الوحدة الاولى

التفاضل

حل تمارين الكتاب لمادة الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي

(المنهاج الجديد)

الفصل الدراسي الاول

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

0798959071

أتحقق من فهمي صفحة (11)

a) ابحث قابلية الاقتران $f(x)=|x-2|$ للاشتقاق عندما $x=2$

الحل: نعيد التعريف

$$x-2=0 \longrightarrow x=2$$

نبحث في الاشارة

$$\begin{array}{c|c} 2-x & x-2 \\ -\,- & +\,+ \end{array}$$
$$2$$

$$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h-2)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2-(2+h))-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{2-2-h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}-1$$

$$=-1$$

$$f'_+(2)\neq f'_-(2)$$

$\therefore$ $f'(2)$ غير موجودة

b) ابحث قابلية الاقتران: $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{5}}$ للاشتقاق عندما $x=-1$

الحل:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h+1)^{\frac{1}{5}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{1}{5}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1-\frac{1}{5}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{4}{5}}}$$

$$=\frac{1}{0}=$$ غير موجودة

أتحقق من فهمي صفحة (12):

الاقتران متصل عند النقاط: x_6 و x_3 و x_1 و x_0

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند النقاط x_5 و x_4 و x_2 لأنها رؤوس حادة

x_8 و x_7 الاقتران غير متصل.

أتحقق من فهمي صفحة (14)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 5e^x + 3$

$f'(x) = 5e^x$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$

تذكير: مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة ما بداخل الجذر / 2 × الجذر نفسه

c) $y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

$y = 8e^x + \frac{4}{x^{\frac{1}{5}}}$

$y = 8e^x + 4x^{-\frac{1}{5}}$

$y' = 8e^x + (4)(-\frac{1}{5})x^{-\frac{1}{5}-1}$

$= 8e^x - \frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}}$

$= 8e^x - \frac{4}{5x^{\frac{6}{5}}}$

$= 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$.

أتحقق من فهمي صفحة (16)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

$f(x) = \sqrt{x} + \ln 4 + \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 + \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$.

b) $f(x) = \ln(2x^3)$

$f(x) = \ln 2 + \ln x^3$

$= \ln 2 + 3\ln x$

$f'(x) = 0 + 3(\frac{1}{x}) = \frac{3}{x}$.

أتحقق من فهمي صفحة (18)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

$y' = \frac{\cos x}{2} - 3\sin x$

b) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

$f'(x) = 2x - \sin x + 0$

$= 2x - \sin x$

حيث $\sin\frac{\pi}{2}$ ثابت

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

أتحقق من فهمي صفحة (19)

إذا كان الاقتران $f(x) = \ln\sqrt{x}$ فاستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يلي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الحل:

$$f(x) = \ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x$$

$$f'(x) = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{x})$$

$$m = f'(e) = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{e}) = \frac{1}{2e}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - (\tfrac{1}{2e})(e)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{2} \qquad\qquad +\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2e}x \leftarrow$ معادلة المماس.

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

ميل المماس $= m = \frac{1}{2e}$

ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = -2e$.

معادلة العمودي:

$$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = -2ex + 2e^2$$

$$y = -2ex + 2e^2 + \frac{1}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة (22)

يمثل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8 \ ,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني.

a) أجد سرعة الجسم المتجهة، وتسارعه عندما $t=4$

b) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

c) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=2$ ؟

d) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الحل:

a) $s(t) = t^2 - 7t + 8$

$$v(t) = s'(t) = 2t - 7.$$

$$v(4) = (2)(4) - 7 = 1$$

$$a(t) = v'(t) = 2.$$

$$a(4) = 2.$$

b) يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$

$$2t - 7 = 0 \rightarrow 2t = 7$$

$$\rightarrow t = \frac{7}{2} = 3.5.$$

c) $v(t) = 2t - 7$

$$v(2) = 2(2) - 7 = -3 < 0$$

الحركة بعكس الاتجاه الأصلي (لليسار)

d)

يكون الجسم في موقعه الابتدائي لأول مرة عندما $t=0$

نجد $s(0) \longrightarrow s(0) = 8$

$$s(t) = 8 \rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8$$

$$\rightarrow t^2 - 7t = 0 \rightarrow t(t-7) = 0$$

$$t = 0 \quad or \quad t = 7$$

اذن يعود الجسم الى موقعه الابتدائي عندما

$t = 7s$

أتحقق من فهمي صفحة (24) :

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويمثل الاقتران $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالأمتار

a) أجد اقترانًا يمثل سرعة الجسم المتجهة واقترانًا آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة

b) أصف حركة الجسم .

