المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف العاشر - دليل المُعلِّم

الفصل الدراسي الثاني

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات   نور محمد حسان   إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـررت وزارة التربيـة والتعليـم اسـتخدام هـذا الدليـل في مـدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاء على قـرار المجلس الأعـلى للمركز الوطنـي لتطوير المناهـج في جلسـته رقـم (2022/5)، تاريـخ 2022/7/21 م، وقـرار مجلس التربية والتعليم رقـم (2022/78)، تاريـخ 2022/12/28 م، بدءًا مـن العام الدراسي 2023/2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 121 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2020/10/4565)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

دليل المعلم: الرياضيات: الصف العاشر/ المركز الوطني لتطوير المناهج.- عمان: المركز، 2020

ج2 (218) ص.

ر.إ.: 2020/10/4565

الواصفات: / تدريس الرياضيات / / المقررات الدراسية/ / التعليم الاعدادي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1444 هـ / 2023 م

المقدمة

يسرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أنْ يُقدِّم للمُعلِّمين والمُعلِّمات دليل المُعلِّم للصف العاشر، آملًا أنْ يكون لهم مُرشِدًا وداعمًا في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعلِّم على جميع المصادر التي تَلزم المُعلِّم/ المُعلِّمة، بَدْءًا بالنسخ المُصغَّرة من كتابي الطالب والتمارين، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومسائل؛ ما يُغْني عن حمل هذين الكتابين إلى الغرفة الصفية. وكذلك يحتوي الدليل على جميع أوراق المصادر المشار إليها في الدروس، ويُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة تصوير نسخ منها للطلبة؛ ما يُوفِّر عليهما جُهْد إعداد هذه الأوراق. استُهِلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان «أهلًا بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة »، وتعرض العناصر الرئيسة في كلٍّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعلِّم، وتُبيِّن النهج المُعتمَد في كلٍّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعلِّم/ المُعلِّمة قراءة هذه الصفحات بِتَروٍّ وتدبُّرٍ قبل البَدْء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بَدْءًا بمرحلة التمهيد، ومرورًا بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشادات تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التخطيط الزمني للمهام في كل مرحلة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويم التي يتضمَّنها المنهاج المُطوَّر، فضلًا عن الأخطاء المفاهيمة الشائعة والإرشادات التي تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على كيفية معالجتها.

يُقدِّم الدليل أيضًا مقترحات لتنويع التعليم تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجامًا مع الاتجاهات الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدَّم الدليل نتاجات التعلُّم السابق ونتاجات التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلًا عن أدوات تشخيص ومعالجة مناسبة، تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّم الحالي. يضاف إلى ذلك أنَّ تعرُّف المُعلِّم/ المُعلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي سوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر له/ لها تصوُّرًا كافيًا عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دِقَّةً.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الدليل، فإنّا نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب زملائنا وزميلاتنا من المُعلِّمين والمُعلِّمات ويكون خير معين لهم/ لهنّ، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

أهلًا بك

في مناهج الرياضيات المُطوَّرة

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، يسـرُّنا فـي هذه المُقدِّمة أنْ نُبيِّن الأسـس العلمية والتربوية التـي قامت عليها مناهج الرياضيات المُطوَّرة بطريقة مُبسَّـطة، وذلك بعرض بعض العناصر من كتاب الطالب، وكتاب التمارين، ودليل المُعلِّم، التي تتجلّى فيها تلك الجوانب العلمية والتربوية بوضوح. ونحن إذ نعرض هذه المُقدِّمة فإنّا نأمل أنْ تكون مُعينةً على فهم كيفية استعمال المناهج المُطوَّرة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل الغرفة الصفية، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم وأدواته.
   - التقويم القبلي.
   - التقويم التكويني.
   - التقويم الختامي.
3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
4. بعض استراتيجيات التعلُّم:
   - التعلُّم القائم على المشاريع.
   - التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
5. مهارات التفكير العليا.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

وفي نهاية هذه المقدمة بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعينةً عند التخطيط لتقديم الدروس.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم هذا الدليل خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد على تقديم الدرس بنجاح.

الدرس 2

قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية

Dividing Polynomials and Rational Functions

1 التهيئة

تهـــدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبـــة لموضوع الدرس، ولكـــن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجـــد في هذا الدليل مقترحات تعين على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لـــذا يُمكِـــن أثناء هـــذه المرحلـــة رصد بعـــض الأخطاء المفاهيمية وتصحيحها قبل بَدْء الدرس.

2 الاستكشاف

تهـــدف هذه المرحلة إلـــى إثارة فضـــول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليـــك في هذه المرحلـــة أداء دور تيســـير التعلُّم، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (أستكشف) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراســـتها والتفكير فيهـــا، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأســـئلة المقترحة في بند (الاستكشـــاف) من هذا الدليل. ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة من الإجابة عن هذه الأســـئلة بصورة صحيحة؛ لذا يتعيَّن عليك تقبُّل الإجابات، ثم النظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، والتحقُّـــق من صحتها، علمًا بـــأنَّ تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المســـألة في بند (أستكشـــف)؛ لحلِّها في نهاية الدرس.

3 التدريس

من المُتوقَّع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشـــاف) إلى حدوث حالة من عـــدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبـــدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم؛ للتمكُّن من تكوين خبرات مشـــتركة مُحدَّدة تســـاعد علـــى إدراك المفاهيم، وإتقـــان العمليـــات والمهارات. تســـتغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقـــرات الشـــرح، وأمثلة الدرس جميعهـــا؛ لذا يتعيَّن الاســـتعانة بالإرشادات الواردة في بند (التدريس) من هذا الدليل؛ للتمكُّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

4 التدريب

في هـذه المرحلة، يتدرَّب الطلبـة على أنواع مختلفة مـن المسائل المجرَّدة والمسائل الحياتية في بند (أتدرَّب وأحُلّ المسائل) وبند (مهارات التفكير العليا) داخل الغرفة الصفية؛ لترسيخ المفاهيم الجديدة، وزيادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة في المنزل، وكذلك التدريبات والمسائل الواردة في الصفحة المُقابِلة للدرس في كتاب التمارين.

5 الإثراء

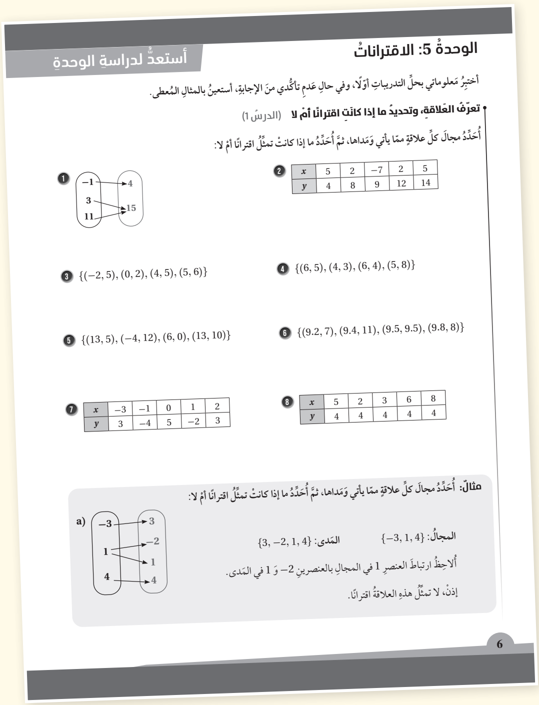
تُعَدُّ توسعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأساس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشراك الطلبة في مهام تتضمَّن مفاهيم وعمليات أوسع وأكثر عمقًا. تُوفِّر مناهج الرياضيات المُطوَّرة مصادر عِدَّة لإثراء الطلبة ذوي المستوى فوق المُتوسِّط، منها بند الإثراء في هذا الدليل، الذي يحوي مسألةً، أو نشاطًا صفيًّا، أو نشاطًا حاسوبيًّا، إضافةً إلى مشروع الوحدة الذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

6 الختام

هي المرحلة الأخيرة من مراحل تقديم الدرس، وتهدف إلى تجميع الأفكار المختلفة التي تضمَّنها الدرس، ثم عرضها بصورة مترابطة، فضلًا عن اشتمالها على مقترحات تساعد على تقديم هذه المرحلة بنجاح.

2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزَّأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن اســتمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراسـي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم القبلي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي**.



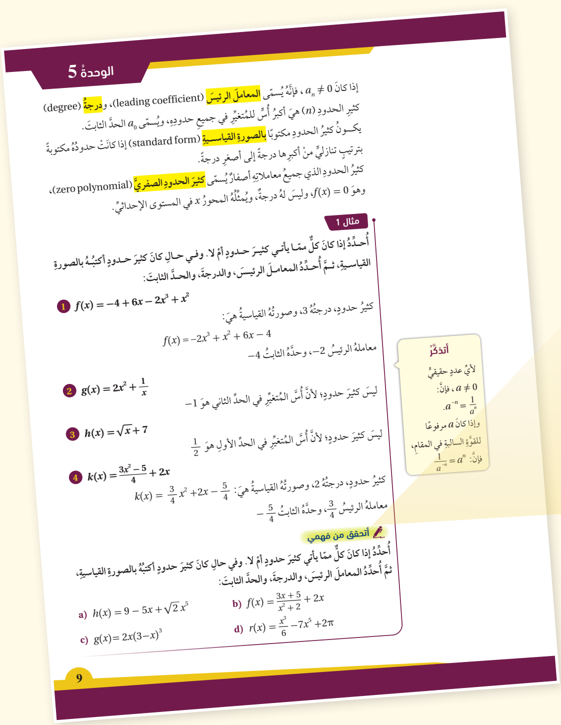
أ التقويم القبلي:

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفةَ السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد على تحديد ما يَلزم الطلبة من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّــم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أداة تقويم قبلي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

ب التقويم التكويني:

يحـدث هـذا النـوع مـن التقويـم أثناء عمليـة التدريـس، ويهدف إلـى متابعة تعلُّـم الطلبة أوَّلًا بـأوَّل، والتأكُّـد أنَّ العمليـة التعليميـة التعلُّمية تسـير في اتجاه تحقيـق أهدافهـا المنشـودة، وأنَّـه لا يوجـد انحـراف عن مسـارها؛ ما يسـاعد علـى اتخاذ القـرارات الصحيحـة، مثل: الاسـتمرار فـي عمليـة التدريس، أو التعديـل عليهـا، أو النظـر فيها مـن جديد. أمّا أبـرز أدوات التقويـم التكويني فهي: الأسـئلة الشـفوية، والملاحظات غير الرسـمية، والاختبـارات القصيرة.

تحتـوي مناهـج الرياضيـات المُطـوَّرة علـى أدوات للتقويـم التكوينـي فـي كل درس، تتمثَّـل فـي مسـائل بنـد (أتحقَّـق مـن فهمـي) التـي تلـي كل مثال.



أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$

b) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

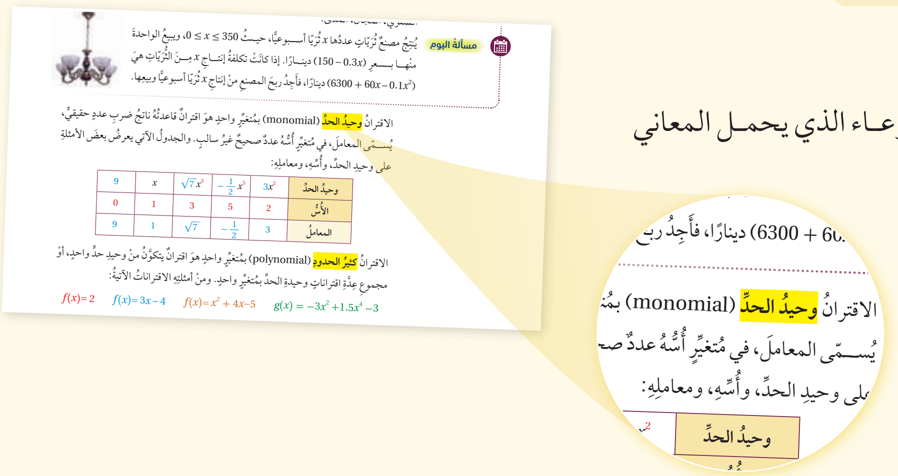
d) $r(x) = \dfrac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

ج التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد على تحديد مدى إتقان الطلبة للمفاهيم والمهارات التي قُدِّمت لهم.

تُوفِّر المناهج المُطوَّرة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في بند (اختبار نهاية الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوِّعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.

3 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:



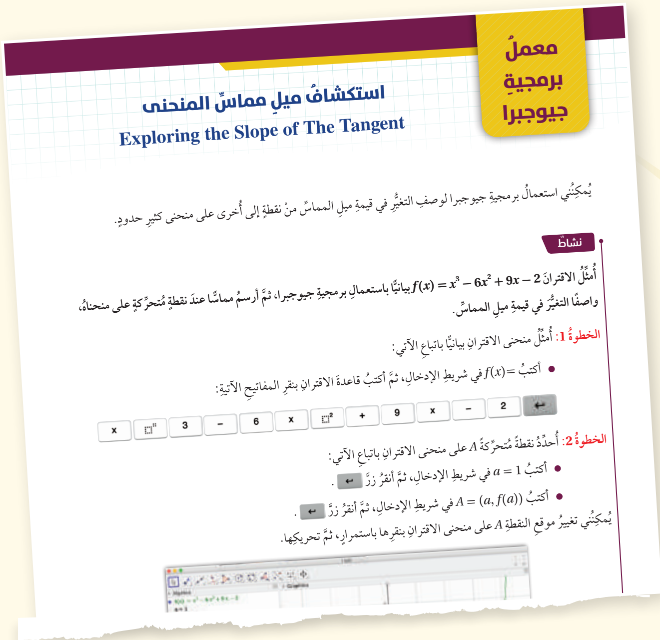
تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أوَّل مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.

4 بعض استراتيجيات التعلُّم:

أ التعلُّم القائم على المشاريع.

يُعَدُّ التعلُّم القائم على المشاريع أحد أساليب التعلُّم الحديثة التي تجمع بين المعرفة والتطبيق؛ إذ يُمكِن للطلبة دراسة معارف المناهج الدراسية الأساسية، ثم تطبيقها في حلِّ مشكلات حقيقية، وصولًا إلى نتائج قابلة للتطبيق. تساعد هذه الطريقة الطلبة على تنمية قدراتهم ومهاراتهم؛ فهي تراعي الفروق الفردية بينهم، وتُنمّي لديهم الثقة بالنفس، وتُحفِّزهم على الإبداع، والتواصل، والابتكار، وتحمُّل المسؤولية، وتُعِدُّهم للحياة، وتحثُّهم على العمل والإنتاج.

ب التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.


معمل برمجية جيوجبرا

استكشافُ ميلِ مماسِّ المنحنى

Exploring the Slope of The Tangent

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لوصفِ التغيُّرِ في قيمةِ ميلِ المماسِّ من نقطةٍ إلى أخرى على منحنى كثيرِ حدودٍ.

نشاط

أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا عندَ نقطةٍ متحرِّكةٍ على منحناه، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ بيانيًّا باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $f(x)=$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بنقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

الخطوةُ 2: أحدِّدُ نقطةً متحرِّكةً A على منحنى الاقترانِ باتباعِ الآتي:

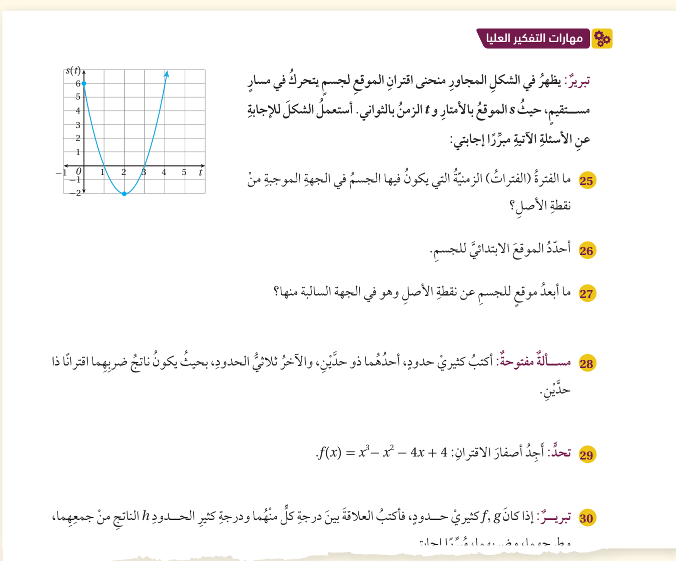
- أكتبُ $a = 1$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ .
- أكتبُ $A = (a, f(a))$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ .

يُمكِنُني تغييرُ موقعِ النقطةِ A على منحنى الاقترانِ بنقرِها باستمرارٍ، ثمَّ تحريكِها.

تُسهِم التكنولوجيا إسهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمُّل والتحليل والتفكير بدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنح أدلة المُعلِّم في مناهج الرياضيات المُطوَّرة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ سواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.

5 مهارات التفكير العليا:


مهارات التفكير العليا

تبرير: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموقعِ لجسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s الموقعُ بالأمتارِ و t الزمنُ بالثواني. أستعملُ الشكلَ للإجابةِ عن الأسئلةِ الآتيةِ مبرِّرًا إجابتي:

25 ما الفترةُ (الفتراتُ) الزمنيَّةُ التي يكونُ فيها الجسمُ في الجهةِ الموجبةِ من نقطةِ الأصلِ؟

26 أحدِّدُ الموقعَ الابتدائيَّ للجسمِ.

27 ما أبعدُ موقعٍ للجسمِ عن نقطةِ الأصلِ وهو في الجهةِ السالبةِ منها؟

28 مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ كثيرَيْ حدودٍ، أحدُهما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

29 تحدٍّ: أجدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

30 تبريرٌ: إذا كانَ f, g كثيرَيْ حدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منهُما ودرجةِ كثيرِ الحدودِ h الناتجِ من جمعِهِما،

تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنح مناهج الرياضيات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطوير مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مسائل مرتبطة بنتاجات الدرس؛ إذ يحوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المسائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

تحدٍّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.

6 الوصول إلى الطلبة كافةً

تراعي مناهج الرياضيات المُطوَّرة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل منهم (التمايز)، وتساعد على تجاوز العثرات، وتعزيز مناحي التفوّق.

يُمكِن تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسة، هي:

إرشادات:

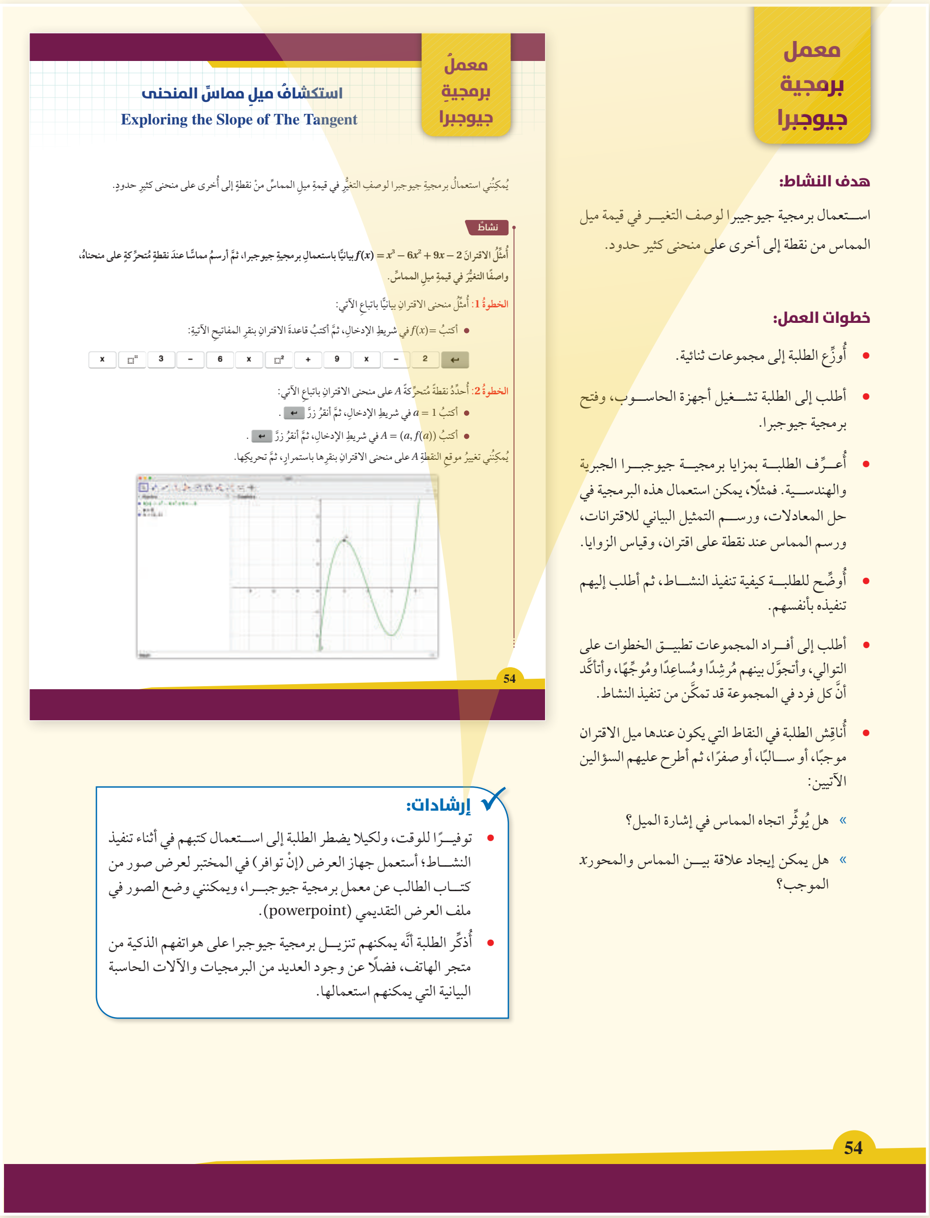
- توفيرًا للوقت، ولكيلا يضطر الطلبة إلى استعمال كتبهم في أثناء تنفيذ النشاط؛ أستعمل جهاز العرض (إنْ توافر) في المختبر لعرض صور من كتاب الطالب عن معمل برمجية جيوجبرا، ويمكنني وضع الصور في ملف العرض التقديمي (powerpoint).
- أُذكِّر الطلبة أنَّه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

المحتوى: يُقصَد بذلك ما يحتاج كل من الطلبة إلى تعلُّمه، وكيفية الحصول على المعلومة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى: تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

الأنشطة: كل ما يشارك فيه كل من الطلبة من أنشطة؛ للتمكُّن من فهم المحتوى، أو إتقان المهارة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر: استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ويكون تقدُّمهم فيها مُتباينًا من حيث المستوى، ومنح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتًا إضافيًّا لإنجاز المهام.

المُنتَجات: مشاريع يتعيَّن على الطلبة تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّموه في الوحدة، وتوظيفه في حياتهم، والتوسُّع فيه. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المُنتَجات: السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار مُنتَجاتهم الخاصة وَفق ميولهم.

بيئة التعلُّم: يُقصَد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. من الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم: التحقُّق من وجود أماكن في غرفة الصف يُمكِن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك وجود أماكن أُخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.



معمل برمجية جيوجبرا

هدف النشاط:

استعمال برمجية جيوجيبرا لوصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير حدود.

خطوات العمل:

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية.
- أطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- أُعرِّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم التمثيل البياني للاقترانات، ورسم المماس عند نقطة على اقتران، وقياس الزوايا.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ثم أطلب إليهم تنفيذه بأنفسهم.
- أطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وأتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأتأكَّد أنَّ كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- أُناقِش الطلبة في النقاط التي يكون عندها ميل الاقتران موجبًا، أو سالبًا، أو صفرًا، ثم أطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  » هل يُؤثِّر اتجاه المماس في إشارة الميل؟
  » هل يمكن إيجاد علاقة بين المماس والمحور x الموجب؟

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ ميلِ مماسِّ المنحنى
Exploring the Slope of The Tangent

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لوصفِ التغيُّرِ في قيمةِ ميلِ المماسِّ منْ نقطةٍ إلى أُخرى على منحنى كثيرِ حدودٍ.

نشاطٌ

أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ على منحناهُ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ بيانيًّا باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $f(x)=$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بنقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

x ▫ 3 − 6 x ▫² + 9 x − 2 ↵

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطةً مُتحرِّكةً A على منحنى الاقترانِ باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $a = 1$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أكتبُ $A = (a, f(a))$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .

يُمكِنُني تغييرُ موقعِ النقطةِ A على منحنى الاقترانِ بنقرِها باستمرارٍ، ثمَّ تحريكِها.

54

إرشادات:

- توفيرًا للوقت، ولكيلا يضطر الطلبة إلى استعمال كتبهم في أثناء تنفيذ النشاط؛ أستعمل جهاز العرض (إنْ توافر) في المختبر لعرض صور من كتاب الطالب عن معمل برمجية جيوجبرا، ويمكنني وضع الصور في ملف العرض التقديمي (powerpoint).
- أُذكِّر الطلبة أنَّه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

54

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، تساعد مناهج الرياضيات المُطوَّرة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في هذا الدليل، علمًا بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكِن لك اختيار طرائق التدريس المناسبة داخل الغرفة الصفية؛ فأنت أكثر علمًا بأحوال الغرفة الصفية، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد على تقديم الدروس:

التعلُّم المقلوب (Flipped Learning):

تُسهِم هذه الاستراتيجية في تعزيز مهارات التعلُّم الذاتي، واستثمار وقت الحصة الصفية بفاعلية، والتركيز على المحتوى والمفاهيم العلمية بصورة مُكثَّفة. وهي تتيح للمُعلِّم/ للمُعلِّمة إعداد الدروس، وإطلاع الطلبة عليها مُقدَّمًا باستعمال التقنيات الحديثة وشبكة الإنترنت؛ إذ يُمكِن بها إرسال ما هو مطلوب إلى الطلبة من مقاطع مرئية (فيديو)، وملفات صوتية، وغير ذلك من الوسائط، ثم الطلب إليهم الاطلاع عليها في المنزل قبل وقت كافٍ من عرضها في غرفة الصف، عن طريق الوسائل المتوافرة لديهم، مثل: جهاز الحاسوب، والهاتف المحمول، والجهاز اللوحي. ومن ثَمَّ، يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة إعداد أنشطة مُتنوِّعة لتنفيذها في اللقاء الصفي؛ تطبيقًا للمفاهيم التي اكتسبها الطلبة، ومناقشة المحتوى العام للدرس. وتشمل هذه الأنشطة التعلُّم النشط، والاستقصاء، والتجريب، وحلَّ المسائل الرياضية؛ ما يُعزِّز مهارات العمل بروح الفريق، ويساعد على تقييم عملية التعلُّم.

بطاقة الخروج (Exit Ticket):

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة. بعد ذلك يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة جمع البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يُستنَد إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت) (Hand Up):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة رفع اليد، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع اليد يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة (Numbered Heads):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل فرد في المجموعة رقم خاص، وعند طلبك الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، يختار الفرد رقمًا من دون أنْ يعرف زميله/ زميلتها، فيجيب من يقع عليه الاختيار عن السؤال، ويمكن أن يتم ذلك بمساعدة أفراد المجموعة.

أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر (I Think, We Think):

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأوَّل: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة طرح سؤال يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوَّل، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدُّث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة (Small Boards):

أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنَع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة طرح سؤال يجيب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ للتمكُّن من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذا الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة ملاحظة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

الوحدة
5

الاقترانات
Functions

مُخطَّط الوحدة

عدد الحصص	المصادر والأدوات	المصطلحات	النتاجات	اسم الدرس
5	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • ورق رسم بياني.	وحيد الحد. كثير الحدود. الدرجة. الصورة القياسية لكثير الحدود. كثير الحدود الصفري. المعامل الرئيس. المجال. المدى.	• تعرُّف الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته. • تمثيل الاقتران كثير الحدود بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه. • تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب على الاقترانات كثيرات الحدود. • حل مسائل حياتية عن الاقترانات كثيرات الحدود.	الدرس 1: اقترانات كثيرات الحدود.
4	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • ورق رسم بياني.	خوارزمية القسمة. اقتران المقلوب. الاقتران النسبي. خط التقارب الأفقي. خط التقارب الرأسي.	• إيجاد ناتج قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر. • تعرُّف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها. • تمثيل الاقترانات النسبية بيانيًّا، وإيجاد خطوط التقارب. • حل مسائل حياتية عن القسمة والاقترانات النسبية.	الدرس 2: قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية.
3	• جهاز الحاسوب. • الآلة الحاسبة.	تركيب الاقترانات. الاقتران المُركَّب. المُركَّبتان.	• تعرُّف مفهوم الاقتران المُركَّب، وشرط تركيب اقترانين. • حساب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد معطى. • إيجاد قاعدة اقتران مُركَّب عُلِمت قاعدتا مُركَّبتيه. • حل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.	الدرس 3: تركيب الاقترانات.
3	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • ورق رسم بياني.	العلاقة العكسية. الاقتران العكسي. اقتران واحد لواحد. اختبار الخط الأفقي. الاقتران المحايد. الاقتران الجذري.	• تعرُّف الاقتران العكسي. • إيجاد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد، وتحديد مجاله ومداه. • حل مسائل حياتية عن الاقتران العكسي.	الدرس 4: الاقتران العكسي.
3	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	المتتالية. الحد. الحد العام.	• كتابة الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها. • كتابة حدود متتالية عُلِم حدها العام. • استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية. • حل مسائل حياتية عن المتتاليات.	الدرس 5: المتتاليات.
1	• جهاز الحاسوب.			عرض نتائج مشروع الوحدة.
2				اختبار نهاية الوحدة.
21 حصة				مجموع الحصص:

الوحدة 5

نظرة عامة على الوحدة:

تعرَّف الطلبة سابقًا مفهوم العلاقة والاقتران، والاقترانات الخطية، والتربيعية، وتعلَّموا كيفية تمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها. وكذلك تعلَّموا جمع المقادير الجبرية، وطرحها، وضربها، وتحليل العبارة الثلاثية، والفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بينهما. وتعلَّموا أيضًا مفهوم المتتاليات، وإيجاد قاعدة الحد العام لها. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته، وصورته القياسية والعامة، وتمثيله بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره بالتحليل إلى العوامل، وتطبيق عمليات الجمع والطرح والقسمة على كثيرات الحدود، والاقتران النسبي، وإيجاد مجاله ومداه، وتمثيله بيانيًّا، وإيجاد خطوط تقارب منحناه. سيتعلَّم الطلبة أيضًا تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي، وإيجاد المجال والمدى للاقتران المُركَّب والاقتران العكسي، والعلاقة بين الاقتران ومعكوسه. وكذلك سيتعلَّمون المتتاليات بوصفها اقترانًا، وإيجاد حدها العام.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف السابع

- تعرف الاقتران الخطي، وتمثيله بيانيًّا.
- وصف العلاقة بين حدود متتالية خطية.
- استعمال العلاقة بين حدود المتتالية لإيجاد بعض حدودها.
- وصف قاعدة الحد العام لمتتالية خطية والتعبير عنها بصورة جبرية.

الصف التاسع

- تعرف العلاقة، وتحديد ما إذا كانت تمثل اقترانًا أم لا.
- تمثيل الاقترانات التربيعية بيانيًّا وتفسير التمثيل البياني.
- تحديد مجال الاقتران التربيعي.
- تحديد مدى الاقتران التربيعي.
- تحليل مقادير جبرية، وتبسيطها.
- حل معادلات من الدرجة الثانية.
- حل معادلات من الدرجة الثالثة على صورة فرق بين مكعبين ومجموع مكعبين.

الصف العاشر

- تعرُّف كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود.
- تعرُّف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها وخطوط تقارب منحنياتها، وتمثيلها بيانيًّا.
- إيجاد نتيجة تركيب اقترانين، ومجال الاقتران المُركَّب ومداه.
- إيجاد معكوس الاقتران، وتحديد المجال والمدى لكلٍّ من الاقتران ومعكوسه.
- تعرُّف الاقترانات الجذرية، وإيجاد مجالها ومداها.
- وصف الحد العام لمتتاليات.

الصف الحادي عشر

- تعرف خواص الاقتران الأسي واللوغاريتمي، وتمثيلهما بيانيًّا وإيجاد المجال والمدى.
- تعرف خواص الاقتران المتشعب وتمثيله بيانيًّا وإيجاد مجاله ومداه.
- تعرف خواص اقتران القيمة المطلقة، وتمثيله بيانيًّا وإيجاد مجاله ومداه.

مشروعُ الوحدةِ

نمذجةُ علاقاتٍ باستعمالِ كثيراتِ الحدودِ

فكرةُ المشروعِ جمعُ بيانــاتٍ عنِ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ في أحدِ المجالاتِ الحياتيةِ، ونمذجتُها باســتعمالِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ.

الموادُّ والأدواتُ جهازُ حاسوبٍ، شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ إكسل (Microsoft Excel).

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أختــارُ أنا وأفرادُ مجموعتي مُتغيِّرَيْنِ لجمعِ بياناتٍ حولَهُما، مثلَ: تكلفةِ إنتاجِ ســلعةٍ مُعيَّنةٍ، وعددِ الوحداتِ المُنتَجةِ، أوْ عددِ ساعاتِ النهارِ في إحدى المدنِ في أيامٍ مختلفةٍ منَ العامِ، أوْ أيِّ مُتغيِّرَيْنِ آخرَيْنِ.
2. أجمعُ البياناتِ، ثمَّ أُدوِّنُها في جدولٍ منْ عمودَيْنِ، بحيثُ يحوي العمودُ الأولُ قيمَ المُتغيِّرِ x، ويحوي العمودُ الثاني القيمَ المُناظِرةَ للمُتغيِّرِ y (يجبُ جمعُ ما لا يقلُّ عنْ 15 زوجًا).

	A	B
1	1	10.9
2	2	11.5
3	3	11.9
4	4	12.3
5	5	11.6
6	6	10.8
7	7	11
8	8	10.3
9	9	10
10	10	9.3
11	11	8.7
12	12	9.2
13	13	9.6
14	14	10
15	15	10.2

3. أستعملُ برمجيةَ إكســلِ لتمثيلِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا، وإيجادِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ الأفضلِ تمثيلًا لها باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أُدخِلُ البيانــاتِ في عمودَيْنِ متجاورَيْنِ ضمنَ صفحةِ إكســلِ، وأُظلِّــلُ العمودَيْنِ، ثمَّ أختارُ (مُخطَّطاتٌ) منْ تبويبةِ (إدراجٌ)، وأنقرُ (مُبعثَرٌ)، ثمَّ أختارُ المُخطَّطَ الذي يُبيِّنُ مجموعةَ نقاطٍ منفصلةٍ، فيظهرُ مُخطَّطٌ بيانيٌّ.
   - أنقرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ إحدى النقاطِ، ثمَّ أختارُ أيقونةَ (إضافةُ خطِّ اتجاهٍ) منَ القائمةِ المُنسدِلةِ، فيظهرُ مستقيمٌ يتوسَّطُ النقاطَ، وتظهرُ خياراتُ التنسيقِ جانبًا، فأنقرُ المُربَّعَ أمامَ أيقونةِ (عرضُ المعادلةِ في المُخطَّطِ)، لتظهرَ معادلةُ المستقيمِ التي هيَ قاعدةُ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ المطلوبِ.
   - إذا لاحظْتُ أنَّ المستقيمَ أوِ المنحنى الظاهرَ لا يُناسِبُ النقاطَ، فإنَّني أستطيعُ تغييرَ نوعِهِ؛ إذْ يُمكِنُني مثلًا اختيارُ مُتعدِّدِ الحدودِ (أيْ كثيرِ الحدودِ)، واختيارُ الترتيبِ (أيْ درجةِ كثيرِ الحدودِ) المناسبِ.
   - عندما أحصلُ على المستقيمِ أوِ المنحنى الأنسبِ للنقاطِ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ.
4. أَجِدُ مجالَ الاقترانِ، ومداهُ، وأصفارَهُ، ونقاطَ القيمِ القصوى المحليةِ لهُ.
5. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ)، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ، وأُحدِّدُ فائدتَهُ، ودلالاتِهِ في سياقِ موضوعِ البحثِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ خطواتِ العملِ في المشروعِ والنتائجَ التي توصَّلْنا إليْها مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، ثمَّ نعرضُهُ أمامَ الزملاءِ في مختبرِ الحاسوبِ.

7

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار متغيرين مناسبين من واقع الحياة يدلان على سعة الأفق والابتكار.			
2	جمع البيانات بطريقة علمية موثوقة.			
3	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
4	دقة الحسابات المتوقعة باستعمال النموذج.			
5	مراعاة أنْ يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحيةً.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: نمذجة علاقات حياتية باستعمال كثيرات الحدود.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى نمذجة العلاقة بين متغيرين من الحياة اليومية باقتران كثير حدود، واستعمال النموذج للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بافتراض معلومية الآخر، وتعرُّف خصائص هذا النموذج، وتعيين مجاله ومداه، وإيجاد معكوسه إنْ أمكن.

خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد المشروع، ثم كتابة تقرير مُفصَّل عنه، وبيان دور كلٍّ منهم في إنجازه.
- أُوجِّه أفراد المجموعات إلى اختيار متغيرين من واقع الحياة، مثل: العمر بالسنوات، والطول بالسنتيمترات لأفراد تتراوح أعمارهم بين سنة و15 سنة؛ وطول عظمة العضد، وطول الجسم لمجموعة متنوعة من الأشخاص.
- أُبيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشروع، وأعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أيِّ استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- أُذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشروع عند الانتهاء من دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج:

- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- أطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، وأُنبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- أطلب إلى الطلبة التصويت على المشروع الأفضل.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف كثير الحدود وصورته القياسية، وتعيين درجته ومعاملاته وأصفاره.
- تمثيل كثيرات الحدود بيانيًّا، وتعيين مجالها ومداها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.
- حل مسائل حياتية تتعلّق بكثيرات الحدود.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرف الاقتران الخطي، وتمثيله بيانيًّا.
- تعرف العلاقة، وتحديد ما إذا كانت تمثل اقترانًا أم لا.
- تمثيـل الاقترانات التربيعيـة بيانيًّا وتفسـير التمثيل البياني.
- تحديد مجال الاقتران التربيعي.
- تحديد مدى الاقتران التربيعي.
- ضرب حد جبـري في آخر، وكتابة الناتج في أبسـط صورة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبِطـة بما سـيُقدَّم من موضوعـات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت)في صفحات (**أسـتعد لدراسـة الوحدة**) في كتـاب التمارين، ثم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلـى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 1

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وتمثيلُها بيانيًّا، وإجراءُ عملياتِ الجمعِ والطرحِ والضربِ عليْها، وحلُّ مسائلَ عنْها.

المصطلحاتُ وحيدُ الحدِّ، كثيرُ الحدودِ، المعاملُ الرئيسُ، الدرجةُ، الصورةُ القياسـيةُ لكثيرِ الحدودِ، كثيرُ الحدودِ الصفريُّ، المجالُ، المدى.

مسألةُ اليومِ يُنتِجُ مصنعٌ ثُريّاتٍ عددُها x ثُريّا أسـبوعيًّا، حيـثُ $0 \le x \le 350$، ويبيعُ الواحدةَ منْهـا بسـعرِ $(150 - 0.3x)$ دينـارًا. إذا كانَتْ تكلفةُ إنتـاجِ x مِـنَ الثُّريّاتِ هيَ $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأَجِدْ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ x ثُريّا أسبوعيًّا وبيعِها.

الاقترانُ **وحيدُ الحدِّ** (monomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ ناتجُ ضربِ عددٍ حقيقيٍّ، يُسـمّى المعاملَ، في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأُسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأُسُّ	2	5	3	1	0
المعاملُ	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9

الاقترانُ **كثيرُ الحدودِ** (polynomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ، أوْ مجموعِ عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ. ومنْ أمثلتِهِ الاقتراناتُ الآتيةُ:

$g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$ $\quad f(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad f(x) = 3x - 4$ $\quad f(x) = 2$

مفهومٌ أساسيٌّ — الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

حيثُ: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots, a_1 , a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثيرِ الحدودِ.

1 التهيئة

- أُذكِّـــر الطلبة بالعلاقة، والاقتـــران، والفرق بينهما، والرمز المســـتخدم للاقتران. بعد ذلك أكتب الاقتران: $f(x) = 3x + 5$، ثم أطلب إليهم إيجاد كلٍّ ممّا يأتي: $f(0), f(2), f(-3)$
- أطلب إلى الطلبة تمثيل المعادلة: $y = f(x) = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم أُناقِشهم في مقطعي الخط البياني من المحورين (المقطع x والمقطع y) وما يُمثِّلانه في هذه المعادلة.
- أطلب إلى الطلبة تبسيط كلٍّ ممّا يأتي:
$(2x^2y^3)(3xy^2), (2xy^3)(-2.5y^4)$

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - إذا أنتج المصنع 100 ثريا، فما سعر بيع الثريا الواحدة؟ 120 دينارًا.
  - ما تكلفة إنتاج 100 ثريا؟ 11300 دينار.
  - كيـــف أجد ربح المصنع من إنتاج عدد من الثريات وبيعها؟ بطرح تكلفة الإنتاج من ثمن بيع الثريات.
  - ما ربح المصنع من إنتاج 100 ثريا وبيعها؟ 700 دينار.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم عن طريق توجيه أسئلة، مثل:
  - ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - من يتّفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.
- لا يقـــلّ المجال العاطفي أهمية عن المجال المعرفي، فأحـــرص على ألّا أخطّئ أحدًا، بل أقول: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، ثمّ أشكره على محاولته الإجابة، وأطلب إلى أحد الطلبة غيره الإجابة عن السؤال، حتى نحصل على الإجابة الصحيحة، وأعزّزه، ثمّ أعود إلى الطالب نفســـه/ الطالبة نفســـها وأطلب إليه/ إليها الإجابة عن الســـؤال، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت مَن قدّم الإجابة الصحيحة.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم وحيد الحد، وكثير الحدود، ورمز الاقتران وقراءته، وأذكر أمثلة على ذلك.
- أُناقِش الطلبة في الصورة العامة للاقتران كثير الحدود، والتسميات المتعلقة بكثيرات الحدود.
- أُشجِّع الطلبة على ذكر أمثلة على كثيرات الحدود، وأمثلة على غير كثيرات الحدود.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المســـتخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُشارِك الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن طريقة تحديد إذا كان الاقتران المعطى يُمثِّل كثير حدود أم لا، وتحديد الدرجة وبعض المعاملات إنْ كان كثير حدود.

ملاحظاتي

مثال إضافي

- أُحـدِّد إذا كان كلٌّ ممّــا يأتي كثير حــدود أم لا. وإذا كان كثير حدود، فأكتبه بالصورة القياســية، ثم أُحدِّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + \sqrt[3]{x} + 6$ لا

b) $h(x) = 5x^2 - 3x^5 + 4x + 7$

نعم، كثير حدود، صورته القياسية:
$h(x) = -3x^5 + 5x^2 + 4x + 7$، ومعامله الرئيس: -3،
ودرجته 5، وحده الثابت 7

c) $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-3}$ لا.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

أخطاء شــائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة في تحديد المعامل الرئيس، فيكتبون أكبر معاملات كثير الحدود أو معامل أول حد؛ لــذا أُذكِّرهم أنَّ المعامل الرئيــس هو معامــل الحد الأكبر درجة بعد تبســيط الاقتران.

الوحدةُ 5

إذا كانَ $a_n \neq 0$ ، فإنَّهُ يُسمّى **المعاملَ الرئيسَ** (leading coefficient)، و**درجةُ** (degree) كثيرِ الحدودِ (n) هيَ أكبرُ أُسٍّ للمُتغيِّرِ في جميعِ حدودِهِ، ويُسمّى a_0 الحدَّ الثابتَ.

يكــونُ كثيرُ الحدودِ مكتوبًا **بالصورةِ القياســيةِ** (standard form) إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيبٍ تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِ درجةً.

كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ يُسمّى **كثيرَ الحدودِ الصفريَّ** (zero polynomial)، وهوَ $f(x) = 0$، وليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ x في المستوى الإحداثيِّ.

مثال 1

أُحـدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّـا يأتـي كثيـرَ حـدودٍ أمْ لا. وفـي حـالِ كانَ كثيرَ حـدودٍ أكتبُـهُ بالصورةِ القياسـيةِ، ثـمَّ أُحـدِّدُ المعامـلَ الرئيـسَ، والدرجةَ، والحـدَّ الثابتَ:

1 $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 3، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معاملهُ الرئيسُ -2، وحدُّهُ الثابتُ -4

2 $g(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ -1

3 $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

4 $k(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 2، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معاملهُ الرئيسُ $\frac{3}{4}$، وحدُّهُ الثابتُ $-\frac{5}{4}$

أتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$ ، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ: أنظر الهامش.

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$ **d)** $r(x) = \dfrac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

9

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في خطــوات تمثيل كثير الحدود بيانيًّا، وأُشــارِكهم في حل المثال 2 الــذي يُبيِّن كيفية تمثيل كثيــر الحدود بيانيًّا، وإيجاد مجالــه ومداه وأصفاره، مُبيِّنًا لهم أنَّ أصفار الاقتران هي الإحداثيات x لنقاط تقاطــع المنحنى مع المحــور x، وأنَّ الناتج في هذه الطريقــة يكون أحيانًا قيمة تقريبية لعدم دقة الرســم، وأنّــه يمكــن إيجاد الأصفــار جبريًّا بحــل المعادلة $f(x) = 0$ بالطرائق التي تعلّموها، وبخاصة التحليل إلى العوامل.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) كثيــر حدود، صورته القياســية: $h(x) = \sqrt{2}\,x^5 - 5x + 9$، ودرجته 5، ومعامله الرئيس $\sqrt{2}$، وحده الثابت 9

b) ليس كثير حدود.

c) كثيــر حدود، صورته القياســية: $f(x) = -2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$، ودرجته 4، ومعامله الرئيس -2، وحده الثابت 0

d) كثير حدود، صورته القياسية: $r(x) = -7x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$، ودرجته 5، ومعامله الرئيس 7، وحده الثابت 2π

مجالُ (domain) أيِّ اقترانٍ هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ x، **ومداهُ** (range) هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ y.

لتمثيلِ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ بيانيًّا، أُكوِّنُ جدولَ قيمٍ أُحدِّدُ فيهِ قيمَ المُتغيِّرِ x، وأحسبُ قيمَ $f(x)$، وأُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ.

أتعلَّمُ

مجالُ كثيرِ الحدودِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ في نصِّ السؤالِ، **ومداهُ** هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ منْ جدولِ قيمِ الاقترانِ، أوْ منْ دراسةِ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ.

مثال 2

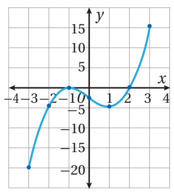
أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

1 $f(x) = x^3 - 3x - 2,\ -3 \le x \le 3$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1,0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ قيمِ x الحقيقيةِ، حيثُ: $-3 \le x \le 3$، أوِ الفترةُ $[-3, 3]$، ومداهُ: $-20 \le y \le 16$، أوِ الفترةُ $[-20, 16]$.

يُظهِرُ الشكلُ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $-1, 2$

أتعلَّمُ

أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ منَ التمثيلِ البيانيِّ بإيجادِ مقاطعهِ منْ محورِ x.

2 $f(x) = x^2 - 4x, ,\ -1 \le x \le 4$

هذا اقترانٌ تربيعيٌّ على الصورةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيثُ $a = 1, b = -4, c = 0$، ومنحنى $f(x)$ قطعٌ مكافئٌ يمكنُ تمثيلُه بيانيًا كما يأتي:

- بما أنَّ $a > 0$، فمنحنى القطعِ المُكافِئِ مفتوحٌ للأعلى، وَيُمَثِّلُ الرأسُ نقطتَهُ الصُّغرى.

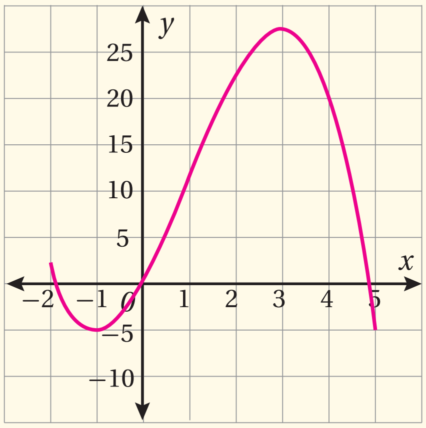
مثال إضافي

- أُمثِّلُ بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه وأصفاره:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x\ , -2 \le x \le 5$

مجاله: $-2 \le x \le 5$ مداه: $-5 \le y \le 27$

أصفاره: $-1.9, 0, 4.9$ تقريبًا.

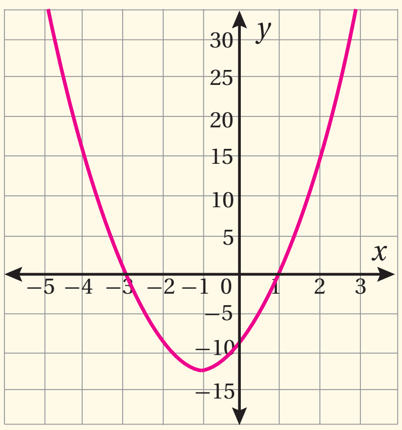


b) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$

مجاله: مجموعة الأعداد الحقيقية.

مداه: $y \ge -12$

أصفاره: $-3, 1$



تنويع التعليم:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المســتوى فوق المتوسط كتابة كثيري حدود $f(x), g(x)$، بحيث إنَّ:

a) درجة $(f(x) + g(x))$ أصغر من درجة $f(x)$.

b) درجة $(f(x) + g(x))$ تساوي درجة $f(x)$.

c) درجة $(f(x) + g(x))$ أكبر من درجة $f(x)$.

ثم أطلــب إليهم كتابــة ملاحظاتهم علــى درجة مجموع اقترانين كثيري حدود.

أتذكَّر

مُعادلـةُ محـورِ التَّماثُلِ لمنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2+bx+c$؛ حيثُ $a \neq 0$ هي:

$x = -\frac{b}{2a}$

وإحداثيّا رأسِهِ هما:

$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

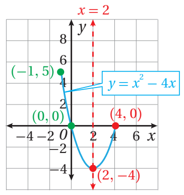
أُفكِّر

مــا الفــرقُ بيــنَ الفترةِ $[-4, 5]$ والفتــرةِ $(-4, 5)$؟

- مُعادلةُ محورِ تَّماثُلِ القطعِ المُكافِئِ هي:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

- إحداثيّا الرأسِ هُما: $(2, -4)$
- نقطةُ تقاطعِ منحنى الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, 0)$
- النقطةُ $(-1, 5)$ هيَ نقطـةُ بدايةِ منحنى الاقترانِ، وتقعُ في الجانبِ نفسِـهِ الذي يقعُ فيهِ المقطـعُ y منْ محورِ التماثُلِ (يســارَ محورِ التماثُلِ)، أمّا النقطــةُ $(4, 0)$ فهيَ نقطةُ نهايةِ منحنى الاقترانِ وتقعُ يمينَ محورِ التماثُلِ.
- أُمثِّلُ الرأسَ والنقاطَ الثلاثَ في المســتوى الإحداثيِّ، وأصِلُ بينَها بمنحنًى متّصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجــالُ هذا الاقترانِ هــوَ مجموعةُ قيــمِ x الحقيقيةُ حيثُ $-1 \le x \le 4$؛ أيِ الفتــرةُ $[-1, 4]$، ومداهُ $-4 \le x \le 5$، أيِ الفترةُ $[-4, 5]$.

يظهرُ في الشكلِ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $0, 4$

أتحقق من فهمي أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

a) $f(x) = 2x^3 - 16$, $-3 \le x \le 3$ أنظر الهامش.

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$, $-3 \le x \le 9$

إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

جمعُ كثيراتِ الحدودِ

لجمعِ كثيراتِ الحدودِ، أُجمِّعُ الحدودَ المتشابهةَ التي لها الدرجةُ نفسُها، وأجمعُ معاملاتِها.

مثال 3

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9,\ g(x) = 7x^3 + 6x + 4$، فأجِدْ $f(x) + g(x)$.

$f(x)+g(x) = (2x^2-5x^3+4x-9)+(7x^3+6x+4)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$= 2x^2 + (-5x^3+7x^3)+(4x+6x)+(-9+4)$ بتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

$= 2x^2 + 2x^3 + 10x - 5$ بجمعِ المعاملاتِ

$= 2x^3 + 2x^2 + 10x - 5$ بكتابةِ الناتجِ بالصورةِ القياسيةِ

11

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي):

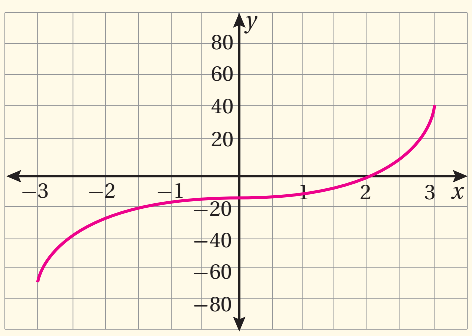
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-70	-32	-18	-16	-14	0	38

المجال: $-3 \le x \le 3$

المدى: $-70 \le y \le 38$

له صفر واحد هو: 2



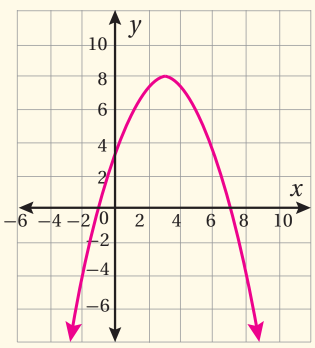
b)

x	-2	-1	1	3	7	8
$y = f(x)$	-4.5	0	6	8	0	-4.5

المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: الأعداد الحقيقية التي لا تزيد على 8؛ أي $y \le 8$ ، أو الفترة $(-\infty, 8]$.

له صفران، هما: -1، و 7



🖉 **أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

إذا كانَ $f(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13, g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 5$، فأجِدْ $f(x) + g(x)$.

أتعلَّمُ

النظيرُ الجمعيُّ للاقترانِ $f(x)$ هوَ $-f(x)$، وينتجُ مِنْ عكسِ إشاراتِ معاملاتِ حدودِ $f(x)$.

طرحُ كثيراتِ الحدودِ

لإيجادِ ناتجِ طرحِ اقترانيْنِ، أُحوِّلُ عمليةَ الطرحِ إلى جمعِ النظيرِ الجمعيِّ للمطروحِ، ثمَّ أجمعُ كما في المثالِ السابقِ.

يُمكِنُني أنْ أجِدَ ناتجَ جمعِ اقترانيْنِ باستعمالِ الطريقةِ العموديةِ، وذلكَ بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ، ثمَّ جمعِ المعاملاتِ.

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 5x - 3 , g(x) = 6x - 7x^2 - 8$، فأجِدْ $f(x) - g(x)$.

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 3 - (+6x - 7x^2 - 8)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$= 2x^2 - 5x - 3 + (-6x + 7x^2 + 8)$ بتغييرِ الطرحِ إلى جمعٍ، وتغييرِ إشاراتِ المطروحِ

بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x - 3 \\ +\ 7x^2 - 6x + 8 \\ \hline 9x^2 - 11x + 5 \end{array}$$

بجمعِ المعاملاتِ

🖉 **أتحقق من فهمي** أنظر الهامش.

إذا كانَ $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20, g(x) = x^3 + 6x^2 - 14$، فأجِدْ $g(x) - f(x)$.

ضربُ كثيراتِ الحدودِ

لضربِ كثيراتِ الحدودِ، أستعملُ خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ الطريقةِ العموديةِ.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

$f(x) + g(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 8$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

$g(x) - f(x) = -4x^3 + 18x^2 - 3x - 34$

المثالان 3 و 4

- أُناقِش الطلبة في حل المثالين 3 و 4، مُوضِّحًا جمع كثيري حدود بالطريقة الأفقية بتجميع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها ثم جمع معاملاتها، والطريقة العمودية بترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها، ثم جمع معاملاتها. بعد ذلك أُنبِّههم إلى أنَّ المتغير يبقى كما هو بدرجته نفسها في الجمع وفي الطرح.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x)=12x+1-2x^2, h(x) = 6x^2 +4x +12$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $f(x) + h(x)$ $4x^2 + 16x + 13$

b) $h(x) - f(x)$ $8x^2 - 8x + 11$

مثال 5

- أُناقِش الطلبة في ضـــرب كثيرات الحدود بالطريقتين الأفقية والعمودية، مُذكِّرًا إيّاهم بجمع الأســس عند ضرب قوى لها الأســاس نفســه، وأُشارِكهم في حل المثال.

مثال إضافي

- أجد ناتج ضرب $f(y) \cdot g(y)$ إذا كان:

$$f(y) = y^2 - 7y + 5 \; , f(y) = y^2 - y - 3$$

$$f(y) \cdot g(y) = y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 16y - 15$$

إرشاد:

أعرض طريقة ضرب كثيري حدود باستعمال جدول، وذلــك بكتابة أحد الاقترانين فــوق الجدول، وكتابة الآخر إلى يساره، ووضع نواتج ضرب الحدود داخل خلايــا الجدول، ثم جمــع النواتج داخــل الجدول قطريًّا.

يُوضِّح الجدول التالي طريقة ضرب: $(2x^2-3x-2)(x^2+4x+3)$.

	x^2	$+4x$	$+3$
$2x^2$	$2x^4$	$+8x^3$	$+6x^2$
$-3x$	$-3x^3$	$-12x^2$	$-9x$
-2	$-2x^2$	$-8x$	-6

$$(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$$

$$= 2x^4 + (+8x^3 - 3x^3) + (+6x^2 - 12x^2 - 2x^2) + (-9x - 8x) + (-6)$$

$$= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6$$

الوحدةُ 5

مثال 5

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3x^3 , g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$f(x).g(x) = 3x^3 (2x^2 - 5x - 4)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$= 3x^3(2x^2) + 3x^3(-5x) + 3x^3(-4)$ بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ

$= (3\times2)(x^3.x^2) + (3\times-5)(x^3.x) + (3\times-4)x^3$ خاصيةُ التجميعِ

$= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

$3x^4 - 5x^2 + x - 5$ بترتيبِ الاقترانيْنِ عموديًّا

$(\times)\; 4x^2 - 7$

$12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2$ بضربِ $4x^2$ في حدودِ f

$(+) \quad -21x^4 \quad + 35x^2 - 7x + 35$ بضربِ -7 في حدودِ f

$12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ

> **أتذكَّرُ**
> أُطبِّقُ قاعدةَ ضربِ القوى عندَ ضربِ الحدودِ الجبريةِ:
> $a^m \times a^n = a^{m+n}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

تطبيقٌ فيزيائيٌّ: اقترانُ الموقعِ

إذا تحرّكَ جسمٌ في مسارٍ مســتقيمٍ وعبّرْنا عنْ موقعِهِ المتغيّرِ على ذلكَ المسارِ بالإحداثيِّ (s) للنقطةِ التي يكونُ عندَها الجســمُ، فإنّنا نحصلُ على اقترانٍ يربطُ موقعَ الجسمِ $s(t)$ بالزمنِ (t) يُسمّى اقترانَ الموقعِ (position function).

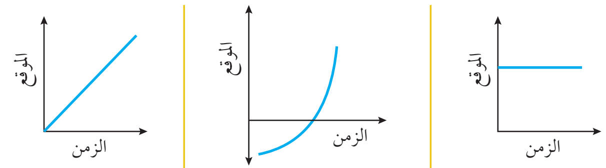
13

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

a) $35x^3 + 30x^2 + 28x + 24$

b) $10x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 36x^2 - 32x$

إذا كانتْ ســرعةُ الجســمِ ثابتةً فإنَّ اقترانَ الموقعِ يكونُ خطيًّا (منحناهُ مستقيمٌ)، أمّا إذا كانتْ ســرعتُهُ ليســتْ ثابتةً فإنَّ اقترانَ الموقعِ لا يكونُ خطيًّا، فقدْ يكونُ كثيرَ حــدودٍ مثلًا أو اقترانًا دائريًّا. ويعني وجودُ قيمةٍ ســالبةٍ لاقترانِ الموقعِ عندَ لحظةٍ ما أنَّ الجسمَ يقعُ في الجهةِ السالبةِ منْ نقطةِ الأصلِ عندَ تلكَ اللّحظةِ.



جسمٌ لا يتحرّكُ | جسمٌ يتحرّكُ بسرعةٍ غيرِ ثابتةٍ | جسمٌ يتحرّكُ بسرعةٍ ثابتةٍ

أتعلّمُ

إذا كانَ منحنى اقترانِ الموقعِ-الزمنِ ليسَ مستقيمًا فإنَّ ذلكَ لا ينفي أنَّ الجسمَ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، ذلكَ أنّ المنحنى لا يمثّلُ المسارَ الذي يتحرّكُ عليهِ الجسمُ، بلْ إزاحتَهُ عنْ نقطةِ الأصلِ التي تتغيّرُ بمرورِ الزمنِ.

مثال 6

يمثّلُ الاقترانُ $s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً.

1 أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.

بدأَ الجسمُ الحركةَ عندَ $t = 0$، ولتحديدِ موقعِهِ عندَ تلكَ اللحظةِ أعوّضُ $t = 0$ في اقترانِ الموقعِ كما يأتي:

$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ اقترانُ الموقعِ

$s(0) = 3(0)^2 - 24(0) + 36$ بتعويضِ $t = 0$

$= 36$ بالتبسيطِ

إذنْ، موقعُ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ يساوي 36 m في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

2 أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.

لتحديدِ موقعِ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ أعوّضُ $t = 5$ في اقترانِ الموقعِ كما يأتي:

$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ اقترانُ الموقعِ

$s(5) = 3(5)^2 - 24(5) + 36$ بتعويضِ $t = 5$

$= -9$ بالتبسيطِ

إذنْ، موقعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ يساوي 9 m في الجهةِ السالبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

مثال 6

- أُناقِش الطلبة في مفهوم اقتران الموقع، وكيفية تحديد الموقع في لحظة ما، وإيجـاد الوقت الذي يكون فيه الجسم في موقع معلوم، ثم أُشارِكهم في حل فقرات المثال.

مثال إضافي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى موقعه s (بالأمتار) بعد زمن قدره t ثانية بالمعادلة الآتية:

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 10t + 60$$

a) أُحدِّد موقع الجُسَيْم بعد 6 ثوانٍ من بدء الحركة.

120 m

b) أجد الزمن الذي يكون فيه موقع الجُسَيْم 68 m.

بعد 4 ثوانٍ من بدء الحركة.

c) هل يعود هذا الجُسَيْم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟

لا، لا يعود إليها؛ لأنَّه لا يوجد حل للمعادلة: $t^3 - 6t^2 + 10t = 0$ سوى $t = 0$.

3 متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟

يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ عندَما تكونُ قيمةُ اقترانِ الموقعِ صفرًا. أحلُّ المعادلةَ $s(t) = 0$ لأحدِّدَ قيمةَ t

$3t^2 - 24t + 36 = 0$	أكتبُ المعادلةَ
$t^2 - 8t + 12 = 0$	بقسمةِ طرَفي المعادلةِ على 3
$(t-2)(t-6) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$t-2 = 0$ or $t-6 = 0$	خاصيَّةُ الضربِ الصفريِّ
$t = 2$ or $t = 6$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ في لحظتَيْنِ زمنيَّتَيْنِ هُما: بَعدَ ثانيتينِ وبعدَ 6 ثوانٍ منْ بدْءِ حركتِهِ.

4 هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منْها؟

حتّى يعودَ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها وهيَ 36 m في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ (كما أوجدْنا في الفرعِ الأوّلِ) يجبُ أنْ يكونَ للمعادلةِ $s(t) = 36$ حلٌّ واحدٌ (أوْ أكثرُ).

$3t^2 - 24t + 36 = 36$	أكتبُ المعادلةَ
$3t^2 - 24t = 0$	بطرحِ 36 منْ كلا الطرفينِ
$t^2 - 8t = 0$	بقسمةِ الطرفينِ على 3
$t(t-8) = 0$	بإخراجِ t عاملًا مشتركًا
$t = 0$ or $t - 8 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$t = 0$ or $t = 8$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

الزمنُ $t = 0$ يعني لحظةَ بدءِ حركةِ الجسمِ، لذلكَ فإنَّ الجسمَ يعودُ إلى النقطةِ التي بدأَ منها الحركةَ مرَّةً واحدةً فقطْ، وذلكَ بعدَ 8 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِهِ.

أتحقق من فهمي

يمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 7t^2 + 10t$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً. أنظر الهامش.

a) أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.

b) أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.

c) متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟

d) هل يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها؟

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 6):

a) $t = 0 \Longrightarrow s(0) = 0$

إذن، موقع الجسم عند بدء حركته هو نقطة الأصل $s = 0$

b) $t = 3 \Longrightarrow s(3) = 3^3 - 7(3^2) + 10(3) = -6$ m

c) $s(t) = 0 \Longrightarrow t^3 - 7t^2 + 10t = 0$

$t(t^2 - 7t + 10) = 0$

$t(t-2)(t-5) = 0 \Longrightarrow t = 0, t = 2, t = 5$

إذن، يكون الجسم عند نقطة الأصل لحظة بدء حركته؛ أيْ عندما $t = 0$، وأيضًا بعد ثانيتين من بدء حركته، وبعد 5 ثوانٍ من بدء حركته.

d) يبدأ الجسم حركته من نقطة الأصل $s = 0$، ويعود إليها بعد ثانيتين من بدء حركته، وبعد 5 ثوانٍ من بدء حركته.

أتدرب وأحل المسائل

(1 – 18) أنظر ملحق الإجابات.

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = 4 - x$

2) $g(x) = \dfrac{5x^2 + 2x}{x}$

3) $h(x) = 3x(4x-7) + 2x - 12$

4) $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

5) $j(t) = \sqrt{7}\, t - 16t^2$

6) $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

7) $f(x) = 13(2)^x + 6$

8) $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

9) $f(x) = x^2 - 3x - 4,\ -1 \le x \le 5$

10) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3,\ 0 \le x \le 3$

11) $y = 2x^3 - 6x + 4,\ -2 \le x \le 3$

12) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4,\ -3 \le x \le 4$

إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

إذا كانَ $f(x) = 2x+1,\ g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4,\ h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ القياسيةِ:

13) $h(x) + g(x)$

14) $g(x) - h(x)$

15) $f(x) \cdot h(x)$

16) $x(f(x)) + h(x)$

17) $(f(x))^2 - g(x)$

18) $h(x) - x(g(x))$

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 6$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً.

19) أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ. -6 m

20) أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ 4 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ. 18 m

21) متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟ بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

22) هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منها؟ نعـم، يعود إليها بعد ثانية واحدة من بدء الحركة، وبعد ثانيتين من بدء الحركة.

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–20) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

أخطاء شائعة:

قد يظن بعض الطلبة أنَّ الاقتران في السؤال 2 كثير حدود بسبب إمكانية اختصار العامل x من البسط والمقام، فيتحول إلى: $f(x) = 5x+2$؛ لذا نبِّههم إلى أنَّ القسمة لا تصح إلا إذا كان المقسوم عليه لا يساوي صفرًا. وإذا أرادوا كتابة هذا الاقتران بالصورة المختصرة: $f(x) = 5x + 2$، فيجب عليهم الإشارة عنده إلى أنَّ $x \neq 0$

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 21, 22, 24, 26 كتاب التمارين: (1 – 16) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 27) كتاب التمارين: (1 – 16) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 23, (28 – 30) كتاب التمارين: (13 – 20)

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (30 – 25).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- أُوجِّه الطلبة في أثناء حل السؤال 28 (**مسألة مفتوحة**) إلى كتابة أيِّ مقدار ذي حدين، ثم البحث عن مقدار ثلاثي الحدود؛ شرط أنْ تكون 4 من نواتج الضرب متناظرة بالنسبة إلى عملية الجمع، فيكون مجموعها صفرًا، ويبقى حدان من ناتج ضرب المقدارين.
- أُوجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 29 (**تحد**) إلى البحث عن طريقة لتحليل مقدار ذي 4 حدود.

5 الإثراء

- أطرح على الطلبة المسألة الآتية:

نظرية الأعداد:

يعطى مجموع مربعات أول n من الأعداد الصحيحة الموجبة بالاقتران:

$$F(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

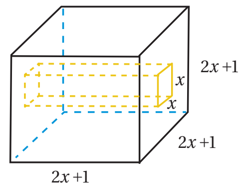
a) أجد قيمة $F(5), F(10)$

b) أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من القيمتين في الفقرة a.

c) أجد مجموع: $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 400$

تعليمات المشروع:

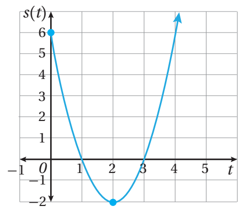
- أطلب إلى الطلبة اختيار متغيرين من الحياة اليومية، والبدء بجمع البيانات حولهما.
- أُذكِّر الطلبة بضرورة تدوين قيمة المتغير x مع قيمة المتغير y المناظرة لها، وذلك في العمود المقابل لها في الجدول.



23 **هندسةٌ:** مكعبٌ منَ الخشبِ، طولُ ضلعِهِ $(2x+1)$ cm، حُفِرَ فيهِ تجويفٌ مقطعُهُ مُربَّعٌ، طولُ ضلعِهِ x cm، وهوَ يمتدُّ منْ أحدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقّي منَ المكعبِ. أنظر ملحق الإجابات.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا



تبريرٌ: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموقعِ لجسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s الموقعُ بالأمتارِ و t الزمنُ بالثواني. أستعملُ الشكلَ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ مبرِّرًا إجابتي:

25 ما الفترةُ (الفتراتُ) الزمنيّةُ التي يكونُ فيها الجسمُ في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ؟ $[0, 1) \cup (3, \infty)$

26 أحدّدُ الموقعَ الابتدائيَّ للجسمِ. 6 m

27 ما أبعدُ موقعٍ للجسمِ عن نقطةِ الأصلِ وهو في الجهة السالبة منها؟ -2 m

(28 – 30) أنظر ملحق الإجابات.

28 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ كثيريْ حدودٍ، أحدُهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

29 **تحدٍّ:** أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

30 **تبريرٌ:** إذا كانَ f, g كثيريْ حدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحدودِ h الناتجِ منْ جمعِهِما، وطرحِهِما، وضربِهِما، مُبرِّرًا إجابتي.

17

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة وصف طرائق مختلفة لتصنيف كثيرات الحدود، ثم إعداد قائمة تتضمَّن ما يجب مراعاته عند جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها.

الدرس 2

قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقترانات النسبية
Dividing Polynomials and Rational Functions

فكرةُ الدرسِ إيجادُ ناتجِ قسمةِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ على آخرَ، وتعرُّفُ الاقتراناتِ النسبيةِ، وإيجادُ مجالِها، ومداها، وتمثيلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ الاقترانُ المقلوبُ، الاقترانُ النسبيُّ، خطُّ التقاربِ الأفقيِّ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ.

مسألةُ اليومِ بركةُ سباحةٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُها $3x^4-3x^3-33x^2+54x$ وحدةً مكعبةً، ومِساحةُ قاعدتِها $3x^2-6x$؛ أجدُ ارتفاعَها.

إنَّ قسمةَ كثيرِ حدودٍ على آخرَ تُشبِهُ كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ؛ إذْ تُتَّبَعُ الخطواتُ نفسُها في كلتا الحالتيْنِ. يُمكِنُ قسمةُ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$. لقسمةِ كثيرِ حدودٍ على آخرَ، أكتبُ المقسومَ والمقسومَ عليْهِ بالصورةِ القياسيةِ. وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّرِ في المقسومِ مفقودةً، فإنّي أُضيفُها في موقعِها، وأكتبُ معاملَها 0، ثمَّ أُنفِّذُ خطواتِ القسمةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 1

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ ، وباقيَها.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 10x + 74 \\ \hline
x+5 & 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15 \\
 & \underline{(-)\ 2x^3 + 10x^2} \\
 & -10x^2 + 24x \\
 & \underline{(-)\ -10x^2 - 50x} \\
 & 74x - 15 \\
 & \underline{(-)\ 74x + 370} \\
 & -385
\end{array}$$

بقسمةِ $2x^3$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $2x^2$ فوقَ الحدِّ المشابهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $2x^2$

بالطرحِ، وإضافةِ الحدِّ $(24x)$

بقسمةِ $-10x^2$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $-10x$ فوقَ الحدِّ المشابهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $-10x$

بالطرحِ، وإضافةِ الحدِّ (-15)

بقسمةِ $74x$ على x، وكتابةِ النتيجةِ 74 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في 74

بالطرحِ

إرشادٌ
تتوقفُ عمليةُ قسمةِ كثيراتِ الحدودِ عندما تصبحُ درجةُ باقي القسمةِ أقلَّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- قسمة اقتران كثير حدود على كثير حدود آخر.
- تعرُّف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها.
- إيجاد خطوط التقارب (إنْ وُجِدت) لمنحنى الاقتران النسبي.
- تمثيل اقترانات نسبية بيانيًّا.
- حل مسائل حياتية عن قسمة الاقترانات والاقترانات النسبية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- قسمة القوى وتبسيط مقادير جبرية كسرية.
- تحليل مقادير جبرية إلى عواملها.
- حل معادلات خطية وتربيعية.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُراجِع الطلبة في قوانين الأسس، ثم أطلب إليهم تبسيط كلٍّ ما يأتي:

$$\frac{6x^3+8x^2}{2x^2}\ ,\quad \frac{12x^4}{4x^2}\ ,\quad \frac{6x^3}{2x}\ ,\quad x^5 \div x^2$$

» أطلب إلى الطلبة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

a) $3x - 2 = 10$ **b)** $2 - 4x = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$ **d)** $3x^2 - 5x + 2 = 0$

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما متوازي المستطيلات؟ مجسم ثلاثي الأبعاد ذو 6 أوجه مستطيلة الشكل، وأوجهه المتقابلة متوازية ومتطابقة، وأوجهه المتجاورة متعامدة.
  » أذكر بعض الأمثلة على متوازي المستطيلات. غرفة الصف، الكتاب، علبة المناديل، صندوق الشاحنة.
  » كيف أجد حجمه؟ بضرب طوله في عرضه في ارتفاعه، أو بضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه.
  » إذا علم حجم متوازي مستطيلات وطول اثنين من أبعاده، فكيف أجد بعده الثالث؟ بقسمة الحجم على ناتج ضرب البعدين المعلومين.
- أعزز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

- أطلب إلى الطلبة استعمال القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $695 \div 21$
- أُوضِّح لهم أنَّه يتعيَّن اتباع الخطوات نفسها عند قسمة $6x^2 + 9x + 5$ على $2x + 1$، ثم أسألهم:
  » كيف يمكن قسمة $9x^2 + 9x + 2$ على $3x + 2$ باستعمال القسمة الطويلة؟

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في خطوات قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة المعروضة في المثال 1، وأُنبِّههم إلى أنَّه يجب كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية وإضافة 0 في موقع أيِّ قوة مفقودة في أيٍّ منهما.

مثال إضافي

- أجد ناتج قسمة $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 23$ على $h(x) = 2x + 3$ وباقيها.

  الناتج: $3x^2 - 6x + 9$، والباقي -4

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

ملاحظاتي

أخطاء شائعة:

قد يغفل بعض الطلبة عن كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية، أو وضع 0 في موقع أيِّ قوة مفقودة؛ لذا أُؤكِّد هذين الأمرين لتجنب الوقوع في الخطأ.

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x + 5}, \; x \neq -5$$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

$$\begin{aligned}(x+5)(2x^2-10x+74)+(-385) &= 2x^3-10x^2 + 74x + 10x^2 - 50x + 370 - 385 \\ &= 2x^3 + (-10+10)x^2 + (74-50)x - 15 \\ &= 2x^3 + 24x - 15 \; \checkmark\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$ وباقِيها. أنظر الهامش.

> **أتذكَّرُ**
> يُمكِنُ التحقُّقُ مِنْ صحَّةِ القسمةِ بضربِ الناتجِ في المقسومِ عليْهِ، وإضافةِ الباقي. فإذا كانَتِ النتيجةُ مساويةً للمقسومِ كانَ الحلُّ صحيحًا.

ألاحظُ في المثالِ السابقِ أنَّ درجةَ ناتجِ القسمةِ $(2x^2 - 10x + 74)$ مساويةٌ للفرقِ بينَ درجتَي المقسوم $(2x^3 + 24x - 15)$ والمقسوم عليهِ $(x+5)$، وهذا يقودُ إلى النتيجةِ الآتيةِ.

> **نتيجةٌ**
> عندَ قسمةِ كثيرِ حدودٍ على كثيرِ حدودٍ آخرَ تكونُ درجةُ ناتجِ القسمةِ مساويةً للفرقِ بينَ درجتَي المقسومِ والمقسومِ عليهِ.

الاقتراناتُ النسبيةُ (rational functions) هي اقترانات يُمكِنُ كتابتُها بصورةِ نسبةٍ بينَ كثيرَيْ حدودٍ، مثلُ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ شرطَ أنْ: $g(x) \neq 0$. ومنَ الأمثلةِ عليْها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x} \quad , \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مجالُ الاقترانِ النسبيِّ هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ الأعدادِ التي تجعلُ المقامَ يساوي صفرًا (أصفار المقام).

مثال 2

أَجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ ممَّا يأتي:

1) $q(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 9}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ بإضافةِ 9 إلى الطرفيْنِ

$x = \pm 3$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

> **أتذكَّرُ**
> يُمكِنُ استعمالُ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعيْنِ لتحليلِ $x^2 - 9 = 0$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

الناتج: $4x^3 + 9x^2 + 36x + 156$ ، والباقي: 599

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في الحفاظ على تركيزهم في أثناء تنفيذ الخطوات المتتابعة للقسمة الطويلة، فأُحفِّزهم على مقارنة نتيجة كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في مفهوم الاقتران النسبي، وأذكر أمثلة عليه، مُوضِّحًا أنَّه لا يوجد للاقتران النسبي قيمة عندما يكون مقامه صفرًا؛ لأنَّ القسمة على الصفر غير معرفة، ولذلك يكون مجاله جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار مقامه. بعد ذلك أُشارِك الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية تعيين مجال الاقتران النسبي.

مثال إضافي

- أجد مجال كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\{x | x \neq 2\}$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 16}$ $\{x | x \neq -4, x \neq 4\}$

c) $h(x) = \dfrac{2x - 6}{x^2 + 25}$ جميع الأعداد الحقيقية

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في تمثيل الاقترانات النسبية بيانيًّا، مُوضِّحًا لهم مفهوم خطوط التقارب الرأسية والأفقية، وكيفية إيجادها، ثم أُناقِشهم في خصائص اقتران المقلوب.
- أُوضِّح مفهوم خطوط التقارب وكيفية إيجادها لاقترانات نسبية بسيطة مقامها خطي، وأُشارِك الطلبة في حل فرعي المثال3.

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $3, -3$، ويُكتَبُ كمجموعةٍ على الصورةِ الآتيةِ: $\{x \mid x \neq \pm 3\}$

2) $y = \dfrac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $2x^3-5x^2-3x = 0$

$x(2x^2-5x-3) = 0$ بإخراجِ x عاملٍ مشتركٍ

$x(2x+1)(x-3) = 0$ بتحليلِ العبارةِ التربيعيةِ

$x = 0\ ,\ 2x+1 = 0\ ,\ x-3 = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

$x = 0, x = \dfrac{-1}{2}, x = 3$ بحلِّ المعادلاتِ

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $0, 3, \dfrac{-1}{2}$، أوْ $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3, x \neq \dfrac{-1}{2}\}$

أفكِّر

هل مجالُ الاقترانِ $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$ يساوي مجالَ الاقترانِ $g(x) = x-3$؟

أتحقق من فهمي

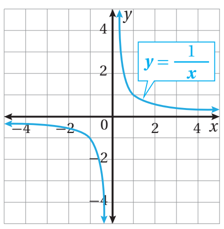
أجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $h(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-5x+6}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-4}{6x-3x^2}$

معظمُ الاقتراناتِ النسبيّةِ منحنياتُها غيرُ متّصلةٍ، بمعنى: أنها تحتوي قفزاتٍ أوْ انقطاعاتٍ أو ثقوبٍ، ويحدثُ ذلكَ عندَ أصفارِ المقامِ.

أحدُ المواقعِ التي لا يكونُ عندَها منحَنى الاقترانِ متّصلًا هوَ **خطُّ التقاربِ** (asymptote)؛ وهوَ مستقيمٌ يقتربُ منهُ منحَنى الاقترانِ كلّما ازدادتْ القيمةُ المطلقةُ لأحدِ المتغيّرينِ x أو y.

في الشكلِ المجاورِ كلٌّ منَ المحورِ x والمحورِ y هوُ خطُّ تقاربٍ لمنحَنى الاقترانِ $y = \dfrac{1}{x}$، وألاحظُ أنَّ مُنحنى الاقترانِ يقتربُ كثيرًا منْ خطَّيِ التقاربِ، لكنّهُ لا يلمسهُما.



أتعلّم

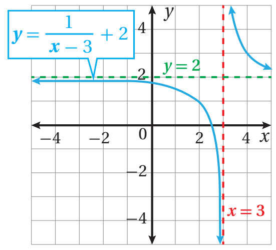
يُسمّى الاقترانُ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ اقترانَ المقلوبِ وهوَ أبسطُ الاقتراناتِ النسبيّةِ، ومنهُ تتولّدُ اقتراناتٌ نسبيةٌ كثيرةٌ.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) مجال $h(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2 و3؛ أيْ $\{x \mid x \neq 2, x \neq 3\}$.

b) مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و2؛ أيْ $\{x \mid x \neq 0, x \neq 2\}$.

بالنّظرِ إلـى مُنحنى الاقترانِ $y=\frac{1}{(x-3)}+2$ في الشكلِ المجاورِ ألاحظُ وجودَ خطِّ تقاربٍ رأسيٍّ عندَ صفـرِ المقامِ $x=3$ وخطِّ تقـاربٍ أُفقيٍّ عندَ $y=2$، ويقودُنا ذلكَ إلـى القاعدةِ الآتيةِ لتحديدِ خطوطِ التقاربِ الرأسيّةِ والأفقيّةِ.



مفهومٌ أساسيٌّ **خطوطُ التّقارُبِ الرأسيّةِ والأفقيّةِ**

خطُّ التقاربِ الرأسـيِّ: يكونُ للاقترانِ النسـبيِّ الذي على صورةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$ خطُّ تقاربٍ رأسيٍّ عندَ صفرِ المقامِ هوَ المستقيمُ $x=b$

خطُّ التقاربِ الأفقيِّ: يكونُ للاقترانِ النسـبيِّ الذي علـى صورةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$ خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ المستقيمُ $y=c$

مثال 3

أجدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1) $f(x)=\frac{2}{x-3}+5$

بمقارنةِ هذا الاقترانِ معَ الصيغةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$؛ ألاحظُ أنَّ $b=3, c=5$

إذنْ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمُ $x=3$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمُ $y=5$

2) $g(x)=\frac{7x}{x+4}$

قاعـدةُ هذا الاقترانِ تختلفُ ظاهريًّـا عنِ الصيغةِ $f(x)=\frac{1}{(x-b)}+c$، لكنّهُما متشـابهتانِ، ويمكنُ تحويلُ قاعدةِ الاقترانِ إلى الصيغةِ الأُخرى بقسـمةِ البسـطِ على المقامِ باسـتعمالِ القسمةِ الطويلةِ كما يظهرُ جانبًا.

$$\begin{array}{r} 7 \\ x+4\,\overline{)\,7x} \\ (-)\ 7x+28 \\ \hline -28 \end{array}$$

إذنْ، $g(x)=7-\frac{28}{x+4}$

بمقارنةِ هذا الاقترانِ معَ الصيغةِ $f(x)=\frac{a}{(x-b)}+c$؛ ألاحظُ أنَّ $b=-4, c=7$

إذنْ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمُ $x=-4$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمُ $y=7$

إرشاد:

أُبيِّن للطلبة أنَّه يوجد للاقتران النسبي $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر. فإذا كانت درجة البسـط أكبر من درجة المقام فـلا يوجد خط تقارب أفقي، وإذا تسـاوت درجتا البسـط والمقام فإنَّ خط التقارب الأفقـي يكون المسـتقيم $y=\frac{a_n}{b_n}$، حيث a_n المعامـل الرئيس للبسـط، و b_n المعامل الرئيس للمقـام. وإذا كانت درجة البسـط أصغـر من درجة المقام كان خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=0$.

أُبيِّن لهم أيضًا أنَّه قد يوجد للاقتران النسبي الذي ليس لبسـطه ومقامه عوامل مشـتركة عِدَّة خطوط تقارب رأسية تبعًا لأصفار مقامه، وأنَّه قد لا يوجد له خطوط تقارب رأسية إذا لم يكن لمقامه أصفار، وأنَّه لا يمكن أنْ يقطع منحناه خط التقارب الرأسي.

مثال 4

- أُشارِك الطلبة في حل المثال 4 الذي يُوضِّح خطوات تمثيل اقتران نسبي بسيط بيانيًّا.

مثال إضافي

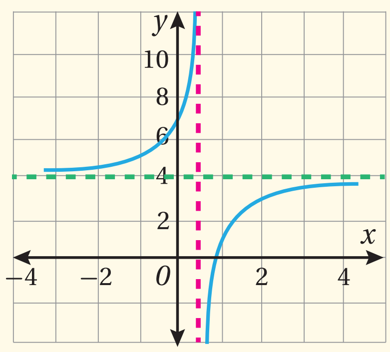
- أجد خطوط التقارب للاقتران: $g(x) = \frac{-3}{2x-1} + 4$، وأُمثِّله بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه.

له خط تقارب رأسي هو المستقيم $x = 0.5$، وخط تقارب أفقي هو المستقيم $y = 4$.

x	-2	-1	0	0.25	0.75	1	2	3
$y = (x)$	4.6	5	7	10	-2	1	3	3.4

المجال: $\{x \mid x \neq 0.5\}$.

المدى: $\{y \mid y \neq 4\}$.



إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى استعمال أوراق المربعات الموجودة في نهاية كتاب التمارين لتمثيل الاقترانات بصورة دقيقة ومرتبة، مُنبِّهًا إيّاهم إلى اختيار قيم للمتغير x على جانبي كل خط تقارب رأسي.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

a) خط التقارب الرأسي هو $x = -1$، والأفقي هو $y = 2$.

b) خط التقارب الرأسي هو $x = 0$، والأفقي هو $y = -3$.

c) خط التقارب الرأسي هو $x = 5$، والأفقي هو $y = 4$.

أتحقق من فهمي

أجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = 2 + \frac{9}{x+1}$ b) $h(x) = \frac{1}{x} - 3$ c) $j(x) = \frac{4x+11}{x-5}$

لتمثيلِ الاقتراناتِ النسبيّةِ بيانيًّا؛ أجِدُ خطوطَ التقاربِ، وأرسمُها أولًا، ثمّ أُكوِّنُ جدولَ قيمٍ باختيارِ قيمِ x على يمينِ خطِّ التقاربِ الرأسيِّ وعلى يسارِه، وأُعيِّنُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.

أتعلّم

إذا لم توجد عواملُ مشتركةٌ بين بسطِ الاقترانِ النسبيِّ ومقامِه، فإنّه توجدُ خطوطُ تقاربٍ رأسيّةٌ عندَ أصفارِ مقامِه جميعِها.

مثال 4

أجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

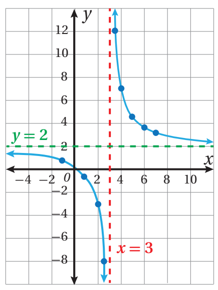
الخطوةُ 1: أجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ.

خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمَ $x=3$، وخطُّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ المستقيمَ $y=2$

الخطوةُ 2: أُنشئُ جدولَ قِيَمٍ باختيارِ بعضِ القيمِ حولِ $(x=3)$؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ 3:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$f(x)$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25

الخطوةُ 3: أرسمُ خطَّي التقاربِ، ثمَّ أُعيِّنُ النقاطَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يمينِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّي التقاربِ، ثمَّ أَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يسارِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّي التقاربِ، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.



المجالُ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 3، أوْ $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 2، أوْ $\{y \mid y \neq 2\}$.

أتحقق من فهمي

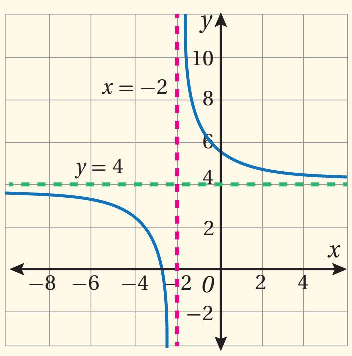
أجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأجِدُ مجالَهُ، ومداهُ. أنظر الهامش.

22

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

له خط تقارب رأسي هو $x = -2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 4$.

x	-8	-6	-4	-3	-2.5	-1.5	-1	0	1	4
$y=f(x)$	3.5	3.25	2.5	1	-2	10	7	5.5	5	4.5



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2؛ أيْ $\{x \mid x \neq -2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أيْ $\{y \mid y \neq 4\}$.

تحتوي منحنياتُ بعضِ الاقتراناتِ النسبيّةِ فجواتٍ (ثقوب) تُعبّرُ عن القيمِ التي لا يكونُ الاقترانُ مُعرّفًا عندَها.

مفهومٌ أساسيٌّ — فجواتُ منحنى الاقترانِ النسبيِّ

إذا كانَ $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$، حيثُ $q(x)\neq 0$، وَكانَ $x-c$ عاملًا مُشتركًا لكلٍّ منْ $p(x)$ وَ $q(x)$، فإنَّ مُنحنى $f(x)$ يحتوي فجوةً عندَ $x=c$

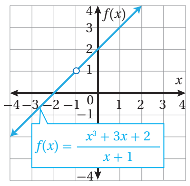
مثال 5

أُمثّلُ الاقترانَ $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$ بيانيًّا.

أختصرُ العواملَ المشتركةَ بينَ البسطِ والمقامِ.

$$f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}=\frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$ أُحلّلُ البسطَ

$$=\frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=x+2$$ أختصرُ العاملَ المشتركَ $(x+1)$



إذن؛ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$ هوَ ذاتُهُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x)=x+2$ مع وجودِ فجوةٍ (دائرةٍ صغيرةٍ مُفرَغةٍ) في المنحنى عند $x=-1$ كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.

إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

أتحققُ من فهمي

أُمثّلُ كلًّا من الاقترانينِ الآتيينِ بيانيًّا: أنظر الهامش.

a) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ b) $f(x)=\frac{x^4+3x^2}{x^2}$

أتدرب وأحل المسائل

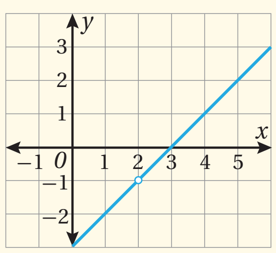
أَجِدُ ناتجَ القسمةِ والباقيَ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(x^2+5x-1)\div(x-1)$ الناتج: $x+6$، والباقي: 5
2. $(3x^2+23x+14)\div(x+7)$ الناتج: $3x+2$، والباقي: 0
3. $(x^3-3x^2+5x-6)\div(x-2)$ الناتج: x^2-x+3، والباقي: 0
4. $(9x^3-9x^2+17x+6)\div(3x-1)$ الناتج: $3x^2-2x+5$، والباقي: 11
5. $(-6x^3+x^2+4)\div(2x-3)$ الناتج: $-3x^2-4x-6$، والباقي: -14
6. $(8x^4+2x^3-14x^2+2)\div(4x^2+x-1)$ الناتج: $2x^2-3$، والباقي: $3x-1$

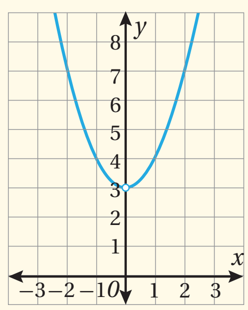
23

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

a)



b)



مثال 5

- أُناقِش الطلبة في الحالة التـي لا يكون فيها للمنحنى خط تقارب رأسـي عند أحد أصفار مقامه إذا كان هذا العدد يجعل البسـط أيضًا صفرًا، ويكون في المنحنى فجوة أو ثقب عند هذا العدد. أُبيِّن للطلبة أنَّه ينبغي في هذه الحالة تبسيط الاقتران باختصار العامل المشترك بين بسـطه ومقامه، ثم أتتبَّع الخطـوات التي ذكرت سـابقًا لتمثيل الاقتران بيانيًّا. أُناقِش الطلبة في المثال وأُشارِكهم في حله.

مثال إضافي

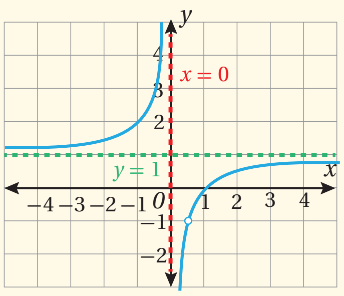
- أُمثِّل الاقتران: $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-x}$ بيانيًّا.

الإجابـة: هذا الاقتران غيـر معرف عنـد 0 و $\frac{1}{2}$ (أصفار المقام)، ويمكن تبسيطه بالتحليل كما يأتي:

$$f(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x(2x-1)}=\frac{(x-1)}{x}$$
$$=1-\frac{1}{x},\ x\neq\frac{1}{2}$$

ويتبيـن أنَّ له خط تقارب رأسـيًّا هو $x=0$، وخط تقارب أفقيًّا هو $y=1$، وفي منحناه ثقب مقابل $x=\frac{1}{2}$.

