط

5

الفصل الخامس

الهندسة

المثلث Triangle

[5-1] مراجعة .

[5-2] منصفات زوايا المثلث .

[5-3] القطع المتوسطة للمثلث .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الزاوية	Angle $\angle$
الضلع	Side S
علاقة التطابق	$\cong$
قياس الزاوية A	$m\angle A$

1 – تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

– قطعة المستقيم
– بعد نقطة عن المستقيم
– منصفات زوايا المثلث
– ارتفاعات المثلث
– القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث

الحقائق والتعميمات

– قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعي مثلث توازي ضلعه الثالث وطولها نصف طوله.
– المستقيم المار بمنتصف احد اضلاع مثلث موازياً لضلع ثان فيه ينصف الضلع الثالث.
– طول القطعة المستقيمة المرسومة من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر.
– الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها تتلاقى في نقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن رؤوس المثلث.
– منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوي الابعاد عن اضلاعه.
– ارتفاعات المثلث تلتقي بنقطة واحدة.
– القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة 1 :2 من جهة الرأس.

الخوارزميات والمهارات

– يتحقق ان
1 – القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث وطولها نصف طوله.
2 – منتصفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة.
3 – ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

2 – الاهداف السلوكية

في نهاية هذا الفصل ينبغي ان يكون الطالب قادراً على ان :
– يبرهن ان قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعي مثلث توازي ضلعه الثالث وطولها نصف طوله.
– يحل تمارين على هذه المبرهنة.
– يبرهن ان المستقيم المار بمنتصف اضلاع مثلث موازياً لضلع ثان فيه ينصف الضلع الثالث.
– يحل تمارين على هذه المبرهنة.
– يبرهن ان طول القطعة المستقيمة المرسومة من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر.

- يحل تمارين على هذه المبرهنة .
- يذكر ان الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها تتلاقى في نقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن رؤوس المثلث .
- يعّرف بعد نقطة عن مستقيم .
- يذكر ان منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة وتكون الابعاد متساوية عن اضلاعه .
- يذكر ان ارتفاعات المثلث تلتقي بنقطة واحدة
- يتعرف على القطع المتوسطة للمثلث .

3 – المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

سبورة ، طباشير ملون ،مثلثات مختلفة مرسومة على ورق كارتون ، مسطرة، منقلة

خطوات سير الدرس

التمهيد :

- وزع الطلاب الى مجموعات من 3 الى 4 طلاب واعط كل مجموعة عدد من المثلثات تتضمن زوايا حادة ومنفرجة وقائمة ومثلثات مختلفة الاضلاع ومتطابقة الضلعين ومتطابقة الاضلاع واطلب منهم تصنيفها حسب خصائصها الهندسية واعرض نتائجهم على بقية الطلاب .
- اسأل الطلاب ماعدد الفئات التي تم تقسيم المثلثات اليها الاجابة ستكون فئتين الاولى حسب نوع زواياه والثانية حسب اضلاعه .

4 – تدريس الموضوع

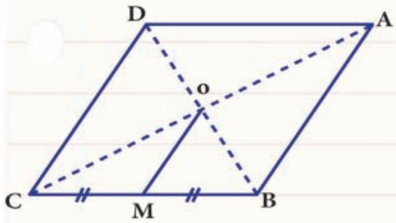
- ارسم مثلثاً اضلاعه الثلاثة تطابق الاضلاع الثلاثة لمثلث اخر اسأل الطلاب ان يقيسوا زوايا المثلثين سوف تكون متطابقة ومن خلال الامثلة وضح لهم بأن المثلثين متطابقان لتساوي اطوال اضلاعهما .وارمز لها بالرمز **SSS**.
- بنفس الطريقة وضح كيفية تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة بينهما **SAS** وزاويتين وضلع **AAS** والمثلث القائم الزاوية بوتر وضلع قائم كما موضح في صفحة **117** كتاب الطالب .
- ستمر على الطلاب العديد من المسميات الاعمدة والمنصفات والارتفاعات وتوقع ان يعاني بعض الطلاب صعوبات في ادراكها لذلك راجع معهم بعد نهاية كل مفهوم وناقشهم في اوجه الشبه والاختلاف بينها .
- حاول عند برهان المبرهنات استخدام المخطط السهمي موضحا فيه المعطيات والمطلوب اثباته .
- استخدم النقاش مع الطلاب في برهنة المبرهنات للتوصل للاجابة الصحيحة .
- يمكن الاطلاع على اثبات مبرهنة 3 جبرياً كما في مثال (1) ص 124

الاخطاء الشائعة ومعالجتها :

قد يخطىء بعض الطلبة في تمييز الاضلاع المتناظرة والزوايا المناظرة لها عند اثبات تطابق مثلثين ولمعالجة ذلك اعرض عليهم مثلثات متطابقة ودعهم يقصوا ويضعوا المثلثات ليلاحظوا الاضلاع والزوايا المناظرة مع ترتيب تسمية المثلثين بطريقة تمكنهم من فهم التطابق .

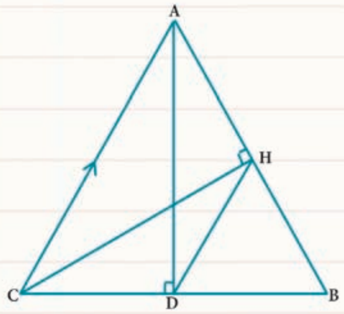
تمارين (5-1)

س1/ ABCD معين ، M نقطة منتصف $\overline{BC}$ أثبت ان :



$OM = \frac{1}{2}AB, \overline{OM} // \overline{AB}$

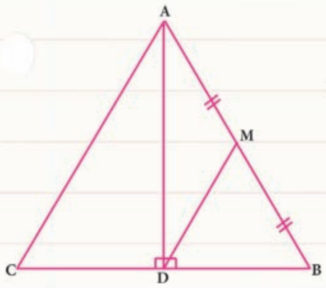
س2/ ΔABC متساوي الاضلاع فيه :



$\overline{AB} \perp \overline{CH}$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

أثبت ان : $\overline{DH} // \overline{AC}$

س3/ في الشكل المجاور :



ABC مثلث فيه $AB = AC$ (متساوي الساقين)

فيه : $BC=12$ cm , $AD=8$ cm

M نقطه متنصف $\overline{AB}$ جد MD

س4/ ABC مثلث متساوي الساقين فيه :

$AB = AC$, M منتصف $\overline{AB}$, D منتصف $\overline{BC}$

, N منتصف $\overline{AC}$ أثبت ان : AMDN معين

س5/ ABC مثلث ، فرضت النقطتان M ، N على $\overline{AB}$ بحيث ان $AM=MN=NB$

ونصفت $\overline{BC}$ في النقطه D وتقاطعت $\overline{CM}$ ، $\overline{AD}$ في O أثبت ان :

1) $\overline{CM} // \overline{DN}$

2) O منتصف $\overline{AD}$

3) $MO=\frac{1}{4}MC$

س6/ ABCD متوازي أضلاع ، تقاطع قطراه في O ، نصفت $\overline{BC}$ في P ، نصفت $\overline{CD}$ في N

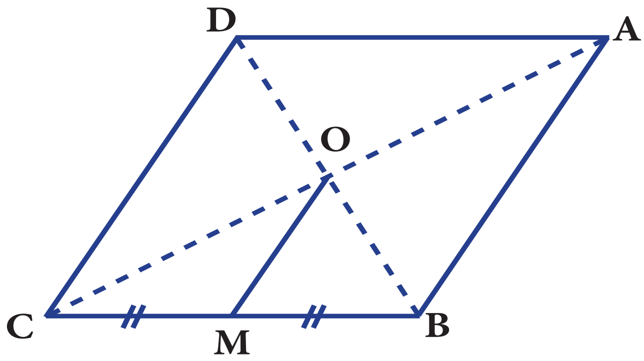
أثبت أن : OPCN متوازي أضلاع.

تمارين (1–5)

س1: المعطيات ABCD معين ، تقاطع قطراه في نقطة O ، M نقطة منتصف $\overline{BC}$

م . ث : 1) $\overline{OM} // \overline{AB}$

2) $OM = \frac{1}{2} AB$



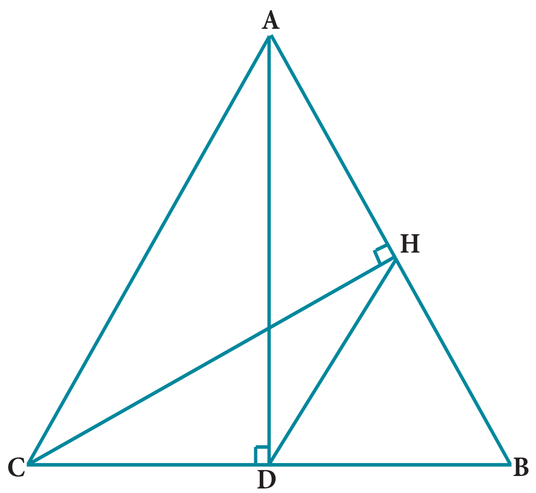
البرهان : في المثلث ABC : $CO = OA$

(قطرا متوازي الاضلاع متناصفان)

$CM = MB$ ..... معطى

$\therefore \overline{OM} // \overline{AB}$ (قطعة المستقيم الواصلة بين

$OM = \frac{1}{2} AB$ متنصفي ضلعين في مثلث توازي ضلعه الثالث وطولها يساوي نصف طوله)



س2: المعطيات ABC مثلث متساوي الاضلاع فيه :

$\overline{CH} \perp \overline{AB}, \overline{AD} \perp \overline{BC}$

م. ث : $\overline{DH} // \overline{CA}$

البرهان : ΔABC متساوي الاضلاع

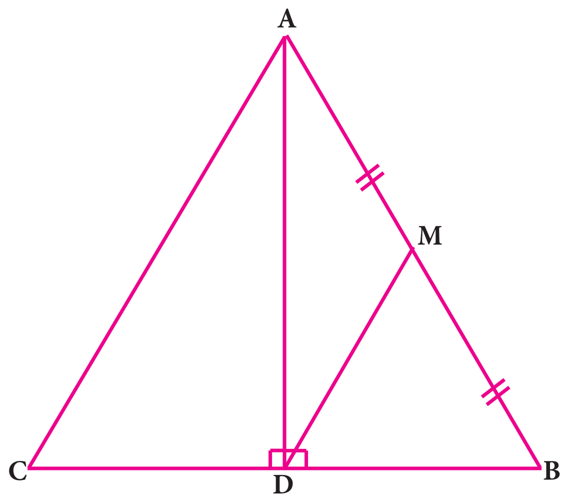
اي ان : $AB = AC = BC$ ،

كذلك $\overline{CH} \perp \overline{AB}, \overline{AD} \perp \overline{CB}$ .... معطى

$\therefore CD = DB, HB = HA$ .... (خواص المثلث

المتساوي الساقين اي ان H منتصف $\overline{AB}$ ، D منتصف $\overline{CB}$)

$\therefore \overline{DH} // \overline{CA}$ ...... (قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث....)



س3: المعطيات: ABC مثلث فيه $AB = AC$

$BC = 12cm, AD = 8cm$, $\overline{BC} \perp \overline{AD}$

M نقطة منتصف $\overline{AB}$

م. ث : $MD \ (m\overline{MD})$

الحل : في المثلث ADB القائم الزاوية في D

$MB = AM$ .... معطى

$AC = AB$ ..... معطى

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ معطى

$\therefore D$ منتصف $\overline{BC}$ ... خواص المثلث المتساوي الساقين $(CD = BD = 6cm)$

$\therefore AC \frac{1}{2} = DM$ ...(1) (قطعة المستقيم الواصلة بين....)

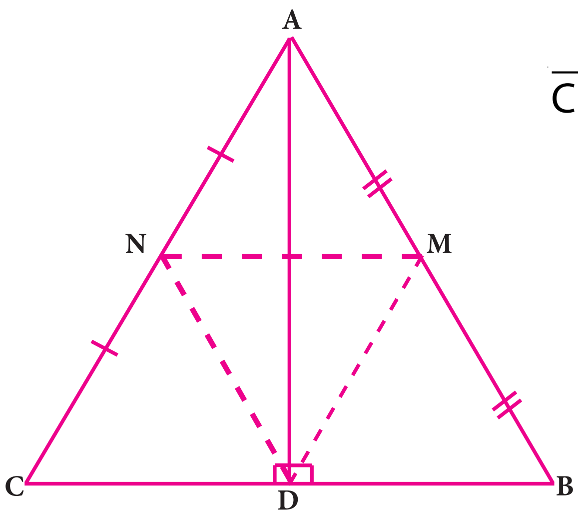
فيثاغورس .... $(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$

$= 64 + 36 = 100$

نعوض في (1) $\Rightarrow AC = 10cm$

$DM = \frac{1}{2} \times 10 = 5cm$

ملاحظة : يمكن الحل باستخدام المبرهنة الاخرى ((قطعة المستقيم الواصلة من رأس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر .



س4: المعطيات : ABC مثلث فيه : $AB = AC$ ،

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، M نقطة منتصف $\overline{BA}$ ، N منتصف $\overline{CA}$

م.ث : AMDN معين

البرهان:

$\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$ ..... معطى

$\therefore D$ منتصف $\overline{BC}$ ... خواص Δ متساوي الساقين

$\overline{DM} // \overline{NA}$ ، $DM = NA = \frac{1}{2} CA$

(قطعة المستقيم الواصلة بين ...)

$\therefore$ الشكل AMDN متوازي اضلاع (يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا وجد فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان) .

$\because \overline{CD} // \overline{NM}$ (قطعة المستقيم الواصلة .....)

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{NM}$ (المستقيم العمودي على احد ....)

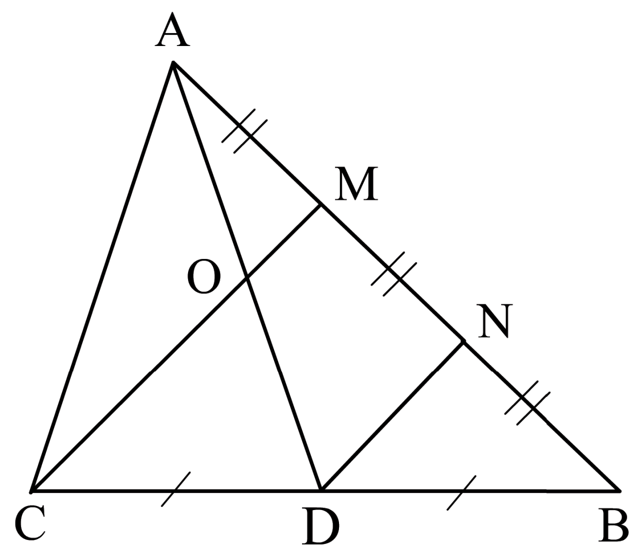
$\therefore$ الشكل AMDN معين ... المعين هو متوازي اضلاع قطراه متعامدان

ملاحظة فكرة اخرى للحل بأثبات ان $\overline{MA}, \overline{DN}$ قطعتان متوازيتان ومتطابقتان .

س5: المعطيات : ABC مثلث فيه

$M, N \in \overline{BC}$ بحيث : $AM = MN = NB$

D منتصف $\overline{BC}$ ، $\overline{CM} \cap \overline{AD} = \{0\}$



م .ث : 1) $\overline{CM} // \overline{DN}$

2) $MO = \frac{1}{4} MC , AO = OD$

البرهان : في المثلث **BMC** :

$\because$ $BN = NM , BD = DC$ ..... معطى

$\therefore$ $\overline{DN} // \overline{CM}$ ، $DN = \frac{1}{2} CM$

(قطعة المستقيم الواصلة ..)

في المثلث : **ADN** :

$\because$ $AM = MN$ ..... معطى

$\overline{OM} // \overline{DN}$ ...... بالبرهان اعلاه

$\therefore$ $OA = OD$ ..... المستقيم المرسوم من منتصف اضلاع مثلث موازياً لضلع ثانٍ فيه ينصف ضلعه الثالث.

$\therefore$ $OM = \frac{1}{2} DN$ .... (1)

لكن $DN = \frac{1}{2} CM$ بالبرهان........ (2)

نعوض من (2) في (1) :

$\therefore$ $OM = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} CM\right)$

$\Rightarrow OM = \frac{1}{4} CM$

س6 : المعطيات : **ABCD** متوازي اضلاع ،

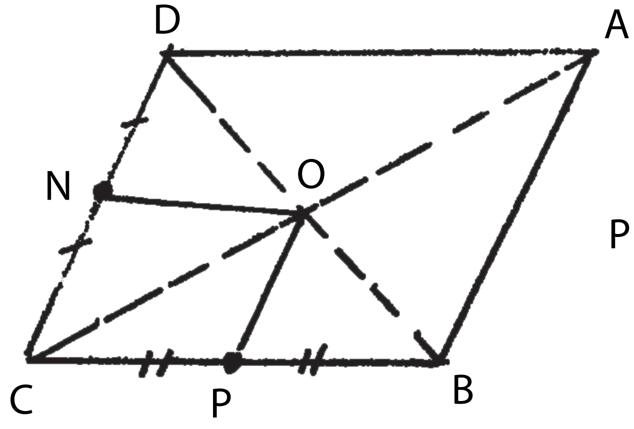
$\overline{CA} \cap \overline{BD} = \{0\} , BP = CP , CN = ND$

م .ث : **OPCN** متوازي اضلاع

البرهان : $DO = OB$ ((قطرا متوازي الاضلاع متناصفان))

$\therefore$ $\overline{OP} // \overline{DC}$ وبنفس الطريقة تكون : $\overline{BC} // \overline{NO}$ (القطعة المستقيمة الواصلة ....)

$\therefore$ الشكل **OPCN** متوازي اضلاع ((يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا كانت اضلاعه المتقابلة متوازية))



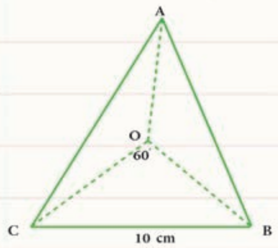
فكرة اخرى : $\overline{OP} // \overline{CN} , PO = \frac{1}{2} CD = CN$

المبرهنة نفسها الشكل **OPCN** متوازي اضلاع

تمارين (5-2)

س1/ في الشكل : O نقطة التقاء الاعمدة المقامة على أضلاع المثلث ABC من منتصفاتها

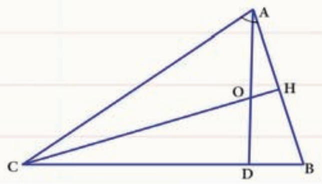
$m\angle COB = 60^\circ$ ، $BC = 10$ cm جد OA.



س2/ Δ ABC نصفت الزاويتان B , C فألتقى المنصفان في نقطة O ، ثم رسم مستقيم يمر من O ويوازي $\overline{AC}$ ويقطع $\overline{AB}$ في H ويقطع $\overline{BC}$ في M أثبت ان AH = HO .

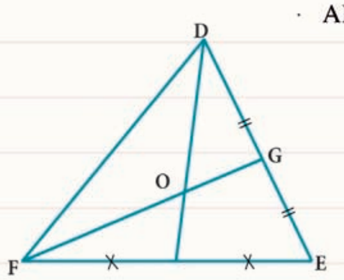
س3/ ABCD شبه منحرف فيه : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، AB=AD=DC , $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$ ، $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} = \{H\}$ برهن ان : $\overrightarrow{HO}$ ينصف الزاوية BHC

س4/ في الشكل : المثلث ABC فيه : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, O نقطة التقاء أرتفاعات المثلث ABC ، $m\angle BAC = 70^\circ$ جد : $m\angle ACH$ ، $m\angle CHA$.



132

س5/ المثلث ABC , O نقطة التقاء القطع المتوسطة ، $m\angle COB = 90^\circ$ ، $\overline{AO} \cap \overline{BC} = \{D\}$ ، BC=6 cm جد AD .



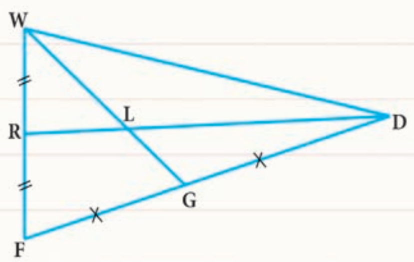
س6/ في الشكل أعلاه : O نقطة التقاء القطع المتوسطة في Δ DEF . فاذا كان :

$GF = 6x^2 + 9y$ فأى من المقادير التاليه يمثله OF ؟

a) $2x^2+9y$ b) $2x^2+3y$ c) $6x^2+9y$ d) $4x^2+6y$

س7/ في الشكل : اذا كان : $WL = 15x$ ، $LG = 5x+3$ أختر الاجابة الصحيحة لقيمة x؟

a) 0.3 b) 0.4 c) 0.6 d) 1.2



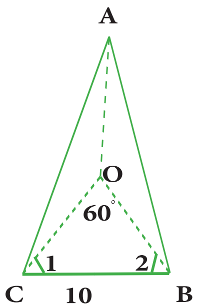
133

س1 : في الشكل :

م . ايجاده : OA أو $m(\overline{OA})$

الحل : ∵ O هي نقطة التقاء الاعمدة المقامة على اضلاع المثلث من منتصفاتها

∴ $OA = OB = OC$ .... (مبرهنة 4)



∴ $m\angle 1 = m\angle 2$ .... خواص Δ متساوي الساقين

∵ $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle COB = 180°$ زوايا مثلث

∴ $2m\angle 1 = 180° - 60° = 120°$ تعويض عن $m\angle 2$

∴ $m\angle 1 = m\angle 2 = 60$

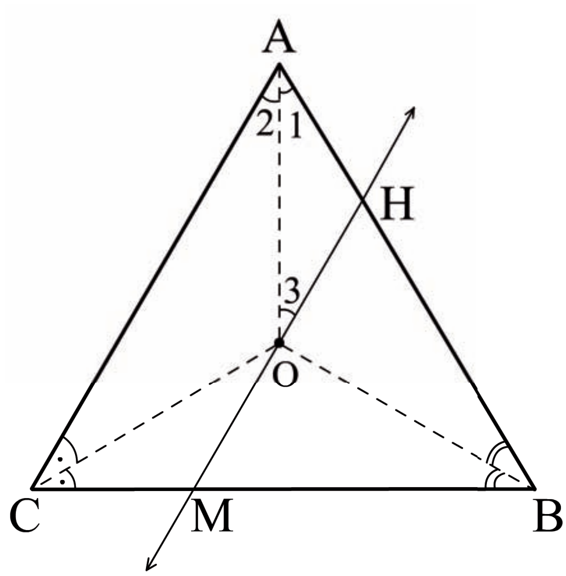
∴ المثلث COB متساوي الاضلاع

∴ $OB = OC = OA = 10cm$

س2 : المعطيات : ABC مثلث ، نصفت زاويتا C,B

فالتقا المنصفان في O ، رسم من O مستقيم يوازي $\overline{AC}$ ويقطع $\overline{AB}$ في H ويقطع $\overline{BC}$ في M .