الحل :

a) $s(t) = 7\sin t$

$v(t) = 7\cos t$

$a(t) = -7\sin t$

---

b) بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\mp 7m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = 7m$ و $s = -7m$ ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi s$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\mp 7m/s$ ويكون مقدار سرعة الجسم أكبر ما يمكن $|7\cos t| = 7$ عندما $\cos t = \mp 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفس لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان) بينما تكون سرعة الجسم صفرًا (يسكن لحظيًا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $v(t) = 0$ $|s(t)| = 7$ (اللحظات $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب)

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان وهي اللحظة التي تكون فيها محصلة القوة المؤثرة على الجسم تساوي صفر

ابحث قابلية الاشتقاق لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة.

① $f(x) = |x-5| \,,\ x = 5$

الحل: نعيد التعريف

$x - 5 = 0 \longrightarrow x = 5$

$5-x$: $-\ -$ ، $x-5$: $+\ +$ ، عند 5

$$f(x) = \begin{cases} x-5 , & x \geq 5 \\ 5-x , & x < 5 \end{cases}$$

$f(x)$ متصل عند $x=5$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 , & x > 5 \\ -1 , & x < 5 \end{cases}$$

$f'_+(5) = 1 \,,\ f'_-(5) = -1$

$\Rightarrow f'(5)$ غير موجودة

② $f(x) = x^{\frac{2}{5}} \,,\ x = 0$

الحل:

$f'(x) = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}}$

$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

$f'(0) = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

$=$ غير موجودة

③ $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \leq 1 \\ x^2 - 2x , & x > 1 \end{cases} \,,\ x = 1$

الحل: نبحث الاتصال عند $x=1$.

1) $f(1) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f(x)$ غير متصل عند $x=1$

$\therefore f'(x)$ غير موجودة عند $x=1$.

④ $f(x) = \frac{3}{x} \,,\ x = 4$

الحل:

$f(x) = 3x^{-1}$.

$f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$.

$f'(4) = \frac{-3}{16}$

⑤ $f(x) = (x-6)^{\frac{2}{3}} \,,\ x = 6$

الحل:

$f'(x) = \frac{2}{3}(x-6)^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x-6}}$

$f'(6) = \frac{2}{0}$ غير موجودة

⑥ $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \neq 4 \\ 3 & , x = 4 \end{cases}$ ، $x = 4$

الحل: نبحث الاتصال عند $x = 4$

1) $f(4) = 3$

2) $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$

3) $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$

$\therefore$ $f(x)$ غير متصل عند $x = 4$

$\therefore$ $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند $x = 4$

---

⑦ الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما

x_3 ، x_4 ، x_6 لأنه لمنحناه رأس حاد

وعند x_0 لأنه غير متصل عندها

وعند x_{12} لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة

---

⑧ الاقتران g غير قابل للاشتقاق

عند x_1 و x_2 و x_4 لأنه غير متصل

عند x_3 لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة.

---

⑨ $f(x) = \dfrac{x-8}{x^2-4x-5}$

الحل: نجد أصفار المقام

$x^2-4x-5=0 \to (x-5)(x+1)=0$

$x = 5 , -1$

الاقتران غير متصل عند $x=5$ و $x=-1$

$\therefore$ غير قابل للاشتقاق عند 5 و -1 .