وهذا هو تمثيله البياني:



4 التدريب

- أُوجِّـه الطلبـة إلى بند **(أتـدرَّب وأحل المسـائل)**، ثـم أطلـب إليهم حـل المسـائل (1 – 13) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلـة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: $14, (16–18), 20$ كتاب التمارين: $1, 2, (5 – 8)$
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: $(15 – 19)$ كتاب التمارين: $(1 – 6)$
فوق المتوسط	كتاب الطالب: $(17 – 21)$ كتاب التمارين: $(8 – 13)$

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل $(19 – 21)$.
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

5 الإثراء

- أطرح على الطلبة المسألة الآتية:

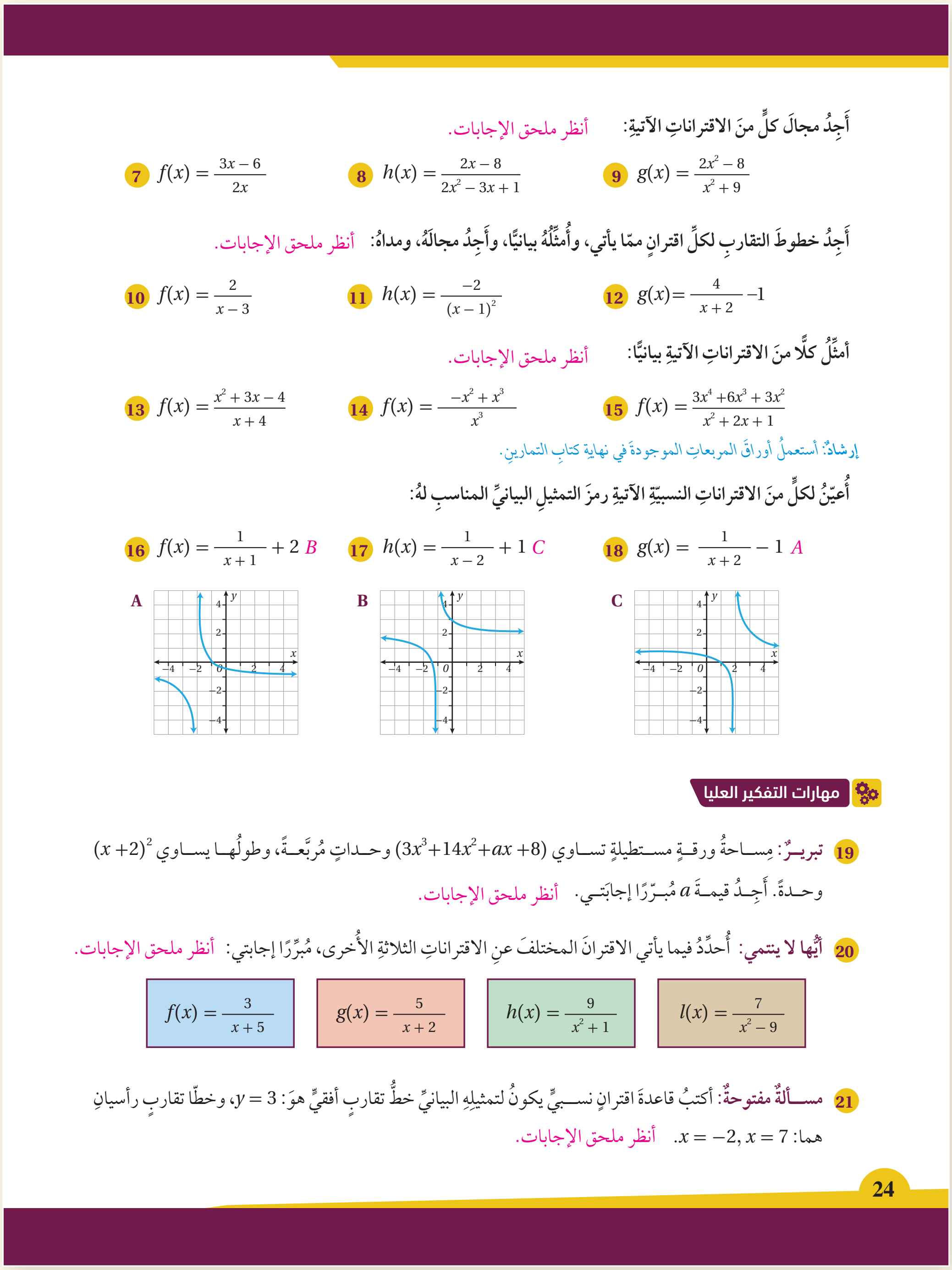
» إذا كان $(x–1)$ أحد عوامل الاقتران $f(x) = x^3–2x^2 –19x +20$، فما مجموع مربعات أصفار $f(x)$؟ 42

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة الانتهاء من جمع البيانات عن المتغيرين اللذين اختاروهما.
- أُذكّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة إعداد قائمة تتضمَّن الخطوات التي يتبعونها في قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، ويُطبِّقونها في قسمة $f(x) = 3x^2 + 6x^4 –28x –10$ على $h(x) = 2x^2 + 5$.



أَجِدُ مجالَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ: أنظر ملحق الإجابات.

7 $f(x) = \frac{3x-6}{2x}$ 8 $h(x) = \frac{2x-8}{2x^2-3x+1}$ 9 $g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+9}$

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ: أنظر ملحق الإجابات.

10 $f(x) = \frac{2}{x-3}$ 11 $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$ 12 $g(x) = \frac{4}{x+2} - 1$

أمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا: أنظر ملحق الإجابات.

13 $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x+4}$ 14 $f(x) = \frac{-x^2+x^3}{x^3}$ 15 $f(x) = \frac{3x^4+6x^3+3x^2}{x^2+2x+1}$

إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

أُعيّنُ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ النسبيّةِ الآتيةِ رمزَ التمثيلِ البيانيِّ المناسبِ لهُ:

16 $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$ B 17 $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ C 18 $g(x) = \frac{1}{x+2} - 1$ A

A B C

مهارات التفكير العليا

19 **تبريرٌ:** مِساحةُ ورقةٍ مستطيلةٍ تساوي $(3x^3+14x^2+ax+8)$ وحداتٍ مُربَّعةً، وطولُها يساوي $(x+2)^2$ وحدةً. أَجِدُ قيمةَ a مُبرّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

20 **أيُّها لا ينتمي:** أُحدِّدُ فيما يأتي الاقترانَ المختلفَ عنِ الاقتراناتِ الثلاثةِ الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي: أنظر ملحق الإجابات.

$f(x) = \frac{3}{x+5}$	$g(x) = \frac{5}{x+2}$	$h(x) = \frac{9}{x^2+1}$	$l(x) = \frac{7}{x^2-9}$

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ نسبيٍّ يكونُ لتمثيلِهِ البيانيِّ خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ: $y = 3$، وخطّا تقاربٍ رأسيانِ هما: $x = -2, x = 7$. أنظر ملحق الإجابات.

24

الدرس 3

تركيبُ الاقتراناتِ

Composition of Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ مفهومِ الاقترانِ المُركَّبِ، وشــرطِ تركيبِ اقترانيْنِ، وإيجادُ قيمتِهِ لعددٍ مُعطى، وإيجادُ قاعدةِ اقترانٍ مُركَّبٍ إذا عُلِمَتْ قاعدتا مُركِّبتيْهِ.

المصطلحاتُ تركيبُ الاقتراناتِ، الاقترانُ المُركَّبُ، المُركِّبتانِ.

مسألةُ اليومِ عندما تسقطُ قطرةُ ماءِ المطرِ على بحيرةٍ تتكوَّنُ موجةٌ دائريةٌ يتزايدُ طولُ نصفِ قُطْرِها بالنســبةِ إلى الزمنِ وَفقَ الاقترانِ: $r(t) = 25\sqrt{t+2}$ ، حيثُ r نصفُ القُطْرِ بالســنتيمتراتِ، وَ t الزمنُ بالدقائقِ. أَجِدُ مِساحةَ الموجةِ عندما $t = 2$.

تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّهُ يُمكِنُ اســتعمالُ أيِّ اقترانيْنِ، مثــلِ $f(x) = x^2, g(x) = 2x-1$، لتكوينِ اقتراناتٍ جديدةٍ، وذلكَ بإجراءِ عملياتِ جمعٍ، أوْ طرحٍ، أوْ ضربٍ، أوْ قســمةٍ عليْهِما كما في الأمثلةِ الآتيةِ:

$(f+g)(x) = x^2 + 2x - 1$ $\qquad$ $(f-g)(x) = x^2 - 2x + 1$

$(f\,.\,g)(x) = x^2(2x-1)$ $\qquad$ $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

ويمكنُ أيضًا تكوينُ اقترانٍ جديدٍ منَ الاقترانيْنِ f، وَ g عنْ طريقِ دمجِهِما، بحيثُ تكونُ مخرجةُ أحدِهِما مدخلةً للآخرِ.

وتُسمّى عمليةُ الدمجِ هذهِ **تركيبَ الاقتراناتِ** (functions composition)، ويُسمّى الاقترانُ الناتجُ **الاقترانَ المُركَّبَ** (composite function).

يُمكِنُ تركيبُ الاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ بطريقتيْنِ، هما:

1) تطبيقُ g أولًا، ثمَّ تطبيقُ f على نتيجةِ g، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(f\circ g)$.

2) تطبيقُ f أولًا، ثمَّ تطبيقُ g على نتيجةِ f، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(g\circ f)$.

لغةُ الرياضياتِ

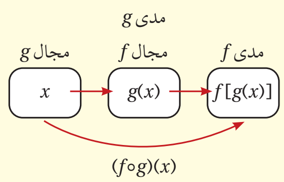
يُقرَأُ $(f\circ g)$ كما يلي: f بعدَ g

ويُقرَأُ $(g\circ f)$ كما يلي: g بعدَ f

مفهومٌ أساسيٌّ — **تركيبُ الاقتراناتِ**

إذا كانَ $f(x)$ و $g(x)$ اقترانينِ، وكانَ مدى $g(x)$ يقعُ ضمنَ مجالِ $f(x)$ فإنَّ الاقترانَ المُركَّبَ $(f\circ g)(x)$ يُعطى كما يأتي:

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$



الدرس 3

نتاجات الدرس

- تعرُّف مفهوم تركيب الاقترانات وشــرطه، والاقتران المُركَّب.
- حساب قيمة اقتران مُركَّب عند قيمة معطاة.
- إيجاد قاعدة الاقتران المُركَّب.
- إيجاد مُركَّبتي اقتران مُركَّب.
- حل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حساب قيمة اقتران معطى عند قيمة معطاة.
- ضرب مقادير جبرية وتبسيطها.
- تحديد مجال الاقتران كثير الحدود والاقتران النسبي.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة **(الفقرات)** المُرتبطــة بما ســيُقدَّم من موضوعــات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات **(أســتعد لدراســة الوحدة)** في كتــاب التمارين، ثم أطلــب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلــى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح :

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1,\ g(x) = 4 - 3x,$ $h(x) = \frac{x}{2x-6}$، ثم أطلب إلى الطلبة تحديد مجال كلٍّ من هذه الاقترانات، وإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) $f(1)$ $\quad 2$ $\qquad$ 2) $f(-2)$ $\quad 17$

3) $g(3)$ $\quad -5$ $\qquad$ 4) $h(2)$ $\quad -1$

مجال f, g هو مجموعــة الأعداد الحقيقية، ومجال h هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 3

- أطلب إلى الطلبة تبسيط المقدارين الآتيين:

a) $3(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 4$

$12x^2+2x+2$

b) $2x(x^2 + 5x) - 3(x^3 - 5x^2 + 4)$

$-x^3 + 25x^2 - 12$

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما طول نصف قطر الموجة بعد 7 دقائق من سقوط قطرة المطر على البحيرة؟ 75 cm
  - » كيف تحسب مساحة الموجة؟ باستعمال صيغة مساحة الدائرة: $A = \pi r^2$
  - » كيف تحسب مساحة الموجة بعد عِدَّة دقائق من سقوط قطرة الماء على البحيرة؟ بإيجاد طول نصف قطرها r أولًا، ثم تعويضه في صيغة المساحة.
- أعزز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

- أكتب الاقترانين: $f(x) = x-2\ , g(x) = 4 + 2x$ على اللوح، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة f للأعداد: 9 ,5 ,3 ,2، ثم كتابة النتائج في عمودين كما يأتي:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ 2 & \rightarrow & 0 \\ 3 & \rightarrow & 1 \\ 5 & \rightarrow & 3 \\ 9 & \rightarrow & 7 \end{array}$$

- أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة g للأعداد الناتجة من f، ثم كتابة النتائج كما في المُخطَّط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ 2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 6 \\ 5 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 10 \\ 9 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 18 \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

- أُبيِّن للطلبة أنَّ النتيجة النهائية الأولى 4 تُمثِّل قيمة g لِـ $f(2)$، وأنَّها تُكتَب في صورة $g(f(2)) = 4$، أو $(g \circ f)(2) = 4$ ، وهكذا الحال لبقية النتائج.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ عملية تعويض قيمة اقتران في اقتران آخر تسمى تركيب الاقترانات، وأنَّه عند تعويض $f(x)$ مكان x في معادلة $g(x)$ ينتج الاقتران المُركَّب $(g \circ f)(x)$ الذي هو $g(f(x))$، وأنَّه عند تعويض قيمة $g(x)$ في معادلة $f(x)$ ينتج $(f \circ g)(x)$ ، وأنَّ هذين الاقترانين المُركَّبين يكونان غالبًا مختلفين.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

ملاحظاتي

مثال 1

إذا كانَ $f(x) = x^2, g(x) = x + 4$، فأَجِدُ:

1 $(g\circ f)(3)$

$(g\circ f)(3) = g(f(3))$ — $(g\circ f)(3)$ تعني g لِـ $f(3)$؛ أيْ f، ثمَّ g

$= g(3^2)$ — بتعويضِ $x = 3$ في معادلةِ f

$= g(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9 + 4 = 13$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

2 $(g\circ f)(-2)$

$(g\circ f)(-2) = g(f(-2))$ — $(g\circ f)(-2)$ تعني g لِـ $f(-2)$؛ أيْ f، ثمَّ g

$= g((-2)^2)$ — بتعويضِ $x = -2$ في معادلةِ f

$= g(4)$ — بالتبسيطِ

$= 4 + 4 = 8$ — بتعويضِ $x = 4$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

3 $(f\circ g)(5)$

$(f\circ g)(5) = f(g(5))$ — $(f\circ g)(5)$ تعني f لِـ $g(5)$؛ أيْ g، ثمَّ f

$= f(5+4)$ — بتعويضِ $x = 5$ في معادلةِ g

$= f(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9^2 = 81$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ f، والتبسيطِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $h(x) = \sqrt{x}, j(x) = 2x + 1$ ، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $(h\circ j)(4)$ b) $(j\circ h)(4)$ c) $(h\circ h)(16)$ d) $(j\circ j)(-8)$

يُمكِنُ إيجادُ قاعدةِ الاقترانِ المُركَّبِ بدلالةِ المُتغيِّرِ x، ثمَّ حسابِ قيمةِ الاقترانِ المُركَّبِ عندَ أيِّ قيمةٍ عدديةٍ معطاةٍ.

مثال 2

إذا كانَ $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x^2 - 6$، فأَجِدُ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f\circ g)(x)$، وَ $(g\circ f)(x)$، ثمَّ أَجِدُ $(f\circ g)(-2)$، وَ $(g\circ f)(0)$.

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$ — تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

26

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) 3 b) 5 c) 2 d) −29

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في تعريف تركيب اقترانين، وطريقتي التركيب، وشروطه، مُبيِّنًا أنَّه إذا كانت الاقترانات كثيرات حدود، ومجالها ومداها الأعداد الحقيقية، فإنَّه يمكن تركيبها بالطريقتين. بعد ذلك أُشارِك الطلبة في حل المثال، مُوضِّحًا خطوتي الحل في كل فقرة.

! أخطاء شائعة:

قد يجد بعض الطلبة قيمة $(g\circ f)(x)$ ببدء التعويض في $g(x)$ أولًا، ثم تعويض النتيجة في $f(x)$؛ لذا أُنبِّههم إلى البدء من أقصى اليمين، بتعويض x في معادلة $f(x)$، ثم تعويض الناتج في معادلة $g(x)$.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = 3x^2 + 1, g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$، فأجد ما يأتي:

a) $(f\circ g)(2)$ 49

b) $(g\circ f)(2)$ $\dfrac{13}{6}$

c) $(f\circ g)(5)$ 19.75

مثال 2

- أُناقِش الطلبة في كيفية تعويض مقدار جبري من اقتران في معادلة اقتران آخر للتعبير عن تركيبهما جبريًّا، مُوضِّحًا الخطوات المتبعة في المثال 2 على اللوح، وتبسيط المقدار الناتج إلى أبسط صورة.

إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الإجابة عند إيجاد قاعدة الاقتران المُركَّب، بحساب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد ما بالتعويض في القاعدة، واستعمال تعريف الاقتران المُركَّب، ومقارنة النتيجتين، فإذا تساوتا كانت القاعدة صحيحة.

$= f(2x^2 - 6)$ بتعويضِ $g(x) = 2x^2 - 6$

$= 3(2x^2 - 6) + 5$ بتعويضِ $(2x^2 - 6)$ مكانَ x في معادلةِ f

$(f\circ g)(x) = 6x^2 - 13$ بالتبسيطِ

$(f\circ g)(-2) = 6(-2)^2 - 13 = 11$ بتعويضِ $x = -2$، والتبسيطِ

$(g\circ f)(x) = g(f(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= g(3x+5)$ بتعويضِ $f(x) = 3x + 5$

$= 2(3x+5)^2 - 6$ بتعويضِ $(3x + 5)$ مكانَ x في معادلةِ g

$= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6$ بتربيعِ $(3x + 5)$

$(g\circ f)(x) = 18x^2 + 60x + 44$ بالتبسيطِ

$(g\circ f)(0) = 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44$ بتعويضِ $x = 0$، والتبسيطِ

أتحقق من فهمي

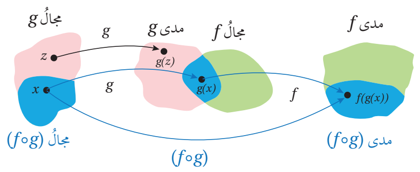
إذا كانَ $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = 2 - 3x$، فأَجِدْ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f\circ g)(x)$، وَ $(g\circ f)(x)$،
ثمَّ أَجِدْ $(f\circ g)(3)$، وَ $(g\circ f)(-1)$. أنظر الهامش.

أفكِّر

هلْ تُحقِّقُ عمليةُ تركيبِ الاقترانـاتِ الخاصيـةَ التبديليةَ؟

مجالُ الاقترانِ المُركّبِ

يتكـوَّنُ مجالُ $(f\circ g)(x)$ مـنْ مجموعةِ قيمِ x منْ مجالِ g التي تكونُ قيـمُ $g(x)$ لها موجودةً في مجالِ f. ولذلكَ تُسـتثنى منْ مجالِ $(f\circ g)(x)$ قيمِ x التي لا يكونُ الاقترانُ g معرّفًا عندَها (ليسـت ضمن مجال g)، وقيمُ x التـي لا يكونُ $f(g(x))$ معرّفًا عندَها $g(x)$ ليسـتْ ضمنَ مجالِ f).



مثال 3

إذا كانَ $g(x) = \frac{9}{x-3}, f(x) = \frac{6}{x-2}$؛ فأجدُ مجالَ $(f\circ g)(x)$.

مجالُ الاقترانِ $g(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ المقامَ صفرًا.

$x - 3 = 0$ بمساواةِ المقامِ معَ الصفرِ

$x = 3$ بجمعِ 3 إلى الطرفينِ

تنويع التعليم

- أُوزِّع الطلبـة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى كل ثنائي أنْ يكتبا اقترانيـن؛ كل على حدة، ثم العمل معًا لإيجاد ناتج تركيبهما، والتحقُّق من صحته.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = \sqrt{2x + 10}$, $g(x) = 4x + 1$، فأجد $(f\circ g)(x)$، ثم أجد $(f\circ g)(3)$ بطريقتين.

$(f\circ g)(x) = \sqrt{8x + 12}$, $(f\circ g)(3) = \sqrt{8(3) + 12}$

$= \sqrt{36} = 6$

$(f\circ g)(3) = f(g(3)) = f(13) = \sqrt{2(13) + 10}$

$= \sqrt{36} = 6$

مثال 3

- أُناقِش الطلبة فــي فكرة مجال الاقتران المُركَّب، مُبيِّنًا أنَّه يتكوَّن من مجموعة جزئية من مجال الاقتران الذي يُطبَّــق أولًا، نتيجتها موجودة في مجال الاقتران الذي يُطبَّق ثانيًا. بعد ذلك أُبيِّن أنَّه في معظم الحالات يكون مجال الاقتــران المُركَّب هو كل الأعداد الحقيقية من دون اســتثناء عندما يكون الاقترانـــان كثيري حدود، وأنَّه ينبغي التحقُّق من المجال إذا كان أحد الاقترانين أو كلاهما نســبيًّا، أو اقترانًا جذريًّــا. بعد ذلك أُناقِش الطلبة في طريقة تحديد مجــال الاقتران المُركَّب في المثال 3، وأُشارِكهم في حله.

مثال إضافي

- أجد مجال $(f\circ g)(x)$ في الحالتين الآتيتين:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 5, g(x) = \frac{x + 4}{2x - 6}$

2) $f(x) = \frac{x}{x - 5}$, $g(x) = \frac{1}{3x + 1}$

الإجابة:

1) $\{x | x \neq 3\}$ 2) $\{x | x \neq -\frac{1}{3}, x \neq -\frac{4}{15}\}$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

$(f\circ g)(x) = (2 - 3x)^2 + 4(2 - 3x) = 9x^2 - 24x + 12$

$(f\circ g)(3) = 21$

$(g\circ f)(x) = 2 - 3(x^2 + 4x) = -3x^2 - 12x + 2$

$(g\circ f)(-1) = 11$

مجالُ الاقترانِ $f(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $x-2=0$، أي $x=2$ ، ولذلكَ تُستثنَى قيمُ x التي تجعلُ $g(x)=2$

بمساواةِ $g(x)$ معَ 2	$\frac{9}{x-3}=2$
بضربِ الطرفينِ في $(x-3)$	$9=2(x-3)$
بالتوزيعِ	$9=2x-6$
بإضافةِ 6 للطّرفينِ	$15=2x$
بقسمةِ الطرفينِ على 2	$7.5=x$

إذنْ؛ مجالُ $(f \circ g)(x)$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ باستثناءِ 3 , 7.5 ، أيْ: $\{x: x \neq 3,\ x \neq 7.5\}$.

أتحقق من فهمي

أجدُ مجالَ $(g \circ f)(x)$ للاقترانين في المثالِ 3 أعلاهُ. أنظر الهامش.

يُمكِنُ النظرُ إلى كثيرٍ منَ الاقتراناتِ بوصفِها اقتراناتٍ مُركَّبةً، وإيجادُ اقترانيْنِ بسيطيْنِ يُكافِئُ تركيبُهُما الاقترانَ المُركَّبَ، عندئذٍ يكونُ الاقترانانِ البسيطانِ **مُركَّبتَي الاقترانِ المُركَّبِ** (components of the composite function).

فمثلًا، يُمكِنُ اعتبارُ الاقترانِ $f(x)=\sqrt{4x^2+9}$ اقترانًا مُركَّبًا، ومُركَّبتاهُ هما: $g(x)=4x^2+9$, $h(x)=\sqrt{x}$، ويكونُ $f(x)=(h \circ g)(x)$.

إرشادٌ

قدْ لا تكونُ القيودُ على مجالِ الاقتراناتِ واضحةً بعدَ إجراءِ عمليةِ تركيبِ الاقتراناتِ وتبسيطِها؛ لذا منَ المُهِمِّ الانتباهُ إلى مجالِ الاقترانيْنِ قبلَ تركيبِهِما.

مثال 4

أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x)=f(g(x))$

1) $h(x)=\frac{1}{x+3}$

أفترضُ أنَّ $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x+3$. وبذلكَ، فإنَّ:

بتعويضِ $g(x)=x+3$	$f(g(x))=f(x+3)$
بتعويضِ $x+3$ مكانَ x في معادلةِ f	$=\frac{1}{x+3}=h(x)$

مثال 4

- أُوضِّح للطلبة كيفية تفكيك اقتران معطى إلى اقترانين بسيطين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى، ثم أُخبرهم أنَّه يوجد في حالات عِدَّة أكثر من طريقة لكتابة اقترانين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى. بعد ذلك أُناقِش الطلبة في حلِّ المثال 4، ثم أطلب إليهم البحث عن إجابة أُخرى.

مثال إضافي

- أجد الاقترانين $f(x), g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن $h(x)=2+\sqrt{x^2+9}$ في صورة $h(x)=f(g(x))$.

إجابة محتملة:

$g(x)=x^2+9, f(x)=2+\sqrt{x}$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

$\{x | x \neq 2, x \neq 4\}$

2 $h(x) = (2 + x^2)^{10}$

أفترضُ أنَّ $f(x) = x^{10}$, $g(x) = 2 + x^2$. وبذلكَ، فإنَّ:

$$f(g(x)) = f(2 + x^2) \quad \text{بتعويضِ } g(x) = 2 + x^2$$

$$= (2 + x^2)^{10} = h(x) \quad \text{بتعويضِ } 2 + x^2 \text{ في معادلةِ } f$$

أتحقق من فهمي

أَجِـدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عـنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$ أنظر الهامش.

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يُمكِنُ اسـتعمالُ فكرةِ الاقتراناتِ المُركَّبةِ في مواقفَ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثلِ: التجارةِ، والصناعةِ، وغيرِهِما.

مثال 5: من الحياة

صناعـةٌ: وجـدَ مديرُ مصنعٍ للأثـاثِ أنَّ تكلفةَ إنتـاجِ q منْ خزانـاتِ الكتبِ في فتـرةِ العمـلِ الصباحيةِ بالدينـارِ هيَ: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كانَ عـددُ خزانـاتِ الكتبِ التـي يُمكِـنُ إنتاجُها في t سـاعةً في الفتـرةِ الصباحيةِ هيَ: $q(t) = 20t, 0 \le t \le 5$، فمـا تكلفـةُ الإنتاجِ بدلالةِ t؟ كمْ دينارًا تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ؟

لإيجادِ تكلفةِ الإنتاجِ بدلالةِ t ، أُعـوِّضُ قيمةَ $q(t)$ في معادلةِ التكلفةِ، فأُكوِّنُ اقترانًا مُركَّبًا هوَ $(C \circ q)(t)$:

$$(C \circ q)(t) = C(20t) \quad \text{تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ}$$

$$= (20t)^2 + 2(20t) + 800 \quad \text{بتعويضِ } 20t \text{ مكانَ } q \text{ في معادلةِ التكلفةِ}$$

$$= 400t^2 + 40t + 800 \quad \text{بالتبسيطِ}$$

تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ : $(C \circ q)(4)$

$$(C \circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$$

إذنْ، تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ: 7360 دينارًا.

مثال 5: من الحياة

- أُناقِش الطلبة فـي حل المثال 5 الـذي يُبيِّن توظيف تركيب الاقترانات في موقف حياتي، ثم أطلب إليهم تفسـير الاقترانيـن المعطيين في المسـألة، ومدلول الاقتران الناتج من تركيبهما. بعد ذلك أسـألهما عن حساب التكلفة من دون كتابة اقتران مُركَّب.

مثال إضافي

تجارة: أعلن محل لبيع الأجهزة الكهربائية عن خصم قيمته 15% على جميع الأجهزة. يريد خليل أنْ يشـتري ثلاجة من هذا المحل، ولديه قسيمة من المصنع تُخوِّله الحصول على خصم 25 دينارًا من ثمن الثلاجة:

a) أكتـب اقترانين f, g يُمثِّل أحدهما ما سـيدفعه خليل لشـراء ثلاجة ثمنها x دينـارًا مسـتفيدًا من الخصم المعلن، ويُمثِّل الآخر ما سيدفعه مستفيدًا من القسيمة.

$f(x) = x - 25$, $g(x) = x - 0.15x = 0.85x$

b) أكتب قاعدة كلٍّ من $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$، مُفسِّـرًا دلالاتهما، ومُحدِّدًا أيهما أفضل لخليل.

ما سـيدفعه خليل مسـتفيدًا من القسـيمة أولًا، ثم الخصم المعلن: $(g \circ f)(x) = 0.85x - 21.25$.

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من الخصم المعلن أولًا، ثم القسيمة: $(f \circ g)(x) = 0.85x - 25$.

الأفضـل لخليل هـو $(f \circ g)(x)$؛ لأنَّه سـيدفع أقل بمقدار 3.75 دنانير.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

إجابة محتملة:

a) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x$, أو $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = x^2$

إجابة محتملة:

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 5$, $g(x) = (x+2)^2$ ، أو $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5$, $g(x) = x + 2$

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 16) كتاب التمارين: (16 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 20) كتاب التمارين: (16 – 1) (فردي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 22, 23,(25 – 27) كتاب التمارين: (23 – 17)

معلومةٌ

الكلفن وحدةٌ لقياسِ درجةِ الحرارةِ، اعتُمِدَتْ في النظامِ الدوليِّ، ورُمِزَ إليْها بالرمزِ (K)، وقدْ سُمِّيَتْ بهذا الاسمِ نسبةً إلى الفيزيائيِّ اللورد كلفن.

أتحقق من فهمي

قياسٌ: يُحوِّلُ الاقترانُ $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ درجاتِ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ F إلى مقياسِ سيلسيوس C. ويُحوِّلُ الاقترانُ $K(C) = C + 273$ درجاتِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس إلى مقياسِ كلفن K. أكتبُ الاقترانَ الذي يُحوِّلُ درجةَ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ إلى مقياسِ كلفن، ثمَّ أَجِدُ درجةَ الحرارةِ على مقياسِ كلفن التي تُقابِلُ 86 درجةً فهرنهايتيةً. أنظر الهامش.

أتدرب وأحل المسائل

إذا كانَ $f(x) = x + 7, g(x) = \frac{x}{2}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $(f \circ g)(4)$ 9
2) $(g \circ f)(4)$ 5.5
3) $(g \circ g)(-2)$ $-\frac{1}{2}$
4) $(f \circ f)(3)$ 17

إذا كانَ $c(x) = x^3, d(x) = 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

5) $(c \circ d)(3)$ 27
6) $(d \circ c)(5)$ 247
7) $(c \circ d)(x)$ $(c \circ d)(x) = (2x - 3)^3$
8) $(d \circ c)(x)$ $(d \circ c)(x) = 2x^3 - 3$

أجدُ مجالَ $(f \circ g)(x)$ فيْ كلٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

9) $f(x) = \frac{2x}{x - 3}, g(x) = \frac{1}{x - 5}$
10) $f(x) = \frac{1}{2x - 2}, g(x) = \frac{5}{x + 7}$

11) إذا كانَ $a(x) = x + 4, b(x) = x - 7$، فأُثبِتُ أنَّ $(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x)$. (13 – 11) أنظر ملحق الإجابات.

12) إذا كانَ $f(x) = 2^x, g(x) = 3x + 4$، فأَجِدُ $(f \circ g)(x)$، ثمَّ أَجِدُ قيمةَ $(f \circ g)(-3)$.

13) إذا كانَ $g(x) = 2x - 10$, $f(x) = \frac{1}{x - 4}$، فأَجِدُ $(g \circ f)(x)$ بصورةِ كسرٍ واحدٍ، ثمَّ أُعيِّنُ مجالَهُ.

إذا كانَ $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 - 7$، فأُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي بصورةِ اقترانٍ مُركَّبٍ، مُعتمِدًا الاقترانيْنِ f, g:

14) $x^2 - 6$ $(f \circ g)(x)$
15) $x^2 + 2x - 6$ $(g \circ f)(x)$

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$

16) $h(x) = \frac{4}{3 - \sqrt{4 + x^2}}$ أنظر ملحق الإجابات.
17) $h(x) = (\frac{1}{2x - 3})^3$ أنظر ملحق الإجابات.

30

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

$$(K \circ C)(F) = K(\frac{5}{9}(F - 32)) = \frac{5}{9}(F - 32) + 273$$

$$(K \circ C)(86) = \frac{5}{9}(86 - 32) + 273 = 303K$$

إجابات الأسئلة:

9) $\{x | x \neq 5, x \neq \frac{16}{3}\}$

10) $\{x | x \neq -7, x \neq -2\}$

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بنـد (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (27 – 24).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية مـن الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشـاد: أُرشِـد الطلبة إلى إكمال المربع في الاقتران الوارد في السؤال 25 (**مسألة مفتوحة**).

5 الإثراء

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:

» إذا كان $f(x) = 3x - 7$، وكان $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 11$، فما قاعدة $g(x)$؟

$g(x) = \frac{4}{3}x^2 + 6$

» إذا كان $f(x) = \sqrt{3x}$، وكان $(g \circ f)(x) = 18x + 7$، فما قاعدة $g(x)$؟

$g(x) = 6x^2 + 7$

» إذا كان $f(x) = \frac{2+3x}{2x-6}, g(x) = \frac{1}{x}$، فما مجال كلٍّ من $(f \circ g)(x)$، و $(g \circ f)(x)$؟

مجـال $(f \circ g)(x)$ هو جميع الأعـداد الحقيقية باستثناء 0 و $\frac{1}{3}$

مجـال $(g \circ f)(x)$ هو جميع الأعـداد الحقيقية باستثناء 3 و $\frac{-2}{3}$

تعليمات المشروع

أُوجِّـه الطلبة إلى البـدء بتنفيذ الخطوة 3 من المشـروع، بتمثيل البيانات التي جمعوها باسـتعمال برمجية Excel ، وإيجاد قاعدة الاقتران المناسب للبيانات.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة البحث في مكتبة المدرسة أو شبكة الإنترنت عن أمثلة تطبيقية على تركيب الاقترانات، ثم كتابة مثال واقعي عن تركيب الاقترانات.

18 إذا كانَ $f(x) = \sqrt{x-2}\ , x \geq 2, g(x) = \frac{2}{3-x}\ , x > 3$، فهلْ يُمكِنُ تكوينُ $(f \circ g)(x)$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

(27 – 18) أنظر ملحق الإجابات.

يُعطى عددُ خلايا البكتيريا في أحدِ الأطعمةِ المُبرَّدةِ في الثلّاجةِ بالاقترانِ: $N(T) = 23T^2 - 56T + 1,\ 3 < T < 33$، حيثُ T درجةُ حرارةِ الطعامِ. عندَ إخراجِ الطعامِ منَ الثلّاجةِ تُعطى درجةُ حرارتِهِ بالاقترانِ: $T(t) = 5t + 1.5$، حيثُ t الزمنُ بالساعاتِ:

20 أكتبُ الاقترانَ: $(N \circ T)(t)$.

21 أَجِدُ الزمنَ الذي يصلُ عندهُ عددُ خلايا البكتيريا إلى 6752 خليةً، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلتيْنِ عشريتيْنِ.

22 إذا كانَ $f(x) = ax + b, a > 0$، وكانَ $(f \circ f)(x) = 16x - 15$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a، وَ b.

23 أَجِدُ $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ: $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \frac{1}{x}\ , h(x) = x + 3$.

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشـفُ الخطأَ:** وجدَتْ كلٌّ منْ هدى ووفاءَ ناتجَ $(f \circ g)(x)$ ، حيثُ: $f(x) = x^2 - 6x - 5, g(x) = x^2 + 5$. أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

وفاءُ

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= (x^2+5)^2 - 6x^2 - 5$$
$$= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 5$$
$$= x^4 + 4x^2 + 20$$

هدى

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= (x^2+5)^2 - 6(x^2+5) - 5$$
$$= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 30 - 5$$
$$= x^4 + 4x^2 - 10$$

25 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ اقترانيْنِ f، وَ g بحيثُ يكونُ $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

26 **تحدٍّ:** إذا كانَ $g(x) = \frac{1}{x+2}\ ; f(x) = \frac{1}{x-3}$، فما قاعدةُ $(f \circ g)(x)$؟ ما مجالُهُ؟

27 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = \frac{2x-2}{x-4}$، وكانَ $g(x) = \frac{2x-1}{3}$، فأَحُلُّ المعادلةَ $(f \circ g)(x) = -4$.

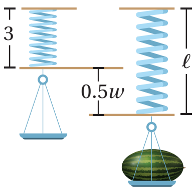
الدرسُ 4

الاقترانُ العكسيُّ
Inverse Function

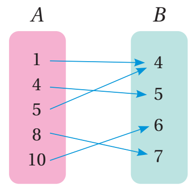
فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقترانِ العكسيِّ، وإيجادُهُ، وتحديدُ مجالِهِ ومداهُ.

المصطلحاتُ العلاقةُ العكسيةُ، الاقترانُ العكسيُّ، اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ، اختبارُ الخطِّ الأفقيِّ، الاقترانُ المحايدُ، الاقترانُ الجذريُّ.

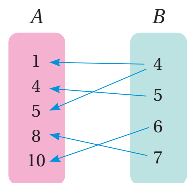
مسألةُ اليومِ يُستعمَلُ الاقترانُ $l = 0.5w + 3$ لإيجادِ طولِ الزنبركِ l بالسنتيمتراتِ في الميزانِ الزنبركيِّ عندَ قياسِ كتلةِ جسمٍ w بالكيلوغرامِ. هلْ يُمكِنُ إيجادُ اقترانٍ آخرَ يُستعمَلُ لإيجادِ كتلةِ الجسمِ إذا عُلِمَ طولُ الزنبركِ؟



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ العلاقةَ تربطُ بينَ مجموعتيْنِ منَ العناصرِ، وأنَّ إحداهُما تُسمّى المجالَ، والأُخرى تُسمّى المدى. وبالنظرِ إلى العلاقةِ المُمثَّلةِ في المُخطَّطِ السهميِّ المجاورِ، ألاحِظُ أنَّ المجالَ هوَ: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$، والمدى هوَ: $B = \{4, 5, 6, 7\}$.



عندَ عكسِ اتجاهِ الأسهمِ لترتبطَ عناصرُ B بعناصرِ A تنتجُ **علاقةٌ عكسيةٌ** (inverse relation)، مجالُها B، ومداها A.

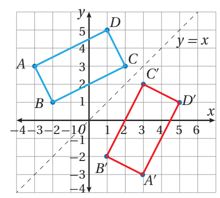


مثال 1

تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(1, 5), (2, 3), (-2, 1), (-3, 3)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المستطيلِ $ABCD$. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

لإيجادِ العلاقةِ العكسيةِ، أُبدِّلُ إحداثيي كل زوج مرتب، فتكونُ العلاقةُ العكسيةُ هيَ: $\{(3, -3), (1, -2), (3, 2), (5, 1)\}$.

عندَ تمثيلِ هذهِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا تنتجُ إحداثياتُ رؤوسِ المستطيلِ $A'B'C'D'$ الذي يُمثِّلُ انعكاسًا للمستطيلِ $ABCD$ حولَ المستقيمِ $y = x$



الدرس 4

نتاجات الدرس

- تعرُّف العلاقة العكسية، والاقتران العكسي.
- إيجاد الاقتران العكسي، وتحديد مجاله ومداه.
- تعرُّف الاقتران الجذري، وتحديد مجاله ومداه.
- تمثيل الاقتران واحد لواحد واقترانه العكسي في المستوى الإحداثي نفسه، وتعرُّف العلاقة بينهما.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تمييز العلاقة والاقتران.
- تغيير موضوع القانون.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أسأل الطلبة عن العلاقة والاقتران والفرق بينهما.
- أكتب العلاقتين الآتيتين، ثم أسأل الطلبة عن المجال والمدى لكلٍّ منهما، وأيهما اقتران:

1) $\{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 8)\}$

2) $\{(-2, 4), (-1, 1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

- أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x بدلالة y في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = 2x - 5$ $\qquad x = \frac{y+5}{2}$

2) $y = \frac{3y+4}{5}$ $\qquad x = \frac{5y-4}{3}$

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » لماذا يستطيل الزنبرك عندما تُعلَّق به كتلة؟ لأنَّ قوة الجاذبية تشد الكتلة إلى الأسفل، فيزداد طول الزنبرك.
  - » إذا عُلِّق بالميزان مادة كتلتها 4 kg، فما طول الزنبرك؟ 5 cm
  - » كيف تُحسَب كتلة جسم عُلِّق بهذا الميزان فأصبح طول الزنبرك 7 cm؟ ما كتلته؟ بتعويض 7 بدل l في المعادلة وحلها لإيجاد w. كتلته 8 kg
- أعزز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم العلاقة العكسية التي تنتج بعكس اتجاه الأسهم في المخطط السهمي، أو بتبديل الإحداثيين في الأزواج المرتبة التي تُمثِّل العلاقة. فإذا كان (a, b) موجودًا في العلاقة R، فإنَّ (b, a) يكون موجودًا في العلاقة العكسية للعلاقة R.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد العلاقة العكسية لعلاقة مكتوبة بصورة أزواج مرتبة، وتمثيل العلاقة ومعكوسها في المستوى البياني نفسه، ومقارنة التمثيلين البيانيين أحدهما بالآخر، مُذكِّرًا إيّاهم بالانعكاس حول مستقيم.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

✎ أتحقق من فهمي

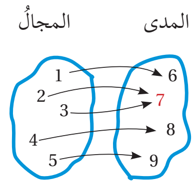
تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(4,3), (-4,3), (-3,1)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المثلثِ ABC. أجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ. أنظر الهامش.

الاقتراناتُ هيَ نوعٌ خاصٌّ منَ العلاقاتِ؛ لأنَّ لها خاصيةً لا تُحقِّقُها جميعُ العلاقاتِ؛ فهيَ تربطُ كلَّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المدى. وبما أنَّ كلَّ اقترانٍ هوَ علاقةٌ فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ علاقةٍ عكسيةٍ للاقترانِ (معكوسُ الاقترانِ)، فإذا كانَ المعكوسُ اقترانًا أيضًا سُمِّيَ **اقترانًا عكسيًّا** (inverse function). ويُرمَزُ إلى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f(x)$ بالرمزِ $f^{-1}(x)$.

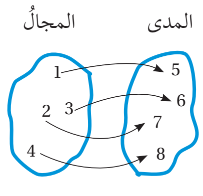
رموزٌ رياضيةٌ

يُقرَأُ الرمزُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$.

يُمكِنُ تحديدُ إذا كانَ معكوسُ الاقترانِ $f(x)$ يُمثِّلُ اقترانًا أمْ لا بالنظرِ إلى $f(x)$ نفسِهِ؛ فإذا ارتبطَ كلُّ عنصرٍ في المدى بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المجالِ كانَ المعكوسُ اقترانًا، عندئذٍ يُسمّى $f(x)$ **اقترانَ واحدٍ لواحدٍ** (one to one function).

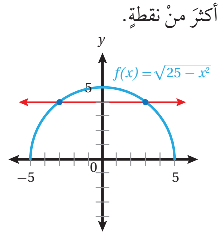


اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

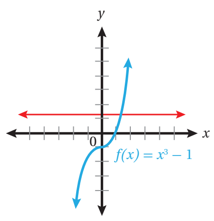


اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ.

يُمكِنُ أيضًا استعمالُ طريقةٍ تُسمّى **اختبارَ الخطِّ الأفقيِّ** (horizontal line test)؛ للتحقُّقِ منْ أنَّ الاقترانَ هوَ واحدٌ لواحدٍ، وذلكَ برسمِ أيِّ خطٍّ أفقيٍّ، والتأكُّدِ أنَّهُ لا يقطعُ منحنى $f(x)$ في أكثرَ منْ نقطةٍ.



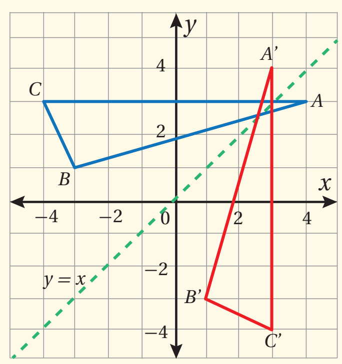
اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.



اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ.

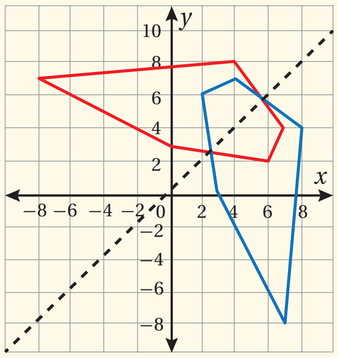
إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

العلاقة العكسية هي: $\{(1, -3), (3, -4), (3, 4)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$.



مثال إضافي

- تُمثِّل العلاقة $\{(2, 6), (3, 0), (4, 7), (7, -8), (8, 4)\}$ رؤوس مضلع خماسي. أجد العلاقة العكسية، وأُمثِّل العلاقتين في المستوى الإحداثي نفسه.



العلاقة العكسية هي:

$\{(-8, 7), (0, 3), (4, 8), (6, 2), (7, 4)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المضلع حول المستقيم $y = x$.

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكننا إيجاد معكوس للاقتران مثلما نجد معكوسًا للعلاقة. غير أنَّ معكوس الاقتران $f(x)$ لا يكون اقترانًا إلا إذا كان كل عنصر في مدى الاقتران f مرتبطًا بعنصر واحد فقط من مجاله؛ فلا يمكن أنْ يرتبط عنصران من المجال بعنصر واحد من المدى. ويسمى الاقتران الذي يُحقِّق هذه الخصيصة اقتران واحد لواحد، ويكون معكوسه هو الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$.
- أُوجِّه الطلبة إلى تأمُّل المُخطَّطين السهميين في الصفحة 33، ثم رسم معكوس كلٍّ منهما، ثم أسألهم:
  - » أيُّ المعكوسين هو اقتران؟
- أُوضِّح للطلبة اختبار الخط الأفقي؛ لكي يتمكَّنوا من تمييز اقتران واحد لواحد.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة خطوات إيجاد الاقتران العكسي لاقتران عُلِمت معادلته كما في المثال.
- أكتب على اللوح بعض الأعداد، ثم أطلب إلى الطلبة تعويضها في $f(x)$، وتعويض الأعداد الناتجة في الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$، وملاحظة العلاقة بين الاقتران ومعكوسه.

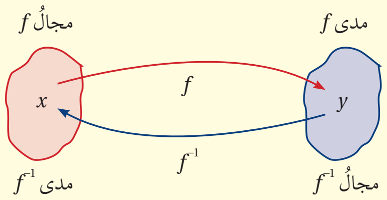
إذا كان $f(a) = b$، فإنَّ $f^{-1}(b) = a$.

- أُوضِّح لهم أيضًا أنَّه لرسم الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران، يجب اختيار بعض النقاط، وتبديل ترتيب إحداثي كلٍّ منها، وتعيين النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ورسم المنحنى (أو المستقيم) المار بها.

الاقترانُ العكسيُّ

مفهومٌ أساسيٌّ

لأيِّ اقترانِ $f(x)$، يوجدُ اقترانٌ عكسيٌّ $f^{-1}(x)$ إذا وفقطْ إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، عندئذٍ يكونُ مجالُ $f(x)$ هوَ مدى $f^{-1}(x)$، ومدى $f(x)$ هوَ مجالَ $f^{-1}(x)$.



يُمكِنُ إيجادُ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ المكتوبِ بصورةِ معادلةٍ بالتبديلِ بينَ x وَ y في قاعدةِ الاقترانِ.

مثال 2

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 4(x-5)$

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = f(x)$

أي أنَّ $y = 4(x-5)$

الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y = 4(x-5)$	المعادلةُ الأصليةُ
$y = 4x-20$	بتوزيعِ الضربِ في **4** على الحدَّيْنِ
$y + 20 = 4x$	بإضافةِ **20** إلى طرفَي المعادلةِ
$\frac{y+20}{4} = x$	بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على **4**

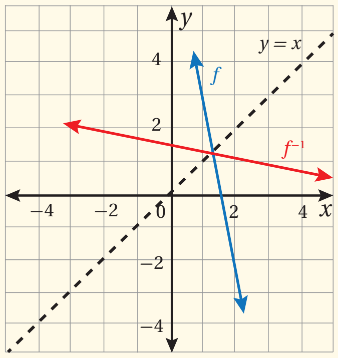
الخطوةُ 3: أُبدِّلُ x بِـ y، وأُبدِّلُ y بِـ x في الصيغةِ التي توصَّلْتُ إليْها في الخطوةِ 2، فينتجُ:

$$\frac{x+20}{4} = y$$

مثال إضافي

- أجد الاقتران العكسي للاقتران: $f(x) = 7 - 5x$، ثم أُمثِّل $f(x), f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه.

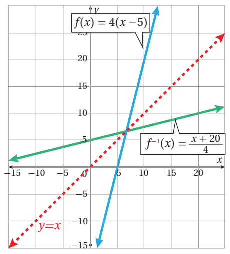
$$f^{-1}(x) = \frac{7-x}{5}$$



الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فيكونُ الناتجُ قاعدةَ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$.

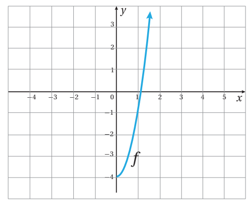
أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+20}{4}$$



عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

2 $f(x) = 3x^2 - 4, x \geq 0$



باستعمالِ اختبارِ الخطِّ الأفقيِّ، أَجِدُ أنَّ $f(x)$ هوَ اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ عندما $x \geq 0$؛ لذا فإنَّ لهُ اقترانًا عكسيًّا.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = 3x^2 - 4$

الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y = 3x^2 - 4$ المعادلةُ الأصليةُ

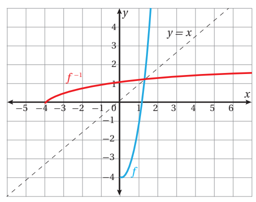
$y + 4 = 3x^2$ بإضافةِ 4 إلى طرفَيِ المعادلةِ

$\frac{y+4}{3} = x^2$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

$\sqrt{\frac{y+4}{3}} = x$ $x>0$

الخطوةُ 3: أُبدِّلُ x بـ y، وأُبدِّلُ y بـ x، فينتجُ: $y = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$

الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$



عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

معلومةٌ

بوجهٍ عامٍّ، لا يوجدُ للاقترانِ التربيعيِّ اقترانٌ عكسيٌّ؛ لأنَّهُ ليسَ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ. ولكنْ إذا اختُزِلَ مجالُهُ بالفترةِ التي يكونُ فيها اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، كانَ لهُ عندئذٍ اقترانٌ عكسيٌّ.

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ الرمزُ $f^{-1}(x)$ على الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f، أمّا الرمزُ $\frac{1}{f(x)}$ فيدلُّ على مقلوبِ الاقترانِ f.

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في النتيجــة الخاصة بتركيب اقتران مع الاقتران العكســي له، وكيفية توظيفها لتحديد إذا كان كلٌّ من اقترانين معطيين يُمثِّل اقترانًا عكسيًّا للآخر أم لا، بناءً على المثال 3.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ: أنظر الهامش.

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

مــنْ خصائــصِ أيِّ اقترانيْــنِ مُتعاكِســيْنَ أنَّ كلًّا منْهُمــا يَعكسُ أثــرَ الآخرِ؛ لــذا ينتجُ منْ تركيبِهِمــا الاقترانُ الذي يُبْقــي كلَّ عنصرٍ في مجالِهِمــا على حالِهِ، وهوَ **الاقتــرانُ المحايدُ** (identity function) الذي يربطُ كلَّ عنصرٍ بنفسِهِ، وقاعدتُهُ هيَ: $f(x) = x$

إرشادٌ

تعني جملــةُ (إذا وفقط إذا) أنَّ العبارةَ صحيحةٌ في الاتجاهيْنِ.

نتيجةٌ

يكونُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$، إذا وفقطْ إذا كانَ:

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميعِ قيمِ x في مجالِ $f^{-1}(x)$ وَ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميعِ قيمِ x في مجالِ $f(x)$.

تُســتعمَلُ النتيجةُ الســابقةُ لإثباتِ أنَّ كلًّا منَ اقترانيْــنِ معلوميْنِ هوَ اقترانٌ عكســيٌّ للآخرِ، وللتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحلِّ عندَ إيجادِ الاقترانِ العكسيِّ.

مثال 3

أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$ وَ $g(x) = 3x - 5$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ بإيجادِ $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= f(3x - 5)$ بتعويضِ $g(x) = 3x - 5$

$= \frac{(3x - 5) + 5}{3}$ بتعويضِ $3x - 5$ مكانَ x في معادلةِ $f(x)$

$= \frac{3x + (-5 + 5)}{3}$ بالتجميعِ

$(f \circ g)(x) = x$ بالتبسيطِ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) $f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{7}$

b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}, x \geq 2$

$= g(\frac{x+5}{3})$ بتعويضِ $f(x)=\frac{x+5}{3}$

$=3(\frac{x+5}{3})-5$ بتعويضِ $\frac{x+5}{3}$ مكانَ x في معادلةِ $g(x)$

$=x+5-5$ باختصارِ العاملِ 3 منَ البسطِ والمقامِ

$(g\circ f)(x)=x$ بالتبسيطِ

إذنْ، كلٌّ منَ الاقترانيْنِ $f(x)$ وَ $g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ؛ لأنَّ $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أُثبتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x)=4x-8$ وَ $g(x)=\frac{x}{4}+2$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.

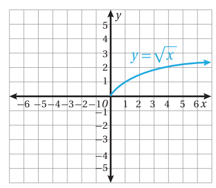
أتعلّم

يمكنُني أنْ أمثّلَ الاقترانَ الجذريَّ بيانيًّا بإنشاءِ جدولِ قيمٍ أفترضُها للمُتغيِّرِ x منْ مجالِ الاقترانِ، وأعوّضُها في قاعدةِ الاقترانِ لأجدَ قيمَ y، وأعيّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، وأرسمُ المنحنى الذي يمرُّ بها.

نتجَ في المثالِ الثاني الاقترانُ العكسيُّ $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذرًا تربيعيًّا لمقدارٍ جبريٍّ، وهوَ نوعٌ خاصٌّ منَ الاقتراناتِ يُسمّى **الاقترانَ الجذريَّ** (radical function)، مثلَ:

$f(x)=\frac{\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{1-x}}$ $\quad f(x)=\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+12}{8}}$ $\quad f(x)=\sqrt{5+x^2}$

إذا كانَ دليلُ الجذرِ فرديًّا مثلَ: $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ كانَ مجالُ الاقترانِ الجذريِّ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. ومداهُ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. أمّا إذا كانَ دليلُهُ زوجيًّا مثلَ: $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt{\ }$، فإنَّ مجالَهُ يكونُ مجموعةَ الأعدادِ التي تجعلُ المقدارَ تحتَ رمزِ الجذرِ عددًا غيرَ سالبٍ؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ للأعدادِ السالبةِ ليسَتْ حقيقيةً، ويكونُ مداهُ مجموعةً منَ الأعدادِ الحقيقيةِ غيرِ السالبةِ. فمثلًا، $f(x)=\sqrt{x}$ مجالُهُ $x\ge 0$، ومداهُ $y\ge 0$، وتمثيلُهُ البيانيُّ كما في الشكلِ الآتي:



مثال إضافي

- أُثبت أنَّ كلًّا من الاقتـران: $f(x)=4x^2-1,\ x\ge 0$ والاقتران: $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}\ ,\ x\ge -1$ هو اقتران عكسي للآخر.

$(f\circ g)(x)=4(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}\ )^2-1$

$=4(\frac{1}{4})(x+1)-1=x$

$(g\circ f)(x)=\frac{1}{2}\sqrt{(4x^2-1)+1}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2}$

$=\frac{1}{2}(2x)=x$

إذن، كل مـن $f(x), g(x)$ اقتـران عكسـي للآخر؛ لأن $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=x$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

$$g(x)=\frac{x}{4}+2$$

$$f(x)=4x-8$$

$$(f\circ g)\ \ (x)=4\left(\frac{x}{4}+2\right)-8$$

$$=x+8-8=x$$

$$(g\circ f)\ (x)=\frac{4x-8}{4}+2$$

$$=\frac{4x}{4}+\frac{8}{4}+2$$

$$x-2+2=x$$

مثال 4

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الاقتران الجذري ومجاله ومداه، ثم أُناقِشهم في المثال 4، مُذكِّرًا إيّاهم بخصائص علاقة التباين ($\leq$، $\geq$، $<$، $>$).
- أُوضِّح لهم أيضًا كيفية حل المعادلة التي تحوي جذورًا عند إيجاد الاقتران العكسي لاقتران جذري.

مثال 4

أَجِدُ مجالَ الاقترانِ $f(x) = \sqrt{2x-6}$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ قيمُ x التي تجعلُ $2x-6 \geq 0$:

أكتبُ المتباينةَ	$2x-6 \geq 0$
بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ	$2x-6+6 \geq 0+6$
بالتبسيطِ	$2x \geq 6$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$x \geq 3$

إذنْ، مجالُ $f(x)$ هوَ $x \geq 3$، أوِ الفترةُ $[3, \infty)$، ومداهُ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ منْ قيمتِهِ عندَ 3 فصاعدًا؛ لأنَّ المقصودَ بالجذرِ هنا هوَ الجذرُ الموجبُ. فالمدى هوَ $y \geq 0$، أوِ الفترةُ $[0, \infty)$.

لإيجادِ الاقترانِ العكسيِّ، أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = \sqrt{2x-6}$ ، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ لإيجادِ x بدلالةِ y:

المعادلةُ الأصليةُ	$y = \sqrt{2x-6}$
بتربيعِ الطرفيْنِ	$y^2 = 2x-6$
بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ	$y^2+6 = 2x$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$\frac{y^2+6}{2} = x$

بإبدالِ y بـ x ، وَ x بـ y في المعادلةِ الناتجةِ، فإنَّهُ ينتجُ: $y = \frac{x^2+6}{2}$

أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ: $f^{-1}(x) = \frac{x^2+6}{2}$

يكونُ مجالُ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى $f(x)$؛ أيْ مجالُهُ الفترةُ $[0, \infty)$، ومداهُ هوَ مجالُ $f(x)$؛ أيِ الفترةُ $[3, \infty)$.

أتذكَّرُ

عملياتُ الجمعِ، والطرحِ، والضربِ في عددٍ موجبٍ لا تُغيِّرُ اتجاهَ رمزِ المتباينةِ. أمّا الضربُ في عددٍ سالبٍ فيعكسُ اتجاهَ رمزِ المتباينةِ.

أتذكَّرُ

مجالُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى الاقترانِ f.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مجالَ $g(x) = \sqrt{3x+12} - 2$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ. أنظر الهامش.

تتطلَّبُ بعضُ المسائلِ الحياتيةِ استعمالَ مفهومِ الاقترانِ العكسيِّ لحلِّها. فإذا عُلِمَ طولُ نصفِ قُطْرِ كرةٍ أمكنَ إيجادُ حجمِها بالتعويضِ المباشرِ في قانونِ حسابِ حجمِ الكرةِ: $V(r) = \frac{4}{3} r^3 \pi$. ولكنْ إذا عُلِمَ الحجمُ، وطُلِبَ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ، فيجبُ تغييرُ الصيغةِ الخاصةِ بإيجادِ الحجمِ V إلى صيغةٍ أُخرى لإيجادِ r، وهنا يبرزُ مفهومُ الاقترانِ العكسيِّ.

إرشادٌ

لا يُستعمَلُ رمزُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ في المسائلِ العمليةِ، وإنَّما يُستعمَلُ رمزٌ مثلُ $r = r(V)$ الذي يُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ بدلالةِ الحجمِ.

38

مثال إضافي

- أجد المجال والمدى والاقتران العكسي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $g(x) = 2 + \sqrt{9-3x}$

b) $h(x) = \sqrt[3]{4x-15}$

a) المجال: $x \leq 3$ أو الفترة $(-\infty, 3]$، والمدى $y \geq 2$ أو الفترة $[2, \infty)$, $x \geq 2$, $g^{-1} =$.

$$g^{-1}(x) = \frac{9-(x-2)^2}{3}, x \geq 2$$

b) المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: جميع الأعداد الحقيقية.

$$h^{-1}(x) = \frac{x^3+15}{4}$$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

مجال $g(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -4؛ أيْ $\{x | x \geq -4\}$ ، أو الفترة $[-4, \infty)$.

ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -2 ؛ أيْ $\{y | y \geq -2\}$، أو الفترة $[-2, \infty)$.

$$g^{-1}(x) = \frac{(x+2)^2 - 12}{3}, x \geq -2$$

مثال 5: من الحياة

فيزياءُ: سقطَ جسمٌ ساكنٌ منَ ارتفاعِ 200 m عنْ سطحِ الأرضِ، فكانَ موقعُه s بالنسبةِ إلى الأرضِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً منْ سقوطِهِ يعطى بالاقتران $s(t) = 200 - 4.9t^2$. أُعبِّرُ عنْ الزمن t بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ الموقعِ s، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ الذي يكونُ عنده موقعُ الجسمِ 50 m فقطْ.

إنَّ التعبيرَ عنْ t بدلالةِ s يعني إيجادَ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $s(t)$. ولأنَّ الزمنَ t لا يكونُ سالبًا؛ فإنَّ مجالَ $s(t)$ هوَ $t \geq 0$، وفيهِ يكونُ $s(t)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، ولهُ اقترانٌ عكسيٌّ.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $s = 200 - 4.9t^2$

الخطوةُ 2: أجعلُ t موضوعَ القانونِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$s = 200 - 4.9t^2$
بطرحِ 200 منْ طرفَي المعادلةِ	$s - 200 = -4.9t^2$
بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على -4.9	$\frac{s-200}{-4.9} = t^2$
بضربِ البسطِ والمقامِ في -1	$\frac{200-s}{4.9} = t^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفيْنِ	$\sqrt{\frac{200-s}{4.9}} = t$

إذنْ، الاقترانُ الذي يُعبِّرُ عنِ الزمنِ بدلالةِ الموقعِ هوَ: $t(s) = \sqrt{\frac{200-s}{4.9}}$

بتعويضِ $s = 50$	$t(50) = \sqrt{\frac{200-50}{4.9}}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	≈ 5.53

إذنْ، يكونُ موقعُ الجسمِ 50 m بعدَ مُضِيِّ 5.53 ثوانٍ تقريبًا منْ لحظةِ سقوطِهِ.

أتحقق من فهمي

يرتبطُ محيطُ الرأسِ C للطفلِ بطولِهِ H (كلا القياسيْنِ بالسنتيمترِ) عنْ طريقِ الاقترانِ:

$$H(C) = 2.15C - 26.75$$ أنظر الهامش.

a) أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ محيطِ الرأسِ C بدلالةِ طولِ الطفلِ H.

b) أَجِدُ محيطَ رأسِ طفلٍ طولُهُ 66 cm

كتلةُ رأسِ الطفلِ حديثِ الولادةِ تساوي رُبْعَ كتلةِ جسمِهِ تقريبًا.

إرشادات:

- أُوضِّح للطلبة كيف يُوظَّف الاقتران العكسي في مسائل عملية بحيث يصبح المتغير المستقل تابعًا، والمتغير التابع مستقلًّا. فالاقتران الذي يربط محيط مربع بطول ضلعه هو $p(s) = 4s$، والاقتران العكسي له هو $s(p) = \frac{p}{4}$، فينتج طول الضلع بدلالة المحيط.
- أُوضِّح للطلبة أيضًا اختلاف خطوات إيجاد الاقتران العكسي في المسائل العملية عنها في الطريقة السابقة؛ إذ لا يُبدَّل المتغيران لأنَّهما مسميان لكميات معينة خاصة، ولا يستعمل رمز الاقتران العكسي.

مثال 5: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في خطوات حل المثال 5 الذي يشير إلى استعمال مفهوم الاقتران العكسي في موقف عملي حياتي.

مثال إضافي

- دفع مصطفى مبلغ 1385 دينارًا تكلفة لبضاعة اشتراها شاملة ضريبة المبيعات بنسبة 12%، ودفع مبلغ 13 دينارًا أجرة شحن:

a) أكتب اقترانًا يُعبِّر عن التكلفة C بدلالة ثمن البضاعة الأصلي p. $C(p) = 1.12p + 13$

b) أكتب اقترانًا يُعبِّر عن الثمن الأصلي بدلالة التكلفة. $p(C) = \frac{C-13}{1.12}$

c) ما الثمن الأصلي للبضاعة التي اشتراها مصطفى؟ 1225 دينارًا.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

a) $C(H) = \frac{H + 26.75}{2.15}$

b) $C \approx 43.1$ cm

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (14 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

إرشاد: أتحقَّق من إجابة السؤالين 7 و8 من دون إيجاد قاعدة الاقتران العكسي؛ إذ يجب أنْ يفهم الطلبة العلاقة بين الاقتران والاقتران العكسي له، فإذا كان $f(a) = b$ فإنَّ $f^{-1}(b) = a$ تلقائيًّا.

ملحوظة: هذان السؤالان مرتبطان بالسؤالين 5 و6 على التوالي.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (21 – 17) كتاب التمارين: (14 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 15, 16, (24 – 22) كتاب التمارين: (14 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (28 – 24) كتاب التمارين: (21 – 15)

تنويع التعليم

بعد حل السؤال 18، أطلب إلى الطلبة المتميزين البحث عن اقترانات أُخرى تكون عكسية لنفسها.

من الإجابات المحتملة:

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = \frac{a}{x}$ ، حيث a عدد حقيقي.

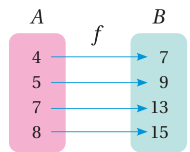
$f(x) = a - x$، حيث a عدد حقيقي، وغيره.

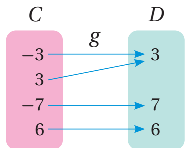
أتدرب وأحل المسائل (4 – 1) أنظر ملحق الإجابات.

أُحدِّدُ الاقترانَ الذي لهُ اقترانٌ عكسيٌّ في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ):

1) $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

2) $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$

3) 

4) 

إذا كانَ $f(x) = 3(\frac{x}{2} + 4)$، فأجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

5) $f(-2)$ 9

6) $f(4)$ 18

7) $f^{-1}(9)$ -2

8) $f^{-1}(18)$ 4

أجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

9) $f(x) = x + 7$ $f^{-1}(x) = x - 7$

10) $f(x) = 8x$ $f^{-1}(x) = \frac{x}{8}$

11) $f(x) = \frac{x}{2} + 6$ $f^{-1}(x) = 2(x-6)$

12) $f(x) = \frac{3x - 6}{5}$ $f^{-1}(x) = \frac{5x + 6}{3}$

13) $f(x) = 4x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$

14) $g(x) = 4 + \sqrt{6-3x}, x \leq 2$ $g^{-1}(x) = \frac{6-(x-4)^2}{3}, x \geq 4$

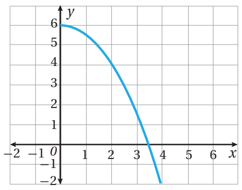
15) $g(x) = \frac{8-3x}{5x}, x \neq 0$
$g^{-1}(x) = \frac{8}{5x + 3}, x \neq \frac{-3}{5}$

16) $j(x) = (x-2)^2 + 4, x \geq 2$ $f^{-1}(x) = 2+\sqrt{x-4}, x \geq 4$

17) أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ:
$f(x) = (x+3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x - 2}, x \geq 2$ أنظر ملحق الإجابات.

18) أُثبِتُ أنَّ $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ لنفسِهِ. أنظر ملحق الإجابات.

19) **صناعةٌ:** إذا كانَ $C(x)$ يُمثِّلُ التكلفةَ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً منْ مصابيحِ الإنارةِ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $C^{-1}(23000)$؟
عدد المصابيح التي يُمكِن إنتاجها بمبلغ قدره 23000 دينار.



20 أرسمُ منحنى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f المجاورِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، مُعيِّنًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ f وَ f^{-1}. (28 – 20) أنظر ملحق الإجابات.

21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ:

$f(x) = x^2-2x+5\ ,\ -3 \le x \le 1$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

(**إرشادٌ:** أكتبُ $f(x)$ بصورةِ $(x+b)^2 + c$ باستعمالِ إكمالِ المربعِ).

22 **كيمياءُ:** في دورقٍ 100 mL منْ أحدِ المحاليلِ، منْها 25 mL منْ حامضِ الهيدروكلوريكِ. إذا أُضيفَ إلى الدورقِ n mL منْ محلولٍ مُشابِهٍ، تركيزُ الحامضِ فيهِ 60%، فإنَّ تركيزَ الحامضِ في الدورقِ يُعطى بالاقترانِ: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أُعبِّرُ عنْ n بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ التركيزِ C، ثمَّ أَجِدُ عددَ المليّلتراتِ n التي يجبُ إضافتُها ليصبحَ تركيزُ الحامضِ في الدورقِ 50%

23 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

24 تُعطى مِساحةُ السطحِ الكليةُ A للأسطوانةِ التي نصفُ قُطْرِ قاعدتِها r، وارتفاعُها 40 cm بالاقترانِ:

$A(r) = 2\pi r^2 + 80\ \pi r$. أُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ r بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ المِساحةِ A، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ قاعدةِ أسطوانةٍ مِساحةُ سطحِها الكليةُ $2000\ cm^2$

25 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)=\sqrt[3]{x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f^{-1}(x)$, $f(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

مهارات التفكير العليا

26 **تبريرٌ:** إذا كانَ للاقترانِ $f(x)$ اقترانٌ عكسيٌّ، وكانَ لهُ صفرٌ عندما $x = 4$، فما الذي يُمكِنُ استنتاجُهُ عنْ منحنى $f^{-1}(x)$؟

27 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ واحدٍ لواحدٍ والاقترانَ العكسيَّ لهُ، ثمَّ أُثبِتُ أنَّ كلًّا منْهُما اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.

28 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = x^2 + 3$، وَ $g(x) = 5x - 1$، وَ $x > 0$، فأَحُلُّ المعادلةَ: $(f \circ g)(x) = g^{-1}(34)$.

إرشادات:

- في معرض مناقشة الطلبة في السؤال 20، أسألهم:
  » كيف يمكن رسم منحنى الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران؟
- أستمع لإجابات الطلبة. وفي حال لم يتوصّلوا إلى إجابة صحيحة، فأُذكِّرهم بالعلاقة بين منحنى الاقتران والاقتران العكسي، وربط ذلك بالمثال 1، وتمثيل العلاقة والعلاقة العكسية.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (28 – 26).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 28 (**تحد**)، يتعيَّن على الطلبة إيجاد الاقتران المُركَّب والاقتران العكسي للاقتران $g(x)$، ثم القيمة $g^{-1}(34)$، ثم مساواتهما، وحل المعادلة التربيعية الناتجة، والانتباه أنَّ x موجبة. أسألهم:

» كيف يمكن إيجاد $g^{-1}(34)$ من دون إيجاد الاقتران العكسي؟

5 الإثراء

- أطرح على الطلبة المسألة الآتية:
  » إذا كان $f(x) = 5-3x$، وكان $g(x)=\frac{2x-3}{7}$،
  فأجد كلًّا ممّا يأتي، مُدوِّنًا استنتاجي:
  $(f \circ g)(x),\ (f \circ g)^{-1}(x),\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x),\ (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

تعليمات المشروع:

- أُوجِّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوتين 4 و5 من المشروع.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أنَّ عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب أنْ يكتب على ورقة اقترانًا والاقتران العكسي له، واقترانًا ليس له اقتران عكسي، واقترانًا عكسيًّا لنفسه، ثم يُسلِّمني الورقة عند الخروج من الصف.

الدرس 5

نتاجات الدرس

- كتابة الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها.
- كتابة حدود متتالية إذا عُلِم حدها العام.
- استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية.
- حل مسائل حياتية عن المتتاليات.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إكمال متتاليات خطية معطاة بعض حدودها.
- التعبير عن الحد العام لمتتاليات خطية بمقدار جبري.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

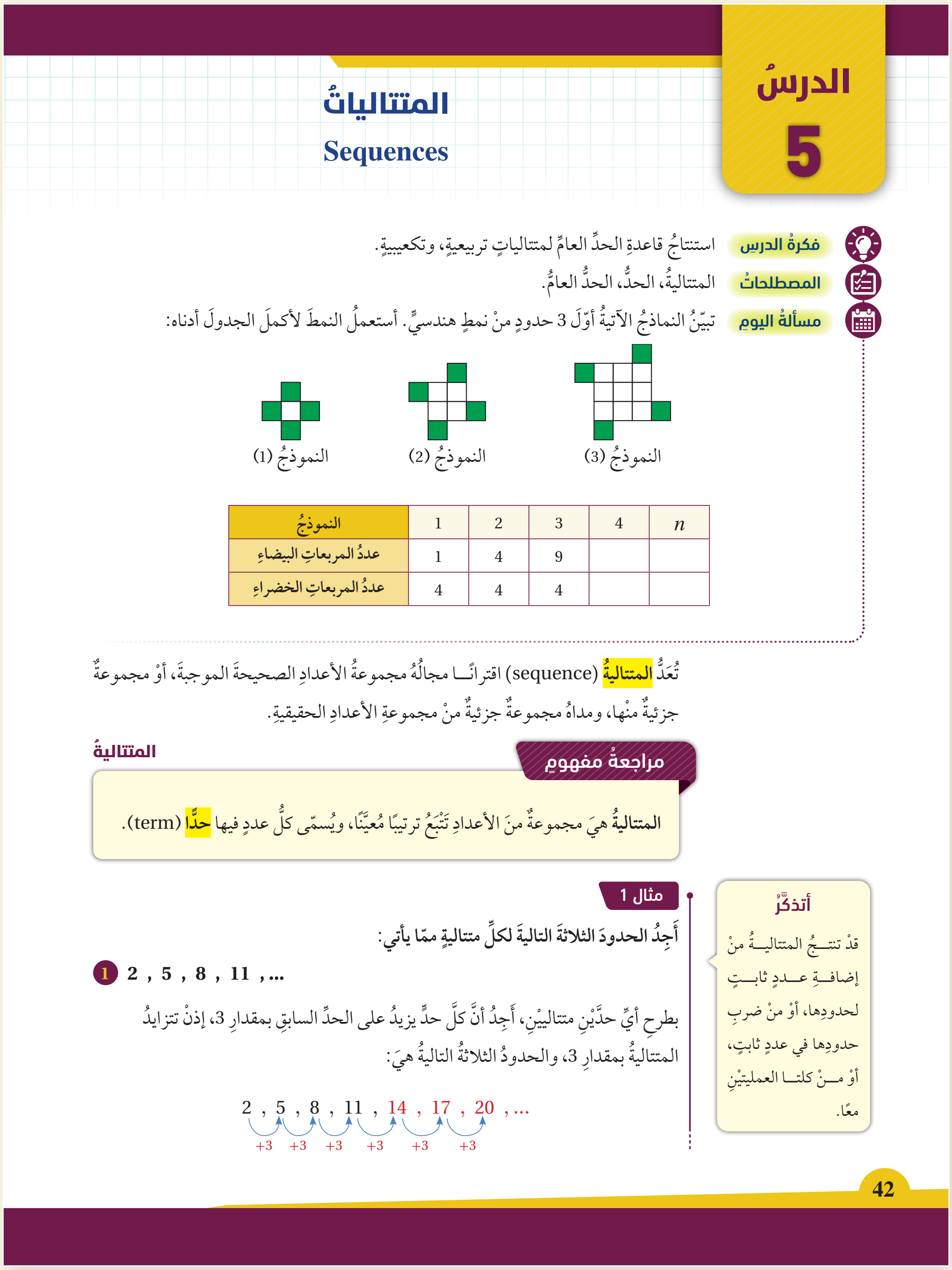
- أكتب على اللوح المتتاليات الآتية:

1) 1, 5, 9, 13, ...

2) 20, 17, 14, 11, ...

3) 6, 12, 18, 24, ...

- أطلب إلى الطلبة كتابة الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية.
- أطلب إلى الطلبة كتابة الحد العام لكل متتالية.



الدرسُ 5

المتتالياتُ
Sequences

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ.

المصطلحاتُ المتتاليةُ، الحدُّ، الحدُّ العامُّ.

مسألةُ اليومِ تبيّنُ النماذجُ الآتيةُ أوّلَ 3 حدودٍ منْ نمطٍ هندسيٍّ. أستعملُ النمطَ لأكملَ الجدولَ أدناه:

النموذجُ (3) النموذجُ (2) النموذجُ (1)

النموذجُ	1	2	3	4	n
عددُ المربعاتِ البيضاءِ	1	4	9		
عددُ المربعاتِ الخضراءِ	4	4	4		

تُعَدُّ **المتتاليةُ** (sequence) اقترانًا مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةَ الموجبةَ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها، ومداهُ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

المتتاليةُ

مراجعةُ مفهومٍ

المتتاليةُ هيَ مجموعةٌ منَ الأعدادِ تَتْبَعُ ترتيبًا مُعيَّنًا، ويُسمّى كلُّ عددٍ فيها **حدًّا** (term).

أتذكَّرُ

قدْ تنتجُ المتتاليةُ منْ إضافةِ عددٍ ثابتٍ لحدودِها، أوْ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، أوْ منْ كلتا العمليتيْنِ معًا.

مثال 1

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 **2 , 5 , 8 , 11 , ...**

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ السابقِ بمقدارِ 3، إذنْ تتزايدُ المتتاليةُ بمقدارِ 3، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$2 \underset{+3}{,} 5 \underset{+3}{,} 8 \underset{+3}{,} 11 \underset{+3}{,} 14 \underset{+3}{,} 17 \underset{+3}{,} 20 , \ldots$$

ملاحظاتي

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » كيف يمكن التعبير عن تطور النماذج في النمط الهندسي؟ بصيغة جبرية.
  » هل يُمثِّل تطور نماذج النمط الهندسي متتالية؟ لماذا؟ نعم، لأنَّها تتبع ترتيب ما.
  » أيكم يُكمِل الجدول بعدد المربعات البيضاء والخضراء؟ $4, 16$
  » أيكم يستطيع كتابة الحد العام للمربعات البيضاء والخضراء؟ $4, n^2$
  » هل هذه المتتالية خطية، أم تربيعية، أم تكعيبية، أم غير ذلك؟ تربيعية.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم عن طريق توجيه أسئلة، مثل:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » من يتّفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزِّز الإجابات الصحيحة.

إرشاد: قد لا يتمكَّن الطلبة من إيجاد الحد العام، ولكن سؤالهم عنها سيثير فضولهم عن موضوع الدرس.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة أنَّ المتتالية تتكوَّن من حدود، لكلٍّ منها رتبة تُمثِّل ترتيب الحد في المتتالية.
- أُخبِر الطلبة أنَّ المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغة العربية واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكن وصف المتتالية وكتابة الحدود التالية عن طريق الحدود الأولى للمتتالية.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ المتتاليات الثلاث الأولى قد درسوها سابقًا.
- أكتب حدود المتتالية في الفرع 4 من المثال 1 على اللوح، ثم أُحلِّلها إلى عواملها الأولية.
- أطلب إلى أحد الطلبة أنْ يكتب كل حد من حدود المتتالية في صورة $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

تنويع التعليم

قد يؤدي تنظيم حدود المتتالية في جدول إلى فهم الطلبة الموضوع بصورة أفضل، وبخاصة الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط.

2 $3 , 6 , 12 , 24 , \dots$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ الحصولَ على أيِّ حدٍّ يكونُ بضربِ الحدِّ السابقِ لهُ في 2، إذنْ تتضاعفُ المتتاليةُ بمقدارِ 2، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$3 \underset{\times 2}{,} 6 \underset{\times 2}{,} 12 \underset{\times 2}{,} 24 \underset{\times 2}{,} 48 \underset{\times 2}{,} 96 \underset{\times 2}{,} 192 , \dots$

3 $80 , 73 , 66 , 59 , \dots$

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ ينقصُ عنِ الحدِّ السابقِ بمقدارِ 7، إذنْ تتناقصُ المتتاليةُ بمقدارِ 7، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$80 \underset{-7}{,} 73 \underset{-7}{,} 66 \underset{-7}{,} 59 \underset{-7}{,} 52 \underset{-7}{,} 45 \underset{-7}{,} 38 , \dots$

4 $\frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{81} , \dots$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يساوي $\frac{1}{3}$ مضروبًا في الحدِّ السابقِ لهُ، إذنْ تتضاءلُ المتتاليةُ بمقدارِ $\frac{1}{3}$، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$\frac{1}{3} \underset{\times\frac{1}{3}}{,} \frac{1}{9} \underset{\times\frac{1}{3}}{,} \frac{1}{27} \underset{\times\frac{1}{3}}{,} \frac{1}{81} \underset{\times\frac{1}{3}}{,} \frac{1}{243} \underset{\times\frac{1}{3}}{,} \frac{1}{729} \underset{\times\frac{1}{3}}{,} \frac{1}{2187} , \dots$

أتذكَّرُ

يُمكِنُ التعبيرُ عنِ المتتاليةِ:

$\frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{81} , \dots$

في صورةِ:

$\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$

$\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$

$\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$

$\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $\frac{5}{2} , \frac{7}{2} , \frac{9}{2} , \frac{11}{2} , \dots$

b) $5 , 10 , 20 , 40 , \dots$

c) $150 , 141 , 132 , 123 , \dots$

d) $400, 200, 100, 50, \dots$

مثال إضافي

- أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

1) $\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \dots$

2) $0.1 , 0.01 , 0.001 , 0.0001 \dots$

الحل:

1) $\frac{1}{32} , \frac{1}{64} , \frac{1}{128} , \dots$

2) $0.00001 , 0.000001 , 0.0000001 , \dots$

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) $\frac{13}{2} , \frac{15}{2} , \frac{17}{2} , \dots$

b) $80 , 160 , 320 , \dots$

c) $114 , 105 , 96 , \dots$

d) $25 , 12.5 , 6.25 , \dots$

> **أتذكَّرُ**
>
> رتبةُ الحدِّ هيَ ترتيبُ موقعِهِ بالنسبةِ إلى الحدودِ الأُخرى في المتتاليةِ.

تعلَّمْتُ في صفوفٍ سابقةٍ **الحدَّ العامَّ** (n[th] term) لمتتاليةٍ، الذي يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ أيِّ حدٍّ ورُتبتِهِ (n)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $T(n)$. يُسهِّلُ الحدُّ العامُّ إيجادَ أيِّ حدٍّ في المتتاليةِ باستعمالِ رُتبتِهِ، مثلِ الحدِّ الذي رُتبتُهُ خمسونَ مثلًا. ويُمكِنُ تصنيفُ المتتاليةِ اعتمادًا على حدِّها العامِّ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وغيرِ ذلكَ.

مثال 2

أُبيِّنُ إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثمَّ أُصنِّفُ المتتالياتِ إلى خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ في كلٍّ منْها:

1 $4, 7, 10, 13, \dots, 3n+1$

> **أتذكَّرُ**
>
> ناتجُ تعويضِ رتبةِ أيِّ حدٍّ في صيغةِ الحدِّ العامِّ يُساوي الحدَّ نفسَهُ.

أُعوِّضُ رُتبَ بعضِ الحدودِ في المقدارِ الجبريِّ المُعطى للتأكُّدِ أنَّها تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$\times 3$	3	$+1$	4
$n=2$	$\times 3$	6	$+1$	7
$n=3$	$\times 3$	9	$+1$	10
$n=4$	$\times 3$	12	$+1$	13

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ خطِّيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ خطِّيٌّ.

لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ، أُعوِّضُ $n = 75$ في قاعدةِ الحدِّ العامِّ:

$$3(75) + 1 = 226$$

2 $4, 7, 12, 19, \dots, n^2+3$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ الحدودَ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$(1)^2$	1	$+3$	4
$n=2$	$(2)^2$	4	$+3$	7
$n=3$	$(3)^2$	9	$+3$	12
$n=4$	$(4)^2$	16	$+3$	19

مثال 2

- أُخبِرِ الطلبة أنَّه يمكن إكمال حدود المتتالية إذا عُلِم حدها العام الذي يربط كل حد برتبته.
- أُوضِّح للطلبة كيف يمكن إيجاد الحد من رتبته إذا عُلِمت قاعدة الحد العام للمتتالية، مُقدِّمًا مزيدًا من الأمثلة؛ للتأكُّد أنَّ الطلبة يمتلكون المهارة المطلوبة.
- أُخبِر الطلبة بأهمية وجود علاقة تربط بين الحد ورتبته؛ وذلك لإيجاد أيِّ حد من دون حاجة إلى إيجاد الحدود جميعها، وصولًا إلى الحد المطلوب.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط في التعويض بالحد العام للمتتالية بدءًا بالصفر؛ لذا أُخبِرهم أنَّ المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، أو مجموعة جزئية منها.

إرشاد: أُرشِد الطلبة إلى استخدام الآلة الحاسبة إذا لزم الأمر.

مثال إضافي

- أُبيِّن للطلبة إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب المتتالية الآتية يُمثِّل حدًّا عامًّا لها أم لا، ثم أُصنِّف المتتالية إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، ثم أجد الحد الخامس والأربعين:

$$5 , 5 , 5 , 5 , \dots \; T(n) = 5$$

الحل:

1) $T(45) = 5$ الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي خطية، وتُعَدُّ اقترانًا ثابتًا.

أخطاء مفاهيمية:

- قد يُخطِئ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أحيانًا عند إيجاد الحد العاشر – مثلًا– بمضاعفة الحد الخامس؛ لذا أُصحِّح لهم ذلك.

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تربيعيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تربيعيٌّ.

أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^2 + 3 = 5628$$

3 $\mathbf{2 , 9 , 28 , 65 , \dots , n^3 + 1}$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ جميعَ الحدودِ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$(1)^3$	1	$+1$	2
$n=2$	$(2)^3$	8	$+1$	9
$n=3$	$(3)^3$	27	$+1$	28
$n=4$	$(4)^3$	64	$+1$	65

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تكعيبيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تكعيبيٌّ. أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^3 + 1 = 421876$$

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أُبيِّنُ إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثمَّ أُصنِّفُ المتتالياتِ إلى خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ في كلٍّ منْها:

a) $1 , 3 , 5 , 7, \dots , 2n-1$

b) $0 , 3 , 8 , 15 , \dots , n^2 - 1$

c) $1.5 , 8.5 , 27.5 , 64.5 , \dots , n^3 + 0.5$

يُمكِنُ إيجادُ الحدِّ العامِّ للمتتالياتِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ والتكعيبيةِ بملاحظةِ العلاقةِ بينَ الحدودِ ورُتبِها.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية خطية.

b) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تربيعية.

c) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تكعيبية.

مثال 3

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 $5 , 12 , 19 , 26 , 33 , \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتزايدُ بمقدارِ 7:

$$5 \xrightarrow{+7} 12 \xrightarrow{+7} 19 \xrightarrow{+7} 26 \xrightarrow{+7} 33 , \ldots$$

يُمكِنُ مبدئيًّا التعبيرُ عنِ المتتاليةِ بالحدِّ $7n$؛ لأنَّ تزايدَ حدودِ المتتاليةِ بمقدارِ 7 في كلِّ مرّةٍ يُذكِّرُني بحقائقِ ضربِ العددِ 7، ولكنْ عندَ تعويضِ $n = 1$ ينتجُ العددُ 7، وهوَ أكبرُ منَ الحدِّ الأولِ بـِ 2؛ لذا أطرحُ العددَ 2 منْ $7n$ ، وبذلكَ يصبحُ الحدُّ العامُّ: $T(n) = 7n - 2$.

2 $5 , 8 , 13 , 20 , 29 , \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ غيرُ ثابتٍ. إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها. أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ.

أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

مربعاتُ رتبِ الحدودِ	n^2	25 …	16	9	4	1
الحدودُ	?	29 …	20	13	8	5

بالنظرِ إلى ناتجِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ، أُلاحِظُ أنَّهُ إذا أُضيفَ 4 إلى مُربَّعِ رُتبةِ الحدِّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ. وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n) = n^2 + 4$

3 $0 , 7 , 26 , 63 , 124 , \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ غيرُ ثابتٍ.

إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها.

أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، وأنَّها غيرُ ناتجةٍ منْ تربيعِ كلِّ حدٍّ. أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تكعيبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

مربعاتُ رتبِ الحدودِ	n^3	125 …	64	27	8	1
الحدودُ	?	124 …	63	26	7	0

46

إرشاد:

قد يتمكَّن بعض الطلبة من التعبير عن الحد العام لفظيًّا، من دون القدرة على التعبير عنه بالرموز؛ لذا أُساعِد هؤلاء الطلبة على إتقان مهارة التعبير عن المقادير الجبرية باستعمال الرموز. فمثلًا، ثلاثة أضعاف عدد مضاف إليه 5 هي $3x + 5$

مثال 3

- أُذكِّر الطلبة بأنَّ قاعدة الحد العام للمتتالية مذكورة في المثال 2، وأنَّ هذا المثال يشرح كيفية إيجاد قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3، مُوضِّحًا لهم كيفية إيجاد الحد العام باستخدام المقادير الجبرية، وذلك باستخدام المتغير n للدلالة على رتبة الحد، والرمز $T(n)$ للدلالة على الحد نفسه.
- أكتب على اللوح قاعدة الحد العام لكل فروع المثال 3، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد أول أربعة حدود للمتتالية الأولى، بتعويض الأعداد 1,2,3,4، ثم أطلب إلى ثلاثة طلبة آخرين إيجاد أول أربعة حدود للمتتاليات الثانية، والثالثة؛ للتأكُّد أنَّ كل حد عام يُمثِّل متتاليته.
- أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ حتى يتقنوا كتابة الحد العام للمتتالية باستخدام المقادير الجبرية، وإيجاد الحدود المطلوبة بالتعويض في القاعدة.
- أُوجِّه الطلبة في هذه الأثناء، مُقدِّمًا لهم التغذية الراجعة المناسبة.

مثال إضافي

- أجد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

1) $5 , 9 , 13 , 17 , \ldots$

2) $3 , 8 , 15 , 24 \ldots$

3) $0 , 6 , 24 , 60 \ldots$

الحل:

1) $4n + 1$

2) $n^2 + 2n$

3) $n^3 - n$

أُلاحِظُ أنَّهُ عندَ طرحِ 1 منْ مكعبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ.

وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n) = n^3 - 1$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $8 , 15 , 22 , 29 , 36 , \dots$

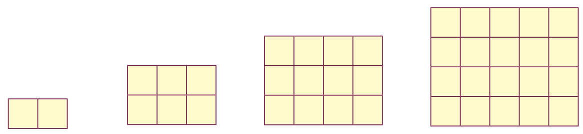
b) $4 , 7 , 12 , 19 , 28 , \dots$

c) $-1, 6, 25, 62, 123, \dots$

تظهرُ المتتالياتُ أيضًا في كثيرٍ منَ الأنماطِ الهندسيةِ.

مثال 4

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ المُربَّعاتِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



النموذجُ (4). النموذجُ (3). النموذجُ (2). النموذجُ (1).

بالنظرِ إلى النمطِ، أُلاحِظُ أنَّ عددَ المُربَّعاتِ يُشكِّلُ المتتاليةَ الآتيةَ: ... ,2, 6, 12, 20

بالنظرِ إلى الحدودِ الأولى منَ المتتاليةِ، أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ فيها يساوي حاصلَ ضربِ عرضِ المُستطيلِ في طولِهِ:

$$\underset{1\times2}{2}, \underset{2\times3}{6}, \underset{3\times4}{12}, \underset{4\times5}{20}, \dots$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = n(n+1) = n^2 + n$

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ أعوادِ الثقابِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.

النموذجُ (4). النموذجُ (3). النموذجُ (2). النموذجُ (1).

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

a) $7n + 1$ **b)** $n^2 + 3$ **c)** $n^3 - 2$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

$T(n) = 2n + 1$

إرشادات:

- يُعَدُّ إيجاد الحد العام من أصعب التحديات التي يواجهها الطلبة؛ لـذا أكتب خطوات الحل على نحوٍ مرتب ومتسلسل ومفهوم.
- أجعـل الطلبــة يعتـادون على تحليــل حدود المتتاليــات إلى العوامل الأوليــة بوصف ذلك خطوة أُولى لإيجاد الحد العام.

مثال 4

- أُناقِش الطلبة في حل المثـال 4 على اللوح، وأتدرَّج معهم في إيجــاد قاعدة الحــد العــام للمتتالية التي يُشكِّلها عدد المربعات في النمط الهندسي الوارد في المثال، وذلك باتباع ما يأتي:
  - » تحليل الحدود إلى العوامل الأولية.
  - » ملاحظة ناتـج ضرب رتبة الحد نفســه في رتبة الحد الذي يليه.

إرشـاد: أُوضِّـح للطلبــة أنــه يمكــن حل المثال 4 بطريقة أُخرى، وذلــك بتمثيل كل حد بأنه عــدد المربعات الأفقية مضروبًا فــي عدد المربعات العمودية.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1) $6, 11, 16, 21, \ldots$
$26, 31, 36$

2) $-1, 6, 13, 20, \ldots$
$27, 34, 41$

3) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$
$5.5, 6.5, 7.5$

4) $-8, -7, -6, -5, \ldots$
$-4, -3, -2$

5) $-2, 1, 6, 13, \ldots$
$22, 33, 46$

6) $4, 16, 36, 64, \ldots$
$100, 144, 196$

7) $3, 9, 27, 81, \ldots$
$243, 729, 2187$

8) $3, 8, 18, 38, \ldots$
$78.158, 318$

9) $128, 64, 32, 16, \ldots$
$8, 4, 2$

أَجِدُ أولَ خمسةِ حدودٍ لكلِّ متتاليةٍ مُعطى حدُّها العامُّ في ما يأتي، ثمَّ أُصنِّفُها إلى متتاليةٍ خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ:

10) $n + 3$
خطية : 4,5,6,7,8.

11) $3n - 1$
خطية : 2,5,8,11,14.

12) $4n + 5$
خطية : 9,13,17,21,25.

13) $n^2 - 1$
تربيعية : 0, 3, 8, 15, 24.

14) $n^2 + 2$
تربيعية : 3,6,11,18,27.

15) $200 - n^2$
تربيعية 199,196,191,184,175.

16) $n^3 + 1$
تكعيبية : 2,9,28,65,126.

17) $\frac{n^3}{2}$
تكعيبية : 0.5,4,13.5,32,62.5.

18) $3n^3 - 1$
تكعيبية : 2,23,80,191,374.

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

19) $21, 24, 27, 30, 33, \ldots$
$T(n) = 3n + 18$

20) $1, 9, 17, 25, 33, \ldots$
$T(n) = 8n - 7$

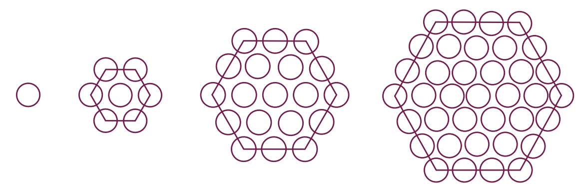
21) $10, 13, 18, 25, 34, \ldots$
$T(n) = n^2 + 9$

22) $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \ldots$
$T(n) = 0.5n^2 - 3$

23) $6, 13, 32, 69, 130, \ldots$
$T(n) = n^3 + 5$

24) $1, 15, 53, 127, 249, \ldots$
$T(n) = 2n^3 - 1$

25) أجِدُ عددَ الدوائرِ في النموذجِ الخامسِ من النمطِ الهندسيِّ الآتي:



(1) (2) (3) (4)

الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = 3n^2 - 3n + 1$

عدد دوائر النموذج الخامس هو 61

48

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (20 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (28 – 26), (24 – 21) كتاب التمارين: (12 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (31 – 25) كتاب التمارين: (12 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (33 – 27) كتاب التمارين: (17 – 12)

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل: (33 – 31).
- أرصـد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

5 الإثراء

- أُوجّه الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمتتاليات، مثل المثال الوارد في بند الاستكشاف بداية الدرس.
- أُوجِّـه الطلبة إلى البحث عن أسـماء بعـض المتتاليات المشهورة، وذكر تطبيق حياتي عليها، مثل متتالية فيبوناشي $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$؛ إذ يُعَـدُّ عـدد الحلزونات الظاهرة في أثنـاء نمو زهرة الكاميليا من أفضل التطبيقات على هذه المتتالية.
- أُنبِّه الطلبة على ضرورة توثيق المعلومة دائمًا.