م . ث : $AH = HO$



البرهان : نرسم $\overline{OA}$

∵ O نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث معطى

∴ $\overline{AO}$ منصف للزاوية A

∴ $m\angle 1 = m\angle 2$

لكن $m\angle 2 = m\angle 3$ بالتبادل لان $\overline{CA} // \overline{OH}$

∴ $m\angle 1 = m\angle 3$ بالاستعاض عن $m\angle 2$

∴ $AH = HO$ ((في اي مثلث تتساوي الاضلاع المقابلة للزوايا المتساوية)) .

س3 :

م . ث : $\overline{HO}$ ينصف زاوية H

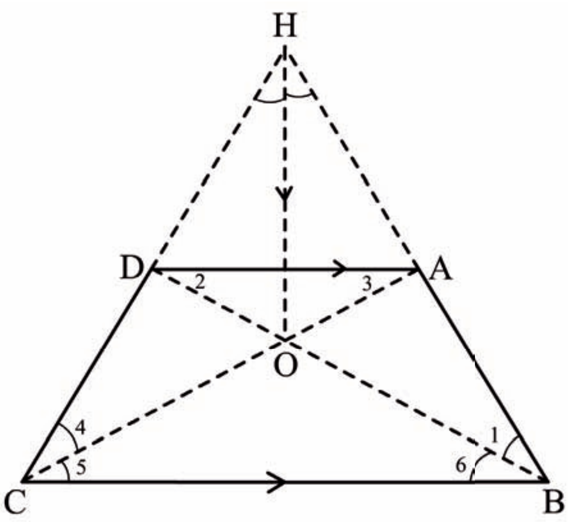
البرهان :

∵ $AB = AD$ معطى

∴ $m\angle 1 = m\angle 2$ كذلك : $m\angle 4 = m\angle 3$ (خواص المثلث المتساوي الساقين)

∵ $m\angle 2 = m\angle 6$ ، $m\angle 3 = m\angle 5$ (بالتبادل والتوازي لان : $\overline{DA} // \overline{CB}$)

∴ $m\angle 1 = m\angle 6$ ، $m\angle 4 = m\angle 5$ بالاستعاضة



$\therefore$ $\overline{BO}$ منصف زاوية B

$\overline{CA}$ منصف زاوية C

$\overline{HO}$ منصف زاوية H تعريف منصفات الزوايا

س4 : المعطيات : **ABC** مثلث فيه :

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$,O نقطة التقاء ارتفاعات المثلث ABC

$m < BAC = 70°$

المطلوب : $m < 2, m < 3$

الحل / $\because$ **O** نقطة التقاء ارتفاعات المثلث .... معطى

$\therefore$ $\overline{CH} \perp \overline{AB}$

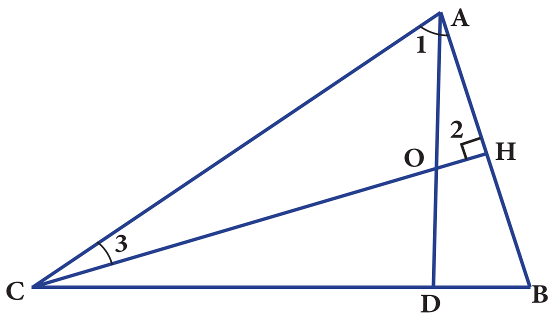
$\therefore$ $m < 2 = 90°$ .... الارتفاع يصنع زاوية قائمة

$\because$ $m < 1 + m < 3 + m < 2 = 180°$ زوايا مثلث

$\therefore$ $m < 3 = 180° - (90° + 70°)$

$= 180° - 160°$

$= 20°$



س5 : المطلوب ايجاده : AD او $m(\overline{AD})$

الحل : **COB Δ** قائم الزاوية في **O** ...... معطى

$CD = DB$ ..... معطى لان $\overline{AD}$ قطعة مستقيم متوسطة

$\therefore$ $OD = \frac{1}{2} CB = 3cm$ .... (قطعة المستقيم الواصلة من رأس القائمة في المثلث القائم الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر).

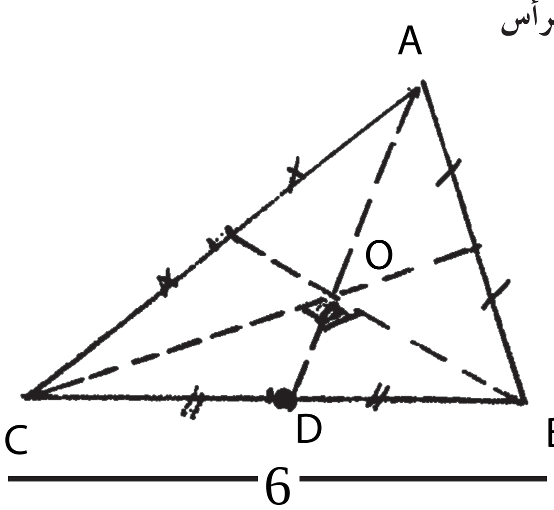
$\therefore$ نقطة **O** تقسم كل قطعة متوسطة بنسبة **1 :2** من جهة الرأس

$\therefore$ $AO = 6cm$

$\therefore$ $AD = 9cm$

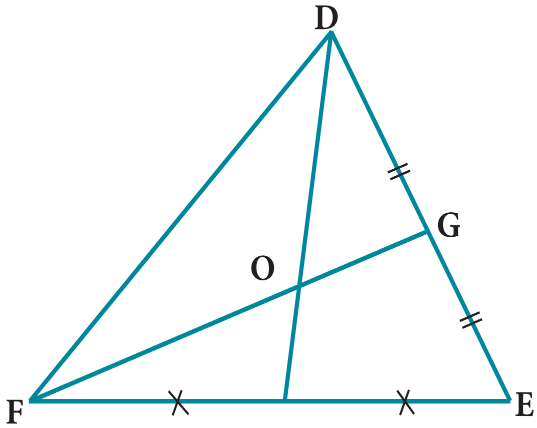
او بفكرة اخرى : $\frac{OD}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = 3OD$

$= 9cm$



س6 : a) المعطيات : O نقطة التقاء القطع المتوسطة في المثلث DEF ، $GF = 6x^2 + 9y$

المطلوب : OF بدلالة x^2, y



الحل : ∵ O نقطة التقاء القطع المتوسطة ... معطى

∴ O تقسم كل قطعة متوسطة نسبة 1 :2 من جهة الرأس

∴ $\frac{1}{2} = \frac{OG}{OF}$ كذلك $\frac{2}{3} = \frac{OF}{GF}$

∴ $OF = \frac{2}{3} GF$

$= \frac{2}{3}(6x^2 + 9y)$

$= 4x^2 + 6y$

او بفكرة اخرى : OG يمثل جزء واحد من OF, GF يمثل جزئين من GF اي $OF = 2GF$

b) في الشكل :

$WL = 15x$

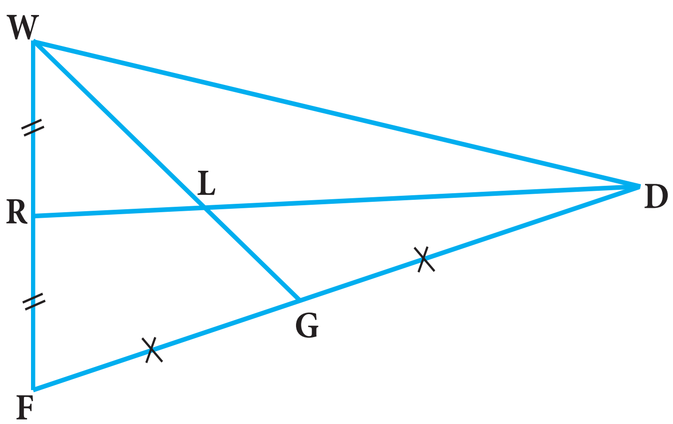
$LQ = 5x + 3$

س7 : اختر الاجابة الصحيحة لقيمة x

الحل /

∵ L نقطة التقاء القطع المتوسطة في المثلث

∴ L تقسم القطع بنسبة 1 :2 من جهة الرأس



∴ $\frac{LG}{WL} = \frac{1}{2}$

$WL = 2(LG)$

$15x = 2(5x + 3)$

$15x = 10x + 6$

$5x = 6$

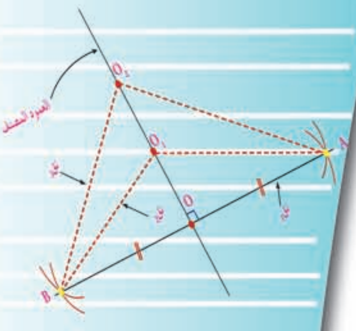
$\Rightarrow x = \frac{6}{5} = 1.2$

∴ الاجابة الصحيحة هي فرع D

6 الفصل السادس

الدائرة

Circle

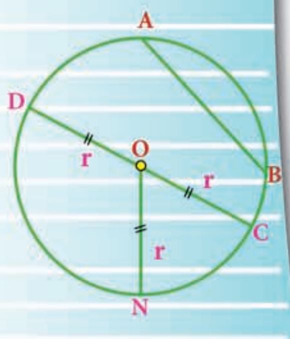


[6–1] الدائرة .

[6–2] كيفية تعيين (رسم) الدائرة .

[6–3] الاقواس .

[6 – 4] التماس .



المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
نصف القطر	r
النسبة الثابتة	π
القوس AB	$\overset{\frown}{AB}$

1 – تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

– الدائرة .
– الزاوية المحيطية .
– الزاوية المركزية.
– التماس.
– المماس ، نقطة التماس.
– المماس المشترك.
– الزاوية المماسية.

الحقائق والتعميمات

– قطر الدائرة اكبر اوتارها الذي يمر بمركزها.
– كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.
– قطر الدائرة يقسمها الى قوسين متساويين.
– الزاوية المركزية في الدائرة رأسها مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.
– قياس الزاوية المركزية في دائرة يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس نفسه.
– او قياس الزاوية المحيطية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس نفسه.
– مجموع قياس الزاويتين المتقابلين في اي شكل رباعي دائري = 180^0.
– قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = 90^0.
– اذا تطابق قوسان في دائرة فأن زاويتيهما المركزيتين متطابقتان
– اذا تطابق قوسان في دائرة فأن زاويتيهما المحيطتين متطابقتان .
– القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر وينصف كلا من قوسيه.
– قطر الدائرة المار بمنتصف الوتر يكون عمودياً على ذلك الوتر.
– المماس مستقيم مشترك مع الدائرة نقطة واحدة فقط تسمى نقطة التماس.
– الزاوية المماسية ضلعاها مماس ووتر ورأسها نقطة التماس.
– المماس عمود على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.
– المستقيم العمودي على قطر دائرة عند نهايته المنتمية للدائرة يكون مماساً للدائرة.
– نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث هي مركز الدائرة التي تمس اضلاع المثلث .
– تقابل قطعتا المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة زاويتين مركزيتين متساويتين.
– قطعة المستقيم (الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة الخارجة عن الدائرة) تنصف الزاوية التي ضلعاها القطعتان المماسيتان.
– قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر الدائرة (ضلع الزاوية) من الجهة الاخرى .

2 - الاهداف السلوكية

نتوقع في نهاية الدرس ان يكون الطالب متمكناً من ان :

يعرف الدائرة

يستنتج ان الوتر المار بمركز الدائرة هو قطر الدائرة

يستنتج ان اطوال اوتار الدائرة المار بمركزها هو قطرها

يعرف ان يمكن رسم دائرة من نقطة معلومه لكنها ليست الوحيدة (مجموعة غير محددة من الدوائر)

يعرف القوس الثانوي ويكتب رمزه بحرفين فوقهما قوس

يعرف القوس الرئيسي ويكتب رمزه بثلاث حروف فوقها قوس

يميز بين القوس الثانوي والقوس الرئيسي

يحدد الزاوية المركزية بحروف مؤشرة في الدائرة

يسمى الزاوية المحيطية من شكل مرسومة الدائرة

يستنتج ان قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس نفسه

يبرهن ان قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس قوسها

يبرهن ان مجموع قياس الزاويتين المتقابلتين في اي شكل رباعي دائري يساوي 180^0

يبرهن ان قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة يساوي 90^0

يجد قيمة الزاوية المجهولة المرسومة في نصف دائرة غير الزاوية القائمة

يبرهن اذا تطابق قوسان في دائرة فان زاويتيهما المركزيتين تتطابقان

يبرهن اذا تطابق قوسان في دائرة فان زاويتيهما المحيطيتين تتطابقان

يبرهن ان القطر العمودي على وتر دائرة ينصف الوتر وينصف كلا من قوسيه

يبرهن ان قطر الدائرة المار بمنتصف الوتر يكون عموديا على ذلك الوتر

تعريف الزاوية المماسية

يبرهن ان المماس عمود على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

يبرهن ان مماسي الدائرة الذان يمسانها من طرفي القطر متوازيان

يعرف ان المستقيم العمودي نصف قطر دائرة عند نهاية المنتمية للدائرة يكون مماسا للدائرة

يبرهن ان نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث هي مركز الدائرة التي تمس اضلاع المثلث

يبرهن ان القطعتين المماسيتين المرسومتين لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان

يعرف انه اذا رسم لدائرة من نقطة خارجة عنها قطعتان مماسيتان او مماسان فانهما :

1 - تقابلان زاويتين مركزيتين متساويتين.

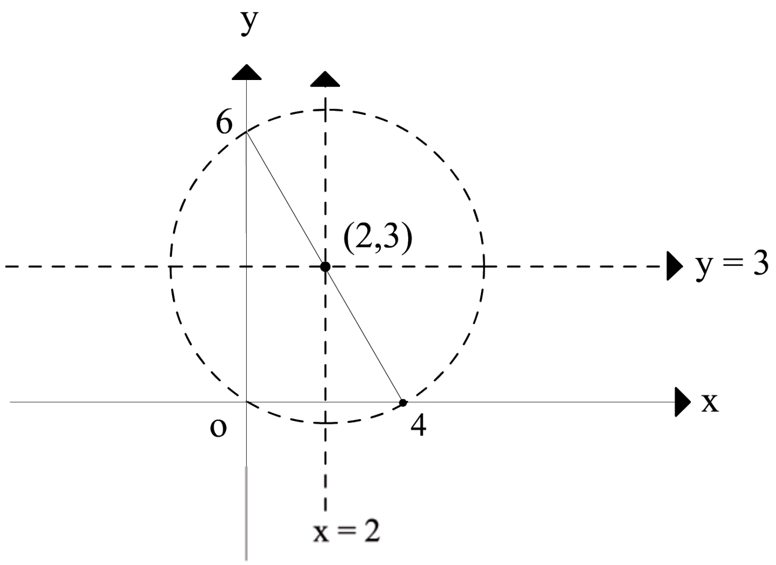
2 - قطعة المستقيم الواصلة بين الدائرة والنقطة الخارجة عن الدائرة تنصف الزاوية التي ضلعها القطعتان المماسيتان.

3 - قطعة المستقيم الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة الخارجة عنها تنصف قطعة المستقيم الواصلة بين نقطتي التماس

او يمكن الاشارة اليها ب (يعرف نتيجة مبرهنة 16) ص 159 يعرف قياس الزاوية المماسية في دائرة قياس الزاوية.

3 - خلفية علمية للمدرس

بمستوى هذه المرحلة نعتقد ان مايحتاجه الطالب هو المزيد من التمارين الهندسية التي تميل الى الحلول الجبرية منها الى الحلول الهندسية الصرفة والتي سوف تساعده في تنمية قدراته وتكسبه مهارات اكثر في حل مختلف المسائل وسوف نعرض فيما يلي مجموعة من التمارين الجديدة المختلفة الافكار.

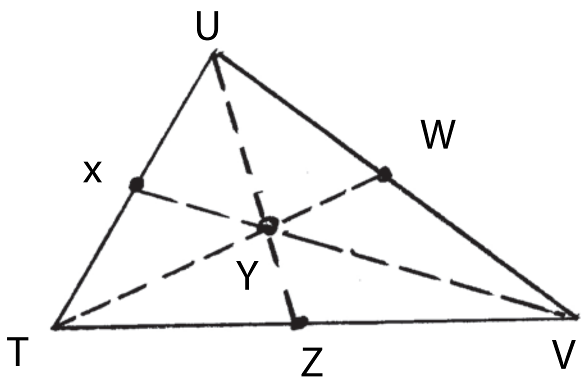


مبرهنة(4) : الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث تلاقى في نقطة واحدة وتكون متساوية البعد عن رؤوسه

تمرين1 : في الشكل المجاور وضح طريقة ايجاد مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث حسب المبرهنة اعلاه.

ثم بين لماذا من غير الضروري ايجاد العمود المنصف للضلع الثالث في المثلث؟

تمرين 2 : جد مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث الذي رؤوسه $(0,6),(-8,0),(0,0)$



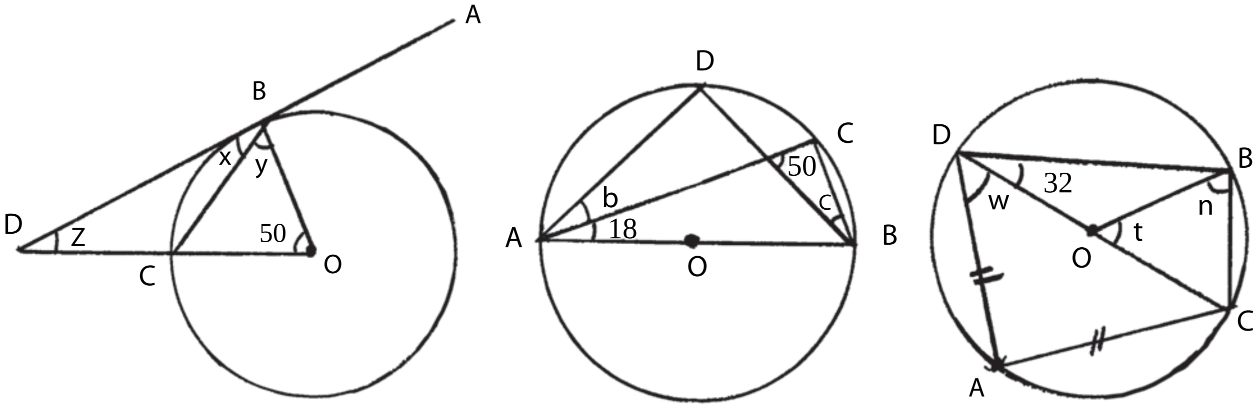
في الشكل المجاور y نقطة التقاء المستقيمات المتوسطة في المثلث UTV:

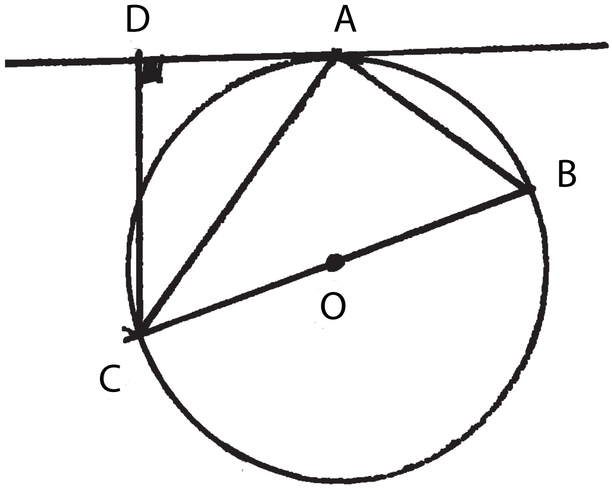
1) اذا كانت $WY = 9$ جد TY , TV

2) اذا كانت $YU = 9$ جد ZU , ZY

3) اذا كانت $VX = 9$ جد YU , VY

تمرين 3 : جد قياس الزوايا المؤشرة بالاحرف في الاشكال الآتية :





تمرين 4 : في الشكل : $\overline{BC}$ قطر للدائرة التي مركزها O ، $m\angle CDA = 90^0$ اثبت ان : $\overline{AC}$ ينصف $\angle BCD$

* دائرة مركزها **O** تمس اضلاع مثلث قياسات زواياه $50^0, 60^0, 70^0$ فاذا كانت نقاط التماس هي **C,B,A** جد قياسات زوايا المثلث **ABC** .

4 - المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

سبورة ، طباشير ملون ،مثلثات مختلفة مرسومة على ورق كارتون ، مسطرة، منقلة

خطوات سير الدرس

التمهيد :

من منا ما سمع بالدائرة او راها ؟ الجواب بالتاكيد اننا قد سمعنا ورأينا .

حسنا فلنعيد ترتيب افكارنا ونبدا بالتوسع بتناولنا اياها

اولا : تعريفها : كما ورد في ص 135 .

بين ان اقطار الدائرة الواحدة متساوية دائما بيما اوتار الدائرة ليست متساوية دائما .

ارسم ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة

اخبرهم اننا نسلم بصحتها . . يمكن الاستعانة بالشكل في ص 136 انتقل الى التدريب .

1 - ارسموا في دفاتركم دوائر تمر برؤوس مثلثات متساوية الاضلاع قياسات اطوال اضلاعها 4سم ، 5سم ، 6سم على التوالي .

2 - نصفوا اضلاع اطوال المثلث المرسوم في دائرة ثم اقيموا منها اعمدة ماذا تستنتجوا ؟

بعد الاطلاع على رسوم واجابات الطلاب اخلص الى القول والكتابة تلتقي الاعمدة المقامة من منتصفات اضلاعها بنقطة واحدة .

1 - تسمى هذه النقطة مركز الدائرة .

2 - تكون متساوية البعد عن رؤوس المثلث ، وتسمى انصاف اقطار الدائرة التي مرت برؤوس المثلث المتساوي الاضلاع .

وضح انه ممكن رسم اشكال هندسية ذات اضلاع مختلفة تمر دائرة برؤوسها وتسمى بعدد اضلاعها (مثل شكلا رباعياً دائرياً) .

ثالثا . تعريف الزاوية المركزية .

رابعا . تعريف الزاوية المحيطية .

خامسا . المقارنة مع الزاوية المركزية والزاوية المحيطية .

ميز بين وحدة قياس الزاوية ووحدة قياس القوس .

ان قياس الزاوية هو درجة بينما قياس قوسها يكون درجة قوسية .