---

⑩ $f(x) = \sqrt[3]{3x-6} + 5$

$f(x) = (3x-6)^{\frac{1}{3}} + 5$

$f'(x) = \frac{1}{3}(3x-6)^{\frac{-2}{3}} \times 3$.

$= \dfrac{1}{(3x-6)^{\frac{2}{3}}}$.

نجد أصفار المقام

$3x-6=0$

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \to x = 2$

غير قابل للاشتقاق عند $x = 2$.

---

⑪ $f(x) = |x^2-9|$

الحل: نعيد التعريف

$x^2-9=0$

$x^2 = 9 \longrightarrow x = \mp 3$

$$\begin{array}{ccccc} & x^2-9 & & 9-x^2 & & x^2-9 \\ & ++ & & --- & & ++ \\ \longleftarrow & & -3 & & 3 & \longrightarrow \end{array}$$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & , x > 3 \\ -2x & , -3 < x < 3 \\ 2x & , x < -3 \end{cases}$

$f'_-(3) = -6$ و $f'_+(3) = 6$

$\Rightarrow f'(3)$ غير موجودة .

(12) اذا كان $f(x) = x|x|$ فاثبت أن $f'(0)$ موجودة .

الحل: نفيد تعريف $|x|$.

$x = 0$ $-x \mid x$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

نبحث الاتصال عند $x=0$.

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

$\therefore f(x)$ متصل عند $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = 0, \quad f'_-(0) = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$ (موجودة)

(13) $f(x) = 2\sin x - e^x$

الحل: $f'(x) = 2\cos x - e^x$

(14) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi\cos x$

الحل: $f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\sin x$

$$= \frac{1}{4x} + \pi\sin x .$$

(15) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

$$f(x) = \ln 1 - \ln x^3 + x^4$$
$$= 0 - 3\ln x + x^4$$
$$= -3\ln x + x^4$$
$$f'(x) = -3\left(\frac{1}{x}\right) + 4x^3$$
$$= \frac{-3}{x} + 4x^3$$

(16) $f(x) = e^{x+1} + 1$.

الحل: $f(x) = e^x \cdot e + 1 = ee^x + 1$

$$f'(x) = e\,e^x + 0$$
$$f'(x) = e^{x+1}$$

تذكير : e^1 ثابت

(17) $f(x) = e^x + x^e$

الحل: $f'(x) = e^x + e\,x^{e-1}$

(18) $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

الحل: $f(x) = \ln 10 - \ln x^n$

$$= \ln 10 - n\ln x$$
$$f'(x) = 0 - n\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{n}{x}$$

n هنا تعتبر ثابت

إذا كان $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(19) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$

الحل:

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

$$f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$f'(\pi) = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$$ (ميل المماس)

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = (-1 + \frac{1}{2}e^{\pi})(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = (-1 + \frac{1}{2}e^{\pi})x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi}$$

$$y = (-1 + \frac{1}{2}e^{\pi})x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

---

(20) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

الحل:

ميل المماس $= -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$

$\Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}}$

ميل العمودي $= \frac{-2}{-2 + e^{\pi}} = \frac{2}{2 - e^{\pi}}$.

معادلة العمودي على المماس:

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{2}{2 - e^{\pi}}(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = (\frac{2}{2 - e^{\pi}})x - \frac{2\pi}{2 - e^{\pi}}$$

$$y = (\frac{2}{2 - e^{\pi}})x - \frac{2\pi}{2 - e^{\pi}} + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

---

(21) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران

$$f(x) = e^x - 2x$$

الحل: المماس أفقي يعني $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = e^x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2$$

$$x = \ln 2.$$

---

(22) اختيار من متعدد:

أي الآتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$ ؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$

c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

الحل:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$m = f'(\pi) = \cos\pi - \sin\pi$$

$= -1 - 0 = -1 \leftarrow$ ميل المماس

$$f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi$$

$$= 0 + -1 = -1$$

$$(\pi, -1)$$

ميل المماس $= -1 \Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{-1} = 1$

معادلة العمودي:

$$y + 1 = 1(x - \pi)$$

$$y = x - \pi - 1.$$

(23) اذا كان: $f(x)=\ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x>0$ فأبين أن $f'(x)=\frac{1}{x}$.