تعليمات المشروع:

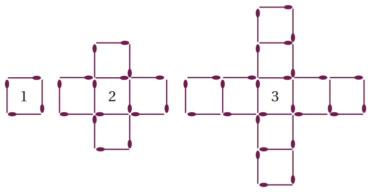
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسـات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصر كافّة متوافرة يوم العرض.

6 الختام

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما مجال المتتاليات؟
  - » ما مداها؟
  - » ما العلاقة بين المتتاليات والاقترانات؟
  - » أيُّهما تُعَدُّ حالة خاصـة من الأُخرى: الاقترانات من المتتاليـات أم المتتاليات مـن الاقترانات؟ لماذا؟

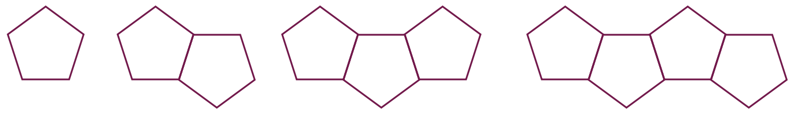
26 في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددَ أعوادِ الثقابِ في نماذجِهِ متتاليةً، أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.

$T(n) = 12n - 8$



27 أكملُ الجدولَ الآتي بالاعتمادِ على نماذجِ النمطِ الهندسيِّ أدناهُ: (30 – 27) أنظر الهامش.

النموذجُ	(1)	(2)	(3)	(4)
المحيطُ	5	8		



(1) (2) (3) (4)

28 أجدُ محيطَ نموذجٍ يحتوي n مِنَ الأشكالِ الخماسيّةِ.

29 أجدُ محيطَ نموذجٍ يحتوي 50 شكلًا خُماسيًّا.

30 ما أكبرُ عددٍ من الأشكالِ الخُماسيّةِ التي يمكنُ استعمالُها لعملِ نموذجٍ محيطُهُ أقلُّ منْ 1000cm؟

مهارات التفكير العليا

31 **تحـدٍّ**: إذا كانَ الحدُّ العامُّ للمتتاليةِ: $6, 16, 30, 48, 70, \ldots$ هوَ: $T(n) = an + bn^2$، حيثُ a, b عددانِ حقيقيانِ، فأَجِدْ قيمَ a, b. $a = 4, b = 2$

32 **تحدٍّ**: أَجِدُ أولَ ثلاثةِ حدودٍ لمتتاليةٍ خطيّةٍ، إذا كانَ مجموعُ هذهِ الحدودِ 12، وحاصلُ ضربِها 28 $1, 4, 7$

33 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أَجِدُ ثلاثَ متتالياتٍ تبدأُ بـ 1، بحيثُ تكونُ الأولى خطِّيةً، والثانيةُ تربيعيةً، والثالثةُ تكعيبيةً.

خطية $T(n) = 2n - 1$ ، تربيعية $T(n) = 2n^2 - 1$ ، تكعيبية $T(n) = 2n^3 - 1$

تُقبَل أي ثلاث متتاليات تبدأ بالعدد 1، وتكون الأولى خطية، والثانية تربيعية، والثالثة تكعيبية.

إجابات الأسئلة:

27)

النموذج	(1)	(2)	(3)	(4)
المحيط	5	8	11	14

28) الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = 3n + 2$

محيط النموذج الذي يحوي n من الأشكال الخماسية هو: $(3n+2)$ cm،

حيث طول ضلع الخماسي 1 cm

29) محيط النموذج الذي يحوي 50 شكلًا خماسيًّا هو:

$3(50) + 2 = 152$ cm

30) $3n + 2 = 1000 \Longrightarrow 3n = 998 \Longrightarrow n = 332.3$

إذن، أكبر عدد من الأشكال الخماسية المستعملة في نموذج محيطه أقل من 1000 cm هو 332 شكلًا.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 الحدُّ العامُّ (T_n) للمتتاليةِ: $11, 20, 35, 56, \ldots$ هوَ:

a) $T_n = n^2 + 6n + 4$ b) $T_n = 3n^2 + 8$

c) $T_n = 2n^2 + 9$ d) $T_n = n^2 + 4n + 6$

2 إذا كانَ $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$، فإنَّ قيمة $f(-2)$ هيَ:

a) -22 b) -15

c) 9 d) 29

3 إذا كانَ $f(x)=2x^3-4x^2+6,\ g(x)=5x^2-7x+4$، فإنَّ ناتجَ $f(x)-g(x)$ هوَ:

a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$

b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$

c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$

d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4 إذا كانَ $g(x)$ كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ السادسةِ، وَ $h(x)$ كثيــرَ حدودٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، فإنَّ درجةَ ناتجِ قســمةِ $g(x)$ على $h(x)$ هيَ:

a) الأولى. b) الثالثةُ.

c) الرابعةُ. d) الثامنةُ.

5 إذا كانَ $f(x) = 3x - 5$, $h(x) = x^2 - 2$، فــإنَّ قيمة $(h \circ f)(3)$ هيَ:

a) 4 b) 7

c) 14 d) 16

6 إذا كانَ $f(x) = 8 - 2x$، فإنَّ قيمة $f^{-1}(4)$ هيَ:

a) 0 b) -6 c) -2 d) 2

7 خطُّ التقاربِ الأفقــيِّ للاقترانِ $r(x) = \frac{3}{4-3x} + 7$ هوَ:

a) $y = 0$ b) $y = 7$

c) $y = 4$ d) $y = -1$

8 الحدُّ العاشرُ في المتتاليةِ $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ هوَ:

a) 90 b) 95

c) 97 d) 99

9 مجالُ الاقترانِ $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x-10}$ هوَ:

a) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$

b) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 2\}$

c) $\{x \mid x \neq 5\}$

d) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 5\}$

10 إذا كانَ $f(x)=2x^2-4x+1,\ g(x)=6x^3-7x+3$، فأَجِدُ $x^2f(x) + g(x)$ $2x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 3$

11 إذا كانَ $h(x) = 3x^2 - 4x,\ j(x) = 4x^3 + 2x + 5$، فأَجِدُ $h(x) \cdot j(x)$ $12x^5 - 16x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 20x$

12 أَقْسِمُ $(8x^3 + 12x - 5)$ على $(2x + 3)$

$8x^3 + 12x - 5 = 4x^2 - 6x + 15 + \frac{-50}{2x+3}$

13 أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{4}{2-x}$، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ، ومداه.

أنظر الهامش.

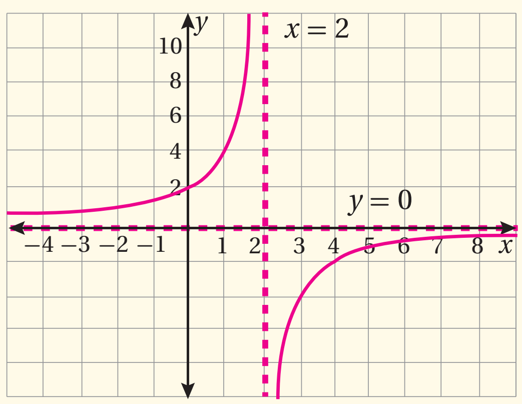
اختبار نهاية الوحدة:

- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلــى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأســئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أختار بعض الأســئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتها في اليوم التالي.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأسئلة (26 – 23) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

إجابات الأسئلة:

13) لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = 2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$.

x	-1	0	1	1.5	2.5	3	4	5
$y = f(x)$	1.33	2	4	8	-8	-4	-2	-1.33



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2؛ أيْ $\{x | x \neq 2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أيْ $\{y | y \neq 0\}$.

تدريب على الاختبارات الدولية

يتقدَّم طلبة الصف الرابع والصف الثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS) كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

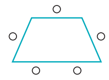
يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة (PISA

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخصُّ الرياضيات، فإنَّ المعرفة الرياضية - وَفق هذا البرنامج - يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمَّن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها، وتسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء أنظمتها التربوية، وتُعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأنَّ الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ مطلع تسعينيات القرن العشرين الميلادي؛ لذا يتعيَّن عليك عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة تحفيز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين الاختبارات المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

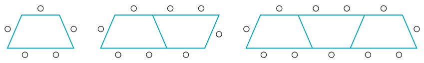
إرشاد: قد يحل بعض الطلبة السؤال 24 بصورة مختلفة، وذلك بملاحظة أنَّ عدد البطاقات كلها يساوي $(n+2)^2$، وأنَّ عدد البطاقات الزرقاء يساوي n^2، فيكون عدد البطاقات الحمراء هو $(n-2)^2 - n^2$؛ لذلك أُوضِّح للطلبة أنَّ هاتين الصيغتين متكافئتان، وأنَّه يمكن التفكير في حل أيِّ مسألة بطرائق مختلفة متعددة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

يوجدُ في قاعةِ طعامِ إحدى المدارسِ طاولاتٌ على شكلِ شبهِ منحرفٍ. وكلُّ طاولةٍ تتَّسِعُ لخمسةِ طلبةٍ كما في الشكلِ الآتي:



لاحظَ مُشرفُ القاعةِ أنَّ عددَ الطلبةِ يتغيَّرُ تبعًا لعددِ الطاولاتِ المُلاصِقِ بعضُها لبعضٍ كما في الشكلِ الآتي:



14 أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ الآتي:

عددُ الطاولاتِ المُتلاصِقةِ	1	2	3	4	5
عددُ الطلبةِ	5	8	11	14	17

15 أَجِدُ الحدَّ العامَّ. $T(n) = 3n + 2$

16 ما عددُ الطلبةِ الذينَ يُمكِنُهُمُ الجلوسُ حولَ 13طاولةً مُتلاصِقةً؟ 41

17 تنوي إدارةُ المدرسةِ عملَ حفلٍ لـ 200 طالبٍ. كمْ طاولةً مُتلاصِقةً تَلزمُ لذلكَ؟ 66 طاولة.

إذا كانَ $f(x) = 4x - 3,\ g(x) = \frac{1}{x+1} + 2,\ x \neq -1$، فأَجِدُ: (18 – 21) أنظر الهامش.

18 $g^{-1}(x)$

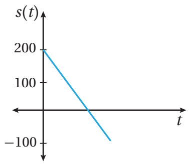
19 $(f \circ f)(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{4-x}$، مُحدِّدًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ: $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

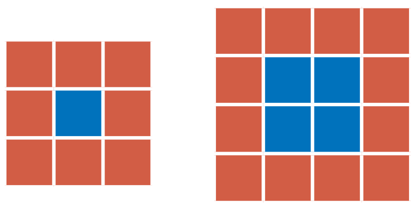
يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموقعِ $s(t)$ لجسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s الموقعُ بالمترِ و t الزمنُ بالثانيةِ.



22 إذا وصلَ الجسمُ إلى الموقعِ $s = -100$ بعدَ 6 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِهِ، فأكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $s(t)$.
$s(t) = -50t + 200$

23 ما الزمنُ الذي استغرَقَهُ الجسمُ منذُ بدءِ حركتِهِ حتّى وصلَ إلى نقطةِ الأصلِ؟ 4 ثوانٍ.

رتَّبَتْ فدوى بطاقاتٍ حمراءَ وزرقاءَ كما في الشكليْنِ الآتيينِ:



الشكلُ (2). الشكلُ (1).

24 إذا استمرَّ هذا النمطُ، فما عددُ البطاقاتِ الحمراءِ في الشكلِ n؟ عدد البطاقات الحمراء في الشكل رقم n هو: $4n+4$

25 ما عددُ البطاقاتِ الزرقاءِ فيهِ؟ عدد البطاقات الزرقاء في الشكل نفسه هو: n^2

26 استعملَتْ فدوى 64 بطاقةً لتكوينِ أحدِ أشكالِ هذا النمطِ. كمْ عددُ كلٍّ منَ البطاقاتِ الحمراءِ والزرقاءِ المُستعمَلةِ؟ عدد البطاقات الزرقاء هو: 36
عدد البطاقات الحمراء هو: 28

51

إجابات الأسئلة:

18) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x-2} - 1,\ x \neq 2$

19) $(f \circ f)(x) = 16x - 15$

20) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{4x-2} + 2$

21) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4,\ x \geq 0$

مجال $f(x)$ هو $x \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$، ومداه هو $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$.

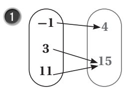
مجال $f^{-1}(x)$ هو $x \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$، ومداه هو $y \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$.

كتاب التمارين

أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

تعرّفُ العَلاقةِ، وتحديدُ ما إذا كانَتِ اقترانًا أمْ لا (الدرسُ 1)

أُحَدِّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تمثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

1) 

المجال : $\{-1, 3, 11\}$؛ المدى: $\{4, 15\}$؛ تمثِّل اقترانًا.

2)

x	5	2	−7	2	5
y	4	8	9	12	14

المجال: $\{-7, 2, 5\}$؛ المدى: $\{4, 8, 9, 12, 14\}$؛ ليست اقترانًا.

3) $\{(-2, 5), (0, 2), (4, 5), (5, 6)\}$

المجال: $\{-2, 0, 4, 5\}$؛ المدى: $\{2, 5, 6\}$؛ تمثِّل اقترانًا.

4) $\{(6, 5), (4, 3), (6, 4), (5, 8)\}$

المجال: $\{4, 5, 6\}$؛ المدى: $\{3, 4, 5, 8\}$؛ ليست اقترانًا.

5) $\{(13, 5), (-4, 12), (6, 0), (13, 10)\}$

المجال: $\{-4, 6, 13\}$؛ المدى: $\{0, 5, 10, 12\}$؛ ليست اقترانًا.

6) $\{(9.2, 7), (9.4, 11), (9.5, 9.5), (9.8, 8)\}$

المجال: $\{9.2, 9.4, 9.5, 9.8\}$؛ المدى: $\{7, 8, 9.5, 11\}$؛ تمثِّل اقترانًا.

7)

x	−3	−1	0	1	2
y	3	−4	5	−2	3

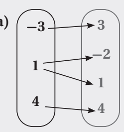
المجال: $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$؛ المدى: $\{-4, -2, 3, 5\}$؛ تمثِّل اقترانًا.

8)

x	5	2	3	6	8
y	4	4	4	4	4

المجال: $\{2, 3, 5, 6, 8\}$؛ المدى: $\{4\}$؛ تمثِّل اقترانًا.

مثالٌ: أُحَدِّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تمثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

a) 

المجالُ: $\{-3, 1, 4\}$ **المَدى:** $\{3, -2, 1, 4\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ العنصرِ 1 في المجالِ بالعنصرينِ −2 وَ 1 في المَدى.

إذنْ، لا تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

b)

x	5	3	2	0	−4	−6
y	1	3	1	3	−2	2

المجالُ: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ **المَدى:** $\{1, 3, -2, 2\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصُرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المَدى. إذنْ، تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

c) $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجالُ: $\{0, 2, 3, 5\}$ **المَدى:** $\{1, 4, 7\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المَدى. إذنْ، تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

d) $\{(-4, 2), (6, -1), (0, 0), (-4, 0)\}$

المجالُ: $\{-4, 6, 0\}$ **المَدى:** $\{2, -1, 0\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ العنصرِ −4 في المجالِ بالعنصرينِ 2 وَ 0 في المَدى. إذنْ، لا تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

إيجادُ صورةِ عددٍ في الاقترانِ (الدرسُ 1)

إذا كانَ $f(x) = 3x-2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

9) $g(0)$ -3

10) $f(2)$ 4

11) $f(-3)$ -11

12) $g(-4)$ 21

مثالٌ: إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

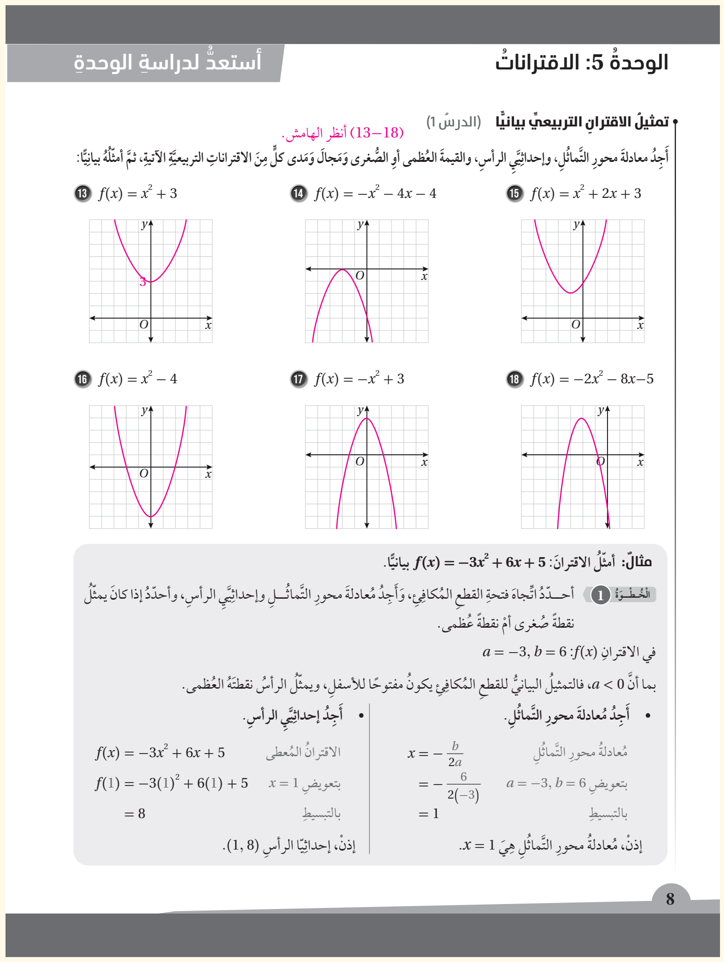
$g(x) = 2x^2 + 5x + 4$ قاعدةُ الاقترانِ

$g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$ بتعويضِ $x = -2$

$= 8 - 10 + 4 = 2$ بالتبسيطِ

ملاحظاتي

كتاب التمارين



الوحدةُ 5: الاقترانات — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا (الدرسُ 1)

(13–18) أنظر الهامش.

أَجِدُ معادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثِيَّي الرأسِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ وَمَدى كلٍّ مِنَ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ، ثمَّ أمثِّلُهُ بيانيًّا:

13) $f(x) = x^2 + 3$ 14) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$ 15) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

16) $f(x) = x^2 - 4$ 17) $f(x) = -x^2 + 3$ 18) $f(x) = -2x^2 - 8x - 5$

مثالٌ: أمثِّلُ الاقترانَ: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ بيانيًّا.

الخُطوةُ 1 أحدِّدُ اتِّجاهَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ، وَأَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ وإحداثِيَّي الرأسِ، وأحدِّدُ إذا كانَ يمثِّلُ نقطةً صُغرى أمْ نقطةً عُظمى.

في الاقترانِ $f(x)$: $a = -3, b = 6$

بما أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأسفلِ، ويمثِّلُ الرأسُ نقطتَهُ العُظمى.

- أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ.

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ	$x = -\frac{b}{2a}$
بتعويضِ $a = -3, b = 6$	$= -\frac{6}{2(-3)}$
بالتبسيطِ	$= 1$

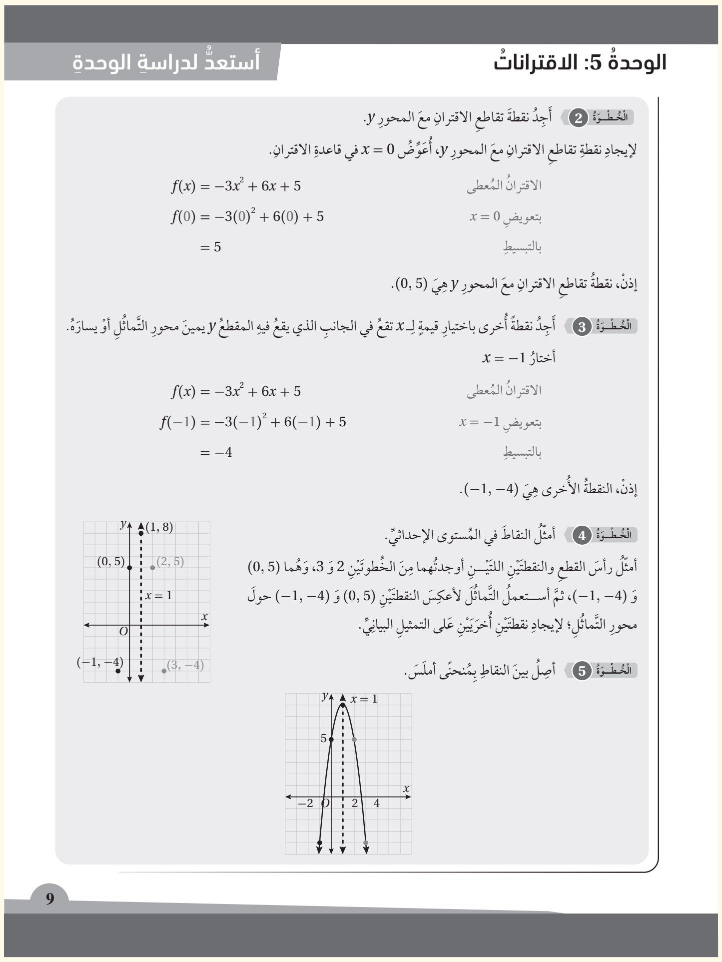
إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ $x = 1$.

- أَجِدُ إحداثِيَّي الرأسِ.

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$
بتعويضِ $x = 1$	$f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$
بالتبسيطِ	$= 8$

إذنْ، إحداثِيّا الرأسِ $(1, 8)$.

8



الوحدةُ 5: الاقترانات — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

الخُطوةُ 2 أَجِدُ نقطةَ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y.

لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، أُعَوِّضُ $x = 0$ في قاعدةِ الاقترانِ.

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$
بتعويضِ $x = 0$	$f(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 5$
بالتبسيطِ	$= 5$

إذنْ، نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y هِيَ $(0, 5)$.

الخُطوةُ 3 أَجِدُ نقطةً أُخرى باختيارِ قيمةٍ لِـ x تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y يمينَ محورِ التَّماثُلِ أوْ يسارَهُ.

أختارُ $x = -1$

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$
بتعويضِ $x = -1$	$f(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) + 5$
بالتبسيطِ	$= -4$

إذنْ، النقطةُ الأُخرى هِيَ $(-1, -4)$.

الخُطوةُ 4 أمثِّلُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.

أمثِّلُ رأسَ القطعِ والنقطتَيْنِ اللتَيْنِ أوجدتُهما مِنَ الخُطوتَيْنِ 2 وَ 3، وَهُما $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَ النقطتَيْنِ $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$ حولَ محورِ التَّماثُلِ؛ لإيجادِ نقطتَيْنِ أُخرَيَيْنِ عَلى التمثيلِ البيانِيِّ.

الخُطوةُ 5 أَصِلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنًى أملَسَ.

9

إجابة أسئلة بند (أستعد لدراسة الوحدة):

13) إحداثيات الرأس $(0, 3)$، معادلة محور التماثل $x = 0$، قيمة صغرى للاقتران هي 3، المجال $(-\infty, \infty)$، المدى $[3, \infty)$

14) إحداثيات الرأس $(-2, 0)$، معادلة محور التماثل $x = -2$، قيمة عظمى للاقتران هي 0، المجال $(-\infty, \infty)$، المدى $(-\infty, 0]$

15) إحداثيات الرأس $(-1, 2)$، معادلة محور التماثل $x = -1$، قيمة صغرى للاقتران هي 2، المجال $(-\infty, \infty)$، المدى $[2, \infty)$

16) إحداثيات الرأس $(0, -4)$، معادلة محور التماثل $x = 0$، قيمة صغرى للاقتران هي -4، المجال $(-\infty, \infty)$، المدى $[-4, \infty)$

17) إحداثيات الرأس $(0, 3)$، معادلة محور التماثل $x = 0$، قيمة عظمى للاقتران هي 3، المجال $(-\infty, \infty)$، المدى $(-\infty, 3]$

18) إحداثيات الرأس $(-2, 3)$، معادلة محور التماثل $x = -2$، قيمة عظمى للاقتران هي 3، المجال $(-\infty, \infty)$، المدى $(-\infty, 3]$

كتاب التمارين

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

جمعُ المقاديرِ الجبريةِ وطرحُها (الدرسُ 1)

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

19) $(3np + 5w) + (w - 10np)$

$6w - 7np$

20) $(-z + 2xy) + (xy + 4z)$

$3xy + 3z$

21) $(14x^2 - 19x) + (-6x^2 + x)$

$8x^2 - 8x$

22) $(10b^2 - 3b) + (b^2 - 2b)$

$11b^2 - 5b$

23) $(7cr - 3q) + (2cr + 7q)$

$9cr + 4q$

24) $(7xy + 4c) + (3xy - 8c)$

$10xy - 4c$

25) $(4x + 4c^2) + (6x - 2c^2)$

$10x + 2c^2$

26) $(19t + 13s^2) + (4s^2 - t)$

$18t + 17s^2$

مثالٌ: أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $(6pn - 3q) + (2pn + 7q)$

$= (6pn + 2pn) + (7q - 3q)$ الخاصيَّةُ التجميعيَّةُ والتبديليّةُ في الجمعِ

$= 8pn + 4q$ أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ

b) $(4x^2y + t) + (3t - x^2y)$

$= (4x^2y - x^2y) + (t + 3t)$ الخاصيَّةُ التجميعيَّةُ والتبديليّةُ في الجمعِ

$= 3x^2y + 4t$ أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ

10

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

ضربُ المقاديرِ الجبريةِ (الدرسُ 1)

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

27) $6 \times (-3b)$

$-18b$

28) $-2 \times (4w)$

$-8w$

29) $-2u \times 5u$

$-10u^2$

30) $8d \times (-7d)$

$-56d^2$

31) $3xy \times (-xy^2)$

$-3x^2y^3$

32) $(-dq^2)(-3qd)$

$3d^2q^3$

33) $(b + 4)(b + 1)$

$b^2 + 5b + 4$

34) $(3x - 1)(4x - x^2 + 2)$

$-3x^3 + 13x^2 + 2x - 2$

35) $(4 - p)(2p - p^2 + 1)$

$p^3 - 6p^2 + 7p + 4$

مثالٌ: أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $2x(3x - y)$

$2x(3x - y) = 6x^2 - 2xy$ أضربُ حدًّا جبريًّا في مقدارٍ جبريٍّ

b) $(x + 4)(x + 3)$

$(x + 4)(x + 3)$

$= x(x + 3) + 4(x + 3)$ أفصلُ المقدارَ $(x+4)$ إلى حدَّيْنِ x، 4 ثم أضربُ كلًّا منْهُما في المقدارِ $(x + 3)$

$= (x^2 + 3x) + (4x + 12)$ أستخدمُ خاصيَّةَ التوزيعِ

$= x^2 + (3x + 4x) + 12$ أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ

$= x^2 + 7x + 12$ أكتبُ المقدارَ في أبسطِ صورةٍ

11

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$ (الدرسُ 1)

أُحَلِّلُ كلًّا ممّا يأتي:

36) $3x^2 + 11x + 6$

$(3x + 2)(x + 3)$

37) $8x^2 - 30x + 7$

$(2x - 7)(4x - 1)$

38) $6x^2 + 15x - 9$

$(3x + 9)(2x - 1)$

39) $4x^2 - 4x - 35$

$(2x - 7)(2x + 5)$

40) $12x^2 + 36x + 27$

$(2x + 3)(6x + 9)$

41) $6r^2 - 14r - 12$

$= 2(3r^2 - 7r - 6)$

$= 2(3r + 2)(r - 3)$

مثالٌ: أُحَلِّلُ المقدارَ: $3x^2 - 14x + 8$

بما أنَّ $a = 3, b = -14, c = 8$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهِما $3\times8 = 24$ ومجموعُهُما -14

بما أنَّ b سالبةٌ وَ c موجبةٌ، فَأُنْشِئُ جدولًا أُنَظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 24 السالبةَ، ثمَّ أُحَدِّدُ العامِلَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما -14

مجموعُ العامِلَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 24
-25	$-1, -24$
-14	$-2, -12$

العاملانِ الصَّحيحانِ

$3x^2 - 14x + 8 = 3x^2 + mx + nx + 8$ بكتابةِ القاعدةِ

$= 3x^2 - 2x - 12x + 8$ بتعويضِ $m = -2, n = -12$

$= (3x^2 - 2x) + (-12x + 8)$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ

$= x(3x - 2) + (-4)(3x - 2)$ بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

$= (3x - 2)(x - 4)$ بإخراجِ $(3x - 2)$ عاملًا مُشترَكًا

12

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ (الدرسُ 2)

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

42) $\frac{6x(x + 3)}{9x^2}$ $\frac{2x + 6}{3x}$

43) $\frac{b^2 + 5b + 4}{b^2 - 2b - 24}$ $\frac{b + 1}{b - 6}$

44) $\frac{2x^3 - 18x}{6x^3 - 12x^2 - 18x}$ $\frac{x + 3}{3x + 3}$

45) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

46) $\frac{x^3 - 9x^2}{x^2 - 3x - 54}$ $\frac{x^2}{x + 6}$

47) $\frac{32x^4 - 50}{4x^3 - 12x^2 - 5x + 15}$ $\frac{8x^2 + 10}{x - 3}$

مثالٌ: أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\frac{2x - 10}{2x^2 - 11x + 5}$

$\frac{2x - 10}{2x^2 - 11x + 5} = \frac{2(x - 5)}{(2x - 1)(x - 5)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$= \frac{2\cancel{(x - 5)}}{(2x - 1)\cancel{(x - 5)}}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x - 5)$

$= \frac{2}{2x - 1}$ بالتبسيطِ

b) $\frac{1 - u^2}{u^2 + 4u - 5}$

$\frac{1 - u^2}{u^2 + 4u - 5} = \frac{(1 - u)(1 + u)}{(u - 1)(u + 5)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$= \frac{-(u - 1)(1 + u)}{(u - 1)(u + 5)}$ $1 - u = -(u - 1)$

$= \frac{-\cancel{(u - 1)}(1 + u)}{\cancel{(u - 1)}(u + 5)}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(u - 1)$

$= \frac{-(u + 1)}{u + 5}$ بالتبسيطِ

13

كتاب التمارين

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

حلُّ التناسباتِ (الدرسُ 3)

أحُلُّ كُلًّا منَ التناسباتِ الآتيةِ:

48) $\frac{5}{4} = \frac{20}{x}$ — $x = 16$

49) $\frac{x}{12 - x} = \frac{10}{30}$ — $x = 3$

50) $\frac{12}{x - 2} = \frac{32}{x + 8}$ — $x = 8$

مثالٌ: أحُلُّ التناسبَ الآتيَ: $\frac{5}{x+4} = \frac{4}{x-4}$.

التناسبُ المعطى	$\frac{5}{x+4} = \frac{4}{x-4}$
بالضربِ التبادليِّ	$4(x+4) = 5(x-4)$
باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ	$4x + 16 = 5x - 20$
بطرحِ $5x$ منْ طرفيِ المعادلةِ	$-x + 16 = -20$
بطرحِ 16 منْ طرفيِ المعادلةِ	$-x = -36$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على -1	$x = 36$

حلُّ المعادلاتِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيِّ (الدرسُ 4)

أحُلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الآتيةِ، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

51) $324 = b^2$ — $b = 18, b = -18$

52) $x^2 = \frac{9}{36}$ — $x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$

53) $y^2 = 1.96$ — $y = 1.3, y = -1.3$

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أحلُّ المعادلةَ $t^2 = \frac{1}{36}$، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

المعادلةُ الأصليةُ	$t^2 = \frac{1}{36}$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$
أجدُ قيمةَ الجذرِ	$= \pm\frac{1}{6}$

أتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

عندما $x = \frac{1}{6}$	عندما $x = -\frac{1}{6}$
$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$	$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$
$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✔	$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✔

إيجادُ حدودٍ متتاليةٍ (الدرسُ 5)

أَجِدُ الحدَّيْنِ التاليَيْنِ للمتتالياتِ الآتيةِ:

54) $4, 7, 10, 13, \ldots$ — $16, 19$

55) $100, 94, 88, 82, \ldots$ — $76, 70$

56) $3, 6, 11, 18, \ldots$ — $27, 38$

مثالٌ: أَجِدُ الحدَّيْنِ التاليَيْنِ للمتتاليةِ: $2, 7, 12, 17, \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ الذي يسبقُهُ بمقدارٍ ثابتٍ هوَ 5:

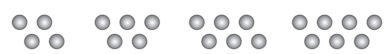
$7-2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$

إذنْ، الحدّانِ التاليانِ هما: $17 + 5 = 22$, $22 + 5 = 27$

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

إيجادُ الحدِّ العامِّ لمُتتاليةِ نمطٍ هندسيٍّ (الدرسُ 5)

في ما يأتي نَمَطٌ هندسِيٌّ يشكِّلُ عددُ الدوائرِ فيهِ متتاليةً:



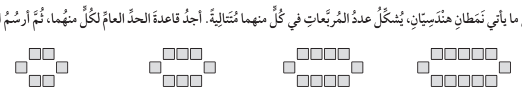
57) أجدُ القاعدةَ التي تربطُ كلَّ حدٍّ في المتتاليةِ بالحدِّ الذي يليهِ. بالانتقال من الحد إلى الحد الذي يليه، أجد أنه أضيف دائرة واحدة، إذا كل حد أكبر من الحد الذي يسبقه بـ 1

58) أكتبُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ. أضيف إلى رتبة الحد العدد 3

59) ما عددُ الدوائرِ في الحدِّ الذي رتبتُهُ 12؟ 15

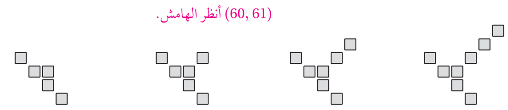
في ما يأتي نَمَطانِ هندَسِيّانِ، يُشكِّلُ عددُ المُربَّعاتِ في كُلٍّ منهما مُتَتاليةً. أجدُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ لكُلٍّ منهُما، ثُمَّ أرسُمُ الحَدَّ العاشِرَ.

60)

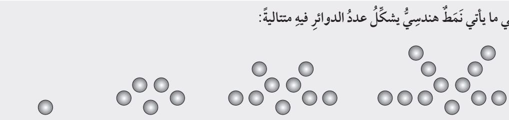


(60, 61) أنظر الهامش.

61)

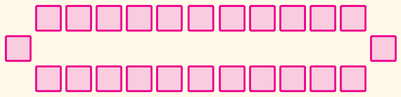


مثالٌ: في ما يأتي نَمَطٌ هندسِيٌّ يشكِّلُ عددُ الدوائرِ فيهِ متتاليةً:

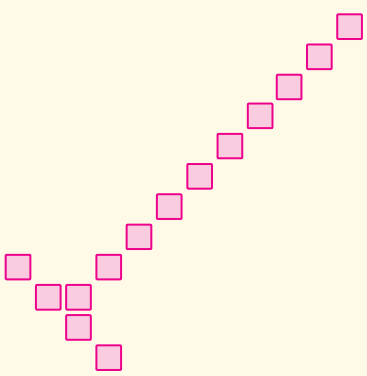


إجابة أسئلة بند (أستعد لدراسة الوحدة):

60) أضرب رتبة الحد بالعدد 2 وأضيف 4



61) أضيف الى رتبة الحد 4

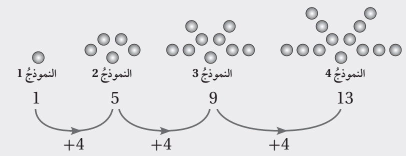


كتاب التمارين

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

a) أجدُ القاعدةَ التي تربطُ كلَّ حدٍّ في المتتاليةِ بالحدِّ الذي يليهِ:

بالانتقالِ منَ الحدِّ إلى الحدِّ الذي يليهِ، أجدُ أنَّ 4 دوائرَ قدْ أُضيفَتْ. إذنْ، كلُّ حدٍّ أكبرُ منَ الحدِّ الذي يسبِقُهُ بـ 4.



b) أكتبُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ.

تزدادُ الحدودُ في المتتاليةِ بمقدارِ 4، وهذا يذكِّرُني بجدولِ ضربِ العددِ 4؛ إذْ إنَّ الفرقَ بينَ كلِّ ناتجَيْنِ يساوي 4، لكنَّ حدودَ المتتاليةِ أقلُّ بمقدارِ 3 منَ النواتجِ في جدولِ ضربِ العددِ 4. إذنْ، قاعدةُ الحدِّ العامِّ هيَ: أضربُ رتبةَ الحدِّ في 4، ثمَّ أطرحُ 3.

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
1	× 4	4	−3	1
2	× 4	8	−3	5
3	× 4	12	−3	9
4	× 4	16	−3	13

c) ما عددُ الدوائرِ في الحدِّ الذي رتبتُهُ 15؟

لإيجادِ عددِ الدوائرِ، فإنَّني أطبِّقُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ على الحدِّ الذي رتبتُهُ 15؛ أضربُ الرتبةَ في 4، ثمَّ أطرحُ 3 منَ الناتجِ.

الرُّتبةُ				الحدُّ
15	× 4	60	−3	57

الدرسُ 1
اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا، مُحدِّدًا الدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ لكلِّ كثيرِ حدودٍ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ: (1–8) أنظر ملحق الإجابات.

1 $h(x) = 3x^2 + 2x^{-1} + 5$

2 $g(x) = 3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$

3 $f(x) = \frac{8(3-2x)}{5}$

4 $j(x) = \sqrt{x^2+16} - 4x$

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

5 $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \le x \le 3$

6 $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \le x \le 2$

7 $g(x) = 12 - 4x - x^2$

8 $h(x) = (2x-5)^2 - 10$

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$، $g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$، وَ $h(x) = 2x - 4$، فأَجِدُ ناتجَ ما يأتي:

9 $f(x) + g(x)$ $-3x^3+7x^2+5x-8$

10 $f(x) - g(x)$ $-5x^3-3x^2+5x+6$

11 $g(x) - x(h(x))$ x^3+3x^2+4x-7

12 $h(x) \cdot f(x)$ $-8x^4+20x^3+2x^2-22x+4$

13 $(h(x))^2 + f(x)$ $-4x^3+6x^2-11x+15$

14 $f(x) \cdot g(x)$ $-4x^6-18x^5+15x^4+52x^3-19x^2-35x+7$

15 هلِ العددُ -2 صفرٌ للاقترانِ $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

نعم؛ لأنَّ $f(-2) = -16 + 40 - 14 - 10 = 0$

16 أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$

$(x-1)^2(x-1-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$

يمثّلُ الاقترانُ $s(t) = 2t^3 - 20t^2 + 5t - 50$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً.

17 أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ. $s(0) = -50$

18 أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ ثانيتينِ منْ بدءِ الحركةِ. $s(2) = -104$

19 متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟ يكون الجسم عند نقطة الأصل بعد 10 ثوانٍ من بدء حركته.

20 هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منْها؟

يعود إلى النقطة التي بدأ الحركة منها بعد حوالي 0.26 s، وبعد حوالي 9.7 s من بدء حركته.

الدرسُ 2
قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةِ
Dividing Polynomials and Rational Functions

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x)$ على $h(x)$ وباقيها في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5;\ h(x) = x + 4$ الناتج $2x^2 - 12x + 36$، والباقي -139

2 $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12;\ h(x) = 2x^2 - 5x + 2$ الناتج $2x^2 + 2x + 3$، والباقي $2x + 6$

3 أَجِدُ قيمةَ k بحيثُ يكونُ باقي قسمةِ $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$ على $h(x) = 2x + 1$ هوَ 8

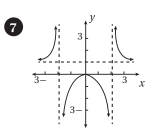
4 أَجِدُ قيمةَ c بحيثُ يكونُ $h(x) = x - 3$ أحدَ عواملِ $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$ (3–6) أنظر ملحق الإجابات.

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، ثمَّ أَجِدُ مجالَهُ ومداهُ:

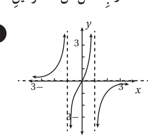
5 $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$

6 $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أَجِدُ المجالَ والمدى وخطوطَ التقاربِ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ المُمثَّليْنِ بيانيًّا في ما يأتي:

7


(7–10) أنظر ملحق الإجابات.

8


أَجِدُ المجالَ والمدى لكلٍّ ممّا يأتي:

9 $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$

10 $j(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

نُقِلَتْ فصيلةٌ نادرةٌ منَ الحشراتِ إلى محميةٍ خاصةٍ لمنعِ انقراضِها. وقدْ بلغَ عددُ أفرادِ هذهِ الفصيلةِ بعدَ t شهرًا منْ نقلِها: $P(t) = \frac{72(1+0.6t)}{3+0.02t}$ (11–13) أنظر ملحق الإجابات.

11 كمْ كانَ عددُ الحشراتِ عندَ نقلِها إلى المحميةِ؟

12 كمْ سيبلغُ عددُها بعدَ 30 شهرًا منْ نقلِها؟

13 بعدَ كمْ شهرٍ سيصلُ عددُها إلى 558 حشرةً؟

الدرسُ 3
تركيبُ الاقتراناتِ
Composition of Functions

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، مُستعمِلًا القيمَ المُبيَّنةَ في الجدوليْنِ الآتيينِ:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	−1	0	3	8

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−7	−5	−3	−1	3	5	7

1 $(f \circ g)(1)$ -1

2 $(f \circ g)(-2)$ 7

3 $(g \circ f)(1)$ 8

4 $(g \circ f)(0)$ 0

5 $(g \circ g)(-1)$ -1

6 $(f \circ f)(-1)$ -7

إذا كانَ $f(x) = 2x + 1$، وَ $g(x) = 3x - 4$، فأَجِدُ:

7 $(f \circ g)(2)$ 5

8 $(f \circ g)(0)$ -7

9 $(f \circ g)(8)$ 41

10 $(g \circ f)(1)$ 5

11 $(f \circ g)(x)$ $6x-7$

12 $(g \circ f)(x)$ $6x-1$

إذا كانَ $k(x) = \frac{1}{x+1}$، وَ $h(x) = \frac{2}{x}$، فأَجِدُ:

13 $(h \circ k)(3)$ 8

14 $(k \circ h)(3)$ $\frac{3}{5}$

15 $(h \circ h)(6)$ 6

16 $(k \circ k)(-3)$ 2

17 $(k \circ h)(x)$

18 $(h \circ k)(x)$

(17–23) أنظر ملحق الإجابات.

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يكونُ $h(x) = (g \circ f)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

19 $h(x) = x^6 + 1$

20 $h(x) = 4(x+1)^2$

21 $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$

22 $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4} + 7$

23 يرتبطُ سعرُ سلعةٍ مُعيَّنةٍ وعددُ الوحداتِ المبيعةِ منْها بالعلاقةِ $0 \le x \le 400$ ، $p = 100 - \frac{x}{4}$، حيثُ p السعرُ بالدينارِ، وَ x عددُ الوحداتِ المبيعةِ. إذا كانَتِ التكلفةُ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً هيَ $C = \frac{4\sqrt{x}}{0.5} + 600$، فأَجِدُ التكلفةَ C في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى السعرِ p، ثمَّ أَجِدُ التكلفةَ إذا كانَ سعرُ الوحدةِ الواحدةِ 19 دينارًا.

كتاب التمارين

الدرسُ 4

الاقترانُ العكسيُّ
Inverse Function

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

إذا كانَ $g(x) = 80 - \frac{100}{1+x}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(9)$ 70
2. $g(4)$ 60
3. $g^{-1}(70)$ 9
4. $g^{-1}(60)$ 4

5. إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، وَ $f(3) = 8$، فماذا يُستنتَجُ منْ هذهِ المعطياتِ؟
يمكن استنتاج أنَّ $f^{-1}(8) = 3$

6. إذا كانَ $f(x)$ يُمثِّلُ عددَ الوحداتِ المُنتَجةِ في x ساعةَ عملٍ لمُنتَجٍ مُعيَّنٍ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $f^{-1}(2540)$؟
عدد ساعات العمل التي ينتج فيها 2540 وحدة.

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلٍّ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: (7–16) أنظر ملحق الإجابات.

7. $f(x) = 3x - 5$
8. $f(x) = 4 - 7x$
9. $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$
10. $f(x) = 5 - 9x^2, x \geq 0$
11. $f(x) = \frac{x}{2x+6}$
12. $f(x) = \frac{x}{8-4x}$
13. $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$
14. $f(x) = \sqrt{3x+2} - 5$
15. $f(x) = \sqrt[3]{3x-2} - 1$
16. $f(x) = \sqrt[3]{3-4x} + 1$

أُبيِّنُ إذا كانَ كلٌّ منَ الاقترانينِ $f(x)$، وَ $h(x)$ اقترانًا عكسيًّا للآخرِ أمْ لا:

17. $f(x) = 2x - 5, h(x) = 5x + 2$
18. $f(x) = \frac{2x}{3x+5}$, $h(x) = \frac{5x}{2-3x}$

(17–21) أنظر ملحق الإجابات.

19. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{6+3x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

20. **هندسةٌ:** تُعطى مِساحةُ الدائرةِ بالاقترانِ $A(r) = \pi r^2$، حيثُ A المِساحةُ، وَ r نصفُ القُطْرِ. أُعبِّرُ عنْ r في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى المِساحةِ A، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ دائرةٍ مِساحتُها 250 cm^2

21. **فيزياءُ:** يُعطى زمنُ الدورةِ T ثانيةً لبندولٍ بسيطٍ بالاقترانِ $T(\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيثُ ℓ طولُ البندولِ بالأمتارِ. أُعبِّرُ عنْ ℓ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى الزمنِ T، ثمَّ أَجِدُ طولَ بندولٍ زمنُ دورتِهِ 3 s

الدرسُ 5

المتتالياتُ
Sequences

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أكتبُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1. 4, 6, 8, 10, …
12,14,16
2. 3, 30, 300, 3000, …
30000,300000,3000000
3. 1, 4, 9, 16, …
25,36,49
4. 2, 4, 8, 16, …
32,64,128
5. 3, 10, 17, 24, …
31,38,45
6. 0, 4, 18, 48, …
100,180,294

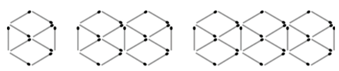
أُصنِّفُ المتتالياتِ الآتيةَ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ الأولى والحدَّ العشرينَ لكلٍّ منْها:

7. $T(n) = 3n + 1$
خطية. 4, 7, 10 $T(20) = 61$
8. $T(n) = 2n^2 + 1$
تربيعية. 3, 9, 19 $T(20) = 801$
9. $T(n) = 5n^3 + 2$
تكعيبية. 7, 42, 137 $T(20) = 40002$
10. $T(n) = n(n^2 + 1)$
تكعيبية. 2, 10, 30 $T(20) = 8020$

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

11. 6, 11, 16, 21, 26, … $T(n) = 5n+1$
12. −4, 3, 22, 59, 120, … $T(n) = n^3 - 5$
13. 0, 3, 8, 15, … $T(n) = n^2 - 1$
14. 5, 11, 21, 35, 53, … $T(n) = 2n^2 + 3$

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ أعوادِ الثقابِ فيهِ متتاليةً:



1 2 3

15. أرسمُ النموذجَ الرابعَ في هذا النمطِ. أنظر ملحق الإجابات.
16. أَجِدُ عددَ أعوادِ الثقابِ اللازمةِ لبناءِ النموذجِ رقمِ 20 في هذا النمطِ. 181
17. ما أكبرُ مجموعةٍ منَ النماذجِ يُمكِنُ بناؤُها باستعمالِ 100 عودٍ منَ الثقابِ؟ 11

ملاحظاتي

الدرس 1:

1) كثير حدود، صورتــه القياســية: $f(x) = -x + 4$، ودرجته: 1، ومعامله الرئيس: 1−، وحده الثابت: 4

2) ليس كثيــر حدود؛ لأنَّ فيه عاملًا أســه ســالب (x الموجودة في المقام).

3) كثير حــدود، صورتــه القياســية: $h(x) = 12x^2 - 19x - 12$، ودرجته: 2، ومعامله الرئيس: 12، وحده الثابت: 12−

4) كثيــر حدود، صورتــه القياســية: $L(x) = 5.3x^3 + 3x^2 - 2x$، ودرجته: 3، ومعامله الرئيس: 5.3، وحده الثابت: 0

5) كثير حدود، صورته القياسية: $j(x) = -16t^2 + \sqrt{7}\,t$ ، ودرجته: 2، ومعامله الرئيس: 16−، وحده الثابت: 0

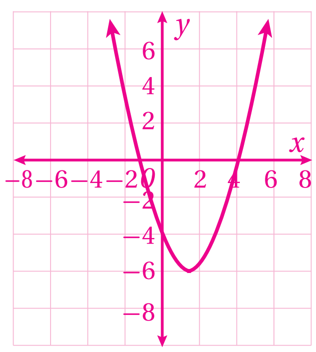
6) ليس كثير حدود؛ لأنَّ فيه أسًّا كسريًّا.

7) ليس كثير حدود؛ لأنَّ الأس فيه متغير، فهو اقتران أسي.

8) كثيــر حــدود، صورتــه القياســية: $f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$، ودرجته: 7، ومعامله الرئيس: 1، وحده الثابت: 0

9)

x	-2	0	1.5	3	5
$y = f(x)$	6	-4	-6.25	-4	6

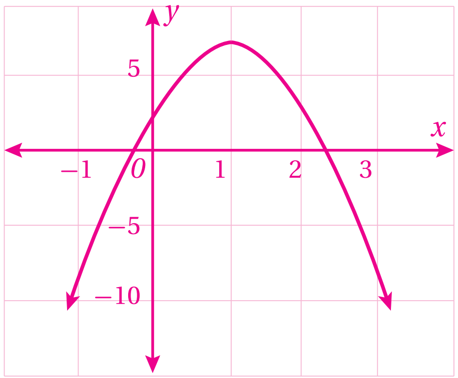


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \geq -6.25$، أو الفترة $[-6.25, \infty)$.

10)

x	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-9	3	7	3	-9

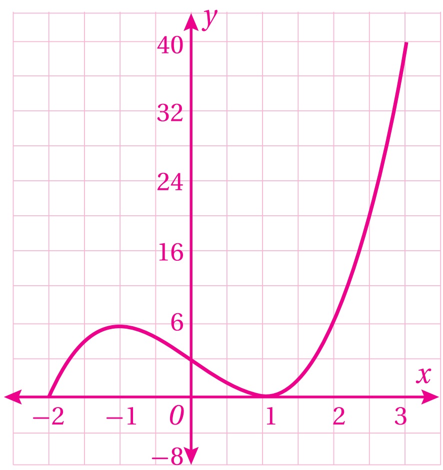


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \leq 7$، أو الفترة $(-\infty, 7]$.

11)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	8	4	0	8	40



المجال: $-2 \leq x \leq 3$ ، أو الفترة $[-2, 3]$.

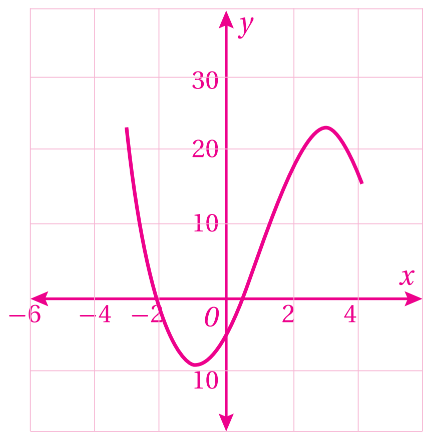
المدى: $0 \leq y \leq 40$، أو الفترة $[0, 40]$.

12)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	23	-2	-9	-4	7	18	23	16

المجال: $-3 \le x \le 4$ ، أو الفترة $[-3, 4]$.

المدى: $-9 \le y \le 23$، أو الفترة $[-9, 23]$.



13) $h(x) + g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 2$

14) $g(x) - h(x) = -x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 3x + 10$

15) $f(x) \cdot h(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 + x^2 - 9x - 6$

16) $x(f(x)) + h(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$

17) $(f(x))^2 - g(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$

18) $h(x) - x(g(x)) = 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - x - 6$

23) حجم ما تبقى من المكعب يساوي حجم المكعب الأصلي مطروحًا منه حجم التجويف.

حجم المكعب الأصلي هو $(2x+1)^3$ ، وحجم التجويف هو $x^2(2x+1)$.

إذا كان حجم الجزء المتبقي هو $R(x)$، فإنَّ:

$R(x) = (2x+1)^3 - x^2(2x+1)$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + x^2) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

24) $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

28) إجابة محتملة:

$f(x) = 2x - 1, \; h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

$f(x) \cdot h(x) = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

$= 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1$

$= 8x^3 - 1$

29) لإيجاد الأصفار، تُحَل المعادلة: $f(x) = 0$

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$

$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2 - 4) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+2) = 0$

$x = 1, x = 2, x = -2$

إذن، أصفار هذا الاقتران هي: -2، 2، 1

30) إذا كانت درجة f أكبر من درجة g، فإنَّ درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة f؛ أي الدرجة العليا. أمّا إذا كانت درجة f تساوي درجة g، فإنَّ درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة كلٍّ منهما، أو تقل عنها؛ لأنَّ ناتج جمع المعاملين الرئيسين قد يكون صفرًا. وأمّا درجة $f \cdot g$ فإنَّها تساوي دائمًا مجموع درجتي الاقترانين f, g.

الدرس 2:

7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أيْ $\{x | x \ne 0\}$.

8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1 و $\frac{1}{2}$ ؛ أيْ $\{x | x \ne \frac{1}{2}, x \ne 1\}$.

9) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

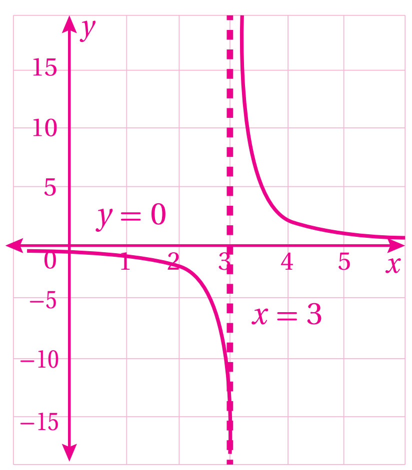
10)

x	-1	0	1	2	2.8	3.2	3.5	4	6
$y = f(x)$	-0.5	-0.67	-1	-2	-10	10	4	2	0.67

له خط تقارب رأسي هو $x = 3$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3؛ أيْ $\{x | x \ne 3\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أيْ $\{y | y \ne 0\}$.



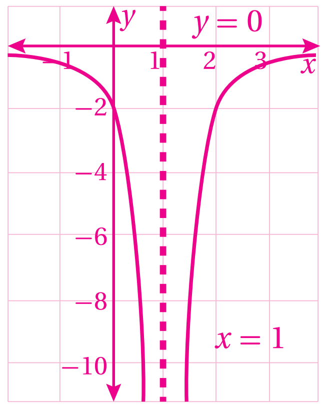
11)

x	-2	-1	0	0.5	1.5	2	3	4
$y=h(x)$	-0.22	-0.5	-2	-8	8	-2	-0.5	-0.22

له خط تقارب رأسي هو $x=1$، وخط تقارب أفقي هو $y=0$.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1؛ أيْ $\{x \mid x \neq 1\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية السالبة؛ أيْ $\{y \mid y<0\}$.

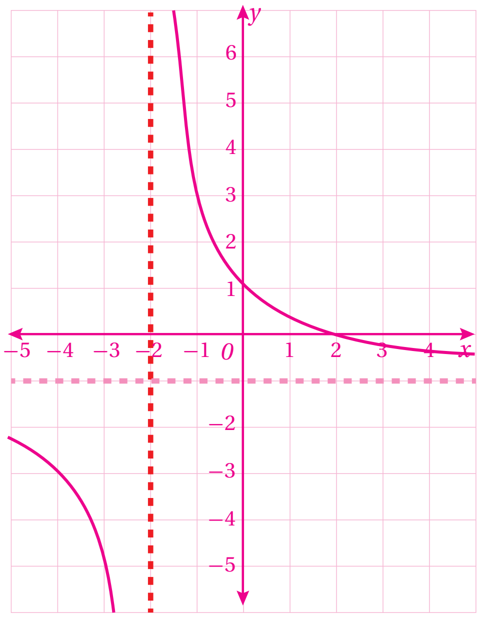


12) له خط تقارب رأسي هو $x=-2$ ، وخط تقارب أفقي هو $y=-1$.

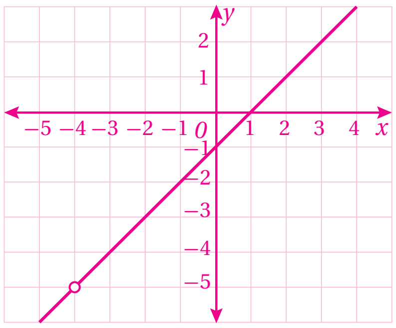
x	-4	-3	-2.5	-1.5	-1	0	1	2
y	-3	-5	-9	1	-3	-1	-0.33	0

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2؛ أيْ $\{x|x\neq -2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -1؛ أيْ $\{y|y\neq -1\}$.

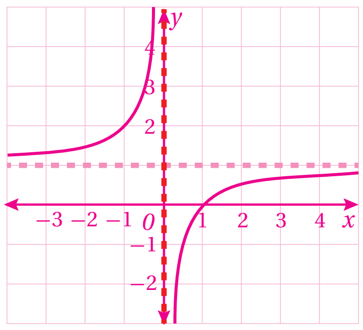


13) يُبسَّـط هذا الاقتران إلى $f(x)=x-1,\ x\neq -4$؛ فتمثيله البياني هو نفس تمثيل $y=x-1$، إلا أنَّ فيه ثقبًا مقابل $x=-4$ كما يظهر في الرسم البياني الآتي:

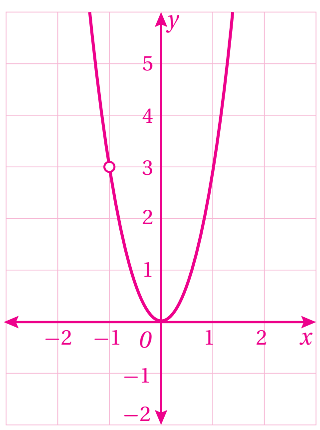


14) يُبسَّط هذا الاقتران إلى $f(x)=-\dfrac{1}{x}+1$

وعليه، فإنَّ له خط تقارب رأسيًّا هو $x=0$، وخط تقارب أفقيًّا هو $y=1$، وهذا هو تمثيله البياني:



15) يُبسَّط هذا الاقتران إلى $f(x)=3x^2,\ x\neq -1$؛ فتمثيله البياني هو نفـس تمثيل $y=3x^2$، إلا أنَّ فيه ثقبًا مقابل $x=-1$ كما يظهر في الرسم البياني الآتي:



19) عرض هذه الورقة $(x+2)^2$، وهو أحد عاملي مساحتها. فإذا قسمت المساحة على $(x+2)^2$، كان الباقي صفرًا.

باقي قسمة المساحة على $(x+2)^2$، أو (x^2+4x+4) هو $(a-20)x$. وبمساواته بالصفر، فإنَّ $a = 20$.

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x^2+4x+4 \overline{)\,3x^3+14x^2+ax+8} \\ (-)\ 3x^3+12x^2+12x \\ \hline 2x^2+(a-12)x+8 \\ (-)\ 2x^2+\ \ 8x\ \ \ \ \ +8 \\ \hline (a-20)x \end{array}$$

20) الاقتران المختلف هو $h(x) = \dfrac{9}{x^2+1}$؛ إذ ليس لمقامه أصفار، وليس له خطوط تقارب رأسية. أمّا مقامات الاقترانات الأُخرى فلها صفر واحد أو أكثر؛ أيْ إنَّ لها خط تقارب رأسيًّا واحدًا على الأقل.

21) إجابة محتملة:

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x-14} + 3$، أو $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+5x-14} + 3$،

حيث a و b عددان حقيقيان؛ شرط أنْ يكون صفر المقدار $ax+b$ لا يساوي 7 أو -2

الدرس 3:

11) $(a\circ b)(x) = a(x-7) = x-7+4 = x-3$

$(b\circ a)(x) = b(x+4) = x+4-7 = x-3$

$(a\circ b)(x) = (b\circ a)(x) = x-3$

12) $(f\circ g)(x) = f(3x+4) = 2^{3x+4}$

$(f\circ g)(-3) = 2^{3(-3)+4} = 2^{-5} = \dfrac{1}{32}$

13) $(g\circ f)(x) = 2\left(\dfrac{1}{x-4}\right) - 10 = \dfrac{2}{x-4} - 10\left(\dfrac{x-4}{x-4}\right)$

$= \dfrac{2-10x+40}{x-4}$

$= \dfrac{42-10x}{x-4}$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أيْ $\{x | x \neq 4\}$.

16) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = \dfrac{4}{3-\sqrt{x}}$, $g(x) = 4 + x^2$،

أو $f(x) = \dfrac{4}{3-x}$, $g(x) = \sqrt{4+x^2}$، وغيرها.

17) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = x^3$, $g(x) = \dfrac{1}{2x-3}$،

أو $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $g(x) = 2x-3$، وغيرها.

18) مدى $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية السالبة، وهي غير موجودة في مجال $f(x)$؛ لأنَّ مجال $f(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 2، فلا يمكن تكوين $(f\circ g)(x)$.

19) عندما يكون $t = 2$ طول نصف قطر الموجة:

$r(2) = 25\sqrt{2+2}$

$= 50$ cm

مساحة الموجة تساوي $\pi(50)^2$، أو $7854\ \text{cm}^2$ تقريبًا.

20)

$(N\circ T)(t) = N(T(t)) = 23(5t+1.5)^2 - 56(5t+1.5) + 1$

$= 575t^2 + 65t - 31.25$

21) الزمن الذي يكون عنده عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية هو حل المعادلة الآتية:

$575t^2 + 65t - 31.25 = 6752$

$575t^2 + 65t - 6783.25 = 0$

$$t = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 + 4(575)(6783.25)}}{2(575)}$$

$t = 3.38,\ t = -3.49$

الإجابة السالبة مرفوضة (لا يكون الزمن سالبًا).

إذن، يكون عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية بعد 3.38 h من لحظة إخراج الطعام من الثلاجة.

22) $a = 4, b = -3$

23) $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(x+3))$

$$= f(\frac{1}{x+3}) = (\frac{1}{x+3})^2 + 1 = \frac{x^2 + 6x + 10}{(x+3)^2}$$

24) إجابة هدى صحيحة. عوَّضت وفاء x^2 مكان x في الحد الثاني من قاعدة $f(x)$، ونسيت 5

25) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = x^2 + 3 \,,\, g(x) = x-2$

26) $(f \circ g)(x) = f(\frac{1}{x+2}) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 3} = 1 \div (\frac{1}{x+2} - 3)$

$$= 1 \div \frac{1-3(x+2)}{x+2} = 1 \times \frac{x+2}{-3x-5} = -\frac{x+2}{3x+5}$$

مجاله هو مجال $g(x)$ باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي 0؛ أيْ $x = -\frac{5}{3}$، فمجاله هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2 و $-\frac{5}{3}$؛ أيْ $\{x \mid x \neq -2, x \neq = -\frac{5}{3}\}$.

27) $(f \circ g)(x) = f(\frac{2x-1}{3}) = \frac{2(\frac{2x-1}{3})-2}{\frac{2x-1}{3} - 4}$

$$= \frac{\frac{4x-8}{3}}{\frac{2x-13}{3}} = \frac{4x-8}{2x-13}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{4x-8}{2x-13} = -4 \Rightarrow 4x-8 = -8x+52 \Rightarrow x = 5$$

الدرس 4:

1) لا يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه ليس اقتران واحد لواحد.

الزوجان الأول والثاني فيهما المسقط الثاني نفسه 6

2) يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه اقتران واحد لواحد.

$h^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (16, 2), (81, 3)\}$

3) يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه اقتران واحد لواحد.

B	f^{-1}	A
7	→	4
9	→	5
13	→	7
15	→	8

4) لا يوجد له اقتران عكسي؛ لأنَّه ليس اقتران واحد لواحد.

العنصران -3 و 3 لهما الصورة نفسها 3

17) $(f \circ g)(x) = (-3 + \sqrt{x-2} + 3)^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$

$(g \circ f)(x) = -3 + \sqrt{(x+3)^2 + 2 - 2} = -3 + (x+3) = x$

إذن، كلٌّ من الاقترانين $f(x), g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

18) $y = \frac{x}{x-1}$

$xy - y = x \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y$

$x = \frac{y}{y-1}$

$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1} = f(x)$

يمكن إثبات أنَّ $f(x)$ هو اقتران عكسي لنفسه ببيان أنَّ:

$(f \circ f)(x) = x$

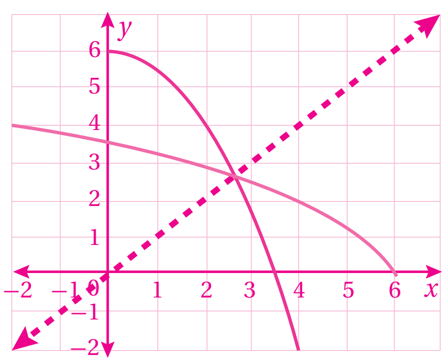
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x-1} \div (\frac{x}{x-1} - 1) =$$

$$= \frac{x}{x-1} \div \frac{x-(x-1)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \div \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{1} = x$$

20) رسم المستقيم $y = x$، ثم تعيين صور بعض النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، مثل: $(0, 6)$ وانعكاسها $(6, 0)$، والنقطة $(-2, 4)$ وانعكاسها $(4, -2)$، والنقطة $(2, 4)$ وانعكاسها $(4, 2)$، ثم الوصل بينها بخط متصل، فينتج الشكل التالي.

مجال $f(x)$: $0 \leq x \leq 4$، ومداه: $-2 \leq x \leq 6$

مجال $f^{-1}(x)$: $-2 \leq x \leq 6$، ومداه: $0 \leq y \leq 4$



21)

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4\ ,\ -3 \le x \le 1$$

$$y = (x-1)^2 + 4$$

$$y - 4 = (x-1)^2$$

$$-\sqrt{y-4} = x - 1$$

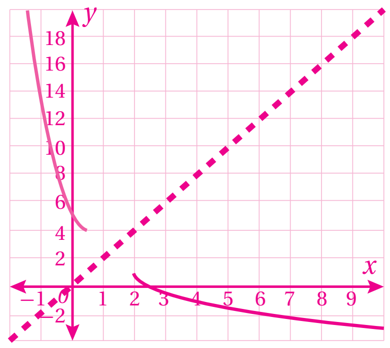
(أُخِذ الجذر السالب لأنَّ التركيز هنا هو على الجزء الأيسر من القطع المكافئ).

$$1 - \sqrt{y-4} = x$$

$$y = 1 - \sqrt{x-4}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-4}$$

مجال $f^{-1}(x)$: $4 \le x \le 20$، ومداه: $-3 \le y \le 1$



22)

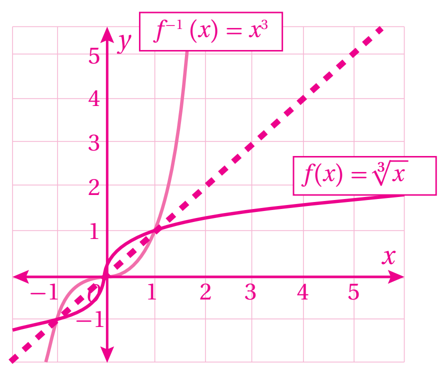
$$n(C) = \frac{100C-25}{0.6-C}\ ;\ n(0.5) = \frac{100(0.5)-25}{0.6-0.5} = \frac{25}{0.1} = 250 \text{ mL}$$

23) نعم؛ فالاقتران العكسي يُبيِّن كتلة الجسم بدلالة طول الزنبرك، وهو: $w = 2(l-3)$

24) $r(A) = -20 + \sqrt{\dfrac{A + 800\pi}{2\pi}}$;

$$r(2000) = -20 + \sqrt{\frac{2000 + 800\pi}{2\pi}} \approx 6.8 \text{ cm}$$

25) $f^{-1}(x) = x^3$



26) بما أن للاقتران $f(x)$ صفرًا عندما $x = 3$، فإن منحنى $f(x)$ يمر بالنقطة $(3, 0)$؛ لذا فإن منحنى الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ يمر بالنقطة $(0, 3)$.

27) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$g(x) = 9x + 7\ ,\ g^{-1}(x) = \frac{x-7}{9}$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = g\left(\frac{x-7}{9}\right) = 9\left(\frac{x-7}{9}\right) + 7 = x - 7 + 7 = x$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(9x+7) = \frac{9x+7-7}{9} = \frac{9x}{9} = x$$

إذن، كلٌّ من الاقترانين $g(x)$ وَ $g^{-1}(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

28) $x = 0.6$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

1) ليس كثير حدود؛ لأنَّ أس المتغير x في الحد الثاني سالب.

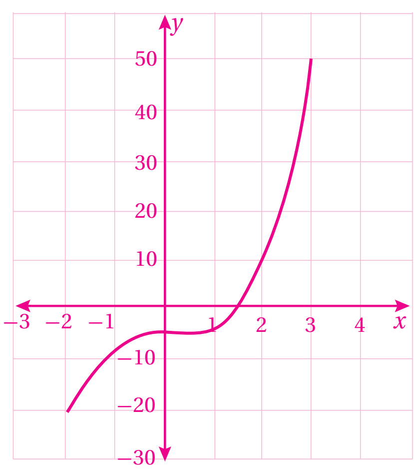
2) كثير حدود، درجته: 3، ومعامله الرئيس: -5، وحده الثابت: -1، وصورته القياسية: $f(x) = -5x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 + 7x - 1$

3) كثير حدود، درجته: 1، ومعامله الرئيس: $-\frac{16}{5}$، وحده الثابت: $\frac{24}{5}$، وصورته القياسية: $f(x) = -\frac{16}{5}x + \frac{24}{5}$

4) ليس كثير حدود؛ لأنَّه يحوي مقدارًا جذريًّا.

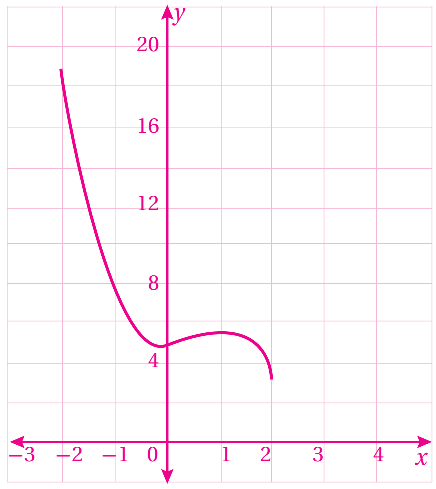
5) المجال: $\{x | -2 \le x \le 3\}$.

المدى: $\{y | -21 \le y \le 49\}$.



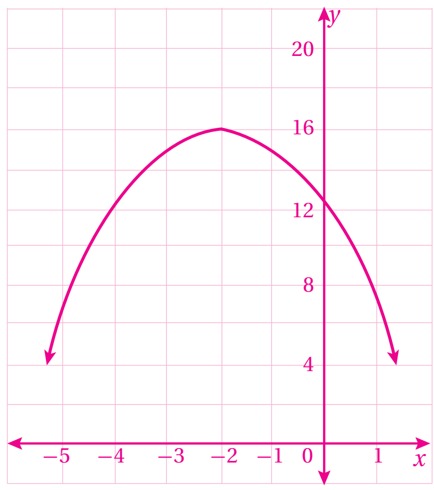
6) المجال: $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$.

المدى: $\{y \mid 3 \le y \le 19\}$.



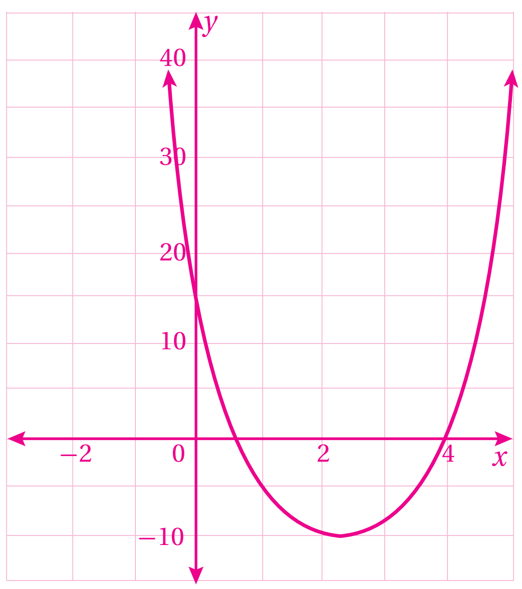
7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $\{y \mid y \le 16\}$، أو $(-\infty, 16]$.



8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $\{y \mid y \ge -10\}$، أو $[-10, \infty)$.



إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

3) باقي القسمة هو $(k-6)$:

$k-6 = 8 \Rightarrow k = 14$

4) باقي القسمة هو $3c + 9$، ويجب أنْ يكون الباقي صفرًا:

$3c + 9 = 0$

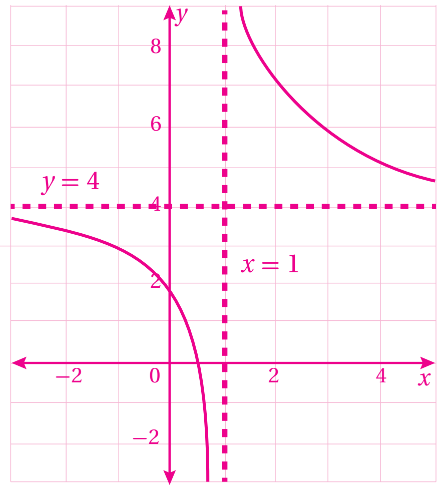
$3c = -9 \Rightarrow c = -3$

5) له خط تقارب رأسي هو $x = 1$،

وله خط تقارب أفقي هو $y = 4$.

المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أيْ $\{y \mid y \neq 4\}$.

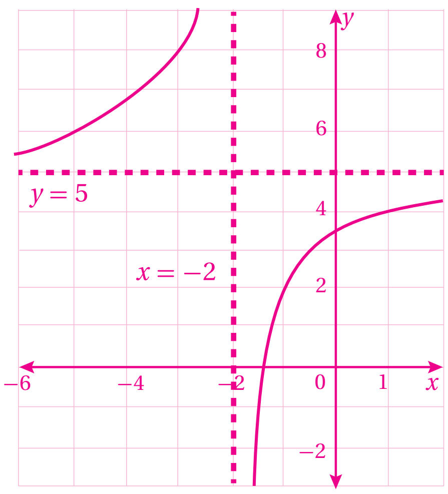


6) له خط تقارب رأسي هو $x = -2$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 5$

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 5 أي $\{y|y \neq 5\}$



7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2 ,2−؛

أيْ $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء [1 ,0)؛

أيْ $(-\infty, 0]$، أو $(1, \infty)$.

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = -2, x = 2$.

له خط تقارب أفقي هو $y = 1$.

8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1 ,1−؛
أيْ $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية.

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = -1, x = 1$.

له خط تقارب أفقي هو $y = 0$.

9) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3؛ أيْ $\{x|x \neq 3\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 5 ؛ أيْ $\{y|y > 5\}$،
أو الفترة $(5, \infty)$.

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2−، أيْ $\{x \mid x \neq -2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 3، أيْ $\{y|y > 3\}$،
أو الفترة $(3, \infty)$.

11)

$$P(0) = \frac{72(1 + 0.6(0))}{3 + 0.02(0)} = 24$$

12)

$$P(30) = \frac{72(1 + 0.6(30))}{3 + 0.02(30)} = 380$$

13)

$$\frac{72(1 + 0.6t)}{3 + 0.02t} = 558 \Rightarrow 588(3+0.02t) = 72(1+0.6t)$$

$$1674+11.16t = 72+ 43.2t$$

$$1602 = 32.04t \Rightarrow t = 50$$

إذن، يكون عدد الحشرات 558 بعد 50 شهرًا من نقلها إلى المحمية.

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

17)

$$k\circ h(x) = k\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{\frac{2}{x}+1}$$

$$\frac{1}{\frac{2+x}{x}} = \frac{x}{2+x}$$

18)

$$h\circ k(x) = h\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{x+1}} = 2 \times \frac{x+1}{1} = 2x + 2$$

19) تتنوع الإجابات. إجابــة محتملة: $f(x)= x^6 \,;\, g(x) = x + 1$، أو $f(x) = x^3 \,;\, g(x) = x^2 + 1$، وغيرها.

20) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x)= x+ 1 \,;\, g(x) = 4x^2$،

أو $f(x)= 2x+2 \,;\, g(x)= x^2$، وغيرها.

21) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x- 5 \,;\, g(x) = 2x^2$،

أو $f(x) = (x-5)^2 \,;\, g(x) = 2x$.

22) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة:

$f(x)= 2x^2- 4 \,;\, g(x) = \sqrt{x} + 7$،

أو $f(x)= 2x^2 \,;\, g(x)= \sqrt{x-4} +7$.

23)

$$x = 4(100 - p) \Rightarrow C(p)= \frac{8\sqrt{(100-p)}}{0.5} + 600$$

$$C(19) = 744$$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 4:

7)

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

8)

$$f^{-1}(x) = \frac{4-x}{7}$$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

9)

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$$

مجاله $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$.

10)

$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{3}$$

مجاله $(-\infty, 5]$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$.

11) $f^{-1}(x) = \dfrac{6x}{1-2x}$

مجالــه $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باســتثناء -3، أو $\{y|y \neq -3\}$.

12) $f^{-1}(x) = \dfrac{8x}{1+4x}$

مجالــه $\{x \mid x \neq \frac{-1}{4}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باســتثناء 2، أو $\{y \mid y \neq 2\}$.

13) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{2}$

مجاله جميــع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عــن 3؛ أيْ $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{1}{2}$؛ أيْ $[\frac{1}{2}, \infty)$.

14) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 23}{3}$

مجاله جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -5؛ أيْ $[-5, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{-2}{3}$؛ أيْ $[\frac{-2}{3}, \infty)$.

15) $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+1)^3 + 2}{3}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

16) $f^{-1}(x) = \dfrac{3-(x-1)^3}{4}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

17) $(f\circ h)(x) = 2(5x+2)-5 = 10x-1 \neq x$

لا يكون أيٌّ منهما اقترانًا عكسيًّا للآخر.

18) $(f\circ h)(x) = \dfrac{2\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right)}{3\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right) + 5}$

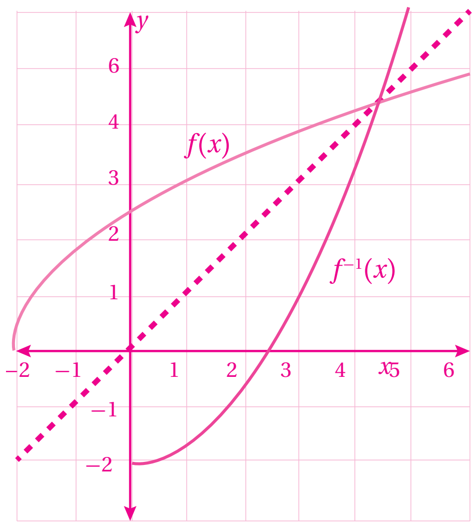
$$= \frac{10x}{2-3x} \div \frac{15x + 10 - 15x}{2-3x}$$

$$= \frac{10x}{2-3x} \times \frac{2-3x}{10} = x$$

وأيضًا: $(h\circ f)(x) = x$

إذن، كلٌّ من $f(x), h(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

19) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 6}{3}$



20) $r(A) = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

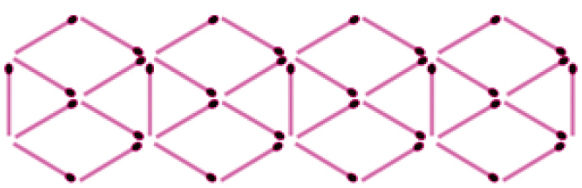
$r(250) = \sqrt{\dfrac{250}{\pi}} \approx 8.92$ cm

21) $l(T) = \dfrac{9.8\,T^2}{4\pi^2}$

$l(3) = \dfrac{9.8\,(3)^2}{4\pi^2} \approx 2.23$ m

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 5:

17)



الوحدة

6

المشتقات

Derivatives

الوحدة
6

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
معمل برمجية جيوجبرا: استكشاف ميل مماس المنحنى.	• وصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أُخرى على منحنى كثير الحدود.		• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	1
الدرس 1: تقدير ميل المنحنى.	• إيجاد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران. • رسم مماس، وتقدير ميله عند نقطة على منحنى الاقتران. • كتابة معادلة المماس. • تقدير السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة – الزمن.	القاطع. المماس. نقطة التماس. الميل. معادلة المماس. السرعة اللحظية. التسارع اللحظي.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: الاشتقاق.	• تعرُّف مفهوم مشتقة كثير الحدود. • إيجاد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين. • إيجاد الميل باستعمال المشتقة. • إيجاد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.	المشتقة. كثير الحدود. الميل.	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • ورق رسم بياني.	4
الدرس 3: القيم العظمى والقيم الصغرى.	• تعرُّف النقاط الحرجة. • إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود. • حل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.	النقطة الحرجة. القيمة العظمى. القيمة الصغرى. الميل. المشتقة	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • ورق رسم بياني.	3
عرض نتائج مشروع الوحدة.				1
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				14 حصة

الوحدة 6

نظرة عامة على الوحدة:

تعرَّف الطلبة سابقًا مفهوم الاقتران، وكيفية تمثيله بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره. وكذلك تعرَّفوا مفهوم القاطع، وكيفية إيجاد ميل المستقيم ومعادلته. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة إيجاد ميل منحنى اقتران عند نقطة التماس مع مستقيم مرسوم، وتقدير ميل منحنى اقتران عن طريق رسم المماس، وتقدير السرعه اللحظية. وكذلك إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق، وحساب السرعة والتسارع اللحظي، فضلًا عن تعرُّف مفهوم النقاط الحرجة، والقيم الصغرى، والقيم العظمى، وكيفية إيجادها، وحل مسائل حياتية عنها.

الوحدةُ 6

المشتقاتُ

Derivatives

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعمَلُ الاشتقاقُ لإيجادِ الميلِ عندَ أيِّ نقطةٍ على المنحنى؛ ما يُسهِّلُ الحساباتِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ التي يُمكِنُ نمذجتُها باستعمالِ الاقتراناتِ. ومنْ ذلكَ، حسابُ سرعةِ سيّارةٍ عندَ لحظةٍ ما، وحسابُ أعلى ارتفاعٍ تبلغُهُ كرةٌ عندَ ركلِها إلى الأعلى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تعريفَ المماسِّ، والقاطعِ، ونقطةِ التماسِّ.
- ✓ حسابَ ميلِ المستقيمِ.
- ✓ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ.
- ✓ منحنى المسافةِ – الزمنِ، ومنحنى السرعةِ – الزمنِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تقديرَ ميلِ المنحنى عنْ طريقِ رسمِ المماسِّ.
- ◄ إيجادَ مشتقةِ كثيراتِ الحدودِ.
- ◄ إيجادَ القيمِ العظمى والصغرى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ حلَّ مسائلَ حياتيةٍ عنِ القيمِ العظمى والصغرى.

52

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف التاسع

- إيجاد ميل المستقيم ومعادلته بطرائق مختلفة.
- إيجاد ميل مستقيم ممثل بيانيًّا.
- حل المعادلات الخطية.
- حل المعادلات التربيعية.
- تفسير التمثيلات البيانية للعلاقات في منحنى الموقع – الزمن.

الصف العاشر

- إيجاد ميل منحنى مماسه مرسوم.
- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- اشتقاق كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق.
- استعمال المشتقة في إيجاد السرعة والتسارع اللحظي.
- إيجاد النقاط الحرجة والقيم الصغرى والقيم العظمى.
- حل مسائل حياتية على القيم العظمى والصغرى.

الصف الحادي عشر

- إيجاد مشتقة اقتران قوة عند قيمة معطاة باستعمال التعريف العام للمشتقة.
- استعمال التعريف العام لإيجاد اقتران جديد يمثل مشتقة اقتران القوة الأصلي.
- إيجاد مشتقة اقتران قوة باستعمال قوانين الاشتقاق.
- كتابة معادلة المماس والعمودي على المماس باستعمال مشتقة اقتران القوة.
- استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقتراني قوة.
- استعمال المشتقة لإيجاد كل مما يأتي لاقتران كثير الحدود: النقاط الحرجة، نقاط القيمة العظمى المحلية والصغرى المحلية، ونقاط الانعطاف الأفقي.
- تصنيف النقاط الحرجة لاقتران كثير حدود إلى عظمى محلية أو صغرى محلية باستعمال اختبار المشتقة الثانية.
- حل مسائل وتطبيقات فيزيائية على مشتقة اقتران القوة.
- حل مسائل وتطبيقات حياتية على مشتقة اقتران القوة مثل تطبيقات القيم القصوى.

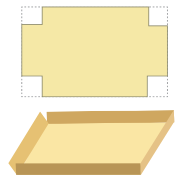
مشروع الوحدة

عملُ صندوقٍ حجمُهُ أكبرُ ما يُمكِنُ

فكرةُ المشروعِ حسابُ أكبرِ حجمٍ ممكنٍ لصندوقٍ باستعمالِ المشتقةِ.

الموادُّ والأدواتُ ورقتانِ منَ الكرتونِ المُقوّى مستطيلتا الشكلِ منَ المقاسِ نفسِهِ، مسطرةٌ، مقصٌّ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أقصُّ أربعةَ مُربَّعاتٍ متطابقةٍ.
2. أُطبِقُ الأطرافَ بعضَها على بعضٍ، فينتجُ صندوقٌ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، مفتوحٌ منَ الأعلى.
3. أحسبُ حجمَ الصندوقِ، بقياسِ كلٍّ منَ الطولِ، والعرضِ، والارتفاعِ باستعمالِ المسطرةِ. هلْ يُمكِنُ عملُ صندوقٍ أكبرَ حجمًا باستعمالِ ورقةٍ منَ المقاسِ نفسِهِ؟
4. أُعيدُ الخطواتِ السابقةَ، ولكنْ بطريقةٍ جبريةٍ، وافتراضِ أنَّ طولَ ضلعِ المُربَّعِ المقصوصِ منْ كلِّ زاويةٍ يساوي x، وأكتبُ ثلاثةَ مقاديرَ جبريةٍ تُمثِّلُ الطولَ والعرضَ والارتفاعَ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ حجمِ الصندوقِ بدلالةِ x.
5. أكتبُ اقترانًا يمثلُ حجمَ الصندوقِ $V(x)$.
6. أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ.
7. أُمثِّلُ اقترانَ الحجمِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
8. أتحقَّقُ منَ النقطةِ التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بالضغطِ على أيقونةِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا أُبيِّنُ فيهِ:

1. النتائجَ التي توصَّلَ إليْها كلُّ فردٍ في المجموعةِ.
2. بعضَ الصعوباتِ التي واجهَتْها المجموعةُ في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، وكيفَ تجاوزَتْها.
3. مقترحًا لتطبيقٍ حياتيٍّ أوْ علميٍّ تُستعمَلُ فيهِ فكرةُ المشروعِ.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
2	تعبير أفراد المجموعة عن حجم الصندوق جبريًّا.			
3	إيجاد أفراد المجموعة أكبر حجم للصندوق، وتحقُّقهم من صحة الحل.			
4	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
5	مراعاة أنْ يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحيةً.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن

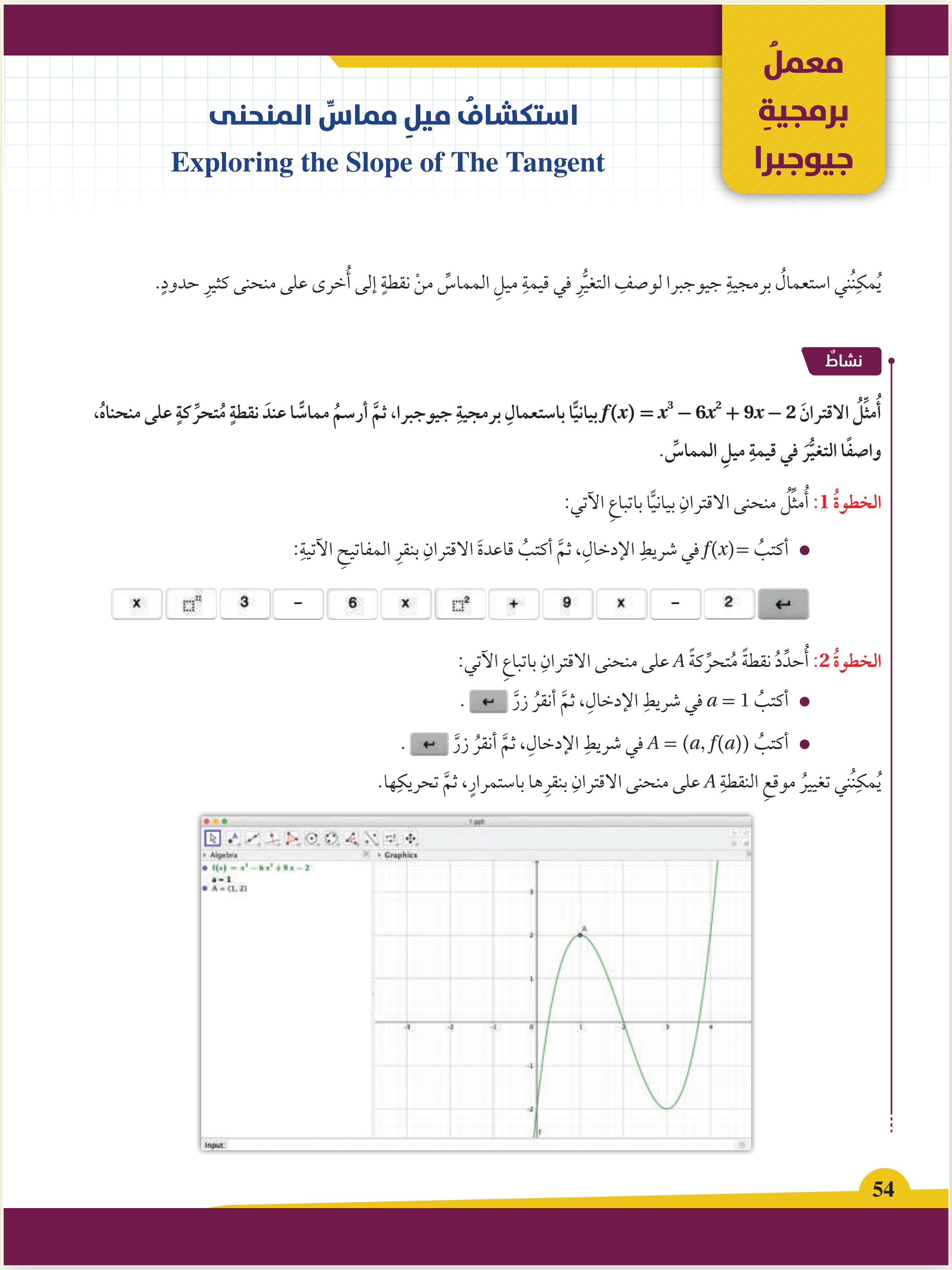
هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، بإيجاد أكبر حجم ممكن لصندوق مصنوع من قطعة ورقية مستطيلة الشكل.

خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوَّن كلٌّ منها من (5–7) طلبة، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. أُذكِّر الطلبة بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- أُوضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- أُبيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوات (1–4) بعد الانتهاء من الدرس الأول، وتُنفَّذ الخطوة (5) بعد الدرس الثاني، وتُنفَّذ الخطوات (6–8) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، أُحدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وأُناقِشهم فيها.

عرض النتائج:

- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- أطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، وأُنبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.



معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ ميلِ مماسِّ المنحنى
Exploring the Slope of The Tangent

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لوصفِ التغيُّرِ في قيمةِ ميلِ المماسِّ منْ نقطةٍ إلى أُخرى على منحنى كثيرِ حدودٍ.

نشاطٌ

أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ على منحناهُ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ بيانيًّا باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $f(x)=$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بنقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

x | ⬚^⬚ | 3 | − | 6 | x | ⬚^2 | + | 9 | x | − | 2 | ↵

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطةً مُتحرِّكةً A على منحنى الاقترانِ باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $a = 1$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أكتبُ $A = (a, f(a))$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .

يُمكِنُني تغييرُ موقعِ النقطةِ A على منحنى الاقترانِ بنقرِها باستمرارٍ، ثمَّ تحريكِها.

معمل برمجية جيوجبرا

هدف النشاط:

استعمال برمجية جيوجيبرا لوصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير حدود.

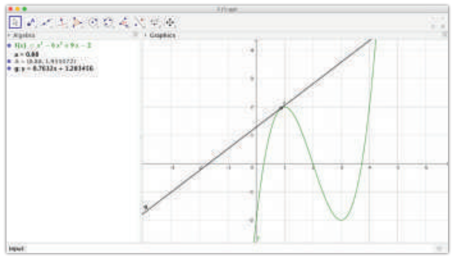
خطوات العمل:

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية.
- أطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- أُعرِّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم التمثيل البياني للاقترانات، ورسم المماس عند نقطة على اقتران، وقياس الزوايا.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ثم أطلب إليهم تنفيذه بأنفسهم.
- أطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وأتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأتأكَّد أنَّ كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- أُناقِش الطلبة في النقاط التي يكون عندها ميل الاقتران موجبًا، أو سالبًا، أو صفرًا، ثم أطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  - » هل يُؤثِّر اتجاه المماس في إشارة الميل؟
  - » هل يمكن إيجاد علاقة بين المماس والمحور x الموجب؟

إرشادات:

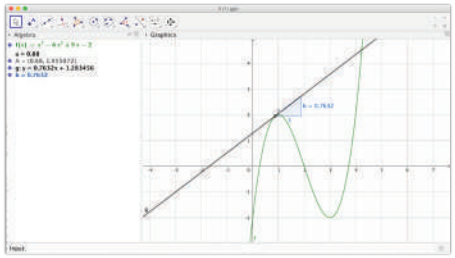
- توفيرًا للوقت، ولكيلا يضطر الطلبة إلى استعمال كتبهم في أثناء تنفيذ النشاط؛ أستعمل جهاز العرض (إنْ توافر) في المختبر لعرض صور من كتاب الطالب عن معمل برمجية جيوجبرا، ويمكنني وضع الصور في ملف العرض التقديمي (powerpoint).
- أُذكِّر الطلبة أنَّه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

الخطوةُ 3: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ A.



- أكتبُ Tangent (A, f) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أُلاحِظُ أنَّ برمجيةَ جيوجبرا تُسمّي المماسَّ g بصورةٍ تلقائيةٍ.

الخطوةُ 4: أجِدُ ميلَ المماسِّ عندَ النقطةِ A.



- أكتبُ Slope(g) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .

الخطوةُ 5: أُحرِّكُ النقطةَ A، مُلاحِظًا التغيُّرَ في قيمةِ الميلِ، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- متى يكونُ ميلُ المماسِّ موجبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ سالبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ صفرًا؟

أتدرب

أُمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا لكلٍّ منْها عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ: (1–4) أنظر ملحق الإجابات.

1) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

2) $h(x) = 3-2x-x^2$

3) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$

4) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

- أُوجِّه الطلبة إلى حل أسئلة بند (**أتدرب**) الوارد ذكرها في معمل برمجية جيوجبرا، بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط مباشرةً؛ بتطبيق ما تعلَّموه من مهارات باستعمال البرمجية.
- أختار بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم–، ثم أُناقِش طلبة الصف فيها.

إرشاد:

يمكن إعادة توزيع الطلبة في المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (**أتدرب**)؛ لكي يتبادلوا الخبرات فيما بينهم.

تنويع التعليم:

- أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط تمثيل معادلة خطية أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أتدرَّج معهم في الخطوات حتى يتمكَّنوا من تنفيذ النشاط.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، وأُحفِّزهم على تبادل الخبرات المُتعلِّقة بالمهارات التي تعلَّموها؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- إيجاد ميل مماس مرسوم عند نقطة على منحنى الاقتران.
- رسم مماسّ، وتقدير ميله عند نقطة على منحنى الاقتران.
- كتابة معادلة المماس.
- تقدير السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى الموقع–الزمن.

نتاجات التعلُّم القبلي:

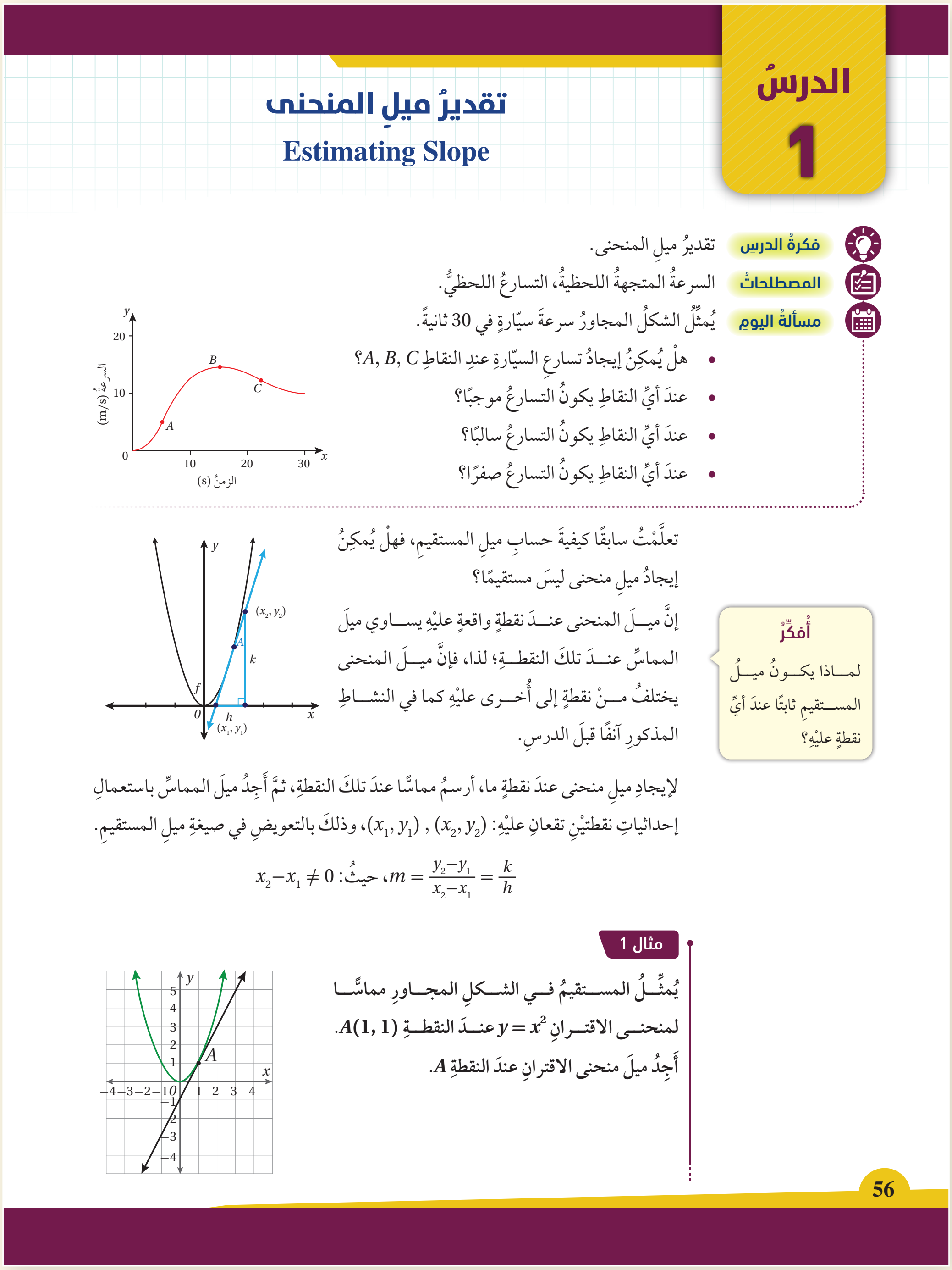
- تعرُّف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.
- إيجاد ميل مستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم.
- تفسير التمثيلات البيانية للعلاقات في منحنى الموقع – الزمن.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت)في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُمهِّد للموضوع بسؤال الطلبة عن تعريف القاطع والمماس ونقطة التماس، ثم أطلب إليهم رسم أمثلة توضيحية لكلٍّ منها على اللوح. أسألهم أيضًا عن قانون ميل المستقيم الذي درسوه سابقا، ثم أكتبه على اللوح.



الدرس 1

تقديرُ ميلِ المنحنى
Estimating Slope

فكرة الدرس تقديرُ ميلِ المنحنى.

المصطلحات السرعةُ المتجهةُ اللحظيةُ، التسارعُ اللحظيُّ.

مسألةُ اليوم يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سرعةَ سيّارةٍ في 30 ثانيةً.

- هلْ يُمكِنُ إيجادُ تسارعِ السيّارةِ عندَ النقاطِ A, B, C؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ موجبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ سالبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ صفرًا؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ ميلِ المستقيمِ، فهلْ يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى ليسَ مستقيمًا؟

إنَّ ميلَ المنحنى عندَ نقطةٍ واقعةٍ عليْهِ يساوي ميلَ المماسِّ عندَ تلكَ النقطةِ؛ لذا، فإنَّ ميلَ المنحنى يختلفُ منْ نقطةٍ إلى أُخرى عليْهِ كما في النشاطِ المذكورِ آنفًا قبلَ الدرسِ.

أُفكِّرُ لماذا يكونُ ميلُ المستقيمِ ثابتًا عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ؟

لإيجادِ ميلِ منحنى عندَ نقطةٍ ما، أرسمُ مماسًّا عندَ تلكَ النقطةِ، ثمَّ أجِدُ ميلَ المماسِّ باستعمالِ إحداثياتِ نقطتيْنِ تقعانِ عليْهِ: (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)، وذلكَ بالتعويضِ في صيغةِ ميلِ المستقيمِ.

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{k}{h}$$ ، حيثُ: $x_2-x_1 \neq 0$

مثال 1

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y=x^2$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.
أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.

56

- أطلب إلى الطلبة إيجاد الميل بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

a) $A(6, 2), B(8, 10)$

b) $C(5, 4), D(9, -10)$

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » لماذا ظهرت إشارة الميل موجبة في الفرع a، وسالبة في الفرع b؟
- أطلب إلى الطلبة إيجاد معادلة المستقيم في الفرعين a و b، مُذكِّرًا إيّاهم بصيغ معادلة الخط المستقيم.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما التسارع؟ التغير في السرعة.
  » هل يمكن حساب التسارع المتوسط بين نقطتين على المنحنى؟ نعم.
  » كيف يمكن حساب ذلك؟ بقسمة فرق السرعة على فرق الزمن بين النقطتين.
  » هل يختلف التسارع من نقطة إلى أُخرى على هذا المنحنى؟ نعم.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم عن طريق توجيه أسئلة، مثل:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » من يتّفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

أشــرح على اللوح كيفية إيجاد الميل لمماس مرسوم عند نقطة على منحنى الاقتران، مستعينًا بالتمثيل البياني الوارد في كتاب الطالب بداية الدرس.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها

مثال 1

- أرسم التمثيل البياني الوارد في المثال 1 على اللوح، مُحدِّدًا عليه المماس بصورة دقيقة.
- أُخبِر الطلبة أنّه يمكن إيجاد ميل المماس بتطبيق قانون ميل المســتقيم لأيِّ نقطتين واقعتين على المماس.
- أُعيد حساب ميل المماس، ولكن باستعمال نقطتين أُخريين لإثبات أنَّ قيمة الميل لا تتغيَّر بغض النظر عن النقطتين المُحدَّدتين على المماس.
- أسأل الطلبة عن سبب ظهور إشارة الميل موجبة، وأُرشِدهم إلى أنَّ الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور x الموجب حادة.

أخطاء شائعة:

- في أثناء شرح المثال 1، قد لا يُميِّز بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة؛ لذا أُوضِّح لهم مفهوم كلٍّ منهما.

ملاحظاتي

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المفاهيم العابرة للمواد:

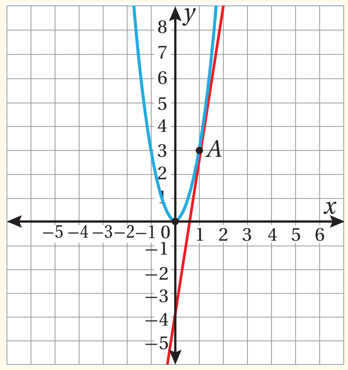
أُعزِّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلمــاء) عن طريــق حوار أُديره مــع الطلبة، وأُخبِرهم فيه أنَّهم يدرســون الآن فرعًا من فروع الرياضيات يســمى التفاضل، وأنَّ هذا الفرع قد طُوِّر في القرن الســابع عشــر الميلادي على يد نيوتن في إنجلترا، ثم ليبينز في ألمانيا؛ للمساعدة على وصف حركة الكواكب للأغراض الفلكية.

أُوجِّه الطلبة إلــى البحث في مصــادر المعرفة المناسبة عن ثلاثة علماء مشهورين بإسهاماتهم فــي علم التفاضــل، ثم كتابة مقــال من صفحة واحدة عنهم. بعد ذلك أختار أفضل 3 مقالات، ثم أعرضها على لوحة فــي الصف، أو ممرات المدرسة.

تنبيه: في أثناء شرح المثال 1، لا أقبل من الطلبة إجابات تقريبية للميل؛ لأنَّ المماس مرسوم بصورة دقيقة.

مثال إضافي

- يُمثِّل المستقيم في الشكل التالي مماسًّا لمنحنى الاقتران $y = 3x^2$ عند النقطة $A(1, 3)$. أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A.



ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو: 6

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

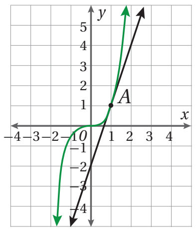
أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ منَ الرسمِ: $B(0, -1)$ وَ $C(2, 3)$، ثمَّ أحسبُ الميلَ:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ صيغةُ الميلِ

$$= \frac{3-(-1)}{2-0}$$ بالتعويضِ

$$= 2$$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 2



أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^3$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A. أنظر الهامش.

إذا لمْ يكنِ المماسُّ مرسومًا عندَ النقطةِ التي يُرادُ إيجادُ ميلِ المنحنى عندَها، فإنَّهُ يُرسَمُ باستعمالِ المسطرةِ. وبما أنَّ الرسمَ اليدويَّ ليسَ دقيقًا، فإنَّ ميلَ المماسِّ المرسومِ قدْ يختلفُ قليلًا عنِ القيمةِ الدقيقةِ لميلِ المنحنى، عندئذٍ يكونُ الناتجُ قيمةً تقريبيةً لميلِ المنحنى.

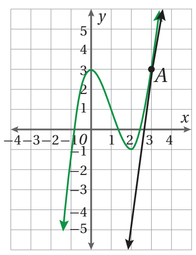
إرشادٌ

أستعملُ شبكةَ المُربَّعاتِ لتمثيلِ المنحنياتِ بيانيًّا بدقةٍ.

مثال 2

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عندَ كلِّ نقطةٍ ممّا يأتي:

1 النقطةُ $A(3, 3)$.



الخطوةُ 1: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ $A(3, 3)$ باستعمالِ المسطرةِ.

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ $A(3, 3)$, $C(2, -5)$، ثمَّ أجدُ الميلَ.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ صيغةُ الميلِ

$$= \frac{-5-3}{2-3}$$ بالتعويضِ

$$= 8$$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 8 تقريبًا.

أتعلَّمُ

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليهِ موجبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً حادةً معَ اتجاهِ محورِ x الموجبِ.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

$m = 3$

أتعلَّمْ

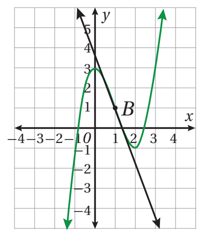
يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليْهِ سالبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً منفرجةً مع اتجاهِ محورِ x الموجبِ.

أُفكِّرُ

متى يكونُ ميلُ المنحنى صفرًا؟

2 النقطةُ $B(1, 1)$.

أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ B، ثمَّ أُحدِّدُ نقطتيْنِ عليْهِ $B(1, 1), E(0, 3.8)$، ثمَّ أَجِدُ الميلَ:



صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

بالتعويضِ $= \frac{1-3.8}{1-0}$

بالتبسيطِ $= -2.8$

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ B هوَ -2.8

3 أكتبُ معادلةَ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ $B(1, 1)$

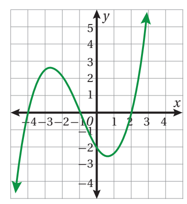
معادلةُ المماسِّ $y - b = m(x-a)$

بتعويضِ النقطةِ $B(1, 1)$ وَ $m = -2.8$ $y - 1 = -2.8(x-1)$

بالتبسيطِ $y = 3.8 - 2.8x$

أتحقق من فهمي

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُمثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ عندَ كلٍّ منَ النقطتيْنِ: $A(-4, 0), B(0,-2)$.



أنظر الهامش.

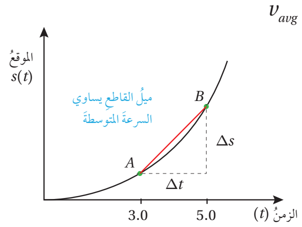
رموزٌ رياضيةٌ

- يُرمَزُ إلى التغيُّرِ في قيمةِ s بالرمزِ Δs
- يشيرُ الرمزُ $\bar{v}$ إلى سرعةِ الجسمِ المتوسطةِ في فترةٍ زمنيّةٍ ما، مثلِ $[t_1, t_2]$.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ منحنى الموقعِ – الزمنِ يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ ثابتةٍ، وأنَّهُ لا يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ مُتغيِّرةٍ. ويمكنُ حسابُ السرعةِ المتجهةِ المتوسطةِ $\bar{v}$ لجسمٍ مُتحرِّكٍ في فترةٍ زمنيةٍ، وذلكَ بقسمةِ التغيُّرِ في الموقعِ Δs على التغيُّرِ في الزمنِ Δt:

$$v_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

بالنظرِ إلى منحنى الموقعِ – الزمنِ المجاورِ لجسمٍ يتحرك في مسارٍ مستقيمٍ يتبيَّنُ أنَّ السرعةَ المتجهةَ المتوسطةَ منَ اللحظةِ $t = 3$ إلى اللحظةِ $t = 5$ تساوي ميلَ القاطعِ الذي يمرُّ بالنقطتيْنِ A وَ B على المنحنى.



أخطاء شائعة: في المثال 2، قد يعتقد بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أنَّ الميل هو الفرق بين قيمتي y؛ لذا أُرشِدهم إلى أنَّ الميل هو ظل الزاوية التي يُكوِّنها المستقيم مع محور x الموجب، وأنَّه يساوي الفرق بين قيمتي y مقسومًا على الفرق بين قيمتي x، مُوضِّحًا ذلك بالرسم.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

الميل عند النقطة $A(-4, 0)$ هو 4.5 (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند النقطة $B(0, -2)$ هو -1.5 (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

مثال 2

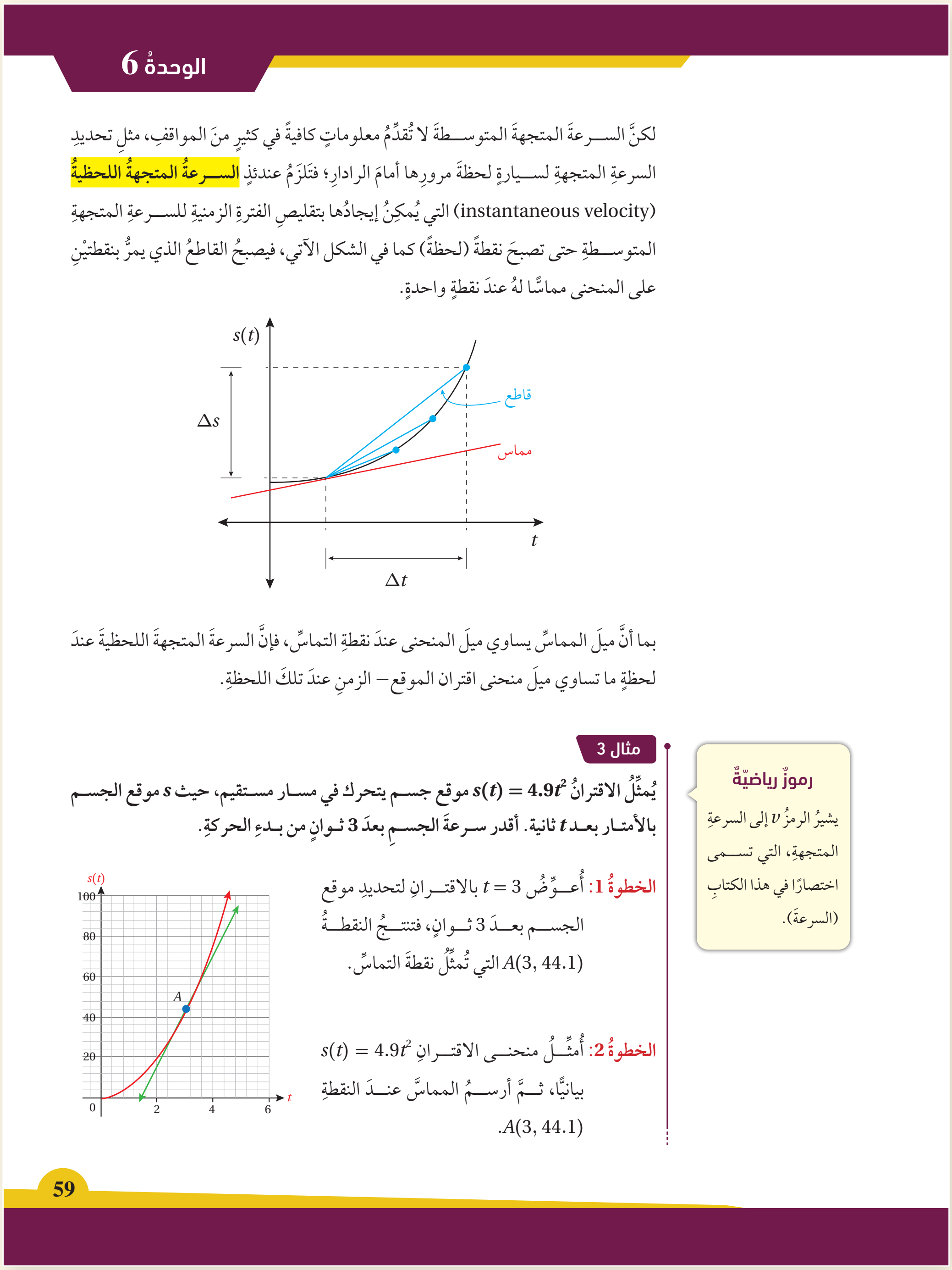
- أرسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران الوارد في المثال 2، ثم أرسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 3)$.
- أُحدِّد أيَّ نقطتين على المماس، ثم أجد الميل.
- أُخبِر الطلبة أنَّ المماس غير مرسوم بدقة؛ ما يعني أنَّ قيمة الميل غير دقيقة.
- في الفرع 2 من المثال 2، أسأل الطلبة:
  - » ما سبب ظهور إشارة الميل سالبة؟
- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُناقِشهم فيها، مُبيِّنًا أنَّ المماس كوَّن زاوية منفرجة مع المحور x الموجب.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن استعمال قيمة الميل للنقطة $B(1, 1)$ وأيِّ نقطة واقعة على المماس لكتابة معادلة المماس.
- أُذكِّر الطلبة أنَّ الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي: $y = ax + b$، حيث تُمثِّل a الميل، و b المقطع y للخط المستقيم.

إرشادات:

- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال الورق البياني لرسم التمثيل البياني للاقتران.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن استعمال برمجية جيوجبرا في المثال الثاني لعمل تمثيل بياني ومماس دقيق.
- قيمة الميل في الفرع 1 من المثال 2 هي 9، وقيمة الميل في الفرع 2 هي -3، ولكن أقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك.

تنبيهات:

- رُسِم المماس بصورة تقريبية في المثال 2؛ لذا أقبل من الطلبة الإجابات التقريبية للميل.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ الميل لا يكون معرَّفًا إذا كان المماس موازيًا لمحور y؛ لأنَّ بين قيمتي x لأيِّ نقطتين واقعتين على المماس يساوي صفرًا.



لكنَّ السرعةَ المتجهةَ المتوسطةَ لا تُقدِّمُ معلوماتٍ كافيةً في كثيرٍ منَ المواقفِ، مثلِ تحديدِ السرعةِ المتجهةِ لسيارةٍ لحظةَ مرورِها أمامَ الرادارِ؛ فتَلزَمُ عندئذٍ **السرعةُ المتجهةُ اللحظيةُ** (instantaneous velocity) التي يُمكِنُ إيجادُها بتقليصِ الفترةِ الزمنيةِ للسرعةِ المتجهةِ المتوسطةِ حتى تصبحَ نقطةً (لحظةً) كما في الشكل الآتي، فيصبحُ القاطعُ الذي يمرُّ بنقطتيْنِ على المنحنى مماسًّا لهُ عندَ نقطةٍ واحدةٍ.

بما أنَّ ميلَ المماسِّ يساوي ميلَ المنحنى عندَ نقطةِ التماسِّ، فإنَّ السرعةَ المتجهةَ اللحظيةَ عندَ لحظةٍ ما تساوي ميلَ منحنى اقتران الموقع – الزمنِ عندَ تلكَ اللحظةِ.

مثال 3

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 4.9t^2$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أقدر سرعةَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ من بدءِ الحركةِ.

الخطوةُ 1: أُعوِّضُ $t = 3$ بالاقترانِ لتحديدِ موقع الجسم بعدَ 3 ثوانٍ، فتنتجُ النقطةُ $A(3, 44.1)$ التي تُمثِّلُ نقطةَ التماسِّ.

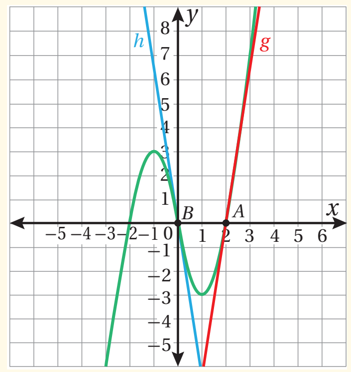
الخطوةُ 2: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $s(t) = 4.9t^2$ بيانيًّا، ثمَّ أرسمُ المماسَّ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$.

رموزٌ رياضيّةٌ

يشيرُ الرمزُ v إلى السرعةِ المتجهةِ، التي تسمى اختصارًا في هذا الكتابِ (السرعةَ).

مثال إضافي

- أُقدِّر ميل منحنى الاقتران: $y = x^3 - 4x$ عند كلٍّ من النقطتين: $A(2, 0), B(0, 0)$.



الميل عند النقطة A هو 8 (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند النقطة B هو -4 (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة الفرق بين منحنى الموقع– الزمن الذي يستعمل لحساب السرعة المتوسطة (ميل القاطع) والسرعة اللحظية (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى)، ومنحنى السرعة– الزمن الذي يستعمل لحساب التسارع المتوسط (ميل القاطع) والتسارع اللحظي (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى).
- أُمثِّل بيانيًّا الاقتران المعطى في المثال 3، ثم أرسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 44.1)$، مُوضِّحًا للطلبة أنَّ السرعة اللحظية عند نقطة هي ميل المماس لمنحنى الموقع– الزمن عند تلك النقطة.
- أُخبِر الطلبة أنَّه ليس سهلًا رسم المماس في المثال 3.
- أُثير فضول الطلبة للبحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الميل على نحوٍ أسهل وأدق.

تنبيه: أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ منحنى الموقع – الزمن الوارد في المثال 3 قد درسوه في مبحث الفيزياء.

أخطاء شائعة:

قد يخلط بعض الطلبة بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية؛ لذا أُوضِّح لهم الفرق بينهما.

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ النقطتينِ $A(3, 44.1)$ وَ $B(2, 16)$ على المماسِ، ثمَّ أستعملُهُما لحسابِ الميلِ.

صيغةُ الميلِ $m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

بالتعويضِ $= \frac{44.1 - 16}{3 - 2}$

بالتبسيطِ $= 28.1$

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$ هوَ 28.1 تقريبًا. ومنْهُ، فإنَّ سرعةَ الجسمِ اللحظيةَ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ 28.1 m/s

أفكِّرُ

إنَّ حسابَ السرعةِ اللحظيةِ برسمِ المماسِّ وتحديدِ نقطتيْنِ عليْهِ أمرٌ صعبٌ، فهلْ توجدُ طريقةٌ أسهلُ وأدقُّ لحسابِ الميلِ؟

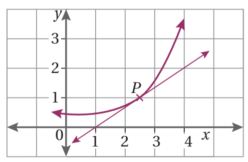
أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^2 + t$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً. أُقدِّرُ السرعةَ اللحظيةَ بعدَ 5 ثوانٍ. أنظر الهامش.

أتدرب وأحل المسائل

1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطةِ $P(2.5, 1)$.

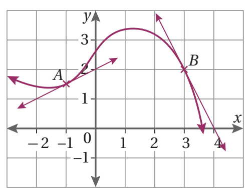
أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ P. $m = \frac{2}{3}$



2 في الشكلِ المجاورِ، رُسِمَ مماسّانِ لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطتيْنِ $A(-1, 1.5)$ وَ $B(3, 2)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ كلٍّ منْ A وَ B. الميل عند A هو: $\frac{1}{2}$

الميل عند B هو: -2



إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

السرعة بعد 5 ثوانٍ هي 11 m/s (أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

مثال إضافي

- يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 2t^2 - 1$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالمتر بعد t ثانية من بدء حركته. أُقدِّر السرعة اللحظية بعد ثانيتين.

أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من الإجابة الصحيحة: 8 m/s

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 10) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 21) (زوجي) كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 21) (فردي) كتاب التمارين: (5 – 8)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 27) كتاب التمارين: (4 – 7)

مهارات التفكير العليا

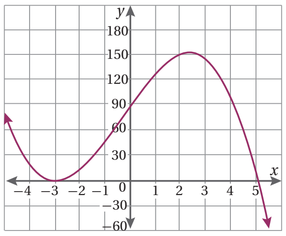
- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (27 – 26).
- أرصـــد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 26 (**تبرير**) أُخبِر الطلبة أنَّ المقصود بالنقطتين المتعاكستين اللتين ورد ذكرهما في السؤال هو النقطتان المتقابلتان على جانبي محور التماثل، ثم أكتب على اللوح بعض الأمثلة على ذلك، مثل: $(2, 4)$, $(-2, 4)$ على منحنى $y = x^2$.

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُبيَّنِ جانبًا عندَ النقطةِ $(2, 150)$، والنقطةِ $(4.5, 60)$.

الميل عند $(2, 150)$ هو: 15

الميل عند $(4.5, 60)$ هو: -75



أستعملُ جدولَ القيمِ الآتي للإجابةِ عن الأسئلةِ (7 – 4):

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

4 أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الفترةِ $0 \le x \le 4$ أنظر ملحق الإجابات.

5 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. أنظر ملحق الإجابات.

6 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. 1.9 تقريبًا.

7 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 1.5)$

أُكملُ جدولَ قيمِ الاقترانِ $f(x) = 0.1x^3$ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لحلِّ المسائلِ (10–8):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$	0	0.01	0.1	0.3375	0.8	1.5625	2.7

8 أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)=0.1x^3$ في الفترةِ $0 \le x \le 3$ أنظر ملحق الإجابات.

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. أنظر ملحق الإجابات.

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. 1.2 تقريبًا.

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

11 $y = 4x^2 + 1$ عندَ النقطةِ $(1, 5)$. أيُّ إجابة قريبة من 8

12 $y = 3 + 2x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 5)$. أيُّ إجابة قريبة من -4

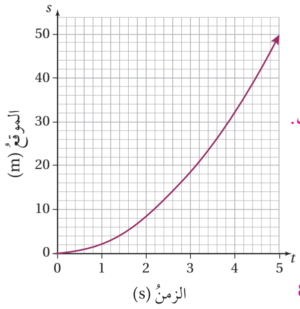
13 $y = 1 - x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 0)$. أيُّ إجابة قريبة من 2

14 $y = 5x^3 + 1$ عندَ النقطةِ $(0, 1)$. 0

15 $y = 9 - x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 5)$. أيُّ إجابة قريبة من -4

16 $y = 8 - 2x$ عندَ النقطةِ $(1, 6)$. -2

درّاجاتٌ ناريةٌ: بدأَتْ درّاجةٌ ناريةٌ الحركةَ منْ وضعِ السكونِ في مسارٍ مستقيمٍ. ويُبيِّنُ المنحنى المجاورُ موقعَ الدراجةِ خلالَ أوّلِ 5 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِها:



17 أرسمُ نسخةً منَ المنحنى، مستعيناً بالجدولِ الآتي: أنظر ملحق الإجابات.

t	0	1	2	3	4	5
$s(t)$	0	2	8	18	32	50

18 أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندما $t = 2$. أنظر ملحق الإجابات.

19 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ بدءِ الحركةِ. أيُّ إجابة قريبة من 8 m/s

20 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ 4 ثوانٍ من بدء الحركة. أنظر ملحق الإجابات.

21 أحسبُ السرعةَ المتوسّطةَ $\overline{v}$ للدراجةِ في الفترةِ الزمنيّةِ $[1, 3]$. 8 m/s

سـيّاراتٌ: أرادَ مهندسٌ أنْ يدرسَ سرعةَ سيّارةٍ تتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ وفي اتّجاهٍ واحدٍ، فسجَّلَ موقع السيارة بالنسبة لنقطة انطلاقها في لحظات زمنية محددة كما في الجدولِ الآتي، ثمَّ استعملَ القوانين الفيزيائية المتعلقة بالقوى المؤثرة على السيارة لكتابة معادلة جبرية تمثل العلاقة بين موقع السيارة والزمن على النحو الآتي: $s(t) = at + bt^2$، حيثُ a وَ b عددانِ ثابتانِ:

الزمنُ t (ثانيةٌ)	0	1	2	3	4
الموقعُ s (مترٌ)	0	5	12	21	32

22 أرسمُ منحنى اقترانِ الموقعِ – الزمنِ $s(t)$.

23 أُقدِّرُ السرعةَ عندما $t = 3$.

24 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a وَ b.

(22 – 27) أنظر ملحق الإجابات.

25 **فيزياءُ:** يمثلُ الاقترانُ $s(t) = 3t - t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s الموقعُ بالمترِ، و t الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

26 **تبريرٌ:** أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

- نقطتا تقاطعِ المنحنى معَ محورِ x.
- نقطةُ تقاطعِ المنحنى معَ محورِ y.

27 **مسـألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُقدِّرًا ميلَهُ عندَ نقطتيْنِ مُتعاكِستيْنِ عليْهِ: $(a,b), (-a, b)$.

62

5 الإثراء

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للميل عند نقطة على المنحنى، مثل الرادار الذي يرصد سرعة السيارة لحظة مرورها أمامه.
- أُؤكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (1–4) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.

6 الختام

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما الفرق بين القاطع والمماس؟
  - » ما تعريف نقطة التماس؟
  - » هل يمكن رسم المماس بدقة؟
  - » متى تكون قيمة الميل موجبةً أو سالبةً أو صفرًا؟

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تعرُّف مفهوم مشتقة كثير الحدود.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين.
- إيجاد الميل باستعمال المشتقة.
- إيجاد الســرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تقدير ميل المنحنى على نقطة واقعة عليه.
- تقدير السرعة اللحظية والتسارع اللحظي.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبِطــة بما ســيُقدَّم من موضوعــات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت)في صفحات (**أســتعد لدراســة الوحدة**) في كتــاب التمارين، ثم أطلــب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلــى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بما تعلَّموه في الدرس الســابق، ثم أكتب على اللوح السؤال الآتي:

  » يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 16t - 2t^2$، موقع جســم يتحرك في مســار مســتقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية من بدء حركته. ما ســرعة هذا الجسم بعد ثانيتين من بدء حركته؟

- أُدير حوارًا بين الطلبة عن طريقة إيجاد هذه الســرعة وَفق الطريقة المتبعة في الدرس السابق.
- أُوجِّــه الطلبة إلى حل الســؤال ضمــن مجموعات، وأُتابِعهم في أثناء ذلك.

الدرسُ 2

الاشتقاقُ
Differentiation

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مشتقةِ كثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ المشتقةُ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 80t - 5t^2$ موقعَ منطادٍ بالنســبةِ إلى سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ. ما سرعةُ المنطادِ بعدَ 10 ثوانٍ منْ إطلاقِهِ؟

تعرَّفْتُ في الدرسِ الســابقِ كيفيةَ إيجادِ الميلِ أوْ تقديرِهِ، وهيَ طريقةٌ ليسَــتْ سهلةً، وتحتاجُ إلى دقةٍ عندَ رسمِ المماسِّ. ســأتعرَّفُ في هذا الدرسِ طريقةً جبريةً أسهلَ لإيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ نقطةٍ عليهِ منْ دونِ حاجةٍ إلى رسمِ المماسِّ.

عندَ إيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ نقاطٍ مختلفةٍ عليْهِ باســتعمالِ طريقةِ ميلِ المماسِّ التي تعرَّفْتُها ســابقًا، وتنظيمِ القيمِ في الجدولِ الآتي، سأُلاحِظُ أنَّ ميلَ المنحنى عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) يساوي قيمةَ x مضروبةً في العددِ 2؛ أيْ إنَّ الميلَ m يساوي $2x$

(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(5, 25)$
m	$-4=-2\times2$	$-2=-1\times2$	$0=0\times2$	$2=1\times2$	$6=3\times2$	$8=4\times2$	$10=5\times2$

رموزٌ رياضيةٌ

تُستعمَلُ الرموزُ $\frac{dy}{dx}$، $f'(x)$، y' للتعبيرِ عنِ مشتقةِ الاقترانِ $y=f(x)$

وبالمثلِ، سأجدُ أنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) على منحناهُ هوَ $m = 3x^2$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^n$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) عليْهِ هوَ $m = nx^{n-1}$.

مشــتقةُ (derivative) الاقترانِ $f(x)$ عندَ نقطةٍ واقعةٍ على منحناهُ هيَ ميلُ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ $f'(x)$.

مفهومٌ أساسيٌّ — **مشتقةُ اقترانِ القوةِ**

- **بالكلماتِ:** عندَ اشتقاقِ الاقترانِ $f(x)=x^n$، فإنَّ أس x في المشتقةِ يكونُ أقلَّ بواحدٍ منْ أس x في الاقترانِ الأصليِّ، وإنَّ معاملَ x في المشتقةِ يساوي أس x في الاقترانِ الأصليِّ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = x^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = nx^{n-1}$.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما موقع المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ 300 m
  - » كيف يمكن إيجاد سرعة المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ برسم منحنى الموقع–الزمن، ورسم مماس عندما $t = 10$، وحساب ميله.
  - » هل توجد طريقة أُخرى أسهل وأكثر دقة لإيجاد السرعة؟ نعم.
- أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم أسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أُخرى؟
  - » أذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أُوضِّح لهم أنَّهم سيتعرَّفون في هذا الدرس طريقة سهلة لحساب الميل والسرعة والتسارع، ثم أكتب العنوان على اللوح.

3 التدريس

- أُوظِّف الشرح الوارد بداية الدرس من كتاب الطالب في إيجاد ميل منحنى الاقتران: $y = x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعة عليه، واستنتاج قاعدة مشتقة اقتران القوة.

إرشـاد: أُخبِر الطلبة بوجود عِدَّة رموز للمشتقة يمكن العثور عليها في الكتب المرجعية، أو المواقع الإلكترونية المتخصصة، ومن هذه الرموز: $y', (f(x)) \frac{d}{dx}, \frac{dy}{dx}$.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفِّز الطلبة على استعمالها.

تنبيه: قد لا يُميِّز بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط اقتران كثير الحدود من غيره؛ لذا أُوضِّح لهم ذلك.

أخطاء شائعة: قد يعتقد بعض الطلبة أنَّ المماس يُرسَم للدائرة فقط؛ لذا أَلفِت انتباههم إلى ذلك بتعريف المماس والقاطع ونقطة التماس.

ملاحظاتي

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرها في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشطة العملية. ففي بند (**مسألة اليوم**)، أُعزِّز الوعي بالقضايا الإنسانية (الهواية) عن طريق حوار أُديره مع الطلبة عن أهمية الهواية، وتأثيرها في الطاقة الإيجابية وزيادة درجة السعادة لديهم، ثم أسألهم:

- » ما هوايتك المفضلة؟
- » بماذا تشعر عند ممارسة هوايتك؟
- » أيكم لديه هوايات أُخرى؟
- » أذكرها (إنْ وُجِدت).

مثال 1

- أستعمل المثال 1 لتوضيح قاعدة اشتقاق اقتران القوة.
- أكتب على اللوح أمثلة أُخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^{25}$ $f'(x) = 25x^{24}$

2) $f(x) = x^{77}$ $f'(x) = 77x^{76}$

تنويع التعليم

- في المثال 1، قد ينسى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط طرح واحد من الأس؛ لذا أُذكِّرهم دائمًا بذلك.
- قد ينسى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط ضرب القوة في المعامل عند اشتقاق مضاعفات القوة؛ لذا أُذكِّرهم دائمًا بذلك.
- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط عند شرح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة بين المنحنيين؛ لأنّهما رُسِما معًا؛ لذا أرسم كلًّا منهما وحده، ثم أدمجهما في المستوى الإحداثي نفسه.

مثال 1

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^8$

$f'(x) = 8x^{8-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 8x^7$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = x^5$

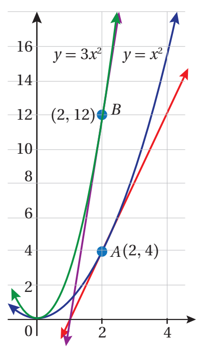
$f'(x) = 5x^{5-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 5x^4$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = x^7$ **b)** $f(x) = x^{11}$



منَ المعلومِ أنَّ قيمَ y للاقترانِ $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثالِ قيمِ y التي تُناظِرُها للاقترانِ $g(x) = x^2$. وعليْهِ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 12)$ يساوي 3 أمثالِ ميلِ منحنى الاقترانِ $g(x) = x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 4)$.

وهذا يعني أنَّ مشتقةَ $(3x^2)$ تساوي 3 أمثالِ مشتقةِ (x^2)؛ أيْ $(3\times 2x)$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ مشتقةَ الاقترانِ $f(x)= ax^n$، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ، هيَ $f'(x)= a \times nx^{n-1}$.

مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقةُ مضاعفاتِ القوّةِ ومشتقّةُ الثابتِ

- **مشتقةُ مضاعفاتِ القوةِ:** إذا كانَ $f(x) = ax^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = anx^{n-1}$.
- **مشتقةُ الثابتِ:** إذا كانَ $f(x) = c$، حيثُ c عددٌ حقيقيٌّ، فإنَّ $f'(x) = 0$؛ أيْ إنَّ مشتقةَ الاقترانِ الثابتِ تساوي صفرًا.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ استنتاجُ قاعدةٍ لمشتقةِ الاقترانِ الخطيِّ؟

64

! تنبيه:

لا أطلب إلى الطلبة اشتقاق اقتران فيه أس سالب أو أس كسري؛ لأنَّ المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة هو تعرُّف اشتقاق كثير الحدود.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) $f'(x) = 7x^6$ **b)** $f'(x) = 11x^{10}$

مثال 2

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 2x^4$

$f'(x) = 2(4x^{4-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = 8x^3$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ بالتبسيطِ

3 $f(x) = -2x$

$f'(x) = -2(x^{1-1})$ قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = -2$ بالتبسيطِ

4 $f(x) = 4$

$f'(x) = 0$ قانونُ مشتقةِ الثابتِ

أتذكَّرُ

ميلُ الاقترانِ الثابتِ يساوي صفرًا.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي: أنظر الهامش.

a) $f(x) = 5x^{12}$ b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$ d) $f(x) = -11$

مفهومٌ أساسيٌّ مشتقةُ المجموعِ ومشتقةُ الفرقِ

- **بالكلماتِ:** مشتقةُ مجموعِ كثيرَيِ الحدودِ تساوي مجموعَ مشتقتَيْهِما، ومشتقةُ الفرقِ بينَ كثيرَيِ الحدودِ تساوي الفرقَ بينَ مشتقتَيْهِما.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = g(x) \pm h(x)$، حيثُ $g(x)$ وَ $h(x)$ كثيرا حدودٍ، فإنَّ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

65

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) $f'(x) = 60x^{11}$ b) $f'(x) = -56x^7$

c) $f'(x) = 3x^5$ d) $f'(x) = 0$

مثال 2

- أُوظِّف الشرح الوارد في كتاب الطالب، والمقارنة بين ميل منحنى الاقتران: $g(x) = x^2$ وميل منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعة عليهما لها الإحداثي x نفسه؛ في استنتاج قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، مُبيِّنًا أنَّ ميل المماس عند A هو 2، وأنَّ ميل المماس عند B هو 6
- يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.
- أستعمل المثال 2 لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.

أخطاء شائعة: في المثال 2، قد يُخطِئ الطلبة في الاشتقاق؛ بنسيان الضرب في المعامل (في حال وجود معامل غير 1)؛ لذا أَلفِت انتباههم إلى ذلك.

مثال إضافي

- أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = -2x^8$ $f'(x) = -16x^7$

2 $f(x) = 9x$ $f'(x) = 9$

3 $f(x) = -1$ $f'(x) = 0$

مثال 3

أجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 2x - 6$ بالتبسيطِ

2) $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$ بالتبسيطِ

إرشادٌ: أستعملُ قواعدَ الاشتقاقِ المناسبةَ لإيجادِ المشتقةِ.

أتحقق من فهمي

أجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$ $f'(x) = x + 4$

b) $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}x^2$ $g'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}x$

ألاحِظُ منَ الأمثلةِ السابقةِ أنَّ مشتقةَ الاقترانِ هيَ اقترانٌ جديدٌ يُمثِّلُ قيمةَ ميلِ منحنى الاقترانِ الأصليِّ عندَ قيمٍ مختلفةٍ؛ لذا يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ، بتعويضِ الإحداثيِّ x لتلكَ النقطةِ في اقترانِ المشتقةِ.

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

1) ميلُ منحنى $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$.

$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ الاقترانُ الأصليُّ

$f'(x) = 6x - 18$ باشتقاقِ الاقترانِ

$f'(1) = 6(1) - 18$ بتعويضِ قيمةِ $x = 1$

$= -12$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$ هوَ -12

أتعلَّمُ: يُستعمَلُ الرمزُ $f'(a)$ للتعبيرِ عنْ مشتقةِ $f(x)$ عندما $x = a$.

مثال 3

- أستعمل صندوق (**مفهوم أساسي**) لشرح قاعدة اشتقاق مجموع كثيري حدود، ومشتقة الفرق.
- أستعمل المثال 3 لتوضيح قاعدة مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق.
- أكتب على اللوح أمثلة أُخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

إرشاد: أُثبِت للطلبة بعد شرح المثال 3 أنَّ مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفرًا، وذلك برسم التمثيل البياني لاقتران ثابت، وإيجاد الميل عند عِدَّة نقاط واقعة عليه.

تنبيه: قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في فهم المثال 3؛ لذا أطلب إليهم اشتقاق كل حد وحده، ثم جمع المشتقات لكتابة مشتقة الاقتران كاملة.

مثال إضافي

- أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3 - 4x^2$ $f'(x) = -8x$

2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

مثال 4

- أُذكِّر الطلبة أنَّ ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، مستعينًا بالشرح الوارد في بداية الدرس.
- أجد ميل منحنى الاقتران الوارد في المثال 4 باستعمال المشتقة.
- أُقدِّر الميل برسم المماس إنْ توافر وقت لذلك.
- أُقارِن بين طريقة تقدير الميل وإيجاد الميل باستعمال المشتقة من حيث دقة الناتج، وصعوبة الحل، والوقت المُستغرَق في ذلك.

- أُوضِّح للطلبة النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، مستعينًا بالنشاط الوارد في بداية الوحدة.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ الميل يساوي صفرًا عندما يكون المماس موازيًا للمحور x.
- أشرح للطلبة الطريقة الجبرية لإيجاد النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، ثم أُقارِن ذلك بالإجابة الناتجة من التمثيل البياني للاقتران.

2 قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ	$f'(x) = 0$
بتعويضِ قيمةِ المشتقةِ	$6x - 18 = 0$
بجمعِ 18 للطرفيْنِ	$6x = 18$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 6	$x = 3$

إذنْ، قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا هيَ $x = 3$.

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) ميلُ منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

b) قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ ميلَ منحنى الموقعِ – الزمنِ في لحظةٍ ما (عندَ نقطةٍ مُحدَّدةٍ) يساوي السرعةَ اللحظيةَ عندَ تلكَ النقطةِ، وبصورةٍ مشابهةٍ فإنَّ ميلَ منحنى السرعةِ – الزمنِ في لحظةٍ ما يساوي التسارعَ اللحظيَّ.

أستطيعُ الآنَ إيجادَ كلٍّ منَ السرعةِ اللحظيةِ، والتسارعِ اللحظيِّ باستعمالِ المشتقةِ بسهولةٍ منْ دونِ حاجةٍ إلى تقديرِ ميلِ المنحنى باستعمالِ المماسِّ كما في الدرسِ السابقِ.

معلومةٌ

السرعةُ اللحظيةُ تساوي مشتقةَ اقترانِ الموقعِ عندَ لحظةٍ ما.

التسارعُ اللحظيُّ يساوي مشتقةَ اقترانِ السرعةِ عندَ لحظةٍ ما.

مثال 5: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً:

1 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

السرعةُ هيَ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ السرعةِ هوَ $v(t)$.

إذنْ، $v(t) = s'(t)$.

المطلوبُ هوَ $v(3) = s'(3)$، التي تُمثِّلُ السرعةَ اللحظيةَ عندما $t = 3$.

مشتقةُ اقترانِ الموقعِ	$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
تعريفُ اقترانِ السرعةِ	$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
بتعويضِ $t = 3$	$v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$
بالتبسيطِ	$= 14.7 \text{ m/s}$

إذنْ، سرعةُ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هيَ 14.7 m/s

أتذكّرُ

يرمزُ للثواني بالرمزِ s وهوَ الحرفُ الأولُ منْ كلمةِ second وتعني ثانيةً.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

a) $m = 5$ b) $x = -2.5$

مثال إضافي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 6$، فأجد كلًّا ممّا يأتي باستعمال المشتقة:

1 ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $A(-2, 20)$.

2 قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

3 قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران 5

1) $m = 5$

2) $x = 3, x = -\frac{5}{3}$

3) $x = -2, x = \frac{10}{3}$

مثال 5: من الحياة

- أُذكِّر الطلبة أنَّه يمكن إيجاد السرعة باستعمال منحنى الموقع – الزمن.
- أُنبِّه الطلبة إلى أنَّ القيمة تُمثِّل السرعة اللحظية، لا السرعة المتوسطة.
- أُخبِر الطلبة أنَّ اقتران التسارع هو مشتقة اقتران السرعة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ قيمة التسارع موجبة بسبب تزايد السرعة.

تنبيه: في أثناء شرح المثال 5، لا أذكر للطلبة أنَّ التسارع هو المشتقة الثانية لاقتران المسافة؛ لأنَّهم لا يعرفون ذلك في هذه المرحلة.

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

إرشاد: أُوجِّه الطلبة إلى فك الأقواس أولًا في الأسئلة (26 – 24)، ثم اشتقاق الاقترانات الناتجة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 16) كتاب التمارين: (14 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 20) كتاب التمارين: (14 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (30 – 25) كتاب التمارين: (21 – 15)

---

2 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

التسارعُ هوَ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ التسارعِ هوَ $a(t)$.

إذنْ، $a(t) = v'(t)$.

المطلوبُ هوَ $a(5) = v'(5)$، التي تُمثِّلُ التسارعَ عندما $t = 5$.

$a(t) = v'(t) = 3.6t$ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ

$a(5) = 3.6(5)$ بتعويضِ $t = 5$

$= 18$ بالتبسيطِ

إذنْ، تسارعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هوَ $18\ m/s^2$

أتعلَّمُ

تكونُ قيمةُ التسارعِ صفرًا إذا كانَتِ السرعةُ ثابتةً.

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً. أَجِدُ سرعةَ الجسمِ وتسارعَهُ عندما $t = 3$. أنظر الهامش.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

1) $f(x) = -7$ $\quad f'(x) = 0$

2) $g(x) = 3x^9$ $\quad g'(x) = 27x^8$

3) $r(x) = -5x^2$ $\quad r'(x) = -10x$

4) $i(x) = x^4 - 3x$ $\quad i'(x) = 4x^3 - 3$

5) $v(x) = x^2 + x + 1$ $\quad v'(x) = 2x + 1$

6) $t(x) = 6 - 2x + x^2$ $\quad t'(x) = -2 + 2x$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7) $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$ $\quad -26.8$

8) $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}\,x$ $\quad 3.137435236 \times 10^{31}$

9) $f(x) = \frac{7\pi}{18}$ $\quad 0$

10) أَجِدُ النقطةَ التي يكونَ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 2x^2 - 10$ هوَ 12 $\quad x = 3$

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 6t + 3$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً:

11) أَجِدُ الاقترانَ $v(t)$ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الجسمِ في أيِّ لحظةٍ (t ثانيةً). $\quad v(t) = 3t^2 - 6$

12) أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 3$. $\quad 21\ m/s$

13) أَجِدُ الزمنَ t عندما تكونُ السرعةُ $6\ m/s$ $\quad t = 2$

14) أَجِدُ الاقترانَ $a(t)$ الذي يُمثِّلُ تسارعَ الجسمِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. $\quad a(t) = 6t$

15) أَجِدُ تسارعَ الجسمِ عندما $t = 5$. $\quad 30\ m/s^2$

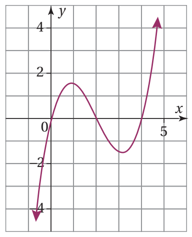
68

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

السرعة: $15.1\ m/s$

التسارع: $5\ m/s^2$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:



17) $f'(0) = 4,$
$f'(2) = -2,$
$f'(4) = 4,$

16 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 1.5x^2 - 6x + 4$

17 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

18 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ 0.5- $x = 2+\sqrt{2}\ , x = 2-\sqrt{2}$

$x = \frac{6+2\sqrt{6}}{3}\ , x = \frac{6-2\sqrt{6}}{3}$

19 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x^3 + 2$ عندَ النقطةِ التي يكونُ إحداثيُّ x لها 1 $y - 5 = 9(x-1)$

تقعُ النقطةُ $P(-2, b)$ على منحنى الاقترانِ $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:

20 أَجِدُ قيمةَ b. $b = -10$

21 أَجِدُ قيمةَ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا. $x = 1\ , x = -\frac{7}{9}$

إذا كانَتْ قيمةُ الميلِ عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلةِ $y = x^3 - 2ax$، حيثُ a عددٌ ثابتٌ، هيَ -12

22 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ a. $a = 12$

23 أَجِدُ قيمةَ ميلِ المنحنى عندما $x = 4$. 24

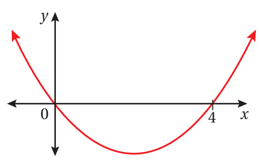
أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

26 $f(x) = (x+3)(x-3)$ $f'(x) = 2x$

25 $f(x) = (x+2)(x+5)$ $f'(x) = 2x + 7$

24 $f(x) = 2x(x+1)$ $f'(x) = 4x + 2$

27 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = kx(x-4)$، حيثُ k عددٌ حقيقيٌّ. أَجِدُ قيمةَ k إذا كانَ ميلُ المنحنى عندَ النقطةِ $(4, 0)$ هوَ 2 $k = 0.5$



مهارات التفكير العليا

(28 – 30) أنظر ملحق الإجابات.

28 **تبريرٌ:** أُثبتُ وجودَ نقطتيْنِ على منحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$، تكونُ عندَهُما مشتقةُ الاقترانِ تساوي 4، ثمَّ أَجِدُ إحداثيَّيْ هاتيْنِ النقطتيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي.

29 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمَ a, b إذا كانَ ميلُ منحنى الاقترانِ $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عندَ النقطةِ $(2, -3)$ هوَ صفرًا.

30 **تحدٍّ:** أُطلِقَتْ قذيفةٌ منْ سطحِ الأرضِ رأسيًّا إلى الأعلى، فكانَ موقعُها بالنسبةِ لسطحِ الأرضِ s بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِها $s(t) = -4.9t^2 + 147t$. ما سرعةُ القذيفةِ عندَما يكونُ موقعُها 980 m فوقَ سطحِ الأرضِ؟

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (30 – 28).
- أرصد أيّةَ أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- أُنبِّه الطلبة عند حل السؤال 29 (**تبرير**) إلى أنَّ النقطة المعطاة تُحقِّق معادلة المنحنى، وأنَّ المشتقة عندئذٍ تساوي صفرًا، وأنَّه يمكنهم تكوين معادلتين بالمتغيرين a,b وحلهما.
- أُوجِّه الطلبة عند حل السؤال 30 (**تحد**) إلى إيجاد الزمن الذي يكون عنده موقع القذيفة 980 m ثم حساب سرعة القذيفة في تلك اللحظة.

5 الإثراء

- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمشتقات.
- أُؤكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة 5 من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.

6 الختام

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما الفرق بين تقدير الميل برسم المماس وإيجاد الميل باستعمال المشتقة؟
  - » أيهما أدق؟
  - » متى يساوي ميل الماس صفرًا؟
  - » هل يستحيل أحيانًا رسم المماس؟

الدرس 3


الدرس 3

القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى
Maximum and Minimum Values

فكرةُ الدرسِ إيجادُ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى المحليةِ لكثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ نقطةٌ حرجةٌ، قيمةٌ عظمى، قيمةٌ صغرى.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $s = -16t^2 + 75t + 2.5$ الموقع (بالقدمِ) الذي تصله كرةٌ بعدَ ركلِها رأسيًّا لأعلى، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. ما أعلى موقعٍ تصلُهُ الكرةُ؟

تُسمّى النقطةُ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى كثيرِ الحدودِ صفرًا **النقطةَ الحرجةَ** (critical point).
في الشكلِ المجاورِ، A وَ B نقطتانِ حرجتانِ؛ لأنَّ ميلَ المنحنى عندَ كلٍّ منْهُما صفرٌ.

تُسمّى القيمةُ d في النقطةِ $A(c, d)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها موجبةٌ، وعنْ يمينِها سالبةٌ، **القيمةَ العظمى المحليةَ** (local maximum)؛ لأنَّها أكبرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها.
وتُسمّى القيمةُ h في النقطةِ $B(e, h)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها سالبةٌ، وعنْ يمينِها موجبةٌ، **القيمةَ الصغرى المحليةَ** (local minimum)؛ لأنَّها أصغرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها.

لغةُ الرياضياتِ
يشيرُ مصطلحُ (النقطةُ الحرجةُ) إلى النقطةِ (x, y)، ويشيرُ مصطلحُ (القيمةُ الحرجةُ) إلى الإحداثيِّ x للنقطةِ الحرجةِ.

مثال 1

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى المحليّةِ والقيمِ الصغرى المحليّةِ للاقترانِ $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إنْ وُجِدَتْ).

الخطوةُ 1: أَجِدُ القيمَ الحرجةَ؛ أيْ قيمَ x التي ميلُ المنحنى عندها صفرٌ.

$f'(x) = 3x^2 - 12$	مشتقةُ الاقترانِ
$3x^2 - 12 = 0$	بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ
$3x^2 = 12$	بجمعِ 12 للطرفيْنِ
$x^2 = 4$	بقسمةِ الطرفيْنِ على 3
$x = \pm 2$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، توجدُ نقطتانِ حرجتانِ لمنحنى الاقترانِ عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأنَّ مشتقةَ الاقترانِ تساوي صفرًا عندَ هاتيْنِ النقطتيْنِ.

أتعلَّمُ
يمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى، وذلكَ باختيارِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

نتاجات الدرس

- إيجـاد القيـم العظمى والقيـم الصغـرى لكثيرات الحدود.
- حل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف القطع المكافئ، وإيجاد رأس القطع المكافئ.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة **(الفقرات)** المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت)في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح أيَّ اقتران تربيعي، مثل: $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- أسأل الطلبة عن أقل قيمة ممكنة لـ $f(x)$ قد تنتج عند التعويض في الاقتران.
- أسأل الطلبة عن إحداثيات رأس القطع المكافئ.
- أرسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران التربيعي، ثم أسألهم:
  » ما أقل قيمة للاقتران؟
  » هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أقل قيمة وأكبرها لـ $f(x)$؟

ملاحظاتي

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما شكل المسار الذي تسلكه الكرة؟ قطع مكافئ.
  » ماذا يحدث لسرعة الكرة بعد ركلها؟ تتناقص سرعة الكرة حتى تصل إلى الصفر، ثم تهبط إلى الأرض.
  » كيف يمكن معرفة أعلى موقع تصله الكرة هندسيًّا؟ برسم منحنى الموقع-الزمن، وملاحظة أعلى موقع من الرسم.
  » هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أعلى موقع تصله الكرة؟ نعم.
  » كيف يمكن الاستفادة من درس الاشتقاق في معرفة أعلى موقع؟ عن طريق إيجاد سرعة الكرة بالاشتقاق، ثم جعل السرعة صفرًا لإيجاد الزمن وتعويضه بمعادلة الموقع.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم عن طريق توجيه أسئلة، مثل:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » من يتّفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

- أُوظِّف الشرح الوارد قبل المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح معنى النقاط الحرجة، وكيفية إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

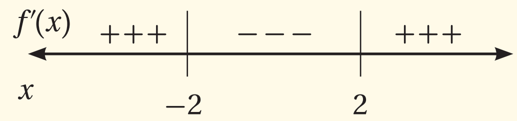
مثال 1

- أستعمل المشتقة لإيجاد النقطتين اللتين يساوي عندهما الميل صفرًا، مُبيِّنًا للطلبة أنَّهما نقطتان حرجتان.
- أختبر إشارة الميل (المشتقة) حول كل نقطة، ثم أُصنِّفها إلى عظمى وصغرى باستعمال جدول الإشارات.
- أستعمل التمثيل البياني لتصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى وصغرى، بوصف ذلك طريقةً بديلةً عن الإشارات.

تنويع التعليم:

يمكن اختبار إشارة المشتقة حول النقاط الحرجة في المثال الأول باستعمال خط الأعداد وحساب المشتقة عند عدد واحد في كل قسم من الأقسام التي قُسِّم إليها خط الأعداد لتحديد إشارتها:

$$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15,$$
$$f'(0) = 3(0)^2 - 12 = 0 - 12 = -12,$$
$$f'(3) = 3(3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$$



تنبيه:

- في هذا الدرس، يتعيَّن على الطلبة معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى من دون تصنيفها إلى محلية ومطلقة؛ فلا أذكر لهم ذلك.
- لا أذكر للطلبة النقطة التي لا تكون عندها مشتقة الاقتران موجودة بوصفها نقطةً حرجةً؛ لأنَّ المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة هو كثير الحدود.

إرشاد: بعد شرح المثال 1، أُثبِت للطلبة أنَّه لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى للاقتران الثابت والاقتران الخطي، وذلك بحل مثال على كلٍّ منهما على اللوح، مستعينًا برسم التمثيل البياني لكل اقتران.

التقويم التكويني:

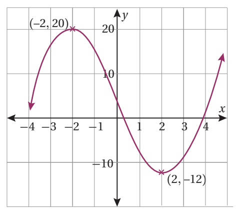
أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

الخطوةُ 2: لتحديدِ أيُّ النقاطِ الحرجةِ يوجدُ عندها قيمةٌ عظمى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ، أختبرُ إشارةَ ميلِ المنحنى حولَ كلٍّ منْهُما، وذلكَ بتعويضِ بعضِ القيمِ القريبةِ منْها.

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	−1.17
إشارةُ الميلِ	موجبةٌ		سالبةٌ

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	−1.17	0	1.23
إشارةُ الميلِ	سالبةٌ		موجبةٌ

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = -2$ منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ محليّةٌ عظمى عندما $x = -2$، هيَ $f(-2) = 20$، وتتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = 2$ منْ سالبةٍ إلى موجبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ محليّةٌ صغرى عندما $x = 2$، هيَ $f(2) = -12$.



طريقةٌ بديلةٌ: يُمكِنُ أيضًا تحديدُ إذا كانَ يوجدُ عندَ النقطةِ الحرجةِ قيمةٌ عظمى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ بتمثيلِ منحنى الاقترانِ بيانيًّا. فعندَ تمثيلِ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ، فإنَّ النقطةَ $(-2, 20)$ تبدو أعلى منَ النقاطِ المجاورةِ لها على المنحنى، وبذلكَ تساوي القيمةُ العظمى 20، وتبدو النقطةُ $(2, -12)$ أخفضَ منَ النقاطِ المجاورةِ لها ، وبذلكَ تساوي القيمةُ الصغرى -12

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى المحليّةَ للاقترانِ $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إنْ وُجِدَتْ).

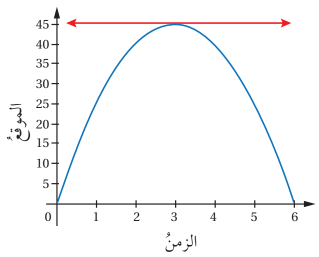
إرشادٌ

إذا لمْ تتغيّرْ إشارةُ المشتقّةِ منْ مُوجبةٍ إلى سالبةٍ أوْ العكسِ حولَ النقطةِ الحرجةِ؛ فلا يكونُ للاقترانِ قيمةٌ عُظمى ولا صُغرى عندَ تلكَ النقطةِ.

أُفكِّرُ

لماذا لا توجدُ قيمٌ عظمى وقيمٌ صغرى للاقترانِ الثابتِ؟

لماذا لا توجدُ قيمٌ عظمى وقيمٌ صغرى للاقترانِ الخطِّيِّ الذي مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ؟



يُمثِّلُ الإحداثيُّ y للنقطةِ التي يتغيَّرُ عندها اتجاهُ حركةِ الجسمِ منَ الصعودِ إلى الهبوطِ قيمةً عظمى لمنحنى الموقعِ– الزمنِ؛ لأنَّ مشتقةَ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ تساوي صفرًا (المماسُّ أفقيٌّ)؛ لذا يُمكِنُ استعمالُ المشتقةِ لتحديدِ النقطةِ التي يبلغُ عندها الجسمُ أعلى موقعٍ.

أخطاء شائعة:

- قد يخلط بعض الطلبة بين مفهوم النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؛ لذا أُبيِّن لهم الفرق بينها، مُذكِّرًا إيّاهم أنَّ كل نقاط القيم القصوى هي نقاط حرجة، وليست كل نقطة حرجة نقطة قيمة قصوى؛ إذ يجب أنْ تتغيَّر إشارة المشتقة (الميل) حول النقطة الحرجة لتكون نقطة قيمة قصوى.
- قد يُخطِئ بعض الطلبة في اختبار الإشارة حول النقطة الحرجة عند تصنيفها إلى عظمى وصغرى بالتعويض في الاقتران؛ لذا أُصحِّح لهم ذلك، مُبيِّنًا أنَّه يجب التعويض في المشتقة التي تُمثِّل الميل.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

له قيمة عظمى عند $x = -1$ هي $f(-1) = -11$.

وله قيمة صغرى عند $x = 1$ هي $f(1) = -19$.

مثال 2: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ موقعَ كرةٍ بالنسبةِ لسطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ ركلِها رأسيًّا لأعلى:

1 أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ ركلِها.

يُمثِّلُ الاقترانُ المُعطى $s(t)$ موقعَ الكرةِ. ومنَ المعلومِ أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ تساوي اقترانَ السرعةِ. لإيجادِ سرعةِ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ، أُعوِّضُ $t = 3$ في $s'(t)$:

$s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ اقترانُ الموقعِ

$s'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ

$s'(3) = 25 - 10(3)$ بتعويضِ $t = 3$ في $s'(t)$

$= -5$ بالتبسيطِ

إذنْ، سرعةُ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ -5 m/ s

2 أَجِدُ أعلى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ.

يُمثِّلُ أعلى ارتفاعٍ تصلُ إليْهِ الكرةُ قيمةً عظمى لاقترانِ الموقعِ $s(t)$.

لإيجادِ القيمةِ العظمى، أُحدِّدُ القيمَ التي تُحقِّقُ المعادلةَ $s'(t) = 0$:

$s'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الموقعِ

$25 - 10t = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$25 = 10t$ بجمعِ $10t$ للطرفيْنِ

$t = 2.5$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 10

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $t = 2.5$

t	2.5
إشارةُ الميلِ	+ + + 0 − − −

إذنْ، تصلُ الكرةُ أعلى ارتفاعٍ عندما $t = 2.5$ s، وقيمتُهُ هيَ $s(2.5)$:

$s(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2$ بتعويضِ $t = 2.5$ في $s(t)$

$= 32.25$ بالتبسيطِ

إذنْ، أعلى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ هوَ 32.25 m

أتعلَّمُ

سرعةُ الكرةِ هيَ 5 m/s، والإشارةُ السالبةُ تدلُّ على أنَّ الكرةَ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها، وأخذَتْ تهبطُ نحوَ الأرضِ.

أتعلَّمُ

بما أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ هيَ اقترانُ السرعةِ، فإنَّ القيمَ التي تساوي عندها مشتقةُ اقترانِ الموقعِ صفرًا هيَ القيمُ التي تنعدمُ عندها السرعةُ.

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 20t - 5t^2$ موقعَ حجرٍ بالنسبةِ إلى سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ قذفِهِ رأسيًّا لأعلى: أنظر الهامش.

a) أَجِدُ سرعةَ الحجرِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ قذفِهِ.

b) أَجِدُ أعلى ارتفاعٍ يصلُهُ الحجرُ.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) 0 m/s **b)** 20 m

مثال إضافي

- أجد القيم العظمى والقيم الصغرى للاقتران: $f(x) = 3x^2 - x$ (إنْ وُجِدت) باستعمال المشتقة.

القيمة الصغرى للاقتران عندما $x = 0$ هي $f(0) = 0$، والقيمة العظمى له عندما $x = 2$ هي $f(2) = 4$.

مثال 2: من الحياة

- أُوظِّف التمثيل البياني الوارد بعد المثال 1 من كتاب الطالب في توضيح أعلى ارتفاع قد يصل إليه الجسم قبل البدء بشرح المثال 2.
- أُناقِش الطلبة في المثال 2؛ باشتقاق الاقتران، ومساواة المشتقة بالصفر، وإيجاد النقطة الحرجة، واختبار إشارة المشتقة حولها للتأكُّد أنَّها عظمى، ثم التعويض في الاقتران لإيجاد أعلى ارتفاع تصله الكرة.

تنويع التعليم:

يمكن شرح المثال 2 عن طريق رسم التمثيل البياني للاقتران، وإيجاد أكبر قيمة تُمثِّل أعلى ارتفاع تصله الكرة.

إرشاد: أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى بنقر أيقونة Extremum، ونقر المنحنى بعد رسم منحنى الاقتران.

مثال إضافي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6 + 4t - t^2$ موقع كرة بالنسبة إلى سطح الأرض بالمتر بعد t ثانية من ركلها:

1 أجد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من ركلها.

2 m/s

2 أجد أعلى موقع تصله الكرة.

10 m

مثال 3: من الحياة

- أُخبِر الطلبــة أنّه توجد عِدَّة تطبيقــات للقيم العظمى والقيم الصغرى، غير الســرعة والتسارع، مثل إيجاد أكبر مساحة.
- أُبيِّــن للطلبة أنَّ الاقتران المعطى يُمثِّل المســاحة عن طريق إيجاد العلاقة بين الأبعاد والمحيط.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ المســاحة تكون أكبر ما يمكن عند نقطة القيمة العظمى لاقتران المساحة.
- أُؤكِّد للطلبة أنَّه يجب اختبار إشــارة المشــتقة حول النقطة الحرجة؛ لتصنيفها إلى عظمى وصغرى.

توسعة:

أُوجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن أمثلة حياتية مشابهة للمثال 3.

مثال إضافي

لدى مُزارِع 36 m من الســياج، أراد أنْ يُســيِّج به حظيرة مستطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا:

1 أُبيِّن أنَّ الاقتران: $A(x) = x(18-x)$ يُمثِّل مســاحة الحظيرة.

$2x + 2y = 36 \Rightarrow y = 18-x$

$A(x) = x(18-x)$

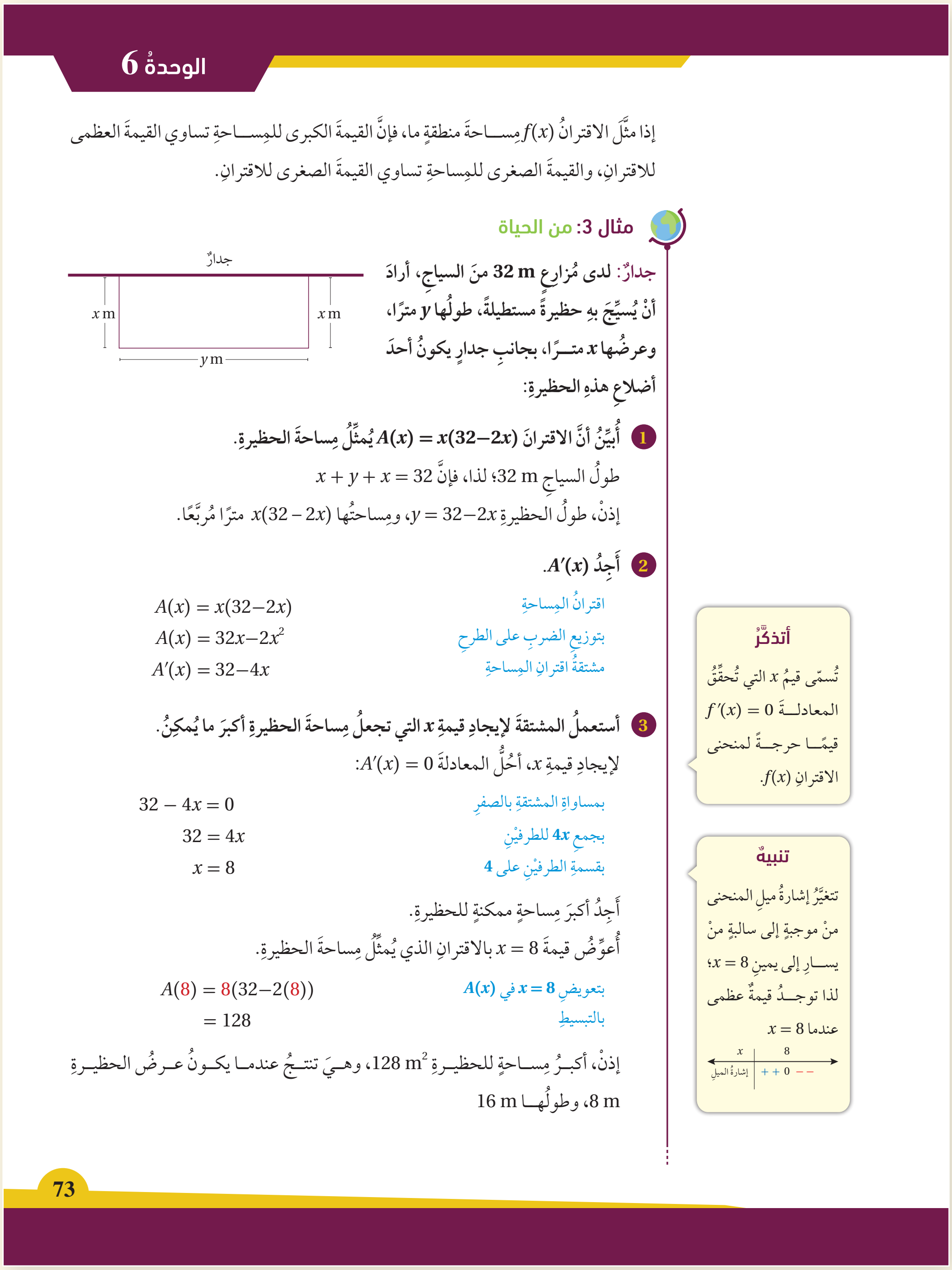
2 أجد $A'(x)$

$A(x) = 18x - x^2$

$A'(x) = 18 - 2x$

3 أستعمل المشــتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

$x = 9$ m



إذا مثَّلَ الاقترانُ $f(x)$ مِســاحةَ منطقةٍ ما، فإنَّ القيمةَ الكبرى للمِســاحةِ تساوي القيمةَ العظمى للاقترانِ، والقيمةَ الصغرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ الصغرى للاقترانِ.

مثال 3: من الحياة

جدارٌ: لدى مُزارِعٍ 32 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يُسيِّجَ بِهِ حظيرةً مستطيلةً، طولُها y مترًا، وعرضُها x متــرًا، بجانبِ جدارٍ يكونُ أحدَ أضلاعِ هذهِ الحظيرةِ:

1 **أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = x(32-2x)$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.**

طولُ السياجِ 32 m؛ لذا، فإنَّ $x + y + x = 32$

إذنْ، طولُ الحظيرةِ $y = 32-2x$، ومِساحتُها $x(32-2x)$ مترًا مُربَّعًا.

2 **أَجِدُ $A'(x)$.**

$A(x) = x(32-2x)$ اقترانُ المِساحةِ

$A(x) = 32x-2x^2$ بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ

$A'(x) = 32-4x$ مشتقةُ اقترانِ المِساحةِ

3 **أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحظيرةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.**

لإيجادِ قيمةِ x، أَحُلُّ المعادلةَ $A'(x) = 0$:

$32 - 4x = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$32 = 4x$ بجمعِ $4x$ للطرفيْنِ

$x = 8$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 4

أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ.

أُعوِّضُ قيمةَ $x = 8$ بالاقترانِ الذي يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.

$A(8) = 8(32-2(8))$ بتعويضِ $x = 8$ في $A(x)$

$= 128$ بالتبسيطِ

إذنْ، أكبرُ مِساحةٍ للحظيرةِ $128\ m^2$، وهيَ تنتجُ عندما يكونُ عرضُ الحظيرةِ 8 m، وطولُها 16 m

أتذكَّرُ

تُسمّى قيمُ x التي تُحقِّقُ المعادلةَ $f'(x) = 0$ قيمًا حرجةً لمنحنى الاقترانِ $f(x)$.

تنبيهٌ

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ منْ يسارِ إلى يمينِ $x = 8$؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $x = 8$

x	+ + 0 − − (8)
إشارةُ الميلِ	+ + 0 − −

معلومةٌ

بنى عزُّ الدين أسامةُ قلعةَ عجلونَ (أحدَ قادةِ صلاحِ الدينِ الأيوبيِّ)، وذلكَ عامَ 1184م/580هـ. تمتازُ هذهِ القلعةُ بمتانةِ بنائِها، وموقعِها الاستراتيجيِّ المُطِلِّ.

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ صورةً مستطيلةَ الشكلِ لقلعةِ عجلونَ، محيطُها **72 cm**، ومساحتُها **A cm²**: أنظر الهامش.

a) أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 36x - x^2$ يُمثِّلُ مساحةَ الصورةِ.

b) أجِدُ $A'(x)$.

c) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مساحةَ الصورةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

d) أجِدُ أكبرَ مساحةٍ ممكنةٍ للصورةِ.

أتدرب وأحل المسائل

(1–10) أنظر ملحق الإجابات.

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5) $f(x) = 18x^2 - x^4$

6) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7) $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8) $f(x) = 2x^3 + 7$

9) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاعَ سهمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ:

11) أجِدُ سرعةَ السهمِ بعدَ 3 ثوانٍ. -9.8 m/s

12) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ أعلى ارتفاعٍ يصلُهُ السهمُ. 20.8 m

13) يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(50-x)$ مساحةَ مستطيلٍ، حيثُ x الطولُ بالمترِ. ما أكبرُ مساحةٍ ممكنةٍ للمستطيلِ؟

625 m²

74

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

a) $2x + 2y = 72 \Rightarrow y = 36 - x$

$A(x) = x(36 - x) = 36x - x^2$

b) $A'(x) = 36 - 2x$

c) 18

d) 324 cm²

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (12 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 20 ,(15 – 13) كتاب التمارين: (12 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 21 ,(19 – 16) كتاب التمارين: (12 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 21) ,14 كتاب التمارين: (17 – 12)

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (24 – 21).
- أرصـــد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

5 الإثراء

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عـــدد آخر أصغر منه يساوي 45. أجد العددين بحيث يكون ناتج ضرب مربع العدد الصغير في العدد الكبير أكبر ما يمكن.

10,15

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيـــذ الخطوات (6–8) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلـــى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنســخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمســات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصر كافّة متوافرة يوم العرض.

6 الختام

- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:

» مــا الفرق بين النقطــة الحرجــة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؟

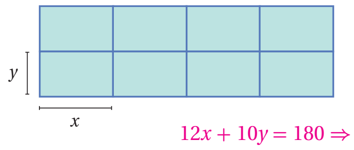
» ما الخطوات الواجب اتباعها لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لاقتران؟

- أطلب إلى الطلبة حل الســؤال الوارد في بند (**مسألة اليوم**).

14 للاقتـرانِ $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثـلاثُ نقـاطٍ حرجـةٍ. أَجِـدُ إحداثيـاتِ هـذهِ النقـاطِ، مُصنِّفًـا إيّاهـا إلـى عظمـى، وصغـرى محليـة. $(0, 3)$: صغرى، $(0.5, 3.4375)$: عظمى، $(2, -5)$: صغرى.

15 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمةٌ حرجةٌ عندما $x = 3$. $k = -\frac{1}{6}$

لدى مُزارِعٍ 180 m منَ الشِّـباكِ، أرادَ أنْ يصنعَ منْها حظائرَ لأغنامِهِ، طولُ كلٍّ منْها x مترًا، وعرضُها y مترًا كما في الشكلِ المجاورِ:



16 أُبيِّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ x وَ y هيَ $y = 18 - 1.2x$ $12x + 10y = 180 \Rightarrow y = 18 - 1.2x$

17 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثِّلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ.
$A(x) = 2(18 - 1.2x)(4x)$
$= 144x - 9.6x^2$

18 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 7.5$

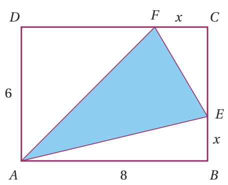
19 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ كليةٍ ممكنةٍ للحظائرِ. $540\ m^2$

20 **برهانٌ:** أُثبِتُ أنَّ الاقترانَ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليسَ لهُ قيمٌ حرجةٌ. $f'(x) = 6x^2 + 6x + 4$
لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة؛ لأنَّ مُميِّزها سالب.

مهارات التفكير العليا

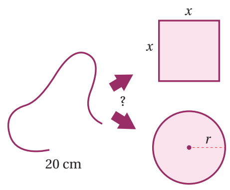
21 **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمتَي الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(1, 3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المثلثَ AFE الذي تقعُ رؤوسُهُ على أضلاعِ المستطيلِ $ABCD$:



22 اعتمـادًا علـى القياسـاتِ المعطـاةِ فـي الشـكلِ، أُبيِّـنُ أنَّ الاقترانَ $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ المثلثِ AFE. أنظر ملحق الإجابات.

23 أستعملُ المشـتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ المثلثِ AFE أصغرَ ما يُمكِنُ. $x = 4$



24 **تحدٍّ:** سـلكٌ طولُهُ 20 cm، يـرادُ قصُّهُ لعملِ مُربَّعٍ ودائـرةٍ. أُحدِّدُ موقعَ القصِّ بحيثُ يكونُ مجموعُ مِساحتَي المُربَّعِ والدائرةِ أصغرَ ما يُمكِنُ. أنظر ملحق الإجابات.

اختبار نهاية الوحدة:

- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أختار بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتها في اليوم التالي.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأسئلة (35-31) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x - 1$ عندَ النقطةِ $x = 5$ هوَ:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$
c) -1 d) 0

2 إذا كانَ $f(x) = x(2x+1)$، فإنَّ $f'(x)$ يساوي:

a) x b) $2x+1$
c) $2x^2 + x$ d) $4x+1$

3 قيمةُ x التي عندَها قيمةٌ عظمى للاقترانِ $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هيَ:

a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$
c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

4 إذا مثَّلَ الاقترانُ $s(t) = t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً، فإنَّ سرعةَ الجسمِ بوحدةِ m/s عندما $t = 1$ هيَ:

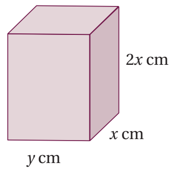
a) 0 b) 1
c) 2 d) 4

5 إذا كانَ $h(x) = 2x^2 + x$، فأَجِدُ $h'(x)$، ثمَّ أُبيِّنُ أنَّ $x(1 + h'(x)) = 2h(x)$. أنظر الهامش.

6 إذا وقعَتِ النقطةُ $P(-1, c)$ على منحنى الاقترانِ $f(x) = 5x^2 + 2$، فأَجِدُ قيمةَ c، ثمَّ أُحدِّدُ إذا كانَ الميلُ موجبًا أوْ سالبًا عندَ النقطةِ P. $c = 7$
الميل سالب.

7 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x) = 4x^3 + 2$ عندَ النقطةِ التي إحداثيُّ x لها -1
أنظر الهامش.

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ قالبًا يُستعمَلُ لصنعِ لَبِنِ البناءِ، وتبلغُ مِساحةُ سطحِهِ الكليةُ $600\ cm^2$:



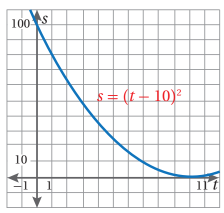
8 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$ يُمثِّلُ حجمَ القالبِ.
أنظر الهامش.

9 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ الحجمَ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = \sqrt{50}$

10 أَجِدُ أكبرَ حجمٍ ممكنٍ للقالبِ. $942.8\ cm^3$

11 يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^2 + 1$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانية. أَجِدُ السرعةَ بعدَ ثانيتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ t عندما تبلغُ السرعةُ 6 m/s
4 m/s $t = 3$ s

أطلقَتْ سيّارةُ سُمَيَّةَ جرسَ إنذارٍ لتعبئةِ الوَقودِ، فتحركت في مسار مستقيم نحو محطةِ الوَقودِ.



يُمثِّلُ المنحنى في الشكلِ المجاورِ العلاقةَ بينَ موقعِ السيارةِ بالأمتار (s) بالنسبةِ إلى الزمنِ (t) بالثواني:

12 أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ ثانيتيْنِ منَ انطلاقِ جرسِ تعبئةِ الوَقودِ. -16 m/s

13 أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ 10 ثوانٍ. 0 m/s

76

إجابات – اختبار نهاية الوحدة:

5) $h'(x) = 4x + 1$

$$x(1 + 4x + 1) = 4x^2 + 2x = 2h(x)$$

7) $f'(x) = 12x^2 \Rightarrow f'(-1) = 12$

$m = 12$ $f(-1) = -2$

معادلة المماس هي:

$$y + 2 = 12(x+1) \Rightarrow y = 12x + 10$$

8) $2(xy) + 2(2xy) + 2(2x^2) = 600 \Rightarrow y = \frac{100}{x} - \frac{2}{3}x$

$$V(x) = \left(\frac{100}{x} - \frac{2}{3}x\right)(x)(2x)$$

$$= 200x - \frac{4}{3}x^3$$

تدريب على الاختبارات الدولية

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حل الأسئلة في بند (**تدريب على الاختبارات الدولية**) فرديًّا، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أحفّز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدّية، وأحرص على تضمين اختباراتي المدرسية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانات الآتيةِ:

(14–23) أنظر الهامش.

14) $f(x) = 2\pi^3$

15) $f(x) = x^8$

16) $f(x) = -3x^4$

17) $f(x) = x$

18) $f(x) = 1-2x$

19) $f(x) = 4-5x^2 + x^3$

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقترانات الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

20) $f(x) = 17$

21) $f(x) = 5x + 4$

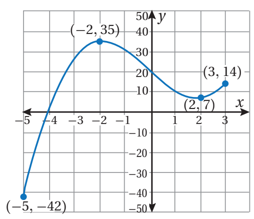
22) $f(x) = x^2-5x + 6$

23) $f(x)=2x^3-4x^2+2x+1$

24) تُمثِّلُ العلاقةُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً. ما الزمنُ الذي تساوي عندَهُ السرعةُ 14.7m/s؟ $t = 3$ s

25) أجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = kx - x^3$ نقطةٌ حرجةٌ عندما $x = -1$ $\quad k = 3$

اعتمادًا على التمثيلِ البيانيِّ الآتي:

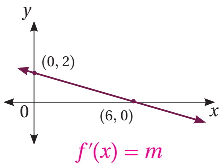


26) أحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى موجبًا. الفترتان: $(-\infty, -2)$، و $(2, \infty)$

27) أحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى سالبًا. $(-2, 2)$

28) أحدِّدُ النقطةَ (النقاطَ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى صفرًا. النقطتان: $(-2, 35)$، و $(2, 7)$

29) إذا كانَ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ هوَ منحنى الاقترانِ $f(x)$، فأجِدُ $f'(x)$. $\quad f'(x) = m$



ميل هذا المستقيم هو: $m = \frac{2-0}{0-6} = \frac{-1}{3}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

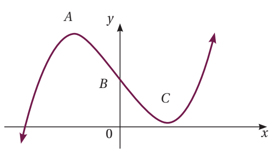
30) جميعُ قيمِ x التي عندها قيمٌ عظمى أوْ قيمٌ صغرى محليةٌ للاقترانِ $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هيَ:

a) $-1, 0, 1$ b) $-1, 0$ c) $0, 1$ d) $-1, 1$

31) عددُ النقاطِ الحرجةِ للاقترانِ $f(x) = (x-3)^2$ هوَ:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3-12x + 17$ الذي لهُ قيمةٌ عظمى عندَ النقطةِ A، وقيمةٌ صغرى عندَ النقطةِ C، ويقطعُ محورَ y عندَ النقطةِ B:



32) أجِدُ $f'(x)$. $\quad f'(x) = 3x^2 - 12$

33) أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ B. $\quad -12$

34) أجِدُ إحداثيَّيْ كلٍّ منَ النقطتيْنِ A وَ C.

$A = (-2, 33)$

$B = (2, 1)$

77

إجابة الأسئلة:

14) $f'(x) = 0$

15) $f'(x) = 8x^7$

16) $f'(x) = -12x^3$

17) $f'(x) = 1$

18) $f'(x) = -2$

19) $f'(x) = -10x + 3x^2$

20) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

21) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

22) $(2.5, -0.25)$: صغرى.

23) $(\frac{1}{3}, 1.296)$: عظمى.

$(1, 1)$: صغرى.

كتاب التمارين

أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

إيجادُ ميلِ المستقيمِ (الدرسُ 1)

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتَينِ ممّا يأتي:

1) $(3, 3), (5, 7)$ $\frac{1}{2}$

2) $(6, 1), (4, 3)$ -1

3) $(-2, -6), (-2, 6)$ غير معرّف

4) $(5, -7), (0, -7)$ 0

5) $(-1, 0), (0, -5)$ -5

6) $(4, 1), (12, 8)$ $\frac{7}{8}$

7) $(-1, 2), (3, 5)$ $\frac{3}{4}$

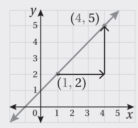
8) $(-1, -2), (-4, 1)$ -1

9) $(1, 2), (-3, 2)$ 0

10) $(1, 5), (1, -4)$ غير معرّف

مثالٌ: أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتَينِ ممّا يأتي:

a) (1, 2), (4, 5)



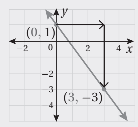
صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 2)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 5)$: $= \frac{5-2}{4-1}$

أُبسِّطُ $= \frac{3}{3} = 1$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 1

b) (0, 1), (3, −3)



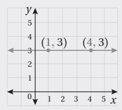
صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(0, 1)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(3, -3)$: $= \frac{-3-1}{3-0}$

أُبسِّطُ $= -\frac{4}{3}$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو $-\frac{4}{3}$

c) (1, 3), (4, 3)



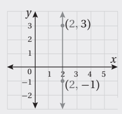
صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 3)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 3)$: $= \frac{3-3}{4-1}$

أُبسِّطُ $= \frac{0}{3} = 0$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 0

d) (2, 3), (2, −1)



صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

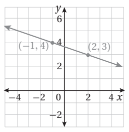
أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 3)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(2, -1)$: $= \frac{-1-3}{2-2}$

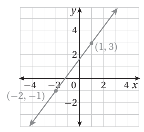
أُبسِّطُ $= \frac{-4}{0}$

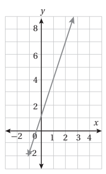
إذنْ، ميلُ هذا المستقيمِ غيرُ مُعرَّفٍ.

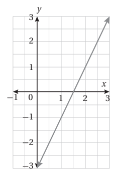
إيجادُ ميل مستقيمٍ ممثَّلٍ بيانيًّا (الدرسُ 1)

أجدُ ميلَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

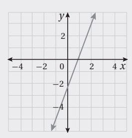
11)  $\frac{-1}{3}$

12)  $\frac{4}{3}$

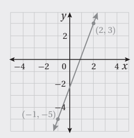
13)  3

14)  2

مثالٌ: أجدُ ميلَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ.



أختارُ نقطتينِ على المستقيمِ وأجدُ الميلَ.



صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عَنْ (x_1, y_1) بِـ $(-1, -5)$ وَعَنْ (x_2, y_2) بِـ $(2, 3)$: $= \frac{3-(-5)}{2-(-1)}$

أُبسّطُ $= \frac{8}{3}$

حَلُّ المعادلاتِ الخطّيةِ (الدرسُ 2)

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

15) $5x + 5 = 4 - 7x$ $x = \frac{-1}{12}$

16) $2(1 - 2x) = 8x - 3$ $x = \frac{5}{12}$

17) $3(4x - 2) = 8(x + 6)$ $x = \frac{27}{2}$

مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ $3x + 5 = x - 3$

المعادلةُ الأصليةُ	$3x + 5 = x - 3$
بطرحِ x منَ الطرفيْنِ	$2x + 5 = -3$
بطرحِ 5 منَ الطرفيْنِ	$2x = -8$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$x = -4$

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ (الدرسُ 2)

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

18) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 2, x = 1$

19) $x^2 + 6x + 9 = 0$ $x = -3$

20) $x^2 - 4x + 7 = 0$ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ: $x^2 + x - 6 = 0$

أَحُلُّ هذهِ المعادلةَ باستعمالِ التحليلِ إلى العواملِ:

	$x^2 + x - 6 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x+3)(x-2) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x + 3 = 0, x - 2 = 0$
بحَلِّ المعادلتيْنِ الناتجتيْنِ	$x = -3, \quad x = 2$

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

يُمكِنُ أيضًا حَلُّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أَجِدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = 1, c = -6$

القانونُ العامُّ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

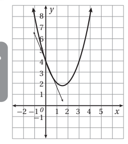
بالتعويضِ، والتبسيطِ $= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x_1 = \frac{-1-5}{2}, x_2 = \frac{-1+5}{2}$

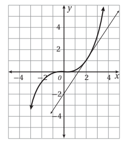
إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

كتاب التمارين

الدرسُ 1
تقديرُ ميلِ المنحنى
Estimating Slope



1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2 - 3x + 4$ عندَ النقطةِ $A(0, 4)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A. -2.6، أو إجابة قريبة منها.



2 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = \frac{1}{8}x^3$ عندَ النقطةِ $A(2, 1)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.
$m = \frac{3}{2}$

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x + 1$ عندَ النقطةِ $(2, 3)$.
أنظر رسوم الطلبة، وأقبل الإجابات القريبة من 9

4 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = 4x - 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, -4)$.
أنظر رسوم الطلبة، وأقبل الإجابات القريبة من -8

5 يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 40t - 16t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالمترِ، وَ t الزمنُ بالثواني. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ اللحظيةَ بعدَ ثانيتيْنِ. أنظر رسوم الطلبة، وأقبل الإجابات القريبة من -24

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-2 \le x \le 2$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-7	-2	1	2	1

6 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. أنظر ملحق الإجابات.

7 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. -2 (أقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

8 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 2)$

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-1 \le x \le 3$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. أنظر ملحق الإجابات.

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. 2 (أقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

11 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 0)$

الدرسُ 2
الاشتقاقُ
Differentiation

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = -\frac{7}{3}$ $f'(x) = 0$

2 $f(x) = \frac{8}{5}$ $f'(x) = 0$

3 $f(x) = -6x$ $f'(x) = -6$

4 $f(x) = 3.2x$ $f'(x) = 3.2$

5 $f(x) = 3x^{41}$ $f'(x) = 123x^{40}$

6 $f(x) = -x^{64}$ $f'(x) = -64x^{63}$

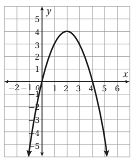
7 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$

8 $f(x) = 7x^3 + 6x^2 - x$ $f'(x) = 21x^2 + 12x - 1$

9 $f(x) = (x + 4)(x - 2)$ $f'(x) = 2x + 2$

10 $f(x) = (x - 5)^2$ $f'(x) = 2x - 10$

أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = 4x - x^2$ في الشكلِ المجاورِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



11 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 4 - 2x$

12 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقطتَيْ تقاطعِهِ معَ محورِ x الميل عند $(0, 0)$ هو: 4، وعند $(4, 0)$ هو: -4

13 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ 1 $(1.5, 3.75)$

14 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ -2 $(3, 3)$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-1)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

15 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $f'(-1) = -5$

16 $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ $f'(-1) = 5$

17 أَجِدُ النقطةَ التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x) = x^2 - 5x + 6$ يساوي -9 $(-2, 20)$

إذا كانَ $f(x) = x^2 + 5x + 7$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

18 ميلُ المنحنى $f(x)$ عندَما $x = 2$ 9

19 قيمةُ x التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x)$ يساوي 0 -2.5

20 تُمثِّلُ العلاقةُ $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ الموقعَ (بالمترِ) لجسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ t الزمنُ بالثواني.
أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندَما $t = 2$ 7 m/s

21 إذا كانَ $f(x) = ax^n + b$، حيثُ a، وَ b عددانِ حقيقيانِ، وَ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فأَجِدُ $f'(x)$ $f'(x) = nax^{n-1}$

الدرسُ 3
القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى
Maximum and Minimum Values

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ): (1–10) أنظر ملحق الإجابات.