برهن المبرهنة 11 ص 146

اكتب المنطوق على السبورة

وضح المعطيات ثم المطلوب اثباته

استعن بالطلاب للوصول الى المطلوب اثباته

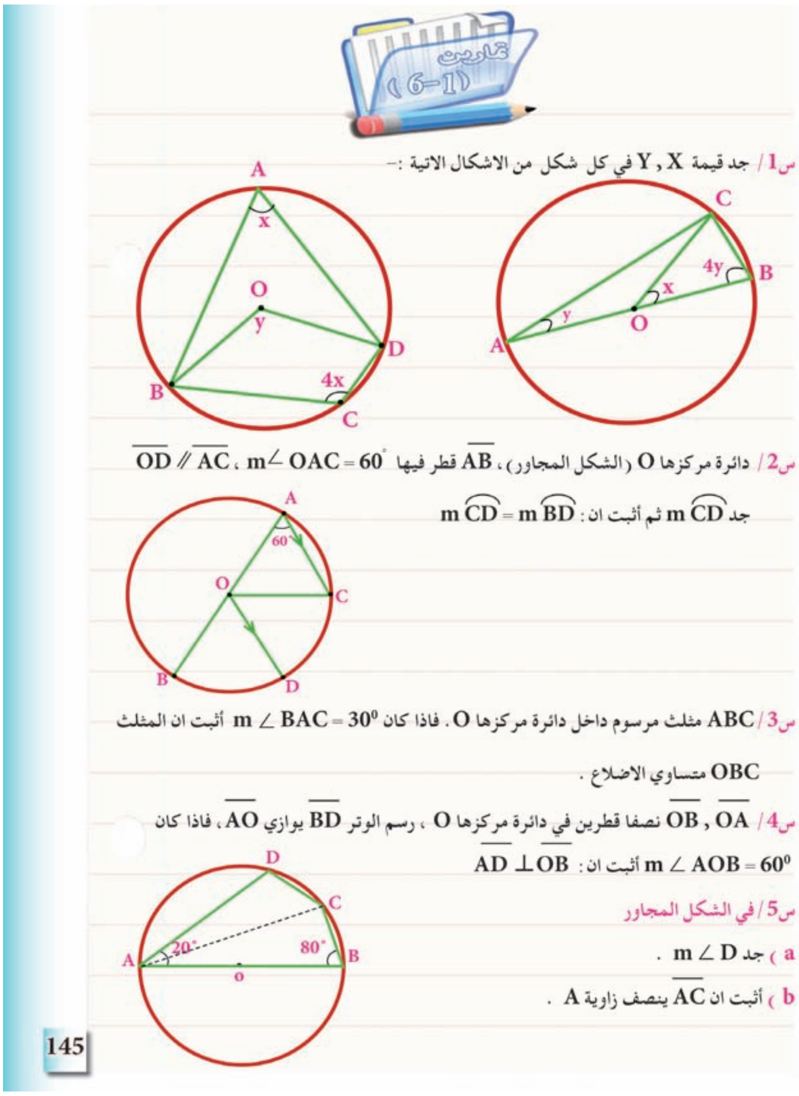
اطلب على السبورة برهنة نتيجة مبرهنة 11 بعد ان تكتب المنطوق من السبورة

برهن مبرهنة 12 ص 147

حل مثال (2) او مايشابهه (بأختلاف الاطوال فقط)

اثبت ان الدائرتين المتحدتين في المركز تكون الابعاد بين محيطيهما متساوية .

5 – حل التمرينات



تمارين (6-1)

س1/ جد قيمة X , Y في كل شكل من الاشكال الاتية :-

س2/ دائرة مركزها O (الشكل المجاور)، $\overline{AB}$ قطر فيها $m\angle OAC = 60^\circ$ ، $\overline{OD} \parallel \overline{AC}$

جد $m\,\widehat{CD}$ ثم أثبت ان: $m\,\widehat{CD} = m\,\widehat{BD}$

س3/ ABC مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها O . فاذا كان $m\angle BAC = 30^0$ أثبت ان المثلث OBC متساوي الاضلاع .

س4/ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ نصفا قطرين في دائرة مركزها O ، رسم الوتر $\overline{BD}$ يوازي $\overline{AO}$ ، فاذا كان $m\angle AOB = 60^0$ أثبت ان: $\overline{AD} \perp \overline{OB}$

س5/ في الشكل المجاور

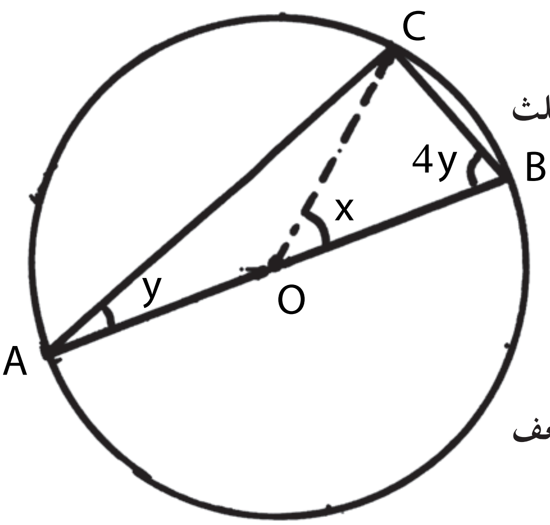
a) جد $m\angle D$.

b) أثبت ان $\overline{AC}$ ينصف زاوية A .

145

تمارين (6-1)

س1 : في الشكل المجاور : جد x,y



الحل : $m< ACB = 90^0$ ... محيطية في نصف دائرة

$\because$ $m< ACB + m< A + m< B = 180^0$ زوايا مثلث

$\therefore$ $y + 4y + 90^0 = 180^0$

$5y = 90^0$

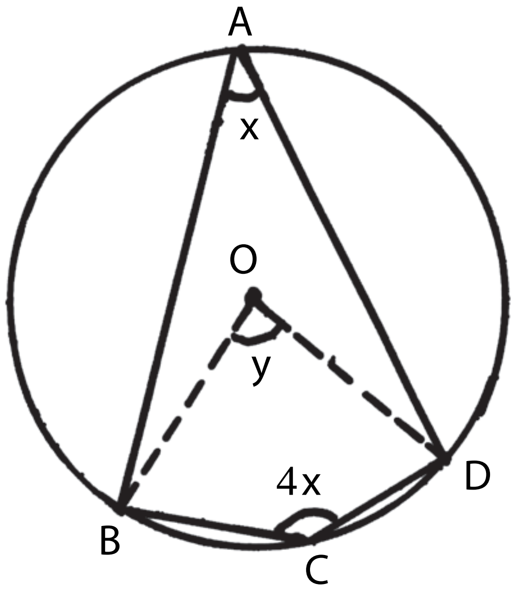
$\therefore y = 18^0$

$\therefore$ $m< COB = 2m< CAB$ .... قياس المركزية ضعف قياس المحيطية المشتركة بنفس القوس

$\therefore x = 2y$

$\therefore x = 2 \times 18^0 = 36^0$

في الشكل المجاور : جد x,y



$m<C + m<A = 180^0$

..... زاويتان متقابلتان

في شكل رباعي دائري

$\therefore 4x + x = 180$

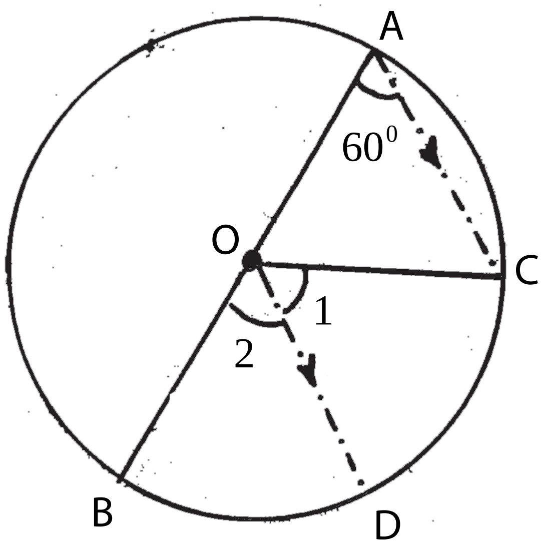
$5x = 180$

$\therefore x=36^0$

$m<BOD = 2m<A$ قياس المركزية .....

$y = 2x$

$\therefore y = 2\times 36^0 = 72^0$



س2 : في الشكل : المطلوب : 1) $m\overset{\frown}{CD}$

2) أثبت ان : $m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{BD}$

البرهان : $OA = OC$ انصاف اقطار دائرة

$\therefore m<A = m<C$ خواص المثلث المتساوي الساقين

$\therefore m<C = 60^0$

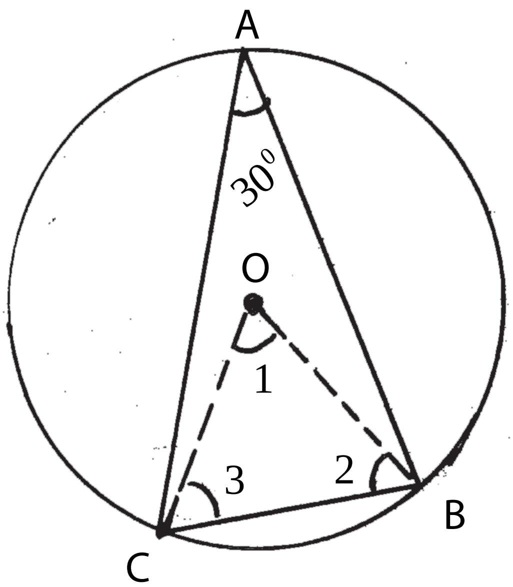
$m<1 = m<C = 60^0$ بالتبادل والتوازي

$m<2 = m<A = 60^0$ بالتناظر والتوازي

$\therefore mCP = 60^0$ قياس القوس هو قياس زاويته المركزية المقابلة له.

كذلك $m\overset{\frown}{BD} = 60^0$

$\therefore m\overset{\frown}{BD} = m\overset{\frown}{CD}$



س3 : المعطيات : ABC مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها O $m<A = 30^0$

م.ث : المثلث COB متساوي الساقين

البرهان : $m<1 = 2m<A$ قياس المركزية .....

$\therefore m<1 = 60^0$

$OB = OC$ ... انصاف اقطار دائرة واحدة

$\therefore m<2 = m<3$ خواص زوايا Δ متساوي الساقين

$\because\ m<1+m<2+m<3=180^0$

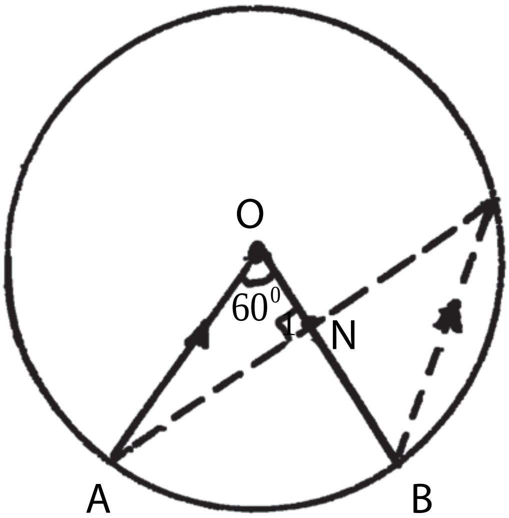
$\therefore\ m<2+m<3=120^0$

$\because\ m<2=m<3$

$\therefore\ m<2=60^0=m<3$

∴ المثلث **COB** متساوي الاضلاع

س4 : البرهان : $m<O=2m<D$ قياس المركزية . . .



$\therefore\ m<D=30^0$

$m<D=m<A$ بالتبادل والتوازي

$\therefore\ m<A=30^0$

$mA+m<0+m<1=180^0$ زوايا مثلث

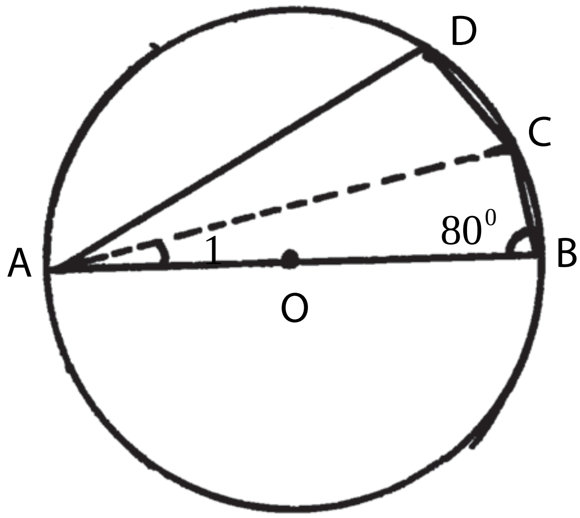
$\therefore\ m<1=180^0-(m<A+m<0)$

$=180^0-90^0$

$m<1=90^0$

$\therefore\ \overline{AD}\perp\overline{OB}$

س5 : في الشكل :



$m<B+m<D=180^0$

زاويتان متقابلتان في شكل رباعي دائري

$\therefore\ m<D=100^0$

$m<ACB=90^0$ محيطه مرسومة في نصف دائرة

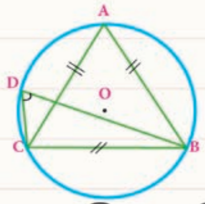
$\because\ m<1+m<B+m<ACB=180^0$ زوايا مثلث

$\therefore\ m<1=180^0-(90+80)=10^0$

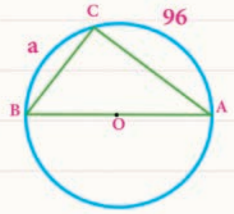
$\therefore\ \overline{AC}$ ينصف زاوية **A**

تمارين (2-6)

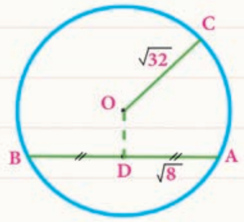
س1/ في الشكل المجاور: دائرة مركزها O فيها: $CA = BC = AB$ ، جد $m\angle BDC$



س2/ في الشكل المجاور: $m\widehat{AC} = 96$, $m\widehat{BC} = a$ جد: قيمة a ، $m\angle B$, $m\angle C$

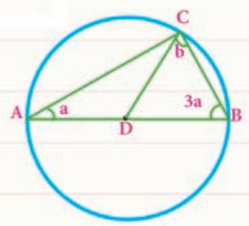


س3/ في الشكل المجاور: جد OD



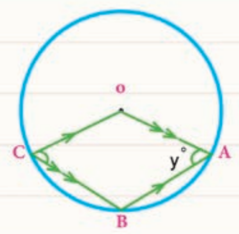
س4/ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ وتران متطابقان في دائرة مركزها O ، برهن ان: $\overrightarrow{AO}$ ينصف $\angle BAC$

س5/ في الشكل المجاور: جد b, a

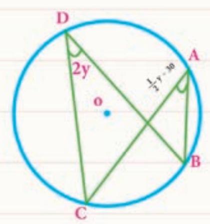


س6/ في الشكل المجاور: $\overline{CO} \parallel \overline{BA}$, $\overline{OA} \parallel \overline{BC}$ جد قيمة Y

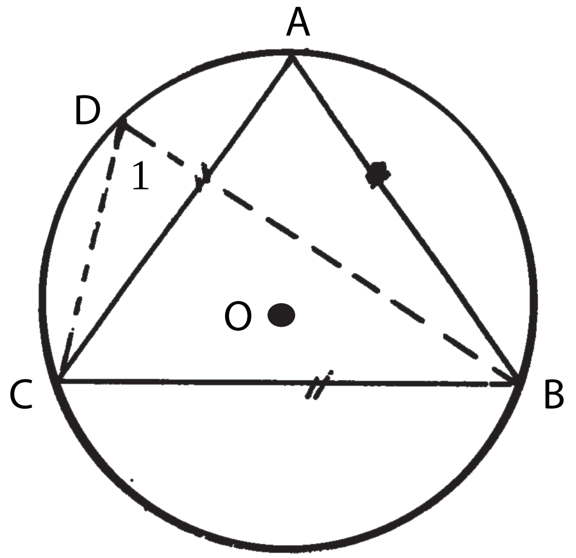
تلميح: أثبت ان OCBA معين ، ثم صل $\overline{OB}$ ، هناك طريقة أخرى باكمال شكل رباعي دائري مع النقط C , B , A .



س7/ أنقل الشكل المجاور في دفترك حيث: $m\angle A = \frac{1}{2}y + 30$, $m\angle D = 2y$ ، جد قيمة y ، ثم أرسم في الشكل زاوية قياسها ($4y^0$) .



تمارين (2-6)



س1 : في الشكل : **ABC** مثلث متساوي الاضلاع

المطلوب : $m< BDC$

الحل :

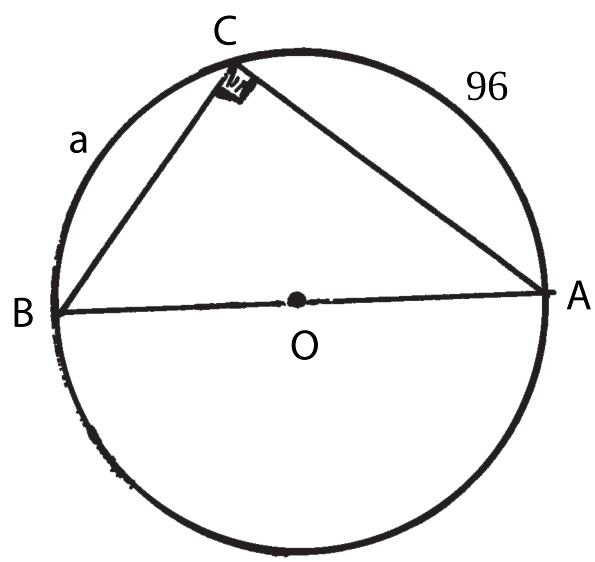
ABC مثلث متساوي الاضلاع ... معطى

$\therefore$ قياس زاوية من زواياه = 60^0

$m<1 = m< A$ محيطيتان تقابلان نفس القوس

$m<1 = 60^0$

س2 :



الحل /

$$m< B = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 96 = 48^0$$

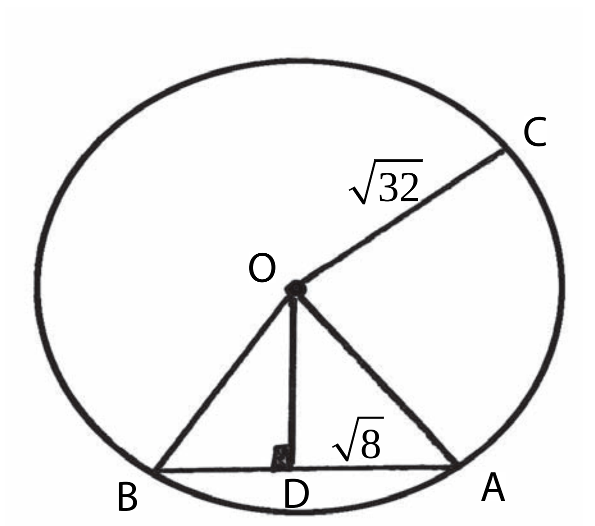
قياس الزاوية المحيطية نصف قياس القوس المقابل لها .

$m< C = 90^0$ محيطة مرسومة في نصف دائرة

$$a = 180^0 - m\overset{\frown}{AC}$$

$$a = 180^0 - 96^0 = 84^0$$

س3 : في الشكل المطلوب : **OD**



الحل / نصل **OA**

$\overline{OD} \perp \overline{BA}$ خواص Δ متساوي الساقين

في Δ **ODA** القائم في **D** :

فيثاغورس .... $(OD)^2 + (DA)^2 = (OA)^2$

$$\Rightarrow (OD)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 = \left(\sqrt{32}\right)^2$$

$$(OD)^2 + 8 = 32$$

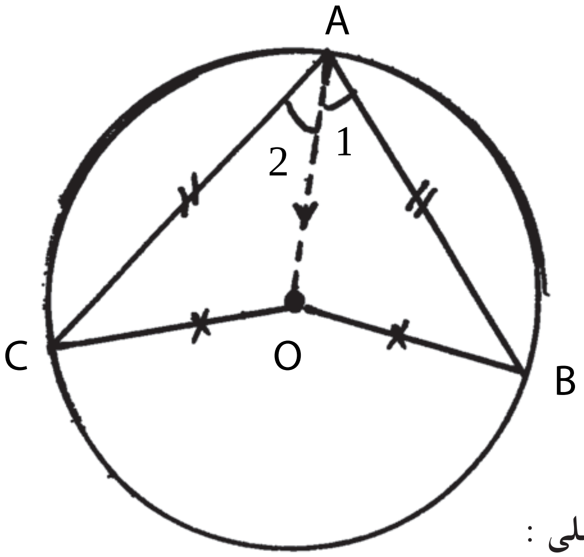
$$\Rightarrow (OD)^2 = 32 - 8 = 24$$

$$\therefore OD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

س4 : المعطيات :

AC , AB وتران متطابقان في دائرة مركزها O

م.ث : $\overline{AO}$ تنصف زاوية A



البرهان : نصل OC , OB

$\Delta\Delta$ OAB , OAC وفيهما

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ معطى

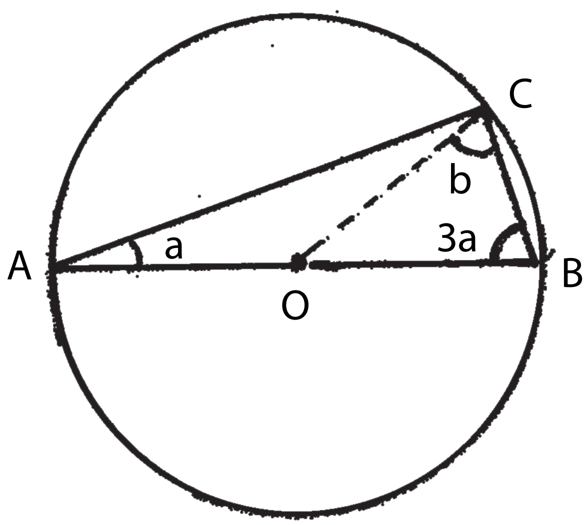
$\overline{OA}$ قطعة مشتركة

$\overline{OB} \cong \overline{OC}$ انصاف اقطار دائرة

$\therefore$ يتطابق المثلثان بالاضلاع الثلاثة من التطابق نحصل على :

$m<2 = m<1$ اي ان $\overline{AO}$ تنصف زاوية A

س5 : في الشكل المجاور : جد a , b



الحل / $m< ACB = 90^0$ محيطية في نصف دائرة

$\because$ $m< ACB + m< A + m< B = 180^0$

زوايا مثلث

$a + 3a + 90^0 = 180^0$

$4a = 90^0$

$a = 22.5^0$

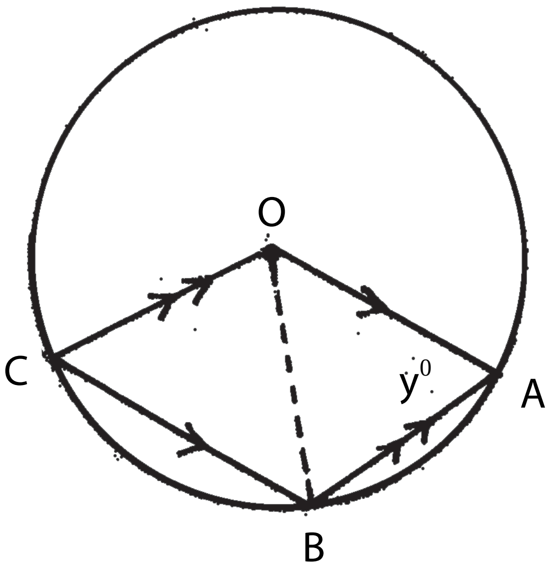
$\because$ $OC = AB$

$\therefore$ $mOCB = m< OBC$ خواص Δ متساوي الساقين

$\therefore$ $b = 3a$

$\therefore$ $b = 3 \times 22.5^0 = 67.5^0$

س6 : البرهان : $\overline{BA} // \overline{OC}$, $\overline{OA} // \overline{CB}$ معطى



$\therefore$ الشكل $OABC$ متوازي اضلاع

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان

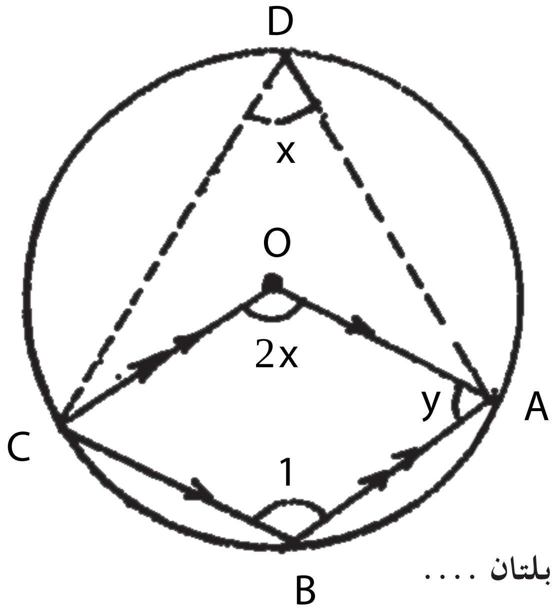
$OA = OC$ انصاف اقطار دائرة واحدة

$\therefore$ $CB = OA , BA = OC$ ... خواص متوازي اضلاع

نصل OB

Δ OAB متساوي الاضلاع ($BA = OA = OB$)

$\therefore$ قياس كل زاوية في Δ OAB تساوي 60^0



حل آخر : نكمل الشكل الرباعي الدائري **ABCD**

ABCO متوازي اضلاع .... تعريف المتوازي

$m<1+x=180$ زاويتان متقابلتان ....