الحل:

$$f(x)=\ln(kx)$$
$$f(x)=\ln k+\ln x$$
$$f'(x)=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

اذا كان: $f(x)=\ln x$ فأجيب عن السؤالين التاليين:

(24) اثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e,1)$ يمر بنقطة الأصل.

الحل:

$$f(x)=\ln x$$
$$f'(x)=\frac{1}{x}\rightarrow f'(e)=\frac{1}{e}$$

معادلة المماس:

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$$

عندما $x=0$

$$y-1=\frac{1}{e}(0-e)$$
$$y-1=0-1\rightarrow y=0$$

اذن المماس يمر بالنقطة $(0,0)$.

---

(25) اثبت ان المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e,1)$ هو $e+\frac{1}{e}$.

الحل: ميل المماس $=\frac{1}{e}$. (من السؤال السابق)

ميل العمودي $=-e$. $\left(\frac{-1}{\text{ميل المماس}}\right)$

معادلة العمودي:

$$y-1=-e(x-e)$$

المقطع x يعني ان $y=0$.

$$\Leftarrow\quad 0-1=-e(x-e)$$
$$-1=-e(x-e)$$
$$1=e(x-e)\rightarrow\frac{1}{e}=x-e$$
$$x=e+\frac{1}{e}.$$

يمثل الاقتران: $s(t)=t^3-4t^2+5t,\ t\geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني:

(26) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t=5$.

الحل:

$$v(t)=s'(t)=3t^2-8t+5$$
$$v(5)=3(5)^2-8(5)+5$$
$$=75-40+5=40.$$

$$a(t)=v'(t)=6t-8$$
$$a(5)=6(5)-8=30-8=22.$$

---

(27) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

الحل: سكون لحظي يعني $v(t)=0$

$$3t^2-8t+5=0$$
$$(3t-5)(t-1)=0$$
$$3t-5=0\rightarrow t=\frac{5}{3}$$
$$t=1$$

(28) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=4$ ؟

الحل:

$$V(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5$$
$$= 48 - 32 + 5$$
$$= 21 > 0$$

الاتجاه هو نفس الاتجاه الأصلي للجسم.

---

(29) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الحل: $s(t) = 0$

$$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$$
$$t(t^2 - 4t + 5) = 0$$

$t = 0$

أو $t^2 - 4t + 5 = 0$

نجد المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= 4^2 - (4)(1)(5$$
$$= 16 - 20 = -4 < 0$$

المميز سالب ← لا يوجد أصفار

$\therefore$ $t=0$ فقط أي لا يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ابداً.

يمثل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t$, $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني:

(30) أحدد الموقع الابتدائي للجسم.

الحل: الموقع الابتدائي $s(0)$.

$$s(0) = e^0 - 4(0)$$
$$= 1 - 0 = 1m$$

---

(31) أجد تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة تساوي صفراً.

الحل:

$$v(t) = 0$$
$$v(t) = s'(t) = e^t - 4 = 0$$
$$\Rightarrow e^t = 4 \Rightarrow t = \ln 4.$$

نجد تسارع الجسم عندما $t = \ln 4$

$$a(t) = v'(t) = e^t.$$
$$a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4 m/s^2.$$

زنبرك: يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويحدد الاقتران $x(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالأمتار

(32) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة واقتراناً آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة

الحل:

$$s(t) = 4\cos t$$
$$v(t) = -4\sin t$$
$$a(t) = -4\cos t$$

---

(33) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

الحل:

$$V(\tfrac{\pi}{4}) = -4 \sin\tfrac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \ m/s$$
$$a(\tfrac{\pi}{4}) = -4\cos\tfrac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= -2\sqrt{2} \ m/s$$

(34) أصف حركة الجسم

من خصائص اقتران $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين $s = -4m$ و $s = 4m$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب.

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين $4m/s$ و $-4m/s$ ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان.

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفراً.