1 $f(x) = 2$

2 $f(x) = -3$

3 $f(x) = 2x - 1$

4 $f(x) = 5x + 3$

5 $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6 $f(x) = x^2 - 8x + 7$

7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

8 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

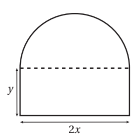
9 $f(x) = x^3(4 - x)$

10 $f(x) = (x + 1)(x - 2)$

11 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k، علمًا بأنَّ للاقترانِ $f(x) = kx^2 + x$ قيمةً حرجةً عندَما $x = 1$ $k = -0.5$

12 أَجِدُ العددَيْنِ الموجبيْنِ اللذيْنِ مجموعُهُما 150، وحاصلُ ضربِهِما أكبرُ ما يُمكِنُ. $x = 75, y = 75$

13 يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(9 - x)$ مِساحةَ غرفةٍ مستطيلةٍ في مُخطَّطٍ أَعدَّتْهُ المهندسةُ شفاءُ، حيثُ x الطولُ بالمترِ.
أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للغرفةِ. $20.25\ m^2$



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ حديقةً محيطُها 80 m، وهيَ على شكلِ مستطيلٍ طولُهُ $2x$ مترًا، وعرضُهُ y مترًا، وبجانبِهِ نصفُ دائرةٍ:

14 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 80x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحديقةِ. أنظر ملحق الإجابات.

15 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحديقةِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 11.202$

16 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحديقةِ. $448.08\ m^2$

17 أَجِدُ قيمتَيِ الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(-4, -3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

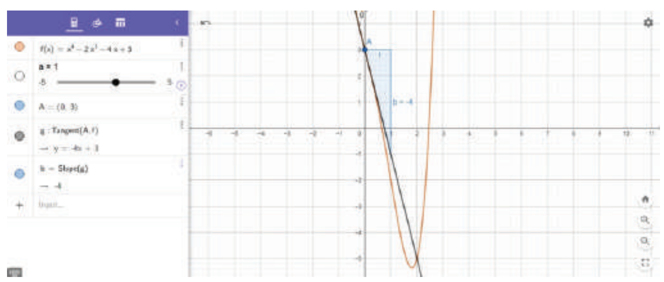
معمل برمجية جيوجبرا:

1) 

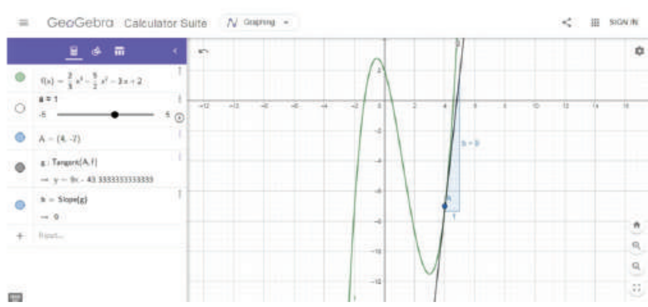
يكون الميل سالبًا لكل $x < 1$، وصفرًا عندما $x = 1$، وموجبًا لكل $x > 1$

2) 

يكون الميل موجبًا لكل $x < -1$، وصفرًا عندما $x = -1$، وسالبًا لكل $x > -1$

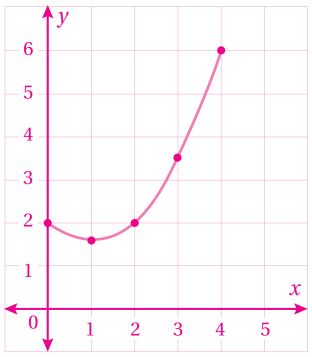
3) 

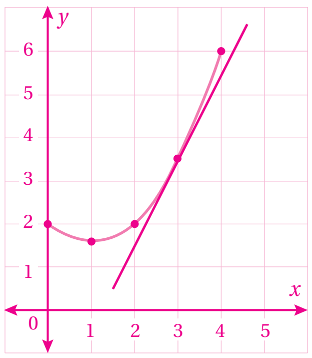
يكون الميل سالبًا لكل $x < 1.81$، وصفرًا عندما $x = 1.81$، وموجبًا لكل $x > 1.81$

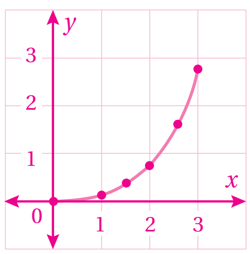
4) 

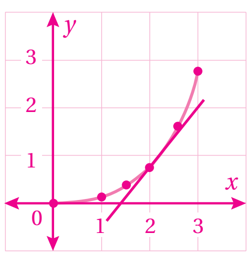
يكون الميل سالبًا لكل $-0.5 < x < 3$، وصفرًا عندما $x = -0.5$، و $x = 3$، وموجبًا لكل $x > 3$، ولكل $x < -0.5$

الدرس 1:

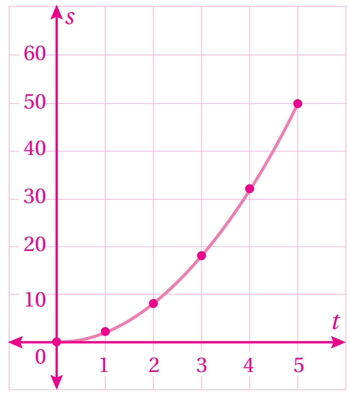
4) 

5) 

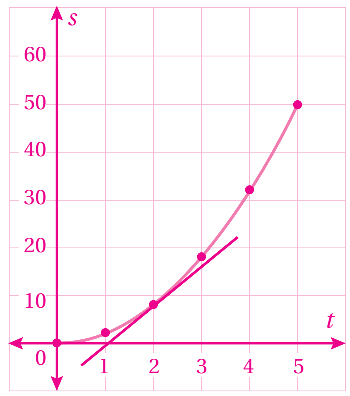
8) 

9) 

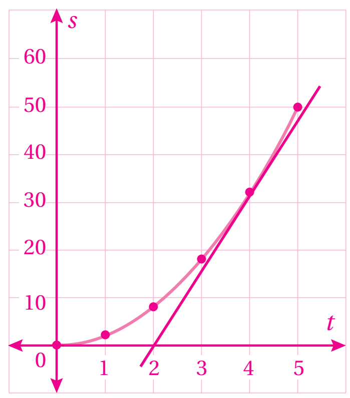
17)



18)

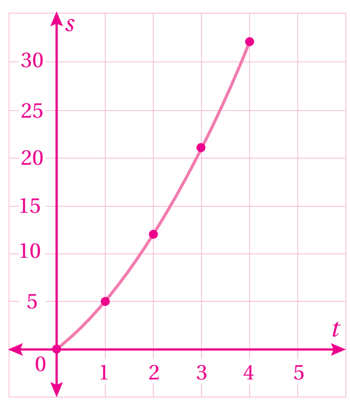


20)

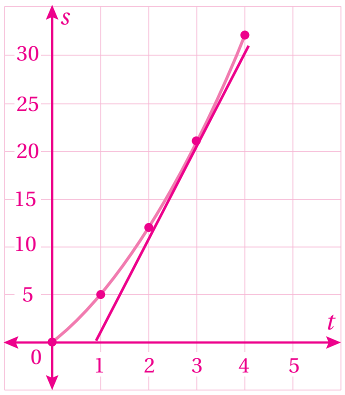


السرعة بعد 4 ثوانٍ هي: $16\ \text{m/s}$

22)



23)



السرعة عندما $t = 3$ هي $10.5\ \text{m/s}$ تقريبًا.

24) $s(1) = 5 \Longrightarrow a + b = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

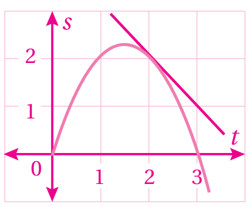
$s(2) = 12 \Longrightarrow 2a + 4b = 12 \Longrightarrow a + 2b = 6 \ldots\ldots(2)$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2)، فإنَّ $b = 1$، وبتعويض $b = 1$ في المعادلة (1)، فإنَّ $a = 4$.

25) أرسم المنحنى ومماسًّا عند $(2, 2)$، مُقدِّرًا ميله.

(أقبل من الطلبة أيَّ إجابة قريبة من -1).

سرعة الجسم هي $1\ \text{m/s}$ تقريبًا عكس اتجاه حركته في البداية.



26) أنظر رسوم الطلبة.

يتقاطع المنحنى مع المحور x عند $(8, 0)$ و $(-2, 0)$، وميله عند $(8, 0)$ هو 10 (أقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية حادة مع المحور x، وميله عند $(-2, 0)$ هو -10 (أقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x، ويتقاطع المنحنى مع المحور y عند $(0, -16)$، وميله عندها هو -6 (أقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x.

27) أنظر رسوم الطلبة.

أقبل إجابات الطلبة التي تُمثِّل اقترانًا من الدرجة الثانية ومماسين عند نقطتين متقابلتين ومتعاكستين حول محور تماثل المنحنى.

سيختار معظم الطلبة الاقتران: $f(x) = x^2$ لسهولته؛ لذا أُحفِّزهم إلى ذكر أمثلة غيره.

الدرس 2:

28) $f'(x) = x^2 - 5$

$x^2 - 5 = 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

وبتعويض قيم x في الاقتران، أجد الإحداثي y :

$f(-3)= 10, f(3) = -2$

إذن، النقطتان هما: $(-3, 10), (3, -2)$.

29) $y' = 3ax^2 + 2bx$

النقطة $(2, -3)$ واقعة على المنحنى، فتُحقِّق معادلته، إذن:

$8a + 4b + 5 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -8$

والميل عندئذٍ هو صفر؛ أيْ إنَّ:

$3a(2)^2 + 2b(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0$

بحل هاتين المعادلتين، أجد أنَّ:

$a = 2$، و $b = -6$

30) $s(t) = -4.9t^2 + 147t = 980$

$\Rightarrow t^2 - 30t + 200 = 0$

$\Rightarrow (t-20)(t-10) = 0 \Rightarrow t = 20, t = 10$

$v(t) = s'(t) = -9.8t + 147$

$v(10) = -98 + 147 = 49 \text{ m/s}$

$v(20) = -196 + 147 = -49 \text{ m/s}$

الدرس 3:

1) $(2, -1)$: صغرى.

2) $(-3, -12)$: صغرى.

3) $(2.5, 7.25)$: عظمى.

4) $(-3, 40.5)$: عظمى.

$(2, -22)$: صغرى.

5) $(0, 0)$: صغرى.

$(-3, 81)$: عظمى.

$(3, 81)$: عظمى.

6) $(-1, 8)$: عظمى.

$(1, 0)$: صغرى.

7) $(-2, 12)$: عظمى.

$(2, -20)$: صغرى.

8) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

9) $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 5.09)$: عظمى.

$(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2.9)$: صغرى.

10) $(-2, 66)$: عظمى.

$(\frac{4}{3}, 47.48)$: صغرى.

21) $f'(x) = 2x + a$

$f'(1) = 2x + a = 0 \Rightarrow a = -2$

$f(1) = 1 - 2 + b = 3 \Rightarrow b = 4$

توجد عند النقطة $(1, 3)$ قيمة صغرى؛ لأنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من سالبة إلى موجبة من يسار $x = 1$ إلى يمينه، حيث إنَّ

$f'(0) = -2, f'(2) = 2$

22) $H(x)=48-\left[\left(\frac{1}{2}(x)(6-x)\right)+\left(\frac{1}{2}(8)(x)\right)+\left(\frac{1}{2}(6)(8-x)\right)\right]$

$H(x)=48-\left(3x-\frac{1}{2}x^2+4x+24-3x\right)=24-4x+\frac{1}{2}x^2$

24) $A_1 = x^2$ مساحة المربع.

$d_1 = 4x$ محيط المربع.

$A_2 = \pi r^2$ مساحة الدائرة.

$d_2 = 2\pi r$ محيط الدائرة.

$4x + 2\pi r = 20 \Rightarrow x = \frac{20-2\pi r}{4}$

$A = x^2 + \pi r^2$

$= \left(\frac{20-2\pi r}{4}\right)^2 + \pi r^2$

$= \left(\frac{1}{4}\pi^2 + \pi\right) r^2 - 5\pi r + 25$

$A' = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi$

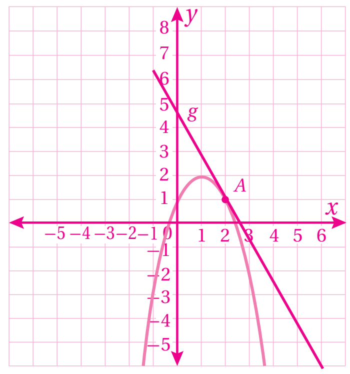
$\left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi = 0 \Rightarrow r \approx 1.4$

$\Rightarrow x \approx 2.8$

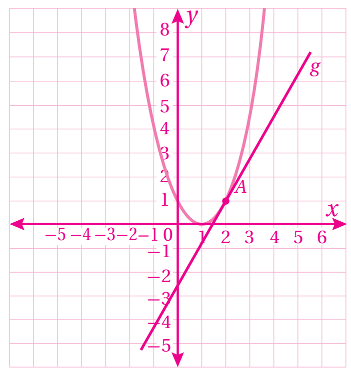
موقع القص يكون تقريبًا على بُعْد 11.2 cm من طرف السلك. يُكوِّن هذا الجزء مربعًا، ويُكوِّن الجزء الآخر دائرة محيطها 8.8 cm

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

6)



9)



إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

1) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

2) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

3) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

4) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

5) له قيمة صغرى عندما $x = -1$، هي: 0

6) له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: -9

7) له قيمة عظمى عندما $x = 0$، هي: 5

له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: -27

8) له قيمة عظمى عندما $x = -5$، هي: 100

له قيمة صغرى عندما $x = 1$، هي: -8

9) له قيمة عظمى عندما $x = 3$، هي: 27

10) له قيمة صغرى عندما $x = 0.5$، هي: -2.25

14) $2x + 2y + \pi x = 80 \Rightarrow y = 40 - \frac{\pi}{2}x - x$

$$A(x) = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$= 2x\left(40 - \frac{\pi}{2}x - x\right) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$= 80x - \pi x^2 - 2x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$= 80x - \frac{\pi}{2}x^2 - 2x^2 = 80x - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2$$

17) $a = 2, b = 1$

قيمة صغرى؛ لأنَّ إشــارة المشــتقة تتغيَّر من ســالبة قبل -4 إلى موجبة بعدها، حيث:

$$f'(-5) = -0.5, f'(-2) = 1$$

ملاحظاتي

الوحدة
7

المتجهاتُ
Vectors

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
الدرس 1: المتجهات في المستوى الإحداثي.	• تعرُّف المتجه، وكتابته بالصورة الإحداثية، وتمثيله في المستوى الإحداثي. • إيجاد مقدار المتجه، وتحديد اتجاهه. • إيجاد السرعة المتجهة.	المتجه. المركبة الأفقية. المركبة الرأسية. الصورة الإحداثية. الوضع القياسي. السرعة المتجهة.	• برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: جمع المتجهات وطرحها.	• التمييز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، والتعبير عنها بالرموز. • حل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا وجبريًّا. • تعرُّف المتجه الصفري. • إيجاد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية.	المتجهان المتساويان. المتجهان المتوازيان. معكوس المتجه. المحصلة.	• برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	4
الدرس 3: الضرب القياسي.	• إيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين. • تعرُّف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه. • إيجاد قياس الزاوية بين متجهين. • حساب مقدار الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.	الضرب القياسي. الشغل.	• برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
عرض نتائج مشروع الوحدة.				1
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				13 حصة

الوحدة 7

نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة المتجهات في مبحث الفيزياء، ومثَّلوها بصورة هندسية. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة كيفية كتابة المتجه بالصورة الإحداثية، وتمثيله في المستوى الإحداثي، وإيجاد مقداره واتجاهه، وسيتعلَّمون أيضًا جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي، ويُفسِّرون دلالة ذلك في مسائل حياتية. وكذلك سيتعلَّمون الضرب القياسي للمتجهات، وإيجاد الزاوية بين متجهين، وحساب الشغل، وحل مسائل حياتية عنها.

الوحدة 7

المتجهاتُ
Vectors

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

لفهمِ تأثيرِ قوةٍ ما في جسمٍ، يجبُ تحديدُ كلٍّ منْ مقدارِ هذهِ القوةِ، واتجاهِها، في ما يُعرَفُ بالمتجهِ. في هذهِ الوحدةِ، سأتعلَّمُ كثيرًا عنِ المتجهاتِ وتطبيقاتِها الحياتيةِ، منْ مثلِ تحديدِ تأثيرِ الرياحِ في حركةِ السفنِ الشراعيةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ حلَّ المعادلاتِ الخطِّيةِ بمُتغيِّريْنِ.
✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ في المستوى الإحداثيِّ.
✓ إيجادَ إحداثيَّيْ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.
✓ النسبَ المثلثيةَ للزوايا ضمنَ الدورةِ الكاملةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◂ المتجهاتِ، وكيفيةَ تمثيلِها على المستوى الإحداثيِّ.
◂ جمعَ المتجهاتِ، وطرحَها، وضربَها القياسيَّ.
◂ التفسيرَ الهندسيَّ للمتجهاتِ، وبعضَ التطبيقاتِ الحياتيةِ عليْها.
◂ إيجادَ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

78

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف التاسع

- حل معادلات خطية بمتغير واحد.
- حل معادلات تربيعية بمتغير واحد.
- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة في المثلث قائم الزاوية.

الصف العاشر

- تعرُّف المتجهات، وتمثيلها في المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- إيجاد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية.

الصف الثاني عشر

- جمع متجهين مكتوبين بالصورة الإحداثية، أو بصورة توافق خطي لمتجهات وحدة قياسية أو طرحهما أو ضرب متجه في ثابت وتفسير هذه العمليات هندسيًّا أو جبريًّا.
- استعمال متجه الوحدة، ومتجه الموقع، ومتجه الإزاحة.
- كتابة معادلة مستقيم عُلِم فيها متجه الموقع لنقطة عليه، واتجاه المتجه، أو عُلِم فيها متجها الموقع لنقطتين على المستقيم.
- تحديد إذا كان المستقيمان متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، وإيجاد نقاط التقاطع بينهما (إنْ وُجِدت).
- إيجاد الضرب القياسي لمتجهين في الفضاء.
- استعمال المتجهات والضرب القياسي في إيجاد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد.

مشروعُ الوحدةِ

المتجهاتُ في الجغرافيا

فكرةُ المشروعِ أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ باكتشافِ استعمالاتٍ للمتجهاتِ في الخرائطِ الجغرافيةِ بناءً على ما ستتعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورةٍ لخريطةِ الوطنِ العربيِّ أوِ الشرقِ الأوسطِ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ بجهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ إحداثياتِ بعضِ العواصمِ العربيةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أنقرُ أيقونةَ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظْتُها.
   - أُظهِرُ الشبكةَ فوقَ الصورةِ بنقرِ الزرِّ الأيمنِ لفأرةِ الحاسوبِ، ثمَّ اختيارِ (الإعداداتُ) Settings ، ومنْها أختارُ Background Image
   - أَجِدُ إحداثياتِ أيِّ عاصمةٍ عربيةٍ على الخريطةِ باختيارِ أيقونةِ A منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ موقعِ العاصمةِ على الصورةِ، فتظهرُ الإحداثياتُ على الشريطِ الجانبيِّ.
3. أرسمُ متجهًا بينَ أيِّ عاصمتيْنِ بنقرِ أيقونةِ المتجهِ منْ شريطِ الأدواتِ.
4. أَجِدُ المسافةَ على الخريطةِ بينَ مدينةِ عمّانَ وأربعِ عواصمَ عربيةٍ باستعمالِ مقدارِ المتجهِ، ثمَّ أُقارِنُها بالمسافاتِ الحقيقيةِ، وأكتبُ مقياسَ الرسمِ، مُنظِّمًا النتائجَ في جدولٍ.
5. أَجِدُ اتجاهَ أربعِ عواصمَ عربيةٍ بالنسبةِ إلى مدينةِ عمّانَ باستعمالِ الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ، والحساباتُ التي أجريْتُها في خطواتِ المشروعِ.
- المعلوماتُ الجديدةُ التي تعرَّفْتُها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومقترحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

79

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
2	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
3	مراعاة أنْ يكـون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحيةً.			
4	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
5	عـرض معلومة جديدة تعلَّمها أفراد المجموعة في أثناء البحث والعمل في المشروع.			
6	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: المتجهات في الجغرافيا.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، باكتشاف استعمالات المتجهات في الخرائط الجغرافية.

خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوَّن كلٌّ منها من (7–5) طلبة، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك أذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- أُوضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- أُبيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوات (3–1) بعد الانتهاء من الدرس الأول، وتُنفَّذ الخطوة (4) بعد الدرس الثاني، وتُنفَّذ الخطوة (5) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، أُحدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وأُناقِشهم فيها.

عرض النتائج:

- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- أُوضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلُّب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- أطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، وأُنبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم التالية.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف المتجه، وكتابته بالصورة الإحداثية، وتمثيله في المستوى الإحداثي.
- إيجاد مقدار المتجه، وتحديد اتجاهه.
- إيجاد السرعة المتجهة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- حل مثلث قائم الزاوية، وإيجاد النسب المثلثية لزواياه.

مراجعة التعلُّم القبلي:

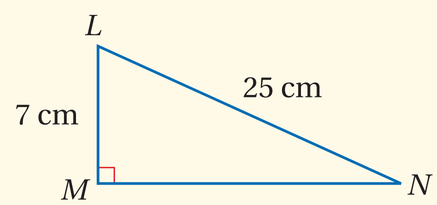
- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

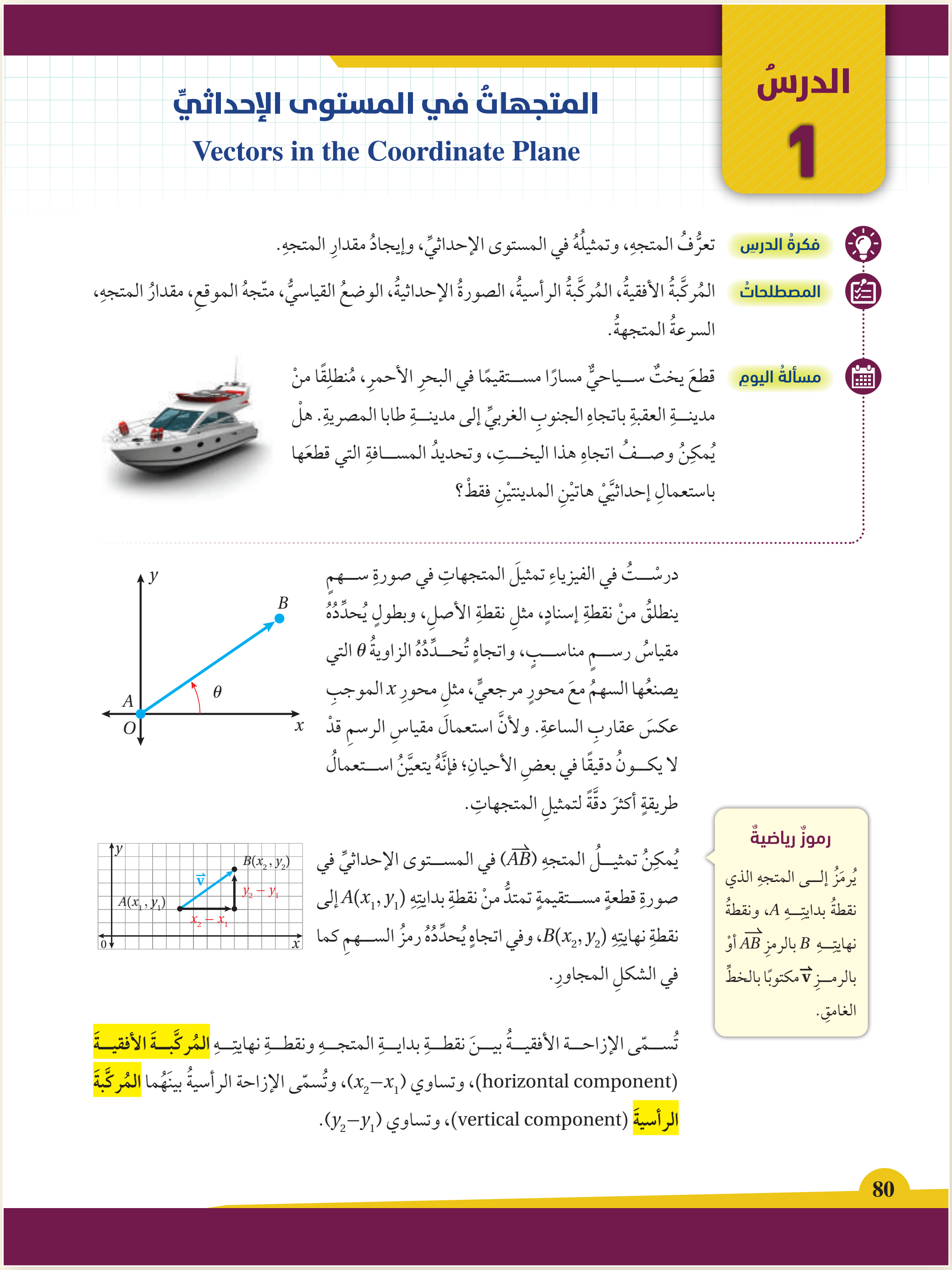
1 التهيئة

- أُراجِع الطلبة في نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين، عن طريق حل السؤالين الآتيين:

» أُعيِّن النقاط $A(1, -2), B(4, 2), C(-2, 1)$ في المستوى الإحداثي، ثم أجد طول كلٍّ من $\overline{AB}$ ، و $\overline{AC}$.

» أجد MN في المثلث القائم LMN الآتي، وقياس كلٍّ من الزاويتين MNL، و MLN .





الدرسُ 1

المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ

Vectors in the Coordinate Plane

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ المتجهِ، وتمثيلُهُ في المستوى الإحداثيِّ، وإيجادُ مقدارِ المتجهِ.

المصطلحاتُ المُركَّبةُ الأفقيةُ، المُركَّبةُ الرأسيةُ، الصورةُ الإحداثيةُ، الوضعُ القياسيُّ، متّجهُ الموقعِ، مقدارُ المتجهِ، السرعةُ المتجهةُ.

مسألةُ اليومِ قطعَ يختٌ سياحيٌّ مسارًا مستقيمًا في البحرِ الأحمرِ، مُنطلقًا منْ مدينةِ العقبةِ باتجاهِ الجنوبِ الغربيِّ إلى مدينةِ طابا المصريةِ. هلْ يُمكِنُ وصفُ اتجاهِ هذا اليختِ، وتحديدُ المسافةِ التي قطعَها باستعمالِ إحداثيَّيْ هاتيْنِ المدينتيْنِ فقطْ؟

درسْتُ في الفيزياءِ تمثيلَ المتجهاتِ في صورةِ سهمٍ ينطلقُ منْ نقطةِ إسنادٍ، مثلِ نقطةِ الأصلِ، وبطولٍ يُحدِّدُهُ مقياسُ رسمٍ مناسبٍ، واتجاهٍ تُحدِّدُهُ الزاويةُ θ التي يصنعُها السهمُ معَ محورٍ مرجعيٍّ، مثلِ محورِ x الموجبِ عكسَ عقاربِ الساعةِ. ولأنَّ استعمالَ مقياسِ الرسمِ قدْ لا يكونُ دقيقًا في بعضِ الأحيانِ؛ فإنَّهُ يتعيَّنُ استعمالُ طريقةٍ أكثرَ دقَّةً لتمثيلِ المتجهاتِ.

يُمكِنُ تمثيلُ المتجهِ $(\overrightarrow{AB})$ في المستوى الإحداثيِّ في صورةِ قطعةٍ مستقيمةٍ تمتدُّ منْ نقطةِ بدايتِهِ $A(x_1, y_1)$ إلى نقطةِ نهايتِهِ $B(x_2, y_2)$، وفي اتجاهٍ يُحدِّدُهُ رمزُ السهمِ كما في الشكلِ المجاورِ.

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى المتجهِ الذي نقطةُ بدايتِهِ A، ونقطةُ نهايتِهِ B بالرمزِ $\overrightarrow{AB}$ أوْ بالرمزِ $\vec{\mathbf{v}}$ مكتوبًا بالخطِّ الغامقِ.

تُسمّى الإزاحةُ الأفقيةُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ ونقطةِ نهايتِهِ **المُركَّبةَ الأفقيةَ** (horizontal component)، وتساوي (x_2-x_1)، وتُسمّى الإزاحةُ الرأسيةُ بينَهُما **المُركَّبةَ الرأسيةَ** (vertical component)، وتساوي (y_2-y_1).

80

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرها في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشطة العملية. ففي بند (مسألة اليوم)، أُعزِّز الوعي بالقضايا البيئية (أهمية البحار والمحيطات) عن طريق حوار أُديره مع الطلبة عن أهمية البحار والمحيطات للطقس والمخزون الغذائي والمائي، وتأثيرها في حياة الإنسان والكائنات الحية، ثم أسألهم:

» ما فائدة البحار والمحيطات؟

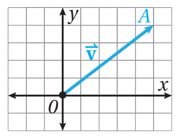
» ما البحار التي تحيط بوطننا الأردن؟

» كيف نحافظ على البحار والمحيطات؟

يُمكِنُ كتابةُ المتجهِ **بالصورةِ الإحداثيةِ** (coordinate form) بدلالةِ مُركَّبتيهِ الأفقيةِ والرأسيةِ (العموديةِ) كما يأتي:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

إذا كانَـتْ نقطـةُ بدايةِ المتجـهِ هيَ نقطةَ الأصـلِ 0، كما في الشـكلِ المجـاورِ، فإنَّهُ يكـونُ في **الوضعِ القياسـيِّ** (standard position) ويسـمّى أيضًـا **متّجـهَ الموقعِ** (position vector) للنقطـةِ A التي تقعُ عندَ نهايتِهِ؛ لأنَّهُ يحدّدُ موقعَها بالنسبةِ إلى نقطةِ الأصلِ.

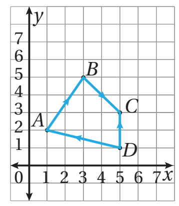


رموزٌ رياضيةٌ

يُسـتعمَلُ الرمزُ $\langle a, b\rangle$ أوْ $\binom{a}{b}$ لكتابـةِ المتجهِ بصورتِهِ الإحداثيةِ.

مثال 1

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:



1 $\overrightarrow{AB}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $A(1, 2) = (x_1, y_1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $B(3, 5) = (x_2, y_2)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$

إذنْ، $\overrightarrow{AB} = \langle 2, 3\rangle$

2 $\overrightarrow{BC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $B(3, 5)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$

إذنْ، $\overrightarrow{BC} = \langle 2, -2\rangle$

3 $\overrightarrow{DC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $D(5, 1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

المُركَّبةُ الأفقيّةُ $x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$

المُركَّبةُ الرأسيّةُ $y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$

إذنْ، $\overrightarrow{DC} = \langle 0, 2\rangle$

طريقةٌ بديلةٌ

للانتقالِ مِـنَ النقطةِ A إلى النقطـةِ B، أتحرَّكُ وحدتيْـنِ إلـى اليمينِ، وثـلاثَ وحـداتٍ إلى الأعلى.

أتعلّمُ

يُعبَّـرُ عـنِ الانتقالِ إلى اتجـاهِ اليسـارِ أوِ اتجاهِ الأسـفلِ باسـتعمالِ الأعدادِ السالبةِ.

أخطاء شائعة:

- قد لا يُميِّز بعض الطلبة بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ عند كتابة المتجه بالصورة الإحداثية؛ لذا أَلفِت انتباههم إلى طرح إحداثي نقطة البداية من الإحداثي المناظر له في نقطة النهاية.
- قد يُبـدِّل بعض الطلبة موقعي المركبتين الأفقية والرأسـية؛ لذا أُوضِّح لهم الطريقة الصحيحة لكتابة الصورة الإحداثية.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسـألة في بند **(مسألة اليوم)**، ثم أسألهم:
  - » ما الفـرق بين القـارب واليخـت؟ اليخت مثل القـارب، لكنـه أكبر حجمًـا، ومُـزوَّد بمحرك لدفعه إلى الأمـام، وفيه كثير من وسـائل الراحة والاستجمام.
  - » كيف يمكن حسـاب المسـافة بين مدينتي العقبة وطابـا؟ إذا عُرِفـت إحداثيات المدينتيـن، فإنَّه يمكن إيجـاد المسـافة بينهما باسـتعمال نظرية فيثاغورس، أو قانون المسافة بين نقطتين، وكذلك يمكن إيجادها بقياس المسافة بينهما على خريطة باستعمال مقياس الرسم.
  - » كيف يمكن تمثيل مسـار اليخت على الخريطة؟ برسم قطعة مستقيمة من العقبة إلى طابا، ثم وضع إشارة تدل على بدء الرحلة من العقبة.
- أناقـش الطلبة في إجاباتهم عن طريق توجيه أسـئلة، مثل:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » من يتّفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُوضِّح للطلبة الفرق بين الكميات القياسية (العددية) التي تُحدَّد بعدد، مثل: الطول، والمساحة، والحجم، والكميـات المتجهة التي تُحدَّد بعـدد واتجاه، مثل: القوة، والسرعة.
- أستعمل فقرة الشـرح الوارد ذكرها في بداية الدرس لتوضيح الفرق بين تمثيل المتجه هندسيًّا والتعبير عنه جبريًّا بالصورة الإحداثية.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيف يُكتَب المتجه بالصـورة الإحداثية إذا عُلِمـت نقطتا بدايته ونهايته.

مثال إضافي

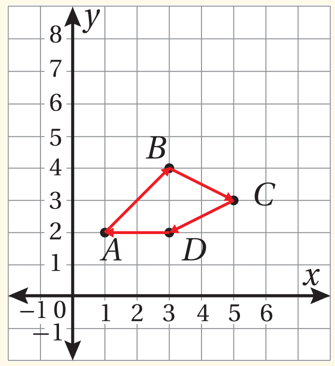
- اعتمادًا على الشكل التالي، أكتب كلًّا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

1 $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 2\rangle$

2 $\overrightarrow{BC}$ $\langle 2, -1\rangle$

3 $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, -1\rangle$

4 $\overrightarrow{DA}$ $\langle -2, 0\rangle$



تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغــة العربية، واللغة الإنجليزيــة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

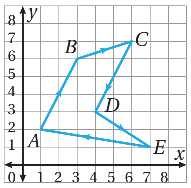
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

إرشـاد: أُوجِّــه الطلبة إلى اســتعمال ورق المربعات أو ورق الرسم البياني لتمثيل المتجهات، إضافةً إلى المســطرة والمنقلة؛ فذلك يُكسِبهم مهارة التمثيل بسرعة ودقة، وأطلب إليهم استعمال الأقلام الملونة لتمييز المتجهات المختلفة بعضها من بعض.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:



a) $\overrightarrow{EA}$ $\langle -6, 1\rangle$ b) $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, -4\rangle$

c) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 4\rangle$ d) $\overrightarrow{DE}$ $\langle 3, -2\rangle$

e) $\overrightarrow{BC}$ $\langle 3, 1\rangle$ f) $\overrightarrow{CB}$ $\langle -3, -1\rangle$

مقدارُ المتجهِ (magnitude) هوَ كميةٌ قياسيةٌ تُمثِّلُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطتَيْ بدايةِ المتجهِ ونهايتِهِ.

فإذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ المتجهِ $\vec{v}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ فيثاغورس لإيجادِ الصيغةِ الآتيةِ لمقدارِ المتجهِ $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

أتعلَّم

يُرمَزُ إلى مقدارِ المتجهِ $\vec{v}$ بالرمزِ $|\vec{v}|$

مفهومٌ أساسيٌّ — مقدارُ المتجهِ

إذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ المتجهِ $\vec{v}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ $|\vec{v}|$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

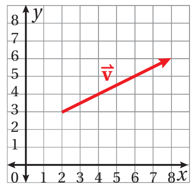
$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

وإذا كانَ المتجهُ $\vec{v}$ مكتوبًا بالصورةِ الإحداثيةِ $\vec{v} = \langle v_1, v_2\rangle$، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$

مثال 2

1 **أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{\mathbf{v}}$ في الشكلِ المجاورِ.**



الخطوةُ 1: أُحدِّدُ إحداثياتِ كلٍّ منْ نقطةِ بدايةِ المتجهِ، ونقطةِ نهايتِهِ.

إحداثيا نقطةِ بدايةِ المتجهِ $(2, 3)$، وإحداثيا نقطةِ نهايتِهِ $(8, 6)$.

الخطوةُ 2: أُعوِّضُ الإحداثياتِ في صيغةِ مقدارِ المتجهِ.

$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{(8-2)^2 + (6-3)^2}$ بالتعويضِ

$= \sqrt{36 + 9}$ بالتبسيطِ

$= 3\sqrt{5}$ بالتبسيطِ

2 **أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -3 \rangle$**

المتجهُ مكتوبٌ بالصورةِ الإحداثيةِ، إذنْ:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{4^2 + (-3)^2}$ بالتعويضِ

$= 5$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 4 \rangle$ $\sqrt{17}$

b) $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -7 \rangle$ $\sqrt{74}$

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لإيجادِ اتجاهِ المتجهِ، وذلكَ باستعمالِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ المتجهُ وترًا فيهِ.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة مفهوم مقدار المتجه (طوله)، وكيفية حسابه إذا عُلِمت إحداثيات بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مقدار المتجه المُمثَّل على المستوى الإحداثي، أو المعطى بالصورة الإحداثية.

مثال إضافي

- أجد مقدار كل متجه ممّا يأتي:

1 $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(3, -7)$ و $B(0, -5)$ $\sqrt{13}$

2 $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -10 \rangle$ $5\sqrt{5}$

مثال 3

- أُبيِّــن للطلبة أنَّ اتجاه أيِّ متجه يُحــدَّد بقياس الزاوية التي تصنعها القطعة المســتقيمة التي تُمثِّله مع محور مرجعي، مثل محور x الموجب عكس حركة عقارب الساعة، أو اتجاه الشمال مع حركة عقارب الساعة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية تحديد اتجاه متجه مرســوم في الوضع القياسي، مُبيِّنًا أنَّ هذه الطريقة تُستعمَل إذا عُلِمت نقطتا بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية، ثم أذكر أمثلة على ذلك.
- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:

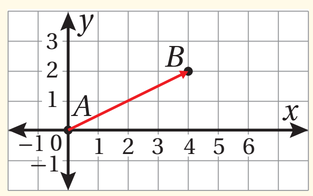
» هل يمكن استعمال نسبة أُخرى غير ظل الزاوية؟
نعم، ولكن يجب إيجاد طول المتجه أولًا.

إرشـاد: أُرشِــد الطلبة إلى اســتعمال الآلة الحاسبة بصورة صحيحة لإيجاد قياس زاوية عُلِمت إحدى نسبها المثلثية.

أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة في كتابة معادلة النســبة المثلثية؛ لذا أَلفِت انتباههم إلى الصيغ الصحيحة للنســب المثلثية فــي المثلث قائم الزاوية.

مثال إضافي

1 أجد اتجاه $\overrightarrow{AB}$ في الشكل الآتي.



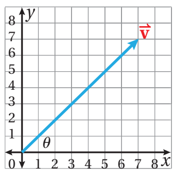
$26.6°$ مع محور x الموجب.

2 أجد اتجاه $\overrightarrow{LM} = \langle 4, -3\rangle$

$323.1°$ مع محور x الموجب.

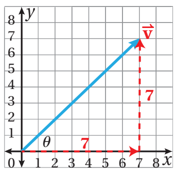
مثال 3

أَجِدُ اتجاهَ $\vec{\mathbf{v}}$ في الشكلِ المجاورِ.



الخطوةُ 1: أَجِدُ اتجاهَ $\vec{\mathbf{v}}$

أستعملُ نسبةَ الظلِّ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ $\vec{\mathbf{v}}$ وترًا فيهِ:



$\tan\theta = \frac{y}{x}$ استعمالُ نسبةِ الظلِّ لإيجادِ الزاويةِ

$= \frac{7}{7} = 1$ بالتعويضِ

$\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$ باستعمالِ معكوسِ الظلِّ

إذنْ، اتجاهُ $\vec{\mathbf{v}}$ هوَ $45°$ معَ الأفقيِّ.

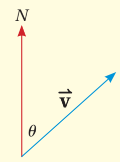
إرشادٌ

أســتعملُ الآلةَ الحاسبةَ العلميةَ لأجدَ $\tan^{-1}(1)$ كما يأتي:

SHIFT Tan 1

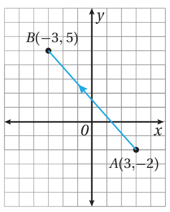
أتعلَّمُ

يُمكِنُ أيضًــا التعبيرُ عنِ اتجــاهِ المتجــهِ بدلالةِ اتجاهِهِ منَ الشمالِ.

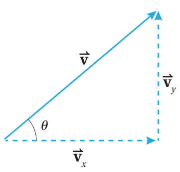


أتحقق من فهمي

أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.
$130.6°$ مع محور x الموجب.



السـرعةُ المتجهةُ (velocity) هيَ ســرعةٌ في اتجاهٍ مُحدَّدٍ ويُمكِنُ تمثيلُها بمتجهٍ. في الشــكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ المتجهُ $\vec{\mathbf{v}}$ السرعةَ المتجهةَ لجسمٍ تحرَّكَ في مسارٍ مستقيمٍ، فصنعَ زاويةً قياسُــها θ معَ محورِ x الموجبِ، وقدْ مثَّلَ مقدارُ المتجهِ $|\vec{\mathbf{v}}|$ سرعةَ هذا الجسمِ.



تُمثِّــلُ $\vec{\mathbf{v}}_x$ المُركَّبــةَ الأفقيةَ للســرعةِ المتجهــةِ، وتُمثِّلُ $\vec{\mathbf{v}}_y$ المُركَّبةَ الرأســيةَ لهذهِ الســرعةِ، حيثُ: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_x, v_y\rangle$

مثال 4: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة كيفية تحليل المتجه إلى مركبة أفقية وأُخرى رأسية باستعمال النسب المثلثية لزاوية الاتجاه.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن كيفية كتابة الصورة الإحداثية لسرعة متجهة باستعمال زاوية الاتجاه.

إرشاد: أُؤكِّد باستمرار الفرق بين مفاهيم السرعة المتوسطة، والسرعة اللحظية، والسرعة المتجهة.

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لكتابةِ المُركَّبتيْنِ الأفقيةِ والرأسيةِ للسرعةِ المتجهةِ بدلالةِ الزاويةِ θ التي تصنعُها السرعةُ المتجهةُ معَ محورِ x الموجبِ كما يأتي:

$$v_x = |\vec{v}|\cos\theta$$

$$v_y = |\vec{v}|\sin\theta$$

عندئذٍ، يُمكِنُ كتابةُ السرعةِ المتجهةِ بالصورةِ الإحداثيةِ كما يأتي:

$$\vec{v} = \langle |\vec{v}|\cos\theta, |\vec{v}|\sin\theta \rangle$$

أتعلّمُ

قدْ يُمثِّلُ المتجهُ أيضًا مسافةً متجهةً، أوْ قوةً متجهةً.

مثال 4: من الحياة

كرةُ قدمٍ: ركلَ ريّانُ كرةً بسرعةِ 25m/s، كما في الشكلِ المجاورِ، وبزاويةٍ مقدارُها °40 معَ الأفقيِّ. أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للكرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

25 m/s

أرسمُ شكلًا مُبسَّطًا يُعبِّرُ عنِ المسألةِ، بحيثُ يكونُ فيهِ $|\vec{v}| = 25$، وَ $\theta = 40°$:

$\vec{v}$ ، $\vec{v}_y$ ، $\vec{v}_x$ ، 40°

$\vec{v}_x = |\vec{v}|\cos\theta$ ، و $\vec{v}_y = |\vec{v}|\sin\theta$ $\quad \vec{v} = \langle |\vec{v}|\cos\theta, |\vec{v}|\sin\theta \rangle$

بالتعويضِ $\quad = \langle 25\cos 40°, 25\sin 40° \rangle$

بتعويضِ قيمِ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ °40 $\quad = \langle 25\times0.7660, 25\times0.6428 \rangle$

بالتبسيطِ $\quad = \langle 19.15, 16.07 \rangle$

إذنْ، $\vec{v} = \langle 19.15, 16.07 \rangle$ هوَ المتجهُ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الكرةِ.

ازدادَ الاعتمادُ على الطائراتِ المُسيَّرةِ عنْ بُعْدٍ في كثيرٍ منَ المجالاتِ، مثلِ: رصدِ الازدحاماتِ المروريةِ، ومراقبةِ انتشارِ حرائقِ الغاباتِ.

أتحقق من فهمي

ألعابٌ: أقلعَتْ طائرةٌ تتحكَّمُ فيها ميساءُ عنْ بُعْدٍ، بزاويةٍ قياسُها °35 عنْ سطحِ الأرضِ، وبسرعةِ 6 m/s كما في الشكلِ المجاورِ.

أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ. $\langle 4.91, 3.44 \rangle$

6 m/s ، 35°

مثال إضافي

- انطلق صاروخ ألعاب نارية بسرعة 32 m/s، وبزاوية مقدارها °45 مع الأفقي. أكتب المتجه الذي يُمثِّل السرعة المتجهة للصاروخ بالصورة الإحداثية.

$\langle 16\sqrt{2}, 16\sqrt{2} \rangle$

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنبيه:

عند حل الأسئلة (6 – 1)، أُوجِّه الطلبة إلى افتراض أنَّ النقطة الأولى من اليسار هي نقطة بداية المتجه، وأنَّ النقطة الثانية هي نهايته.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

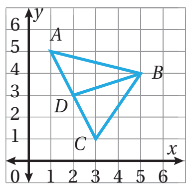
المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (27 – 24) كتاب التمارين: (10 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (30 – 27) كتاب التمارين: (10 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (32 – 29) كتاب التمارين: (13 – 9)

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

1. $(2, 5), (4, -1)$ $\langle 2, -6\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = 2\sqrt{10}$
2. $(-4, 7), (-3, 0)$ $\langle 1, -7\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = 5\sqrt{2}$
3. $(6, -2), (8, 1)$ $\langle 2, 3\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{13}$
4. $(4, -9), (3, -5)$ $\langle -1, 4\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{17}$
5. $(-1.5, 3), (0.5, -4)$ $\langle 2, -7\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{53}$
6. $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$ $\langle 4, \frac{1}{3}\rangle$ $|\vec{\mathbf{u}}| = \frac{\sqrt{145}}{3}$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ:



7. $\overrightarrow{AB}$ $\langle 4, -1\rangle$
8. $\overrightarrow{DB}$ $\langle 3, 1\rangle$
9. $\overrightarrow{CB}$ $\langle 2, 3\rangle$
10. $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4\rangle$
11. $\overrightarrow{AC}$ $\langle 2, -4\rangle$
12. $\overrightarrow{DA}$ $\langle -1, 2\rangle$

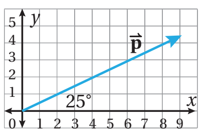
13. في السؤالِ السابقِ، أُبيِّنُ أنَّ $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD}|$. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ النقطةِ D على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AC}$؟
$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{5}$، D نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AC}$

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

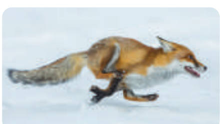
14. $\langle 2,-6\rangle$ $2\sqrt{10}$
15. $\langle 7,-8\rangle$ $\sqrt{113}$
16. $\langle -1,-1\rangle$ $\sqrt{2}$
17. $\langle 3,5\rangle$ $\sqrt{34}$
18. $\langle 0,0\rangle$ 0
19. $\langle 2, 9\rangle$ $\sqrt{85}$

إذا كانَتْ M هيَ نقطةَ منتصفِ $\overline{FG}$، حيثُ $F(4, 2)$ وَ $G(2, 6)$، وكانَتْ O هيَ نقطةَ الأصلِ، فأكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ:

20. $\overrightarrow{FG}$ $\langle -2, 4\rangle$
21. $\overrightarrow{GF}$ $\langle 2, -4\rangle$
22. $\overrightarrow{OM}$ $\langle 3, 4\rangle$

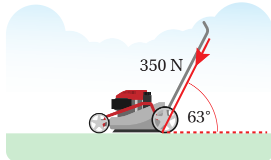


23. أُعبِّرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ $\vec{\mathbf{p}}$ في الشكلِ المجاورِ بطريقتيْنِ.
اتجاه $\vec{\mathbf{p}}$ هو °25 مع الأفقي.
اتجاه $\vec{\mathbf{p}}$ هو °065



24. **حيواناتٌ:** أكتبُ السرعةَ المتجهةَ لثعلبٍ يُطارِدُ أرنبًا على منحدرٍ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَتْ سرعتُهُ الأفقيةُ $v_x = 27$ km/h، وسرعتُهُ الرأسيةُ $v_y = 25$ km/h $\langle 27, 25\rangle$

25 **فيزياءُ:** تدفعُ نورُ عربةً بقوةٍ مقدارُها 350N، وبزاويةٍ قياسُها °63 معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

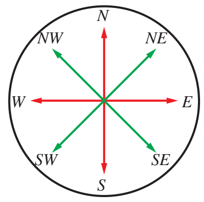


$\langle 158.90 , 311.85 \rangle$

26 أكتبُ المتجهَ $\vec{\mathbf{v}}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\vec{\mathbf{v}}| = 27$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °90 معَ محورِ x. $\langle 0 , 27 \rangle$

27 أكتبُ المتجهَ $\vec{\mathbf{v}}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\vec{\mathbf{v}}| = 10$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °320 معَ محورِ x.
$\langle 7.66 , -6.43 \rangle$

28 خرجَ عبدُ الرحمنِ منْ منزلِهِ، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ شرقًا إلى المسجدِ مسافةَ 248 m، ثمَّ خرجَ منْهُ مرَّةً أُخرى، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ جنوبًا نحوَ منزلِ صديقِهِ يحيى مسافةَ 562 m. أُعبِّرُ عنِ المسارِ بينَ منزلِ عبدِ الرحمنِ ومنزلِ صديقِهِ على شكلِ متجهٍ بالصورةِ الإحداثيةِ **(إرشادٌ: البُعْدُ بينَ نقطتيْنِ هوَ أقصرُ مسافةٍ بينَهُما).**



$\langle 248 , -562 \rangle$

مهارات التفكير العليا

29 **تحدٍّ:** إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ حيثُ $A(1, 2)$ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(3, y)$ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ B، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر الهامش.

30 **تبريرٌ:** ما مجموعةُ قيمِ b التي يكونُ عندَها مقدارُ المتجهِ $\langle 4, b \rangle$ يساوي 5؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

31 **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَ كلٌّ منْ ناصرٍ وليلى مقدارَ المتجهِ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 6, -1 \rangle$، فكانَتْ إجابةُ كلٍّ منْهُما كما يأتي:

ناصرٌ	ليلى
$\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = 37$	$\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{35}$

هلْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

كلتا الإجابتين غير صحيحة؛ لأنَّ ناصرًا نسي الجذر التربيعي، وليلى طرحت مربعي المركبتين بدلًا من جمعهما.

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ متجهًا على المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ.

ستتنوع إجابات الطلبة. هذا مثال على إجابة صحيحة: $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{v}} = \langle 6,-4 \rangle$

$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

29) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{13}$

$4 + (y-2)^2 = 13$

$(y-2)^2 = 9$

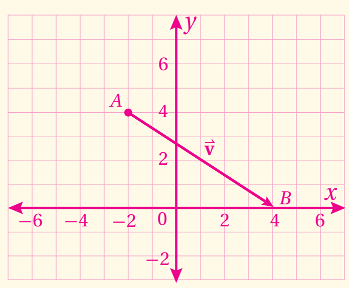
$y - 2 = \pm 3 \Rightarrow y = 5, y = -1$

إذن، إحداثيا B هما: $(3, 5)$، أو $(3,-1)$.

30) $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{16 + b^2} = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$

32)



مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند **(مهارات التفكير العليا)**، وأطلب إليهم حلّ المسائل (32 – 29).
- أرصــد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

5 الإثراء

- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » إذا كانت $A(3, -2), B(4, 3), C(6, y)$، وكانت B تقســم القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ بنسـبة 1:2، فما العلاقة بين $|\overrightarrow{BC}|$، وَ $|\overrightarrow{AB}|$؟ ما قيمة y؟
  مقدار المتجه $\overrightarrow{BC}$ يســاوي مثلــي مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$، $y = 13$.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البــدء بتنفيذ الخطوات (3–1) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلــى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسـخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أُتابِــع أفــراد المجموعات فــي أثناء تنفيذ مشــروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية في ورقة، ثم تسليمها لي في نهاية الحصة:
  » ما الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة؟
  » أذكر 3 أمثلة على كلٍّ منهما.
  » أُبيِّن بمثالٍ كيفية إيجــاد مقدار متجه عُلِمت بدايته ونهايته.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- التمييز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، والتعبير عنها بالرموز.
- حل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا وجبريًّا.
- تعرُّف المتجه الصفري.
- إيجاد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- كتابة المتجه بالصورة الإحداثية.
- إيجاد مقدار المتجه واتجاهه.
- كتابة المركبتين الأفقية والرأسية لمتجه معطى.
- حل المثلث باستعمال قانون الجيوب، وقانون جيوب التمام.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 2

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

فكرةُ الدرسِ إجراءُ العملياتِ على المتجهاتِ.

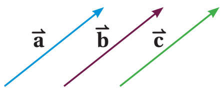
المصطلحاتُ المتجهاتُ المتساويةُ، المتجهاتُ المتوازيةُ، معكوسُ المتجهِ، المحصلةُ، المتجهُ الصفريُّ.

مسألةُ اليومِ بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشمالِ فقطعتْ مسافةَ 400 km ثمَّ اتجهتْ شرقًا وقطعتْ مسافةَ 250 km إذا مثّلَ كلٌّ منَ المسارَيْنِ اللّذينِ سلكَتْهُما الطائرةُ مُتجهًا في المستوى الإحداثيِّ، فماذا يمكنُ أنْ يمثلَ جمعُ هذينِ المتجهينِ؟

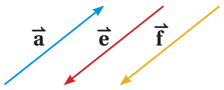
أتعلّمُ

لا يُشترطُ أنْ يكونَ للمتجهينِ المتساويينِ نُقطتا البدايةِ والنهايةِ ذاتاهُما.

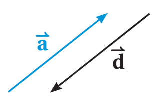
المتجهانِ المتساويانِ (equal vectors) هما متجهانِ لهُما نفسُ الاتجاهِ والمقدارِ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متساويةٌ، وبالرموزِ: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$



المتجهانِ المتوازيانِ (parallel vectors) هما متجهانِ لهُما الاتجاهُ نفسُهُ، أوْ عكسُهُ، وليسَ شرطًا أنْ يكونَ لهُما المقدارُ نفسُهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$ متوازيةٌ، وبالرموزِ: $\vec{a} \parallel \vec{e} \parallel \vec{f}$

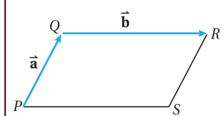


معكوسُ المتجهِ (opposite vectors) هوَ متجهٌ لهُ نفسُ مقدارِ متجهٍ آخرَ، لكنَّهُ في اتجاهٍ مُعاكِسٍ لهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهُ $\vec{d}$ معكوسُ المتجهِ $\vec{a}$، وبالرموزِ: $-\vec{a}$؛ أيْ إنَّ $\vec{d} = -\vec{a}$



مثال 1

في الشكلِ المجاورِ، $QRSP$ متوازي أضلاعٍ، فيهِ $\vec{PQ} = \vec{a}$، وَ $\vec{QR} = \vec{b}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$:



1) $\vec{SR}$

$\vec{SR} = \vec{a}$ متجهٌ موازٍ ومساوٍ للمتجهِ $\vec{PQ}$

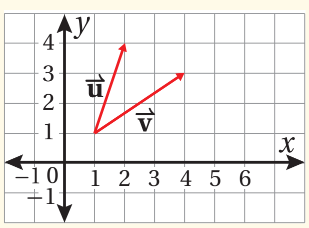
2) $\vec{SP}$

$\vec{SP} = -\vec{b}$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\vec{QR}$

---

1 التهيئة

- أرسم على لوح المستوى الإحداثي المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كما في الشكل الآتي:



- أطلب إلى الطلبة التعبير عن هذين المتجهين بالصورة الإحداثية.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد المقدار والاتجاه لكلٍّ من $\vec{u}$ و $\vec{v}$.
- أُكمِل الشكل المرسوم إلى مثلث، مُذكِّرًا الطلبة بكيفية تطبيق قانوني الجيوب وجيوب التمام لحل المثلث.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل الجزء الأول من رحلة الطائرة؟ $\langle 0, 400\rangle$
  » ما الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل الجزء الثاني من رحلة الطائرة؟ $\langle 250, 0\rangle$
  » ما الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل رحلة الطائرة كاملة؟ $\langle 250, 400\rangle$
  » ما علاقة هذه المتجهات بعضها ببعض؟ متجه الرحلة الكاملة يمثل مقدار الإزاحة من نقطة بداية الرحلة إلى نقطة نهايتها.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم عن طريق توجيه أسئلة، مثل:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » من يتّفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة المقصود بالمتجهين المتساويين، والمتجهين المتوازيين، ومعكوس المتجه، وأُعبِّر عنها بالرموز، ثم أرسمها مُستعمِلًا المسطرة والمنقلة.

تعزيز اللغة ودعمها:

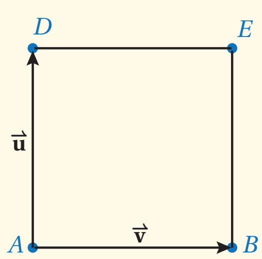
أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، ثم أرسم متوازي أضلاع على لوح المستوى الإحداثي مُشابِهٍ للمعطى في المثال، وأؤكد على ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي

- في الشكل المجاور، $ABED$ مربع، فيه $\overrightarrow{AD} = \vec{\mathbf{u}}$ ، $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{v}}$.
  أُعبِّر عن كلٍّ من $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{DE}$ باستعمال المتجهين $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$.



$\overrightarrow{DE} = \vec{\mathbf{v}}$, $\overrightarrow{EB} = -\vec{\mathbf{u}}$

التقويم التكويني:

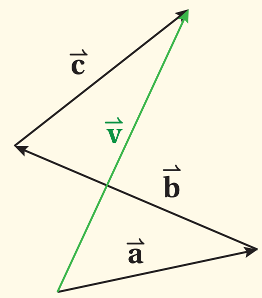
أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

ملاحظاتي

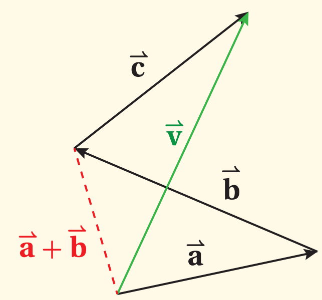
إرشاد: أُذكِّر الطلبة أنَّ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع يكونان متطابقين ومتوازيين.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة خطوات إيجاد مجموع متجهين هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث.
- أرسم متجهين على لوح المستوى الإحداثي لتوضيح أنَّ المتجه $\vec{\mathbf{b}}$ يبقى كما هو من حيث الطول والاتجاه عند عمل انسحاب له، بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\vec{\mathbf{a}}$.
- أُخبِر الطلبة أنَّ $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ هو متجه يُسمّى متجه المحصلة، وأنَّ له التأثير نفسه الذي يُحدِثه كلٌّ من المتجهين $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ الواحد تلو الآخر.
- أرسم على اللوح شكلًا يُشبِه الشكل الآتي، مُستعمِلًا أقلامًا ذات ألوان لتمييز متجه المحصلة.



- أُخبِر الطلبة أنَّ $\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}$ هو متجه المحصلة، وأنَّه ناتج جمع المتجهات $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$، ثم أشرح لهم قاعدة المثلث؛ لجمع المتجهين $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ أولًا، ثم جمع المحصلة $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ مع المتجه $\vec{\mathbf{c}}$ لينتج المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ كما في الشكل الآتي:



- أُؤكِّد للطلبة أنَّه يمكن تطبيق قاعدة المثلث عند إيجاد مجموع متجهين أو أكثر.

3 $\overrightarrow{QP}$

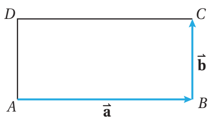
$\overrightarrow{QP}=-\vec{\mathbf{a}}$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

4 $\overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{RQ}=-\vec{\mathbf{b}}$ متجهٌ مُوازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $ABCD$ مستطيلٌ، فيهِ $\overrightarrow{AB}=\vec{\mathbf{a}}$، وَ $\overrightarrow{BC}=\vec{\mathbf{b}}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$:



a) $\overrightarrow{AD}$ $\vec{\mathbf{b}}$ b) $\overrightarrow{DC}$ $\vec{\mathbf{a}}$ c) $\overrightarrow{CB}$ $-\vec{\mathbf{b}}$

جمعُ المتجهاتِ هندسيًّا

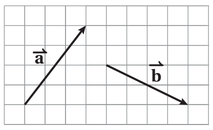
يمكن إيجاد ناتج جمع متجهين أو أكثر هندسياً.

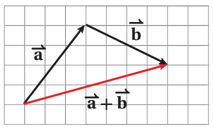
لإيجادِ $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ هندسيًّا، أتّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $\vec{\mathbf{a}}$.

الخطوةُ 2: أرسمُ المتجهَ $\vec{\mathbf{b}}$ بحيثُ تكونُ نقطةُ بدايتِهِ هيَ نقطةَ نهايةِ المتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$.

الخطوةُ 3: أَصِلُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ $\vec{\mathbf{a}}$ ونقطةِ نهايةِ المتجهِ $\vec{\mathbf{b}}$، فيكونُ المتجهُ الناتجُ هوَ المتجهَ $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$.



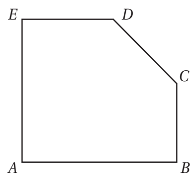


يُسمّى المتجهُ الناتجُ منْ جمعِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ **المحصلةَ** (resultant)، وتسمّى هذهِ الطريقةُ في جمعِ المتجهاتِ هندسيًّا قاعدةَ المثلثِ.

> **أتعلَّمُ**
> لا يتأثّرُ المتّجهُ بتغييرِ موقعِهِ ما دام أنَّ اتجاهَهُ ومقدارَهُ لم يتغيّرا.

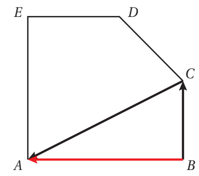
مثال 2

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:



1 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BC}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$، فينتجُ $\overrightarrow{BA}$



2 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BA}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{EC}$

3 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{DE}$

4 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$

أتعلَّمُ

- يُسمّى المتجهُ $\overrightarrow{AA}$ المتجهَ الصفريَّ؛ وهوَ متجهٌ ليسَ لهُ مقدارٌ واتجاهٌ.
- لأيِّ متجهٍ $\vec{a}$، فإنَّ:

$\vec{a}+0=0+\vec{a}=\vec{a}$

$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=0$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 2، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{BC}$

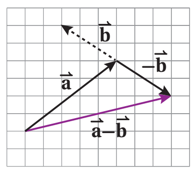
طرحُ المتجهاتِ هندسيًّا

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ هندسيًّا.

لإيجادِ $\vec{a}-\vec{b}$، أجمعُ المتجهَ $\vec{a}$ معَ معكوسِ المتجهِ $\vec{b}$؛ أيْ:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

ولذلكَ يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ $\vec{a}-\vec{b}$ هندسيًّا بطريقةٍ مشابهةٍ لعمليةِ الجمعِ. وذلكَ بإيجادِ محصلةِ $\vec{a}$ وَ $-\vec{b}$ كما في الشكلِ المجاورِ.

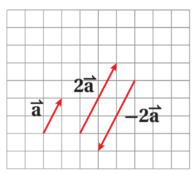


ضربُ المتجهِ في عددٍ ثابتٍ هندسيًّا

ينتجُ منْ ضربِ المتجهِ $\vec{a}$ في العددِ الحقيقيِّ k متجهٌ موازٍ للمتجهِ $\vec{a}$، ويكونُ للمتجهيْنِ $k\vec{a}$، وَ $\vec{a}$ الاتجاهُ نفسُهُ إذا كانَ k عددًا موجبًا، واتجاهانِ مُتعاكِسانِ إذا كانَ k عددًا سالبًا.

$$2\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}$$

$$-2\vec{a}=(-\vec{a})+(-\vec{a})$$



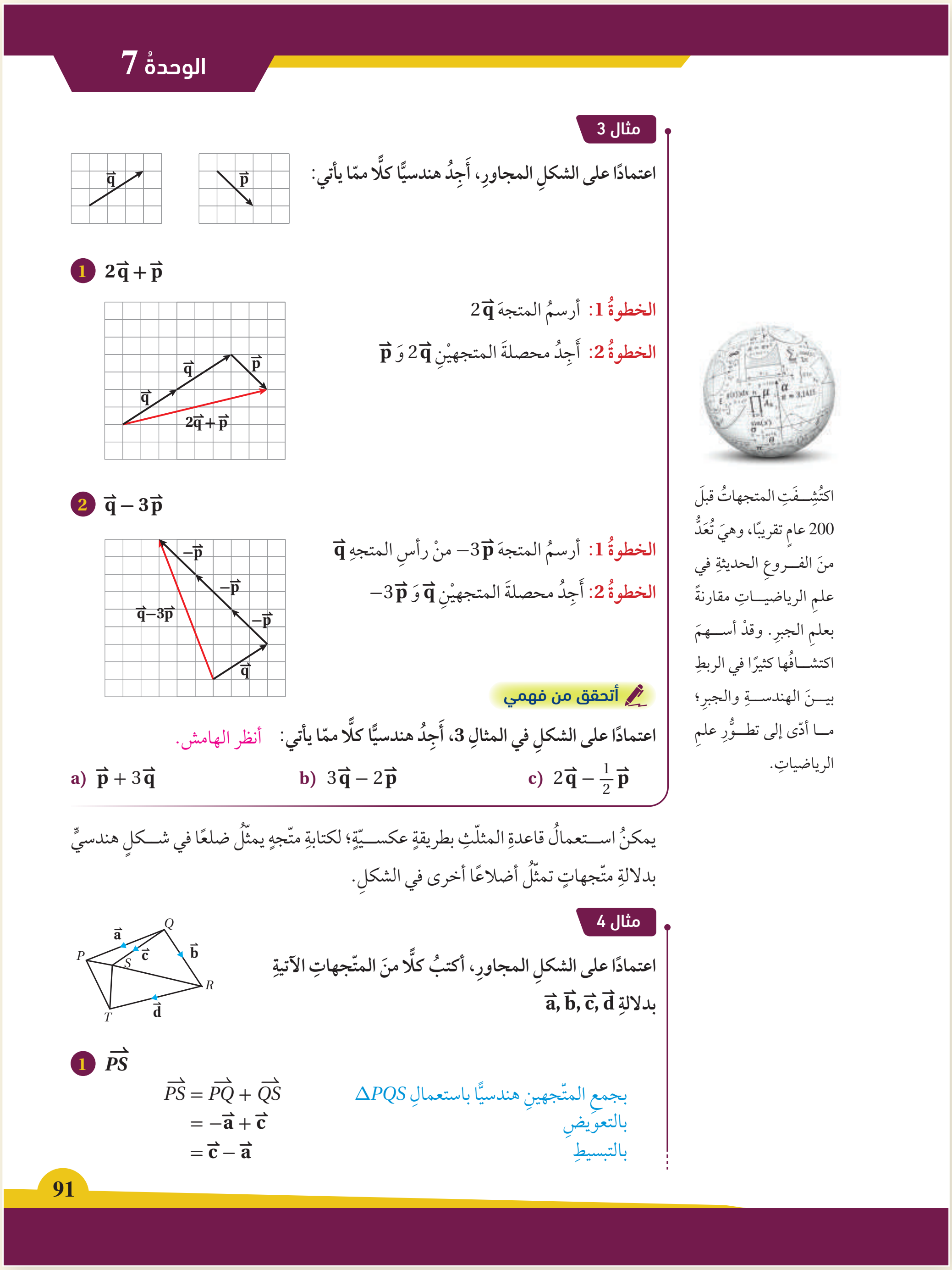
- قبل البدء بتقديم المثال 2، أرسم المضلع $ABCDE$ المعطى في المثال على اللوح.
- أُناقِش الطلبة في حل فروع المثال، مُبرِّرًا الناتج في كل فرع.

إرشاد: عند مناقشة الطلبة في حل الفرع 4، أُوضِّح لهم أنَّ متجه المحصلة الناتج $\overrightarrow{AA}$ يُسمّى المتجه الصفري، ثم أسألهم: لماذا سُمِّي بهذا الاسم؟

لعدم وجود طول واتجاه له.

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة كيفية طرح المتجهات برسم المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ باستعمال لوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تطبيق قاعدة المثلث لإيجاد ناتج طرح متجهين هندسيًّا، حيث $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$
- عند رسم معكوس المتجه $\vec{b}$، أستعمل لونًا مختلفًا لتمييزه، مراعيًا أنْ تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\vec{a}$.
- عند رسم متجه المحصلة: $\vec{a}-\vec{b}$، أستعمل لونًا مختلفًا لتمييزه.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تمثيل المتجه $\vec{a}$ بعد ضربه في عدد حقيقي، وابدأ بالمتجه $2\vec{a}$، و$3\vec{a}$، ثم $-2\vec{a}$، و$-3\vec{a}$، و$-0.5\vec{a}$
- في أثناء تمثيل المتجه $k\vec{a}$، حيث k عدد حقيقي، أعكس اتجاه المتجه الناتج عندما يكون k عددًا سالبًا.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3، مستعينًا بلوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.


الوحدة 7

مثال 3

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

1 $2\vec{q}+\vec{p}$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $2\vec{q}$

الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $2\vec{q}$ وَ $\vec{p}$

2 $\vec{q}-3\vec{p}$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $-3\vec{p}$ منْ رأسِ المتجهِ $\vec{q}$

الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $\vec{q}$ وَ $-3\vec{p}$

اكتُشِفَتِ المتجهاتُ قبلَ 200 عامٍ تقريبًا، وهيَ تُعَدُّ منَ الفروعِ الحديثةِ في علمِ الرياضياتِ مقارنةً بعلمِ الجبرِ. وقدْ أسهمَ اكتشافُها كثيرًا في الربطِ بينَ الهندسةِ والجبرِ؛ ما أدّى إلى تطوُّرِ علمِ الرياضياتِ.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 3، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $\vec{p}+3\vec{q}$ b) $3\vec{q}-2\vec{p}$ c) $2\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p}$

يمكنُ استعمالُ قاعدةِ المثلّثِ بطريقةٍ عكسيّةٍ؛ لكتابةِ متّجهٍ يمثّلُ ضلعًا في شكلٍ هندسيٍّ بدلالةِ متّجهاتٍ تمثّلُ أضلاعًا أخرى في الشكلِ.

مثال 4

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتّجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

1 $\overrightarrow{PS}$

$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ ΔPQS

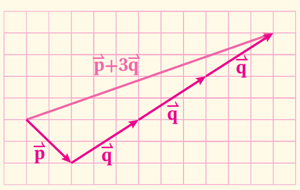
$=-\vec{a}+\vec{c}$ بالتعويضِ

$=\vec{c}-\vec{a}$ بالتبسيطِ

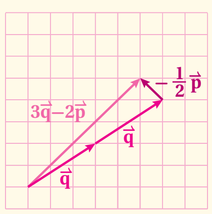
91

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

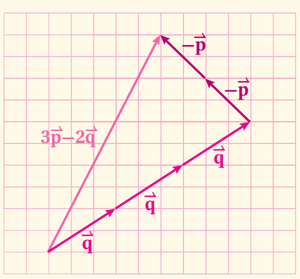
a) $\vec{p}+3\vec{q}$



c) $2\vec{q}-0.5\vec{p}$



b) $3\vec{q}-2\vec{p}$



2 $\overrightarrow{RP}$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ ΔRQP

$= -\vec{b} + \vec{a}$ بالتعويضِ

$= \vec{a} - \vec{b}$ بالتبسيطِ

3 $\overrightarrow{PT}$

$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT}$ بجمعِ المتّجهينِ هندسيًّا باستعمالِ ΔPRT

$= (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{d}$ $\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{RP} = -(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$

$= \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}$ بالتبسيطِ

4 $\overrightarrow{TS}$

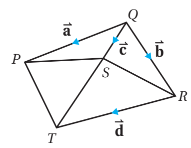
$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS}$ بجمعِ المتجهينِ هندسيًّا باستعمالِ $\Delta TRS, \Delta RQS$

$= \overrightarrow{TR} + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS})$ $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS}$

$= -\vec{d} + (-\vec{b} + \vec{c})$ بالتعويضِ

$= \vec{c} - \vec{b} - \vec{d}$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي



اعتمادًا على الشـكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتّجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ أنظر الهامش.

a) $\overrightarrow{SR}$ b) $\overrightarrow{QT}$ c) $\overrightarrow{PT}$ c) $\overrightarrow{ST}$

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها وضربُها في ثابتٍ جبريًّا

يُمكِـنُ إيجادُ ناتجِ الجمعِ والطرحِ والضربُ في ثابتٍ للمتجهاتِ المكتوبةِ بالصورةِ الإحداثيةِ عنْ طريقِ جمعِ مُركَّباتِها الأفقيةِ والرأسيةِ، أوْ طرحِها.

مفهومٌ أساسيٌّ جمعُ المتجهاتِ وطرحُها وضربُها في ثابتٍ

إذا كانَ $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$، وَ $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$، وكانَ k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$\vec{a} + \vec{b} = \langle x_1+x_2, y_1+y_2 \rangle$ $\vec{a} - \vec{b} = \langle x_1-x_2, y_1-y_2 \rangle$ $k\vec{a} = \langle kx_1, ky_1 \rangle$

92

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

a) $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QR} = -\vec{c} + \vec{b}$

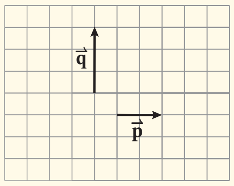
b) $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT} = \vec{b} + \vec{d}$

c) $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$

d) $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} = -\vec{c} + \vec{b} + \vec{d}$

مثال إضافي

- اعتمادًا على الشكل الآتي، أجد هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

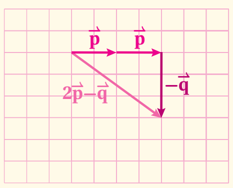


1 $2\vec{p} - \vec{q}$

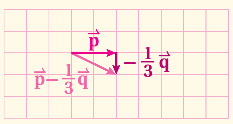
2 $\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$

الحل:

1)



2)



تنويع التعليم:

- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى المتوسط ودون المتوسط صعوبة في تمثيل المتجهات، وبخاصة تلك التي تُضرَب في عدد حقيقي كسري، وحل مسائل عنها هندسيًّا؛ لذا أطلب إليهم حل المثال الإضافي ضمن مجموعات؛ ما يُسهِّل عليهم تمثيل المتجهات هندسيًّا عندما تكون أفقية أو رأسية.
- أُوزِّع الطلبة الذين أتقنوا مهارات تمثيل المتجهات على المجموعات؛ لمساعدة زملائهم / زميلاتهن في أثناء حل التمارين في بند (**أتحقق من فهمي**)، أو بند (**أتدرب وأحل المسائل**).

مثال 5

- أُوضِّح للطلبة كيفية إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد حقيقي عندما تكون المتجهات مكتوبة بالصورة الإحداثية، بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**).
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن التحقُّق ممّا ورد في البند السابق بتمثيل المتجهات هندسيًّا، ثم أذكر أمثلة عددية على ذلك.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 5، وأَلفِت انتباههم إلى أهمية استعمال الأقواس في كل فرع؛ لتمييز المتجهات بالصورة الإحداثية.
- أُخبِر الطلبة أنَّ المتجهات المعطاة هي متجهات بالوضع القياسي، وأنَّ أيَّ متجه على المستوى الإحداثي يمكن كتابته بالوضع القياسي من دون أنْ يُؤثِّر ذلك في مقداره أو اتجاهه.

مثال إضافي

إذا كان $\vec{u} = \langle -3, 5\rangle$، وكان $\vec{v} = \langle 4, 7\rangle$، وكان $\vec{w} = \langle -1, -4\rangle$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $-3\vec{u}$ $\quad \langle 9, -15\rangle$

b) $\vec{v} - \vec{w}$ $\quad \langle 5, 11\rangle$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ $\quad \langle 6, 31\rangle$

d) $4(\vec{w} - 1.5\vec{u}) + 2\vec{v}$ $\quad \langle 22, -32\rangle$

مثال 5

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 3, 1\rangle$، وَ $\vec{b} = \langle -4, 6\rangle$، وَ $\vec{c} = \langle -3, -1\rangle$، فأَجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

1 $\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle 3 + (-4), 1 + 6\rangle = \langle -1, 7\rangle$$

2 $2\vec{a}$

$$2\vec{a} = \langle 2 \times 3, 2 \times 1\rangle = \langle 6, 2\rangle$$

3 $\vec{c} - \vec{b}$

$$\vec{c} - \vec{b} = \langle -3 - (-4), -1 - 6\rangle = \langle 1, -7\rangle$$

4 $\vec{a} + \vec{c}$

$$\vec{a} + \vec{c} = \langle 3 + (-3), 1 + (-1)\rangle = \langle 0, 0\rangle$$

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 3, 1\rangle$، وَ $\vec{b} = \langle -2, 7\rangle$، وَ $\vec{c} = \langle 0, -5\rangle$، فأَجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

a) $-\vec{b}$ b) $4\vec{c}$ c) $\vec{b} - \vec{c}$ d) $4\vec{a} + 3\vec{c}$

أُفكِّرُ

ما العلاقةُ بينَ المتجهيْنِ $\vec{u} - \vec{v}$ ، $\vec{v} - \vec{u}$؟

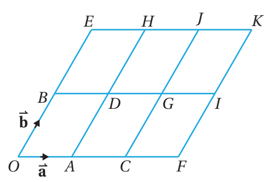
أتعلَّمُ

المتجهُ $\vec{a}$ هوَ معكوسُ المتجهِ $\vec{c}$؛ لأنَّ مجموعَهُما يساوي المتجهَ الصفريَّ؛ أيْ إنَّ:

$$\vec{a} + \vec{c} = 0$$

أتدرب وأحل المسائل

أحدّدُ كلًّا ممّا يأتي اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ الذي يتكوَّنُ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ:



1 ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\vec{a}$ $\quad \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{GI}, \overrightarrow{AC}$

2 ثلاثةُ متجهاتٍ موازيةٍ للمتجهِ $\vec{b}$ $\quad \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{FK}, \overrightarrow{OE}$

3 ثلاثةُ متجهاتٍ معاكسةٍ للمتجهِ $\vec{a}$ $\quad \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{KE}, \overrightarrow{FO}$

4 ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\overrightarrow{OD}$ $\quad \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CI}$

5 ثلاثةُ متجهاتٍ مساويةٍ للمتجهِ $\overrightarrow{OG}$ $\quad \overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{DK}, \overrightarrow{AJ}$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

a) $-\vec{b} = \langle 2, -7\rangle$

b) $4\vec{c} = \langle 0, -20\rangle$

c) $\vec{b} - \vec{c} = \langle -2, 12\rangle$

d) $4\vec{a} + 3\vec{c} = \langle 12, -1\rangle$

باستعمالِ الشكلِ الواردِ في السؤالِ السابقِ، أكتبُ كلاً منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$

6 المتجهُ $\overrightarrow{OC}$ $2\vec{\mathbf{a}}$

7 متجهُ الموقعِ للنقطةِ E $2\vec{\mathbf{b}}$

8 متجهُ الموقعِ للنقطةِ F $3\vec{\mathbf{a}}$

9 المتجهُ $\overrightarrow{OG}$ $2\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

10 المتجهُ $\overrightarrow{AG}$ $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

11 المتجهُ $\overrightarrow{OK}$ $3\vec{\mathbf{a}}+2\vec{\mathbf{b}}$

إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}}=\langle 34,-86\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{b}}=\langle -65,17\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{c}}=\langle 9,-1\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

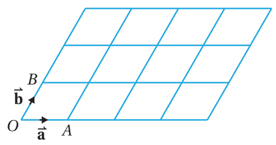
12 $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{c}}$ $\langle 43,-87\rangle$

13 $\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}}$ $\langle -99,103\rangle$

14 $3\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}$ $\langle -38,14\rangle$

15 $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}-2\vec{\mathbf{c}}$ $\langle -49,-67\rangle$

أنســخُ الشكلَ المجاورَ الذي يتكوّنُ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ، ثمَّ أحدّدُ عليهِ مواقعَ النقاطِ C, D, E, F بحيثُ تحقّقُ كلًّا ممّا يأتي:



16 $\overrightarrow{OC}=2\vec{\mathbf{a}}+3\vec{\mathbf{b}}$

17 $\overrightarrow{OD}=2\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$

18 $\overrightarrow{OE}=4\vec{\mathbf{a}}$

19 $\overrightarrow{OF}=4\vec{\mathbf{a}}+2\vec{\mathbf{b}}$

(16–19) أنظر ملحق الإجابات.

20 إذا كانَ $\langle 3x-y, y-x^2\rangle=\langle 7,-5\rangle$، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟ $x=1$ و $y=4$، أو $x=2$ و $y=-1$

إذا كانَ $\vec{\mathbf{e}}=\langle -3,-2\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{f}}=\langle 2,4\rangle$، فأُمثّلُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ على المستوى الإحداثيِّ: (21–32) أنظر ملحق الإجابات.

21 $\vec{\mathbf{e}}+\vec{\mathbf{f}}$

22 $3\vec{\mathbf{f}}$

23 $\vec{\mathbf{e}}-\vec{\mathbf{f}}$

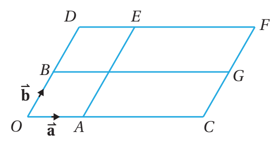
24 $\vec{\mathbf{f}}-\vec{\mathbf{e}}$

25 $4\vec{\mathbf{e}}$

26 $2\vec{\mathbf{f}}+\vec{\mathbf{e}}$

27 إذا كانَ $\vec{\mathbf{d}}=\langle 5,9\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{e}}=\langle 11,-8\rangle$، فأَجِدُ $|4\vec{\mathbf{d}}-3\vec{\mathbf{e}}|$، $|\frac{1}{3}\vec{\mathbf{e}}|$

يتكوّنُ الشكلُ المجاورُ من مجموعتينِ من المستقيماتِ المتوازية، إذا كان $\overrightarrow{OD}=2\,\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OA}$ فأكتبُ كلاً منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$



28 $\overrightarrow{OF}$

29 $\overrightarrow{OG}$

30 $\overrightarrow{EG}$

31 $\overrightarrow{CE}$

32 اعتمادًا على الشكلِ السابقِ أحدّدُ متّجهينِ كلٌّ منهُما يساوي $(3\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})$

94

إرشـاد: أُخبِر الطلبة أنّه يمكنهم اسـتعمال برمجية جيوجبرا للتحقُّق من حل أسئلة الدرس في البيت، أو عن طريق تطبيق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.

4 التدريب

- أُوجِّـه الطلبــة إلى بند (**أتــدرَّب وأحل المســائل**)، ثــم أطلــب إليهم حــل المســائل (15 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشــرًا بأمثلــة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحــد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المســألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اســتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تســاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (27 – 16) كتاب التمارين: (22 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (37 – 28), 42, 43 كتاب التمارين: (22 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (47 – 38) كتاب التمارين: (32 – 22)

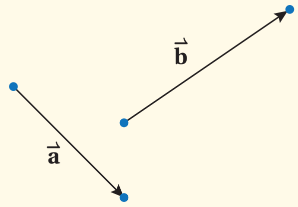
مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (47 – 45).
- أرصــد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشـاد: عند حل الســؤال 47 (**تحــدّ**)، أُذكِّر الطلبة بخصائص المثلث متطابق الأضلاع: ارتفاعاته منصفات لأضلاعه (أيْ إنَّها القطع المتوسطة للمثلث)، ومنصفات لزواياه، وهي تتقاطع في مركزه الذي يقسم كل قطعة متوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس.

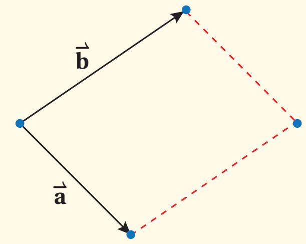
5 الإثراء

- أُوضِّح للطلبة كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا بطريقة أُخرى تُسمّى قاعدة متوازي الأضلاع؛ إذ يمكن إيجاد محصلة المتجهين $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ في الشكل المجاور باتباع الخطوات الآتية:

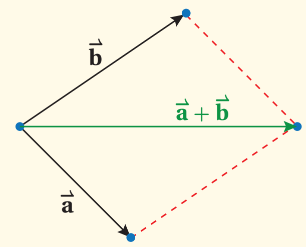


الخطوة 1: سحب المتجه $\vec{\mathbf{b}}$ بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة بداية المتجه $\vec{\mathbf{a}}$.

الخطوة 2: إكمال رسم متوازي الأضلاع، بحيث يكون المتجهان $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ ضلعين فيه كما في الشكل الآتي:



الخطوة 3: رسم قُطْر متوازي الأضلاع المار بتقاطع المتجهين لتمثيل المتجه $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ كما في الشكل الآتي:



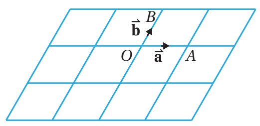
- أطلب إلى الطلبة إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا بطريقة قاعدة المثلث تارة، وبطريقة قاعدة متوازي الأضلاع تارة أُخرى، ثم تدوين مزايا كل طريقة.
- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » أيُّ الطريقتين تُفضِّلون؟

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة (4) من المشروع.
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ مقياس الرسم في الخريطة يُعبِّر عن النسبة بين البُعْد على الخريطة والبُعْد الحقيقي على الأرض.

33 **نزهةٌ بحريةٌ:** أبحرَ قاربٌ سياحيٌّ مسافةَ 40 km جنوبًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 70 km في اتجاهِ الشرقِ. أستعملُ جمعَ المتجهاتِ لأكتبَ متجهًا يمثِّلُ محصلةَ رحلةِ القاربِ وأجدُ بُعدَهُ عنْ نقطةِ انطلاقِهِ. أنظر ملحق الإجابات.

أنسخُ الشكلَ المجاورَ المكوَّنَ من متوازياتِ أضلاعٍ صغيرةٍ متطابقةٍ، ثمّ أحدّدُ عليهِ مواقعَ النقاطِ C, D, E, F, G, H, I, J بحيثُ تحقِّقُ كلًّا ممّا يأتي:



(34–47) أنظر ملحق الإجابات.

34 $\overrightarrow{OC} = 2\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

35 $\overrightarrow{OD} = 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

36 $\overrightarrow{OE} = \vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}}$

37 $\overrightarrow{OF} = \vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{a}}$

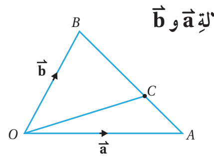
38 $\overrightarrow{OG} = -\vec{\mathbf{a}}$

39 $\overrightarrow{OH} = -\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}}$

40 $\overrightarrow{OI} = 2\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}}$

41 $\overrightarrow{OJ} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

في الشكلِ المجاورِ إذا كانتْ C تقسمُ $\overline{AB}$ بنسبةِ 2:5 فأكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$



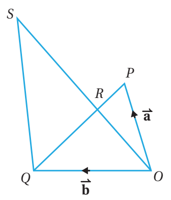
42 $\overrightarrow{AB}$

43 $\overrightarrow{AC}$

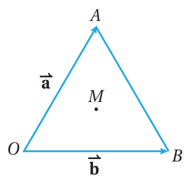
44 $\overrightarrow{OC}$

مهارات التفكير العليا

45 **برهانٌ:** في الشكلِ المجاورِ، إذا كانتْ R تقسمُ كلًّا منْ $\overline{PQ}$، و $\overline{OS}$ بنسبةِ 2 : 1، وكانَ $\overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OQ} = \vec{\mathbf{b}}$، فأثبتُ أنَّ المتجهينِ $\overrightarrow{OP}$، و $\overrightarrow{QS}$ متوازيانِ.



تحدٍّ: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ المثلثَ متطابقَ الأضلاعِ OAB الذي مركزُهُ النقطةُ M؛ ما يعني أنَّ المستقيمَ الواصلَ بينَ رأسِ المثلثِ والنقطةِ M عموديٌّ على الضلعِ المقابلِ:



46 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$

47 أُثبِتُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب اختيار فكرة فهمها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها جيدًا، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- أطلب إلى كل طالب أنْ يُسلِّمني ورقته.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، أُخطِّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي أرصدها.

الدرس
3

الضربُ القياسيُّ
Scalar Product

فكرةُ الدرس ضربُ المتجهاتِ، وإيجادُ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْن.

المصطلحاتُ الضربُ القياسيُّ.

مسألةُ اليوم دفعَ محمدٌ عربةَ طفلتِهِ بقوةٍ مقدارُها 70 N، وبزاويةٍ مقدارُها 54°، مسافةَ 18 m. ما مقدارُ الشغلِ الذي بذلَهُ لدفعِ العربةِ بوحدةِ جول (J)، وبإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ؟

تعرَّفْتُ ســابقًا العملياتِ على المتجهاتِ، مثلَ ضربِ متجهٍ في عددٍ ثابتٍ، وسأتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفيةَ إيجادِ ناتجِ ضربِ متجهيْن. **الضربُ القياسيُّ** (scalar product) هوَ عمليةٌ جبريةٌ بينَ متجهيْن، تنتجُ منْها كميةٌ قياسيةٌ يُرمَزُ إليْها بالرمزِ $\vec{v} \bullet \vec{w}$، وتُقرَأُ: $\vec{v}$ dot $\vec{w}$

مفهومٌ أساسيٌّ — الضربُ القياسيُّ

إذا كانَ $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$، وَ $\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فإنَّ: $\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

أتعلَّمُ
يُسمّى الضربُ القياسيُّ أيضًا الضــربَ النقطيَّ Dot product

مثال 1

إذا كانَ $\vec{v} = \langle 2, 8 \rangle$، وَ $\vec{w} = \langle -5, 4 \rangle$، فأَجِدُ $\vec{v} \bullet \vec{w}$:

$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$ صيغةُ الضربِ القياسيِّ

$= 2 \times -5 + 8 \times 4$ بالتعويضِ

$= -10 + 32$ بالتبسيطِ

$= 22$

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $\vec{v} = \langle -3, 2 \rangle$، وَ $\vec{u} = \langle 6, 9 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ 0
b) $\vec{v} \bullet \vec{u}$ 0
c) $\vec{u} \bullet \vec{u}$ 117

أتعلَّمُ
لأيِّ متجهٍ $\vec{u}$، فإنَّ: $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|^2$

96

الدرس
3

نتاجات الدرس

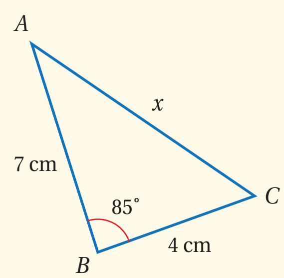
- إيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين.
- تعرُّف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- حساب الشـغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

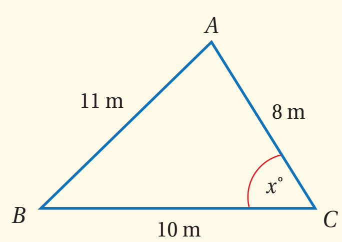
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي.
- حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة **(الفقرات)** المُرتبطـة بما سـيُقدَّم من موضوعـات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات **(أسـتعد لدراسـة الوحدة)** في كتـاب التمارين، ثم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلـى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x في المثلثين الآتيين:

1 

$x = 7.8$ cm

2 

$x = 74.4°$

1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بما تعلَّموه عن المتجهات في الدرسـين السابقين، ثم أطرح عليهم السؤال الآتي:

» إذا كان $\vec{u} = \langle 3, -2 \rangle, \vec{v} = \langle 4, 1 \rangle$، فأجـد كلًّا ممّا يأتي:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ $\langle 7, -1 \rangle$

b) $\vec{v} - \vec{u}$ $\langle 1, 3 \rangle$

c) $2\vec{v} + 3\vec{u}$ $\langle 17, -4 \rangle$

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما المقصود بالشغل؟ الطاقة المبذولة لتحريك جسم ما مسافة محددة.
  » علامَ يعتمد مقدار الشغل؟ يعتمد على مقدار القوة المُؤثِّرة، واتجاهها، والمسافة التي تَحرَّكها الجسم.
  » ما وحدة قياس الشغل؟ الجول؛ وهو مقدار الشغل المبذول عندما تُؤثِّر قوة مقدارها نيوتن واحد في جسم يتحرك مسافة متر واحد في اتجاه تلك القوة.
  » هل أبذل شغلًا إذا حاولت دفع حائط غرفة الصف؟ لا؛ لأنَّه لن يتحرك.
- أعزز الإجابات الصحيحة.
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعلَّمون في هذا الدرس كيفية حساب الشغل.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الضرب القياسي لمتجهين، وكيفية حسابه إذا أُعطِي متجهان بالصورة الإحداثية.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

مثال 1

أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد الضرب القياسي لمتجهين، مُوضِّحًا علاقة ناتج الضرب القياسي للمتجه في نفسه بمقدار المتجه (أو طوله) عندما يحل الطلبة التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).

مثال إضافي

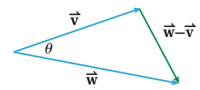
إذا كان $\vec{\mathbf{u}} = \langle \frac{3}{2}, -4 \rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle -6, -3 \rangle$، فأجد $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$. 3

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

ملاحظاتي

إرشاد: أُوضِّح للطلبة خطوات استنتاج الصيغة الخاصة بإيجاد قياس الزاوية بين متجهين من قانون جيوب التمام، مُبيِّنًا لهم أنَّه يمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين إذا عُلِم طول كلٍّ منهما، وقياس الزاوية بينهما.



تعرَّفْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَ $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ، وَ $\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإنَّ طولَ المتجهِ المرسومِ باللونِ الأخضرِ في الشكلِ المجاورِ هوَ $|\vec{w}-\vec{v}|$ ، حيثُ: $\vec{w}-\vec{v} = \langle w_1-v_1 , w_2-v_2 \rangle$
وباستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، فإنَّ:

$$|\vec{w}-\vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{w}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

$$(w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 = w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\vec{w}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

$$\cancel{w_1}^2 - 2w_1 v_1 + \cancel{v_1}^2 + \cancel{w_2}^2 - 2 w_2 v_2 + \cancel{v_2}^2 = \cancel{w_1}^2 + \cancel{w_2}^2 + \cancel{v_1}^2 + \cancel{v_2}^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$-2w_1v_1 - 2w_1v_1 = -2|\vec{w}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = |\vec{w}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\theta$$ الخاصيةُ التبديليةُ

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\theta$$

ولذلكَ، فإنَّ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}$$

أتعلَّمُ

الزاويةُ بينَ متجهينِ هيَ الزاويةُ الصغرى المحصورةُ بينهما عندَ رسمِهما بَدْءًا بالنقطةِ نفسِها؛ أيْ إنَّ: $0 \le \theta \le \pi$.

الزاويةُ بينَ متجهينِ

مفهومٌ أساسيٌّ

يمكِنُ إيجادُ قياسِ الزاويةِ θ بينَ المتجهينِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ حيثُ $0° \le \theta \le 180°$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

مثال 2

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{a} = \langle 6, 8 \rangle$، وَ $\vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$

الخطوةُ 1: أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{a}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$ بالتعويضِ

$$= \sqrt{100} = 10$$ بالتبسيطِ

97

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة خطوات استنتاج الصيغة الخاصة بإيجاد قياس الزاوية بين متجهين من قانون جيوب التمام، مُبيِّنًا لهم أنَّه يمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين إذا عُلِم طول كلٍّ منهما، وقياس الزاوية بينهما.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يُبيِّن خطوات إيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين، وأسألهم عن الحالات المختلفة للعلاقة بين متجهين، ثم أربطها بناتج الضرب القياسي.

مثال إضافي

- أجد قياس الزاوية بين المتجهين
$\vec{w} = \langle 1, -5 \rangle, \vec{v} = \langle -4, 2 \rangle$ $127.9°$

! أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة في حساب قياس الزاوية بين متجهين؛ لذا أُوجِّههم إلى رسم المتجهين على المستوى الإحداثي، لملاحظة الزاوية بين المتجهين، ومقارنتها بإجاباتهم؛ للتحقُّق من معقولية الحل.

إرشـاد: أُخبِـر الطلبـة أنَّه توجد تسـميات أُخـرى للضرب القياسـي، منها: الضـرب النقطي (dot product)، والضـرب الداخلـي (inner product).

مثال 3

- أُخبِر الطلبة أنَّ الضرب القياسـي لمتجهين متعامدين يساوي صفرًا، مُبيِّنًا سبب ذلك.
- أُوضِّح للطلبـة أنَّه إذا كان الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين يساوي صفرًا فإنَّ المتجهين متعامدان.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3.

مثال إضافي

- أُحدِّد إذا كان المتجهان في كلٍّ ممّا يأتي متعامدين، أو متوازيين، أو غير ذلك:

a) $\vec{u} = \langle 2, 4\rangle, \vec{v} = \langle -8, 4\rangle$ متعامدان.

b) $\vec{u} = \langle 1, -2\rangle, \vec{v} = \langle -3, 6\rangle$ متوازيان.

c) $\vec{u} = \langle -2, 4\rangle, \vec{v} = \langle -1, 5\rangle$ غير ذلك.

d) $\vec{u} = \langle 4, 5\rangle, \vec{v} = \langle 10, -8\rangle$ متعامدان.

الخطوةُ 2: أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\vec{b}$.

$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$ بالتعويضِ

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيطِ

الخطوةُ 3: أَجِدُ الضربَ القياسيَّ للمتجهينِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ صيغةُ الضربِ القياسيِّ

$= 6\times3 + 8\times4$ بالتعويضِ

$= 18 + 32$ بالتبسيطِ

$= 50$

الخطوةُ 4: أُعوِّضُ القيمةَ الناتجةَ منَ الخطوةِ السابقةِ في صيغةِ الزاويةِ بينَ متجهينِ.

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ صيغةُ الزاويةِ بينَ متجهينِ

$= \dfrac{50}{10\times5} = 1$ بالتعويضِ

$\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

بما أنَّ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ صفرٌ، فهُما متوازيانِ.

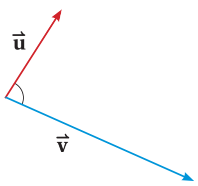
تُستخدَمُ المتجهاتُ في إنتاجِ الألعابِ الإلكترونيةِ؛ فهيَ تساعدُ المبرمجينَ على ضبطِ المواقعِ والاتجاهاتِ لحركةِ الأجسامِ التي يتحكَّمُ فيها اللاعبونَ.

إرشادٌ
أرسمُ المتجهيْنِ في الوضعِ القياسيِّ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا وضعَ التوازي بينَهُما.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{u} = \langle -1, 1\rangle$ وَ $\vec{v} = \langle 2, 7\rangle$ 61° تقريبًا.

إذا كانَ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ متجهيْنِ غيرَ صفرييْنِ، وكانَتِ الزاويةُ المحصورةُ بينَهُما قائمةً، فإنَّ المتجهيْنِ يكونانِ متعامدينِ، ويكونُ ناتجُ ضربِهما القياسي صفرًا؛ لأنَّ $\cos 90° = 0$



مثال 3

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{v}} = \langle -6, 4\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2, 3\rangle$ متعامديْنِ أمْ لا.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ: $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

بالتعويضِ: $= 2\times -6 + 3\times 4$

بالتبسيطِ: $= -12 + 12$

$= 0$

بما أنَّ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ ، فإنَّ المتجهيْنِ متعامدانِ.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3, -5\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 1, 0\rangle$ متعامديْنِ أمْ لا.

غير متعامديـن؛ لأنَّ ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا، وإنَّما يساوي 3

توجدُ تطبيقاتٌ عمليةٌ عِدَّةٌ على الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ، أهمُّها حسابُ الشغلِ W الناتجِ منْ تأثيرِ قوةٍ ثابتةٍ $\mathbf{F}$ بزاويةٍ مُحدَّدةٍ θ على جسمٍ ما؛ لتحريكِهِ منْ نقطةٍ إلى أُخرى مسافةً مقدارُها $\mathbf{d}$ وحدةً. فالشغلُ هوَ كميةٌ قياسيةٌ تساوي ناتجَ الضربِ القياسيِّ لمتجهِ القوةِ في متجهِ الإزاحةِ، ووحدةُ قياسِهِ هيَ جول (J). يُمكِنُ إيجادُ مقدارِ الشغلِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$W = |\vec{\mathbf{F}}|\,|\vec{\mathbf{d}}|\cos\theta$$

أتعلَّمُ

وَحدةُ قياسِ الشغلِ هيَ نيوتن - متر، وتُسمّى الجول، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ J

مثال 4: من الحياة

فيزياءُ: سحبَ عاملٌ صندوقًا بقوةٍ مقدارُها $\vec{\mathbf{F}} = 13\text{ N}$، وبذلَ شغلًا مقدارُهُ $W = 20\text{ J}$ لسحبِ الصندوقِ مسافةً أفقيةً مقدارُها $\vec{\mathbf{d}} = 18\text{ m}$. ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

قانونُ الشغلِ: $W = |\vec{\mathbf{F}}|\,|\vec{\mathbf{d}}|\cos\theta$

بالتعويضِ: $20 = 13 \times 18 \times \cos\theta$

بالتبسيطِ: $20 = 234 \times \cos\theta$

مثال 4: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في مفهوم الشغل، وصيغة إيجاده، ثم أكتب على اللوح وحدتي القوة والشغل.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4.

إرشاد: أوضح للطلبة أن القوة مُؤثِّر يؤدي إلى تغيير حالة الجسم الحركية. والقوة من الكميات المتجهة، وهي تقاس بوحدة نيوتن. أمّا الشغل فهو من الكميات المرتبطة بالقوة؛ إذ تبذل القوة شغلًا على جسم ما عندما تُحرِّكه في اتجاه ما بمقدار إزاحة معين، ويقاس الشغل بوحدة جول.

مثال إضافي

تدفع سلوى مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 17 N، وتصنع ذراع المكنسة زاوية قياسها 65° مع أرضية الغرفة. ما الشغل (بالجول) الذي تبذله سلوى لتحريك المكنسة مسافة 4 m بإهمال قوة الاحتكاك؟ 28.7 J تقريبًا.

4 التدريب

- أُوجِّــه الطلبــة إلى بند (أتــدرَّب وأحل المســائل)، ثــم أطلــب إليهم حــل المســائل (11 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشــرًا بأمثلــة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحــد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المســألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اســتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تســاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 13) كتاب التمارين: (4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 17) ,12 كتاب التمارين: (8 – 5)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (23 – 20) كتاب التمارين: (9 – 6)

$\frac{20}{234} = \cos\theta$ بالتبسيطِ

$\theta = \cos^{-1}(0.0855)$ معكوسُ جيبِ التمامِ

$\theta = 85.1°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

سحبَ منذرٌ عربةً، فبذلَ شــغلًا مقدارُهُ 13 J، بقوةٍ مقدارُها 50 N، مسافةَ $\vec{d} = 30$ m

ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

89.5° تقريبًا.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\vec{a} = \langle 6, 8\rangle , \vec{b} = \langle 4, -3\rangle$ 0

2) $\vec{u} = \langle -3, 11\rangle , \vec{v} = \langle -9, 4\rangle$ 71

3) $\vec{c} = \langle -12, 43\rangle , \vec{v} = \langle 22, 14\rangle$ 338

4) $\vec{d} = \langle 21, 32\rangle , \vec{e} = \langle -21, 25\rangle$ 359

5) إذا كانَ $|\vec{b}| = 6$، وَ $|\vec{a}| = 9$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ هوَ 42°، فأَجِدُ ناتجَ $\vec{a} \bullet \vec{b}$ 40.13

6) إذا كانَ $|\vec{b}| = 76$، وَ $|\vec{a}| = 34$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\vec{a}$ وَ $\vec{b}$ هوَ 120°، فأَجِدُ ناتجَ $\vec{a} \bullet \vec{b}$ −1292

7) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\vec{a} = \langle 7, 10\rangle$، وَ $\vec{b} = \langle 4, -10\rangle$ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ. 123.2°

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

8) $\vec{c} = \langle 2, 4\rangle , \vec{d} = \langle -24, 12\rangle$ 0, 90°

9) $\vec{a} = \langle 4, 16\rangle , \vec{k} = \langle 8, -2\rangle$ 0, 90°

10) أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{e} = \langle 3, 4\rangle$، وَ $\vec{a} = \langle 11, -8\rangle$ متعامديْنِ أمْ لا، مُبرِّرًا إجابتي.

$\vec{a} \cdot \vec{e} = 1$ إذن، المتجهان غير متعامدين؛ لأنَّ ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا.

11) إذا كانَ $\vec{r} = \langle 3, -4\rangle$، وَ $\vec{s} = \langle b, b+2\rangle$ متجهيْنِ متعامديْنِ، فأَجِدُ قيمةَ b.

$3b - 4(b+2) = 0$

$3b - 4b - 8 = 0$

$-b = 8 ,\ b = -8$

100

إجابات الأسئلة:

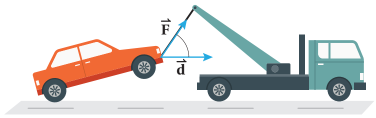
17) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2\rangle, \vec{b} = \langle b_1, b_2\rangle, \vec{c} = \langle c_1, c_2\rangle$، فإنَّ:

$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

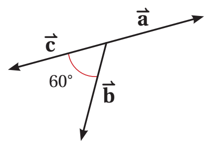
$= b_1 a_1 + b_2 a_2$ (لأنَّ ضرب الأعداد الحقيقية تبديلي).

وإنَّ: $\vec{b} . \vec{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2$

إذن، $\vec{a} . \vec{b} = \vec{b} . \vec{a}$ ؛ أيْ إنَّ الضرب القياسي للمتجهات تبديلي.



12 **سيّاراتٌ:** تسحبُ شاحنةٌ سيّارةً كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ مقدارُ قوةِ السحبِ $|\vec{F}| = 34N$، والمسافةُ المقطوعةُ $|\vec{d}| = 12\ km$، وشغلُ الشاحنةِ المبذولُ $W = 46\ J$، فأَجِدُ قياسَ زاويةِ السحبِ.
$\theta = \cos^{-1}(46 \div 408000) \approx 89.9935°$



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $|\vec{a}| = 2$، وَ $|\vec{b}| = 4$، وَ $|\vec{c}| = 5$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

13 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ -4

14 $\vec{b} \bullet \vec{c}$ 10

15 $\vec{a} \bullet \vec{c}$ -10

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. $W = 70 \times 18 \times \cos 54° \approx 740\ J$

مهارات التفكير العليا (17–19) أنظر الهامش.

برهانٌ: إذا كانَتْ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهاتٍ، وكانَ $\vec{0}$ المتجهَ الصفريَّ، فأُثبِتُ صحَّةَ كلٍّ ممّا يأتي:

17 $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

18 $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

19 $\vec{0} \bullet \vec{a} = 0$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** إذا كانَ $\vec{p} \bullet \vec{q} = 30$، وَ $\vec{q} = \langle 6 , 2 \rangle$، فأَجِدُ قيمةً مُحتمَلةً للمتجهِ $\vec{p}$. (20 – 23) أنظر ملحق الإجابات.

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَجِدُ متجهًا يُعامِدُ المتجهَ $\vec{a} = \langle -8 , -2 \rangle$

22 **تبريرٌ:** أُبيِّنُ باستعمالِ المتجهاتِ أنَّ المثلثَ الذي رؤوسُهُ النقاطُ: $(-2, -4)$, $(1, 5)$, $(6, -2)$ مُتطابِقُ الضلعيْنِ، ثمَّ أَجِدُ قياساتِ جميعِ زواياهُ، مُبرِّرًا إجابتي.

23 **تبريرٌ:** إذا كانَ المتجهانِ $\vec{a} = \langle -1 , r \rangle$، وَ $\vec{b} = \langle 2, -3 \rangle$ متوازييْنِ، فما قيمةُ r؟

إجابات الأسئلة:

18) إيجاد الطرف الأيسر:

$$\vec{a} . (\vec{b} + \vec{c}) = \langle a_1 , a_2 \rangle . (\langle b_1 , b_2 \rangle + \langle c_1 , c_2 \rangle)$$
$$= \langle a_1 , a_2 \rangle . \langle b_1 + c_1 , b_2 + c_2 \rangle$$
$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$$
$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

ثم إيجاد الطرف الأيمن:

$$\vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c} = \langle a_1 , a_2 \rangle . \langle b_1 , b_2 \rangle + \langle a_1 , a_2 \rangle . \langle c_1 , c_2 \rangle$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$$
$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

(بتبديل موقعي الحدين: الثاني، والثالث)

إذن، $\vec{a} . (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c}$؛ أيْ إنَّ الضرب القياسي يتوزَّع على جمع المتجهات.

19) $0 . \vec{a} = \langle 0,0 \rangle . \langle a_1 , a_2 \rangle = 0 \times a_1 + 0 \times a_2 = 0 + 0 = 0$

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند **(مهارات التفكير العليا)**، وأطلب إليهم حلّ المسائل (23 – 17).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصر كافّة متوافرة يوم العرض.

5 الإثراء

إذا كان للمتجهين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ المقدار نفسه، فأُثبِت أنَّ $\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{u} - \vec{v}$ متعامدان.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (5) من المشروع.
- أُوجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصر كافّة متوافرة يوم العرض.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة – كتابةً – بيان كيف يمكن تحديد إنْ كان متجهان معطيان متعامدين أم متوازيين، ثم تحديد المتجهين المتعامدين والمتجهين المتوازيين من بين المتجهات الآتية:

$\vec{u} = \langle 4, 6 \rangle, \vec{v} = \langle -3, -6 \rangle,$

$\vec{w} = \langle -8, 4 \rangle, \vec{z} = \langle 10, 15 \rangle$

$\vec{u} , \vec{z}$: متوازيان. $\vec{v} , \vec{w}$: متعامدان.

اختبار نهاية الوحدة:

- أُراجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلـــى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأســئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- أختار بعض الأســئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم أُناقِشهم في إجاباتها في اليوم التالي.

إرشــاد: أُذكِّر الطلبة بمفهومي زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض قبل حل السؤال 24.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, -1\rangle$ ، فإنَّ $|\vec{\mathbf{v}}|$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

2 إذا كانَ $A(2, 5), B(-1, 7)$ ، فإنَّ $\overrightarrow{BA}$ هوَ:

a) $\langle 3, -2\rangle$ b) $\langle -2, 3\rangle$

c) $\langle -3, 2\rangle$ d) $\langle 3, 2\rangle$

3 العبارةُ الصحيحةُ في ما يأتي هيَ:

a) مقدارُ المتجهِ $\langle 2, 4\rangle$ يساوي 20

b) مقدارُ المتجهِ $\langle -4, 10\rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدارُ المتجهِ $\langle 4, -3\rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدارُ المتجهِ $\langle -6, 8\rangle$ يساوي 10

4 إذا كانَتْ $A(0, 2), B(3, y)$ ، وكانَ $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإنَّ y تساوي:

a) 5 b) -1

c) $5, -1$ d) $7, -3$

إذا كانَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle -3, -1\rangle$ وَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, 5\rangle$ ، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 5, 6, 7

5 $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ تساوي:

a) $\langle -2, 4\rangle$ b) $\langle 4, 6\rangle$

c) $\langle -4, -6\rangle$ d) $\langle -2, -4\rangle$

6 إذا كانَ $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{u}} + 2\vec{\mathbf{v}}$ ، فإنَّ $|\vec{\mathbf{p}}|$ تساوي:

a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

7 معكوسُ المتجهِ $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ هوَ:

a) $\langle -2,4\rangle$ b) $\langle 2,-4\rangle$

c) $\langle 4,6\rangle$ d) $\langle -4,-6\rangle$

8 إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 2,-3\rangle$ ، $\vec{\mathbf{b}} = \langle 3,4\rangle$ ، فإنَّ $\vec{\mathbf{a}} \cdot 2\vec{\mathbf{b}}$ تساوي:

a) -6 b) 6 c) -12 d) 12

إذا كانَتِ النقاطُ A, B, C, D نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، حيثُ $A(4, -1)$, $B(2, -3)$, $D(7, 1)$. فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ C إذا كانَ:

9 $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ $C(8, 3)$

10 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ $C(\frac{16}{3}, \frac{-1}{3})$

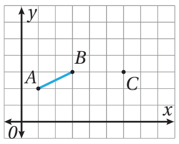
أُحدِّدُ في ما يأتي العباراتِ الصحيحةَ، مُصحِّحًا الخطأَ في غيرِ الصحيحِ منْها: (11–13) أنظر الهامش.

11 المتجهانِ المتساويانِ لهُما نفسُ المقدارِ.

12 المتجهانِ المتوازيانِ لهُما نفسُ المقدارِ والاتجاهِ.

13 لأيِّ متجهيْنِ: $\vec{\mathbf{u}}$ وَ $\vec{\mathbf{v}}$ ، فإنَّ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$

أنسخُ الرسمَ البيانيَّ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لأُجيبَ عنِ الأسئلةِ التي تليهِ: (14–16) أنظر الهامش.



14 إذا كانَ $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ E على المستوى الإحداثيِّ.

15 إذا كانَ $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ D على المستوى الإحداثيِّ.

16 إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ M على المستوى الإحداثيِّ.

17 إذا كانَتْ $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$ ، فأَجِدُ قيمةَ الثابتِ k. $k = 4$

102

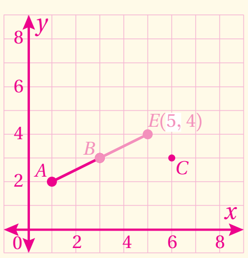
إجابات الأسئلة:

11) صحيحة.

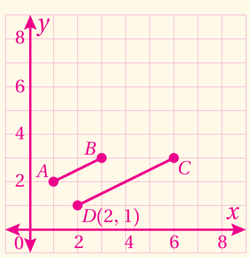
12) غير صحيحة؛ فالمتجهان المتوازيان لهما الاتجاه نفسه، أو لهما اتجاهان متعاكسان.

13) صحيحة.

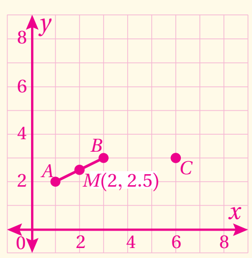
14)



15)



16)



اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

إذا كانَ $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, 5\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -1\rangle$، وَ $\vec{\mathbf{w}} = \langle 4, -2\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

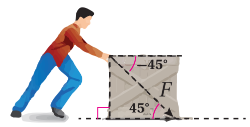
18 $-3\,(\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{w}})$ $\langle 6,-3\rangle$

19 $\vec{\mathbf{v}}\cdot 2\vec{\mathbf{u}}$ -14

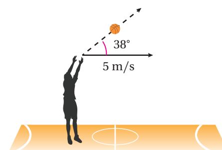
20 $\vec{\mathbf{w}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}+\frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}})$ -4

21 الزاويةُ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{v}}$ وَ $\vec{\mathbf{w}}$. $0°$

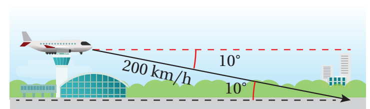
22 دفعَ عاملٌ صندوقًا بقوةِ 78 N، وبزاويةِ $-45°$ كما في الشكلِ التالي. أَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بذلَهُ العاملُ لتحريكِ الصندوقِ مسافةَ 12 m 661.9J



23 ركضَ حسامٌ في اتجاهِ السلَّةِ في أثناءِ مباراةِ دوري كرةِ السلَّةِ بسرعةٍ أفقيةٍ مقدارُها 5 m/s ، وقذفَ الكرةَ بسرعةٍ مقدارُها 20 m/s ، وبزاويةٍ قياسُها 38° معَ الأفقيِّ. أَجِدُ محصلةَ سرعةِ الكرةِ. أنظر الهامش.



24 هبطَتْ طائرةٌ بسرعةٍ مقدارُها 200 km/h، وبزاويةِ انخفاضٍ قياسُها 10°. أكتبُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ. أنظر الهامش.



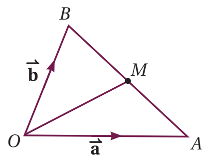
25 أقلعَتْ طائرتانِ معًا منَ المطارِ في الوقتِ نفسِهِ. وقدْ رصدَ برجُ المراقبةِ حركةَ الطائرتيْنِ، فوجدَ بعدَ ثوانٍ عِدَّةٍ أنَّ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 6, 8\rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الأولى، وأنَّ $\vec{\mathbf{b}} = \langle 4, -3\rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الثانيةِ. هلْ يتعامدُ مسارا الطائرتيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

نعم، يتعامدان؛ لأنَّ $\vec{\mathbf{a}}\,.\,\vec{\mathbf{b}} = 0$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

26 أَجِدُ الزاويةَ θ بينَ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{p}}$ وَ $\vec{\mathbf{q}}$ إذا كانَ $\vec{\mathbf{p}} = \langle 5, -1\rangle, \vec{\mathbf{q}} = \langle -2, 3\rangle$ $135°$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهيْنِ $\overrightarrow{OA}$ وَ $\overrightarrow{OB}$ المرسوميْنِ في الوضعِ القياسيِّ، حيثُ O نقطةُ الأصلِ، وَ M نقطةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$:

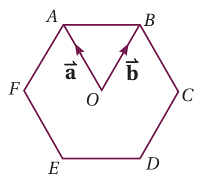


(27 – 30) أنظر ملحق الإجابات.

27 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

28 أُبرهِنُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})$

الشكلُ المجاورُ هوَ سداسيٌّ منتظمٌ، مركزُهُ O، وفيهِ: $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}\,,\ \overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{b}}$



29 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

30 إذا مُدَّ $\overline{AB}$ على استقامتِهِ حتى النقطةِ K بحيثُ كانَتْ $AB : BK = 1 : 2$، فأكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{CK}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$ وَ $\vec{\mathbf{b}}$.

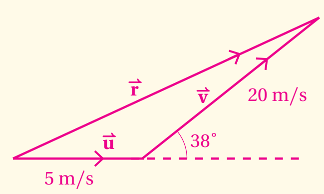
103

تدريب على الاختبارات الدولية

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حل الأسئلة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أحفّز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدّية، وأحرص على تضمين اختباراتي المدرسية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

إجابات الأسئلة:

23) يُمثِّل المتجه $\vec{\mathbf{u}}$ سرعة حسام، ويُمثِّل المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ سرعة الكرة، ويُمثِّل المتجه $\vec{\mathbf{r}}$ محصلة السرعتين. ولهذا، فإنَّ:



$$(|\vec{\mathbf{r}}|)^2 = 5^2 + 20^2 - 2\times 5\times 20\cos 142°$$

$$= 582.6$$

$$|\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{582.6} \approx 24.1 \text{ m/s}$$

أيْ إنَّ محصلة سرعة الكرة هي 24.1 m/s تقريبًا.

24) قياس الزاوية التي يصنعها متجه سرعة الطائرة مع المحور الأفقي عكس حركة عقارب الساعة هو $360° - 10° = 350°$؛ لذا، فإنَّ الصورة الإحداثية للسرعة المتجهة للطائرة هي:

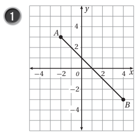
$$\langle 200\cos 350°\,,\ 200\sin 350°\rangle = \langle 196.96, -34.73\rangle$$

كتاب التمارين

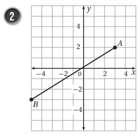
أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

• إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ (الدرسُ 1)

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ A و B في كلٍّ ممّا يأتي:

1) 

$6\sqrt{2}$

2) 

$\sqrt{89}$

3) $A(-5, -7), B(2, -3)$ $\sqrt{65}$

4) $A(8, 0), B(-4, -5)$ 13

5) $A(-4, 7), B(-3, 6)$ $\sqrt{2}$

مثالٌ: أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ: $(-2, -8)$، وَ $(-6, -5)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانونُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ

$= \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (-5 - (-8))^2}$ بتعويضِ إحداثياتِ النقطتيْنِ

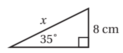
$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ بالتبسيطِ

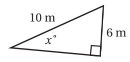
إذنْ، المسافةُ بينَ النقطتيْنِ: $(-2, -8)$، وَ $(-6, -5)$ هيَ 5 وحداتِ طولٍ.

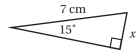
• استعمالُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ أطوالِ أضلاعٍ في مثلثٍ (الدرسُ 1)

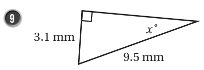
أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ الحادةِ الكبرى:

(6–9) أنظر الهامش.

6) 

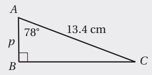
7) 

8) 

9) 

الوحدةُ 7: المتجهاتُ
أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ طولِ $\overline{AB}$ في المثلثِ الآتي، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ للزاويةِ A:



الضلعُ المجهولُ $\overline{AB}$ مجاورٌ للزاويةِ A؛ لذا أستعملُ نسبةَ جيبِ التمامِ للزاويةِ A:

$\cos A = \frac{\text{المجاورَ}}{\text{الوترِ}}$ تعريفُ نسبةِ جيبِ التمامِ

$\cos 78° = \frac{p}{13.4}$ بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ

$0.21 = \frac{p}{13.4}$ بتعويضِ قيمةِ $\cos 78°$

$p = (0.21)(13.4)$ بالضربِ التبادليِّ

$p = 2.81$ بالتبسيطِ

لحسابِ نسبتَيِ الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A، يجبُ معرفةُ طولِ الضلعِ المقابلِ لها. وبما أنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ نظريةَ فيثاغورس:

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$(13.4)^2 = (BC)^2 + (2.81)^2$ بالتعويضِ

$179.56 = (BC)^2 + 7.90$ بالتبسيطِ

$179.56 - 7.90 = (BC)^2$ بطرحِ 7.90

$171.66 = (BC)^2$ بالتبسيطِ

$13.10 = BC$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

أستطيعُ الآنَ حسابَ نسبتَيِ الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A:

$\sin A = \frac{\text{المقابلَ}}{\text{الوترِ}}$ تعريفُ نسبةِ الجيبِ

$\sin 78° = \frac{13.10}{13.4}$ بالتعويضِ

$\sin 78° \approx 0.98$ بالتبسيطِ

$\tan A = \frac{\text{المقابلَ}}{\text{المجاورِ}}$ تعريفُ نسبةِ الظلِّ

$\tan 78° = \frac{13.10}{2.79}$ بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ

$\tan 78° \approx 4.7$ بالتبسيطِ

إجابات أسئلة بند (أستعد لدراسة الوحدة):

8) $x \approx 1.81$

$AB = 6.76$

$\sin 75° \approx \frac{6.76}{7} \approx 0.966$

$\cos 75° = \frac{1.81}{7} \approx 0.259$

$\tan 75° = \frac{6.76}{1.81} \approx 3.734$

9) $x \approx 19°$

$AB = 8.98$

$\sin 71° \approx \frac{8.98}{9.5} \approx 0.945$

$\cos 71° = \frac{3.1}{9.5} \approx 0.326$

$\tan 71° = \frac{8.98}{3.1} \approx 2.897$

6) $x \approx 13.95$

$AB \approx 11.43$

$\sin 55° \approx \frac{11.43}{13.95} \approx 0.819$

$\cos 55° = \frac{8}{13.95} \approx 0.573$

$\tan 55° = \frac{11.43}{8} \approx 1.429$

7) $x \approx 37°$

$AB = 8$

$\sin 53° = \frac{8}{10} = 0.8$

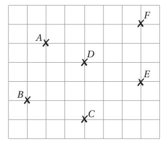
$\cos 53° = \frac{6}{10} = 0.6$

$\tan 53° = \frac{8}{6} = 1.33$

كتاب التمارين

الدرسُ 1
المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ
Vectors in the Coordinate Plane

إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 2, -1 \rangle$، فأكتبُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:



1 $\overrightarrow{AF}$ $\langle 5, 1 \rangle , \sqrt{26}$

2 $\overrightarrow{AB}$ $\langle -1, -3 \rangle , \sqrt{10}$

3 $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4 \rangle , 2\sqrt{5}$

4 $\overrightarrow{EB}$ $\langle -6, -1 \rangle , \sqrt{37}$

5 $\overrightarrow{EF}$ $\langle 0, 3 \rangle , 3$

6 $\overrightarrow{DC}$ $\langle 0, -3 \rangle , 3$

7 أكتبُ كلًّا منْ $\overrightarrow{BD}$، وَ $\overrightarrow{BF}$ بالصورةِ الإحداثيةِ. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ B، وَD، وَ F؟ أنظر ملحق الإجابات.

أستعملُ إحداثيَّي النقطةِ $A(6, 3)$ للإجابةِ عنِ المسائلِ الآتيةِ:

8 إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = \langle 2, -5 \rangle$، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ B. $B(8, -2)$

9 إذا كانَ $\overrightarrow{AC} = \langle -3, 4 \rangle$، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ C. $C(3, 7)$

10 إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 6, 0 \rangle$، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ D. $D(12, 3)$

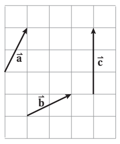
11 شاحناتٌ: أكتبُ بالصورةِ الإحداثيةِ السرعةَ المتجهةَ لشاحنةٍ تسيرُ على طريقٍ مُنحدِرٍ، علمًا بأنَّ سرعتَها الأفقيةَ $v_x = 58$ km/h، وسرعتَها الرأسيةَ $v_y = 37$ km/h. $\langle 58, 37 \rangle$

12 يدفعُ صالحٌ مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارُها 272 N، وبزاويةٍ قياسُها $51°$ معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ. $\langle 171.18 , 211.38 \rangle$

13 إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = 7$، حيثُ $A(-1, 4)$ هيَ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(x, 2)$ هيَ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ قيمةَ x، مُبرِّرًا إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

الدرسُ 2
جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ: (1–6) أنظر ملحق الإجابات.



1 $\vec{a} + \vec{b}$

2 $-\vec{a}$

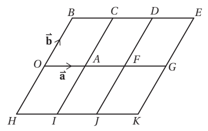
3 $\vec{a} - \vec{c}$

4 $\vec{b} - \vec{a}$

5 $-\vec{c}$

6 $-\vec{a} - \vec{b}$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ الذي يبيّنُ مجموعتينِ من المستقيماتِ المتوازيةِ، أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}$ و $\vec{b}$



7 $\overrightarrow{OH}$ $-\vec{b}$

8 $\overrightarrow{OK}$ $3\vec{a} - \vec{b}$

9 $\overrightarrow{OJ}$ $2\vec{a} - \vec{b}$

10 $\overrightarrow{OI}$ $\vec{a} - \vec{b}$

11 $\overrightarrow{OC}$ $\vec{a} + \vec{b}$

12 $\overrightarrow{CO}$ $-\vec{a} - \vec{b}$

13 $\overrightarrow{AK}$ $2\vec{a} - \vec{b}$

14 $\overrightarrow{DI}$ $-\vec{a} - 2\vec{b}$

15 $\overrightarrow{JE}$ $\vec{a} + 2\vec{b}$

16 $\overrightarrow{AB}$ $\vec{b} - \vec{a}$

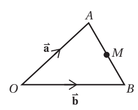
17 $\overrightarrow{CK}$ $2\vec{a} - 2\vec{b}$

18 $\overrightarrow{DK}$ $\vec{a} - 2\vec{b}$

الدرسُ 2 تابع
جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

في الشكلِ المجاورِ، M هيَ نقطةُ منتصفِ $\overline{AB}$

أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ المتجهيْنِ $\vec{a}$، وَ $\vec{b}$:



19 $\overrightarrow{AB}$ $\vec{b} - \vec{a}$

20 $\overrightarrow{BO}$ $-\vec{b}$

21 $\overrightarrow{AM}$ $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

22 $\overrightarrow{OM}$ $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

23 أُحدِّدُ على الشكلِ موقعَيِ النقطتيْنِ X، وَY، بحيثُ يكونَ $\overrightarrow{OX} = 2\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{OY} = \vec{a} + 2\vec{b}$. أنظر ملحق الإجابات.

24 أكتبُ $\overrightarrow{XY}$ بدلالةِ $\vec{a}$، وَ $\vec{b}$ $\vec{b} - \vec{a}$

25 ما المتجهاتُ الأُخرى المكافئةُ لـ $\overrightarrow{XY}$؟ $\overrightarrow{AB}$

إذا كانَ $\vec{a} = \langle 27, -15 \rangle, \vec{b} = \langle 9, -21 \rangle, \vec{c} = \langle -12, 0 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

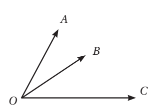
26 $\vec{a} - \vec{c}$ $\langle 39, -15 \rangle$

27 $\vec{b} - 2\vec{a}$ $\langle -45, 9 \rangle$

28 $3\vec{c} - \vec{b}$ $\langle -45, 21 \rangle$

29 $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ $\langle 30, 6 \rangle$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ O هيَ نقطةُ الأصلِ:



$\overrightarrow{OA} = \langle 2, 2 \rangle$ $\overrightarrow{OB} = \langle 4, 1 \rangle$ $\overrightarrow{OC} = \langle 6, 0 \rangle$

أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أرسمُهُ على الشكلِ:

30 $\overrightarrow{AB}$

31 $\overrightarrow{AC}$

32 $\overrightarrow{BC}$

(30–32) أنظر ملحق الإجابات.

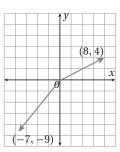
الدرسُ 3
الضربُ القياسيُّ
Scalar Product

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

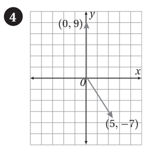
1 $\vec{a} = \langle -1, 5 \rangle , \vec{b} = \langle -6, -2 \rangle$ -4

2 $\vec{u} = \langle 3, 9 \rangle , \vec{v} = \langle 6, 5 \rangle$ 63

3 -92



4 -63



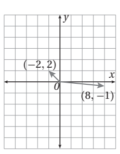
أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ متوازييْنِ، أوْ متعامديْنِ، أوْ غيرَ ذلكَ في كلٍّ ممّا يأتي:

5 $\vec{u} = \langle 4, -9 \rangle, \vec{v} = \langle -9, 4 \rangle$ غير ذلك.

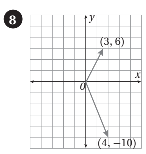
6 $\vec{u} = \langle -5, 2 \rangle, \vec{v} = \langle -10, 25 \rangle$ غير ذلك.

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

7 $142.1°$

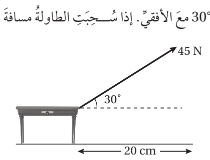


8 $131.6°$



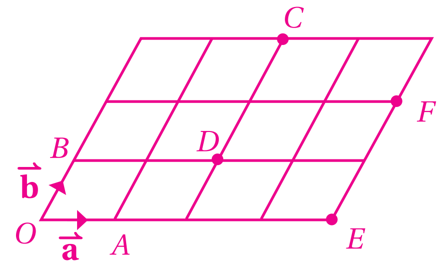
9 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سحبَ طاولةٍ بقوةٍ مقدارُها 45 N، وزاويةٍ قياسُها $30°$ معَ الأفقيِّ. إذا سُحِبَتِ الطاولةُ مسافةَ 20 cm، فأَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بُذِلَ.

7.8 J تقريبًا.

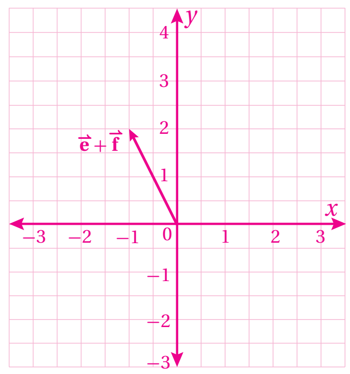


الدرس 2:

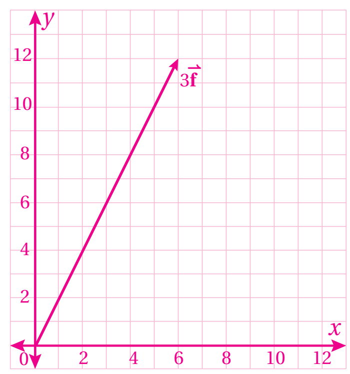
إجابة الأسئلة (16–19)



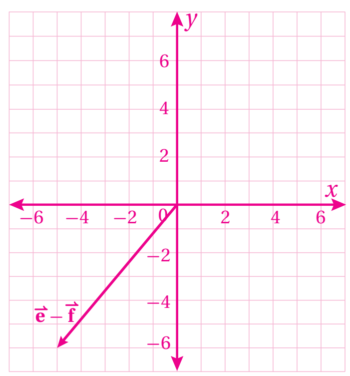
21)



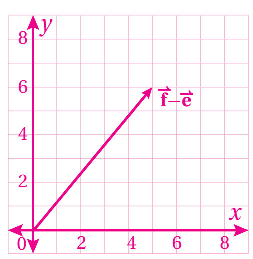
22)



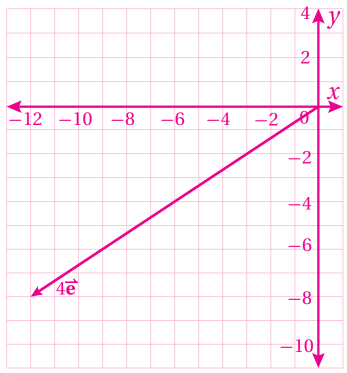
23)



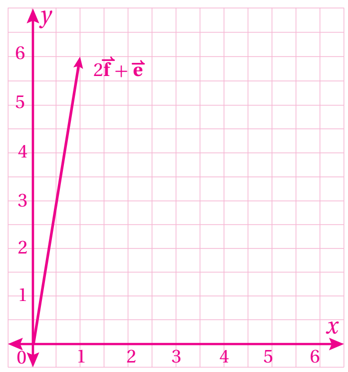
24)



25)



26)



28) $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = 3\,\vec{\mathbf{a}} + 2\,\vec{\mathbf{b}}$

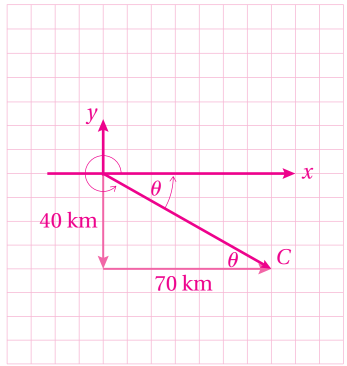
29) $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = 3\,\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

30) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = 2\,\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

31) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} = 2\,\vec{\mathbf{b}} - 2\,\vec{\mathbf{a}}$

32) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = 3\,\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG} = 3\,\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

33) أنظر الشكل الآتي:



$$|AC| = \sqrt{40^2 + 70^2}$$

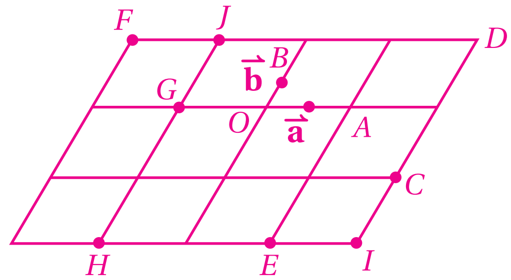
$$= \sqrt{6500} \approx 80.62 \text{ km}$$

$$\tan\theta = \frac{40}{70}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 29.7°$$

أيْ إنَّ القارب يَبعُد 80.62 km عن نقطة انطلاقه A، وفي اتجاه $330.3°$ مع محور x الموجب.

إجابات الأسئلة (34–41)



42) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

43) $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{5}$

افترض أنَّ: $\overrightarrow{AC} = 2x$، فتكون $\overrightarrow{AB} = 7x$، و $\overrightarrow{CB} = 5x$

$\frac{AC}{AB} = \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7} \Longrightarrow AC = \frac{2}{7} AB$

$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7} \overrightarrow{AB} = \frac{2}{7} (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$

44) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{7} (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) = \frac{5}{7} \vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{7} \vec{\mathbf{b}}$

45) $\frac{PR}{RQ} = \frac{1}{2} \Longrightarrow PR = \frac{1}{3} PQ$

$\frac{OR}{RS} = \frac{1}{2} \Longrightarrow RS = 2\ OR$

$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RS}$

$= \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} + 2\ \overrightarrow{OR}$

$= \overrightarrow{QO} + 3\ \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QO} + 3(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR})$

$= \overrightarrow{QO} + 3\ (\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3} \overrightarrow{PQ})$

$= \overrightarrow{QO} + 3\ \left(\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ})\right)$

$= -\vec{\mathbf{b}} + 3\ \left(\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{3} (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})\right)$

$\overrightarrow{QS} = -\vec{\mathbf{b}} + 3\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = 4\vec{\mathbf{a}} = 4\ \overrightarrow{OP}$

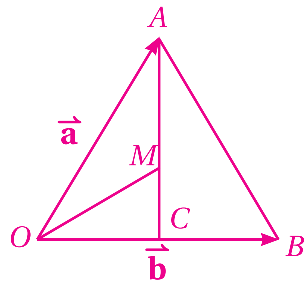
إذن، $\overrightarrow{QS} \parallel \overrightarrow{OP}$.

46) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

$= \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

47)



أَصِل الرأس A بالنقطة C، وهي منتصف الضلع OB، ثم أرسم OM.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$

(لأنَّ مركز المثلث يقسم القطع المتوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس).

$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$

$= \vec{\mathbf{a}} + \frac{2}{3} (-\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{b}})$

$= \vec{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{3} \vec{\mathbf{b}}$

$= \frac{1}{3} \vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{3} \vec{\mathbf{b}} = \frac{1}{3} (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

الدرس 3:

20) بافتراض أنَّ $\vec{\mathbf{p}} = \langle a , b \rangle$، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{q}} = 30$ ؛ أيْ إنَّ $6a + 2b = 30$

ولهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول؛ فإذا افترضنا أنَّ $a = 2$، فإنَّ $b = 9$. ومن ثَمَّ، فإنَّ $\vec{\mathbf{p}} = \langle 2, 9 \rangle$

وبافتراض وجود قيم أُخرى لـ a، فإنَّه توجد قيم مناظرة لـ b، فنتنج قيم ممكنة للمتجه $\vec{\mathbf{p}}$.

21) بافتراض أنَّ $\vec{\mathbf{b}} = \langle c, d\rangle$ يعامد المتجه $\vec{\mathbf{a}} = \langle -8, -2\rangle$، فإنَّ:

$-8c-2d=0$ ؛ أيْ إنَّ $d=-4c$

إذن، جميع المتجهات في صورة $\langle c,-4c\rangle$ تعامد المتجه $\vec{\mathbf{a}} = \langle -8, -2\rangle$، ومن أمثلتها: $\langle 1,-4\rangle,\langle 3,-12\rangle,\langle -2,8\rangle$.

22) إذا كان $A(6,-2), B(1,5), C(-4,-2)$، فإنَّ:

$$\overrightarrow{AB} = \langle -5,7\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle -10,0\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{100} = 10$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle -5,-7\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

إذن، المثلث ABC متطابق الضلعين؛ لأنَّ $AB = BC = \sqrt{74}$

$$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{\sqrt{74}\times 10} \approx 54.5^\circ$$

$$m\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\times|\overrightarrow{CB}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{10\times\sqrt{74}} \approx 54.5^\circ$$

$$m\angle B = 180^\circ - (54.5^\circ + 54.5^\circ) = 71^\circ$$

23) $\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{a}}$ إذا كان قياس الزاوية بينهما 0°، أو 180°؛

أيْ إنَّ: $\dfrac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\times|\vec{\mathbf{b}}|}$ يساوي $\cos 0^\circ$، أو $\cos 180^\circ$؛

أيْ إنَّ: $\dfrac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\times|\vec{\mathbf{b}}|} = \pm 1$

$$\frac{-2-3r}{\sqrt{13}\times\sqrt{1+r^2}} \Rightarrow \left(\frac{-2-3r}{\sqrt{13}\times\sqrt{1+r^2}}\right)^2 = (\pm 1)^2$$

$$\frac{4+12r+9r^2}{13+13r^2} = 1 \Rightarrow 4+12r+9r^2 = 13+13r^2$$

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

$$(2r-3)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حل آخر:

$\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{a}}$ إذا وُجِد عدد حقيقي k، حيث: $\vec{\mathbf{b}} = k\vec{\mathbf{a}}$،

أيْ إنَّ: $\langle 2,-3\rangle = k\langle -1, r\rangle$، ومنه:

$2=-k \Rightarrow k=-2$ ، و $-3 = kr \Rightarrow r = \dfrac{-3}{k} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$

إجابات أسئلة اختبار نهاية الوحدة:

27) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

28) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}(-\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

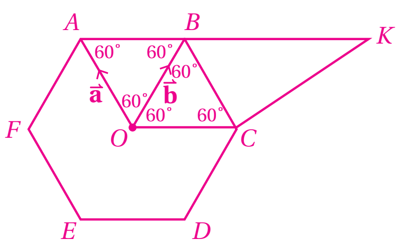
$= \vec{\mathbf{a}} - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}}$

$= \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

29) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

30) $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB}$

لكن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$؛ لأنَّ $ABCO$ متوازي أضلاع؛ فكل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان.



إذن، $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}} + 2(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) = 2\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

7) $\overrightarrow{BD} = \langle 3,2\rangle$

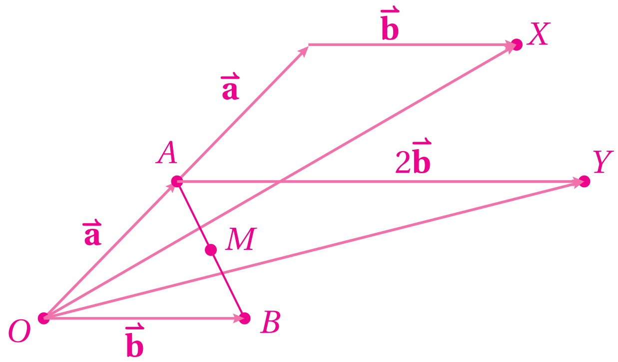
$\overrightarrow{BF} = \langle 6,4\rangle$

اتجاه $\overrightarrow{BD}$ هو $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$،

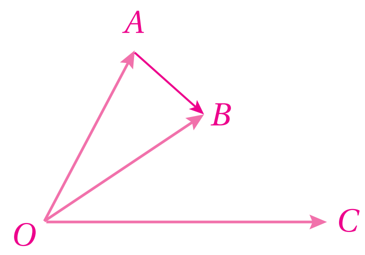
واتجاه $\overrightarrow{BF}$ هو $\tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

إذن، النقاط B، و D، و F تقع على خط مستقيم واحد.

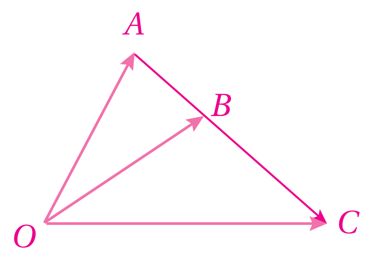
23)



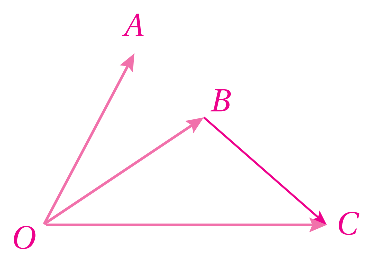
30) $\langle 2, -1 \rangle$



31) $\langle 4, -2 \rangle$



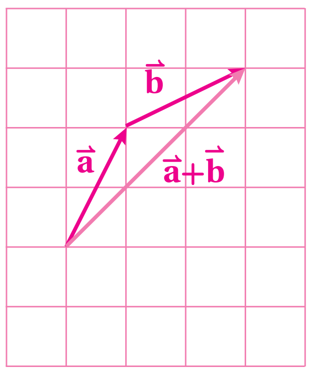
32) $\langle 2, -1 \rangle$



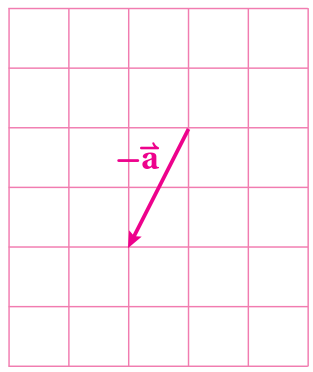
13)
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$$
$$7 = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$$
$$49 = (x+1)^2 + 4$$
$$(x+4)^2 = 45$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{45}$$
$$x = -1 \pm 3\sqrt{5}$$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

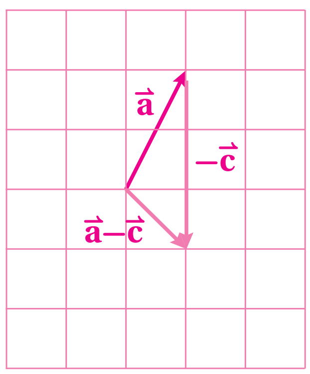
1)



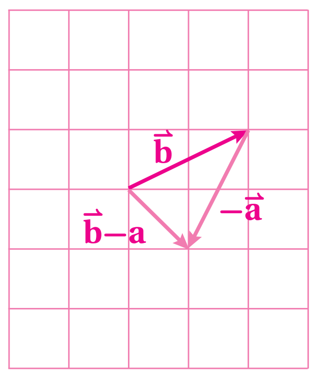
2)



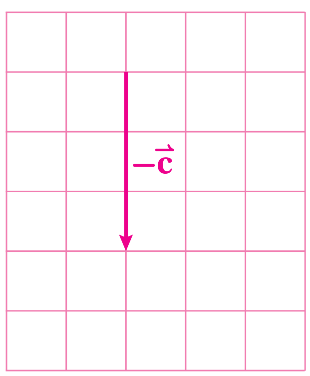
3)



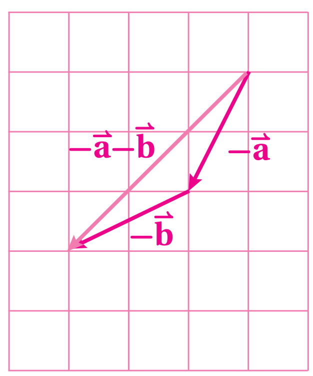
4)



5)



6)



الوحدة 8

الإحصاء والاحتمالات

Statistics and Probabilities

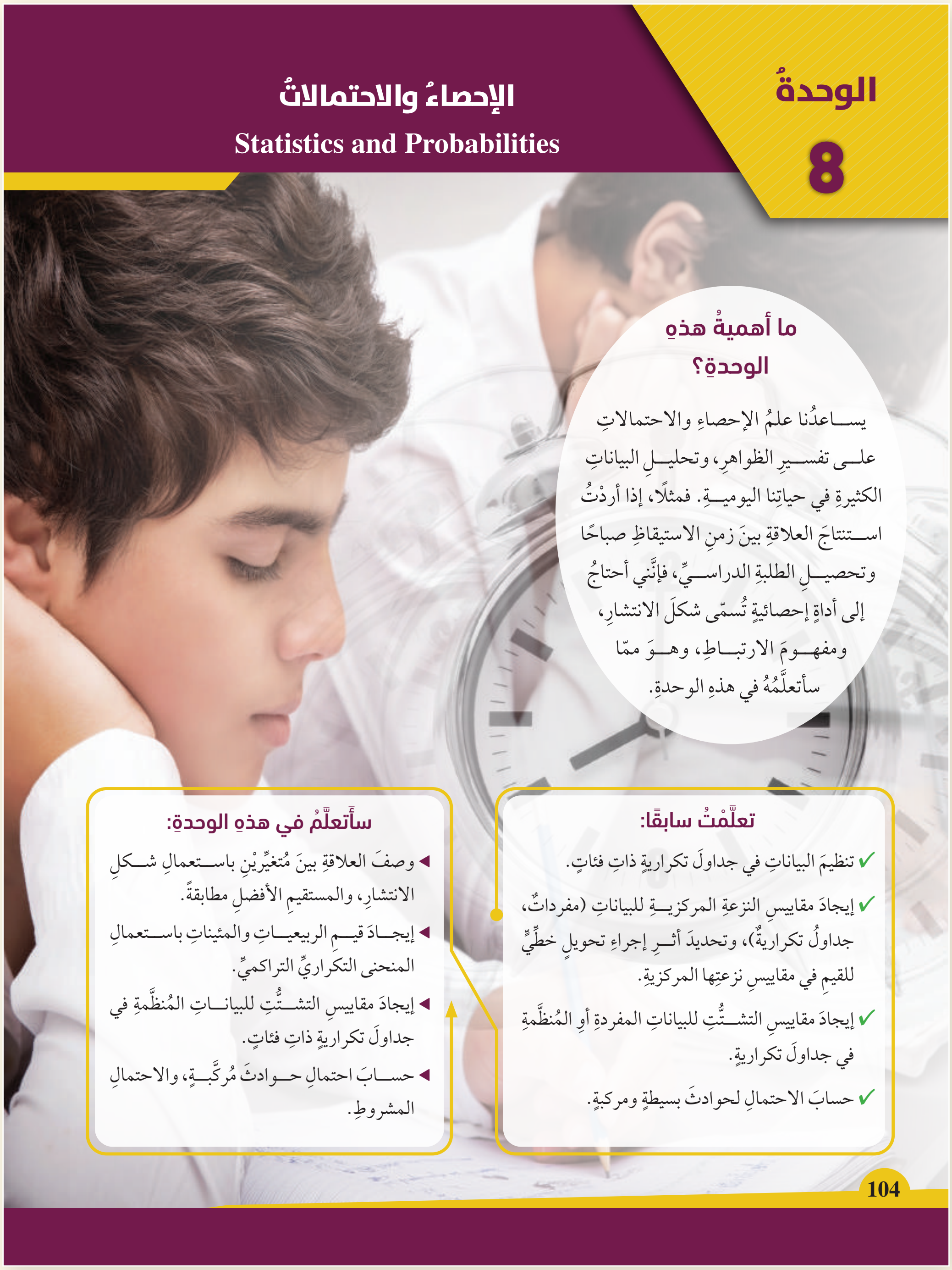
مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
الدرس 1: أشكال الانتشار.	• تعرُّف شكل الانتشار. • وصف العلاقة بين مجموعتي بيانات مُمثَّلة بشكل الانتشار. • تمثيل بيانات متغيرين بشكل انتشار يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا. • رسم المستقيم الأفضل مطابقة في شكل الانتشار، وإيجاد معادلته يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا. • استعمال المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرات إذا عُلِمت قيمة المتغير الآخر ضمن مواقف حياتية متنوعة.	شكل الانتشار. الارتباط. الارتباط الموجب. الارتباط السالب. المستقيم الأفضل مطابقة.	• ورق رسم بياني. • لوح متنقل للمستوى الإحداثي (الربع الأول فقط). • مسطرة شفافة. • الآلة الحاسبة. • برمجية جيوجبرا.	4
معمل برمجية جيوجبرا	• تمثيل البيانات ذات المتغيرين بشكل الانتشار، ورسم المستقيم الأفضل مطابقة لها باستعمال برمجية جيوجبرا.		• برمجية جيوجبرا.	1
الدرس 2: المنحنى التكراري التراكمي.	• رسم المنحنى التكراري التراكمي يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا. • تقدير الربيعات Q_1 , Q_2 , Q_3، والمدى الربيعي، والمئينات للجداول التكرارية ذات الفئات، وتفسير معنى كلٍّ منها ضمن مواقف حياتية. • إيجاد الرتبة المئينية لقيمة من بيانات التوزيع.	المنحنى التكراري التراكمي.	• ورق رسم بياني. • لوح متنقل للمستوى الإحداثي. • مسطرة شفافة. • الآلة الحاسبة. • برمجية جيوجبرا.	3
الدرس 3: مقاييس التشتُّت للجداول التكرارية ذات الفئات.	• إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، وتفسير معنى كلٍّ منهما في مواقف حياتية متنوعة. • إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المُمثَّلة بمُدرَّج تكراري.		• الآلة الحاسبة.	3
الدرس 4: احتمالات الحوادث المتنافية.	• تمييز الحادثين المتنافيين من الحادثين غير المتنافيين. • إيجاد احتمالات حوادث متنافية وحوادث غير متنافية ضمن مواقف حياتية متنوعة. • تمثيل التجارب العشوائية بأشكال فن، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات. • إيجاد احتمال الحادث المتمم.	الحادث البسيط. الحادث المُركَّب. الحادثان المتنافيان. الحادث المتمم. أشكال فن.	• أحجار نرد. • صندوق فيه كرات، أو بطاقات ملونة. • بطاقات مرقمة. • الآلة الحاسبة.	3
الدرس 5: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.	• تمييز الحادثين المستقلين من الحادثين غير المستقلين. • إيجاد احتمالات حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة ضمن مواقف حياتية متنوعة. • تمثيل التجارب العشوائية بالشجرة الاحتمالية، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات. • إيجاد احتمالات الحوادث المشروطة ضمن مواقف حياتية متنوعة.	الحوادث المستقلة. الحوادث غير المستقلة. الاحتمال المشروط. جدول الاتجاهين.	• أحجار نرد. • صندوق فيه كرات، أو بطاقات ملونة. • بطاقات مرقمة. • الآلة الحاسبة.	4
عرض نتائج مشروع الوحدة.			• جهاز عرض.	1
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				21 حصة

الوحدة 8

نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة سابقًا تنظيم البيانات في جداول تكرارية، وتقدير مقاييس نزعتها المركزية، وكيفية إيجاد الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 للقيم المفردة، واستعمالها لعرض البيانات المفردة بطريقة الصندوق ذي العارضتين. وكذلك إيجاد مقاييس التشتُّت للقيم المفردة. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة تقدير مقاييس التشتُّت، وتقدير المئينات لبيانات منظمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي، وسيتعرَّفون العلاقة بين مجموعتي بيانات (متغيرين) عن طريق تمثيلهما باستعمال شكل انتشار يدويًّا، وباستعمال برمجية جيوجبرا، وسيستعملون المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية المتغير الآخر. سيتعلَّم الطلبة أيضًا حساب احتمالات الحوادث المُركَّبة، وتمييز الحوادث المتنافية من الحوادث غير المتنافية، وتمييز الحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، واستعمال القوانين وأشكال ڤن والشجرة الاحتمالية لحساب الاحتمالات.


الوحدة 8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ

Statistics and Probabilities

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يساعدُنا علمُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ على تفسيرِ الظواهرِ، وتحليلِ البياناتِ الكثيرةِ في حياتِنا اليوميةِ. فمثلًا، إذا أردْتُ استنتاجَ العلاقةِ بينَ زمنِ الاستيقاظِ صباحًا وتحصيلِ الطلبةِ الدراسيِّ، فإنَّني أحتاجُ إلى أداةٍ إحصائيةٍ تُسمّى شكلَ الانتشارِ، ومفهومَ الارتباطِ، وهوَ ممّا سأتعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.
- ✓ إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للبياناتِ (مفرداتٌ، جداولُ تكراريةٌ)، وتحديدَ أثرِ إجراءِ تحويلٍ خطِّيٍّ للقيمِ في مقاييسِ نزعتِها المركزيةِ.
- ✓ إيجادَ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المفردةِ أوِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ.
- ✓ حسابَ الاحتمالِ لحوادثَ بسيطةٍ ومركبةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◂ وصفَ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ باستعمالِ شكلِ الانتشارِ، والمستقيمِ الأفضلِ مطابقةً.
- ◂ إيجادَ قيمِ الربيعاتِ والمئيناتِ باستعمالِ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ.
- ◂ إيجادَ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.
- ◂ حسابَ احتمالِ حوادثَ مُركَّبةٍ، والاحتمالِ المشروطِ.

104

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف الثامن

- تمثيل البيانات المفردة بالصندوق ذي العارضتين، وإيجاد المدى والوسيط، والمدى الربيعي لها.
- إيجاد احتمالات حوادث مُركَّبة لتجربة عشوائية باستعمال مخطط الشجرة، والجدول ومخطط الاحتمال.

الصف التاسع

- إيجاد مقاييس النزعة المركزية لبيانات منظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- حساب مقاييس التشتُّت لبيانات مفردة، وتحديد أثر التحويلات الخطية للقيم في تلك المقاييس.
- إيجاد مجموعة عناصر اتحاد حادثين أو تقاطعهما باستعمال أشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث مُركَّبة لتجربة عشوائية باستعمال أشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن.

الصف العاشر

- تمثيل البيانات ذات المتغيرين بشكل الانتشار، ووصف العلاقة بين المتغيرين، واستعمال المستقيم الأفضل مطابقة لنقاط شكل الانتشار لتمثيل العلاقة (إنْ وُجِدت)، وتقدير قيمة متغير إذا عُلِمت قيمة المتغير الآخر.
- استعمال المنحنى التكراري التراكمي لتمثيل البيانات، وتقدير قيم الربيعات والمئينات لتلك البيانات.
- تقدير مقاييس التشتُّت للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- إيجاد احتمالات حوادث مُركَّبة تشمل المتنافية، وغير المتنافية، والمستقلة، وغير المستقلة، والمشروطة.

الصف الحادي عشر

- حساب احتمالات حوادث باستعمال التباديل والتوافيق.
- تعرُّف مفهوم المتغير العشوائي.
- تحديد الحادث الذي يُحقِّق كل قيمة للمدى في المتغير العشوائي.
- إيجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي.
- إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.
- توظيف جدول التوزيع الاحتمالي في حساب توقع المتغير العشوائي (الوسط الحسابي للمتغير العشوائي).

مشروعُ الوحدةِ

مستوى الأقاربِ التعليميُّ

فكرةُ المشروعِ جمعُ بياناتٍ عنْ مستوى الأقاربِ التعليميِّ، وتنظيمُها، وتحليلُها، وكتابةُ استنتاجاتٍ عنْها.

الموادُّ والأدواتُ برمجيةُ جيوجبرا، برمجيةُ العرضِ التقديميِّ (بوربوينت).

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أجمعُ بياناتٍ منْ 12 عائلةً منْ أقاربي أوْ جيراني عنِ المستوى التعليميِّ للزوجِ والزوجةِ.
2. أُنظِّمُ في الجدولِ المجاورِ البياناتِ التي جمعْتُها على النحوِ الآتي:
   - أُدوِّنُ في عمودَيِ الزوجِ والزوجةِ قيمًا عدديةً وَفقَ التصنيفِ الآتي: منْ دونِ تعليمٍ (1)، الأساسيُّ (2)، الثانويُّ (3)، الدبلومُ (4)، البكالوريوسُ (5)، الماجستيرُ (6)، الدكتوراه (7).

رقمُ العائلةِ	المستوى التعليميُّ	
	الزوجُ	الزوجةُ
1		
2		
3		

3. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لتمثيلِ القيمِ العدديةِ لمستوى تعليمِ الزوجِ والزوجةِ في صورةِ أزواجٍ مُرتَّبةٍ على هيئةِ شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَجِدُ معادلةَ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً للنقاطِ الاثنتي عشرةَ.
4. أُنظِّمُ البياناتِ التي جمعْتُها في الجدولِ السابقِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ كما في الجدولِ المجاورِ.

فئاتُ المستوى التعليميِّ	عددُ الزوجاتِ	عددُ الأزواجِ
$1-3$		
$4-6$		
$7-9$		

5. أحسبُ الانحرافَ المعياريَّ للمستوى التعليميِّ لكلٍّ منَ الأزواجِ والزوجاتِ، ثمَّ أُقارِنُ بينَهُما، وأُفسِّرُهُما.
6. أكتبُ حادثيْنِ متنافييْنِ، وآخريْنِ غيرَ متنافييْنِ عنِ اختيارِ شخصٍ (أوْ أكثرَ) عشوائيًّا منَ الجدولِ الأولِ، ثمَّ أَجِدُ احتمالَ وقوعِهِما معًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ.
7. أكتبُ حادثيْنِ مستقليْنِ، وآخريْنِ مشروطيْنِ عنِ اختيارِ شخصٍ (أوْ أكثرَ) عشوائيًّا منَ الجدولِ الأولِ، ثمَّ أَجِدُ احتمالَ وقوعِهِما معًا.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) يُلخِّصُ العملَ، وما توصَّلَ إليْهِ كلُّ فردٍ في المجموعةِ، وما تعلَّمْتُهُ منْ هذا المشروعِ؛ على أنْ يتضمَّنَ العرضُ التقديميُّ صورًا للجداولِ، وشكلَ الانتشارِ، وجميعَ الاستنتاجاتِ التي تُوصِّلَ إليْها في أثناءِ تنفيذِ المشروعِ.

105

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	تمثيل البيانات التي جُمِعت بطرائق مناسبة تبعًا لنوعها (عددية، غير عددية).			
2	رسم شكل انتشار دقيق، وتحديد المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات.			
3	تنظيم البيانات في جدول تكراري ذي فئات بصورة دقيقة.			
4	إجراء الحسابات المُقترنة بالجداول على نحوٍ صحيح، والتوصُّل إلى استدلالات مُبرَّرة.			
5	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا في عرض النتائج على نحوٍ شائق.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: مستوى الأقارب التعليمي.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى ترسيخ المفاهيم الإحصائية والاحتمالية التي سيتعلَّمها الطلبة في هذه الوحدة، بجمع بيانات حقيقية من بيئتهم، ثم تنظيمها في جداول تكرارية، ثم تحليلها باستعمال برمجية جيوجبرا، وكتابة استنتاجات عنها.

خطوات تنفيذ المشروع:

- أُعرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية أو خماسية، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة أنْ يُوزِّعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- أُذكِّر أفراد المجموعات بالمواد والتجهيزات التي تَلزمهم لتنفيذ المشروع، مثل: كتاب الطالب، والأوراق الملونة، ولوحة الكرتون، والآلات الحاسبة، وأجهزة الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، وبرمجية العرض التقديمي (بوربوينت)، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق كل خطوة من خطوات تنفيذ المشروع بالطرائق المناسبة.
- أُبيِّن لأفراد المجموعات أنَّ المطلوب هو تصميم عرض تقديمي يُلخِّص خطوات تنفيذ المشروع والاستنتاجات التي توصَّلوا إليها.

عرض النتائج:

- أُوجِّه أفراد المجموعات إلى استعمال برمجية العرض التقديمي (بوربوينت) لتلخيص خطوات تنفيذ المشروع والاستنتاجات التي توصَّلوا إليها.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أُخبِر أفراد المجموعات أنَّه يمكن عرض مشروعاتهم داخل الصف إنْ توافر جهاز عرض، أو في مختبر الحاسوب.
- أطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

الدرس 1

نتاجات الدرس

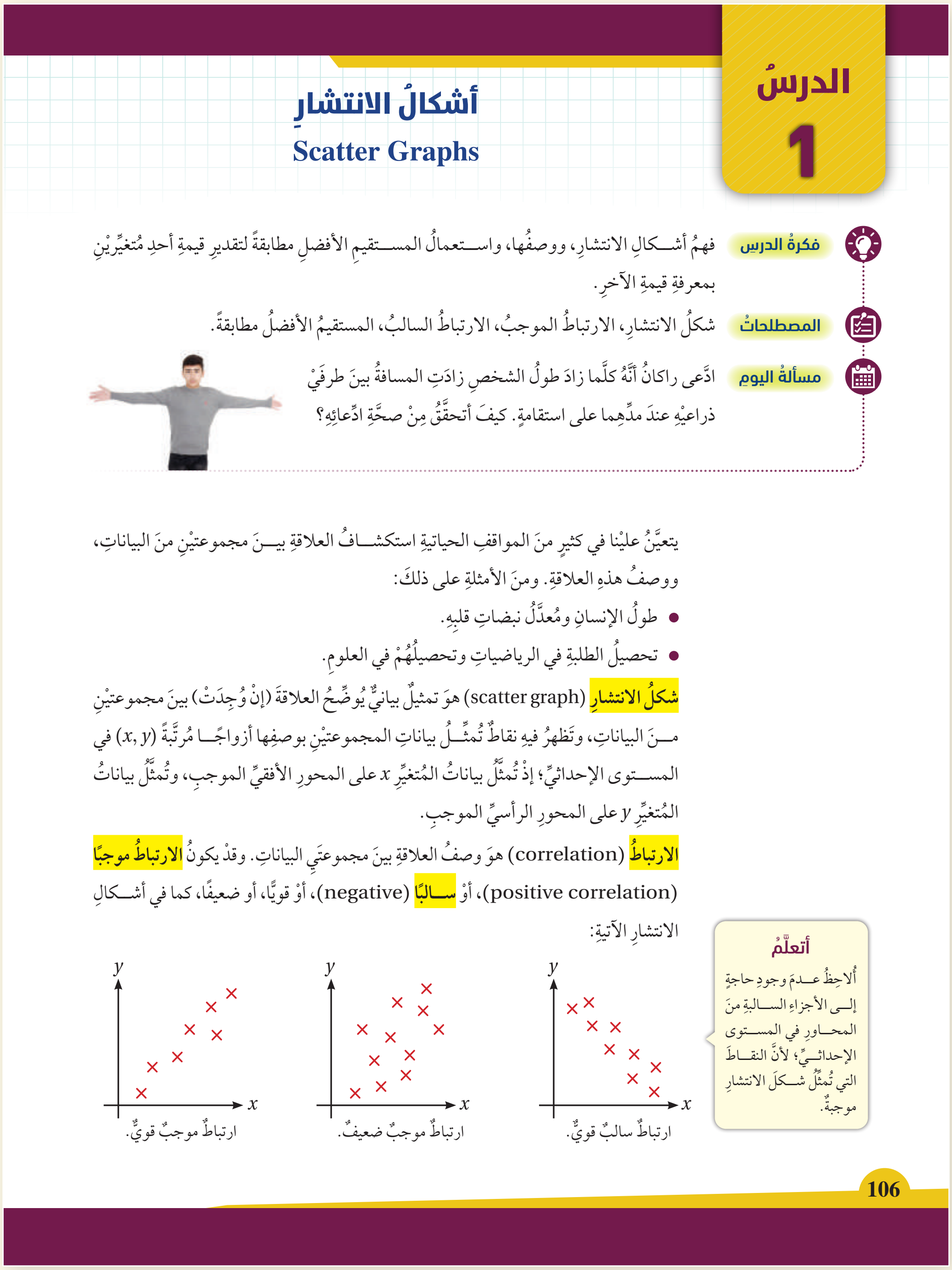
- تعرُّف شكل الانتشار.
- وصــف العلاقة بين مجموعتي بيانات مُمثَّلة بشــكل الانتشار.
- تمثيل بيانات متغيرين بشكل انتشار يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- رســم المســتقيم الأفضل مطابقة في شكل الانتشار، وإيجاد معادلته يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- استعمال المســتقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيــرات إذا عُلِمــت قيمة المتغيــر الآخر ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- تحديد متــى يكون تقدير قيمة أحد المتغيرين مُضلِّلًا، أو غير منطقي.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي.
- إيجاد معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين.
- إيجاد قيمة أحــد المتغيرين إذا عُلِمــت قيمة المتغير الآخر في معادلة مستقيم.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبِطــة بما ســيُقدَّم من موضوعــات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت)في صفحات (**أســتعد لدراســة الوحدة**) في كتــاب التمارين، ثم أطلــب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلــى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.



الدرسُ 1

أشكالُ الانتشارِ

Scatter Graphs

فكرةُ الدرسِ فهمُ أشــكالِ الانتشارِ، ووصفُها، واســتعمالُ المســتقيمِ الأفضلِ مطابقةً لتقديرِ قيمةِ أحدِ مُتغيِّريْنِ بمعرفةِ قيمةِ الآخرِ.

المصطلحاتُ شكلُ الانتشارِ، الارتباطُ الموجبُ، الارتباطُ السالبُ، المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً.

مسألةُ اليومِ ادَّعى راكانُ أنَّهُ كلَّما زادَ طولُ الشخصِ زادَتِ المسافةُ بينَ طرفَيْ ذراعيْهِ عندَ مدِّهِما على استقامةٍ. كيفَ أتحقَّقُ مِنْ صحَّةِ ادِّعائِهِ؟

يتعيَّنُ علينا في كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ استكشــافُ العلاقةِ بيــنَ مجموعتيْنِ منَ البياناتِ، ووصفُ هذهِ العلاقةِ. ومنَ الأمثلةِ على ذلكَ:

- طولُ الإنسانِ ومُعدَّلُ نبضاتِ قلبِهِ.
- تحصيلُ الطلبةِ في الرياضياتِ وتحصيلُهُمْ في العلومِ.

شكلُ الانتشارِ (scatter graph) هوَ تمثيلٌ بيانيٌّ يُوضِّحُ العلاقةَ (إنْ وُجِدَتْ) بينَ مجموعتيْنِ مــنَ البياناتِ، وتَظهرُ فيهِ نقاطٌ تُمثِّــلُ بياناتِ المجموعتيْنِ بوصفِها أزواجًــا مُرتَّبةً (x, y) في المســتوى الإحداثيِّ؛ إذْ تُمثِّلُ بياناتُ المُتغيِّرِ x على المحورِ الأفقيِّ الموجبِ، وتُمثِّلُ بياناتُ المُتغيِّرِ y على المحورِ الرأسيِّ الموجبِ.

الارتباطُ (correlation) هوَ وصفُ العلاقةِ بينَ مجموعتَيِ البياناتِ. وقدْ يكونُ **الارتباطُ موجبًا** (positive correlation)، أوْ **ســالبًا** (negative)، أوْ قويًّا، أو ضعيفًا، كما في أشــكالِ الانتشارِ الآتيةِ:

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ عــدمَ وجودِ حاجةٍ إلــى الأجزاءِ الســالبةِ منَ المحــاورِ في المســتوى الإحداثــيِّ؛ لأنَّ النقــاطَ التي تُمثِّلُ شــكلَ الانتشارِ موجبةٌ.

ارتباطٌ سالبٌ قويٌّ.

ارتباطٌ موجبٌ ضعيفٌ.

ارتباطٌ موجبٌ قويٌّ.

106

إرشادات:

- يمكنني تصميــم لوح متنقل للمســتوى الإحداثي باســتعمال لوحة من الكرتــون الأبيض، ثم أرســم عليها محورين متعامدين فوق شــبكة من المربعات الصغيرة المتطابقة التي ســبق رســمها على اللوحة، ثم أُقسِّم المحاور إلى وحدات، طول كلٍّ منها 10 مربعات صغيرة على الشبكة، ثم أُغلِّف اللوحة بلاصق شفاف؛ ليسهل الكتابة عليها بأقلام اللوح.
- يمكننــي تصميم لــوح متنقل إضافي أرســم عليه فقط الربــع الأول من المستوى الإحداثي؛ ليسهل على الطلبة تعيين نقاط شكل الانتشار.
- أحثُّ الطلبة على إحضار دفاتر الرسم البياني في الحصص اللاحقة.

1 التهيئة

- أرسم مستوى إحداثيًّا على لوح متنقل، أو على اللوح العادي باستعمال المسطرة.
- أُذكِّر الطلبة بكيفية كتابة إحداثيي نقطة على المستوى $A(x, y)$.
- أُدوِّن جانبًا مجموعة من النقاط، مثل: $A(3, 5), B(0, 2), C(3, 0), D(-1,1), E(1, -1), F(-1, -2)$، ثم أُناقِش الطلبة في كيفية تعيينها على المستوى الإحداثي.
- أُدوِّن جانبًا مجموعة أُخرى من النقاط تتضمَّن إحداثياتها كسورًا، مثل $G(2.5, 3.4)$، ثم أُناقِش الطلبة في كيفية تعيينها على المستوى الإحداثي.
- أرسم مستقيمًا يمر بالنقطتين A, B، مُذكِّرًا الطلبة بمعادلة المستقيم.
- أرسم مستقيمًا يمر بالنقطتين C, D، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد معادلته.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**).
- أطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على متغيرين آخرين من المسألة يمكن الادِّعاء بوجود علاقة بينهما، ثم صياغة ادِّعاء مرتبط بالعلاقة بين المتغيرين.

من الإجابات المحتملة:

كلَّما زاد طول الذراع زاد طول الساق.

كلَّما زاد طول الشخص نقص محيط الرأس.

كلَّما زاد طول الشخص زادت كتلة الجسم.

- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أُناقِشهم فيها.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن المسألة، ثم أستمع لبعض الإجابات من دون تقديم تغذية راجعة لها.

3 التدريس

- أكتب على اللوح الأمثلة الثلاثة التي وردت في كتاب الطالب، وبيِّنت العلاقة بين مجموعتين من البيانات، ثم أسأل الطلبة بعد كل مثال:
  » ما العلاقة المُتوقَّعة بين المجموعة الأولى والمجموعة الثانية؟

- بعد كل إجابة أستمع لها، أسأل الطلبة:
  » لماذا تعتقدون ذلك؟
  » كيف يمكنكم التحقُّق من ذلك؟
- أستمع لإجابات بعض الطلبة، وأُشارِك آخرين في التعليق على إجابات الزملاء بسؤالهم:
  » ما رأيكم في هذه الإجابة؟

إجابة محتملة للمثال الأول:

كلَّما زادت درجات الحرارة زادت الكميات المَبيعة من المُثلَّجات.

أو: لا توجد علاقة بين درجات الحرارة والكميات المَبيعة من المُثلَّجات.

- أُوضِّح للطلبة مفهوم شكل الانتشار، وكيف يساعد التمثيل بشكل الانتشار على فهم العلاقة بين مجموعتي البيانات التي يُمثِّلها، وتحديد هذه العلاقة، وبخاصة عندما تتجمَّع نقاطه كأنَّها حول مستقيم. بعد ذلك أرسم على اللوح ثلاثة أشكال انتشار مشابهة لتلك الواردة في كتاب الطالب، مُوضِّحًا مفهوم الارتباط، ومتى يوصف بأنَّه موجب أو سالب، وقوي أو ضعيف، مستعينًا بأشكال الانتشار التي رسمتها.
- أرسم على اللوح شكل انتشار مشابهًا لما ورد في كتاب الطالب (علامات الرياضيات، الزمن المستغرق لجري مسافة 800 m)، مُوضِّحًا للطلبة سبب وصف الارتباط - في هذه الحالة- بأنَّه ضعيف، أو القول بعدم وجود ارتباط خطي.
- أُخبِر الطلبة أنَّ التركيز في هذا الدرس سيكون على أشكال الانتشار التي تُوضِّح ارتباطًا خطيًّا.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفِّز الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، ثم أرسم على اللوح أشكال انتشار مشابهة لتلك الواردة في فرعي المثال، مُركِّزًا على رسم مستقيم ميله سالب (في الفرع 1)، وتتجمَّع نقاط شكل الانتشار على طرفيه بالتساوي (ما أمكن).

✔ **إرشــاد:** إذا توافر في الصــف جهاز عرض، فأستعمله لعرض أشكال الانتشــار التي ورد ذكرها في الدرس؛ توفيرًا للوقت الذي يستغرقه رسمها على اللوح.

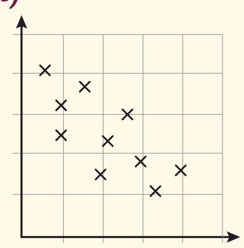
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

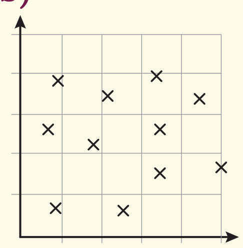
مثال إضافي

- أيُّ أشــكال الانتشــار الآتية يصف العلاقة بين راتب الموظف ومساحة الشقة التي يستأجرها؟ أُبرِّر إجابتي.

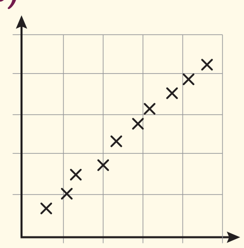
a)



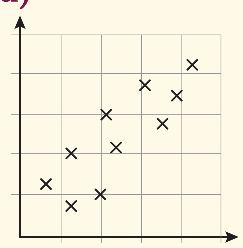
b)



c)



d)

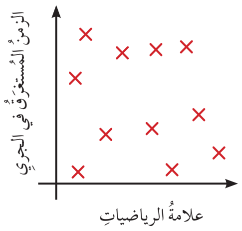


الشــكل d هو الأنســب؛ لأنَّ العلاقة بين راتب الموظف ومساحة الشقة التي يستأجرها موجبة ومتوسطة القوة.

✔ **إرشاد:** عند مناقشــة الطلبة في إجاباتهم عن ســؤال المثال الإضافي، أُركِّز علــى تبرير الإجابة، لا على الإجابة تحديدًا؛ إذ ســتختلف كل إجابة تبعًا لتبريرها.

منَ المُلاحَــظِ أنَّهُ كلَّما كانَ الارتباطُ موجبًا قويًّا تجمَّعَتِ النقاطُ في شــكلِ الانتشــارِ حولَ مســتقيمٍ ميلُهُ موجبٌ، وأنَّهُ كلَّما كانَ الارتباطُ ســالبًا قويًّا تجمَّعَتِ النقاطُ في شكلِ الانتشارِ حولَ مستقيمٍ ميلُهُ سالبٌ.

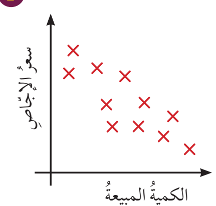
أمّا إذا كانَ الارتباطُ ضعيفًا (أوْ لا يوجدُ ارتباطٌ)، فإنَّ النقاطَ في شــكلِ الانتشــارِ تكــونُ متناثرةً ومتباعدةً كما في شكلِ الانتشارِ المجاورِ، الذي يُظهِرُ العلاقةَ بينَ تحصيلِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في مادَّةِ الرياضياتِ والزمنِ الذي استغرقَهُ كلٌّ منْهُمْ في الجريِ مسافةَ 800 m



مثال 1

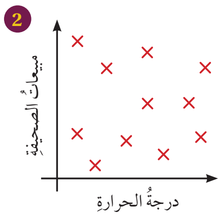
هــلْ يوجــدُ ارتبــاطٌ بيــنَ بيانــاتِ المُتغيِّريْــنِ المُمثَّليْــنِ فــي كلٍّ مــنْ شــكلَيِ الانتشــارِ الآتييْــنِ؟ فــي حالــةِ وجــودِ ارتباطٍ بينَهــا، هــلْ هــوَ موجبٌ أمْ ســالبٌ؟ هــلْ هــوَ قــويٌّ أمْ ضعيــفٌ؟

1 يُظهِرُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ العلاقةَ بينَ سعرِ الإجّاصِ وكميتِهِ المبيعةِ. وبناءً على توزيعِ النقاطِ في هذا الشكلِ، فإنَّ كميةَ الإجّاصِ المبيعةَ كانَتْ قليلةً عندما كانَ ســعرُهُ مرتفعًا، والعكسُ صحيحٌ. وهذا يشــيرُ إلى وجودِ ارتباطٍ سالبٍ؛ ولأنَّ نقاطَ شكلِ الانتشارِ متقاربةٌ، فهوَ قويٌّ.



يُــزرَعُ فــي دولِ العالَمِ المختلفةِ نحوَ 300 نوعٍ منَ الإجّاصِ.

2 يُظهِرُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ العلاقةَ بينَ درجةِ الحرارةِ ومبيعاتِ إحدى الصحفِ. ومــنَ المُلاحَظِ أنَّهُ لا يوجدُ ارتباطٌ أوْ علاقــةٌ واضحةٌ بينَ درجاتِ الحرارةِ ومبيعاتِ الصحيفةِ؛ لأنَّ نقاطَ شكلِ الانتشارِ متباعدةٌ.

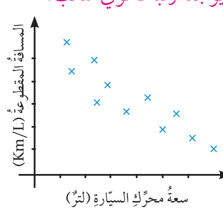


يُعَدُّ مُعدَّلُ استهلاكِ السيّارةِ للوقودِ أحدَ أهمِّ العواملِ المُحفِّزةِ لشرائِها؛ لذا تحرصُ مصانعُ السيّاراتِ دائمًا على ابتكارِ أساليبَ تكنولوجيةٍ للحدِّ منَ استهلاكِ الوقودِ.

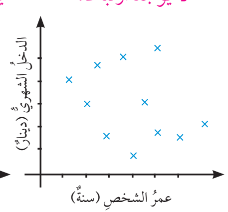
أتحقق من فهمي

هلْ يوجدُ ارتباطٌ بينَ بياناتِ المُتغيِّريْنِ المُمثَّليْنِ في كلِّ شكلٍ منْ أشكالِ الانتشارِ الآتيةِ؟ في حالةِ وجودِ ارتباطٍ بينَها، هلْ هوَ موجبٌ أمْ سالبٌ؟ هلْ هوَ قويٌّ أمْ ضعيفٌ؟

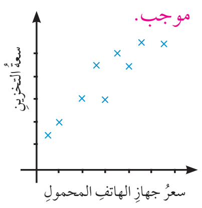
a) يوجد ارتباط قوي سالب.



b) لا يوجد ارتباط.



c) يوجد ارتباط قوي موجب.



عندَ تمثيلِ مجموعتيْنِ منَ البياناتِ بمُتغيِّريْنِ مثلِ (x) وَ(y)، يمكنُ تمثيلُ شكلِ الانتشارِ يدويًّا، أوْ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بتعيينِ نقاطِ شكلِ الانتشارِ بوصفِها أزواجًا مُرتَّبةً (x , y)؛ لأتمكَّنَ منْ وصفِ الارتباطِ (إنْ وُجِدَ).

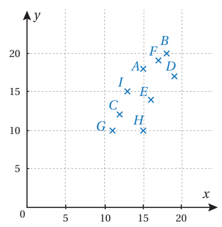
مثال 2

أُمثِّلُ البياناتِ في الجدولِ الآتي على شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّريْنِ (x) وَ (y):

يعاني الأردنُّ شُحًّا في المواردِ المائيةِ؛ ولهذا، فإنَّ عدمَ الإسرافِ في استهلاكِ المياهِ هوَ واجبٌ دينيٌّ ووطنيٌّ.

مدَّةُ الاستحمامِ (x) بالدقائقِ للشخصِ، وكميةُ المياهِ المُستهلَكةِ (y) باللترِ.									
الشخصُ	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	15	18	12	19	16	17	11	15	13
y	18	20	12	17	14	19	10	10	15

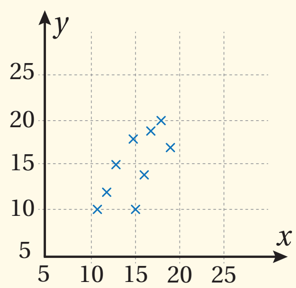
أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبةَ في المستوى الإحداثيِّ كما في الشكلِ المجاورِ.



بالنظرِ إلى شكلِ الانتشارِ، يُلاحَظُ وجودُ ارتباطٍ موجبٍ قويٍّ بينَ المُتغيِّريْنِ (x) وَ(y)؛ لأنَّهُ كلَّما زادَتْ قيمةُ (x) في أغلبِ الحالاتِ زادَتْ قيمةُ (y)؛ أيْ كلَّما زادَتْ مدَّةُ الاستحمامِ لشخصٍ ما زادَتْ كميةُ المياهِ التي يستهلكُها.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة أنَّه لرسم شكل الانتشار ودراسة العلاقة بين مجموعتي بيانات، توضع قيم إحدى المجموعتين على المحور الأفقي (المتغير x)، وتوضع قيم المجموعة الأُخرى على المحور الرأسي (المتغير y)، ثم يُدرَّج المحوران لتعيين أكبر القيم في بيانات المجموعتين، مُبيِّنًا أنَّ التركيز فقط هو على الجزء الموجب من كل محور، ثم أُناقِشهم في سبب ذلك.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2، ثم أُخبِرهم – عند تدريج المحاور– أنَّ التدريج ... ,20 ,15 ,10 ,5 مناسب؛ لأنَّه يتيح تعيين أكبر قيمة لزمن الاستحمام x، وهي 19 min، وأكبر قيمة لكمية المياه المستهلكة y، وهي 20 L، ثم أُوضِّح لهم سبب وصف الارتباط بأنَّه موجب وقوي.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن البدء بالنقطة (5 ,5) بوصفها نقطة تقاطع المحورين – كما يظهر في التمثيل الآتي– بدلًا من البدء بنقطة الأصل (0 ,0)، من دون أنْ يُؤثِّر ذلك في صحة شكل الانتشار.



تنويع التعليم:

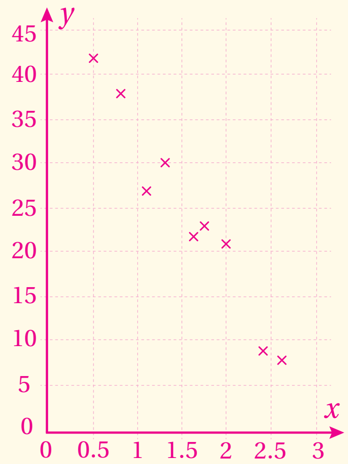
قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى التوسط ودون المتوسط صعوبة في تدريج المحورين عند رسم شكل الانتشار؛ لذا أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إليهم حل المثال الإضافي؛ لتأكيد أهمية تدريج المحورين بصورة مناسبة لقيم مجموعتي البيانات، ثم أُوزِّع الطلبة الذين أتقنوا تدريج المحورين بصورة مناسبة على بقية المجموعات ليساعدوا زملاءهم.

مثال إضافي

- دوَّن عُمَر في الجدول التالي الزمن بالساعات، والسرعة بالكيلومتر لكل ساعة، أثناء قيادته السيارة في عدد من الرحلات التي قام بها. أُمثِّل البيانات في شكل انتشار، ثم أَصِف الارتباط بين المتغيرين x, y.

رقم الرحلة	الزمن x (h)	السرعة y (km/h)
1	0.5	42
2	0.8	38
3	1.1	27
4	1.3	30
5	1.6	22
6	1.75	23
7	2	21
8	2.4	9
9	2.6	8

الحل:



الارتباط سالب قوي.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أُمثِّلُ البياناتِ في الجدولِ الآتي على شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّرَيْنِ (x) وَ (y):

سعرُ السيّارةِ (x) بألوفِ الدنانيرِ، وعمرُ السيّارةِ (y) بالسنواتِ.										
السيّارةُ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	10.5	10	10.2	9.5	9.4	10.1	9.5	7	6	5.5
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً (line of best fit) هوَ مستقيمٌ يمرُّ بأكبرِ عددٍ منْ نقاطِ شكلِ الانتشارِ، بحيثُ يكونُ عددُ النقاطِ التي لا يمرُّ بها متساويًا (تقريبًا) على جهتيْهِ، وتكونُ أقصرُ المسافاتِ بينَهُ وبينَ النقاطِ التي لا يمرُّ بها متساويةً (تقريبًا).

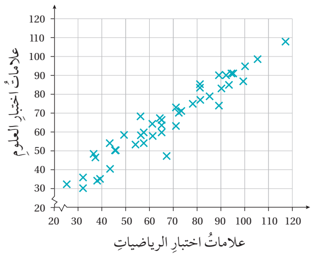
يُستعمَلُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً لتقديرِ قيمةِ أحدِ المُتغيِّرَيْنِ في شكلِ الانتشارِ ذي الارتباطِ القويِّ بمعلوميةِ قيمةِ المُتغيِّرِ الآخرِ.

إرشادٌ

يُرسَمُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً بالنظرِ عامةً. ولرسمِهِ، يُفضَّلُ استعمالُ مسطرةٍ شفّافةٍ.

مثال 3

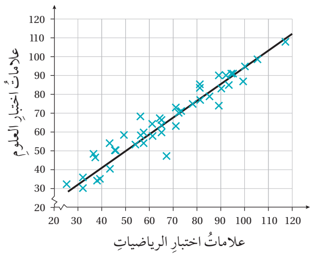
اعتمادًا على شكلِ الانتشارِ المجاورِ الذي يُمثِّلُ علاماتِ اختبارِ الرياضياتِ وعلاماتِ اختبارِ العلومِ لمجموعةٍ منَ الطلبةِ، أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



أتعلّمُ

عندَ عدمِ الحاجةِ إلى بدءِ المحاورِ في التمثيلِ البيانيِّ منْ نقطةِ الأصلِ، توضعُ قبلَ قيمِ البدءِ للمحورينِ خطوطٌ متعرّجةٌ تدلُّ على إهمالِ جزءٍ منَ المحورينِ الإحداثيينِ

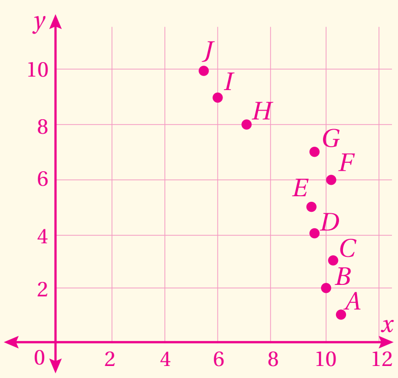
1 **أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ المُمثَّلةِ في شكلِ الانتشارِ.**



أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً باستعمالِ المسطرةِ كما في الشكلِ المجاورِ.