$m<1+y=180$ خواص زوايا متوازي اضلاع

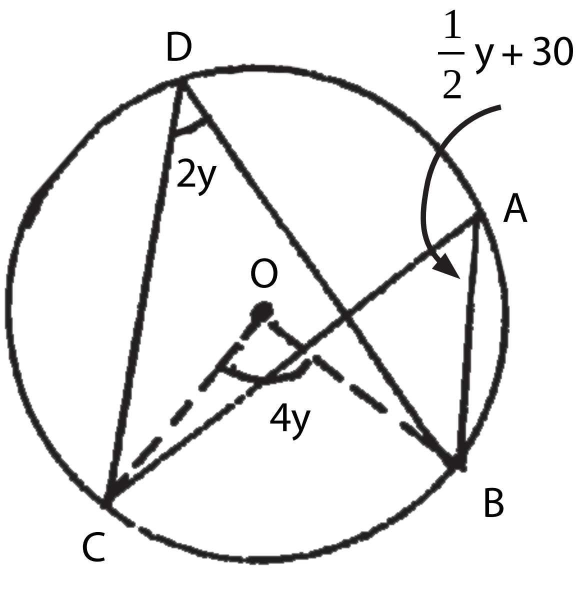
$$\left.\begin{matrix} m<1+x=180 \\ m<1+y=180 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=y........(1)$$

$$2x+y=180....(2)$$

من(**1**) في (**2**) : نحصل على

$$3y=180 \Rightarrow y=60^0$$

س7 : الحل :



$m< A = m< D$ محيطيتان تقابلان نفس القوس

$$2y=\frac{1}{2}y+30$$

$$4y=y+60$$

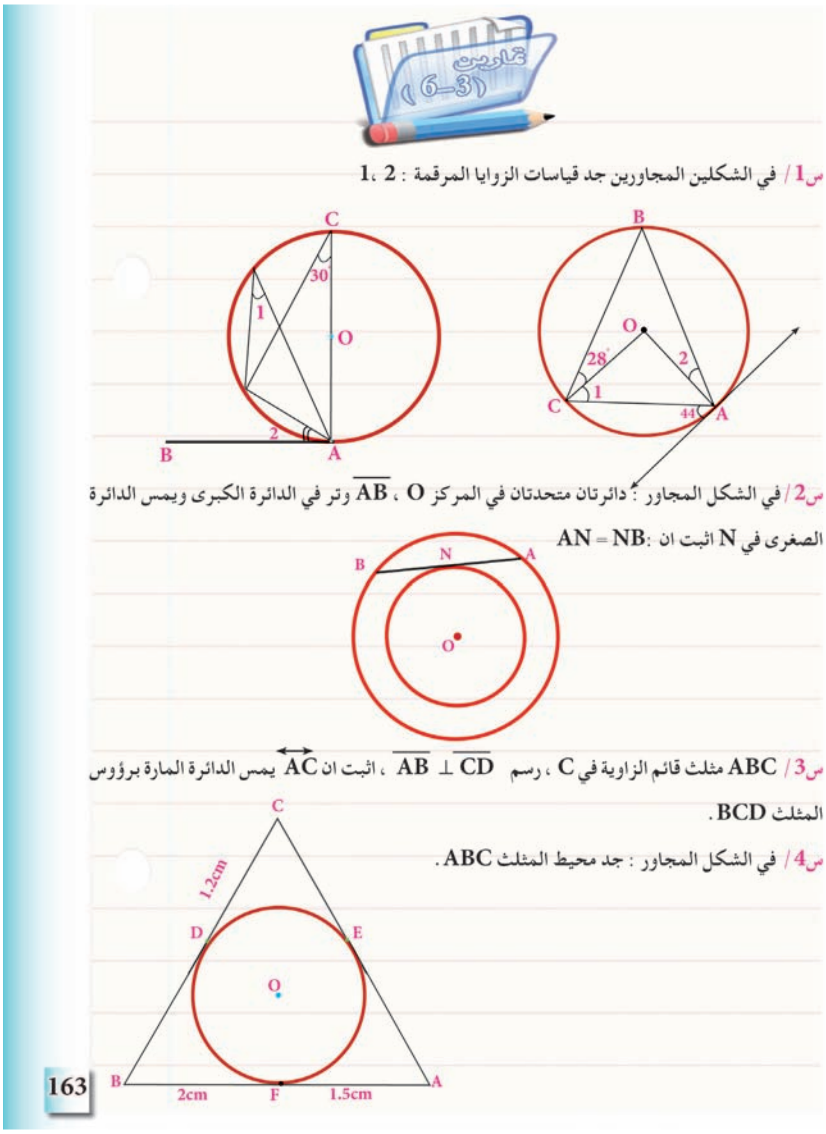
$$3y=60^0$$

$$y=20^0$$

لرسم زاوية قياسها $4y$ نصل **OC , OB** لنحصل على زاوية مركزية **COB** حيث قياسها ضعف قياس زاوية **D**

اي : $m<COB=2m<D$

$$m<COB=4y$$


تمارين (6-3)

س1/ في الشكلين المجاورين جد قياسات الزوايا المرقمة : 2 ، 1

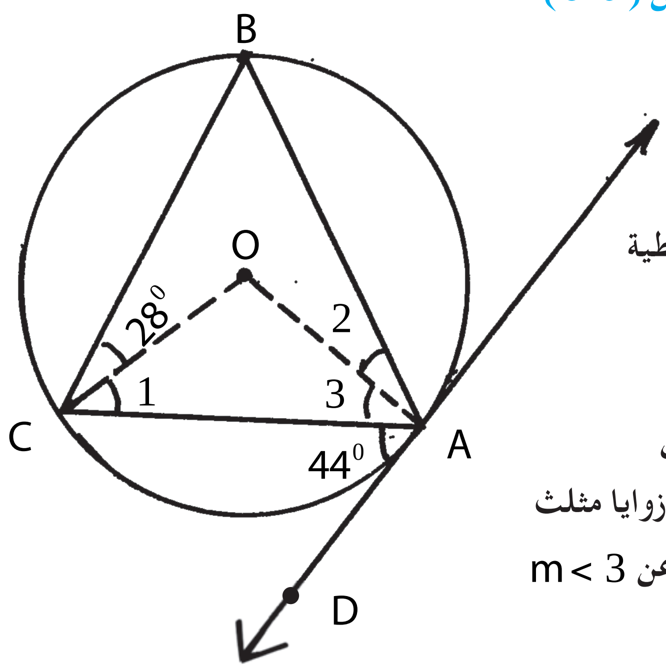
س2/ في الشكل المجاور: دائرتان متحدتان في المركز O ، $\overline{AB}$ وتر في الدائرة الكبرى ويمس الدائرة الصغرى في N اثبت ان: $AN = NB$

س3/ ABC مثلث قائم الزاوية في C ، رسم $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ، اثبت ان $\overleftrightarrow{AC}$ يمس الدائرة المارة برؤوس المثلث BCD .

س4/ في الشكل المجاور : جد محيط المثلث ABC .

163

تمارين (6-3)



س1 : المطلوب : $m\angle 1, m\angle 2$

الحل / $m\angle B = m\angle DAC$ زاوية مماسية

$\therefore m\angle B = 44^0$

$m\angle AOC = 2m\angle B$ مركزية ضعف المحيطية

$\therefore m\angle AOC = 88^0$

$OC = OA$ انصاف اقطار دائرة

$m\angle 1 = m\angle 3$ خواص مثلث متساوي الساقين

$\because m\angle 1 + m\angle 3 + m\angle AOC = 180^0$ زوايا مثلث

$\therefore 2m\angle 1 = 180 - 88 = 92$ بالاستعاضة عن $m\angle 3$

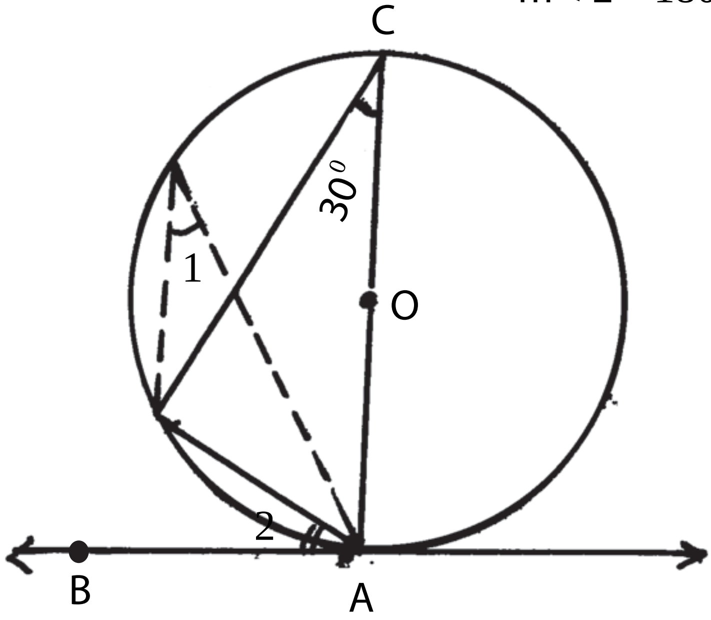
$\therefore m\angle 1 = 46^0 = m\angle 3$

$m(< 2 + < 3) + m(< 1 + 28^0) + m < B = 180^0$ زوايا مثلث

$46^0 + m < 2 + (46^0 + 28^0) + 44^0 = 180^0$

$m < 2 + 164^0 = 180^0$

$m < 2 = 180^0 - 164^0 = 16^0$



الحل /

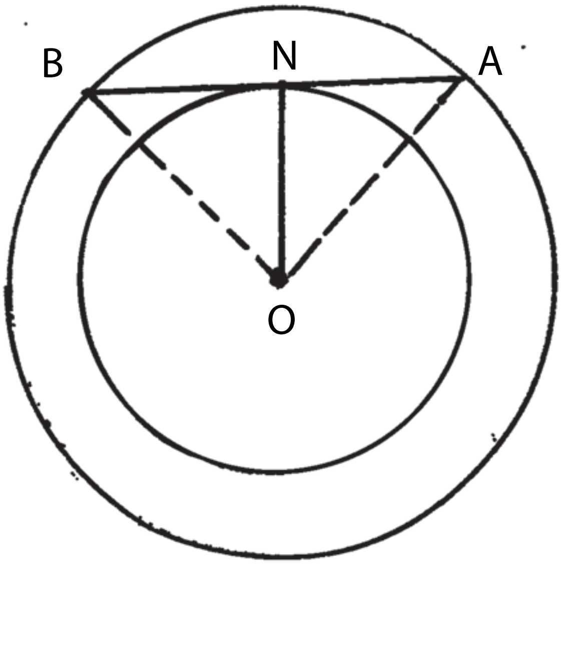
$m < 1 = m < C$ محيطيتان تقابلان

نفس القوس

$\therefore m < 1 = 30^0$

$m < 2 = m < 1$ زاوية مماسية

$\therefore m < 2 = 30^0$



س2 : م . ث : **AN = NB**

البرهان : نصل **ON**

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{ON}$ نصف القطر عمودي

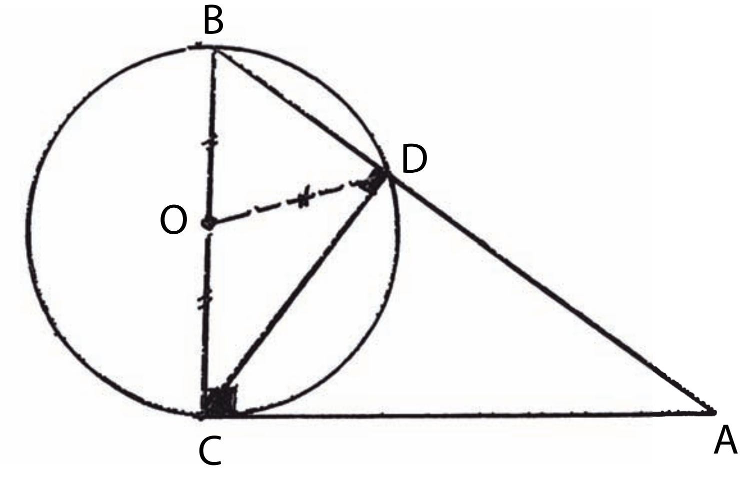
على المماس من نقطة التماس

OA = OB انصاف اقطار دائرة

$\therefore$ **AN = NB** خراص المثلث

المتساوي الساقين

س3 :



البرهان : Δ BCD قائم الزاوية في D

لان $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ معطى . . .

نصل D بمنتصف الوتر $\overline{BC}$ ولكن نقطة O

$\therefore$ OD = OB = OC (طول القطعة المستقيمة ......)

$\therefore$ توجد دائرة وحيدة تمر من C , B , D مركزها نقطة O نصف قطرها = OD وقطرها القطعة المستقيمة $\overline{BC}$

$m\angle BCA = 90^0$ .... معطى

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC}$ مماس للدائرة في نقطة C (المستقيم العمودي على قطر الدائرة ....)

س4 : في الشكل :جد محيط المثلث ABC

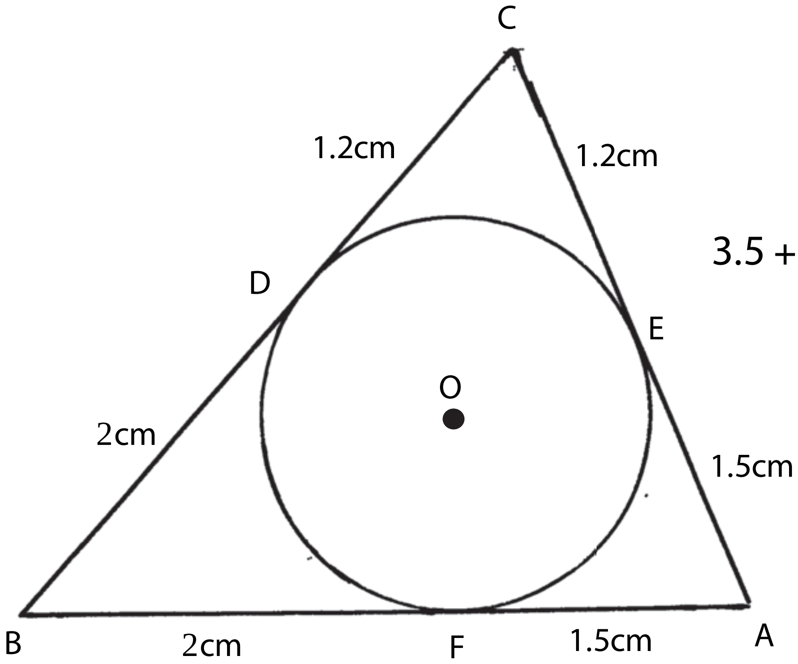
الحل /

CE = DC = 1.2cm

AE = AF = 1.5cm

GF = BD = 2cm

القطعتان المماسيتان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متساويتان بالطول



$\therefore$ AB = 1.5 + 2 = 3.5cm

AC = 1.5 + 1.2 = 2.7cm

BC = 2 + 1.2 = 3.2cm

$\therefore$ المحيط 3.5 + 2.7 + 3.2 = 10.4cm

6 – التقويم

حاول ان تطرح الاسئلة من دون الاعتماد على طرحها المتسلسل في الكتاب او الاستعانة ببعض الاسئلة في تمارين(2–6)

الواجب البيتي : حل تمارين (2–6) ص 151

التماس :153

حاول ان تهيء الشكل المرسوم في ص 153 لتوضيح

(1) المماس . (2) المركز . (3) القاطع . (4) لاقاطع ولامماس . (5) نقطة التماس

عرف المماس ثم اطلب من الطلاب ان يعرفوه بأسلوبهم الخاص ثم ارسمه على السبورة او الاستعانة بالوسائل التعليمية المهيئة مسبقاً

بين انواع المماسات المشتركة بالاستعانة بالرسم

عرف الزاوية المماسية ، وما قياسها ؟

برهن ان المماس العمود على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

يمكن الاستعانة بطريقتي البرهان الواردة في ص 155 من الكتاب المقرر

برهن ان المستقيمين اللذين يمسان الدائرة في نهايتي قطرها متوازيان استعن بالطلاب والبرهان الوارد في ص 156

بين ان المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته المنتهية للدائرة يكون مماساً للدائرة

برهن ان نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث هي مركز الدائرة التي تمس اضلاع المثلث

برهن ان القطعتين المماسيتن المرسومتين للدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان

استنتج : اذا رسم للدائرة من نقطة خارجة عنها قطعتان مماسيتان او مماسان) فأنهما : كما ورد في ص 159

وضح للطلاب انه يمكن ايجاد طول المماس الثالث لدائرة اذا علم المماسان الآخران وكما ورد في المثال (4)

برهن المبرهنة (17) ص 160

الفصل السابع 7

الهندسة الاحداثية

coordinate geometry

[7-1] المستوي الاحداثي .

[7-2] المسافة في المستوي الاحداثي .

[7-3] احداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيم في المستوي الاحداثي .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الزوج المرتب	(x , y)
المسافة بين نقطتين (x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2)	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
منتصف قطعة مستقيمة (x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2)	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

1 – تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

المستوي الاحداثي

نقطة الاصل

المحور الافقي (محور السينات) x – axis

المحور العمودي (محورالصادات) y – axis

الوحدة **Unit**

الزوج المرتب **Ordered Pair**

البعد بين نقطتين :

اذا كان المستقيم يوازي محور السينات او الصادات

اذا كان المستقيم لايوازي اي من المحورين

منتصف قطعة مستقيم (نقطة المنتصف)

الحقائق والتعميمات

يتكون المستوي الاحداثي من محورين متعامدين في نقطة تدعى نقطة الاصل

نقطة الاصل عبارة عن الزوج المرتب (**0 ، 0**)

يمكن تحديد موقع اي نقطة فن المستوي من خلال معرفة احداثيها السيني واحداثيها الصادي

الزوج المرتب هو متكون من (**x، y**)

* البعد بين نقطتين (ايجاد او حساب) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

أ) اذا كان المستقيم يوازي محور السينات $AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

ب) اذا كان المستقيم يوازي المحور الصادي $AB = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$

ج) اذا كان المستقيم لايوازي اي من المحورين $d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

* تكون النقاط على استقامة واحدة

اذا كان قياس طول قطعة المستقيم ككل= قياس طول الجزء الاول +قياس طول الجزء الثاني

وفيما عدا ذلك لاتكون على استقامة واحدة.

* قانون المنتصف (منتصف قطعة مستقيم)اذا علمت احداثياتها : $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

يمكن ايجاد احد احداثي قطعة المستقيم اذا علم الاحداثي الاخر واحداثي المنتصف **M**

2 – الاهداف السلوكية

نتوقع في نهاية الدرس ان يكون الطالب متمكناً من ان

يثبت النقاط المعطاة في المستوي الاحداثي

يعرف المسافة بين نقطتين في المستوي الاحداثي وقانونها

يجد المسافة بين نقطتين على مستقيم افقي(موازٍ لمحور السينات)

يجد المسافة بين نقطتين على مستقيم عمودي(موازٍ لمحور الصادات)

يميز بين قانوني المسافة للمستقيمات الموازية للمحورين وغير الموازية لها

يعرف ان المسافة موجبة دائما ولها وحدات متفق عليها

يعرف ان النقاط الثلاثة تكون على استقامة واحدة اذا كانت

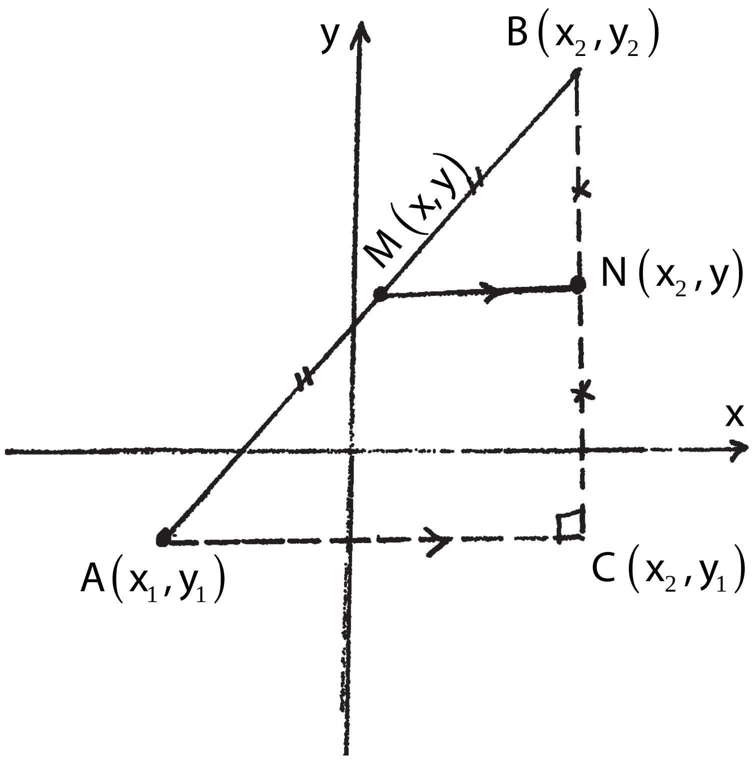
المسافة بين النقطة الاولى والنقطة الثانية+المسافة بين النقطة الثانية والثالثة تساوي المسافة بين النقطة الاولى والنقطة الثالثة.