---

(35) إذا كان الاقتران $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y مبرراً إجابتي.

الحل: يقطع المنحنى محور y عندما $x = 0$

$$y = e^0 - a(0)$$
$$= 1 - 0 = 1 \qquad \text{النقطة } (0,1)$$

$$y' = e^x - a$$

$$y'(0) = e^0 - a = 1 - a \quad (\text{ميل المماس})$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = (1-a)(x-0)$$
$$y - 1 = (1-a)(x)$$
$$y = (1-a)x + 1 .$$

---

(36) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 2 \\ mx+b & , x > 2 \end{cases}$ فأجد قيمة كل من m و b اللتين تجعلان f قابلاً للاشتقاق عند جميع قيم x الحقيقية.

الحل: بما أن f قابل للاشتقاق ← f متصل لجميع قيم x

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$\boxed{4 = 2m + b}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , x < 2 \\ m & , x > 2 \end{cases}$$

$f(x)$ قابل للاشتقاق ⇐

$$f'_+(2) = f'_-(2)$$

$$\boxed{m = 4}$$

$$4 = 2m + b \rightarrow 4 = 8 + b \rightarrow$$

$$b = 4 - 8 = -4$$

---

(37) أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

الحل: ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو

$$y' = 2e^x + 3 + 15x^2$$

$2e^x > 0$ ، لكل قيم x

$15x^2 > 0$ ، لكل قيم x

بالجمع $2e^x + 15x^2 > 0$

بإضافة 3 للطرفين $2e^x + 15x^2 + 3 > 0$

أي أن $y' > 3$ ⇐ لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

أتدرب وأحل المسائل

اذا كان الاقتران : $y = ke^x$ حيث $k > 0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

(38) أجد نقاط تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x .

الحل: يقطع المحور y عندما $x = 0$ وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أن $y = ke^0 = k$

أي أن احداثيي P هي $(0, k)$

$$y = ke^x \longrightarrow y' = ke^x$$

ميل المماس : $y'(0) = ke^0 = k$

معادلة المماس :

$$y - k = k(x - 0) \rightarrow y - k = kx$$

$$\Rightarrow y = kx + k.$$

ولايجاد نقطة التقاطع مع المحور x نفوض $y = 0$

$$0 = kx + k \longrightarrow \frac{kx}{k} = \frac{-k}{k} \rightarrow x = -1$$

∴ نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي $(-1, 0)$.

(39) اذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$ فأجد قيمة k .

الحل: ميل المماس $= k \leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{k}$.

معادلة العمودي:

$$y - k = \frac{-1}{k}(x - 0) \rightarrow y = \frac{-1}{k}x + k$$

وبتعويض نقطة التقاطع ؛

$$0 = \frac{-1}{k}(100) + k \longrightarrow k^2 = 100$$

$$k = \mp 10.$$

ولأن $k > 0$ فإن $k = 10$.

اذا كان الاقتران $y = \log x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

(40) اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$

الحل: (قاعدة) $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$$y = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$$

---

(41) معتمداً على النتيجة من السؤال السابق ، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y = \log ax^2$ حيث a عدد حقيقي موجب

الحل:

$$y = \log ax^2 = \log a + \log x^2$$

$$= \log a + 2\log x$$

$$y' = 0 + \frac{2}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}.$$

يمثل الاقتران ، $s(t) = 4 - \sin t$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني

(42) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

الحل:

$$s(t) = 4 - \sin t$$

$$v(t) = s'(t) = -\cos t$$

$$a(t) = v'(t) = \sin t.$$

(43) أجد موقع الجسم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

الحل: حالة سكون يعني $v(t) = 0$

$-\cos t = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$

المطلوب موقع الجسم عندما $t = \frac{\pi}{2}$

$s(\frac{\pi}{2}) = 4 - \sin\frac{\pi}{2}$

$= 4 - 1 = 3\,m$

---

(44) أجد موقع الجسم عندما يصل الى أقصى سرعة.