أُلاحِظُ أنَّ الارتباطَ بينَ المُتغيِّرَيْنِ موجبٌ وقويٌّ.

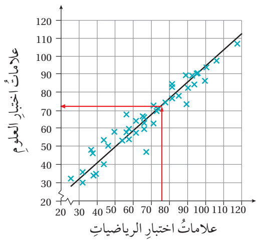
إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):



يوجد ارتباط قوي سالب بين x و y؛ إذ يُمثِّل x سعر السيارة بآلاف الدنانير، ويُمثِّل y عمرها بالسنوات.

2 **علامــةُ طالبٍ في اختبارِ الرياضيــاتِ 75، لكنَّهُ غابَ عنِ اختبارِ العلومِ بســببِ مرضِهِ. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً الذي رسمْتُهُ لتقديرِ علامتِهِ المحتملةِ في مادَّةِ العلومِ.**

أُقدِّرُ علامةَ هذا الطالبِ في مادَّةِ العلومِ برسمِ مستقيمٍ رأسيٍّ، بدءًا بالعلامةِ 75 على المحورِ الأفقيِّ حتى يلتقيَ بالمستقيمِ الأفضلِ مطابقةً. ومنْ نقطةِ التقاطعِ أرسمُ مستقيمًا أفقيًّا، وصولًا إلى المحورِ الرأسيِّ، فأُقدِّرُ علامتَهُ بنحوِ 72 كما في الشكلِ المجاورِ.



3 **أَجِدُ معادلةَ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً.**

يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ المستقيمِ إذا عُلِمَتْ إحداثياتُ أيِّ نقطتيْنِ يمرُّ بهِما، ولتكنْ (53 ,53) وَ (95, 90):

معادلةُ مستقيمٍ يمرُّ بنقطتيْنِ معلومتيْنِ $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

بتعويضِ إحداثياتِ النقطتيْنِ $y-53=\frac{90-53}{95-53}(x-53)$

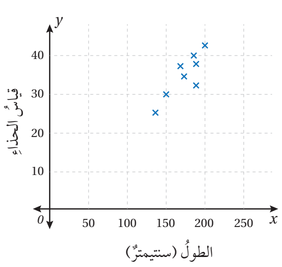
بالتبسيطِ $y=0.88x+6.36$

إرشادٌ

بما أنَّهُ يُمكِنُ رسمُ أكثرَ مِنْ مستقيمٍ، واختيارُ أيِّ نقطتيْنِ يمرُّ بهِما المستقيمُ (يختلفُ هذا الاختيارُ منْ شخصٍ إلى آخرَ)، فإنَّ معادلةَ المستقيمِ قدْ تختلفُ تبعًا للنقطتيْنِ المختارتيْنِ.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على شكلِ الانتشارِ المجاورِ الذي يُمثِّلُ الطولَ (x) بالسنتيمترِ، وقياسَ الحذاءِ (y) لمجموعةٍ منَ الأشخاصِ، أُجيبُ عمّا يأتي:



a) أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ. أنظر الهامش.

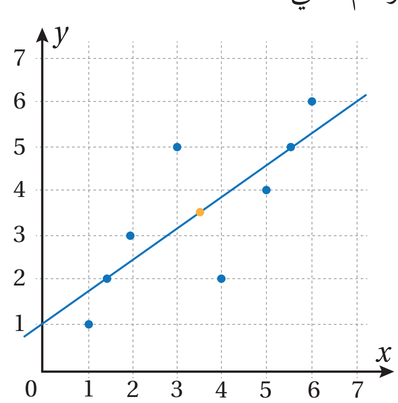
b) أُقدِّرُ قياسَ الحذاءِ لشخصٍ طولُهُ 190 cm

38 تقريبًا.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في رسم المستقيم الأفضل مطابقة يدويًا، فيرسمون مستقيمًا يمر بأكبر عدد من نقاط شكل الانتشار؛ لذا أُخبِرهم أنَّ ذلك قد لا يكون صحيحًا، مُؤكِّدًا أنَّ المستقيم يجب أنْ يتوسط نقاط شكل الانتشار، بحيث تنتشر النقاط على جهتيه بالتساوي (تقريبًا)، وأنَّه ليس شرطًا أنْ يمر بأكبر عدد منها.

يمكنني الاستعانة بالرسم الآتي:



مثال 3

- أُوضِّح للطلبة مفهوم المستقيم الأفضل مطابقة، وأُؤكِّد عند رسمه يدويًا ضرورة مراعاة مروره وسط معظم نقاط شكل الانتشار، بحيث تتوزَّع النقاط التي لا تقع عليه بشكل متساوٍ (تقريبًا) على جهتيه، من حيث: عددها، وبُعْد كلٍّ منها عنه، مُبيِّنًا أنَّه يستفاد من رسم المستقيم الأفضل مطابقة بدقة في إعطاء تقدير دقيق لقيمة أحد المتغيرين إذا عُلِمت قيمة المتغير الآخر.
- عند مناقشة الطلبة في حل المثال 3، أرسم على لوح متنقل شكل الانتشار المعطى لعلامات الرياضيات وعلامات العلوم سلفًا، مُبيِّنًا كيفية ضبط المسطرة الشفافة عند رسم المستقيم الأفضل مطابقة بحيث يتوسط نقاط شكل الانتشار.
- أُخبِر الطلبة أنَّه يستفاد من معادلة المستقيم الأفضل مطابقة في الحصول على تقدير أكثر دقة لعلامة الطالب الغائب عن اختبار العلوم، بتعويض علامته في الرياضيات مكان x؛ أيْ:

$$y = 0.88(75) + 6.36 = 72$$

توسعة:

أطلب إلى الطلبة تصفُّح الموقع الإلكتروني الذي سيظهر عند مسح الرمز المجاور، الذي تتوافر فيه الأداة التفاعلية Scatterplot correlation. ضمن مجال Data Analysis & Probability؛ لتعيين نقاط شكل الانتشار على المستوى الإحداثي، ورسم المستقيم الأفضل مطابقة لها، وتحديد معادلته.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

معادلة المستقيم هي: $y = 0.23\,x - 5.58$

مثال 4

- عند مناقشة الطلبة في حل المثال 4، أرسم شكل الانتشار المعطى على لوح متنقل، مُؤكِّدًا لهم ضرورة استعمال المستقيم الأفضل مطابقة لنقاط شكل الانتشار ضمن المجال والمدى لتلك النقاط؛ لأنَّ الخروج عنها يؤدي إلى تقديرات مُضلِّلة وغير منطقية. وكذلك أُركِّز على أهمية إعطاء مُبرِّر للإجابة.

المفاهيم العابرة للمواد:

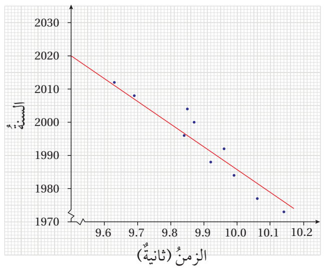
- أُعزِّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلماء) عن طريق حوار أُديره مع الطلبة عن واحد من أشهر علماء القرن العشرين، هو البريطاني فيشر (Ronald Fisher) الذي كان له فضل كبير في تطوير علم الإحصاء بصيغته الحديثة، وعمل على تطبيقه في عديد من المجالات والعلوم، مثل: الزراعة، والوراثة، والاقتصاد، فضلًا عن وضعه أسس تصميم التجارب وتحليلها.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن ثلاثة علماء اشتُهِروا بإسهاماتهم في علم الإحصاء، ثم كتابة مقالة عنهم، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة توثيق مصادر معلوماتهم.

منَ المحاذيرِ التي يجبُ التنبُّهُ لها، استعمالُ شكلِ الانتشارِ لعملِ استنتاجاتٍ؛ فشكلُ الانتشارِ يكونُ مفيدًا فقطْ ضمنَ مدى القيمِ المعطاةِ. أمّا في حالِ الخروجِ عنْ هذا المدى فقدْ تكونُ الاستنتاجاتُ مُضلِّلةً، أوْ غيرَ منطقيةٍ.

مثال 4

الألعابُ الأولمبيةُ: حدثٌ رياضيٌّ دوليٌّ يُنظَّمُ كلَّ سنتيْنِ في السنواتِ الزوجيةِ، بتناوبِ الألعابِ الصيفيةِ والألعابِ الشتويةِ.

يُمثِّلُ شكلُ الانتشارِ المجاورُ الأزمنةَ المُدوَّنةَ لصاحبِ المركزِ الأولِ في سباقِ 100 m للرجالِ في عددٍ منْ دوراتِ الألعابِ الأولمبيةِ. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً المُعطى في الشكلِ لتقديرِ الزمنِ الذي سيُحقِّقُهُ صاحبُ المركزِ الأولِ في السباقِ للدورةِ التي ستقامُ عامَ 2020م.

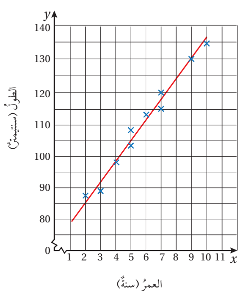


هلْ يُمكِنُ تقديرُ الزمنِ الذي سيُحقِّقُهُ صاحبُ المركزِ الأولِ في السباقِ للدورةِ التي ستقامُ عامَ 2038م؟

إذا استعملْتُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، فأُقدِّرُ الزمنَ المُستغرَقَ لقطعِ مسافةِ السباقِ بنحوِ 9.5 ثوانٍ في دورةِ عامِ 2020م، ولكنَّ هذا التقديرَ لا ينطبقُ على الدوراتِ الأولمبيةِ التاليةِ الخارجةِ عنْ مدى القيمِ المعطاةِ؛ فوَفقًا لهذا التقديرِ، يُتوقَّعُ استمرارُ انخفاضِ الزمنِ المُستغرَقِ لقطعِ مسافةِ السباقِ إلى 9 ثوانٍ، وَ8.5 ثوانٍ، وَ8 ثوانٍ، ...، وهكذا حتى الوصولِ إلى دورةٍ لنْ يحتاجَ فيها المتسابقونَ إلى أيِّ زمنٍ لقطعِ مسافةِ السباقِ التي طولُها 100 m، وهذا غيرُ منطقيٍّ.

أتحقق من فهمي

أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً في الشكلِ المجاورِ لتقديرِ طولِ طفلٍ عمرُهُ 8 سنواتٍ. هلْ يُمكِنُ استعمالُ هذا الشكلِ لتقديرِ طولِ شخصٍ عمرُهُ 30 سنةً؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.



إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

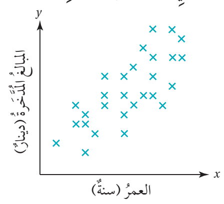
طول الشخص الذي عمره 8 سنوات هو 124 cm تقريبًا.

لا يمكن استعمال شكل الانتشار لتقدير طول شخص عمره 30 سنة؛ لأن هذا العمر يقع خارج مجال قيم العمر الممثلة فيه.

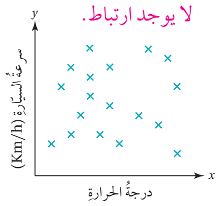
أتدرب وأحل المسائل

أَصِفُ الارتباطَ في شكلَيِ الانتشارِ الآتيَيْنِ:

2 يوجد ارتباط قوي موجب.



1 لا يوجد ارتباط.



3 ماذا أستنتجُ منْ شكلَيِ الانتشارِ السابقَيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

يُمثِّلُ الجدولُ الآتي العمرَ والطولَ والكتلةَ لسبعِ لاعباتٍ منْ فريقِ كرةِ الطائرةِ في إحدى المدارسِ:

سميرةُ	ابتسامُ	تغريدُ	هدى	عائشةُ	هندُ	وفاءُ	اسمُ اللاعبةِ
13	15	12	11	11	15	14	العمرُ (سنةٌ)
161	165	162	158	154	168	169	الطولُ (سنتيمترٌ)
41	42	37	32	35	42	40	الكتلةُ (كيلوغرامٌ)

أرسمُ أشكالَ الانتشارِ، ثمَّ أَصِفُ الارتباطَ لكلٍّ منْها: (8 – 4) أنظر ملحق الإجابات.

4 العمرُ مقابلَ الطولِ.

5 الطولُ مقابلَ الكتلةِ.

6 العمرُ مقابلَ الكتلةِ.

تجربةٌ علميةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي المسافةَ بالسنتيمترِ، والسرعةَ بالسنتيمترِ لكلِّ ثانيةٍ، عندَ دحرجةِ كرةٍ على سطحِ طاولةٍ، بدءًا بنقطةٍ مُحدَّدةٍ:

80	70	60	50	40	30	20	10	المسافةُ (cm)
0	3	5	7	10	13	16	18	السرعةُ (cm/s)

7 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

8 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ.

9 أُقدِّرُ سرعةَ الكرةِ لحظةَ قطعِها مسافةَ 5 cm منْ نقطةِ انطلاقِها. 19 cm/s تقريبًا.

10 أُقدِّرُ المسافةَ التي قطعَتْها الكرةُ منْ نقطةِ انطلاقِها عندما كانَتْ سرعتُها 12 cm/s 33 cm تقريبًا.

112

إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

3) في شكل الانتشـــار الذي يظهر في السؤال 1، يمكن القول أنّه لا يوجد ارتباط واضح بين ســـرعة السيارة ودرجة حرارة الجو؛ لأنَّ نقاط شكل الانتشار متناثرة أو متباعدة.

في شكل الانتشـــار الذي يظهر في السؤال 2، يمكن القول أنّه كلّما زاد عمر الشـــخص زادت قيمة مدخراته؛ لأنَّ نقاط شكل الانتشار تتجمَّع حول مستقيم ميله موجب.

4 التدريب

- أُوجِّــه الطلبــة إلى بند (**أتـــدرَّب وأحل المســـائل**)، ثــم أطلــب إليهم حــل المســـائل (1 – 10) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـــرًا بأمثلـــة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحـــد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المســـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اســـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تســـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

الواجب المنزلي:

أســـتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 16) كتاب التمارين: (1 – 7)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (17 – 22) كتاب التمارين: (4 – 8)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 21), (24 – 27) كتاب التمارين: (4 – 10)

مهارات التفكير العليا

- أوجــه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (27 – 24).
- أرصد أيّة أفكار غيــر تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

5 الإثراء

- المســتقيم الأفضل مطابقة هو من أهم نتائج موضوع إحصائي يُعــرَف بتحليل الانحــدار (regression analysis)؛ إذ تُســتعمَل طريقة (least squares method) لتحديد مســتقيم يتوســط نقاط شــكل الانتشــار، ويكون مجموع مربعات بُعْد كل نقطة عنه أقل ما يمكن، وتُعرَف معادلته باسم معادلة الانحدار. ويُعْزى الفضل في اكتشــاف هذه الطريقة إلى العالِم جاوس (Carl Friedrich Gauss) عام 1975م.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عــن موضوع الانحــدار وعلاقته بمعامــل الارتباط بيرســون، ثم كتابة تقرير عن ذلــك، مُرفَق بمنجزات مشروع الوحدة؛ ليُعرَض مع المشروع.
- أُذكِّــر الطلبــة بضوابط التقريــر العلمــي ومعاييره، التي أهمها: وجــود صفحة لعنوان التقرير وأســماء المُعِدّين، وفهرس للعناويــن الفرعية، ومراعاة الدقة العلمية، وسلامة اللغة، والإيجاز، والوضوح، وتوثيق المصادر.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوتين (1) و(2) من خطوات المشروع.
- أُوجِّــه الطلبة إلــى تضمين عرض مشــروع الوحدة مُلخَّصًا للتقرير.

الوحدةُ 8

لحلِّ المســألةِ الواردةِ في بدايةِ الدرسِ، أجمعُ بياناتٍ منْ 10 طلبةٍ عشــوائيًّا، ثمَّ أُدوِّنُها في الجدولِ الآتي، ثُمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ التي تلي: (11, 12, 13) تعتمد الإجابة على البيانات التي يجمعها الطلبة.

رقمُ الطالبِ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طولُ الطالبِ										
المسافةُ بينَ طرفَيْ ذراعيْهِ (cm)										

11 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

12 أَصِفُ الارتباطَ بينَ المُتغيِّريْنِ.

13 هلِ ادِّعاءُ راكانٍ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أطوالٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي أطوالَ 20 أبًا وأبنائِهِمُ الذينَ تبلغُ أعمارُهُمْ 20 سنةً بالسنتيمترِ:

طولُ الأبِ	153	162	147	183	174	169	152	164	186	178
طولُ الابنِ	145	155	142	167	167	151	145	152	163	168
طولُ الأبِ	175	173	158	168	181	173	166	162	180	156
طولُ الابنِ	172	167	160	154	170	164	156	150	160	152

(16 – 14) أنظر الهامش.

14 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

15 هلْ صحيحٌ أنَّ الأبَ الطويلَ ابنُهُ طويلٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أَجِدُ معادلتَهُ.

إرشادٌ

يُمكِنُ تمثيلُ طولِ الأبِ على المحورِ الأفقيِّ بتدريجٍ يتراوحُ بينَ 140 cm وَ 200 cm، وتمثيلُ طولِ الابنِ على المحورِ الرأسيِّ بتدريجٍ يتراوحُ بينَ 140 cm وَ 200 cm أيضًا.

في دراسةٍ مسحيةٍ لمُعلِّمٍ عنْ عددِ ســاعاتِ ممارسةِ الرياضةِ ومشاهدةِ التلفازِ أسبوعيًّا شملَتْ 20 طالبًا في أحدِ الصفوفِ التي يُدرِّسُها، كانَتْ نتيجةُ المسحِ كما في الجدولِ الآتي: (17, 18) أنظر ملحق الإجابات.

عددُ ساعاتِ ممارسةِ الرياضةِ	12	6	7	9	0	11	15	5	3	12
عددُ ساعاتِ مشاهدةِ التلفازِ	14	17	13	12	27	19	16	24	26	18
عددُ ساعاتِ ممارسةِ الرياضةِ	12	0	2	1	3	7	6	7	10	12
عددُ ساعاتِ مشاهدةِ التلفازِ	13	25	20	18	28	12	22	18	16	22

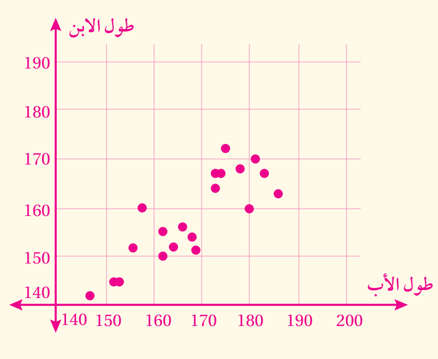
17 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

18 إذا كانَ أحدُ الطلبةِ منَ الصفِّ نفسِهِ يُشاهِدُ التلفازَ مدَّةَ 8 ساعاتٍ أسبوعيًّا، فهلْ يُمكِنُ تقديرُ عددِ الساعاتِ التي يمارسُ فيها الرياضةَ أسبوعيًّا؟ أُبرِّرُ إجابتي.

113

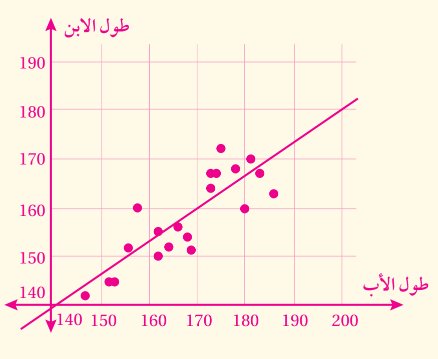
إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

14)



15) صحيــح؛ لأنَّ التمثيــل البيانــي يقترب من مســتقيم ميله موجب؛ ما يعني أنَّ الارتباط موجب.

16)



معادلة المستقيم الأفضل مطابقة هي:

$$y = 0.68x + 43.2$$

سيارةُ أجرةٍ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي المسافاتِ المقطوعةَ بالكيلومترِ والمُدَدَ الزمنيةَ المُستغرَقةَ بالدقائقِ لـ 10 رحلاتٍ قامَ بها سائقُ سيارةِ أجرةٍ في أحدِ الأيامِ: (19, 20) أنظر الهامش.

المسافةُ (km)	5.4	8.8	5.8	3.9	2.9	4.8	6.6	5.2	3.8	1.6
الزمنُ (min)	10	16	11	8	15	9	13	11	17	3

19 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ، بوضعِ الزمنِ على المحورِ الأفقيِّ.

20 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أجِدُ معادلتَهُ.

21 إذا استغرقَتْ إحدى الرحلاتِ 5 دقائقَ، فما المسافةُ المقطوعةُ التي يُمكِنُ تقديرُها لهذهِ الرحلةِ؟ 3.4 km تقريبًا.

22 ما الزمنُ الذي يُمكِنُ تقديرُهُ لرحلةٍ قطعَ فيها السائقُ مسافةَ 4 km؟ 7.5 min تقريبًا.

23 إذا استغرقَتْ إحدى الرحلاتِ ساعةً كاملةً، فما المسافةُ المقطوعةُ التي يُمكِنُ تقديرُها لهذهِ الرحلةِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

لا يمكن تقدير المسافة المقطوعة؛ لأنَّ مدَّة ساعة (60 دقيقة) تقع خارج مجال القيم التي يُظهِرها شكل الانتشار.

مهارات التفكير العليا

24 **تبريرٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ الآتي علاماتِ 10 طالباتٍ في اختبارَي الرياضياتِ والجغرافيا. إذا كانَتْ إحدى الطالباتِ مريضةً عندَ تقديمِها اختبارَ الجغرافيا، فمَنْ هيَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.

الاسمُ	إيمانُ	باسمةُ	تهاني	دعاءُ	رقيةُ	سارةُ	سعادُ	علياءُ	فداءُ	منى
علاماتُ اختبارِ الرياضياتِ	145	155	142	167	167	151	145	152	163	168
علاماتُ اختبارِ الجغرافيا	175	173	158	168	181	173	166	162	180	156

25 **أكتشفُ الخطأَ:** بالعودةِ إلى الجدولِ في السؤالِ السابقِ، لمْ تتقدَّمْ سميرةُ لاختبارِ الجغرافيا، وقدْ أحرزَتْ علامةَ 75 في اختبارِ الرياضياتِ. قدَّرَتْ سميرةُ أنَّها ستحصلُ على علامةِ 80 في اختبارِ الجغرافيا لوْ أنَّها قدَّمَتْهُ. هلْ تقديرُ سميرةَ منطقيٌّ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

تقدير سميرة غير منطقي؛ لأنَّ علامتها في اختبار الرياضيات تقع خارج مدى القيم التي يُظهِرها شكل الانتشار الذي يبدو فيه الارتباط موجبًا وضعيفًا.

26 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أختارُ مُتغيِّرَيْنِ، ثمَّ أُنشِئُ جدولًا أُنظِّمُ فيهِ بعضَ قيمِهِما، ثمَّ أستعملُهُ للتنبُّؤِ بالقيمةِ الحقيقيةِ لأحدِ المُتغيِّرَيْنِ باستعمالِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً إذا عُلِمَتْ قيمةُ المُتغيِّرِ الآخرِ. تعتمد الإجابة على اختيار الطلبة.

27 **تبريرٌ:** لماذا يوصفُ الارتباطُ بأنَّهُ موجبٌ في شكلِ الانتشارِ الذي يُمثِّلُ مبيعاتِ أحدِ المحالِّ منَ المثلجاتِ على مدارِ أشهرِ السنةِ؟ هلْ يعني ذلكَ أنَّ أحدَ المُتغيِّرَيْنِ (مبيعاتُ المثلجاتِ، أوْ أشهرُ السنةِ) سببٌ للآخرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

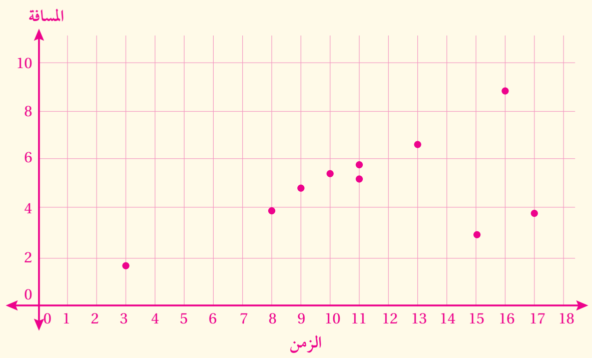
إجابة محتملة: بما أنَّ درجات الحرارة عامة تزداد مع التقدُّم في أشهر السنة (من شهر 1 إلى شهر 9)، فإنَّه يُتوقَّع ازدياد مبيعات المثلَّجات تبعًا لذلك. ولكن، لا يمكن القول إنَّ ارتفاع درجات الحرارة سيؤدي إلى ارتفاع مبيعات المثلَّجات، أو العكس؛ إذ يُؤثِّر في ارتفاع مبيعات المثلَّجات عوامل أخرى، مثل: السعر، والجودة، وقوانين العرض والطلب.

6 الختام

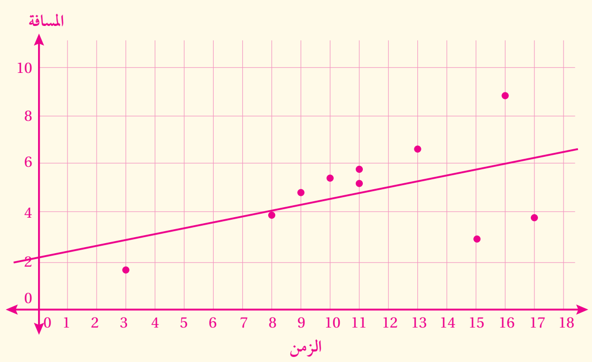
- أطلب إلى الطلبة – في نهاية الدرس – تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أطَّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

19)



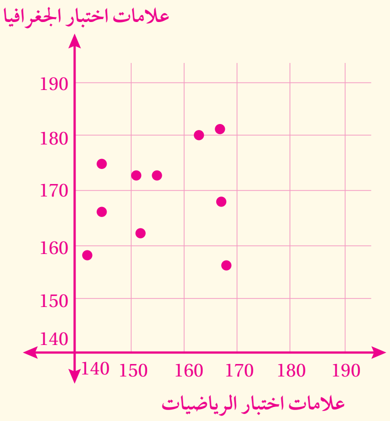
20)



معادلة المستقيم الأفضل مطابقة هي:

$$y = 0.24x + 2.2$$

24)



منى؛ فبناءً على شكل الانتشار، تبدو النقطة التي تُمثِّل درجاتها في الاختبارين بعيدة عن بقية النقاط، وهي الوحيدة التي كانت علامتها في اختبار الجغرافيا أقل من علامة اختبار الرياضيات؛ إذ يُلاحَظ أنَّ علامة اختبار الجغرافيا كانت أكبر من علامة اختبار الرياضيات لبقية الطالبات. ولأنَّ علامتها في الرياضيات هي العليا، وعلامتها في الجغرافيا هي الدنيا.

معمل برمجية جيوجبرا

هدف النشاط:

استعمال برمجية جيوجبرا لرسم المستقيم الأفضل مطابقة لنقاط شكل الانتشار.

المصادر والأدوات:

برمجية جيوجبرا

خطوات العمل:

- أتوجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات بحسب عدد الأجهزة المتوافرة في المختبر.
- أطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- أُعرِّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية، مثل كيفية تعيين النقاط.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ثم أطلب إليهم تنفيذه بأنفسهم.
- أطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق خطوتي النشاط على التوالي، وأتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وأتأكَّد أنَّ كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال شريط الإدخال (Input) عند الحاجة إلى تعيين نقطة ذات إحداثيات تتضمَّن كسورًا؛ سعيًا للدقة في تعيين النقاط.
- بعد تنفيذ أفراد المجموعات الخطوة الثانية بصورة صحيحة، أطلب إليهم عرض هامش (Algebra)؛ للتحقُّق من إحداثيات النقاط على شكل الانتشار، وملاحظة معادلة المستقيم الأفضل مطابقة.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

رسمُ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً
Graphing the Line of Best Fit

يمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لرسمِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً لنقاطِ شكلِ الانتشارِ.

نشاط

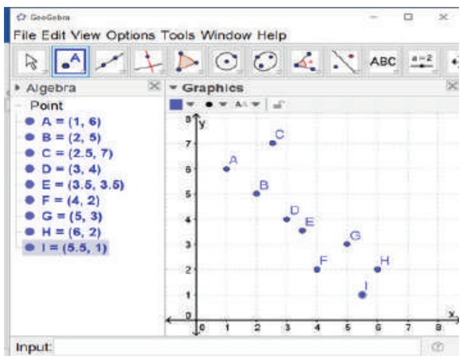
أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ الواردةِ في الجدولِ الآتي باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

x	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6	5.5
y	6	5	7	4	3.5	2	3	2	1

لرسمِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً، أتَّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ.

أختارُ أيقونةَ من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ عندَ موقعِ كلِّ زوجٍ مُرتَّبٍ في المستوى البيانيِّ، لتظهرَ النقاطُ كما في الشكلِ الآتي:

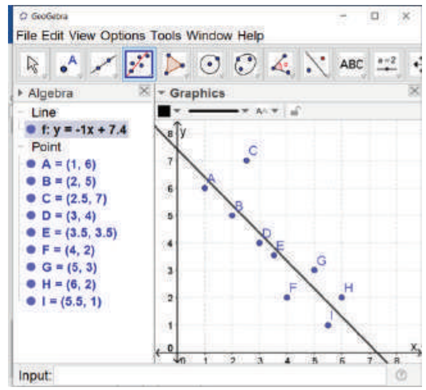


يُمكِنُ أيضًا تعيينُ النقاطِ بإدخالِ كلٍّ منها في شريطِ الإدخالِ باستعمالِ لوحةِ المفاتيحِ في صورةِ: $A = (x, y)$.

إرشــاد: إذا توافر جهاز عرض في المختبر، فأستعمله لعرض صور من كتاب الطالب عن معمل برمجية جيوجبرا.

الخطوةُ 2: أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً.

أختارُ أيقونةَ Best Fit Line مِنْ شـريطِ الأدواتِ، ثمَّ أُحدِّدُ جميعَ النقاطِ التي عيَّنْتُها في المستوى الإحداثيِّ، بوضعِ المُؤشِّرِ في أيِّ مكانٍ بعيدًا عنِ النقاطِ، ثمَّ الضغطِ باستمرارٍ على الزرِّ الأيسرِ لفأرةِ الحاسوبِ، معَ السحبِ لشمولِ جميعِ النقاطِ، عندئذٍ سيظهرُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً، وتظهرُ معادلتُهُ إلى يسارِ الشاشةِ كما في الشكلِ الآتي:



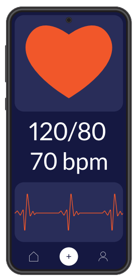
إرشادٌ

لإظهارِ هامـشِ (Algebra)، أختارُ (Algebra) مـنْ قائمـةِ العـرضِ (View).

أتدرب

1 أحُلُّ الأسئلةَ (16 ,10 ,9 ,8) في الدرسِ السابقِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أُقارِنُ الحلَّ بحلّي اليدويِّ.
أنظر رسوم الطلبة.

2 تحوي الهواتفُ المحمولةُ تطبيقًا يُستعمَلُ لرصدِ مُعدَّلِ نبضاتِ القلبِ. أستعملُ هذا التطبيقَ لرصدِ مُعدَّلِ نبضاتِ القلبِ لـ 10 أشـخاصٍ على الأقلِّ، ثمَّ أقيسُ طولَ كلِّ منْهُمْ، ثمَّ أرسمُ شـكلَ الانتشارِ والمستقيمَ الأفضلَ مطابقةً باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا. أنظر رسوم الطلبة.



116

- أُوضِّـح للطلبة كيفية تقديـر قيمة متغير باسـتعمال المستقيم الأفضل مطابقة في برمجية جيوجبرا:
  - » **هندسيًّا:** باختيار أداة إنشاء عمود على مستقيم من نقطة مُحدَّدة Perpendicular Line ، واسـتعمالها لرسـم عمود على أحد المحورين، ثم إيجاد نقطة تقاطعه مع المسـتقيم الأفضل مطابقة باسـتعمال الأداة Intersect .
  - » **جبريًّا:** بالتعويض في معادلة المستقيم.

- أُوجِّـه الطلبـة إلى حل الأسـئلة في بنـد **(أتدرب)** الواردة في معمل برمجيـة جيوجبرا، بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط مباشـرةً؛ بتطبيق ما تعلَّموه من مهارات باستعمال البرمجية.

- أختـار بعض الأخطاء التي وقع فيهـا الطلبة من دون ذكر أسـمائهم؛ تجنبًـا لإحراجهم، ثـم أُناقِش طلبة الصف فيها.

- أطلب إلى الطلبة تلخيص المهـارات والأفكار التي تعلَّموها، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- رسم المنحنى التكراري التراكمي يدويًّا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- تقدير الربيعات Q_1, Q_2, Q_3، والمدى الربيعي، والمئينات للجداول التكرارية ذات الفئات، وتفسير معنى كلٍّ منها ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- إيجاد الرتبة المئينية لقيمة من بيانات التوزيع.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي.
- رسم منحنى متصل يمر بمجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي يدويًّا.
- تمثيل البيانات المفردة بالصندوق ذي العارضتين، وإيجاد المدى والوسيط، والمدى الربيعي لها.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت)في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 2

المنحنى التكراريُّ التراكميُّ
Cumulative Frequency Graph

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الربيعاتِ والمئيناتِ، وإيجادُها للبياناتِ المُبوَّبةِ في جداولَ تكراريةٍ باستعمالِ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

المصطلحاتُ المنحنى التراكميُّ، المئيناتُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ رواتبَ الموظفينَ في إحدى الشركاتِ. ما عددُ الموظفينَ الذينَ تزيدُ رواتبُهُمْ على 520 دينارًا؟

فئاتُ الرواتبِ	عددُ الموظفينَ
$349 \le x < 399$	8
$399 \le x < 449$	12
$449 \le x < 499$	15
$499 \le x < 549$	9
$549 \le x \le 599$	6

يُمثِّلُ **المنحنى التكراريُّ التراكميُّ** (cumulative frequency graph) للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ العلاقةَ بينَ التكرارِ التراكميِّ للفئاتِ في التوزيعِ التكراريِّ والحدودِ العليا للفئاتِ.

مثال 1

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ الذي يستغرقُهُ طلبةُ الصفِّ العاشرِ في الوصولِ إلى المدرسةِ. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ.

الزمنُ (دقيقةٌ)	التكرارُ (عددُ الطلبةِ)
$0 \le x < 5$	2
$5 \le x < 10$	9
$10 \le x < 15$	9
$15 \le x < 20$	8
$20 \le x < 25$	3
$25 \le x \le 30$	1

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ الآتي. أضيفُ الحدَّ الأعلى للفئةِ التي تسبقُ الفئةَ الأولى التي يساوِي تكرارُها صفرًا.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أرسم مستوى إحداثيًّا على اللوح المتنقل، أو على اللوح العادي باستعمال المسطرة.
- مستعينًا بالجدول الآتي، أُمثِّل الاقتران: $f(x) = x^2 , x \geq 0$؛ لتوضيح كيفية تعيين النقاط في المستوى، ثم توصيلها معًا بمنحنى متصل يمر بها.

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = f(x)$	0	0.25	1	2.25	4

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أقل من 399 دينار؟ 8 موظفين.
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أكثر من أو تساوي 499 دينارًا؟ 15 موظفًا.
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أكثر من أو تساوي 349 دينارًا؟ 50 موظفًا.
  - » كم عدد الموظفين الذين رواتبهم 460 دينارًا؟ إجابة محتملة: لا يمكن معرفة ذلك من الجدول.
- أعزز الإجابات الصحيحة.
- أُخبِر الطلبة أنَّ ما سيتعلَّمونه في هذا الدرس سيساعدهم على الإجابة عن الأسئلة السابقة، وبخاصة تلك التي لم يتمكَّنوا من تحديد إجابتها من الجدول.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم المنحنى التكراري التراكمي، ثم أرسم على اللوح الشكل العام لهذا المنحنى، مشيرًا إلى أنَّه يتخذ تقريبًا شكل الحرف (S).
- أُوضِّح للطلبة كيفية تحديد التكرار التراكمي في الجدول الوارد في بند (**مسألة اليوم**).

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، مُتَّبِعًا الخطوات الواردة في كتاب الطالب لحله.
- عند تنفيذ الخطوة الأولى المُتعلِّقة بإنشاء جدول التكرار التراكمي، أُؤكِّد للطلبة أهمية إضافة فئة سابقة افتراضية، يكون حدها الأعلى هو الحد الأدنى للفئة الأولى في الجدول الأصلي المعطى، ويكون التكرار المقابل لها صفرًا؛ لبدء المنحنى التراكمي عند رسمه من المحور الأفقي x.

إرشادات:

- أُنبِّـه الطلبة إلـى أنَّ بداية المنحنـى التكراري التراكمي يجب أنْ تكون علـى المحور الأفقي x، وأنَّ المنحنـى قـد لا يبـدأ بنقطـة الأصل وذلـك عندما يكون الحد الأدنـى للفئة الأولى في الجدول الأصلي المعطى لا يسـاوي صفرًا (يمكنني تقديم المثال الإضافي لتوضيح ذلك).
- إذا توافـر جهـاز حاسـوب وجهـاز عـرض في الصـف، فأسـتعملهما لعـرض الجداول والمنحنيات التكرارية التراكمية التي ورد ذكرها في الدرس؛ توفيرًا للوقت الذي يستغرقه رسمها على اللوح.

التقويم التكويني:

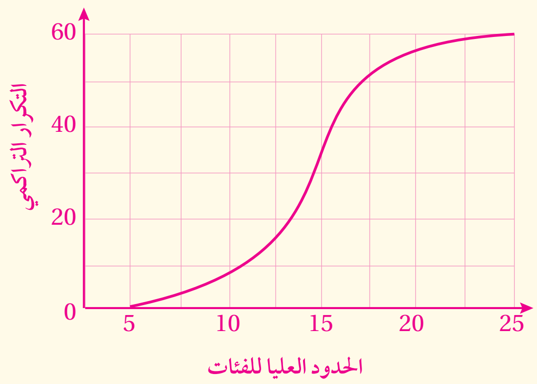
أطلب إلى الطلبة حـلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- أرسـم المنحنى التكراري التراكمي لبيانات الجدول الآتي.

الفئة	$5\le x<10$	$10\le x<15$	$15\le x<20$	$20\le x\le 25$
التكرار	8	27	21	4

الحل:



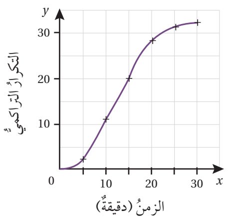
الحدودُ العليا للفئاتِ	التكرارُ التراكميُّ
0	0
5	$0+2=2$
10	$2+9=11$
15	$2+9+9=20$
20	$2+9+9+8=28$
25	$2+9+9+8+3=31$
30	$2+9+9+8+3+1=32$

أضيفُ فئةً جديدةً إلى الجدولِ تكرارُها يساوي صفرًا.

الخطوةُ 2: أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ.

أرسمُ منحنًى يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ الحدودِ العليا لفئاتِ الزمنِ بالدقائقِ (المُتغيِّرُ x) والتكرارِ التراكميِّ (المُتغيِّرُ y)، التي تُمثِّلُها الأزواجُ المُرتَّبةُ الآتيةُ:

$(0,0), (5,2), (10,11), (15,20), (20,28), (25,31), (30,32)$



معلومةٌ

محافظةُ المفرقِ هيَ ثاني أكبرِ محافظاتِ المملكةِ الأردنيةِ الهاشميةِ منْ حيثُ المساحةُ، وتقعُ في الشمالِ الشرقيِّ للمملكةِ.

أتحقق من فهمي

طقسٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ درجاتِ الحرارةِ في محافظةِ المفرقِ في أحدِ أشهرِ فصلِ الربيعِ. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ.

أنظر الهامش.

الفئاتُ (درجةُ الحرارةِ)	التكرارُ (عددُ الأيامِ)
$5\le x<8$	1
$8\le x<11$	7
$11\le x<14$	9
$14\le x<17$	6
$17\le x<20$	5
$20\le x<23$	1
$23\le x\le 26$	1

تعرَّفْتُ سابقًا الربيعياتِ؛ وهيَ ثلاثُ قيمٍ تُقسِّمُ البياناتِ إلى أربعةِ أجزاءٍ متساويةٍ. وهذهِ القيمُ هيَ: الربيعُ الأدنى (Q_1)؛ وهوَ وسيطُ النصفِ الأدنى منَ البياناتِ، والربيعُ الأوسطُ (Q_2)؛ وهوَ وسيطُ البياناتِ كلِّها، والربيعُ الأعلى (Q_3)؛ وهوَ وسيطُ النصفِ الأعلى منَ البياناتِ. تعرَّفْتُ أيضًا المدى الربيعيَّ؛ وهوَ مدى البياناتِ التي تقعُ بينَ الربيعِ الأدنى والربيعِ الأعلى.

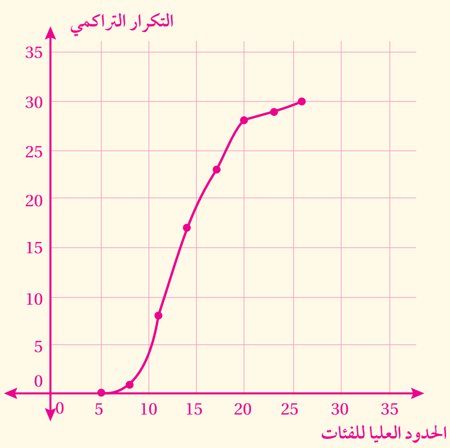
118

إجابة أتحقق من فهمي 1:

– أُنشِـئ جدول التكـرار التراكمي كما يظهر تاليًا.

الحدود العليا للفئات x	التكرار التراكمي y
5	0
8	1
11	8
14	17
17	23
20	28
23	29
26	30

– أُعيِّن النقـاط (x, y) في المسـتوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحى متصل كما في الشكل الآتي.



1 1 3 3 3 5 6 6 7 7 7 8 8 9 9

الربيعُ الأدنى Q_1 — الوسيطُ Q_2 — الربيعُ الأعلى Q_3

المدى الربيعيُّ

$$IQR = Q_3 - Q_1$$
$$= 8 - 3 = 5$$

أتعلّمُ

بما أنَّ الربيعَ الأدنى (Q_1) أكبرُ منْ ربعِ البياناتِ فإنّهُ يساوي المئينَ الخامسَ والعشرينَ (P_{25}).

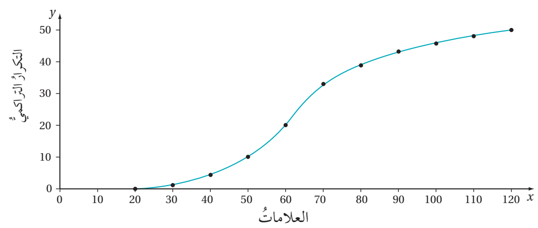
وهكذا فإنَّ: $Q_1=P_{25}$, $Q_2=P_{50}$, $Q_3=P_{75}$

المئينُ (percentile): هوَ قيمةٌ أكبرُ منْ نسبةٍ مئويّةٍ مُحدّدةٍ منَ البياناتِ، فمثلاً؛ إذا حصلتَ في اختبارِ الحاسوبِ على درجةٍ تساوي «المئينَ الأربعينَ»، فإنَّ ذلكَ يعني أنَّ درجتكَ أعلَى منْ درجاتِ 40% منَ الطلبةِ الذينَ تقدّمُوا للاختبارِ، و يُرمزُ للمئينِ الأربعينَ بالرّمزِ P_{40}.

يُمكِنُ تقديرُ قيمِ الربيعيّاتِ والمئيناتِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ باستعمالِ المُنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

مثال 2

يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ علاماتِ 50 طالبًا في اختبارِ اللغةِ العربيةِ:



1 أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ رُتبةَ الوسيطِ.

بما أنَّ عددَ الطلبةِ 50 طالبًا، فإنَّ رُتبةَ الوسيطِ هيَ: $0.5 \times n = 0.5 \times 50 = 25$

الخطوةُ 2: أرسمُ مستقيمًا أفقيًّا بدءًا بالتكرارِ التراكميِّ 25 حتى يتقاطعَ معَ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ. ومنْ نقطةِ التقاطعِ أرسمُ مستقيمًا رأسيًّا حتى يتقاطعَ معَ المحورِ الأفقيِّ (العلاماتُ) كما في الشكلِ الآتي.

مثال 2

- أُذكِّر الطلبة بتعريف الربيعات الثلاثة: Q_1, Q_2, Q_3، وتعريف المدى الربيعي، وكيفية إيجادها للقيم المفردة، وكيفية تمثيل توزيع البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.
- أوضح للطلبة مفهوم المئين، ثم أناقشهم في حل المثال 2، وتوفيرًا للوقت؛ يُفضَّل رسم المنحنى التكراري المعطى في المثال سلفًا، أو الاستعانة بجهاز العرض (إنْ توافر).
- عند تقدير الوسيط Q_2 في الفرع 1 من المثال 2، أُركِّز على تطبيق خطوتي الحل كما ورد ذكرهما في المثال، واستعمال المسطرة عند رسم المستقيمات الأفقية والرأسية، واستعمال قلم ذي لون مختلف لرسمها بشكل متقطع، مُبيِّنًا أنَّه (الوسيط Q_2) القيمة التي تقسم البيانات إلى نصفين، بحيث يقع ما نسبته 50% من القيم فوق الوسيط، ويقع ما نسبته 50% من القيم تحته.
- أُوضِّح للطلبة كيفية تقدير الربيعين بخطوات مماثلة لتقدير الوسيط، مُبيِّنًا أنَّ المدى الربيعي هو الذي يقع ضمنه ما نسبته 50% من القيم (أيْ بين Q_1، وQ_3).
- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن رسم تمثيل آخر يُوضِّح كيف توزَّعت البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.

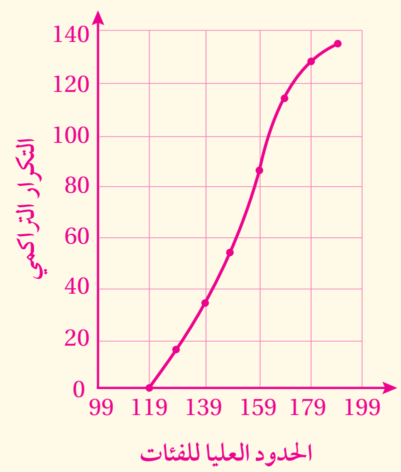
مثال إضافي

- سُجِّلت أعداد الطلبة في 135 مدرسة أساسية بإحدى محافظات المملكة، وقــد توزَّعت المدارس كما في الجدول التالي:

التكرار	أعداد الطلبة
15	120 – 129
18	130 – 139
20	140 – 149
32	150 – 159
28	160 – 169
15	170 – 179
7	180 – 189

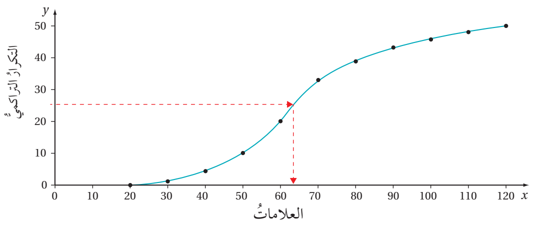
أرســم المنحنى التكراري التراكمي، مُقدِّرًا منه قيمة الوسيط، والمدى الربيعي.

الحل:



الوسيط: 155 تقريبًا.

المدى الربيعي: 26 تقريبًا.



إذنْ، قيمةُ الوسيطِ هيَ العلامةُ 64 تقريبًا.

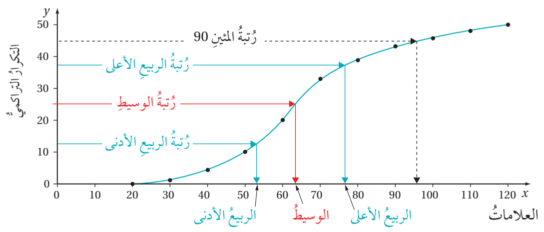
2 **أَجِدُ المدى الربيعيَّ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ رُتبةَ الربيعِ الأدنى، ورُتبةَ الربيعِ الأعلى.

رُتبةُ الربيعِ الأدنى: $0.25 \times n = 0.25 \times 50 = 12.5$

رُتبةُ الربيعِ الأعلى: $0.75 \times n = 0.75 \times 50 = 37.5$

الخطوةُ 2: أُقدِّرُ قيمتَي الربيعيْنِ: الأدنى والأعلى، برسمِ المستقيماتِ الأفقيةِ والرأسيةِ على المنحنى التكراريِّ التراكميِّ كما في الفرعِ السابقِ.



أُلاحِظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ قيمةَ الربيعِ الأدنى هيَ العلامةُ 53 تقريبًا، وأنَّ قيمةَ الربيعِ الأعلى هيَ العلامةُ 77 تقريبًا. وعليهِ، فإنَّ قيمةَ المدى الربيعيِّ:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 77 - 53 = 24$$

3 **أَجِدُ المئينَ 90، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.**

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ رُتبةَ المئينِ 90

رُتبةُ المئينِ 90: $90\% \times n = 0.9 \times 50 = 45$

الخطوةُ 2: أُقدِّرُ قيمةَ المئينِ 90 برسمِ المستقيماتِ الأفقيةِ والرأسيةِ على المنحنى التكراريِّ التراكميِّ كما في الفرعِ السابقِ.

أُلاحِظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ قيمةَ المئينِ 90 هيَ العلامةُ 96 تقريبًا، وأنَّ هذهِ القيمةَ تعني أنَّ 90% منَ الطلبةِ أحرزوا علاماتٍ أقلَّ منَ العلامةِ 96، أوْ أنَّ 10% منَ الطلبةِ أحرزوا علاماتٍ أكثرَ منَ العلامةِ 96 في هذا الاختبارِ.

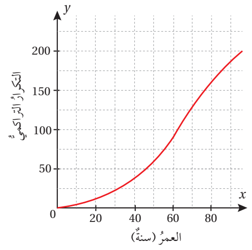
أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ أعمارَ 200 عضوٍ في جمعيةٍ ثقافيةٍ:

a) أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. أنظر الهامش.

b) أجِدُ المدى الربيعيَّ.

c) أجِدُ المئينَ 85، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ.



أتدرب وأحل المسائل

كرةُ قدمٍ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ عددَ الأهدافِ التي سجَّلَها طلبةُ المرحلةِ الثانويةِ في دوري كرةِ القدمِ المدرسيِّ:

عددُ الطلبةِ	عددُ الأهدافِ
3	0 – 4
17	5 – 9
12	10 – 14
9	15 – 19
5	20 – 24
4	25 – 29

1 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ. أنظر ملحق الإجابات.

2 أُقدِّرُ المئينَ 85، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ. 23 تقريبًا.

3 أُقدِّرُ عددَ الطلبةِ الذينَ سجَّلوا 18 هدفًا على الأقلِّ. 12 تقريبًا.

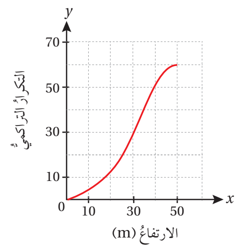
يُبيِّنُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ المجاورُ ارتفاعَ عددٍ منَ المباني في مدينةِ عمّانَ:

4 أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. $Q_2 = 30$

5 أجِدُ المدى الربيعيَّ. أنظر الهامش.

6 أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ الصندوقِ ذي العارضتينِ. أنظر الهامش.

7 أجِدُ المئينَ 80، ثمَّ أُفسِّرُ معناهُ. 37 تقريبًا.



121

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) رتبة الوسيط هي: $50\% \times 200 = 100$

الوسيط $Q_2 = 63$ تقريبًا.

b) رتبة Q_1 هي: $25\% \times 200 = 50$

إذن، $Q_1 \approx 45$

رتبة Q_3 هي: $75\% \times 200 = 150$

إذن، $Q_3 \approx 80$

المدى الربيعي هو: $IQR = Q_3 - Q_1$

$= 80 - 45$

$= 35$

c) $85\% \times 200 = 170$

إذن، المئين 85 يساوي 88 تقريبًا، وهذا يعني أن أعمار 85% من الأعضاء هي أقل من 88 سنة.

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 10) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

إرشاد: أُخبِر الطلبة أنَّه يمكنهم استعمال برمجية جيوجبرا للتحقُّق من صحة إجابات أسئلة الدرس؛ سواء كان ذلك في البيت، أو باستعمال تطبيق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.

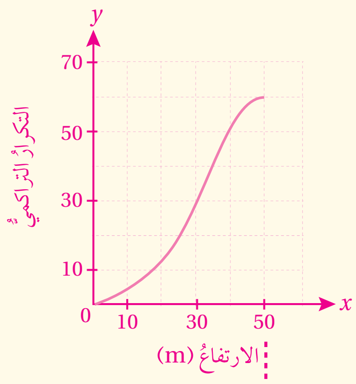
إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

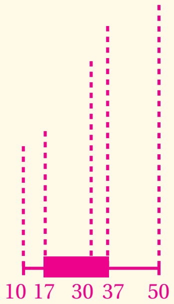
5) $IQR = Q_3 - Q_1$

$= 37 - 17$

$= 20$

6)





7) 37 تقريبًا.

وهذا يعني أنَّ 80% من المباني ترتفع أقل من 37 m

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (20 – 18).
- أرصد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

أخطاء شائعة:

عند حل السؤال 19 (**تحدّ**)، قد يُخطِئ بعض الطلبة في تحديد المقصود من عبارة (10 دقائق على الأقل)، فيعتقدون أنَّها تعني كل قيمة أقل من 10؛ لذا أُوضِّح لهم أنَّها تعني جميع القيم التي تساوي 10، أو تزيد على 10. أمّا عبارة (10 على الأكثر) فتعني جميع القيم التي تساوي 10، أو تقل عن 10.

(10 – 8) أنظر ملحق الإجابات.

ألعابٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ نتائجَ **80** متسابقًا في لعبةِ رمي السهامِ:

عددُ المتسابقينَ	مجموعُ النقاطِ (x)
9	1 – 20
13	21 – 40
23	41 – 60
15	61 – 80
11	81 – 100
7	101 – 120
2	121 – 140

8. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ.
9. أجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ الوسيطِ، والمدى الربيعيِّ.
10. إذا حصلَ المتسابقُ الذي مجموعُ نقاطِهِ أكثرُ منْ 90 على جائزةٍ، فما نسبةُ المتسابقينَ الذينَ سيحصلونَ على جائزةٍ؟

طُلِبَ إلى **30** طالبًا، وَ **50** مُعلِّمًا رفعُ أيديهِمْ لحظةَ تقديرِ انقضاءِ دقيقةٍ واحدةٍ بعدَ إعطاءِ إشارةِ البدءِ، وقدْ نُظِّمَتِ النتائجُ في الجدوليْنِ الآتييْنِ:

عددُ الطلبةِ	فئاتُ الزمنِ (x) ثانيةً
1	$20 \le x < 30$
3	$30 \le x < 40$
6	$40 \le x < 50$
12	$50 \le x < 60$
3	$60 \le x < 70$
3	$70 \le x < 80$
2	$80 \le x \le 90$

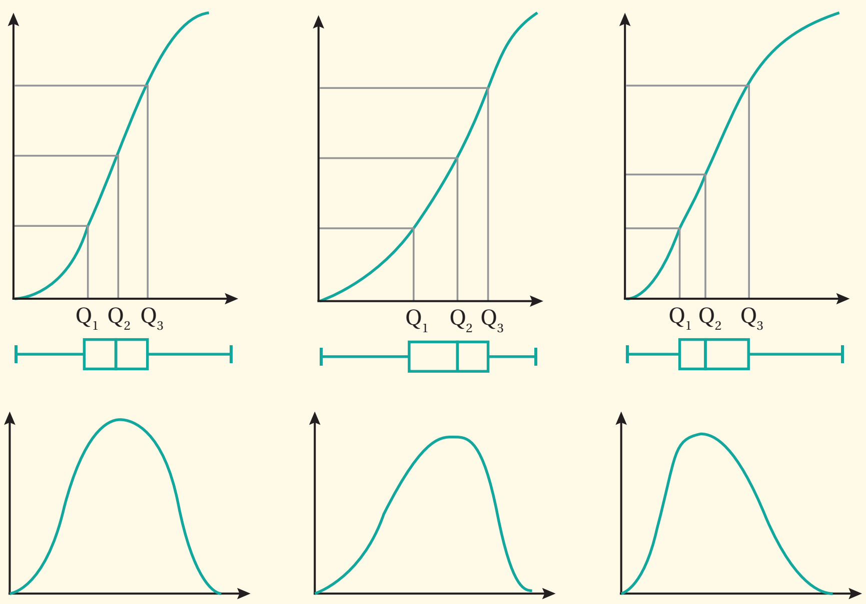
عددُ المُعلِّمينَ	فئاتُ الزمنِ (x) ثانيةً
1	$10 \le x < 20$
2	$20 \le x < 30$
2	$30 \le x < 40$
9	$40 \le x < 50$
17	$50 \le x < 60$
13	$60 \le x < 70$
3	$70 \le x < 80$
2	$80 \le x < 90$
1	$90 \le x \le 100$

11. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكلِّ جدولٍ. أنظر ملحق الإجابات.
12. أجِدُ الوسيطَ والمدى الربيعيَّ لكلِّ جدولٍ. أنظر ملحق الإجابات.
13. أيُّ الفريقيْنِ كانَ أفضلَ في تقديرِ مدَّةِ الدقيقةِ: الطلبةُ أمِ المُعلِّمونَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

المُعلِّمون أفضل في تقدير مدَّة الدقيقة؛ لأنَّ قيمة الوسيط لزمن المُعلِّمين (56 sec) أقرب إلى الدقيقة الواحدة (60 sec).

5 الإثراء

- أُوضِّح للطلبة كيف ترتبط ثلاث طرائق لتمثيل البيانات (المنحنى التكراري التراكمي، الصندوق ذو العارضتين، المنحنى التكراري) بثلاث طرائق من أشهر أنواع التوزيعات، كما يأتي:



توزيع ملتوٍ نحو اليمين. توزيع ملتوٍ نحو اليسار. توزيع متماثل (طبيعي).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (13 – 16) كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 17) كتاب التمارين: (4 – 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (17 – 20) كتاب التمارين: (7 – 10)

جامعاتٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ مُعدَّلاتِ عيِّنةٍ منْ طلبةِ كليةِ الهندسةِ في الجامعةِ الأردنيةِ:

المُعدَّلُ التراكميُّ (x)	عددُ الطلبةِ
$1 \le x < 1.5$	3
$1.5 \le x < 2$	7
$2 \le x < 2.5$	25
$2.5 \le x < 3$	38
$3 \le x < 3.5$	24
$3.5 \le x < 4$	11

14 أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للبياناتِ. أنظر الهامش.

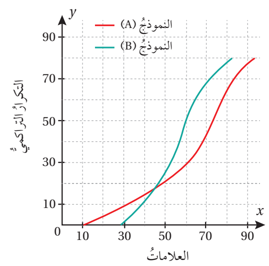
15 أجِدُ الوسيطَ والمدى الربيعيَّ للبياناتِ. أنظر الهامش.

16 إذا كانَ الطلبةُ الذينَ تزيدُ مُعدَّلاتُهُمُ التراكميةُ على 3.4 قدْ حصلوا على منحةٍ، فكمْ طالبًا في هذهِ العيِّنةِ لمْ يحصلْ على منحةٍ؟ ≈ 95

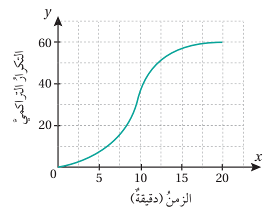
17 أحلُّ السؤالَ الواردَ في فقرةِ مسألةِ اليومِ. 11 موظفًا تقريبًا.

مهارات التفكير العليا

18 **تبريرٌ:** طلبَ مُعلِّمُ الرياضياتِ إلى طلبةِ الصفِّ العاشرِ الإجابةَ عنْ أسئلةِ اختبارٍ منْ نموذجيْنِ A، وَ B، ثمَّ رسمَ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لنتائجِ الطلبةِ كما في الشكلِ المجاورِ. أيُّ النموذجيْنِ كانَ أصعبَ: A أمْ B؟ أُبرِّرُ إجابتي.
أنظر الهامش.



19 **تحدٍّ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ للمدَّةِ الزمنيةِ التي استغرقَتْها 60 مكالمةً هاتفيةً أُجرِيَتْ في أحدِ الأيامِ معَ مُقدِّمِ برنامجٍ حواريٍّ في إحدى المحطاتِ الإذاعيةِ. أستعملُ هذا التمثيلَ لتقديرِ النسبةِ المئويةِ للمكالماتِ التي استغرقَتْ 10 دقائقَ على الأقلِّ. $\approx 33\%$



20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجمعُ بياناتي الخاصةَ بـ 30 مشاهدةً، ثمَّ أُنظِّمُها في جدولٍ تكراريٍّ، ثمَّ أجِدُ كلًّا منَ الوسيطِ، والمدى الربيعيِّ لها. تعتمد الإجابة على البيانات التي يجمعها الطلبة.

تعليمات المشروع:

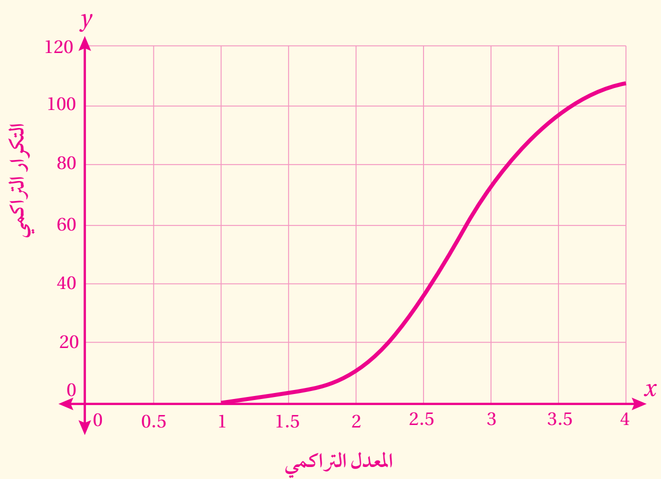
- أُتابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُنبِّههم إلى ضرورة استعمال برمجية جيوجبرا لرسم أشكال الانتشار في الخطوة 3.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة - في نهاية الدرس- تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أَطَّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

14)



15) الوسيط: $Q_2 \approx 2.8$

$IQR = Q_3 - Q_1$

$= 3.2 - 2.4$

$= 0.8$

18) (النموذج A)

الوسيط: $Q_2 \approx 68$

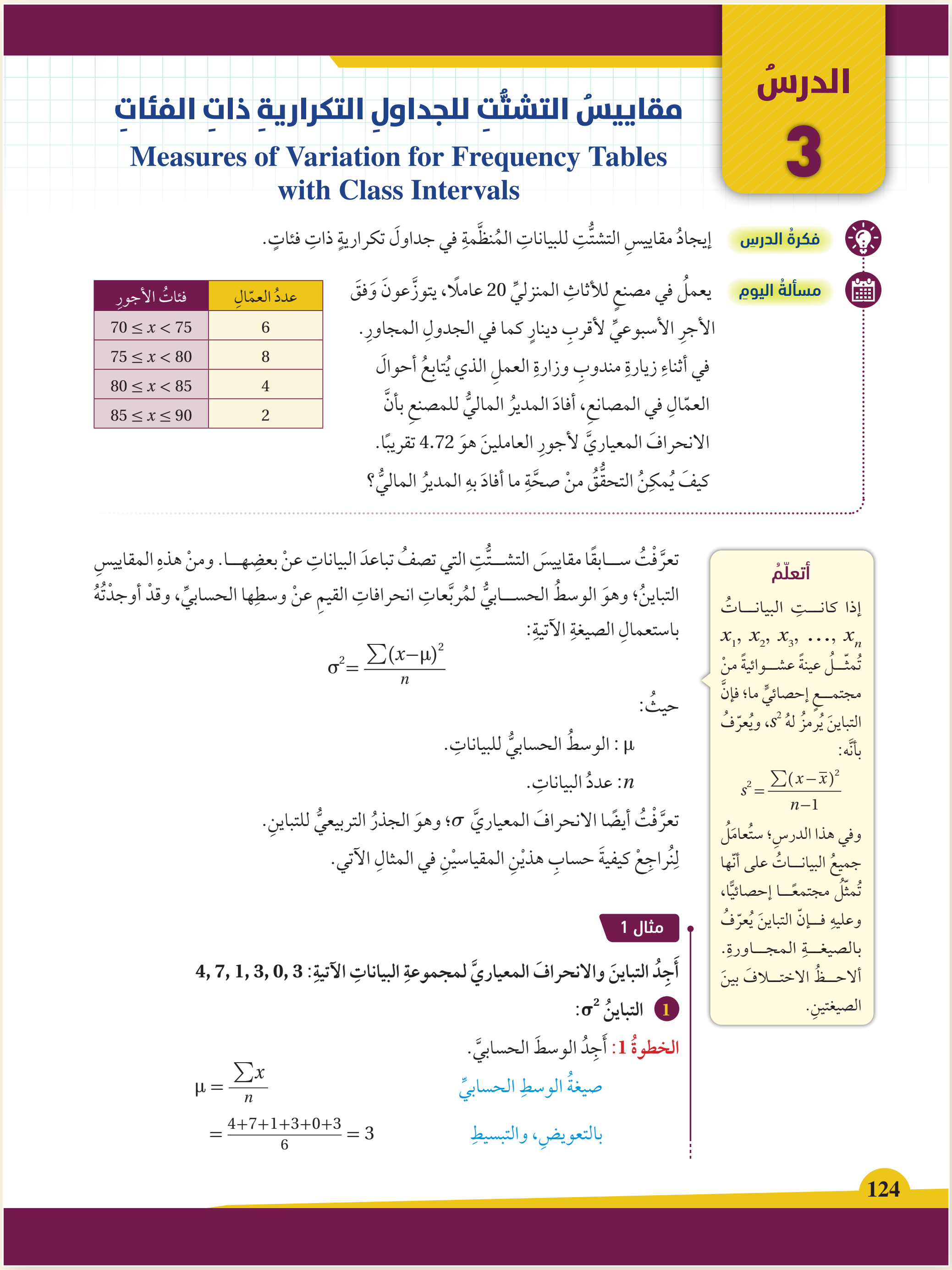
$IQR \approx 28$

(النموذج B)

الوسيط: $Q_2 \approx 57$

$IQR \approx 18$

بما أنَّ قيمتي الوسيط والمدى الربيعي للنموذج B أقل من قيمتي الوسيط والمدى الربيعي (على الترتيب) للنموذج A، فإنَّ النموذج B هو الأصعب.



الدرسُ 3

مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ

Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.

مسألةُ اليومِ يعملُ في مصنعٍ للأثاثِ المنزليِّ 20 عاملًا، يتوزَّعونَ وَفقَ الأجرِ الأسبوعيِّ لأقربِ دينارٍ كما في الجدولِ المجاورِ. في أثناءِ زيارةِ مندوبِ وزارةِ العملِ الذي يُتابعُ أحوالَ العمّالِ في المصانعِ، أفادَ المديرُ الماليُّ للمصنعِ بأنَّ الانحرافَ المعياريَّ لأجورِ العاملينَ هوَ 4.72 تقريبًا. كيفَ يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ ما أفادَ بهِ المديرُ الماليُّ؟

عددُ العمّالِ	فئاتُ الأجورِ
6	$70 \le x < 75$
8	$75 \le x < 80$
4	$80 \le x < 85$
2	$85 \le x \le 90$

تعرَّفْتُ سابقًا مقاييسَ التشتُّتِ التي تصفُ تباعدَ البياناتِ عنْ بعضِها. ومنْ هذهِ المقاييسِ التباينُ؛ وهوَ الوسطُ الحسابيُّ لمُربَّعاتِ انحرافاتِ القيمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ، وقدْ أوجدْتُهُ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2}{n}$$

حيثُ:

μ : الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ.

n: عددُ البياناتِ.

تعرَّفْتُ أيضًا الانحرافَ المعياريَّ σ؛ وهوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ.

لِنُراجِعْ كيفيةَ حسابِ هذيْنِ المقياسيْنِ في المثالِ الآتي.

أتعلّمُ

إذا كانتِ البياناتُ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تُمثّلُ عينةً عشوائيةً منْ مجتمعٍ إحصائيٍّ ما؛ فإنَّ التباينَ يُرمزُ لهُ s^2، ويُعرّفُ بأنَّه:

$$s^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}$$

وفي هذا الدرسِ؛ ستُعامَلُ جميعُ البياناتُ على أنّها تُمثّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، وعليهِ فإنّ التباينَ يُعرّفُ بالصيغةِ المجاورةِ. ألاحظُ الاختلافَ بينَ الصيغتينِ.

مثال 1

أَجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لمجموعةِ البياناتِ الآتيةِ: 4, 7, 1, 3, 0, 3

1 التباينُ σ^2:

الخطوةُ 1: أَجِدُ الوسطَ الحسابيَّ.

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{4+7+1+3+0+3}{6} = 3$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

124

الدرس 3

نتاجات الدرس

- إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- إيجاد التباين والانحـراف المعياري للبيانات المُمثَّلة بمُدرَّج تكراري.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجـاد المـدى، والتبايـن، والانحـراف المعياري للبيانات المفردة.
- إيجـاد المـدى، والتبايـن، والانحـراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة **(الفقرات)** المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما مقاييس النزعة المركزية التي سبق أنْ تعلَّمتموها؟ الوسط، والوسيط، والمنوال.
  - » لماذا سُمِّيت مقاييس النزعة المركزية بهذا الاسم؟ لأنَّها تصف القيمة المركزية للبيانات.
  - » ما مقاييس التشتُّت التي سبق أنْ تعلَّمتموها؟ المدى، والتباين، والانحراف المعياري.
  - » لماذا سُمِّيت مقاييس التشتُّت بهذا الاسم؟ لأنَّها تصف تباعد البيانات بعضها عن بعض، أو تصف تشتُّتها.

- أطلب إلى الطلبة إيجاد الوسط الحسابي لكلٍّ ممّا يأتي:

a) كتل خمسة أطفال بالكيلوغرام:

23, 27, 28, 21, 26   25 kg

b) أعمار 20 طالبًا مُوزَّعة كما يأتي:

العمر (سنة)	13	14	15	16
العدد	2	6	8	4

14.7 سنة.

أتذكَّرُ

مجموعُ انحرافاتِ المشاهداتِ أوِ القيمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا.

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسبُ فيهِ انحرافَ كلِّ قيمةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، فضلًا عنْ حسابِ مُربَّعاتِ الفروقِ.

x	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$
4	$4-3=1$	1
7	$7-3=4$	16
1	$1-3=-2$	4
3	$3-3=0$	0
0	$0-3=-3$	9
3	$3-3=0$	0
المجموعُ		30

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القيمَ التي توصَّلْتُ إليْها منَ الجدولِ بصيغةِ التباينِ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2}{n}$$ صيغةُ التباينِ

$$= \frac{30}{6} = 5$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

إذنْ، التباينُ هوَ 5

2 الانحرافُ المعياريُّ σ:

الانحرافُ المعياريُّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ: $\sigma = \sqrt{5}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لمجموعةِ البياناتِ الآتيةِ:

3, 5, 12, 10, 15, 14, 11

$\sigma^2 \approx 17.14$, $\sigma \approx 4.14$

بالرغمِ منْ أنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ لا تظهرُ فيها القيمُ الحقيقيةُ للبياناتِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُها لتقديرِ التباينِ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ؛ إذْ يُمكِنُ النظرُ إلى جميعِ قيمِ البياناتِ في فئةٍ مُعيَّنةٍ على أساسِ أنَّ كلًّا منْها ممثلةٌ بقيمةِ منتصفِ الفئةِ (مركزُ الفئةِ) x.

مفهومٌ أساسيٌّ — **الوسطُ الحسابيُّ والتباينُ للبياناتِ ذاتِ الفئاتِ**

- لتقديرِ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيثُ:

x: مركزُ الفئةِ. f: التكرارُ المقابلُ للفئةِ

- لتقديرِ التباينِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f}$$

- لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

معلومةٌ

في ما يخصُّ البياناتِ المُنظَّمةِ في الجداولِ ذاتِ الفئاتِ، يكونُ المدى مساويًا لقيمةِ الحدِّ الأعلى الفعليِّ للفئةِ العليا مطروحًا منْها قيمةُ الحدِّ الأدنى الفعليِّ للفئةِ الدنيا.

125

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند **(مسألة اليوم)**، ثم أسألهم:
  - » ما معدل الأجر الأسبوعي للعمّال الذين تُصنَّف أجورهم ضمن الفئة الأولى في الجدول؟ 72.5 دينارًا.
  - » ما المجموع التقريبي لأجور العمّال الأسبوعية في الفئتين الأولى والثانية؟ 1055 دينارًا.
  - » كيف يمكن تقدير الوسط الحسابي لأجور كل العاملين في المصنع؟ بجمع نواتج ضرب مراكز الفئات في عدد العمّال ضمن كل فئة، وقسمة المجموع على عدد العمّال جميعًا.
  - » كيف عرف المدير المالي قيمة الانحراف المعياري لأجور العاملين في المصنع؟ حسبها بطريقة ما.
- أعزز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أذكر الطلبة بما تعلموه سابقًا حول مقاييس التشتت، وبصيغة حساب التباين والانحراف المعياري للبيانات المفردة.
- أناقش مع الطلبة حل المثال 1 على اللوح.

إرشاد: المثال 1 هو مراجعة للتعلُّم السابق؛ لذا أستعمله لتذكير الطلبة بصيغة التباين المستعملة في حالة البيانات المفردة، وأحرص على تنفيذ خطوات الحل الثلاث كما وردت في الفرع 1 من المثال؛ نظرًا إلى تكرار استعمال هذه الخطوات عند تقدير التباين للبيانات المنظمة في جدول تكراري ذي فئات.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

مثال 2

- أكتب صيغة تقدير كل من الوسط الحسابي، والتباين للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات اللتين ورد ذكرهما في صندوق (**مفهوم أساسي**) داخل إطار في الزاوية اليمنى العليا من اللوح، ثم أشرحها.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2، وأحرص على تنظيم الإجابة وَفق خطوات متسلسلة وواضحة.
- أُوضّح للطلبة قيم المجاميع التي تضمّنها الجدول، وعُوِّضت في الصيغ الرياضية، بكتابتها بلون مختلف، أو تظليل خاناتها.
- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة حيثما لزم ذلك.

إرشاد: في المثال 2 أُوضِّح للطلبة أنَّ تقدير التباين يتطلَّب أولًا إيجاد مجموع التكرارات Σf، ثم تدوين المجموع في خانة أسفل العمود، ثم إضافة الأعمدة الخمسة المُبيَّنة في حل المثال.

مثال 2

حفظُ القرآنِ الكريمِ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لخمسينَ طالبًا يحفظونَ 5 أجزاءٍ منَ القرآنِ الكريمِ بحسبِ أعمارِهِمْ لأقربِ سنةٍ. أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

فئاتُ العمرِ	عددُ الحُفّاظِ
6 – 8	15
9 – 11	10
12 – 14	25

لتقديرِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

فئاتُ العمرِ	f	x	$x \times f$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 \times f$
6 – 8	15	7	105	–3.6	12.96	194.4
9 – 11	10	10	100	–0.6	0.36	3.6
12 – 14	25	13	325	2.4	5.76	144
المجموعُ	**50**		**530**			**342**

بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ $\mu = \dfrac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \dfrac{530}{50} = 10.6$

صيغةُ التباينِ $\sigma^2 = \dfrac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f}$

بالتعويضِ $= \dfrac{342}{50}$

بالتبسيطِ $= 6.84$

لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ:

$$\sigma \approx 2.62$$

أُفكِّرُ
لماذا لا يُشترَطُ في مجموعِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ أنْ يساويَ صفرًا، في حالةِ البياناتِ المُنظَّمةِ في الجدولِ ذي الفئاتِ؟

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لـ 200 سائقٍ وفقَ أعمارِهم، ممن تسبَّبوا في حوادثَ مروريةٍ خطيرةٍ في إحدى المدنِ على مدارِ أسبوعٍ. أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

فئاتُ العمرِ (سنةٌ)	عددُ الأشخاصِ
$18 \le x < 28$	100
$28 \le x < 38$	52
$38 \le x < 48$	26
$48 \le x < 58$	18
$58 \le x \le 68$	4

$\sigma^2 \approx 115.31$, $\sigma \approx 10.74$

توجدُ صيغةٌ أُخرى لتقديرِ التباينِ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f) - (\sum f)\,\mu^2}{\sum f}$$

مثال 3: من الحياة

معلومةٌ

في شهرِ تشرينَ الثاني منْ عامِ 1971م، تمكَّنَ راي توملينسون (مُخترِعُ البريدِ الإلكترونيِّ) منْ إرسالِ أولِ رسالةٍ إلكترونيةٍ.

بريدٌ إلكترونيٌّ: دوَّنَتْ سُمَيَّةُ عددَ رسائلِ البريدِ الإلكترونيِّ اليوميةِ التي وصلَتْها في 40 يومًا، ونظَّمَتْ بياناتِها في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ. أُقَدِّرُ التباينَ لهذهِ البياناتِ.

عددُ الرسائلِ	عددُ الأيامِ
10 – 14	6
15 – 19	5
20 – 24	12
25 – 29	9
30 – 34	8

لتقديرِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

عددُ الرسائلِ	f	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
10 – 14	6	12	144	72	864
15 – 19	5	17	289	85	1445
20 – 24	12	22	484	264	5808
25 – 29	9	27	729	243	6561
30 – 34	8	32	1024	256	8192
المجموعُ	**40**			**920**	**22870**

بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ
$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{920}{40} = 23$$

الصيغةُ الثانيةُ لحسابِ التباينِ
$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f) - (\sum f)\,\mu^2}{\sum f}$$

بالتعويضِ
$$= \frac{22870 - 21160}{40}$$

بالتبسيطِ
$$\approx 43$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ مسألةَ (حفظُ القرآنِ الكريمِ) التي وردَتْ في المثالِ 2 باستعمالِ الصيغةِ الثانيةِ لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، ثمَّ أُقارِنُ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ التي أتوصَّلُ إليها بالقيمةِ التي سبقَ حسابُها. أنظر الهامش.

يُمكِنُني أيضًا تقديرُ مقاييسِ التشتُّتِ للبياناتِ المُمثَّلةِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ، عنْ طريقِ إعادةِ تنظيمِها في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

فئات العمر	f	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
6–8	15	7	49	105	735
9–11	10	10	100	100	1000
12–14	25	13	169	325	4225
المجموعُ	**50**			**530**	**5960**

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{530}{50} = 10.6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f) - (\sum f)\,(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{5960 - (50)(10.6)^2}{50}$$

$$= 6.84$$

$\sigma = \sqrt{6.84} \approx 2.62$، وهي القيمة نفسها التي سبق حسابها باستعمال الصيغة الأولى.

مثال 3: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يمكن تقدير التباين باستعمال صيغة أخرى لا تعتمد على حساب فروق مراكز الفئات عن الوسط الحسابي، وأنَّ بعضهم قد يجد هذه الصيغة أسهل من الصيغة الأولى.
- أُخبِر الطلبة أنَّ قيمة التباين الناتجة هي نفسها في كلتا الصيغتين، وأنَّ اختلاف القيمة أحيانًا في الصيغتين سببه تقريب القيم في أثناء الحسابات.
- أكتب صيغتي تقدير التباين في أعلى اللوح، مُوضِّحًا الفروق بينهما.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3، مُبيِّنًا أنَّ الإجابة تتطلَّب إضافة أربعة أعمدة جديدة إلى الجدول الأصلي.
- أُوضِّح للطلبة مُسمَّيات الأعمدة الأربعة: $x, x^2, f \times x, f \times x^2$، مُحدِّدًا الأعمدة الثلاثة التي يتعيَّن إيجاد مجموع القيم في خاناتها، وكيفية التعويض في الصيغة الرياضية لتقدير التباين.
- أُوجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة حيثما لزم ذلك.

المفاهيم العابرة للمواد:

- عند حل المثال 3، أُدير حوارًا مع الطلبة – في دقيقتين – عن مُخترِع البريد الإلكتروني (راي توملينسون)، ثم أسألهم:
  - » كيف أسهم هذا الاختراع في خدمة البشرية؟
  - » أيُّكم فكَّر أنْ يكون مُخترِعًا أو مُبدِعًا؟
- أُخبِر الطلبة أنَّ الأفكار الإبداعية لا تقاس بحجمها. فمُخترِع قلم الرصاص، ومُخترِع الممحاة، ومُخترِع جهاز الحاسوب؛ جميعهم أصحاب أفكار إبداعية.
- أُحفِّز الطلبة على تقدير جهود العلماء وأصحاب الأفكار الإبداعية.

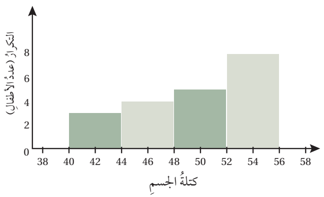
مثال 4: من الحياة

- أُخبِر الطلبة أنَّ المُدرَّج التكـراري هو طريقة لعرض البيانــات الكبيرة، وتلخيصهــا، وتمثيلها، وأنَّه يمكن التحويل بســهولة بين المُدرَّج التكــراري والجدول التكراري ذي الفئات.
- أُوضِّح للطلبة كيف يمكن إنشــاء جدول تكراري ذي فئات من المُدرَّج المعطى في المثال 4، ثم أسألهم:
  - » كيف نصف توزيع البيانــات المُمثَّلة بهذا المُدرَّج التكراري؟ توزيع ملتوٍ نحو اليسار.
  - » هل الوســيط Q_2 في هذا التوزيع أقرب إلى الربيع الأدنــى Q_1 أم إلى الربيع الأعلــى Q_3؟ أقرب إلى الربيع الأعلى Q_3.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح.

إرشاد: أُخبِر الطلبة أنَّ بعض الآلات الحاسبة العلمية تمتاز بخاصية إدخــال الفئات والتكرارات، وإجراء الحسابات اللازمة لتقدير التباين والانحراف المعيــاري. إذا توافر لــدى بعض الطلبــة مثل هذه الآلات، فأطلــب إليهم اســتعمالها لتقديــر التباين والانحراف المعياري، ثم أطلب إلى أحدهم شــرح تعليمــات الاســتعمال، وتطبيقهــا أمــام الزملاء / الزميلات في الصف.

مثال 4: من الحياة

كتلةُ الجسمِ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لمجموعةِ أطفالٍ منْ سنِّ 10 سنواتٍ وَفقَ كتلِ أجسامِهِمْ مُقرَّبةً إلى أقربِ كيلوغرامٍ.



أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

1 التباينُ: أُعيدُ تنظيمَ البياناتِ في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ على النحوِ الآتي:

الفئةُ (الكتلةُ x)	f	x	$x \times f$	$x - \mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 \times f$
$40 \le x < 44$	3	42	126	-7.6	57.76	173.28
$44 \le x < 48$	4	46	184	-3.6	12.96	51.84
$48 \le x < 52$	5	50	250	0.4	0.16	0.8
$52 \le x \le 56$	8	54	432	4.4	19.36	154.88
المجموعُ	**20**		**992**			**380.8**

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ
$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ
$$= \frac{992}{20} = 49.6$$

الصيغةُ الأولى لحسابِ التباينِ
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2 \times f}{\sum f}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ
$$= \frac{380.8}{20} = 19.04$$

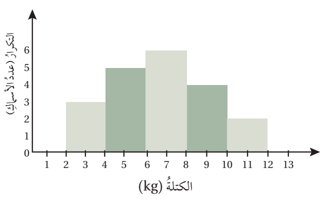
2 الانحرافُ المعياريُّ:

لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ: $\sigma \approx 4.36$

يحــوي خليــجُ العقبةِ ما يزيدُ علــى 500 نوعٍ منَ الأســماكِ منْ أصلِ 1400 نــوعٍ تعيــشُ في مياهِ البحرِ الأحمرِ.

أتحقق من فهمي

صيدٌ بحريٌّ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لكتلِ مجموعةٍ منَ الأســماكِ التي اصطادَها أحدُ الصيّادينَ في مدينةِ العقبةِ. أُقــدِّرُ التباينَ والانحــرافَ المعيــاريَّ لهذهِ البياناتِ. أنظر الهامش.



128

إجابة أتحقق من فهمي 4:

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
3	3	9	9	27
5	5	25	25	125
7	6	49	42	294
9	4	81	36	324
11	2	121	22	242
المجموع	**20**		**134**	**1012**

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{134}{20} = 6.7$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\,(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{1012 - (20)(6.7)^2}{20}$$

$$= 5.71$$

$$\sigma = \sqrt{5.71} \approx 2.39$$

أتدرب وأحل المسائل

طباعةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأربعينَ طالبًا في الصفِّ العاشرِ بحسبِ عددِ الكلماتِ التي يستطيعونَ طباعتَها في جهازِ الحاسوبِ في دقيقةٍ واحدةٍ:

عددُ الطلبةِ	الفئاتُ (عددُ الكلماتِ في الدقيقةِ)
8	26 – 30
12	31 – 35
10	36 – 40
7	41 – 45
3	46 – 50

1 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ. $\mu = 36.125$

2 أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.
$\sigma^2 \approx 35.86 , \sigma \approx 5.99$

شــقَّقٌ ســكنيةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لـ 23 شــقةً سكنيةً – بحسبِ مِساحاتِها – بنَتْها إحدى شركاتِ الإسكانِ عامَ 2020م:

عددُ الشققِ	الفئاتُ (المِساحةُ m^2)
2	$80 \leq x < 100$
5	$100 \leq x < 120$
7	$120 \leq x < 140$
6	$140 \leq x < 160$
3	$160 \leq x \leq 180$

3 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ. $\mu = 132.61$

4 أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ بطريقتيْنِ مختلفتيْنِ.
أنظر ملحق الإجابات.

كرةُ ســلَّةٍ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيــعَ اللاعبينَ في فريقيْنِ لكرةِ السلَّةِ وفقَ أطوالِهِمْ بالسنتيمترِ:

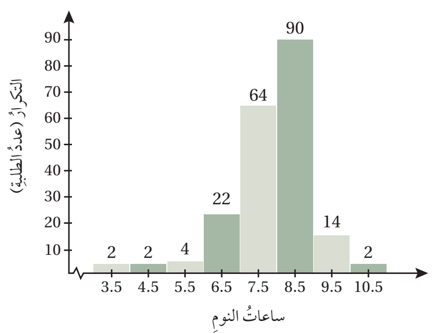
فريقُ الأُسودِ	فريقُ النسورِ	الطولُ (x)
2	3	$170 \leq x < 178$
3	1	$179 \leq x < 187$
3	4	$188 \leq x < 196$
2	2	$197 \leq x \leq 205$

أنظر ملحق الإجابات.

5 أُقدِّرُ التباينَ لأطوالِ اللاعبينَ في كلِّ فريقٍ.

6 أيُّ الفريقيْنِ أكثرُ تجانسًــا منْ حيثُ أطوالُ اللاعبينَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أطوال لاعبي فريق الأسود أكثر تجانسًا؛ لأنَّ تباينها أقل من تباين أطوال فريق النسور.

ســاعاتُ النومِ: يُبيِّنُ التمثيلُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ توزيعًا لـ 200 طالبٍ بحسبِ ساعاتِ نومِهِمْ:



7 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لهذهِ البياناتِ. $\mu = 7.9$

8 أُقدِّرُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.
$\sigma^2 \approx 1.1 , \sigma \approx 1.05$

9 أَصِفُ توزيعَ هذهِ البياناتِ.

إجابة ممكنة: أكثر من نصف الطلبة ينامون أكثر من 7 ساعات باليوم.

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبــة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المســائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (6 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخــل الغرفة الصفية؛ فهذه المســائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشــرًا بأمثلة الدرس، وهي تُســتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفســها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحــد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المســألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اســتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفزًّا الطلبة على طرح أيِّ تســاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (14 – 12).
- أرصــد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (9 – 7) كتاب التمارين: 1, 2
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (12 – 10) كتاب التمارين: 3, 4
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 11) كتاب التمارين: (5 – 3)

5 الإثراء

- تعتمـد كتب الإحصـاء كتابة صيغتي تقديـر التباين بتحديد مُؤشِّر (index) الذي يُرمَز إليه بالحرف (i)، ويُكتَب أسفل رمز المجموع $\sum$، ويتخذ هذا المُؤشِّر القيـم: n ,… ,3 ,2 ,1، حيث n عـدد صحيح غير سالب.
- أُوجِّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن أهمية هذا المُؤشِّر، ومجالات استعماله.
- أُخبِر الطلبة أنَّ كتب الإحصاء تحتوي أيضًا على صيغ أُخرى تُستعمَل لتقدير التباين والانحراف المعياري، ثم أطلب إليهـم البحث عن هذه الصيغ، وكتابة تقرير عنها يتضمَّن أمثلة على تطبيق الصيغ الجديدة.
- أُذكِّـر الطلبـة بضوابط التقريـر العلمـي ومعاييره، التي أهمها: وجـود صفحة لعنوان التقرير وأسـماء المُعِدّين، وفهرس للعناويـن الفرعية، ومراعاة الدقة العلمية، وسلامة اللغة، والإيجاز، والوضوح، وتوثيق المصادر.
- أُخبِـر الطلبة أنَّه يمكنهم عـرض ملخص للتقرير في أثناء الحصة المُخصَّصة لعرض مشروع الوحدة.

تعليمات المشروع:

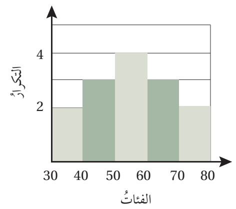
- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوتين (4) و(5) من خطوات المشروع.
- أُتابِـع أفـراد المجموعات فـي أثناء تنفيذ مشـروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

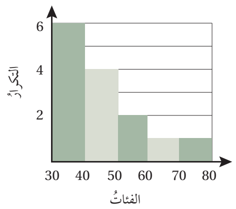
6 الختام

- أطلب إلى الطلبـة -في نهاية الـدرس- تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلـب إلى كل طالـب اختيار موضـوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سـؤال عنها فـي ورقة تحمل اسـمه، أو اختيار موضوع أو فكـرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سـؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أَطَّلِـع علـى الأوراق، ثـم أُخطِّـط لمعالجـة جوانـب الضعـف التـي رصدتهـا فـي أوراق الطلبـة.

10 أُقارِنُ بينَ قيمتَيِ التباينِ للبياناتِ المُمثَّلَةِ في الشكلَيْنِ الآتيينِ، مُفسِّرًا سببَ الاختلافِ بينَهُما.

أنظر الهامش.





11 أحل السؤال الوارد في فقرة مسألة اليوم. أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

12 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أُنظِّمُ البياناتِ الآتيةَ في جدولٍ تكراريٍّ (أختارُ طولًا مناسبًا للفئاتِ)، ثمَّ أُقدِّرُ قيمتَيِ الوسطِ الحسابيِّ والتباينِ، مُستعمِلًا آلةً حاسبةً لإيجادِ القيمةِ الدقيقةِ لكلٍّ منْهُما، ثمَّ أُقارِنُ قيمَهُما الدقيقةَ بالقيمِ التقديريةِ.

15	14	14	14	13	12	11	11	11	11
10	11	13	16	10	9	15	12	9	10
7	14	13	14	8	9	8	11	13	13
15	12	9	10	9	9	16	16	12	10
11	11	12	15	6	10	10	10	11	9

القيم الدقيقة هي:

$\mu = 11.48$

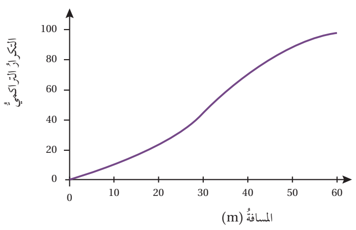
التباين هو 5.49 تقريبًا.

أنظر ملحق الإجابات.

13 **تبريـرٌ:** في السـؤالِ (12)، ما تأثيرُ أطـوالِ فتراتِ الجـدولِ التكراريِّ الذي أنشـأْتُهُ في القيمةِ التقديريـةِ للتباينِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

14 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ تقديرُ التباينِ للبياناتِ المُمثَّلةِ في المنحنى التكراريِّ التراكميِّ المجاورِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أنظر ملحق الإجابات.



إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

10) الشـكل الأيمـن: $\sigma^2 \approx 157.14$، والشـكل الأيسـر: $\sigma^2 \approx 150.8$، والاختلاف بينهما مردُّه إلى اختلاف شـكل توزيع البيانات؛ ففي الشكل الأيمن تبدو البيانات مُوزَّعة طبيعيًّا، أمّا في الشكل الأيسر فتوزيع البيانات ملتوٍ نحو اليمين.

الدرس 4

الدرس 4

احتمالاتُ الحوادثِ المتنافيةِ
Probability of Mutually Exclusive Events

فكرةُ الدرس حسابُ احتمالاتِ الحوادثِ المتنافيةِ، وغيرِ المتنافيةِ، ومُتمِّمةِ الحادثِ.

المصطلحات الحادثُ البسيطُ، الحادثُ المُركَّبُ، الحادثانِ المتنافيانِ.

مسألةُ اليوم استوردَ تاجرٌ شحنةً منَ السكّرِ في باخرتيْنِ. إذا كانَ احتمالُ وصولِ الباخرةِ الأولى في موعدِها 60%، واحتمالُ وصولِ الباخرةِ الثانيةِ في موعدِها 50%، واحتمالُ وصولِهما معًا 30%، فما احتمالُ وصولِ إحدى الباخرتيْنِ على الأقلِّ في موعدِها؟

يُسمّى الحادثُ الواحدُ (مثلُ وصولِ الباخرةِ الأولى في موعدِها) **الحادثَ البسيطَ** (simple event)، أمّا **الحادثُ المُركَّبُ** (compound event) فيتكوَّنُ منْ حادثيْنِ بسيطيْنِ أوْ أكثرَ، مثلُ وصولِ إحدى الباخرتيْنِ على الأقلِّ في موعدِها.

إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّهُما يُسمَّيانِ **حادثيْنِ متنافييْنِ** (mutually exclusive)؛ إذا تعذَّرَ وقوعُهُما معًا في الوقتِ نفسِهِ. ويُقصَدُ بالمتنافييْنِ عدمُ وجودِ عناصرَ مشتركةٍ بينَهُما.

أتعلَّم
يُطلَقُ على الحادثيْنِ المتنافييْنِ أيضًا اسمُ الحادثيْنِ المنفصليْنِ.

مثال 1

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافييْنِ أمْ لا في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

1. التجربةُ هيَ لعبةُ كرةِ القدمِ. الحادثُ الأولُ هوَ الفوزُ في المباراةِ، والحادثُ الثاني هوَ الخسارةُ.

   الحادثانِ متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا يُمكِنُ الفوزُ والخسارةُ في الوقتِ نفسِهِ.