3 – خلفية علمية للمدرس

يعتبر ديكارت الفيلسوف والعالم الرياضي الفرنسي الاول الذي اسس الهندسة التحليلية والتي عَرفها بانها اتحاد الهندسة مع الجبر وبواسطتها نتمكن من تحليل مفاهيم هندسية محددة جبرياً والتعبير عن علاقات جبرية هندسياً والمهم في هذا هو رسم المخططات البيانية للمعادلات الجبرية والعكس اي ايجاد معادلات جبرية لبعض الاشكال الهندسية مثل المستقيم / الدائرة / ..... الخ

وستعرض فيما يلي بعض الافكار والمسائل الجديدة والتي تساعد القارئ

1) قانون منتصف قطعة مستقيم :



في الشكل المجاور : النقطة $M(x,y)$ منتصف $\overline{AB}$.

نرسم $\overline{AC} // \overline{MN}$

$\therefore$ N تنصف $\overline{BC}$

((قطعة المستقيم المرسومة من منتصف احد اضلاع مثلث موازية لضلع ثانٍ فيه تنصف ضلعه الثالث الى ان :

$BN = NC$

$|y_2 - y| = |y - y_1|$

$y_2 - y = y - y_1$ ..... اذكر السبب

$y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

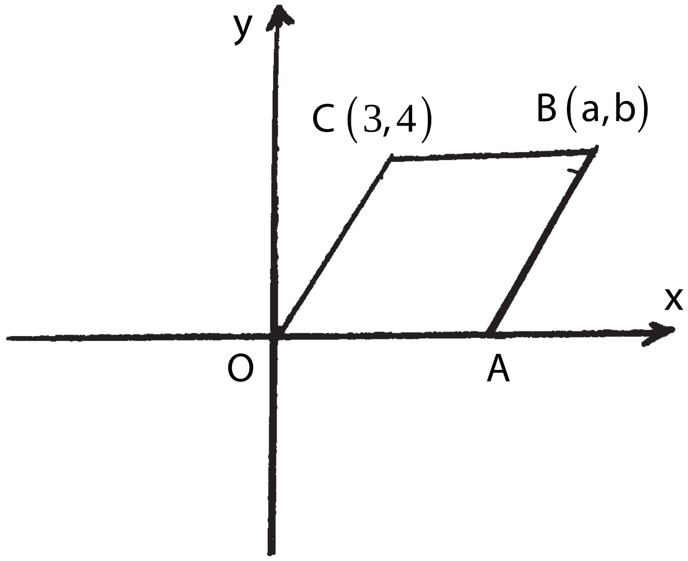
وبطريقة مماثلة يمكن ان نثبت ان : $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

$\therefore \; (x, y) = M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right)$

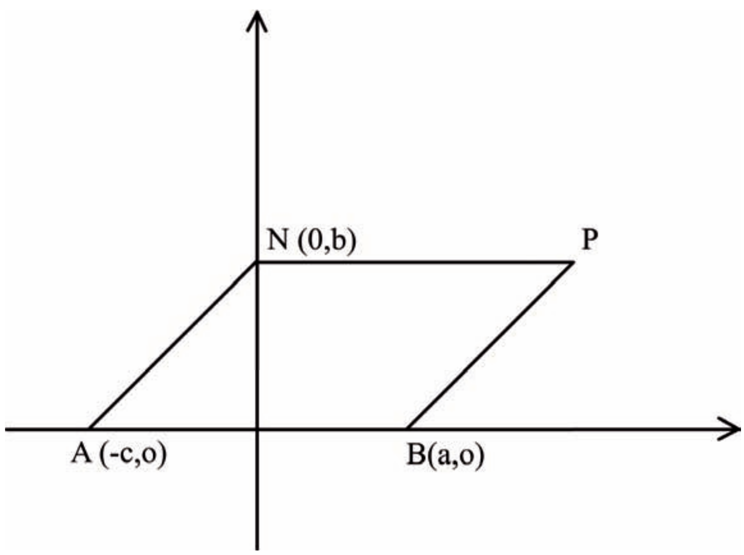
2) تمارين أثرائية :

a) في الشكل المجاور :

OABC معين جد قيمة b,a .



b) جد احداثيات الرأس الرابع P لمتوازي الاضلاع OBPN بطريقتين مختلفتين .



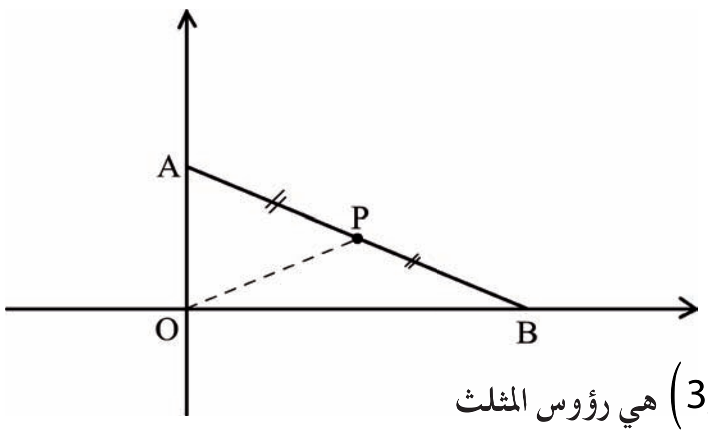
c) جد y اذا كانت المسافة بين $A(2,5)$, $B(0,y)$ تساوي 2 وحدة طول

d) جد x اذا كانت المسافة بين $A(3,2)$, $B(x,1)$ تساوي $\sqrt{5}$ وحدة

e) اذا كانت المسافة بين $A(r,0)$, $B(0,r)$ تساوي المسافة بين $C(1,1)$, $D(-1,3)$ جد قيمة r .

f) في الشكل المجاور :

$OA=\frac{1}{2}OB$ ، $AB=10cm$ جد احداثيات P ثم تحقق من ان $OP=\frac{1}{2}AB$



3)

a) بين ان النقط $(2,2\sqrt{3})$,$(0,0)$,$(3,-\sqrt{3})$ هي رؤوس المثلث

b) لتكن $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $C(0,b)$ هي رؤوس مثلث متساوي الساقين ، اثبت ان طول القطعة المنصفه للضلعين $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ يساوي نصف طول $\overline{AB}$.

4 - المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

سبورة ، طباشير ملون ،مثلثات مختلفة مرسومة على ورق كارتون ، مسطرة، منقلة

خطوات سير الدرس

التمهيد :

تعلمنا في الصفوف السابقة كيف يكون المستوي الاحداثي وكيفية تعيين النقاط المعلومة علية وسوف يتناول بشئ من التفصيل ذلك

اعرض قطعة كارتون مرسوم فيها المستوي الاحداثي ومؤشر عليها (1)المحور السيني (2)المحور الصادي (3)نقطة الاصل (4)الوحدات (5)الاتجاهات السالبة والموجة (6)الارباع الاربع واشارات النقط في كل واحد .

عين نقطتين او اكثر معلومة الاحداثيات في المستوي الاحداثي

اعط النشاط للطلاب بتعين نقاط معلومة الاحداثيات في المستوي الاحداثي

كما في تدريب ص165

لاحظ ممارسة الطلاب (عينة)للتأكد من صحة الأداء

جد قياس المسافة في المستوي بطريقتين (قانونين)

أ) اذا كانت نقطتين على مستقيم

(1) محور السينات (2) محور الصادات

ب) اذا كانت نقطتين على مستقيم لايوازي اي من المحورين (مائل)

(الاستعانة بالرسمين في الشكل من (1، 2)ص166

اكتب ملاحظة ان المسافة دائما موجبة وبوحدات متفق عليها .

اطلب من الطلاب ايجاد المسافة بين نقطتين على مستقيم يوازي احد المحورين (مشابة للمثال ص166)

اكتب قانون المسافة : $d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

طبق قانون المسافة بين نقطتين

اولا لاثبات انه نقط مثل A، B، C على استقامة واحدة

كما في المثال (1) ص168ومثال (3)ص169

1) نثبت النقاط المعطاة في المستوي الاحداثي

2) نجد المسافة بين كل نقطتين ثم نبسط الناتج

3) اذا كان الكل يساوي مجموع الجزئين (او الاجزاء)فان النقط على استقامة واحدة

نشاط :على الطلاب حل الامثلة المختلفة للتأكد مما تقدم .

(يعطي المدرس امثلة)

استنتج من قانون المسافة ان :

1) المثلث متساوي الاضلاع (لاحظ جميع اضلاعه متساوية)

2) المثلث متساوي الساقين مثال 4ص171

3) مختلف الاضلاع مثال (3)ص170

4) قائم الزاوية بأستخدام نظرية فيثاغورس مثال 5ص171

5) اربع نقاط تمثل رؤوس متوازي الاضلاع مثال (6)ص172

6) ثلاث نقاط تقع على دائرة علم مركزها مثال (7)ص173

ملاحظة لكل حالة رسم مستقل حتى لايختلط على الطالب النقاط.

احداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيم في المستوي

المدرس : تعلمنا كيف نعين نقطة ما بزوج مرتب من الاعداد الحقيقية ومن خلال نقطتين معلومتين نستطيع تعيين احداثي نقطة منتصفه من العلاقة

كما في مثال (1)ص174

المدرس: ملاحظة مهمة اصبحت لدينا (3)نقاط احدهما نقطة المنتصف او اثنين على جانبيها بأحدهما يمينها والاخرى شمالها

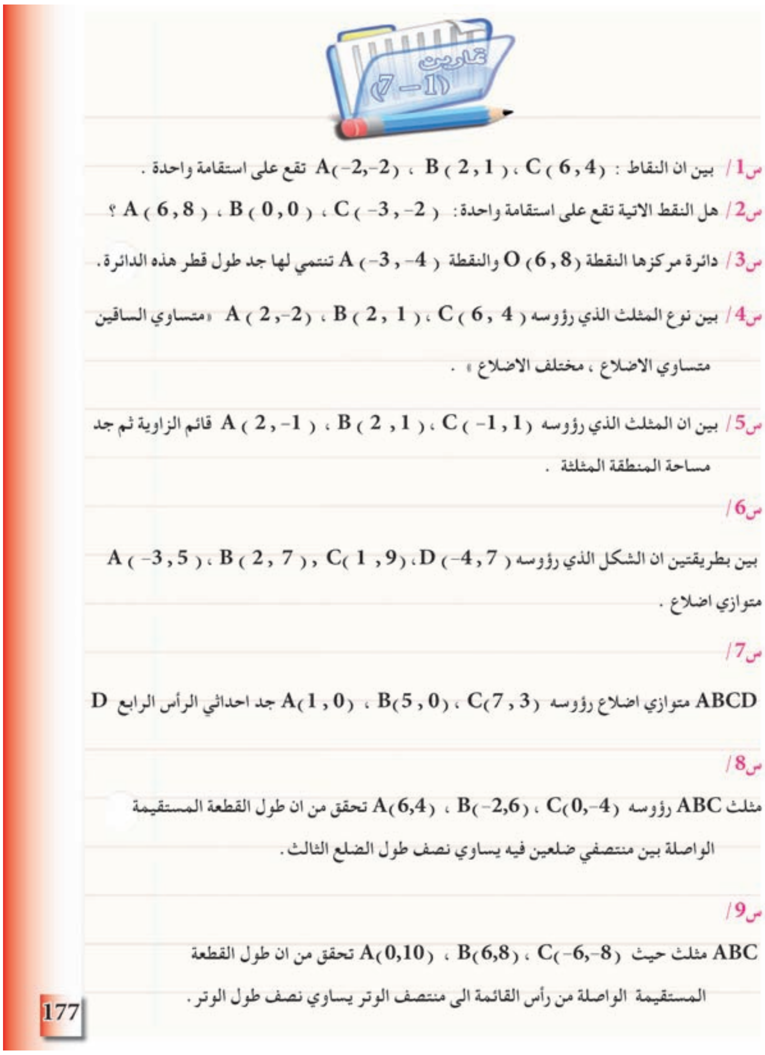
اعط للطالب مثال (2)ص174ثم تحقق من الحل من النقاط تقع على استقامة واحدة

وضح للطلاب انه بالامكان معرفة الشكل متوازي اضلاع اذا كانت نقاط رؤوسه الاربعه معلومة .من خلال ايجاد احداثي منتصف قطر

كما في مثال (3)ص175

تسأل : هل نستطيع ايجاد احداثي نقطة الرأس الرابع لمتوازي الاضلاع اذا علمت رؤوس النقاط الثلاث البيانية من خلال مثال (4)ص176

5 - حل التمرينات



تمارين (7−1)

س1/ بين ان النقاط : $A(-2,-2)$ ، $B(2,1)$ ، $C(6,4)$ تقع على استقامة واحدة .

س2/ هل النقط الاتية تقع على استقامة واحدة: $A(6,8)$ ، $B(0,0)$ ، $C(-3,-2)$ ؟

س3/ دائرة مركزها النقطة $O(6,8)$ والنقطة $A(-3,-4)$ تنتمي لها جد طول قطر هذه الدائرة.

س4/ بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2,-2)$ ، $B(2,1)$ ، $C(6,4)$ «متساوي الساقين ، متساوي الاضلاع ، مختلف الاضلاع» .

س5/ بين ان المثلث الذي رؤوسه $A(2,-1)$ ، $B(2,1)$ ، $C(-1,1)$ قائم الزاوية ثم جد مساحة المنطقة المثلثة .

س6/

بين بطريقتين ان الشكل الذي رؤوسه $A(-3,5)$ ، $B(2,7)$ ، $C(1,9)$ ، $D(-4,7)$ متوازي اضلاع .

س7/

ABCD متوازي اضلاع رؤوسه $A(1,0)$ ، $B(5,0)$ ، $C(7,3)$ جد احداثي الرأس الرابع D

س8/

مثلث ABC رؤوسه $A(6,4)$ ، $B(-2,6)$ ، $C(0,-4)$ تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه يساوي نصف طول الضلع الثالث.

س9/

ABC مثلث حيث $A(0,10)$ ، $B(6,8)$ ، $C(-6,-8)$ تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر.

177

تمارين (7−1)

س1/ بين ان النقاط : $A(-2,-2)$ ، $B(2,1)$ ، $C(6,4)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل /

قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (1+2)^2} = 5Unit$$

$$BC = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = 5Unit$$

$$AC = \sqrt{(6+2)^2 + (4+2)^2} = 10Unit$$

$$AB + BC = 10Unit$$

مجموع طولي قطعتين يساوي طول القطعة الاخرى

A, B, C نقاط على استقامة واحدة

س2 / هل النقط الاتية تقع على استقامة واحدة : $C(0,8)$ ، $B(0,0)$ ، $A(6,8)$ ؟

الحل / ملاحظة : تعدل النقطة C من $(-3,-2)$ الى $(0,8)$

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ .... قانون المسافة

$$AB=\sqrt{(0-6)^2+(0+8)^2}=\sqrt{100}=10\,\text{Unit}$$

$$BC=\sqrt{0+8^2}=8\,\text{Unit}$$

$$AC=\sqrt{(0-6)^2+0}=6\,\text{Unit}$$

$$\because AC+BC=14>10$$

$\therefore$ C , B , A ليست على استقامة واحدة (رؤوس مثلث)

س3 / دائرة مركزها النقطة $(6,8)$ والنقطة $A(-3,-4)$ تنتمي لها جد طول قطر هذه الدائرة.

الحل /

A ينتمي للدائرة

$AO=r=$ نصف القطر

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$r=\sqrt{(6+3)^2+(8+4)^2}=\sqrt{225}=15\,\text{Unit}$$

$2r=$ القطر

$\therefore$ القطر $=30\,\text{Unit}$

س4 / بين نوع المثلث الذي رؤوسه $C(6,4)$ ، $B(2,1)$ ، $A(2,-2)$ «متساوي الساقين متساوي الاضلاع ، مختلف الاضلاع » .

الحل / نجد اطوال الاضلاع الثلاثة بقانون المسافة

$$AB=\sqrt{(2-2)^2+(1+2)^2}=3\,\text{Unit}$$

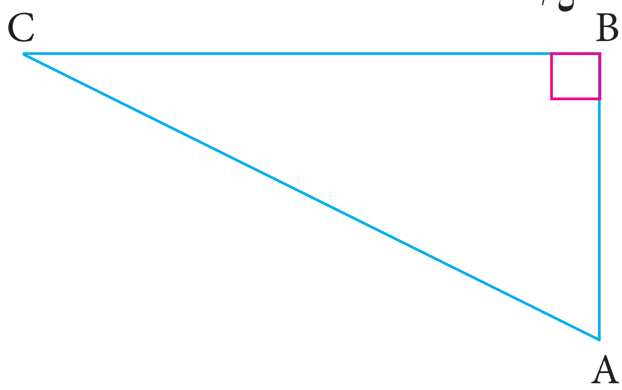
$$BC=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5\,\text{Unit}$$

$$AC=\sqrt{(6-2)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\,\text{Unit}$$

$\therefore$ المثلث مختلف الاضلاع

س5 / بين ان المثلث الذي رؤوسه $A(2,-1)$ ، $B(2,1)$ ، $C(-1,1)$ قائم الزاوية ثم جد مساحة المنطقة المثلثة .

الحل /



$$AB=\sqrt{(2-2)^2+(1+1)^2}=2\text{Unit}$$

$$BC=\sqrt{(-1-2)^2+(1-1)^2}=3\text{Unit}$$

$$AC=\sqrt{(-1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}\text{Unit}$$

$$(AB)^2=4\ ,\ (BC)^2=9\ ,\ (AC)^2=13$$

$$(AC)^2=13=(AB)^2+(BC)^2$$

$\therefore$ المثلث ABC قائم الزاوية في نقطة (B) عكس مبرهنة فيثاغورس

المساحة $=\frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$=\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي الضلعين القائمين

$=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$ وحدة مساحة

س6 / بين بطريقتين ان الشكل الذي رؤوسه $A(-3,5)$ ، $B(2,7)$ ، $C(1,9)$ ، $D(-4,7)$ متوازي اضلاع .

الحل / الطريقة الاولى : نثبت ان قطري الشكل متناصفان

لتكن O نقطة منتصف القطر BD

$$O=\left(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2}\right)=\left(\frac{2-4}{2},\frac{7+7}{2}\right)$$

$$\therefore O=(-1,7)$$

لتكن P نقطة منتصف القطر الآخر AC

$$P=\left(\frac{1-3}{2},\frac{9+5}{2}\right)$$

$$\therefore P=(-1,7)$$

$$P\equiv O$$

$\therefore$ القطران متناصفان

الحل الآخر : نجد اطوال الاضلاع الاربعة ومنها نجد ان كل ضلعين متقابلين متساويين

س7/ ABCD متوازي اضلاع رؤوسه $C(-8,0)$ ، $B(6,-6)$ ، $A(4,0)$ جد احداثي الرأس الرابع D .

الحل / لتكن O نقطة تقاطع قطر المتوازي الاضلاع حيث القطران متناصفان فيها نجد احداثي نقطة O من كل القطرين .

من القطر BD

$$O = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

$$O = \left(\frac{6+x}{2}, \frac{-6+x}{2}\right).....(1)$$

من القطر الآخر AC

$$O = \left(\frac{4-8}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$$O = (-2, 0).....(2)$$

من (1) ، (2) نحصل على :

$$\frac{6+x}{2} = -2$$

$$\Rightarrow 6 + x = -4$$

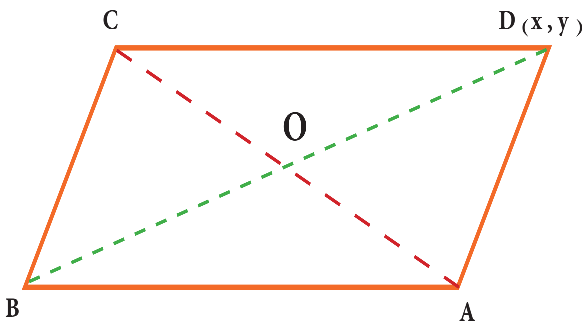
$$\therefore x = -10$$

$$\frac{-6+y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -6 + y = 0$$

$$y = 6$$

$$O(-10, 6)$$



س8/ مثلث ABC رؤوسه $C(0,-4)$ ، $B(-2,6)$ ، $A(6,4)$ تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه يساوي نصف طول الضلع الثالث .

الحل / نفرض $P(x, y)$ نقطة منتصف $\overline{AC}$

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4-4}{2}\right)$$

$$\therefore P(3, 0)$$

نفرض $N(x, y)$ نقطة منتصف $\overline{AB}$

$$N = \left(\frac{6-2}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$$

$$\therefore N(2, 5)$$

$$PN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

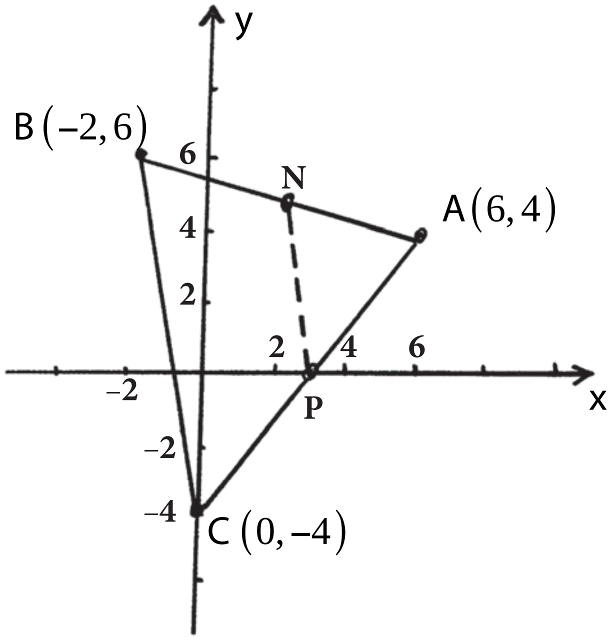
$$= \sqrt{(2-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{26}\text{Unit}$$

$$BC = \sqrt{(0+2)^2 + (-4-6)^2} = \sqrt{4+100}$$

$$= \sqrt{104} = \sqrt{4\times 26} = 2\sqrt{26}\text{Unit}$$

واضح ان :

$$PN = \frac{1}{2}BC$$



س9/ ABC مثلث حيث $C(-6,-8)$ ، $B(6,8)$ ، $A(0,10)$ تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر .

الحل /

$$AB = \sqrt{(6-0)^2 + (8-10)^2} = \sqrt{40}\text{Unit}$$

$$BC = \sqrt{(-6-6)^2 + (-8-8)^2} = \sqrt{400}\text{Unit}$$

$$AC = \sqrt{(-6-0)^2 + (-8-10)^2} = \sqrt{360}\text{Unit}$$

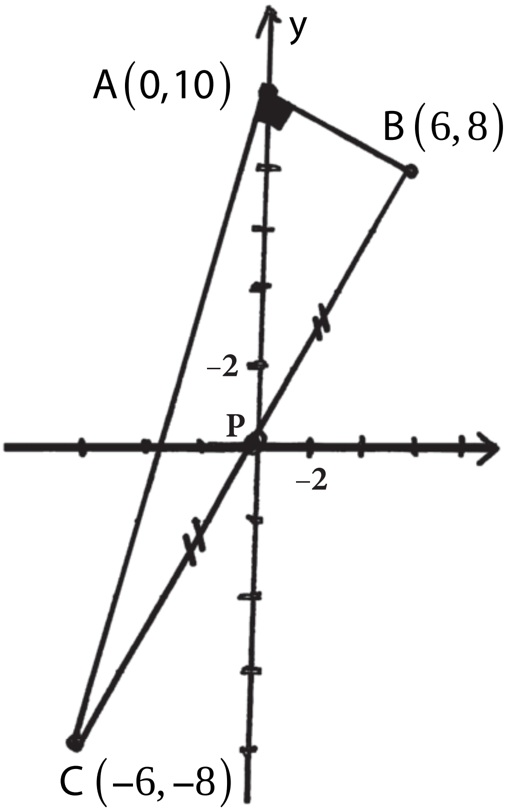
$$(AB)^2 = 40$$

$$(BC)^2 = 400$$

$$(AC)^2 = 360$$

$$\therefore (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 400 \Rightarrow BC = 20\,\text{Unit}$$

$\therefore$ المثلث ABC قائم الزاوية في A



نفرض $P\left(x, y\right)$ نقطة منتصف الوتر **BC**

$$P = \left(\frac{-6+6}{0}, \frac{-8+8}{0}\right)$$

$$\therefore P(0, 0)$$

$$AP = \sqrt{0+10^2} = 10\text{Unit}$$

$$AP = \frac{1}{2}BC$$

8

الفصل الثامن

التحويلات الهندسية

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الانعكاس حول المحور السيني	R_x
الانعكاس حول المحور الصادي	R_y
الدوران حول 90°	R_{90°
التكبير	D

1 – تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التناظر ، محور التناظر ، التحويل الهندسي

الانسحاب ، الدوران ، التكبير ، المجموعات المتناسبة ، التشابه

الحقائق والتعميمات

– يتطابق الشكلان الهندسيان اذا أنطبقت كل نقطة من نقاطهما على نقاط الآخر

– يقسم محور التناظر كل شكل هندسي الى نصفين متناظرين

– التحويل الهندسي ينقل كل نقطة في المستوي الى نقطة اخرى في المستوي نفسه

– اذا كان R تطبيق تقابل فأن R تحويل هندسي (انعكاس)

– التناظر بالنسبة لـ X المحور السيني

فأن $R_x : (x, y) = (x, -y)$

– اما التناظر بالنسبة لـ y المحور الصادي

$R_y : (x, y) = (-x, y)$

صورة النقطة (x، y) تحت تأثير انسحاب مسافة معينة ولتكن a :

1 – بالاتجاه الموجب لمحور السينات $T(x, y) = (x + a, y)$

2 – بالاتجاه السالب لمحور السينات $T(x, y) = (x - a, y)$

3 – بالاتجاه الموجب لمحور الصادات $T(x, y) = (x, y + a)$

4 – بالاتجاه السالب لمحور الصادات $T(x, y) = (x, y - a)$

الانسحاب يحافظ على الاستقامة البينية وقياس الزاوية والتوازي

الدوران في مستوى هو تحويل هندسي يحول النقطة $O \leftarrow O$ ، $P \forall P' \leftarrow P$ في المستوي حيث $P'O = PO$ ، $< POP'$ زاوية الدوران ، O مركز الدوران وبأتجاه معلوم.

– الدوران 90 حول نقطة الاصل

اما دوران بأتجاه عكس عقارب الساعة $R_{90} : (x, y) = (-y, x)$

او دوران بأتجاه عقارب الساعة $R_{90} : (x, y) = (y, -x)$

– الدوران 180 حول نقطة الاصل

او دوران بعكس عقارب الساعة $R_{180} : (x, y) = (-x, -y)$

– الدوران 270 حول نقطة الاصل

اما دوران بأتجاه عقارب الساعة $R_{270} : (x, y) = (-y, x)$

او دوران بعكس عقارب الساعة $R_{270} : (x, y) = (y, -x)$

– التكبير : اذا كان التكبير للنقطة $P(x, y)$ مركزه O نقطة الاصل معامله K فأن

$$D[P(x,y)] = (Kx, Ky)$$

* اذا كانت المجموعتان $y = \{c, d\}, x = \{a, b\}$ مجموعتين متناسبتين

فيقال للمجموعتين متناسبتين اذا كان $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

خواص المجموعات المتناسبة كما وردت في ص **191**

2 – الاهداف السلوكية

نتوقع في نهاية الدرس ان يكون الطالب تمكن من ان :

– يعرف هندسة التحويلات كما ورد في الكتاب المقرر

– يعرف محور التناظر

– يعرف الانعكاس

– يطبق الانعكاس على مستقيم في المستوي

يطبق الانعكاس على المستوي الاحداثي

يميز بين الانعكاس بالنسبة لمحور السينات وبين الانعكاس بالنسبة لمحور الصادات

يجد صورة شكل ماتحت تأثير الانعكاس في احد المحاور

يعرف الانسحاب

يميز بين انسحاب نقطة ما لمسافة ما بأتجاه موجب لمحور السينات والاتجاه السالب لمحور السينات

يميز بين انسحاب نقطة ما لمسافة ما بأتجاه موجب لمحور الصادات والاتجاه السالب لمحور الصادات

يميز بين انسحاب لمسافة ما بأتجاه موجب لمحور السينات والاتجاه الموجب بمحور الصادات

يميز بين انسحاب نقطة ما لمسافة ما بأتجاه سالب لمحور السينات

والاتجاه السالب لمحور الصادات .

الدوران

يعرف ان الدوران يعتمد على مقدار الزاوية

يعرف الدوران **90** حول نقطة الاصل بأتجاه حركة عقار ب الساعة

يعرف الدوران **90** حول نقطة الاصل بأتجاه حركة عكس عقارب الساعة

يعرف الدوران **180** حول نقطة الاصل بأتجاه حركة عقارب الساعة الدوران بأتجاه عكس عقارب الساعة .

يعرف الدوران **180** بأتجاه حركة عكس عقارب الساعة.

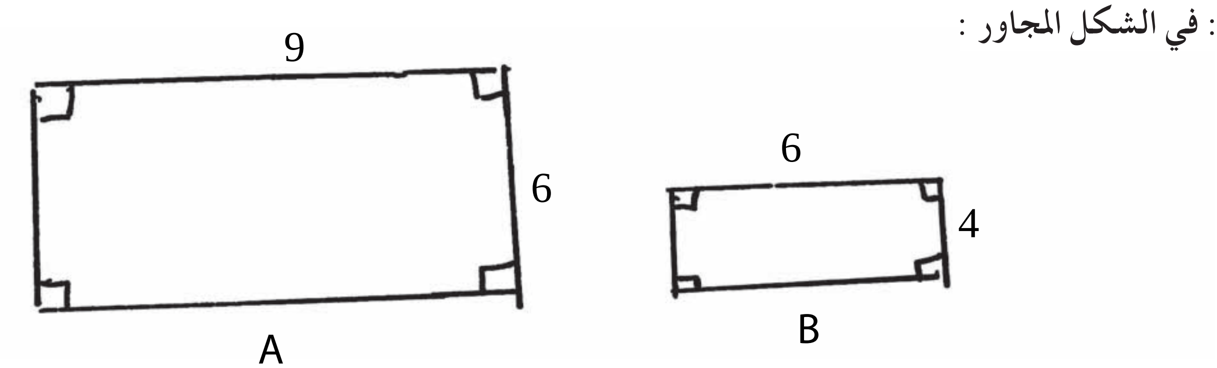
يعرف الدوران **270** حول نقطة الاصل بأتجاه حركة عكس عقارب الساعة

يعرف الدوران **270** حول نقطة الاصل بأتجاه حركة عكس عقارب الساعة

3 – خلفية علمية للمدرس

يعد موضوع التحويلات الهندسية عملياً اكثر مما هو نظرياً وذلك لكثرة تطبيقاته الحياتية وبالاخص موضوع التشابه بالرغم من ان المنهج المقرر انصب على دراسة تشابه المثلثات فقط لكنه ينسحب الى تشابه الاشكال والاجسام الهندسية الاخرى وسوف نعرض لبعض الافكار الجديدة من خلال الامثلة المختلفة الآتية :

مثال : في الشكل المجاور :

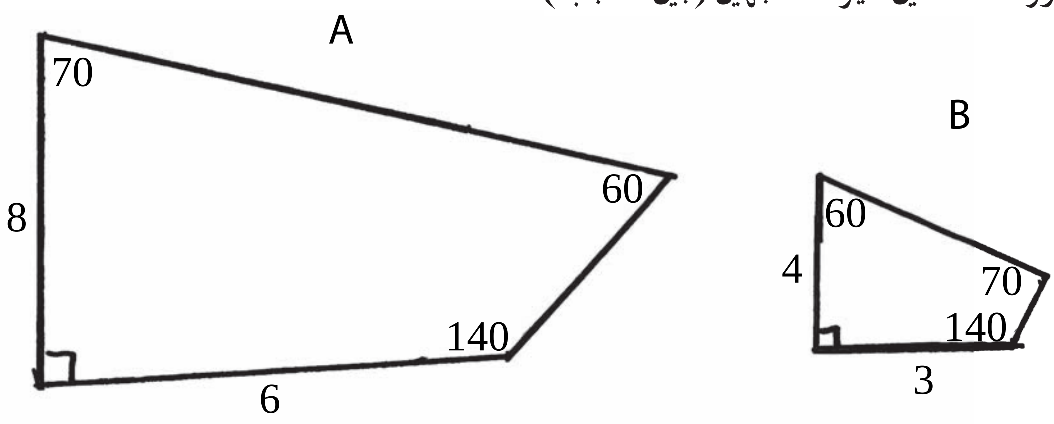


المستطيل **A** يشابه المستطيل **B** لتحقق الشروط وهي : **1**) تساوي الزوايا

2) تناسب الاضلاع المتناظرة

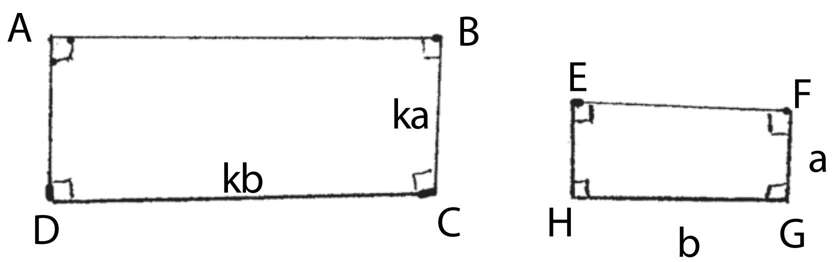
اي ان : $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$

اما في الشكل المجاور : الشكلين غير متشابهين (بين السبب)



مساحات الاشكال المتشابهة / / حجوم الاجسام المتشابهة Areas of Similar Shapes

في الشكل المجاور : مستطيلان متشابهان ، نسبة الضلعين المتناظرين = **k**



مساحته المستطيل الكبير = $(ka)(kb) = k^2ab$

مساحة المستطيل الصغير = **ab**

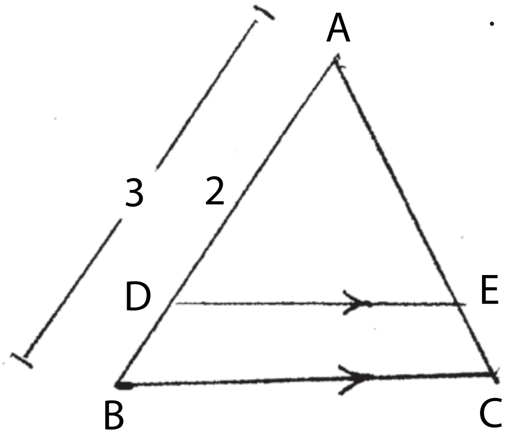
$\therefore \dfrac{\text{مساحته المستطيل الكبير}}{\text{مساحة المستطيل الصغير}} = k^2$

لذلك : اذا تشابه شكلان هندسيان وكانت نسبة ضلعين متناظرين (**k**) فان النسبة بين مساحتهما (k^2)

مثال : في الشكل المجاور : $\overline{DE} // \overline{BC}$

مساحة المثلث **ADE** تساوي $4cm^2$ جد مساحة المثلث **ABC** .

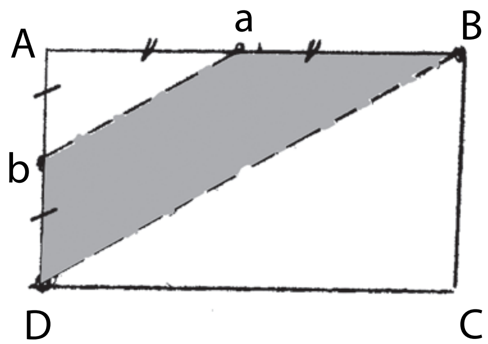
المثلثان متشابهان . . . السبب ؟



$k = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ النسبة بين المساحتين = $k^2 = \dfrac{9}{4}$

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_1}{4} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow A_1 = 9cm^2$



تمرين : في الشكل المجاور : **a** منتصف $\overline{AB}$

b منتصف $\overline{AD}$

جد نسبة مساحة الجزء المظلل الى مساحة المستطيل **ABCD**.

حجوم الاجسام المتشابهة Volumes of Similar Objectes

عندما يتشابه جسمان هندسيان فان ذلك يعني ان احدهما تكبير للآخر (**accurate enlargment**)

فاذا كانت نسبة ضلعين متناظرين = **k**

فان نسبة الحجمين = k^3

مثلاً : في الشكل المجاور : اسطوانتان متشابهتان المطلوب حجم الكبرى

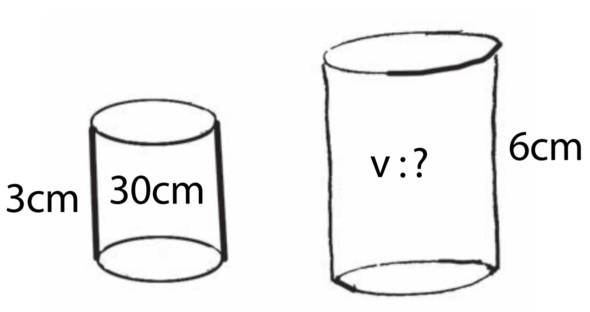
نسبة الارتفاعين = $k = \dfrac{6}{3} = 2$

نسبة الحجمين = $k^3 = 8$

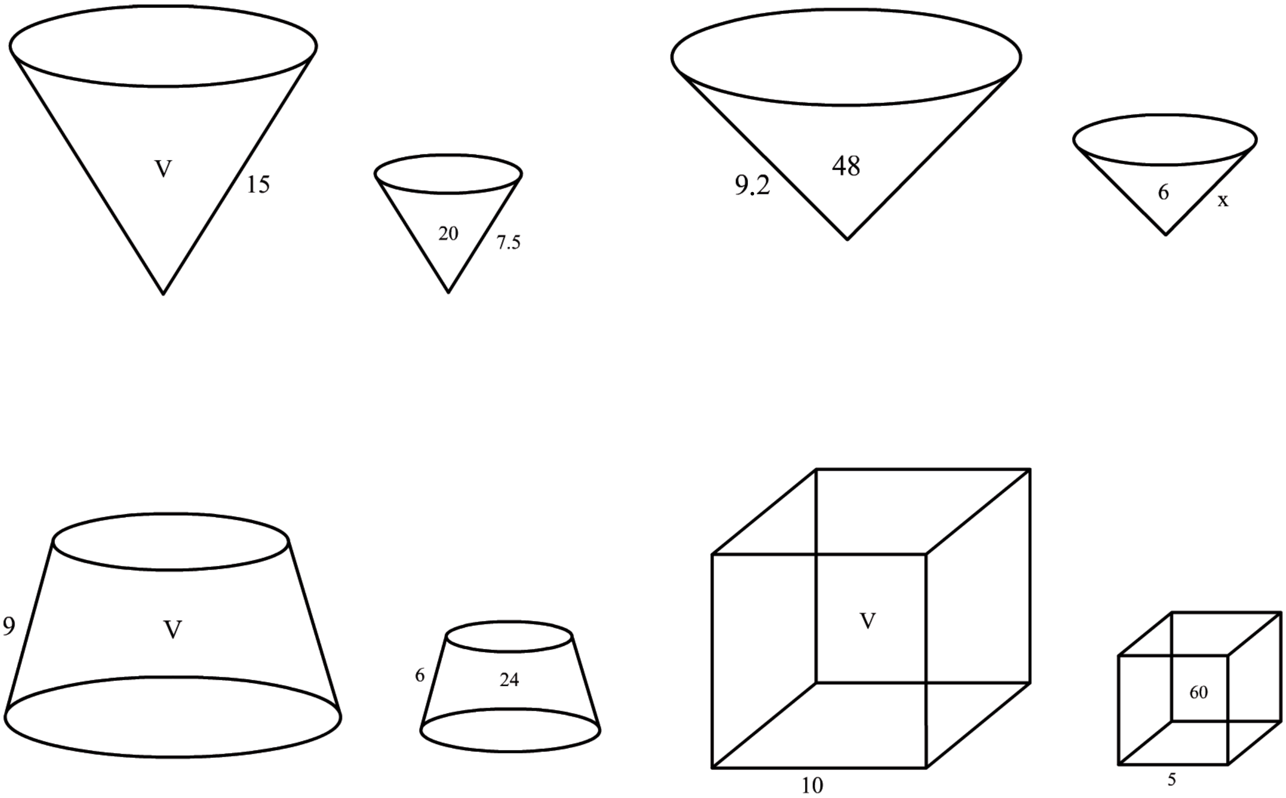
$\therefore \dfrac{v_1}{v_2} = k^3 = 8$

$\Rightarrow v_1 = 8v_2$

$= 8 \times 30 = 240cm^3$



تمرين : في الاجسام المتشابهة المرسومة جد x,v :

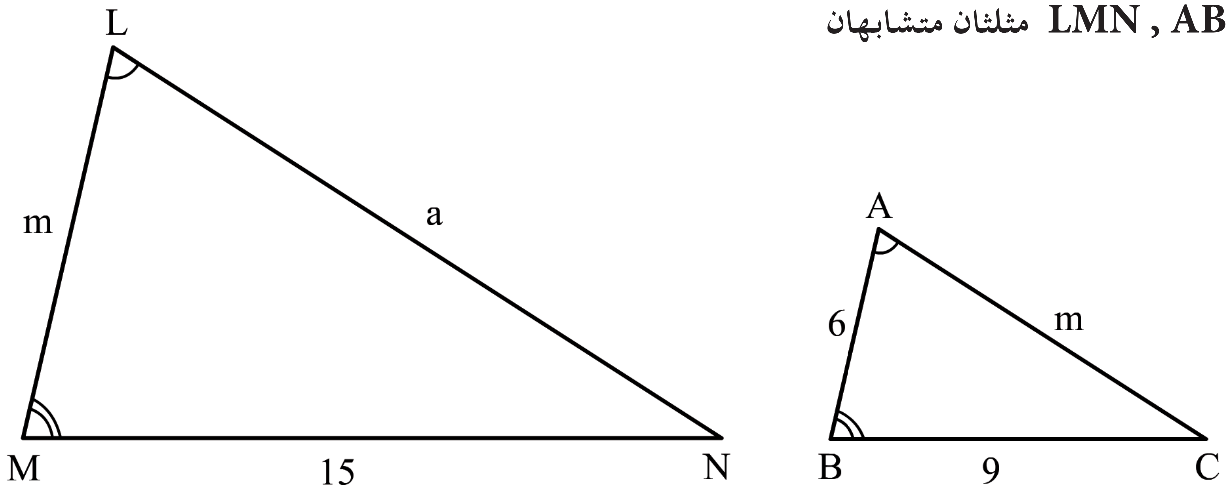


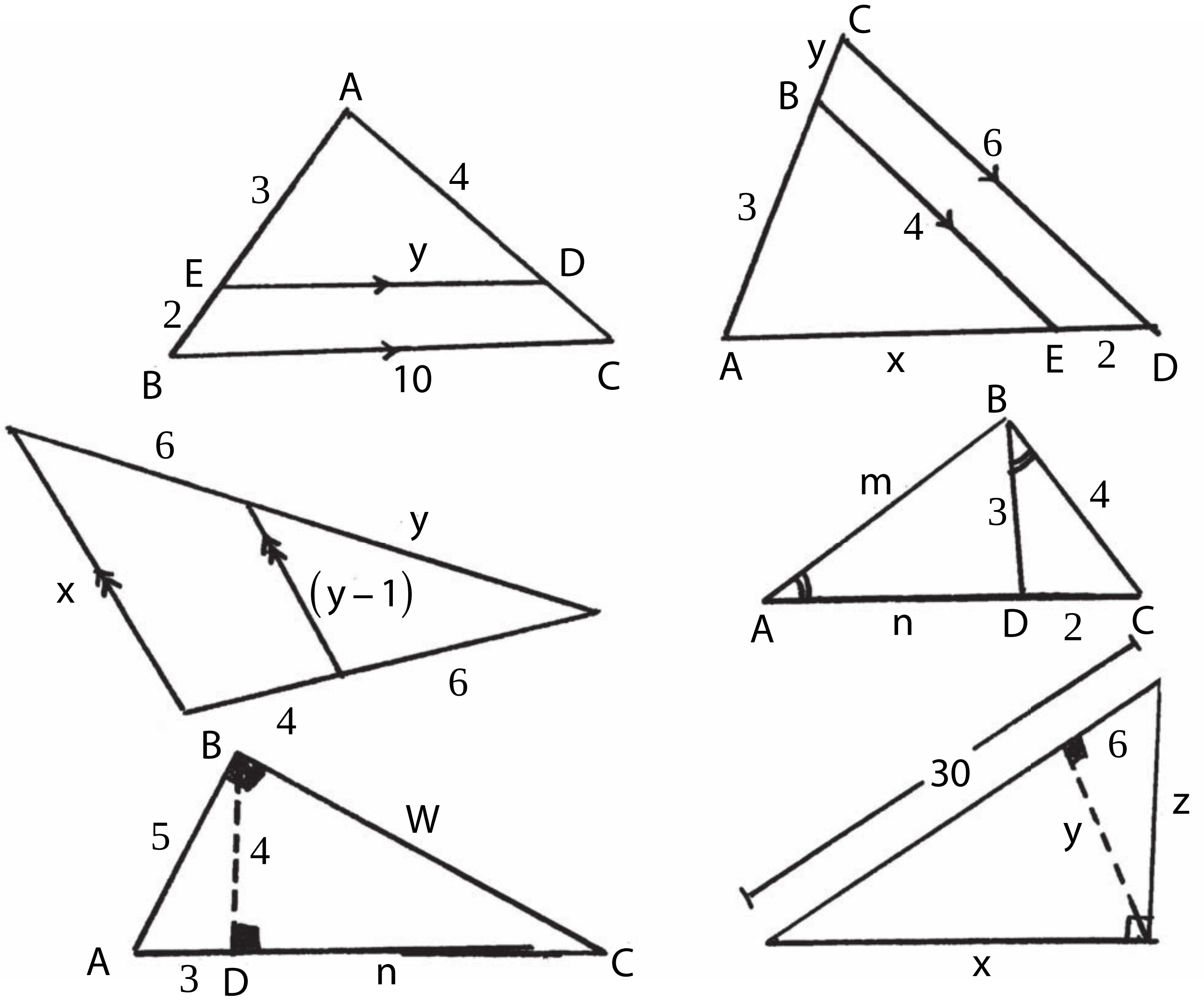
تمرين 1 : اسطوانة قائمة محيط قاعدتها (40cm) وحجمها ($4800cm^3$) جد حجم اسطوانة اخرى مشابهة لها محيط قاعدتها (50cm) .