الحل: المطلوب تحديد موقع الجسم عندما يصل إلى أقصى سرعة فهنا يتطلب ايجاد القيم القصوى لاقتران السرعة

أقصى سرعة عندما $\theta = 0, \pi, 2\pi$

$s(0) = 4 - 0 = 4$

$s(\pi) = 4 - 0 = 4$

$s(2\pi) = 4 - 0 = 4$

① أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق.

الحل: عند x_5 و x_7 غير متصل

وعند x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_6 ، x_9 ، x_{10} رؤوس حادة.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

② $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

الحل:

$$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 9e^x + \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6\sqrt{x^3}}.$$

---

③ $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

الحل:

$$f(x) = 2e^x + x^{-2}$$

$$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3}$$

$$= 2e^x - \frac{2}{x^3}.$$

---

④ $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

الحل:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$$

---

⑤ أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x) = 2e^x + x$ when $x = 2$

الحل:

$$f(2) = 2e^2 + 2$$

النقطة $(2, 2e^2+2)$

$$f'(x) = 2e^x + 1$$

ميل المماس $m = f'(2) = 2e^2 + 1.$

معادلة المماس:

$$(y - (2e^2+2)) = (2e^2+1)(x-2)$$

$$y - 2e^2 - 2 = (2e^2+1)x - 4e^2 - 2$$

$$y = (2e^2+1)x - 4e^2 \cancel{-2} + 2e^2 \cancel{+2}$$

$$y = (2e^2+1)x - 2e^2.$$

---

⑥ اثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران

$$f(x) = 3x + \sin x + 2$$

الحل: مماس أفقي يعني الميل = صفر

$$f'(x) = 3 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -3$$

لا يوجد حل لأن $-1 \le \cos x \le 1$

$\therefore$ لا يوجد مماس أفقي.

يمثل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني

(7) أجد سرعة الجسم المتحرك وتسارعه بعد t ثانية

الحل:
$$V(t) = s'(t) = 6t - 3t^2$$
$$a(t) = v'(t) = 6 - 6t$$

---

(8) أجد الموقع (المواقع) التي يكون عنده الجسم في حالة سكون.

الحل: حالة سكون ← $V(t) = 0$

$$6t - 3t^2 = 0 \rightarrow 3t(2-t) = 0$$

$t = 0$ أو $t = 2$

$$s(0) = 0 - 0 = 0m$$
$$s(2) = 3(2)^2 - 2^3 = 12 - 8 = 4m$$

اذا كان $f(x) = \ln x^2$ ، حيث $x > 0$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً.

(9) أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$

الحل:
$$f(x) = 2\ln x$$
$$f(e^2) = 2\ln e^2 = (2)(2)\ln e = 4$$
$$(e^2, 4)$$
$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow m = f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$$

معادلة المماس:
$$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2)$$
$$y - 4 = \frac{2}{e^2}x - 2 \rightarrow y = \frac{2}{e^2}x - 2 + 4$$
$$y = \frac{2}{e^2}x + 2$$

(10) أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$.

الحل: المماس موازي للمستقيم يعني لهما نفس الميل

لمشتقة المستقيم
$$6 - 2y' = 0 \rightarrow$$
$$2y' = 6 \rightarrow \boxed{y' = 3}$$ ميل المستقيم

$$f(x) = \ln x^2 \rightarrow f(x) = 2\ln x$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$ ميل المماس

ميل المماس = ميل المستقيم
$$3 = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

اذا كان الاقتران: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(11) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$

الحل:
$$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$$
$$f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0 = 2 + 0 = 2$$

---

(12) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

الحل:
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\tfrac{\pi}{2} - 4\cos\tfrac{\pi}{2} = 2(1) - 4(0) = 2$$

$$\left(\tfrac{\pi}{2}, 2\right)$$
$$f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos\tfrac{\pi}{2} + 4\sin\tfrac{\pi}{2} = 2(0) + 4(1) = 4$$ ميل المماس

معادلة المماس:
$$y - 2 = 4\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$y - 2 = 4x - 2\pi$$
$$y = 4x - 2\pi + 2$$