تمارين اضافية في التشابه

في الاشكال المرسومة جد اطوال الاجزاء المؤشرة بالاحرف

LMN , ABC مثلثان متشابهان





4 – المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

سبورة ، طباشير ملون ،مثلثات مختلفة مرسومة على ورق كارتون ، مسطرة، منقلة

خطوات سير الدرس

التمهيد :

من منا لايعرف التطابق او لم يره ؟

الجواب : نلاحظ فيما بيننا .. فأذا نظر أحدنا في وجه صاحبه سيرى ان هناك تناظر في وجهه بوساطة محور يسمى محور التناظر .

وهناك اشياء او اشكال متناظرة لاسيما الهندسية منها كالمربع والمستطيل والمثلث ..

الوسائل التعليمية : قطع كارتونية مرسوم عليها اشكال هندسية مختلفة ومتناظرة ، الطلاب انفسهم . الكتب

الادوات : منقلة ، مسطرة ، فرجال .

العرض :

عرف : التحويلات الهندسية واعرض الاشكال في ص 179

اعرض اشكالاً غير متناظرة (من الوسائل التي هيأتها)
عرف التحويل الهندسي
* بين انك ستتناول الانعكاس بنوعيه
أ. مستقيم في المستوي .
ب. على المستوي الاحداثي .
وضح ان الانعكاس على مستقيم هو تطبيق تقابل ينقل (يحول) النقط من المستوي الواقعة في احدى جهتي المستقيم الى الجهة الاخرى منه مع بقاء النقاط الواقعة عليه في موضعها . كما موضح في الشكل الاعلى ص180 بين ان الانعكاس في المستوي الاحداثي المتعامد تكون صورة النقطة (x, y) .
بالنسبة لمحور التناظر x $(x-\text{axis})$ هي $P_1(x, -y)$ ماذا نستنتج؟
1. قيمة y اصبحت سالبة وتصبح القاعدة $R_x[(x, y)] = (x, -y)$
حيث Rx يسمى انعكاس بالنسبة لمحور السينات ، انظر الشكل الاسفل ص 180
* اما بالنسبة لمحور التناظر y $(y-\text{axis})$ فأن النقطة $P_1(x, y)$ ستكون $P_2\ (-x, y)$.
ثبت الملاحظة ان المسافة بين النقطة P_1 والمسافة P_2 تكون مساوية الى $2|x|$
يمكن اعتماد الشكل الاسفل من ص 180 وأحداثيات النقط
علم الطلاب كيف يجدون صورة المستقيم وتمثيله هندسياً بالنسبة
1. لمحور السينات (2) لمحور الصادات .
اولاً : استخرج احداثيات نقطتين على مستقيم (من معادلته) ثم اعكسهما حسب المحور المطلوب كما سبق ذكره ثم ارسم
1. المستقيم المعطى L_1
2. المستقيم المنعكس بالنسبة لمحور السينات L_2
المستقيم المنعكس بالنسبة لمحور الصادات L_3
استعن بالمثال (3) لتوضيح ذلك
* جد صورة اي شكل رباعي نقاط رؤوسه معلومة تحت تأثير محورها استعن بالمثال (4)
اعط للطلاب (نشاط) ايجاد الصورة للشكل نفسه تحت تأثير المحور الآخر
الانسحاب
عرف الانسحاب هو تحويل هندسي ينقل كل نقطة معلومة P في المستوي الى p' وبأتجاه معلوم بحيث PP' يساوي مسافة محددة
بين ان الانسحاب سيكون بأربعة اتجاهات كما ورد في ص 183
الدوران
عرف الدوران في مستوى هو تحويل هندسي يحول اي نقطة P الى نفسها حيث الزاوية θ ثيتا .

ملاحظة : يكون الدوران

أ – حول نقطة الاصل

ب – بأتجاهين

1 . اتجاه عقارب الساعة

2 . اتجاه عكس عقارب الساعة

كما ورد في ص 185 وبالاستعانة بحل المثال

استعن بمثال ص 185لاستيعاب ذلك والاستزادة.

ملاحظة : من خواص الدوران يحافظ على :

أ) الاستقامة ب) البينية جـ) قياس الزوايا د) التوازي

التكبير

عرف التكبير :تحويل هندسي مركزه O ومعامله k ويحول النقطة O الى نفسها ،بينما يحول اي نقطة اخرى مثل $p(x,y)$ الى $P'(Kx, Ky)$

ان الصيغة الرياضية

اذا كان التكبير للنقطة $p(x,y)$ مركزهoنقطة الاصل ومعامله k فأن

$$D_K\left[P(x,y)\right]=(Kx,Ky)$$

استعن بالمثالين (2)و(3)لتوضيح ذلك

اذكر خواص التكبير

5 – حل التمرينات

تمارين (1-8)

1) جد صورة النقطة $p(5, -3)$.

a) تحت تأثير انعكاس على محور السينات .

b) تحت تأثير انعكاس على محور الصادات .

c) انسحاب مقداره (3) وحدات بالاتجاه الموجب لمحور السينات .

d) انسحاب مقداره (2) وحدات بالاتجاه السالب لمحور الصادات .

2) جد صورة ΔABC تحت تأثير الانعكاس في محور السينات

حيث $C(4,5), B(1,4), A(1,2)$

3) جد صورة المستقيم $3x + 4y - 5 = 0$ تحت تأثير :

a) الانعكاس على محور السينات .

b) الانعكاس على محور الصادات .

4) اذا كانت النقطة $(4, 2)$ فجد صورة النقطة تحت تأثير انسحاب مقداره 5 بالاتجاه الموجب لمحور السينات x .

189

5) جد صورة النقطة $(2, -1)$ تحت تأثير :

a) دوران بزاوية 90° باتجاه عكس عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

b) دوران بزاوية 90° باتجاه عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

c) تحت تأثير دوران بزاوية 180° باتجاه عكس عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

d) تحت تأثير دوران بزاوية 180° باتجاه عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

6) جد صورة انسحاب المثلث الذي رؤوسه $A(-2, 1)$, $B(-3, 3)$, $C(1, 4)$.

مسافة قدرها (5) وحدات بالاتجاه الموجب لمحور السينات .

7) جد صورة النقطة $p(-4, 3)$ تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الاصل ومعامله (2) .

8) اذا كانت $A(-1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(0, 6)$ جد صورة المثلث ABC

بتكبير مركزه o ومعامله

a) $k = 2$

b) $k = -2$

c) $k = \frac{1}{2}$

190

تمارين (1-8)

س1 : جد صورة النقطة $p(5, -3)$.

a) تحت تأثير انعكاس على محور السينات . b) تحت تأثير انعكاس على محور الصادات .

c) انسحاب مقداره (3) وحدات بالاتجاه الموجب لمحور السينات .

d) انسحاب مقداره (2) وحدات بالاتجاه السالب لمحور الصادات .

الحل :

a) $R_x : (x, y) \to (x, -y)$

$R_x : (5, -3) \to (5, 3)$

b) $R_y : (x, y) \to (-x, y)$

$R_y : (5, -3) \to (-5, -3)$

ملاحظة : h مقدار الانسحاب

c) $T_x (x, y) \to (x + h, y)$

$T_x (5, -3) \to (5 + 3, -3) = (8, -3)$

d) $T_y (x, y) \to (x, y + h)$

$T_y (5, -3) \to (5, -3 + (-3)) = (5, -6)$

س2: جد صورة ΔABC تحت تأثير الانعكاس في محور السينات

حيث $A(1, 2), B(1, 4), C(4, 5)$

يفضل ان يقوم الطالب برسم المثلث وصورته

$A(1, 2) \to A'(1, -2)$

$B(1, 4) \to B'(1, -4)$

$C(4, 5) \to C'(4, -5)$

س3: جد صورة المستقيم $x - y = 4$ تحت تأثير :

a) الانعكاس على محور السينات . b) الانعكاس على محور الصادات .

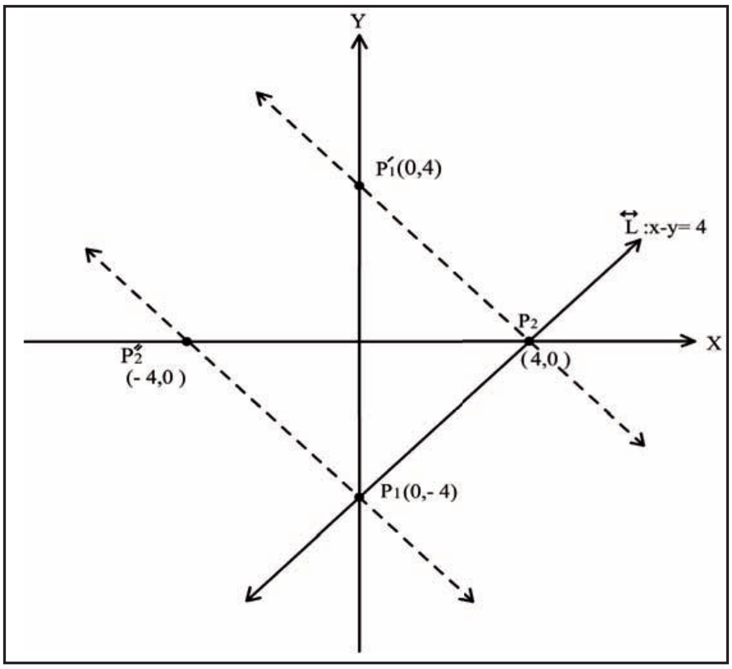
الحل: نجد نقطتان على المستقيم

عندما $x = 0 \Leftarrow y = -4, P_1(0, -4)$

عندما $y = 0 \Leftarrow x = 4, P_2(4, 0)$

$\therefore$ النقطتان P_1, P_2 على المستقيم L

$\overleftrightarrow{L} = x - y = 4$



a) $R_x : P(x, y) \to P'(x, -y)$

$\therefore P_1(0, -4) \to P_1'(0, 4)$

$P_2(4, 0) \to P_2'(4, 0)$

b) $R_y : P(x, y) \to P'(-x, y)$

$\therefore P_1(0, -4) \to P_1''(0, -4)$

$P_2(4, 0) \to P_2''(-4, 0)$

س4: جد صورة النقطة ($2, -1$) تحت تأثير :

a) دوران بزاوية 90° باتجاه عكس عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

$$R_{90^\circ} : P(2,-1) \rightarrow P'(1,2)$$

b) دوران بزاوية 90° باتجاه عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

$$R_{90^\circ} : P(2,-1) \rightarrow P''(-1,-2)$$

c) تحت تأثير دوران بزاوية 180° باتجاه عكس عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

$$R_{180^\circ} : P(2,-1) \rightarrow P'''(-2,1)$$

d) تحت تأثير دوران بزاوية 180° باتجاه عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

$$R_{180^\circ} : P(2,-1) \rightarrow P'''(-2,1)$$

س5: جد صورة انسحاب المثلث الذي رؤوسه $A(-2,1)$, $B(-3,3)$, $C(1,4)$. مسافة قدرها (5) وحدات بالاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل :

$$T_x : A(-2,1) \rightarrow A'(-2+5,1) = A'(3,1)$$

$$T_x : B(-3,3) \rightarrow B'(-3+5,1) = B'(2,1)$$

$$T_x : C(1,4) \rightarrow C'(1+5,4) = C'(6,4)$$

ملاحظة : يفضل رسم المثلث وصورته في المستوي الاحداثي

س6: جد صورة النقطة $p(-4,3)$ تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الاصل ومعامله (2) .

الحل:

$$D_{0,2} : P(x,y) \rightarrow P'(2x,2y)$$

$$\therefore P(-4,3) \rightarrow P'(-8,6)$$

س7: اذا كانت $A(-1,1)$, $B(2,3)$, $C(0,6)$ جد صورة المثلث ABC بتكبير مركزه o ومعامله

a) $k = 2$ b) $k = -2$ c) $k = \frac{1}{2}$

الحل:

$K = 2$

$D_2 : A(-1,1) \rightarrow A'(-2,2)$

$: B(2,3) \rightarrow B'(4,6)$

$: C(0,6) \rightarrow C'(0,12)$

$K = -2$

$D_{-2} : A''(2,-2)$

$: B''(-4,-6)$

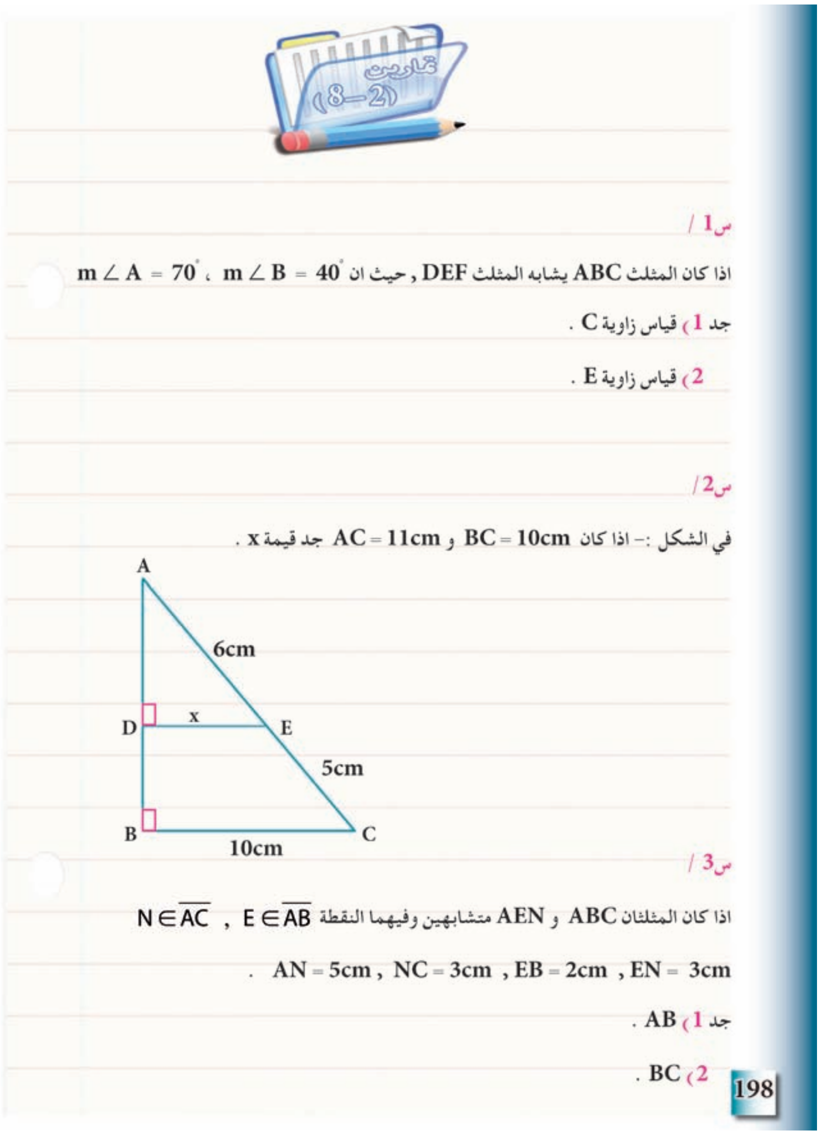
$: C''(0,-12)$

$K = \frac{1}{2}$

$D_{\frac{1}{2}} : A'''\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$: B'''\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$: C'''(0,3)$



تمارين (8–2)

س1 /

اذا كان المثلث ABC يشابه المثلث DEF , حيث ان $m\angle B = 40^\circ$ ، $m\angle A = 70^\circ$

جد 1) قياس زاوية C .

2) قياس زاوية E .

س2 /

في الشكل :– اذا كان $BC = 10cm$ و $AC = 11cm$ جد قيمة x .

س3 /

اذا كان المثلثان ABC و AEN متشابهين وفيهما النقطة $E \in \overline{AB}$, $N \in \overline{AC}$

$AN = 5cm$, $NC = 3cm$, $EB = 2cm$, $EN = 3cm$.

جد 1) AB .

2) BC .

198

تمارين (2–8)

س1 / اذا كان المثلث ABC يشابه المثلث DEF , حيث ان $m\angle B = 40^\circ$ ، $m\angle F = 70^\circ$

جد : $m < E , m < C$

الحل :

$\because$ المثلثان متشابهان

$\therefore$ يوجد تناسب بين اطوال الاضلاع المتناظرة اي $\frac{AC}{DF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ وتساوى قياسات الزوايا المقابلة للاضلاع المتناظرة

$\therefore$ $m < E = m < B \Leftarrow m < E = 40^\circ$

كذلك $m < F = m < C \Leftarrow m < F = 70^\circ$

س2 / في الشكل :– اذا كان $BC = 10cm$ و $AC = 11cm$ جد قيمة x .

$\because$ $\Delta\Delta ABC , ADE$ متشابهان

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$$

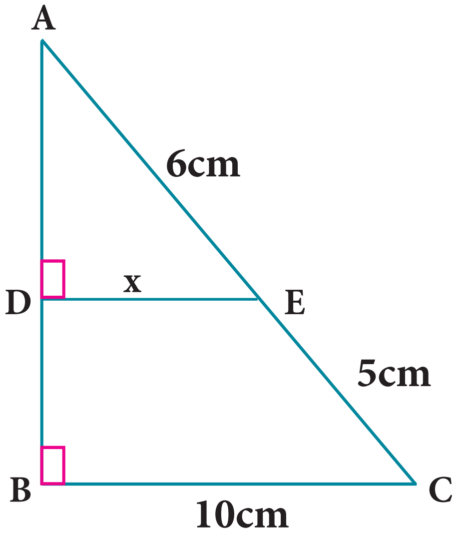
$$\frac{x}{10}=\frac{6}{11}\Rightarrow x=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}$$

حل آخر : بأستخدام النسب المثلثية :

$$\sin A=\frac{x}{6}\ \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$ في المثلث الصغير

$$=\frac{10}{11}$$ في المثلث الكبير

$$\Rightarrow\frac{x}{6}=\frac{10}{11}\Rightarrow x=5\frac{6}{11}$$



س3 /

اذا كان المثلثان **ABC** و **AEN** متشابهان وفيهما النقطة $E\in\overline{AB}$, $N\in\overline{AC}$

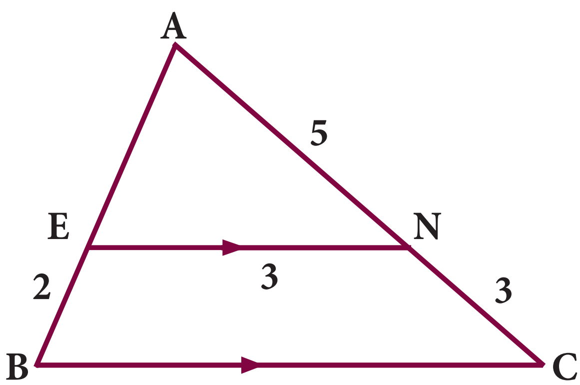
AN = 5cm , NC = 3cm , EB = 2cm , EN = 3cm .

جد 1) **AB** .

2) **BC** .

الحل :

من تشابه المثلثين نحصل على تناسب بين أطوال الاضلاع المتناظرة



$$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{EN}$$

$$\frac{AE+BE}{AE}=\frac{8}{5}=\frac{BC}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{3}=\frac{8}{5}\Rightarrow BC=\frac{3\times 8}{5}=\frac{24}{5}$$ وحدة

كذلك : $\frac{AE+2}{AE}=\frac{8}{5}$

$$\Rightarrow 8AE=5AE+10$$

$$\Rightarrow 3AE=10\Rightarrow AE=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$$ وحدة

9 الفصل التاسع

حساب المثلثات
Trigonometry

[9-1] المثلثات .

[9-2] النسب المثلثية .

[9-3] النسب المثلثية للزوايا الخاصة .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
جيب الزاوية	$\sin\ \theta$
جيب تمام الزاوية	$\cos\ \theta$
ظل الزاوية	$\tan\ \theta$

1 – تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الوتر
- الضلع المقابل للزاوية θ
- الضلع المجاور للزاوية θ
- النسب المثلثية
- جيب الزاوية $\sin\theta$
- جيب تمام الزاوية $\cos\theta$
- ظل الزاوية $\tan\theta$

الحقائق والتعميمات

المثلث يتكون من ثلاث زوايا

ويسمى بانواعها

مثلث حاد الزاوية (جميع زواياه حادة اي اقل من 90^0

مثلث قائم الزاوية (يحتوي على زاوية قائمة $=90^0$

مثلث منفرج الزاوية (احدى زواياه منفرجة اكبر من 90^0)

الوتر هو الضلع المقابل الزاوية القائمة

المقابل هو الضلع الذي يقابل الزاوية θ

المجاور هو الضلع الذي يجاور الزاوية θ

ان المبرهنة التي تربط بين مربعات اطوال اضلاع المثلث القائم تدعى مبرهنة فيثاغورس

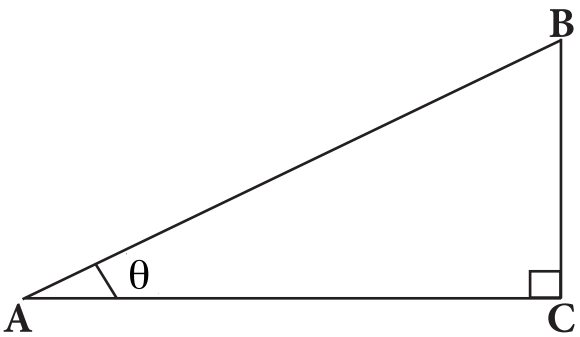
$$\text{جيب الزاوية } \theta = \frac{\text{المقابل للزاوية } \theta}{\text{الوتر}}$$

وتكتب بشكل $\sin\theta = \dfrac{BC}{AB}$

$$\text{جيب تمام الزاوية } \theta = \frac{\text{المجاور للزاوية } \theta}{\text{الوتر}}$$

وتكتب بشكل $\cos\theta = \dfrac{AC}{AB}$

$$\text{ظل الزاوية } \theta = \frac{\text{المقابل للزاوية } \theta}{\text{المجاور للزاوية } \theta}$$



وتكتب بشكل $\tan\theta = \dfrac{BC}{AC}$

مثلاً :

$$\tan 60^0 = \sqrt{3}$$

$$\tan 30^0 = \frac{1}{\tan 60^0}$$

اذا علم طولا ضلعين من المثلث القائم نستطيع ان نجد : $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$

2 – الاهداف السلوكية

نتوقع نهاية الدرس ان يكون الطالب متمكناً من ان :

يعرف جيب الزاوية θ

يعرف جيب تمام الزاوية θ

يميز بين $\sin\theta, \cos\theta$

يسمى النسبة بين مقابل الزاوية θ ومجاورها

ان يستخرج $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ من مثلث قائم الزاوية عرفت قياسات اضلاعه

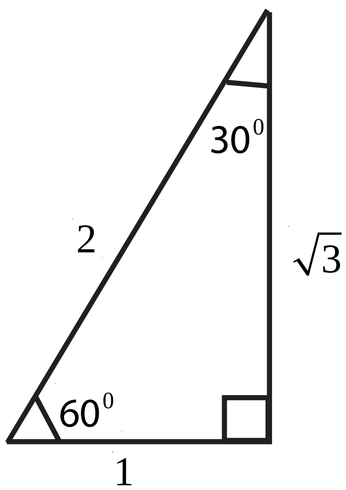
يكتب قانون مبرهنة فيثاغورس

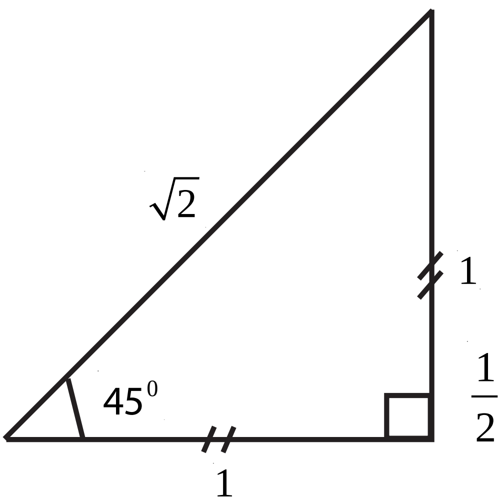
يعرف ان مجموع مربع $\sin\theta$ ومربع $\cos\theta = 1$

نجد اطوال المثلث القائم الزاوية من $\sin\theta$ او $\cos\theta$

يستخرج $\sin\theta, \tan\theta$ اذا علم $\cos\theta$

يعرف ان $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$





يعرف $\tan 45^0 = 1$

يعرف ان $\tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

يعرف ان $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$

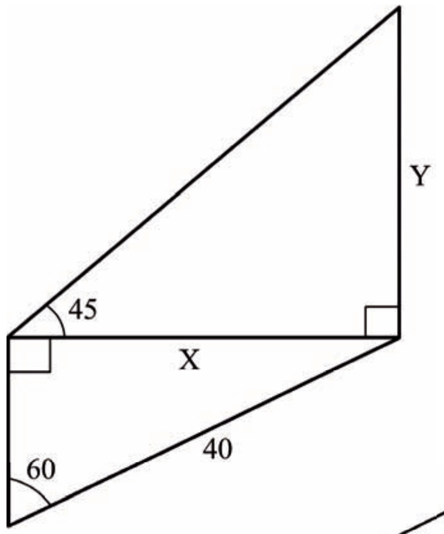
يعرف ان $\tan 30^0 = \dfrac{1}{\tan 60^0}$

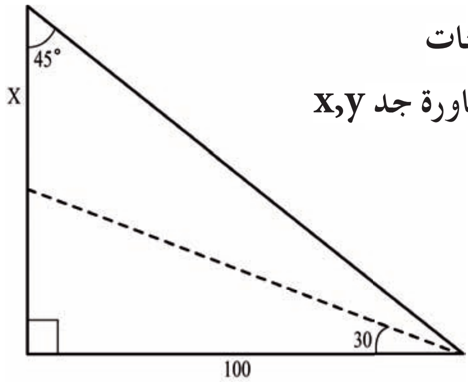
يستخرج اطوال ضلعي المثلث القائم اذا علمت زاويته الخاصة وضلعه الثالث.

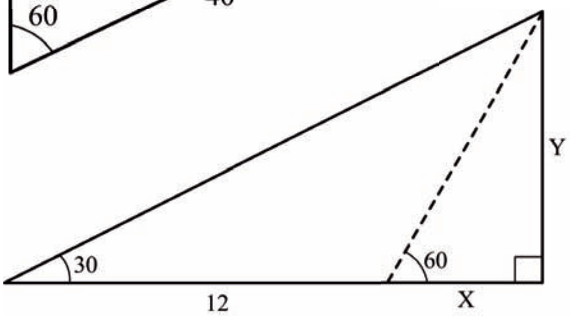
3 – خلفية علمية للمدرس

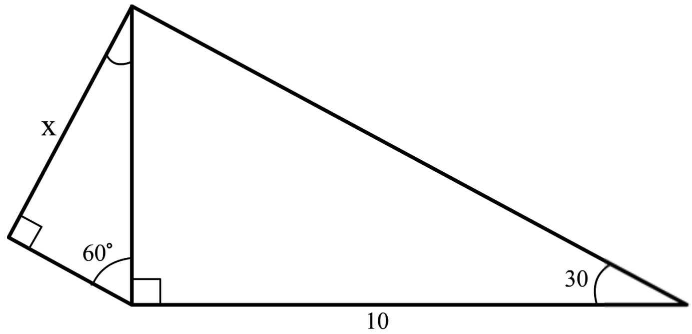
تمارين اضافية في حساب المثلثات

س1 : a) في الاشكال المجاورة جد x,y









b) تحقق من خطأ كل من العبارات الآتية : اخطاء شائعة

خذ $x = 45^0 , x = 30^0$

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin x + \cos x)^4$

2) $\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} + \sqrt{\cos^2 x}$

3) $(2\cos x - 3\sin x)^2 = 4\cos^2 x - 9\sin^2 x$

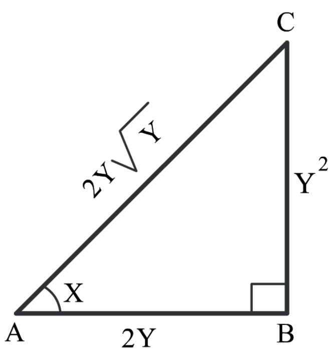
c) اثبت ان :

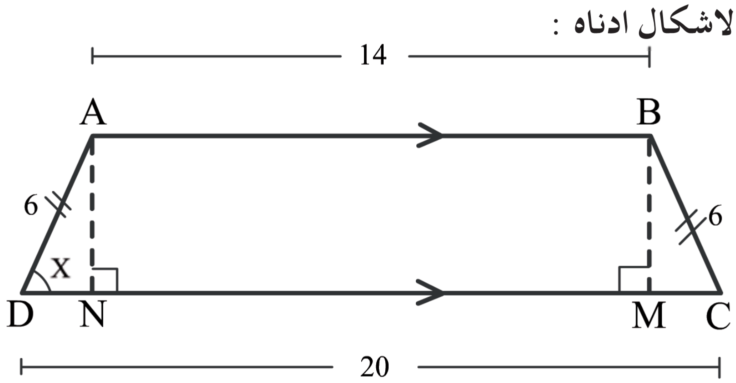
$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ خذ $\theta = 30^0$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

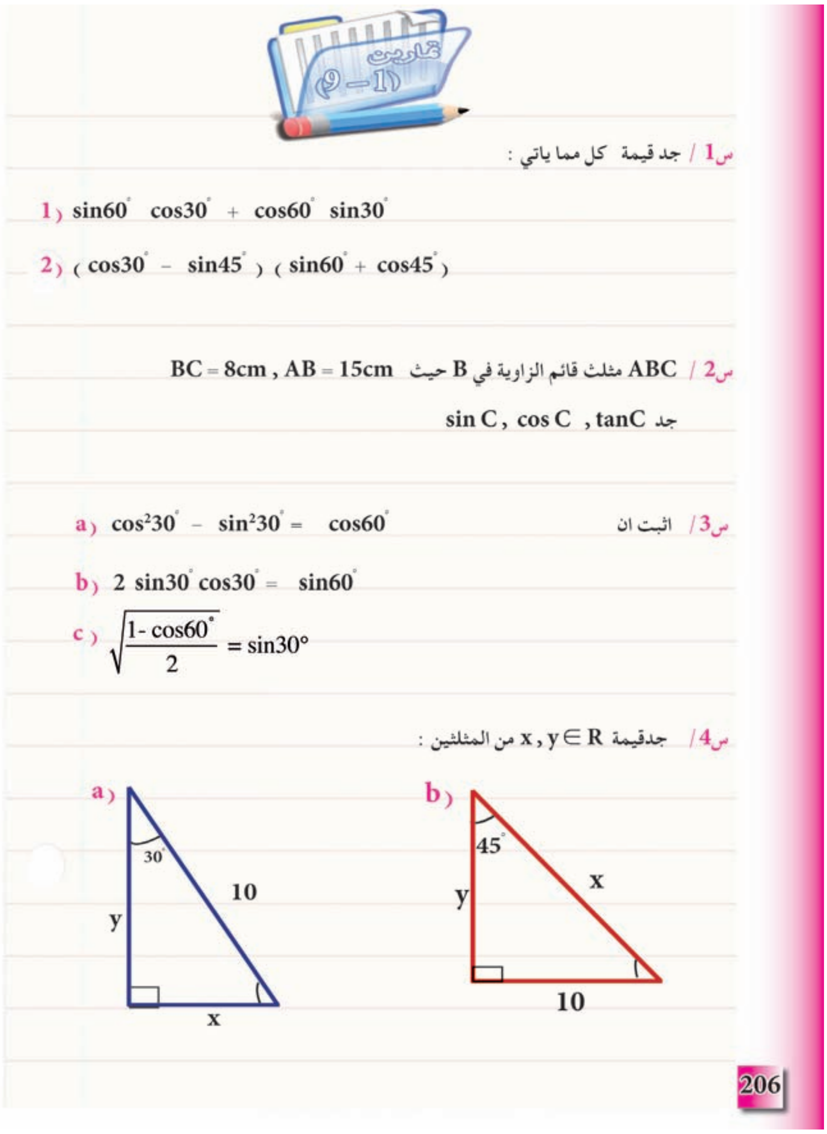
س2 : في الاشكال ادناه :

جد x^0





4 – حل التمرينات



تمارين (1–9)

س1 / جد قيمة كل مما ياتي :

1) $\sin 60^\circ \ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \ \sin 30^\circ$

2) $(\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

س2 / ABC مثلث قائم الزاوية في B حيث $BC = 8cm$, $AB = 15cm$

جد $\sin C$, $\cos C$, $\tan C$

س3 / اثبت ان

a) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

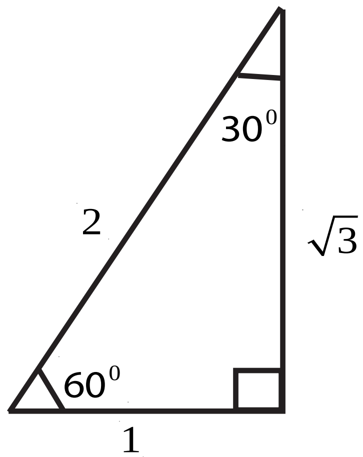
b) $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

c) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

س4 / جدقيمة $x, y \in R$ من المثلثين :

تمارين (1–8)

س1 / جد قيمة كل مما ياتي :



1) $\sin 60^\circ \quad \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \quad \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

2) $(\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

$$\left(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ\right)\left(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

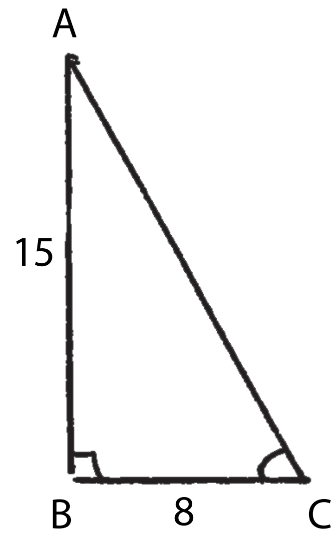
ملاحظة :

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$

$$= \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a - b$$

س2 / ABC مثلث قائم الزاوية في B حيث $AB = 15cm$, $BC = 8cm$ جد $\tan C$, $\cos C$, $\sin C$

في الشكل المجاور:



فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$$= (15)^2 + (8)^2 = 289$$

$$\therefore AC = 17 Unit$$

$$\sin C = \frac{15}{17}$$

$$\cos C = \frac{8}{17}$$

$$\tan C = \frac{15}{8}$$

س3 / اثبت ان

a) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

L.H.S (الطرف الايسر)

$$(\cos 30^0)^2 - (\sin 30^0)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

الطرف الايمن (R.H.S) $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

b) $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

$$L.H.S = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

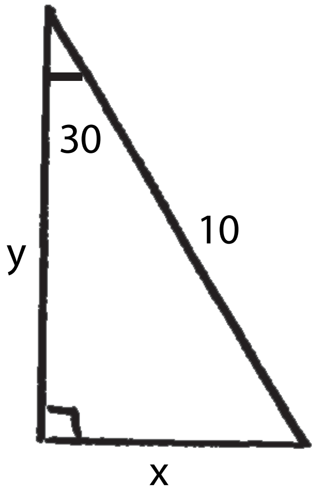
$$R.H.S = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

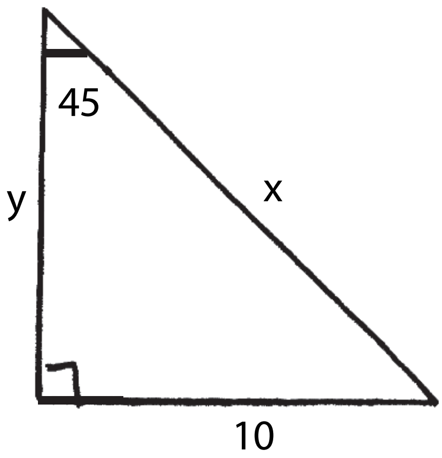
c) $\sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

$$L.H.S = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$R.H.S = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

س4/ جدقيمة x , y من المثلثين :





$\sin 30^\circ = \dfrac{x}{10}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 5$

$\tan 30^\circ = \dfrac{x}{y}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{y} \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$

$\tan 45^\circ = \dfrac{10}{y}$

$1 = \dfrac{10}{y} \Rightarrow y = 10$

$\sin 45^\circ = \dfrac{10}{x}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{x} \Rightarrow x = 10\sqrt{2}$

10 الفصل العاشر

الاحصاء
Statistics

[1-10] الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة .

[2-10] الوسط الحسابي للتوزيع التكراري البسيط.

[3-10] الوسط الحسابي للتوزيع التكراري ذي الفئات.

[4 - 10] مزايا وعيوب الوسط الحسابي .

[5-10] الوسيط .

[6-10] مزايا وعيوب الوسيط .

[7-10] المنوال .

[8-10] مزايا وعيوب المنوال .

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7}{7}$$

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الوسط الحسابي للقيم :X	$\bar{x}$
الوسيط	ME
المنوال	MO

1 - تحليل المحتوى العلمي

المفاهيم والمصطلحات والرموز

مقاييس النزعه المركزية ،الوسط الحسابي ،الوسيط ،المنوال .

الحقائق والتعميمات

الوسط الحسابي هو مجموع القيم مقسوماً على عددها ورمزه $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

الوسط الحسابي (للتوزيع التكراري) : هو مجموع حواصل ضرب القيم x_i في (التكرارات المناظرة) f_1 مقسوماً على مجموع التكرارت .

الوسط الحسابي (للتوزيع التكراري ذو الفئات)هو مجموع حواصل ضرب مراكز الفئات x_i في التكرارات المناظرة لها مقسوماً على مجموع التكرارات

الوسيط (ME) :هي القيمه التي تتوسط القيم بعد ترتيبها تصاعدياً او تنازلياً .

المنوال (MO) : هو القيمة الاكثر تكراراً من غيرها .

2 - الاهداف السلوكية

نتوقع في نهاية الدرس ان يكون الطالب قادراً على ان :

يعرف الوسط الحسابي ويكتب رمزه.

يكتب قانون الوسط الحسابي.

يميز بين عدد القيم والقيم.

يعرف التكرار البسيط.

يميز بين الحد الادنى للفئة والحد الاعلى للفئة

يستخرج مركز الفئة.

يخطط (يعمل) الجدول البسيط (الحد الادنى عمودان احدهما للفئات والاخرى للتكرارت).

يعدد مزايا الوسط الحسابي

يعدد عيوب الوسط الحسابي

يجد الوسط الحسابي لكل الحالات الواردة في اعلاه

يعرف الوسيط

يجد الوسيط للقيم اذا كان عددها فردياً

يجد الوسيط للقيم اذا كان عددها زوجياً

يميز بين ترتيب الوسيط وقيمة الوسيط

يعدد مزايا الوسيط

يعدد عيوب الوسيط

يعرف المنوال

يميز ان هناك منوالاً واحداً او ومنوالين

يعرف ليس بالضرورة ان يكون هناك منوال .

يعدد مزايا المنوال .

يعدد عيوب المنوال .

يجد الوسط الحسابي ،الوسيط ،المنوال في ذات الوقت

3 – المعينات التعليمية والانشطة المقترحة

سبورة ، طباشير ملون ،مثلثات مختلفة مرسومة على ورق كارتون ، مسطرة، منقلة

خطوات سير الدرس

التمهيد :

البيانات نوعان

1 –البيانات النوعية :هي بيانات تعكس تصنيف الافراد حسب خصائص صفات معينة مثل المهنة، النوع، التخصص، البيئة وغيرها .

2 –البيانات الكمية :هي بيانات يعبر عنها بأرقام تحصل من خلال جمع عملية القياس وقد تكون نتيجة استخدام العمليات الرياضية الاربع ويطلق عليها بالقيم ويرمز لها احصائياً(x)او(y) او ....

يعرف الوسط الحسابي :هو مجموع القيم مقسوما على عددها ويرمز له بـ $\overline{X}$ ويسمى X بار

اكتب قانونه كما ورد في الكتاب

مثال جد الوسط الحسابي للقيم كما في المثال الوارد في الكتاب .

– اعرض مزايا الوسط الحسابي — – اعرض عيوب الوسط الحسابي

الوسيط : من بيانات غير مبوبة عرف الوسيط وكيفية استخراجه

اولا : اذا كان عدد القيم فردياً مثال (1)ص215

اذا كان عدد القيم زوجياً مثال (2)ص215

ملاحظة اجعل الطالب يميز بين ترتيب الوسيط وقيمة الوسيط .

اعرض

– مزايا الوسيط ص216 — – عيوب الوسيط216

المنوال : من بيانات غير مبوبة

عرف المنوا ل وكيفية استخراجه .

اعرض

– مزايا المنوال — – عيوب المنوال

4 – حل التمرينات

س1 / جد ان امكن الوسط الحسابي ، الوسيط والمنوال لكل مما يأتي :

a) 11 , 20 , 5 , 8 , 12 , 17 , 9

b) 8 , 4 , 9 , 5 , 2 , 4 , 4 , 2 , 6 , 7 , 2

c) 12 , 24 , 16 , 20 ,10 , 8 ,18 , 4 , 20

d) 2 , 5 , 9 , 5 , 7 , 7 ,11 , 9 , 7

س2 / من الجدول الاتي جد الوسط الحسابي .

الوزن	6	9	7	12	17	20
العدد	2	3	4	6	5	7

س3 / اوجد الوسط الحسابي لاوزان (40) طالباً بالكيلو غرام من الجدول التكراري الاتي :

الاوزان	30-	40-	50-	60-	70- 80
التكرار	10	15	4	5	6

س4 / احسب الوسط الحسابي للقيم المعطاة في الجدول الاتي :

الفئة	5-	8-	11-	14-	17-	20-23
التكرار	11	9	7	3	2	5

219

تمارين (1–10)

س1 / جد ان امكن الوسط الحسابي ، الوسيط والمنوال لكل مما يأتي :

a) 11 , 20 , 5 , 8 , 12 , 17 , 9

b) 8 , 4 , 9 , 5 , 2 , 4 , 4 , 2 , 6 , 7 , 2

c) 12 , 24 , 16 , 20 ,10 , 8 ,18 , 4 , 20

d) 2 , 5 , 9 , 5 , 7 , 7 ,11 , 9 , 7

الحل :

a) $\bar{x} = \dfrac{9+17+12+8+5+20+11}{7} = \dfrac{82}{7} = 11\dfrac{5}{7}$

$ME = 11$

MO (لايوجد)

يوضح المدرس للطلبة لعدم تكرار اية قيمة من القيم اكثر من مرة واحدة اذن لايوجد منوال .

b) $\bar{x} = \dfrac{2+7+6+2+4+4+2+5+9+4+8}{11} = \dfrac{53}{11} = 4.8$

ترتب القيم تصاعدياً او تنازليا

ترتيب القيم 2 2 2 4 4 4 5 6 7 8 9

ME = 4

MO = 2 and 4

c) $\bar{x} = \frac{20+4+18+8+10+20+16+24+12}{9} = \frac{134}{9} = 14\frac{8}{9}$

4,8,10,12,16,18,20,20,24

ME = 16

MO = 20

d) $\bar{x} = \frac{7+9+11+7+7+5+9+5+2}{9} = \frac{62}{9} = 6\frac{8}{9}$

ترتب القيم 2 5 5 7 7 7 9 9 11

ME = 7

MO = 7

س2 / من الجدول الاتي جد الوسط الحسابي.

20	17	12	7	9	6	الوزن
7	5	6	4	3	2	العدد

الحل:

الوزن x_i	العدد f_i	$x_i f_i$
6	2	12
9	3	27
7	4	28
12	6	72
17	5	85
20	7	140
	27	364

$\therefore \bar{x} = \frac{364}{27} = 13\frac{13}{27}$

ممكن حل السؤال حسب القانون

$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_i f_i}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$

(القيمة الاكبر تكرار بين القيم)

MO = 20

س3 / اوجد الوسط الحسابي لاوزان (40) طالباً بالكيلو غرام من الجدول التكراري الاتي:

الاوزان	30–	40–	50–	60–	70–80
التكرار	10	15	4	5	6

الحل:

فئات الاوزان	مركز الفئة x_i	التكرار f_i	$x_i f_i$
30 –	35	10	350
40 –	45	15	675
50 –	55	4	220
60 –	65	5	325
70 – 80	75	6	450
		40	2020

$$\therefore \bar{x} = \frac{2020}{40} = 50.5$$

س4 / احسب الوسط الحسابي للقيم المعطاة في الجدول الاتي:

الفئة	5–	8–	11–	14–	17–	20–23
التكرار	11	9	7	3	2	5

الحل:

الفئة	مركز الفئة x_i	التكرار f_i	$x_i f_i$
5 –	6.5	11	71.5
8 –	9.5	9	85.5
11 –	12.5	7	87.5
14 –	15.5	3	46.5
17 –	18.5	2	37
20 – 23	21.5	5	107.5
		37	435.5

$$\therefore \bar{x} = \frac{435.5}{37} = 11.77$$

الفهرست