2. التجربةُ هيَ إلقاءُ حجرِ نردٍ منتظمٍ. الحادثانِ هما الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ، أوِ الحصولُ على عددٍ أقلَّ منْ 3

   الحادثانِ غيرُ متنافييْنِ؛ نظرًا إلى وجودِ عنصرٍ مشتركٍ بينَهُما، هوَ العددُ 2، وهذا العددُ زوجيٌّ، وأقلُّ منْ 3 في الوقتِ نفسِهِ.

أتذكَّر
الحادثانِ $(A \cup B)$ وَ $(A \cap B)$ كلاهُما مُركَّبٌ؛ لأنَّهُ يتكوَّنُ منْ حادثيْنِ بسيطيْنِ.

131

نتاجات الدرس

- تحديد إذا كان الحادثان متنافيين أو غير متنافيين.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية وحوادث غير متنافية ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- تمثيل التجارب العشوائية بأشكال ڤن، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات.
- إيجاد احتمال الحادث المتمم.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- كتابة عناصر الحوادث البسيطة وعناصر الفضاء العيني في تجربة عشوائية.
- إيجاد تقاطع مجموعتين، واتحادهما، ومتممة مجموعة باستعمال أشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث بسيطة.
- إيجاد احتمالات حوادث مركبة باستعمال مخطط الشجرة.
- إيجاد احتمالات بسيطة ومركبة باستعمال أشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح المثال الآتي لتوضيح مجموعة من المفاهيم المُتعلِّقة بالاحتمال:

» في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرَّة واحدة، إذا كان A يعني ظهور عدد أقل من 3، وB يعني ظهور عدد أكبر من 5، وC يعني ظهور عدد أكبر من 6، وD يعني ظهور عدد أقل من 7، فماذا تُسمّى هذه التجربة؟ تجربة عشوائية.

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم فضاء العيِّنة، وبرمزه Ω (أوميجا)، وتعريفه: مجموعة النواتج الممكنة جميعها لتجربة عشوائية. أُذكِّرهم أيضًا بمفهوم الحادث البسيط، وبعناصره التي تنتمي إلى فئة واحدة، مثل: فئة العدد الأولي، وفئة العدد الفردي، **وليس بالضرورة الحادث الذي فيه عنصر واحد.**

- أسأل الطلبة:

» ماذا تعني Ω في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرَّة واحدة؟ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

» ماذا يُسمّى كلٌّ من A، وB، وC، وD؟ يُسمّى حادثًا بسيطًا.

» ما عناصر كلٍّ من A، وB، وC، وD؟ $A = \{1, 2\}, B = \{6\}, C = \{\ \} = \varnothing, D = \Omega$

» ما عناصر كلٍّ من $A \cap B$، و$A \cup B$، و $\overline{A}$؟ $A \cup B = \{1, 2, 6\}, A \cap B = \varnothing, \overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الاحتمال، وكيفية إيجاد احتمال كلٍّ من الحوادث المعطاة، مُبيِّنًا أنَّ الحادث الذي احتماله 0 يُسمّى مستحيلًا، وأنَّ الحادث الذي احتماله 1 يُسمّى أكيدًا، وأنَّ احتمال أيِّ حادث يجب أنْ يقع ضمن الفترة [0, 1].

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» أُحوِّل احتمال حادث وصول الباخرة الأولى في موعدها إلى كسر. $\frac{3}{5} = 0.6$

» ماذا يُسمّى حادث وصول الباخرة الأولى في موعدها؟ يُسمّى حادثًا بسيطًا.

» ماذا يُسمّى حادث وصول الباخرتين معًا؟ يُسمّى حادثًا مُركَّبًا؛ لأنَّه يتكوَّن من حادثين بسيطين.

- أعزز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الحادثين المتنافيين، مُبيِّنًا أنَّهما يُسمَّيان أيضًا الحادثين المنفصلين.

- أَرجِع إلى المثال الذي قدَّمته في بند (التهيئة)، ثم أسأل الطلبة:

» ماذا يُسمّى حادث ظهور عدد أقل من 3 وأكبر من 5؟ يُسمّى حادثًا مُركَّبًا.

» كيف يُكتَب هذا الحادث بالرموز؟ A and B، أو $A \cap B$.

- أُخبِر الطلبة أنَّه يمكن تسمية هذا الحادث برمز جديد مثل E، علمًا بأنَّ $E = A \cap B$.

- أُخبِر الطلبة أنَّ $A \cap B = \varnothing$؛ لأنَّه لا توجد عناصر مشتركة بين A وB، وأنَّه يتعذَّر وقوع الحادثين معًا؛ لذا فهما حادثان متنافيان: $P(E) = P(A \cap B) = 0$.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة النصوص في فرعي المثال 1، ثم أُبيِّن لهم كيف يمكن تمييز الحادثين المتنافيين من الحادثين غير المتنافيين.

- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

- عند توضيح الفرع 1 من المثال 1، أذكر مثالًا حياتيًّا على نتائج بعض المباريات في كرة القدم من الدوري المحلي أو غيره.

- أستعين بحجر نرد حقيقي عند توضيح الفرع الثاني من المثال.

إرشاد: أُخبِر الطلبة أنَّ حجر النرد المنتظم مكعب يظهر على كل أوجُّه من وجوهه رقم (أو نقاط تدل على أحد الأرقام من 1 إلى 6)، ويكون مجموع كل رقمين على وجهين متقابلين 7؛ فالوجه الذي يحمل الرقم 2 مثلًا يقابل الوجه الذي يحمل الرقم 5.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حـلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة دلالة أداة الربط (و: and)، و(أو: or)، ورمز كلٍّ منهما: ∩ ، ∪ (على الترتيب).
- أُبيِّن للطلبة أنَّ ورود أدوات الربط في نص السـؤال له دلالات مُحدَّدة. فمثلًا، ورود تركيب (على الأقل) في السؤال يدل على ∪، أو على أداة الربط (أو: or).
- أُوضِّح للطلبــة التعميم الوارد فــي صندوق (**مفهوم أساســي**) والخاص باحتمال الحادثيــن المتنافيين، وأحرص علــى تقديمه بالكلمــات والرموز؛ للإفادة من ذلك في عرض تمثيــلات رياضية متكافئة للفكرة الواحدة.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافيَيْنِ أمْ لا في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي: أنظر الهامش.

a) التجربةُ هيَ سـحبُ بطاقةٍ واحدةٍ عشـوائيًّا منْ سـلَّةٍ فيها 5 بطاقاتٍ حمراءَ، وَ 3 بطاقاتٍ خضراءَ. الحادثُ الأولُ سحبُ بطاقةٍ حمراءَ، والحادثُ الثاني سحبُ بطاقةٍ خضراءَ.

b) التجربةُ هيَ إلقاءُ حجرِ نردٍ منتظـمٍ. الحادثُ الأوّلُ هوَ الحصولُ على عددٍ فرديٍّ والثاني هوَ الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ تقاطعَ حادثيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ يعني وقوعَهُما معًا، ويُستدَلُّ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (وَ: and) أوْ الرمزِ (∩)، وأنَّ اتحادَ حادثيْنِ يعني وقوعَ أحدِهما على الأقلِّ، ويُستدَلُّ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (أوْ: or) أوْ الرمزِ (∪). فإذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ متنافييْنِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهما معًا $P(A∩B)$ يساوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهما على الأقلِّ $P(A∪B)$ يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهما.

مفهومٌ أساسيٌّ — **احتمالُ الحادثينِ المتنافيَيْنِ**

بالكلماتِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْـنِ متنافييْـنِ في تجربةٍ عشـوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهما معًا يسـاوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدِهما على الأقلِّ يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهما.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ متنافييْنِ، فإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A∩B) = 0$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A∪B) = P(A) + P(B)$$

أتعلَّمُ

الحرفُ (P) هوَ اختصارٌ لكلمةِ (Probability) التي تعني الاحتمالَ.

مثال 2

إذا كانَ الحادثـانِ Z و Y متنافيَيْنِ في تجربةٍ عشـوائيّةٍ، وكانَ $P(Y) = 0.3$، و $P(Z) = 0.5$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $P(Y∪Z)$

$P(Y∪Z) = P(Y) + P(Z)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثيْنِ متنافيين

$P(Y∪Z) = 0.3 + 0.5$ بالتعويضِ

$= 0.8$ بالتبسيطِ

132

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

a) الحادثان متنافيان؛ لأنه لا يمكن سحب بطاقة لونها أحمر وأخضر في المرَّة الواحدة.

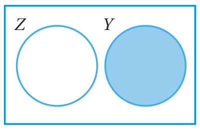
b) الحادثان متنافيان؛ لأن الأعداد الفردية على حجر النرد هي: 1، 3، 5، والأعداد الزوجية عليه هي: 2، 4، 6، ولا توجد عناصر مشـتركة بين الحادثين.

- أكتب على اللوح السؤال الآتي:
  - » في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرَّة واحدة، إذا كان A حادث ظهور العدد 5، فما احتمال عدم ظهور العدد 5؟
  - » أُمثِّل التجربة بشكل فن، مُبيِّنًا للطلبة أنَّ مجموعة العناصر التي تقع خارج A تنتمي إلى مجموعة تُسمّى متمم الحادث A، ويُرمَز إليها بالرمز $\bar{A}$، وأنَّ المطلوب في السؤال أعلاه هو $P(\bar{A})$، وأنَّه باستعمال شكل فن فإنَّ:

$$P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

- أجد $1-P(A)$، ثم أسأل الطلبة:
  - » ماذا تلاحظون؟ تساوي ناتجي $P(\bar{A})$ و $1-P(A)$
- أناقش مع الطلبة حل المثال 2 على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير الحل.

2 $P(Y-Z)$



بما أنّ الحادثينِ Z و Y متنافيانِ، فإنَّ $Y-Z$ يعني وقوعَ الحادثِ Y فقطْ؛ لأنّهما لا يقعانِ معًا، كما يظهرُ في شكلِ فن المجاور. إذنْ:

$$P(Y-Z) = P(Y) = 0.3$$

3 $P(\overline{Y \cup Z})$

$P(\overline{Y \cup Z}) = 1 - P(Y \cup Z)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.8$ بالتعويضِ

$= 0.2$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ الحادثانِ A و B متنافيينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = \frac{1}{5}$، و $P(B) = \frac{1}{4}$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي: أنظر الهامش.

a) $P(A \cap B)$ **b)** $P(B \cap \bar{A})$ **c)** $P(\overline{A \cup B})$

أحتاجُ في بعضِ المسائلِ إلى تحديدِ ما إذا كانتْ حوادثُ معيّنةٌ متنافيةٌ أمْ لا، وذلكَ لإيجادِ احتمالاتٍ مرتبطةٍ بها.

مثال 3

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً، أَجِدُ ما يأتي:

1 **احتمالُ ظهورِ العددِ 1، وظهورِ عددٍ زوجيٍّ.**

أفترضُ أنَّ (A) هوَ حادثُ ظهورِ العددِ 1، وَ(B) هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ. إذنْ، $A = \{1\}, B = \{2, 4, 6\}$

بما أنَّ $\{1\} \cap \{2, 4, 6\} = \phi$، فإنَّ (A) وَ(B) حادثانِ متنافيانِ. إذنْ، احتمالُ وقوعِهما معًا هوَ صفرٌ. وبالرموزِ: $P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$

2 **احتمالُ ظهورِ العددِ 1، أوْ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ.**

بما أنَّ (A) وَ(B) حادثانِ متنافيانِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ (A) أوْ (B) (وقوعُ أحدِهما على الأقلِّ) يساوي مجموعَ احتمالَيْ وقوعِهما. وبالرموزِ:

$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثيْنِ متنافييْنِ

$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$ بإيجادِ احتمالاتِ كلٍّ منَ الحادثيْنِ، والتعويضِ

$= \frac{2}{3}$ بالجمعِ، ثمَّ التبسيطِ

أتذكَّرُ

يعني الحادثُ $Y-Z$ وقوعَ الحادثِ Y فقطْ، وعدمَ وقوعِ الحادثِ Z، ويمكنُ أيضًا التعبيرُ عنْهُ بالرمزِ $Y \cap \bar{Z}$

أتذكَّرُ

احتمالُ وقوعِ متممةِ الحادثِ A هو 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

أتذكَّرُ

لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، احتمالُ وقوعِ الحادثِ البسيطِ E يساوي عددَ عناصرِ هذا الحادثِ $n(E)$ مقسومًا على عددِ عناصرِ فضاءِ العيِّنةِ $n(\Omega)$؛ أيْ:
$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$

أتذكَّرُ

لأيِّ حادثٍ (A) في فضاءِ العيِّنةِ لتجربةٍ عشوائيةٍ ما Ω، فإنَّ:
$0 \leq P(A) \leq 1$

مثال 3

- أستعين بحجر نرد حقيقي عند مناقشة الطلبة في حل فرعي المثال 3.
- أكتب الإجابة من اليسار إلى اليمين، وبالرموز الإنجليزية، ثم أقرأها، مُحفِّزًا الطلبة على عمل ذلك بصورة صحيحة.
- أُحفِّز الطلبة على وضع خط - بقلم ألوان- تحت النص الذي يدل على الحادث المراد إيجاد احتماله؛ لأنَّه يساعدهم على التعبير عن الاحتمال المطلوب بالرموز، وإيجاد الاحتمال بصورة صحيحة.
- أُوجِّه الطلبة إلى الحرص دائمًا على كتابة الناتج النهائي في أبسط صورة.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 2):

a) $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

b) $P(B \cap \bar{A}) = P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{20}$

أتحقق من فهمي

في تجربةِ اختيارِ عددٍ عشوائيًّا منْ بينِ الأعدادِ: 8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1، أجدُ:

a) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، ويقبلُ القسمةَ على 4 أنظر الهامش.

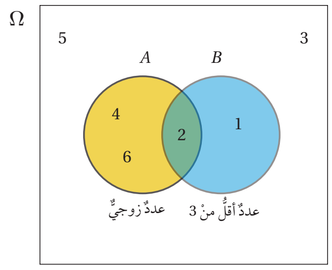
b) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، أوْ عددٍ يقبلُ القسمةَ على 4

رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الحرفُ اليونانيُّ Ω للدلالةِ على فضاءِ العيِّنةِ للتجربةِ العشوائيةِ، ويُقرَأُ: أوميجا.

لاحظْتُ في المثالِ 1 أنَّ حادثَيِ الحصولِ على عددٍ زوجيٍّ أوْ عددٍ أقلَّ منْ 3 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ هما غيرُ متنافيَيْنِ؛ نظرًا إلى وجودِ عنصرٍ مشتركٍ بينَهُما، هوَ العددُ 2، وهذا العددُ زوجيٌّ، وأقلُّ منْ 3، فكيفَ أجدُ احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ؟

إذا كانَ (A) حادثَ الحصولِ على عددٍ زوجيٍّ، وَ(B) حادثَ الحصولِ على عددٍ أقلَّ منْ 3، في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً، فإنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُ هذيْنِ الحادثيْنِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ كما يأتي:



عندَ حسابِ احتمالِ كلِّ حادثٍ على حِدَةٍ، أجِدُ أنَّ:

$$P(A) = \frac{3}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

عندَ إيجادِ احتمالِ وقوعِ أحدِ الحادثيْنِ على الأقلِّ، وجمعِ هذيْنِ الاحتماليْنِ، فإنَّ احتمالَ العددِ 2 سيتكرَّرُ؛ لأنَّهُ موجودٌ في الحادثيْنِ (موجودٌ في منطقةِ التقاطعِ بينَ الحادثيْنِ)، ولذلكَ يجبُ طرحُهُ منْ مجموعِ الاحتماليْنِ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

134

تنويع التعليم:

أحرص دائمًا على تقديم المفاهيم باستعمال تمثيلات رياضية مُتعدِّدة؛ ليتمكَّن معظم الطلبة من فهمها؛ ذلك أنَّهم يتفاوتون في طرائق تعلُّمهم؛ فمنهم البصري، ومنهم اللفظي، ومنهم غير ذلك.

إرشاد: أطلب إلى الطلبة تمثيل حوادث التجارب العشوائية بشكل فِن؛ لأنَّ ذلك يساعدهم على تحديد المطلوب، وإيجاد الاحتمال بصورة صحيحة .

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

ليكن A حادث اختيار عدد أولي، و B حادث اختيار عدد يقسم على 4. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{4, 8\}, A \cap B = \varnothing$$

أيْ إنَّ الحادثين متنافيان.

a) $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

مثال 4

- قبل البدء بحل السؤال في المثال 4، أرجِع إلى الفرع 2 من المثال 1، وأُوضِّح للطلبة - باستعمال أشكال ڤن - كيف يظهر الحادثان، وسبب عَدِّهما حادثين غير متنافيين.
- أُوضِّح للطلبة التعميم الوارد في صندوق (**مفهوم أساسي**) والخاص باحتمال الحادثين غير المتنافيين، وأحرص على تقديمه بالكلمات والرموز.
- أناقش مع الطلبة حل المثال 4 على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير الحل.

إرشادات:

- أستعمل صندوقًا يحوي بطاقات مرقمة من 1 إلى 15 لتمثيل التجربة في المثال 4 بصورة حسية وواقعية.
- في المثال 4، أكتب عناصر كلٍّ من الحادثين M و F في صورة مجموعات قبل تمثيلهما بشكل ڤن، مُبيِّنًا أنهما غير متنافيين؛ نظرًا إلى وجود عناصر مشتركة بينهما ضمن منطقة التقاطع.

احتمالُ الحادثين غيرِ المتنافيين

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ غيرَ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ يساوي مجموعَ احتمالَيْهِما مطروحًا منْهُ احتمالَ وقوعِ (A) وَ(B) معًا.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ غيرَ متنافييْنِ، فإنَّ:

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 4

يحتوي صندوقٌ على 15 بطاقةً مُرقَّمةً منْ 1 إلى 15، إذا سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، فأجِدُ احتمالَ الحادثيْنِ الآتييْنِ:

1 **أنْ يكونَ العددُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، ومنْ عواملِ العددِ 12**

أفترضُ أنَّ (M) هوَ حادثُ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، وَ(F) هوَ حادثُ اختيارِ عددٍ منْ عواملِ العددِ 12.

إذنْ $M = \{3, 6, 9, 12, 15\}, F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

أداةُ الوصلِ (وَ) في السؤالِ تشيرُ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ تقاطعُ الحادثيْنِ (M) وَ(F).

إذن $M \cap F = \{3, 6, 12\}$

$$P(M \text{ and } F) = P(M \cap F)$$
$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2 **أنْ يكونَ العددُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، أوْ منْ عواملِ العددِ 12**

أداةُ الوصلِ (أوْ) في السؤالِ تشيرُ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ اتحادُ الحادثيْنِ غيرِ المتنافييْنِ (M) وَ(F) اللذيْنِ سُمِّيا في الفرعِ السابقِ. وهذا يعني احتمالَ وقوعِ أحدِهِما على الأقلِّ (احتمالُ اتحادِهِما):

$$P(M \text{ or } F) = P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$
$$= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

أتحقق من فهمي

في تجربةِ اختيارِ عددٍ عشوائيًّا منَ المجموعةِ: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$، أَجِدُ:

a) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، ومنْ عواملِ العددِ 10 أنظر ملحق الإجابات.

b) احتمالَ اختيارِ عددٍ أوليٍّ، أوْ عددٍ منْ عواملِ العددِ 10

مثال 5

إذا كانَ A و B حادثيــنِ فــي تجربــةٍ عشــوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.65, P(B) = 0.75, P(A\cup B) = 0.85$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1 $P(A\cap B)$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثينِ غيرِ متنافيين

$0.85 = 0.65 + 0.75 - P(A\cap B)$ بالتعويضِ

$0.85 = 1.4 - P(A\cap B)$ بالتبسيطِ

$P(A\cap B) = 0.55$ بحلِّ المعادلةِ

2 $P(\bar{A})$

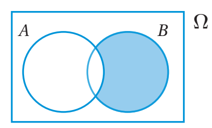
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.65$ بالتعويضِ

$= 0.35$ بالتبسيطِ

3 $P(\bar{A}\cap B)$

إنَّ $\bar{A}\cap B$ يعنــي وقوعَ الحــادثِ B فقط، وعدمَ وقــوعِ الحادثِ A كما يظهرُ في شــكلِ فِن المجاورِ، ولإيجادِ احتمالِهِ أطرحُ احتمالَ تقاطعِ الحادثينِ A و B منِ احتمالِ الحادثِ B، إذنْ:



$P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$ احتمالُ وقوعِ الحادثِ B فقط

$= 0.75 - 0.55$ بالتعويضِ

$= 0.2$ بالتبسيطِ

4 $P(\bar{A}\cup B)$

$P(\bar{A}\cup B) = P(\bar{A})+P(B)- P(\bar{A}\cap B)$ صيغةُ احتمالِ اتّحادِ حادثينِ غيرِ متنافيين

$= 0.35 + 0.75 - 0.2$ بالتعويضِ

$= 0.9$ بالتبسيطِ

136

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المســائل**)، ثم أطلب إليهم حل المســائل (1 – 11) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المســائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشــرًا بأمثلة الدرس، وهي تُســتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجــه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مســألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّــنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المســألة؛ لمناقشــة اســتراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المســألة على اللوح، مُحفزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مثال 5

- أُناقِــش الطلبــة فــي العلاقة بيــن العمليــات على المجموعات (التقاطع، الاتحاد، المتممة) باستعمال أشكال فِن.
- أطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» إذا كانت $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، وكانت $A = \{1, 3, 4, 6\}$، وكانت $B = \{2, 3, 4,\}$، فأكتب عناصر كلٍّ ممّا يأتي:

$\bar{A}$، و $\bar{B}$، و $\bar{A}\cap\bar{B}$، و $\bar{A}\cup\bar{B}$، و $A\cup B$، $A\cap B$، و $\overline{A\cup B}$ و $\overline{A\cap B}$. ماذا ألاحِظ من ذلك؟

$\bar{A} = \{2, 5\}, \bar{B} = \{1, 5, 6\},$

$\bar{A}\cap\bar{B} = \{5\}, \bar{A}\cup\bar{B} = \{1, 2, 5, 6\}$

$A\cup B = \{1,2,3,4,6\}, \overline{A\cup B} = \{5\}$

$A\cap B = \{3, 4\}, \overline{A\cap B} = \{1, 2, 5, 6\}$

ألاحظ أنَّ $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$، وأنَّ $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$.

- أُشــارِك الطلبة في حل الســؤال، مُوظِّفًا العلاقة بين احتمال الحــادث واحتمال متممته، ومســتفيدًا من أشكال فِن.

! أخطاء شائعة:

قــد يُخطِئ بعــض الطلبة عند تحديــد عناصر متمم الحادث A مثلًا، فيكتبــون العناصر خارج الحوادث المُمثَّلة بشــكل فِن، ويُهمِلون العناصر المكتوبة في الحادث B خارج منطقة التقاطــع (إنْ وُجِدت)؛ لذا أطلب إليهم تظليل المنطقة خارج الحادث A وداخل فضاء العيِّنة Ω؛ لمساعدتهم على تحديد عناصر متمم الحادث A بسهولة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى المتوسط أو دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، فأُوزِّع طلبة الصف إلى مجموعات ثلاثية، تضم كلٌّ منها طالبًا / طالبة من ذوي المستوى فوق المتوسط، وطالبين / طالبتين ممَّن واجهوا صعوبة في الحل، ثم أُقدِّم تغذية راجعة لهم.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (26 – 31).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

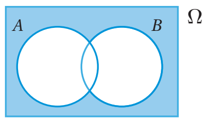
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 25 ,(12 – 17) كتاب التمارين: (1 – 5)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (18 – 24) كتاب التمارين: (5 – 9)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (25 – 31) كتاب التمارين: (8 – 12)

5 $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

إنَّ $\overline{A}\cap\overline{B}$ يعني متممة اتّحادِ الحادثينِ A و B كما يظهرُ في شكلِ فِن المجاورِ، إذنْ:



$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B})$ احتمالُ تقاطعِ متممةِ حادثينِ

$= 1 - P(A\cup B)$ احتمالُ المتممةِ

$= 1 - 0.85$ بالتعويضِ

$= 0.15$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3$، $P(A\cap B) = 0.2$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي: أنظر ملحق الإجابات.

a) $P(A\cup B)$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(A-B)$

d) $P(A\cup\overline{B})$ e) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

أتدرب وأحل المسائل

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافيَيْنِ أمْ لا لكلِّ تجربةٍ عشوائيّةٍ في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي: أنظر الهامش.

1 ظهورُ العددِ 3، أوْ ظهورُ عددٍ زوجيٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

2 ظهورُ أحدِ عواملِ العددِ 12، أوْ ظهورُ عددٍ أوليٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

3 ظهورُ عددينِ مجموعُهُما 8 أوْ 12 عندَ إلقاءِ حجرَيْ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً.

في تجربةِ اختيارِ بطاقةٍ واحدةٍ عشوائيًّا منْ 20 بطاقةً مُتماثِلةً، كُتِبَ على كلٍّ منها عددٌ منْ 1 إلى 20، أَجِدُ:

4 احتمالَ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 7، ومنْ مضاعفاتِ العددِ 5 (4–7) أنظر الهامش.

5 احتمالَ اختيارِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 7، أوْ منْ مضاعفاتِ العددِ 5

6 احتمالَ اختيارِ عددٍ فرديٍّ، ويقبلُ القسمةَ على 4

7 احتمالَ اختيارِ عددٍ فرديٍّ، أوْ يقبلُ القسمةَ على 4

إذا كانَ الحادثانِ A و B حادثينِ متنافيينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.4$، و $P(B) = 0.25$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

8 $P(A\cap B)$ 9 $P(A\cup B)$ 10 $P(\overline{A\cup B})$ 11 $P(A-B)$

(8–11) أنظر ملحق الإجابات.

إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

1) الحادثان متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.

2) الحادثان غير متنافيين؛ لأن 2 و 3 عناصر مشتركة بينهما.

3) الحادثان متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.

4) A : عدد من مضاعفات 7

B: عدد من مضاعفات 5

إذن،

$A = \{7, 14\}, B = \{5, 10, 15, 20\}, A\cap B = \varnothing$

$P(A\cap B) = 0$

5) $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

$= \frac{2}{20} + \frac{4}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

6) C : عدد فردي.

D: عدد يقبل القسمة على 4

إذن،

$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\},$

$D = \{4, 8, 12, 16, 20\}, C\cap D = \varnothing$

$P(C\cap D) = 0$

7) $P(C\cup D) = P(C) + P(D)$

$= \frac{10}{20} + \frac{5}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

مجموعةٌ منَ الكراتِ المُتماثِلةِ، مُرقَّمةٌ منْ 1 إلى 21، وموضوعةٌ داخلَ صندوقٍ.

إذا اختيرَتْ كرةٌ منَ الصندوقِ عشوائيًّا، فأجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

12 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا. (12–15) أنظر ملحق الإجابات.

13 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا منْ مضاعفاتِ العددِ 3

14 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا، ومنْ مضاعفاتِ العددِ 3

15 احتمالَ أنْ تحملَ الكرةُ عددًا زوجيًّا، أوْ منْ مضاعفاتِ العددِ 3

إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.15$، فأجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

16 $P(A\cup B)$ 17 $P(\bar{A})$ 18 $P(B-A)$ 19 $P(A\cup \bar{B})$ 20 $P(\bar{A}\cup \bar{B})$

(16–24) أنظر ملحق الإجابات.

رياضةٌ: سُئِلَ 60 رياضيًّا إذا كانوا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ أوْ كرةِ السلّةِ، وقدْ توزَّعوا وَفقَ إجاباتِهِمْ كما في الجدولِ الآتي:

	عدمُ ممارسةِ أيٍّ منَ اللعبتيْنِ	كرةُ السلّةِ فقط	كرةُ القدمِ فقط	كرةُ القدمِ، وكرةُ السلّةِ
عددُ الرياضيينَ	10	8	30	12

إذا اختيرَ رياضيٌّ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

21 احتمالَ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبتَيْ كرةِ القدمِ وكرةِ السلّةِ.

22 احتمالَ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلّةِ.

23 احتمالَ أنْ يكونَ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلّةِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ.

24 احتمالَ أنْ يكونَ ممَّنْ لا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السلّةِ.

25 **تجارةٌ**: أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. 80%

مهارات التفكير العليا (26–30) أنظر ملحق الإجابات.

تَحَدٍّ: إذا كانَ R و S حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(R) = P(S) = 3P(R\cap S), P(R\cup S) = 0.75$، فأجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

26 $P(R\cap S)$ 27 $P(R)$ 28 $P(\bar{S})$ 29 $P(\bar{R}\cap \bar{S})$

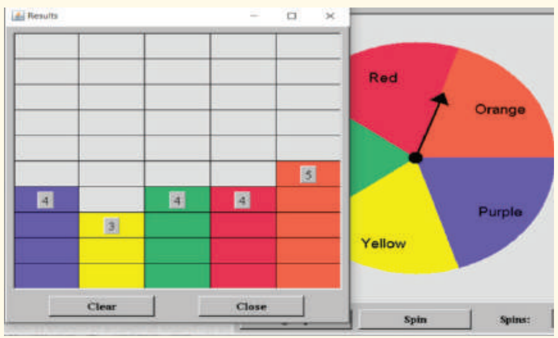
30 **تبريرٌ**: قالَ هاني: إنَّ احتمالَ فوزِ فريقِهِ المُفضَّلِ هوَ 0.3، فردَّ عليْهِ يزيدُ قائلًا: إذنْ، احتمالُ خسارةِ الفريقِ هوَ 0.7، هلْ قولُ يزيدَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

31 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أَصِفُ موقفيْنِ منْ حياتي اليوميةِ، أحدُهُما يتضمَّنُ حادثيْنِ متنافييْنِ، والآخرُ يتضمَّنُ حادثيْنِ غيرَ متنافييْنِ، مُبيِّنًا كيفَ حدَثَتْ ذلكَ. ستتنوع الإجابات. أنظر إجابات الطلبة، ثم أحكم عليها.

138

5 الإثراء

- يحوي الموقع الإلكتروني الذي يظهر عند مسح الرمز المجاور أداة تفاعلية على شكل قرص مُتعدِّد الألوان، ومُؤشِّرًا وقطاعات ملونة، ويمكن تدويره بالضغط على زر (Spin) : n من المرّات، ثم عرض سجل يحوي نتائج تدوير المُؤشِّر في صورة تمثيل بياني بالأعمدة، بالضغط على زر (Record Results)، ثم إيجاد احتمالات الحوادث نظريًّا (مثل احتمال توقُّف المُؤشِّر على اللون الأحمر)، ومقارنة الاحتمال النظري بالاحتمال التجريبي كما يظهر في الصورتين الآتيتين.



تشير الصورة الأُخرى أعلاه إلى نتائج تدوير المُؤشِّر 20 مرَّة.

- أُوجِّه الطلبة إلى تصفُّح هذا الموقع بإشرافي، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال الأداة فيه، ومُذكِّرًا إيّاهم بمفهوم الاحتمال التجريبي.
- أُخبِر الطلبة أنَّ الأداة تتيح أيضًا التحكُّم في عدد القطاعات وألوانها بالضغط على خيار (Change Spinner).

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة (6) من خطوات المشروع.
- أُتابِع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة –في نهاية الدرس– تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أَطَّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

الدرس 5

نتاجات الدرس

- تحديد إذا كان الحادثان مستقلين أو غير مستقلين.
- إيجـاد احتمالات حوادث مسـتقلة وحـوادث غير مستقلة ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- تمثيل التجـارب العشـوائية بالشـجرة الاحتمالية، واستعمالها لإيجاد الاحتمالات.
- إيجاد احتمالات الحوادث المشروطة ضمن مواقف حياتية متنوعة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- كتابة عناصر الحوادث البسـيطة وعناصر فضاء العيِّنة في تجربة عشوائية.
- إيجـاد احتمالات الحـوادث البسـيطة والحوادث المُركَّبة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (**الفقرات**) المُرتبِطـة بما سـيُقدَّم من موضوعـات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت)في صفحات (**أسـتعد لدراسـة الوحدة**) في كتـاب التمارين، ثم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم في أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلـى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 5

احتمالاتُ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ غيرِ المستقلةِ

Probability of Independent and Dependent Events

فكرةُ الدرسِ تمييزُ الحوادثِ المستقلةِ منَ الحوادثِ غيرِ المستقلةِ، وحسابُ احتمالاتِها.

المصطلحاتُ الحوادثُ المستقلةُ، الحوادثُ غيرُ المستقلةِ، الاحتمالُ المشروطُ، جداولُ الاتجاهينِ.

مسألةُ اليومِ تحتوي السـنةُ على 365 يومًا؛ لذا، فإنَّ احتمالَ أنْ يكونَ الأولُ منْ شهرِ أيلولَ يومَ ميلادِ شـخصٍ هوَ $\frac{1}{365}$ تقريبًا. إذا اختيرَ شخصانِ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ يومُ ميلادِ كليهما الأولِ منْ شهرِ أيلولَ؟

لأيِّ تجربةٍ عشـوائيةٍ، يكونُ الحادثانِ (A) وَ (B) مستقلَّيْنِ (independent) إذا كانَ وقوعُ أحدِهِما (أوْ عدمُ وقوعِهِ) لا يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ (أوْ عدمِ وقوعِ) الآخرِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

احتمالُ الحادثينِ المستقلّينِ

بالكلماتِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْـنِ مسـتقليْنِ في تجربةٍ عشـوائيةٍ ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهِما معًا هوَ حاصلُ ضربِ احتمالِ وقوعِ كلٍّ منْهُما.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ مستقليْنِ، فإنَّ:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

أتعلَّمُ

تُستعمَلُ عمليةُ الضربِ عندَ حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ التي تقعُ تباعًا. يُمكِـنُ تعميـمُ قانـونِ حسـابِ احتمالِ وقوعِ حادثيْـنِ مسـتقليْنِ معًا لأكثـرَ مـنْ حادثيْـنِ مستقليْنِ.

مثال 1

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ وقطعةِ نقدٍ منتظميْنِ عشوائيًّا معًا مرَّةً واحدةً، أَجِدُ احتمالَ ظهورِ العددِ 6 على حجرِ النردِ والصورةِ على قطعةِ النقدِ.

أفترضُ أنَّ (A) هوَ حادثُ ظهورِ العددِ 6 على حجرِ النردِ، وَ(B) هوَ حادثُ ظهورِ الصورةِ على قطعـةِ النقدِ. أُلاحِظُ أنَّ وقوعَ الحادثِ (A) أوْ عدمَ وقوعِـهِ لا يُؤثِّرُ في وقوعِ الحادثِ (B) أوْ عدمِ وقوعِهِ. إذنْ، (A) وَ (B) حادثانِ مستقلانِ، وإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

139

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الحادث ومفهوم الفضاء العيني في تجربة عشوائية.
- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الحادثين المتنافيين، ومفهوم الحادثين غير المتنافيين.
- أُحضِر حجر نرد وقطعة نقد، ثم أُلقيهما معًا على سطح الطاولة، ثم أسأل الطلبة عن احتمال ظهور العدد 5 على حجر النرد، واحتمال ظهور الصورة على قطعة النقد.
- أسأل الطلبة:
  » هل يتأثَّر احتمال ظهور العدد 5 على حجر النرد بظهور الصورة على قطعة النقد؟ لا.
  » هل يتأثَّر احتمال ظهور الكتابة على قطعة النقد بظهور العدد 5 على حجر النرد؟ لا.
  » أَصِف هذين الحادثين. أستمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما الحادث الأول في هذا الموقف؟ أنْ يكون الأول من شهر أيلول هو يوم ميلاد شخص ما.
  » ما الحادث الثاني في هذا الموقف؟ أنْ يكون الأول من شهر أيلول هو يوم ميلاد شخص آخر.
  » ما عدد الأشخاص الذين سنختار الشخصين من بينهم؟ غير مُحدَّد في هذا الموقف.
  » هل يتأثَّر الاحتمال بعدد الأشخاص الذين سنختار الشخصين من بينهم؟ لا.
- أعزز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

- أُوضِّح للطلبة مفهوم الحادثين المستقلين، مُبيِّنًا أنَّ احتمال وقوع أيٍّ منهما لا يُؤثِّر في وقوع الحادث الآخر، أو عدم وقوعه، ولا يتأثَّر بذلك.
- أَرجِع إلى المثال الذي قدَّمته في بند (التهيئة)، ثم أسأل الطلبة:
  » هل يمكن القول إنَّ الحادثين مستقلان وَفق هذا المفهوم؟ نعم.
  » كيف نجد احتمال وقوع حادثين مستقلين معًا؟ أستمع لبعض إجابات الطلبة، ثم أَلفِت انتباههم إلى ما ورد في بند (مفهوم أساسي).

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1، مُبيِّنًا أن الحادثين مستقلان، وكيف يُكتَب المطلوب بالرموز.
- لتوضيح أن الحادثين مستقلان، أستعمل حجر نرد وقطعة نقد، وألقيهما مرّات عِدَّة على سطح الطاولة.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حـلّ التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كلّ مثال، ثمّ أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أُوضّح للطلبة مفهوم الحادثين غير المستقلين، مُستعملًا صندوقًا فيه كرتان لونهما أبيض، وكرتان لونهما أسود، وأسحب الكرة الأولى (لتكن بيضاء)، ثم أسألهم:
  » ما قيمة الاحتمال؟ $\frac{1}{2}$
- أضع الكرة البيضاء المسحوبة خارج الصندوق، ثم أعرض محتوى الصندوق أمام الطلبة، مُبيِّنًا أنَّ احتمال سحب كرة ثانية بيضاء أو كرة ثانية سوداء يتأثَّر بنتيجة السحب الأول (ما لم تُرجَع الكرة الأولى المسحوبة إلى الصندوق)؛ ما يعني أنَّ الحادثين (سحب كرة أولى بيضاء) و(سحب كرة ثانية بيضاء) من دون إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق، هما غير مستقلين. بعد ذلك أُوضِّح لهم كيف ينقص عدد عناصر فضاء العيِّنة في هذه التجربة.
- أسأل الطلبة:
  » ما احتمال سحب كرة ثانية بيضاء في هذه الحالة؟ $\frac{1}{3}$
- أستعمل صندوقًا يحوي كرات متماثلة ملونة أو بطاقات ملونة عند مناقشة الطلبة في حل فروع المثال 2.
- أُبرِّر الإجابة للفروع الثلاثة في هذا المثال.
- أسأل الطلبة عن عدد الكرات المتبقية في الصندوق بعد السحب الأول في حالتي السحب من دون إرجاع، والسحب مع الإرجاع، مُبيِّنًا أنَّ السحب مع الإرجاع يؤدي إلى حوادث مستقلة، وأنَّ السحب من دون إرجاع يؤدي إلى حوادث غير مستقلة.

أتحقق من فهمي

في تجربةِ إلقاءِ حجرَيْ نردٍ منتظمَيْنِ عشوائيًّا معًا مرَّةً واحدةً، أَجِدُ احتمالَ ظهورِ عددٍ فرديٍّ على حجرِ النردِ الأولِ وعددٍ أكبرَ منْ 4 على حجرِ النردِ الثاني. أنظر الهامش.

لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، يكونُ الحادثانِ (A) وَ (B) **غيرَ مستقلَّيْنِ** (dependent) إذا أثَّرَ وقوعُ أحدِهِما في احتمالِ وقوعِ الآخرِ.

مثال 2

يُستعملُ علمُ الاحتمالاتِ في الذكاءِ الاصطناعيِّ، وهي الأنظمةُ أو الأجهزةُ التي تحاكي الذكاءَ البشريَّ ويمكنُها أنْ تطوّرَ منْ قدراتِها ذاتيًّا استنادًا إلى المعلوماتِ التي تجمعُها.

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقلَّيْنِ أمْ لا في الحالاتِ الآتيةِ:

1. **سحبُ كرتيْنِ على التوالي عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ مختلفةُ الألوانِ، علمًا بأنَّ سحبَ الكرةِ الثانيةِ كانَ بعدَ إرجاعِ الكرةِ الأولى إلى الكيسِ.**
   إرجاعُ الكرةِ المسحوبةِ أولًا إلى الكيسِ يعني أنَّهُ يُمكِنُ إعادةُ سحبِها، أوْ سحبُ غيرِها، فتكونُ فرصُ سحبِها وغيرِها منَ الكراتِ متكافئةً؛ أيْ إنَّ نتيجةَ سحبِها لا تُؤثِّرُ في نتيجةِ سحبِ أيِّ كرةٍ أُخرى؛ فالحادثانِ مستقلانِ.
2. **سحبُ كرتيْنِ على التوالي عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ، وعدمُ إرجاعِ أيٍّ منْهُما إلى الكيسِ.**
   عدمُ إرجاعِ الكرةِ المسحوبةِ أولًا إلى الكيسِ يعني نقصَ عددِ الكراتِ المُتبقِّيةِ فيهِ، وهذا يعني أنَّ احتمالَ سحبِ الكرةِ الثانيةِ سيتأثَّرُ بنتيجةِ الكرةِ المسحوبةِ أولًا؛ فالحادثانِ غيرُ مستقلَّيْنِ.
3. **سحبُ كرةٍ عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ حمراءُ وصفراءُ، ثمَّ سحبُ كرةٍ عشوائيًّا منْ كيسٍ آخرَ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ حمراءُ وصفراءُ.**
   نتيجةُ سحبِ الكرةِ منَ الكيسِ الأولِ لا تُؤثِّرُ في نتيجةِ سحبِ كرةٍ منَ الكيسِ الثاني؛ فالحادثانِ مستقلانِ.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقلَّيْنِ أمْ لا في الحالاتِ الآتيةِ:

a) اختيارُ قطعةِ حلوى حمراءَ عشوائيًّا وأكلُها، ثمَّ اختيارُ قطعةِ حلوى حمراءَ أُخرى عشوائيًّا منْ كيسٍ يحوي 10 قطعِ حلوى حمراءَ وَ25 قطعةَ حلوى زرقاءَ، جميعُها مُتماثِلةٌ. غير مستقلين.

b) ظهورُ العددِ 5 على حجرَيْ نردٍ أُلقِيا معًا مرَّةً واحدةً عشوائيًّا. مستقلان.

c) سحبُ كرةٍ حمراءَ عشوائيًّا منْ كيسٍ فيهِ كراتٌ مُتماثِلةٌ، 4 منْها حمراءَ وَ 3 صفراءَ، ثمَّ إعادتُها إلى الكيسِ، ثمَّ سحبُ كرةٍ حمراءَ أُخرى عشوائيًّا. مستقلان.

140

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 1):

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

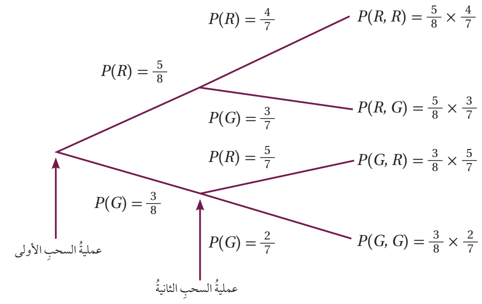
$$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

يساعدُ استعمالُ الشجرةِ الاحتماليةِ على حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ المستقلةِ وغيرِ المستقلةِ.

مثال 3

يحتوي كيسٌ على 5 كراتٍ حمراءَ (R)، وَ 3 كراتٍ خضراءَ (G)، جميعُها مُتماثِلةٌ. سُحِبَتْ كرةٌ منَ الكيسِ عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها منْ دونِ إرجاعِها إلى الكيسِ، ثمَّ سُحِبَتْ كرةٌ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ التاليةِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:

أُلاحِظُ منَ التمثيلِ بالشجرةِ الاحتماليةِ الآتي كيفَ تتأثَّرُ عمليةُ السحبِ الثانيةُ بنتيجةِ عمليةِ السحبِ الأولى عندَ عدمِ إرجاعِ الكرةِ المسحوبةِ:



1 سحبُ كرتيْنِ خضراويْنِ.

$P(G\cap G)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$ بعدَ عمليةِ السحبِ الأولى يقلُّ عددُ الكراتِ في الكيسِ بمقدارِ كرةٍ خضراءَ

2 سحبُ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى وكرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ.

$P(G\cap R)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$ يُمكِنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالةٍ واحدةٍ فقطْ منَ الحالاتِ الأربعِ التي تظهرُ في الشجرةِ الاحتماليةِ

3 سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.

$P(R\cap G)+P(G\cap R)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{28}$ يُمكِنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالتيْنِ، هما: الكرةُ الأولى حمراءُ، والثانيةُ خضراءُ، أوِ الكرةُ الأولى خضراءُ، والثانيةُ حمراءُ

لغةُ الرياضياتِ

العباراتُ الآتيةُ متكافئةٌ:
- سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.
- سحبُ كرتيْنِ مختلفتَيِ اللونِ.
- سحبُ كرتيْنِ، إحداهُما حمراءُ، والأُخرى خضراءُ.
- سحبُ كرةٍ منْ كلِّ لونٍ.

تنويع التعليم:

أثبتت عديد من الدراســات التربويــة أنَّ تقريب المفاهيم المُجرَّدة عن طريق التمثيلات الحســية يساعد الطلبة على اســتيعاب هذه المفاهيم بفاعلية أكثــر من تقديمها بصورة مُجرَّدة فقط.

مثال 3

- أســتعمل صندوقًا يحوي كرات أو قصاصات ورقية ملونة عند مناقشة الطلبة في حل المثال 3.
- أُبرِّر الإجابة للفروع الثلاثة في هذا المثال.
- عند مناقشــة الطلبة في حــل الفرع الثالــث من هذا المثال، أُخبِرهم أنَّ الســؤال قد يتألَّــف من عبارات عديدة جميعها متكافئة من حيث المعنى (أو المطلوب إيجاده)، كما ورد في هامش لغة الرياضيات.

إرشادات:

- أُوضِّح للطلبة أنَّ رمز الشــرط (|) يُقرَأ: بشرط وقــوع الحادث، أو يُقرَأ: علمًــا بأنَّ الحادث قد وقع.
- أُســاعِد الطلبــة على التمييــز في القــراءة بين $P(A\mid B)$ و $P(B\mid A)$، مُبيِّنًا لهم الحادث الذي وقع أولًا في كل حالة.

مثال 4

- أُوضِّح للطلبة التعميم الوارد في بند (**مفهوم أساسي**) والخاص باحتمال الحادثين غير المستقلين.
- أكتب في إطار عند الزاوية اليسرى العليا من اللوح صيغة الاحتمال المشروط.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4، مُستعمِلًا حجر نرد لتوضيح عناصر الفرضيات المعطاة، ثم أكتب المطلوب بالرموز.
- عند التعويض في صيغة الاحتمال المشروط، أُوضِّح للطلبة كيفية تبسيط قسمة كسر على كسر، بتحويل القسمة إلى ضرب، وقلب الكسر المقسوم عليه، وعمل الاختصارات اللازمة لكتابة الكسر الناتج في أبسط صورة.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة عند قسمة كسر على كسر، بعمل اختصارات بين بسط الكسر العلوي ومقام الكسر السفلي، أو بين مقام الكسر العلوي وبسط الكسر السفلي؛ لذا أُخبِرهم أنَّ الاختصار يجب أنْ يقتصر على البسط مع البسط، والمقام مع المقام، ثم أُبيِّن لهم صحة هذا الإجراء بتحويل القسمة إلى ضرب، وقلب المقسوم عليه، ثم الاختصار أو الضرب.

أتحقق من فهمي

يحتوي كيسٌ على 6 قطعِ حلوى حمراءَ (R)، وَ8 قطعِ حلوى خضراءَ (G)، جميعُها مُتماثِلةٌ. اختارَ طفلٌ منَ الكيسِ قطعةَ حلوى عشوائيًّا وأكلَها، ثمَّ اختارَ قطعةً أُخرى عشوائيًّا ليأكلَها. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحادثيْنِ الآتييْنِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:

a) اختيارُ الطفلِ قطعتَيْ حلوى مُتماثِلتَيِ اللونِ. أنظر الهامش.

b) اختيارُ الطفلِ قطعتَيْ حلوى مختلفتَيِ اللونِ. أنظر الهامش.

أُلاحِظُ في المثالِ السابقِ أنَّ احتمالَ سحبِ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى وكرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ يساوي احتمالَ سحبِ كرةٍ خضراءَ في المرَّةِ الأولى مضروبًا في احتمالِ سحبِ كرةٍ حمراءَ في المرَّةِ الثانيةِ، علمًا بأنَّ كرةً خضراءَ سُحِبَتْ في المرَّةِ الأولى.

مفهومٌ أساسيٌّ

احتمالُ الحادثينِ غيرِ المستقلّينِ

بالكلماتِ: احتمالُ وقوعِ حادثيْنِ غيرِ مستقليْنِ معًا يساوي احتمالَ وقوعِ الحادثِ الأولِ مضروبًا في احتمالِ وقوعِ الحادثِ الثاني بعدَ وقوعِ الحادثِ الأولِ.

بالرموزِ: إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ غيرَ مستقليْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

يُقرَأُ الرمزُ $P(B \mid A)$: احتمالُ وقوعِ الحادثِ (B) شرطَ وقوعِ الحادثِ (A)؛ لذا يُسمّى **الاحتمالَ المشروطَ** (conditional probability)، ويُمكِنُ إيجادُهُ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

مثال 4

أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٌ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. ما احتمالُ ظهورِ العددِ 6 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا؟

في هذهِ التجربةِ العشوائيةِ، فضاءُ العيِّنةِ هوَ: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

إذا كانَ (A) هوَ حادثَ ظهورِ العددِ 6، وَ(B) هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ، فإنَّ:

$$A = \{6\}, B = \{2, 4, 6\} \rightarrow A \cap B = \{6\}$$

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 3):

a) $P(R \cap R) + P(G \cap G)$

$$= \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = \frac{43}{91}$$

b) $P(R \cap G) + P(G \cap R)$

$$= \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{6}{13} = \frac{48}{91}$$

$P(A \mid B)$ تعني احتمالَ ظهورِ العددِ 6 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا:

الاحتمالُ المشروطُ $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

بالتبسيطِ $= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

أتحقق من فهمي

أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٌ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. ما احتمالُ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 3 إذا كانَ العددُ الظاهرُ زوجيًّا؟ أنظر الهامش.

في كثيرٍ منَ الأحيانِ، تعرضُ البياناتُ لفئتيْنِ منَ الأشياءِ باستعمالِ ما يُسمّى **جداولَ الاتجاهيْنِ** (two–ways tables)، وهيَ جداولُ تتيحُ إيجادَ الاحتمالِ المشروطِ على نحوٍ سهلٍ.

مثال 5: من الحياة

تدويرٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ كتلَ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ بالأطنانِ في يوميْنِ منْ إحدى المدنِ. إذا سُحِبَتْ عيِّنَةٌ عشوائيَّةٌ منْها قبلَ البدءِ بإعادةِ تدويرِها، فما احتمالُ أنْ تكونَ العيِّنَةُ ورقيةً، علمًا بأنَّها جُمِعَتْ يومَ الأحدِ؟

	غيرُ ورقيةٍ	ورقيةٌ
السبتُ	94	7
الأحدُ	121	8

تُسهِمُ عمليةُ تدويرِ النُّفاياتِ في المحافظةِ على البيئةِ بصورةٍ كبيرةٍ. فمثلًا، إعادةُ تدويرِ طنٍّ واحدٍ منَ الورقِ قدْ تحولُ دونَ قطعِ 17 شجرةً.

إذا كانَ (A) هوَ حادثَ سحبِ عيِّنَةٍ منَ الورقِ، وَ(B) هوَ حادثَ سحبِ عيِّنَةٍ أُخرى جُمِعَتْ يومَ الأحدِ، فما قيمةُ $P(A \mid B)$؟

	المجموعُ	غيرُ ورقيةٍ	ورقيةٌ
السبتُ	101	94	7
الأحدُ	129	121	8
المجموعُ	230	215	15

الخطوةُ 1: أُكمِلُ جدولَ الاتجاهيْنِ بإيجادِ المجاميعِ.

الخطوةُ 2: أَجِدُ احتمالاتِ الحوادثِ اللازمةِ لحسابِ الاحتمالِ المشروطِ.

بالنظرِ إلى جدولِ الاتجاهيْنِ، أَجِدُ كلًّا منْ: $P(A)$، وَ$P(B)$، وَ$P(A \cap B)$:

كتلةُ الورقِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 15 طنًّا، وكتلةُ جميعِ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 230 طنًّا $P(A) = \frac{15}{230}$

كتلةُ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ يومَ الأحدِ 129 طنًّا، وكتلةُ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ في اليوميْنِ 230 طنًّا $P(B) = \frac{129}{230}$

مثال 5: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة المقصود بجداول الاتجاهين، برسم شكل الجدول على اللوح، مُبيِّنًا أنَّ هذه الجداول تُستعمَل لعرض مجموعتين من البيانات تجمعهما بعض الخصائص.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 5، مُوضِّحًا المطلوب بالرموز.
- أُسمّي الحوادث برموز مناسبة.
- أُوضِّح للطلبة كيف يُتوصَّل إلى الناتج النهائي للمطلوب بالعودة إلى الجدول، وتظليل خانة العدد 8، وخانة العدد 129، وبيان دلالة كلٍّ منهما؛ إذ يدل العدد 8 على الحالات (عناصر العيِّنة) في مجموعة التقاطع، ويدل العدد 129 على حالات الحادث الذي يلي رمز الشرط (|).
- أكتب مُبرِّرات لخطوات الحل، وأُحفِّز الطلبة على عمل ذلك.

إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{4, 5, 6\}$,

$B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{4, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

كتلةُ النُّفاياتِ الورقيةِ التي جُمِعَتْ يومَ الأحدِ 8 أطنانٍ، وكتلةُ جميعِ النُّفاياتِ التي جُمِعَتْ 230 طنًّا

$$P(A \cap B) = \frac{8}{230}$$

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ قيمَ الاحتمالاتِ بصيغةِ الاحتمالِ المشروطِ.

صيغةُ الاحتمالِ المشروطِ

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ

$$= \frac{\frac{8}{230}}{\frac{129}{230}} = \frac{8}{129}$$

إذنْ، احتمالُ أنْ تكونَ العيِّنةُ ورقيةً، وأنَّها جُمِعَتْ يومَ الأحدِ هوَ $\frac{8}{129}$

أتحقق من فهمي $P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{94}{101}$

إذا سُحِبَتْ عيِّنةٌ عشوائيةٌ، فما احتمالُ أنْ تكونَ غيرَ ورقيةٍ، علمًا بأنَّها جُمِعَتْ يومَ السبتِ؟

ملحوظةٌ

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ الاحتمالِ المشروطِ بسهولةٍ مِنْ جدولِ الاتجاهيْنِ مباشرةً.

مُلخَّصُ المفاهيمِ

نوعُ الحوادثِ	الوصفُ	القانونُ
المتنافيانِ	لا يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ.	$P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
غيرُ المتنافييْنِ	يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ.	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
المُتتامّانِ	لا يوجدُ بينَهُما عناصرُ مشتركةٌ، واتحادُهُما معًا يُمثِّلُ فضاءَ العيِّنةِ.	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$
المستقلانِ	وقوعُ أحدِهِما لا يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ الآخرِ.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
غيرُ المستقليْنِ	وقوعُ أحدِهِما يُؤثِّرُ في احتمالِ وقوعِ الآخرِ.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$
المشروطةُ	وجودُ معلومةٍ إضافيةٍ عنْ وقوعِ أحدِهِما.	$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$

إرشادات:

- أرسم على اللوح جدولًا كبيرًا مُشابِهًا للجدول الوارد في بند (ملخص المفاهيم)، ثم أكتب فيه عناوين الأعمدة الثلاثة، ثم نوع الحوادث الواحد تلو الآخر. بعد ذلك أطلب إلى أحد الطلبة كتابة وصف مناسب له، ثم أطلب إلى آخر كتابة القانون أو الصيغة الرياضية التي تُستعمَل لحساب احتمال الحادث.
- أطلب إلى آخرين فعل ذلك حتى الانتهاء من جميع أنواع الحوادث التي وردت في الوحدة.

أتدرب وأحل المسائل

كراتٌ زجاجيةٌ: يحتوي كيسٌ على 5 كراتٍ حمراءَ (R)، وَ3 كراتٍ خضراءَ (G)، وكرتيْنِ صفراويْنِ (Y)، جميعُها مُتماثِلةٌ. سُحِبَتْ كرةٌ منَ الكيسِ عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها، ثمَّ أُعيدَتْ إلى الكيسِ، ثمَّ سُحِبَتْ كرةٌ أُخرى عشوائيًّا، ثمَّ كُتِبَ لونُها:

1. ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرةُ الأولى حمراءَ والثانيةُ صفراءَ؟ أنظر الهامش.
2. ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرتانِ خضراويْنِ؟ أنظر الهامش.

أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ مستقليْنِ أوْ غيرَ مستقليْنِ في كلٍّ منَ التجاربِ العشوائيةِ الآتيةِ:

3. سحبُ كرةٍ زرقاءَ عشوائيًّا منْ صندوقٍ، والحصولُ على العددِ 5 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً. مستقلان.
4. اختيارُ طالبٍ منْ مواليدِ شهرِ 10 عشوائيًّا ليخرجَ منْ غرفةِ الصفِّ، ثمَّ اختيارُ طالبٍ آخرَ عشوائيًّا منْ مواليدِ شهرِ 5 ليلحقَ بهِ. غير مستقلين.
5. الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً، وعددٍ يقبلُ القسمةَ على 2 عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ آخرَ منتظمٍ. مستقلان.
6. إصابةُ صيّاديْنِ الهدفَ الثابتَ الذي أَطلقَ كلٌّ منْهُما طلقةً واحدةً نحوَهُ عشوائيًّا. مستقلان.
7. سحبُ بطاقةٍ عشوائيًّا تحملُ العددَ 6 منْ مجموعةِ بطاقاتٍ مُتماثِلةٍ تحملُ الأرقامَ منْ 1 إلى 10، ثمَّ إعادتُها، ثمَّ سحبُ بطاقةٍ أُخرى عشوائيًّا تحملُ عددًا زوجيًّا. مستقلان.

أقلامُ حبرٍ: في علبةٍ قلما حبرٍ أحمرَ، وثلاثةُ أقلامِ حبرٍ أزرقَ، جميعُها مُتماثِلةٌ. اختارَ سالمٌ منْها قلميْنِ عشوائيًّا على التوالي منْ دونِ إرجاعٍ. أَجِدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ الشجرةِ الاحتماليةِ:

8. اختيارُ قلمَيْ حبرٍ أحمرَ. (12 – 1) أنظر الهامش.
9. اختيارُ قلمَيْ حبرٍ أزرقَ.
10. اختيارُ قلمِ حبرٍ منْ كلِّ لونٍ.

اختباراتٌ: تقدّمَ سامي لاختبارينِ في الرياضياتِ، وكانَ احتمالُ نجاحِهِ في الأوّلِ 75%، واحتمالُ نجاحِهِ في الثاني إذا نجحَ فيْ الأوّلِ 80%، واحتمالُ رسوبِهِ في الثاني إذا رسبَ في الأوّلِ 60%، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

11. احتمالُ نجاحِ سامي في كلا الاختبارينِ.
12. احتمالُ نجاحِ سامي في أحدِ الاختبارينِ، ورسوبِهِ في الآخرِ.

145

4 التدريب

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (12 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيِّ مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى المتوسط أو دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، فأُوزِّع طلبة الصف إلى مجموعات ثلاثية، تضم كلٌّ منها طالبًا / طالبة من ذوي المستوى فوق المتوسط، وطالبين / طالبتين ممَّن واجهوا صعوبة في الحل، ثم أُقدِّم تغذية راجعة لهم.

إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

1) $P(R \cap Y) = P(R) \times P(Y)$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$$

2) $P(G \cap G) = P(G) \times P(G)$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

8) $P(R \cap R) = P(R) \times P(R|R)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

9) $P(B \cap B) = P(B) \times P(B|B)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

10) $P(R \cap B) + P(B \cap R)$

$P(R) \times P(B|R) + P(B) \times P(R|B)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

11) A : ناجح في الاختبار الأول.

B: ناجح في الاختبار الثاني.

إذن، $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$= \frac{75}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{60}{100}$$

12) $P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A})$

$$= P(A) \times P(\overline{B}) + P(B) \times P(\overline{A})$$

$$= \frac{75}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{25}{100}$$

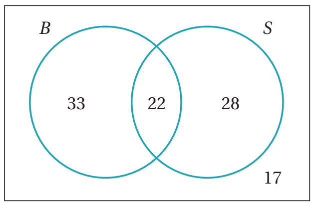
مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، وأطلب إليهم حلّ المسائل (32 – 29).
- أرصـــد أيَّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 13) كتاب التمارين: 5 ,3 – 1
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (26 – 19) كتاب التمارين: (7 – 4)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (32 – 25) كتاب التمارين: (10 – 7)



سُئِلَ **100** شخصٍ عنْ وجودِ أخٍ لهُمْ أوْ أختٍ، وقدْ توزَّعوا وَفقَ إجاباتِهِمْ كما في شكلِ فِنْ المجاورِ، حيثُ:

B: الأشخاصُ الذينَ لكلٍّ منْهُمْ أخٌ.

S: الأشخاصُ الذينَ لكلٍّ منْهُمْ أختٌ.

إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الأشخاصِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

13 أنْ يكونَ لهُ أخٌ؟ (13–17) أنظر الهامش.

14 أنْ يكونَ لهُ أخٌ، علمًا بأنَّ لهُ أختًا؟

15 أنْ يكونَ لهُ أختٌ، علمًا بأنَّ لهُ أخًا؟

وظائفُ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ أعدادَ المُتقدِّمينَ لوظيفةٍ في إحدى الشركاتِ، ومُؤهَّلاتِهِمُ العلميةَ، وخبراتِهِمُ السابقةَ. إذا اختيرَ أحدُ المُتقدِّمينَ للوظيفةِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

		لديْهِ خبرةٌ سابقةٌ	
		نعمْ	لا
لديْهِ شهادةٌ جامعيةٌ	نعمْ	54	27
	لا	5	4

16 أنْ يكونَ لديْهِ خبرةٌ سابقةٌ، علمًا بأنَّ لديْهِ شهادةً جامعيةً؟

17 ألّا يكونَ لديْهِ شهادةٌ جامعيةٌ، علمًا بأنَّ لديْهِ خبرةً سابقةً؟

إشاراتُ مرورٍ: تمرُّ غادةُ في رحلةِ عودتِها منَ العملِ بشارعٍ رئيسٍ عليْهِ إشارتانِ ضوئيتانِ. إذا كانَ احتمالُ أنْ تصلَ الإشارةَ الأولى، وتجتازَها وهيَ مضاءةٌ باللونِ الأخضرِ G هوَ 0.3، وإذا كانَتْ مضاءةً بالأحمرِ R، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةَ الثانيةَ وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ هوَ 0.8، أمّا إذا كانَتِ الإشارةُ الأولى مضاءةً بالأخضرِ، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةَ الثانيةَ وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ هوَ 0.4

أستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ كلٍّ منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ: (18–20) أنظر ملحق الإجابات.

18 احتمالُ وصولِها كلًّا منَ الإشارتيْنِ وهما مضاءتانِ بالأحمرِ.

19 احتمالُ وصولِها كلًّا منَ الإشارتيْنِ وهما مضاءتانِ بالأخضرِ.

20 احتمالُ وصولِها إحدى الإشارتيْنِ وهيَ مضاءةٌ بالأخضرِ، ووصولِها الإشارةَ الأُخرى وهيَ مضاءةٌ بالأحمرِ.

إجابات أسئلة بند (أتدرب وأحل المسائل):

13) $P(\mathrm{B}) = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$

14) $P(\mathrm{S}) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{S}) = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{S}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{S})}{P(\mathrm{S})} = \frac{\frac{22}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$$

15) $P(\mathrm{S}|\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{S})}{P(\mathrm{B})} = \frac{\frac{22}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{22}{55} = \frac{2}{5}$

16) A : لديه خبرة سابقة.

B: لديه شهادة جامعية.

إذن،

$$P(\mathrm{A}) = \frac{59}{90} \text{ , } P(\mathrm{B}) = \frac{81}{90} \text{ , } P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{54}{90}$$

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{\frac{54}{90}}{\frac{81}{90}} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$$

17) $P(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{5}{90}}{\frac{59}{90}} = \frac{5}{59}$

أرصادٌ جويةٌ: أفادَتْ مذيعةُ النشرةِ الجويةِ أنَّ احتمالَ تساقطِ الثلوجِ يومَ الإثنينِ هيَ 25%، وأنَّها ترتفعُ إلى 90% يومَ الثلاثاءِ. أستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ احتمالِ:

(21–23) أنظر ملحق الإجابات.

21 تساقطِ الثلوجِ يومَ الثلاثاءِ، وعدمِ تساقطِها يومَ الإثنينِ.

22 عدمِ تساقطِ الثلوجِ في كلا اليوميْنِ.

23 تساقطِ الثلوجِ في أحدِ اليوميْنِ على الأقلِّ.

صيدٌ: أطلقَ صيّادٌ طلقةً واحدةً على هدفٍ ثابتٍ، وأطلقَ آخرُ طلقةً واحدةً على الهدفِ نفسِهِ. إذا كان احتمالُ إصابةِ الأولِ للهدفِ 70%، واحتمالُ إصابةِ الثاني للهدفِ 60%، فأَجِدُ احتمالَ:

24 إصابةِ كلا الصيّاديْنِ الهدفَ. 0.42

25 عدمِ إصابتِهِما الهدفَ. 0.12

26 إصابةِ الصيّادِ الثاني الهدفَ، علمًا بأنَّ الصيّادَ الأولَ أصابَ الهدفَ. 0.60

27 عدمِ إصابةِ الصيّادِ الثاني الهدفَ، علمًا بأنَّ الصيّادَ الأولَ لمْ يُصِبِ الهدفَ. 0.40

28 أحلُّ السؤالَ الواردَ في فقرةِ مسألةِ اليومِ. $\frac{1}{(365)^2}$

مهارات التفكير العليا

29 **تبريرٌ:** إذا كانَ (A) وَ (B) حادثيْنِ متنافييْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فما قيمةُ $P(A \mid B)$؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

30 **تبريرٌ:** قالَتْ تماضرُ: إنَّهُ لأيِّ حادثيْنِ (A) وَ (B) في فضاءِ العيِّنةِ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)$$

هلْ قولُ تماضرَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

31 **تحدٍّ:** يحتوي كيسٌ على n منَ الكراتِ المُتماثِلةِ مختلفةِ الألوانِ. إذا كانَ احتمالُ سحبِ كرةٍ حمراءَ ثمَّ سحبِ كرةٍ خضراءَ منْ دونِ إرجاعٍ 2.4% تقريبًا، فما قيمةُ n؟ $n = 7$

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أذكرُ مثالًا على حادثيْنِ مستقليْنِ، ومثالًا آخرَ على حادثيْنِ غيرِ مستقليْنِ، مُبيِّنًا كيفَ أَجِدُ احتمالَ وقوعِ الحادثيْنِ معًا في كلِّ مثالٍ. ستتنوع إجابات الطلبة.

5 الإثراء

الاستقراء العددي:

- أُخبِر الطلبة أنَّ التخمين أو الاستنتاج المبني على ملاحظات ضمن أمثلة عددية يُسمّى الاستقراء العددي، وأنَّ التخمين أو الاستنتاج الذي يُتوصَّل إليه صحيح (لكنه بحاجة إلى برهان رياضي ليقال عنه: تعميم صحيح) ما لم يوجد مثال يُناقِض ذلك.
- عند حل الطلبة السؤال 29 (**تبرير**) في بند (**مهارات التفكير العليا**)، أطلب إليهم ملء الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

$P(A) =$	$P(B) =$	$P(A \cap B) =$	$P(A\mid B) =$	$P(B\mid A) =$
0.60	0.50	0.20	0.40	0.33

- أُوجِّه الطلبة إلى افتراض قيم عددية لاحتمالات كلٍّ من $A, B, A \cap B$ (الأعمدة المُظلَّلة باللون البنفسجي)، ثم حساب الاحتمال المشروط في الحالتين (الأعمدة المُظلَّلة باللون الأصفر) عند إكمال الجدول كما في المثال المعطى.
- أُخبِر الطلبة أنَّ احتمال تقاطع حادثين لا يمكن أنْ يكون أكبر من احتمال أيٍّ منهما.
- أُوجِّه الطلبة إلى الاستمرار في وضع الفرضيات للقيم العددية لاحتمالات كلٍّ من $A, B, A \cap B$، والتوصُّل إلى نواتج متساوية عند حساب الاحتمال المشروط في الحالتين، ثم التوصُّل إلى تخمين أو استنتاج معين اعتمادًا على ذلك.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (7) من المشروع.
- أُتابِع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وأُزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.
- أذكِّر الطلبة بأنَّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنَّ عناصر كافّة متوافرة يوم العرض.

6 الختام

- أطلب إلى الطلبة – في نهاية الدرس– تلخيص ما تعلَّموه بعباراتهم الخاصة، ثم أستمع لبعض ما كتبوه.
- أطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو اختيار موضوع أو فكرة تحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمي الورقة.
- أطَّلِع على الأوراق، ثم أُخطِّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

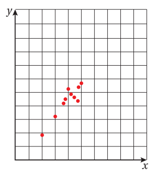
اختبار نهاية الوحدة:

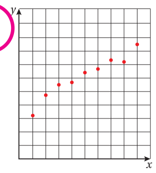
- أُوزِّع الطلبة إلـــى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة حل أسئلة اختبار نهاية الوحدة (25–1) في حصتين.
- أُوجِّــه الطلبة إلى اســتعمال الأدوات اللازمة للحل، مثل: قلم الرصاص، والمسطرة الشفافة، وورق الرسم البياني، والآلة الحاســبة، وأحجار النرد، والبطاقات الملونة.
- أتجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- أُناقِش الطلبة في حل بعض المســائل، وبخاصة تلك التي واجهوا صعوبة في حلها.

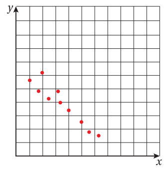
اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

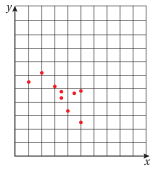
أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 شكلُ الانتشــارِ الذي يُظهِرُ الارتباطَ الموجبَ الأقوى بينَ (x) وَ (y) هوَ:

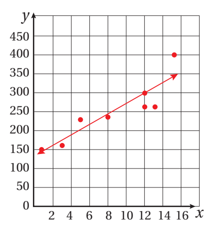
a) 

b) 

c) 

d) 

2 باستعمالِ المستقيمِ الأفضلِ مطابقةً في الشكلِ الآتي، تقديرُ قيمةِ y عندما $x = 7$ هوَ:



a) 150 b) 175

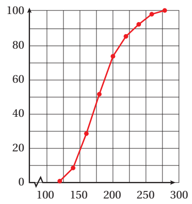
c) 200 d) 225

3 قيمــةُ المدى الربيعيِّ للقيمِ: 11 ،5 ،10 ،8 ،7 ،10 ،15 ،12 ،13 ،9 ،6 ،7 ،4 هيَ:

a) 5 b) 6

c) 9 d) 11

4 **رسائلُ بريديةٌ:** يُبيِّنُ الشــكلُ الآتي المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكتلةِ 100 رسالةٍ (بالغرامِ) مُسجَّلةٍ لدى أحدِ مكاتبِ البريدِ. قيمةُ الربيعِ الأعلى لكتلِ الرسائلِ هيَ:



a) 160 b) 200

c) 210 d) 230

5 في الجدولِ الآتي، إذا كانَ مجموعُ مُربَّعاتِ انحرافاتِ مراكزِ الفئاتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ في التكرارِ المقابلِ لها هوَ 324، فإنَّ قيمةَ التباينِ هيَ:

الفئاتُ	التكرارُ
$5 \leq x < 10$	7
$10 \leq x < 15$	12
$15 \leq x < 20$	6

a) 13.50 b) 12.96

c) 3.67 d) 3.60

6 **حجرا نردٍ:** أُلقِيَ حجرا نــردٍ منتظمانِ، أحدُهُما أحمرُ، والآخرُ أزرقُ عشوائيًّا مرَّةً واحدةً. احتمالُ ظهورِ عددٍ أوليٍّ على حجرِ النردِ الأحمــرِ، وعددٍ أقلَّ منْ 3 على حجرِ النردِ الأزرقِ هوَ:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{36}$

c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

إذا كانَ A وB حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6, P(A\cap B) = 0.1$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

7 $P(A\cup B)$ 0.8

8 $P(\bar{A})$ 0.7

9 $P(B-A)$ 0.5

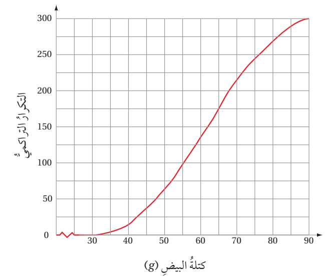
10 $P(A\cup \bar{B})$ 0.5

11 $P(\bar{A}\cup \bar{B})$ 0.9

زراعةٌ: دوَّنَ مهندسٌ زراعيٌّ كتلةَ 300 بيضةٍ بالغرامِ كما في الجدولِ الآتي:

كتلةُ البيضةِ (x)	التكرارُ
$30 \le x < 40$	15
$40 \le x < 50$	48
$50 \le x < 60$	72
$60 \le x < 70$	81
$70 \le x < 80$	54
$80 \le x \le 90$	30

يُبيِّنُ التمثيلُ الآتي المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لهذا الجدولِ:



(12, 13) أنظر الهامش.

أستعملُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لإيجادِ:

12 قيمةِ الوسيطِ لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

13 قيمةِ المدى الربيعيِّ لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

أنظر الهامش.

14 قيمةِ المئينِ 80 لكتلِ البيضِ، مُفسِّرًا دلالتَهُ.

15 عددِ البيضِ الذي تزيدُ كتلتُهُ على 65g

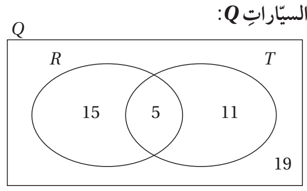
125 بيضة.

16 يُمثِّلُ الجدولُ الآتي كميةَ الأمطارِ في إحدى مناطقِ المملكةِ على مدارِ 20 عامًا لأقربِ ملّيمترٍ:

كميةُ الأمطارِ	عددُ السنواتِ
$199 \le x < 249$	2
$249 \le x < 299$	3
$299 \le x < 349$	6
$349 \le x < 399$	3
$399 \le x < 449$	4
$449 \le x \le 499$	2

أجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لكميةِ الأمطارِ. أنظر الهامش.

سيّاراتٌ: يُبيِّنُ شكلُ فِنْ الآتي عددَ السيّاراتِ الحمراءِ R، وعددَ السيّاراتِ ذاتِ البابيْنِ T، وعددَ سيّاراتٍ أُخرى في أحدِ مواقفِ السيّاراتِ Q:



إذا اختيرَتْ سيّارةٌ عشوائيًّا، فما احتمالُ: (17−20) أنظر الهامش.

17 أنْ تكونَ حمراءَ، وذاتَ بابيْنِ؟

18 ألّا تكونَ حمراءَ، ولها بابانِ؟

19 إذا اختيرَتْ سيّارةٌ، وكانَتْ ذاتَ بابيْنِ، فما احتمالُ ألّا تكونَ حمراءَ؟

20 إذا اختيرَتْ سيّارتانِ، الواحدةُ تلوَ الأُخرى عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ لونُهُما أحمرَ؟

إجابات الأسئلة:

12) $Q_2 = 62$ g، وهذا يعني أنَّ 50% من البيض (أيْ 150 بيضة) كتلة كلٍّ منها أكثر من 62 g

13) $IQR = Q_3 - Q_1 = 72 - 52 = 20$، وهذا يعني أنَّ 50% من البيض (أيْ 150 بيضة) كتلة كلٍّ منها تقع بين 52 g و 72g

14) المئين 80 يساوي 73 g تقريبًا، وهذا يعني أنَّ 80% من البيض (أيْ 240 بيضة) كتلة كلٍّ منها أقل من 73 g، أو أنَّ 20% من البيض (أيْ 60 بيضة) كتلة كلٍّ منها تزيد على 73 g

16)

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
224	2	50176	448	100352
274	3	75076	822	225228
324	6	104976	1944	629856
374	3	139876	1122	419628
424	4	179776	1696	719104
474	2	224676	948	449352
المجموع	**20**		**6980**	**2543520**

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{6980}{20} = 349$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\,(\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{2543520 - (20)(349)^2}{20}$$

$$= 5375$$

$$\sigma = \sqrt{5375} \approx 73.31$$

17) $P(R\cap T) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

18) $P(\bar{R}\cap T) = \frac{11}{30}$

19) $P(\bar{R} \mid T) = \frac{11}{16}$

20) $P(R_1\cap R_2) = \frac{38}{245}$

تدريب على الاختبارات الدولية

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حل الأسئلة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أحفّز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدّية، وأحرص على تضمين اختباراتي المدرسية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

كراتٌ ملونةٌ: يحتوي كيسٌ على كرتيْنِ سوداويْنِ، وكرةٍ بيضاءَ. إذا كانَتْ جميعُ الكراتِ مُتماثِلةً، وسحبَ مصعبٌ كرةً عشوائيًّا، ثمَّ كتبَ لونَها، ثمَّ أعادَها إلى الكيسِ، ثمَّ سحبَ أخرى عشوائيًّا، ثمَّ كتبَ لونَها، فأستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

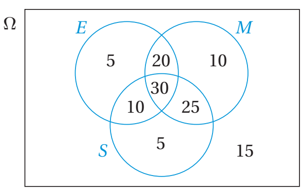
(21–23) أنظر الهامش.

21 الكرتانِ المسحوبتانِ بيضاوانِ.

22 الكرتانِ المسحوبتانِ مختلفتا اللونِ.

23 إحدى الكرتيْنِ المسحوبتيْنِ على الأقلِّ لونُها أسودُ.

تقدَّمَ 120 طالبًا لاختباراتٍ في اللغةِ الإنجليزيةِ (E)، والرياضياتِ (M)، والعلومِ (S)، وقدْ توزَّعوا وَفقَ نجاحِهِمْ في هذهِ الاختباراتِ كما في شكلِ ڤنْ الآتي:



إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الطلبةِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

24 أنْ يكونَ ناجحًا في العلومِ، علمًا بأنَّهُ ناجحٌ في الرياضياتِ؟ $P(S|M) = \frac{11}{17}$

25 أنْ يكونَ ناجحًا في اللغةِ الإنجليزيةِ، علمًا بأنَّهُ ناجحٌ في الرياضياتِ؟ $P(E|M) = \frac{10}{17}$

26 ألّا يكونَ ناجحًا في العلومِ، علمًا بأنَّهُ ليسَ ناجحًا في الرياضياتِ؟ $P(\bar{S} \mid \bar{M}) = \frac{4}{7}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

لونُ العينيْنِ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي احتمالَ أنْ يكونَ الشخصُ في مجتمعٍ ما ذا عينيْنِ زرقاويْنِ، أوْ بُنّيّتيْنِ، أوْ خضراويْنِ:

لونُ العينيْنِ	زرقاوانِ	بُنّيّتانِ	خضراوانِ
الاحتمالُ	0.4	0.5	0.1

إذا اختيرَ شخصانِ عشوائيًّا، فما احتمالُ:

27 أنْ تكونَ عينا كلٍّ منْهُما زرقاويْنِ؟ 0.16

28 أنْ تكونَ عينا كلٍّ منْهُما مختلفتَيِ اللونِ؟ 0.58

أقلامٌ ملونةٌ: يحتوي صندوقٌ على 3 أقلامٍ حمراءَ R، وقلميْنِ زرقاويْنِ B، وَ 4 أقلامٍ خضراءَ G. اختارَتْ شيماءُ قلميْنِ عشوائيًّا منَ الصندوقِ على التوالي، ومنْ دونِ إرجاعٍ. ما احتمالُ:

29 أنْ يكونَ لونُ القلميْنِ أحمرَ؟ $\frac{1}{12}$

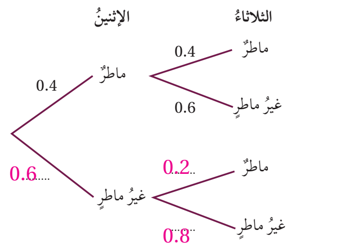
30 أنْ يكونَ للقلميْنِ اللونُ نفسُهُ؟ $\frac{5}{18}$

31 أنْ يكونَ لونُ أحدِ القلميْنِ فقطْ أخضرَ؟ $\frac{5}{9}$

أمطارٌ: إذا نزلَ المطرُ اليومَ، فإنَّ احتمالَ نزولِهِ غدًا هوَ **0.4**، وإذا لمْ ينزلِ اليومَ، فإنَّ احتمالَ نزولِهِ غدًا هوَ **0.2**.

نزلَ المطرُ يومَ الأحدِ:

32 أُكمِلُ الفراغَ في الشكلِ الآتي:

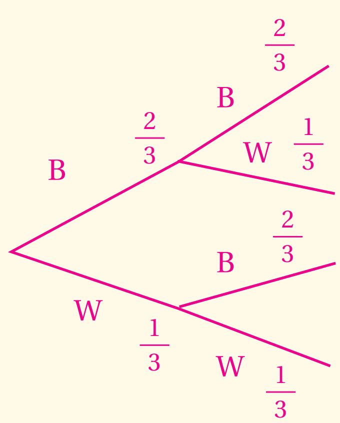


33 أجِدُ احتمالَ نزولِ المطرِ في يومٍ واحدٍ على الأقلِّ منَ اليوميْنِ الوارديْنِ في الشكلِ. 0.52

إجابات الأسئلة:

21) $P(W_1 \cap W_2) = \frac{1}{9}$

22) $P(B \cap W) + P(W \cap B) = \frac{4}{9}$



$P(B, B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$P(B, W) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$P(W, B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$P(W, W) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

23) $P(B \cap W) + P(W \cap B) + P(B \cap B)$

$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{6} = \frac{8}{9}$

كتاب التمارين

أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

المَدى والمَدى الرُّبَيعيُّ (الدرسُ 2)

أجدُ المَدى والرُّبَيعيّاتِ والمَدى الرُّبَيعيَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

المدى 37، الوسيط 73، $Q_1 = 60.5$, $Q_3 = 79.5$، المدى الربيعي $IQR = 19$

1) 85, 77, 58, 69, 62, 73, 55, 82, 67, 77, 59, 92, 75

المدى 16، الوسيط 37، $Q_1 = 29.5$, $Q_3 = 41$، المدى الربيعي $IQR = 11.5$

2) 28, 42, 37, 31, 34, 29, 44, 28, 38, 40, 39, 42, 30

3)

الساقُ	الورقةُ
19	3 5 5
20	2 2 5 8
21	5 8 8 9 9 9
22	0 1 7 8 9
23	2

المفتاحُ: $19|3 = 193$

المدى 30، الوسيط 218، $Q_1 = 202$, $Q_3 = 221$، المدى الربيعي $IQR = 19$

4)

الساقُ	الورقةُ
5	0 3 7 9
6	1 3 4 5 5 6
7	1 5 6 6 9
8	1 2 3 5 8
9	2 5 6 9
10	
11	7

المفتاحُ: $5|0 = 5.0$

المدى 6.7، الوسيط 7.6، $Q_1 = 6.35$, $Q_3 = 8.65$، المدى الربيعي $IQR = 2.3$

سرعةٌ: يبيّنُ الجدولُ أدناهُ سرعةَ مجموعةٍ مِنَ الحيواناتِ بالكيلومترِ لكلِّ ساعةٍ.

الحيوانُ	السرعةُ (km/h)
الفهدُ الصيّادُ	100
النّمرُ	58
القطةُ	48
الفيلُ	40
الفأرُ	13
العنكبوتُ	2

5) أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ للبياناتِ. 71.5

6) أصفُ توزيعَ البياناتِ. مدى هذه البيانات 98 km/h،وتبلغ سرعة ربع الحيوانات 7.5 km/h أو أقل، وربع الحيوانات أيضا 79 km/h أو أكثر، وتتراوح سرعة النصف الأوسط من الحيوانات بين 7.5 km/h و 79 km/h، ولا يتجاوز الفرق بين سرعتها 71.5 km/h

مثالٌ:

محافظاتٌ: يبيّنُ الجدولُ المجاورُ مِساحاتِ المحافظاتِ الأردنيةِ مقرَّبةً إلى أقربِ جزءٍ مِنْ عشَرةٍ.

مِساحاتُ المحافظاتِ الأردنيةِ	
المحافظةُ	المِساحةُ (بآلافِ الكيلومتراتِ المربعةِ)
عجلونُ	0.4
عمّانُ	7.5
العقبةُ	6.9
البلقاءُ	1.1
إربدُ	1.5
جرشُ	0.4
الكركُ	3.4
معانُ	32.8
مأدبا	0.9
المفرقُ	26.5
الطفيلةُ	2.2
الزرقاءُ	4.7

a) أجدُ المَدى.

الخُطوةُ 1 أرتّبُ البياناتِ تصاعديًّا.

0.4, 0.4, 0.9, 1.1, 1.5, 2.2, 3.4, 4.7, 6.9, 7.5, 26.5, 32.8

الخُطوةُ 2 أجدُ المَدى.

أكبرُ قِيَمِ البياناتِ 32.8 وأصغرُها هي 0.4، إذنِ المَدى هوَ:

$R = 32.8 - 0.4 = 32.4$

b) أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ (IQR).

$Q_2 = \frac{2.2 + 3.4}{2} = 2.8$

$\underbrace{0.4 \quad 0.4 \quad \underbrace{0.9 \quad 1.1}_{Q_1 = \frac{0.9 + 1.1}{2} = 1} \quad 1.5 \quad 2.2}_{\text{النصفُ الأدنى}} \qquad \underbrace{3.4 \quad 4.7 \quad \underbrace{6.9 \quad 7.5}_{Q_3 = \frac{6.9 + 7.5}{2} = 7.2} \quad 26.5 \quad 32.8}_{\text{النصفُ الأعلى}}$

$IQR = Q_3 - Q_1 = 7.2 - 1 = 6.2$

إذنْ، المَدى الرُّبَيعِيُّ (IQR) للبياناتِ هوَ 6.2

c) أستعملُ المَدى والمَدى الرُّبَيعِيَّ لوصفِ البياناتِ.

مَدى هذِهِ البياناتِ 32.4 ألفَ كيلومترٍ مربعٍ، ورُبعُ محافظاتِ المملكةِ مِساحاتُها ألفُ كيلومترٍ مربعٍ أَوْ أقلُّ، ورُبعُ المحافظاتِ أيضًا مساحاتُها 7.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ أَوْ أكثرُ، وتتراوحُ مِساحاتُ النصفِ الأوسطِ مِنَ المحافظاتِ بَيْنَ ألفِ كيلومترٍ مربعٍ وَ 7.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ، ولا تتجاوزُ الفروقُ بَيْنَ مِساحاتِها 6.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ.

إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ لبياناتٍ مفردةٍ (الدرسُ 3)

أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لكلٍّ مِنَ البياناتِ الآتيةِ:

7)

نقاطُ أشواطِ لعبةٍ إلكترونيّةٍ.
77, 66, 49, 58, 75

65

8)

أهدافُ مبارياتِ كرةِ قدمٍ.
4, 3, 1, 2, 3, 5

3

9) **مواليدُ:** كانَتْ كُتَلُ المواليدِ الجددِ يومَ الخميسِ في أحدِ المستشفياتِ بالكيلوغرامِ كما يأتي: 3.4, 2.9, 3.1, 3.2, 4, 2.8, 3.7 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لكُتَلِ هؤلاءِ المواليدِ. 3.3

مثالٌ: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ للأعدادِ الآتيةِ: **19, 5, 123, 37**

أجدُ مجموعَ القِيَمِ $19 + 5 + 123 + 37 = 184$

أقسمُ المجموعَ على عددِ القِيَمِ $\overline{x} = \frac{184}{4} = 46$

إذنْ: الوسطُ الحسابيُّ يُساوي 46

إيجادُ الوسيطِ لبياناتٍ مفردةٍ (الدرسُ 3)

أجدُ الوسيطَ لكلِّ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الآتيةِ:

10) 14 , 70 , 55 , 3 , 2 , 100 , 9 14

11) 4 , 3 , 2 , 4 , 7 , 1 3.5

12) ارتفاعاتُ بعضِ المباني بالأمتارِ: 21 , 23 , 21 , 23 , 23 , 21 , 24 , 20 22

13) أعمارُ معلّمينَ بالسّنواتِ: 49 , 32 , 41 , 26 , 28 32

مثالٌ: أجدُ الوسيطَ لكلِّ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الآتيةِ:

a) **13, 20, 11, 15, 30, 27, 10**

الخُطوةُ 1 أرتّبُ القِيَمَ تصاعديًّا: 10, 11, 13, 15, 20, 27, 30

الخُطوةُ 2 أبدأُ بشطبِ قيمةٍ مِنَ اليسارِ مَعَ قيمةٍ مِنَ اليمينِ، إلى أَنْ أجدَ القيمةَ الّتي في المنتصفِ.

$\cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{13}, 15, \cancel{20}, \cancel{27}, \cancel{30}$

إذنْ: الوسيطُ هُوَ 15

b) **400, 290, 355, 310, 430, 300, 270, 320**

الخُطوةُ 1 أرتّبُ القِيَمَ تصاعديًّا، وأشطبُ الأعدادَ مِنَ اليمينِ واليسارِ إلى أَنْ أصلَ إلى الوسيطِ:

$\cancel{270}, \cancel{290}, \cancel{300}, 310, 320, \cancel{355}, \cancel{400}, \cancel{430}$

الخُطوةُ 2 توجدُ قيمتانِ وسيطّتانِ. إذنْ: الوسيطُ هُوَ الوسطُ الحسابيُّ لهاتَينِ القيمتَينِ:

$\frac{310 + 320}{2} = 315$

إيجادُ المنوالِ لبياناتٍ مفردةٍ (الدرسُ 3)

أجدُ المنوالَ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

14) علاماتُ مجموعةٍ مِنَ الطّلبةِ في اختبارِ الرّياضيّاتِ: 19, 13, 13, 16, 9, 13, 6, 10, 14, 15 13

15) الرّياضةُ المفضّلةُ لَدى مجموعةٍ مِنَ الطّلبةِ: كرةُ القدمِ، كرةُ السّلّةِ، السّباحةُ، كرةُ القدمِ، كرةُ الطّائرةِ، كرةُ القدمِ، تِنِسُ الطّاولةِ. كرة القدم.

أجدُ المنوالَ لكلِّ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الآتيةِ:

16) 3, 5 , 3, 1, 2 , 3, 9, 9, 9, 3, 7 3

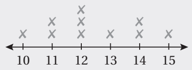
17) 5, 12, 24, 10, 12, 5, 3, 12, 3, 7, 17, 5
يوجد لهذه المجموعة منوالان هما 5، و 12

كتاب التمارين

مثالٌ: أجدُ المنوالَ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

a) أعمارُ المشاركينَ في إحدى المسابقاتِ

أعمارُ المشاركينَ في المسابقةِ



ألاحظُ مِنَ الشّكلِ أنَّ أكثرَ قيمةٍ تكرّرَتْ هِيَ 12

إذنْ: المنوالُ 12

b) مجموعةُ الأحرفِ الأولى مِنْ أسماءِ أفرادِ عائلةٍ:

س ، ل ، س ، ن ، ل ، ن

ألاحظُ أنَّ كلَّ حرفٍ تكرّرَ مرّتَينِ، ولا يوجدُ حرفٌ تكرّرَ أكثرَ مِنْ غيرِهِ؛ لِذا، لا يوجدُ منوالٌ لهذِهِ البياناتِ.

• تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ منظّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ (الدرسُ 3)

أزهارٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأطوالِ مجموعةٍ مِنْ أزهارِ النرجسِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

أطوالُ أزهارِ النرجسِ (t)	
الطولُ (cm)	التكرارُ
$10 \le t < 14$	21
$14 \le t < 18$	57
$18 \le t < 22$	65
$22 \le t < 26$	52
$26 \le t < 30$	12

18 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ الأزهارِ. 19.56

19 أُقدِّرُ منوالَ أطوالِ الأزهارِ. 20

20 أُقدِّرُ وسيطَ أطوالِ الأزهارِ. 20

كتبٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأعدادِ الكتبِ التي اشتراها 25 شخصًا مِنْ مكتبةِ زيادٍ في أحدِ الأيامِ:

عددُ الكتبِ المَبيعةِ	
عددُ الكتبِ	التكرارُ
1 – 3	10
4 – 6	8
7 – 9	4
10 – 12	1
13 – 15	2

21 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ. 5.24

22 أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ. 2

23 أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. 5

مثالٌ:

طقسٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأيامِ شهرِ آذارَ بحسبِ درجاتِ الحرارةِ (إلى أقربِ درجةٍ سلسيةٍ) في محافظةِ عجلونَ:

درجاتُ الحرارةِ (T)	
درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ
$10 \le T < 12$	3
$12 \le T < 14$	7
$14 \le T < 16$	12
$16 \le T < 18$	5
$18 \le T < 20$	3

a) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ.

أُنشِئُ جدولًا بإضافةِ عمودَينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما مراكزَ الفئاتِ ونواتجَ ضربِ التكراراتِ في مراكزِ الفئاتِ على النحوِ الآتي:

درجاتُ الحرارةِ (°C)	f	x	$f \times x$
$10 \le T < 12$	3	11	33
$12 \le T < 14$	7	13	91
$14 \le T < 16$	12	15	180
$16 \le T < 18$	5	17	85
$18 \le T < 20$	3	19	57
المجموعُ	30		446

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ $\mu = \dfrac{\sum(x \times f)}{\sum f}$

بالتعويضِ $= \dfrac{446}{30}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 14.9

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ هوَ 14.9 °C تقريبًا.

b) أُقدِّرُ منوالَ درجاتِ الحرارةِ.

لتقديرِ المنوالِ، أبحثُ عنْ مركزِ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا. وبالرجوعِ إلى البياناتِ في الجدولِ أعلاهُ، أُلاحِظُ أنَّ الفئةَ: $14 \le t < 16$ تُقابِلُ أعلى تكرارٍ، وهوَ 12. وبذلكَ، فإنَّ المنوالَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، منوالُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

c) أُقدِّرُ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ.

الْخُطْوَةُ 1 أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ المجاورِ.

درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ التراكميُّ
$10 \le T < 12$	3
$12 \le T < 14$	$3 + 7 = 10$
$14 \le T < 16$	$3 + 7 + 12 = 22$
$16 \le T < 18$	$3 + 7 + 12 + 5 = 27$
$18 \le T < 20$	$3 + 7 + 12 + 5 + 3 = 30$

الْخُطْوَةُ 2 أُحدِّدُ رتبةَ الوسيطِ.

رتبةُ الوسيطِ هيَ: $\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{30+1}{2} = 15.5$.

الْخُطْوَةُ 3 أُحدِّدُ الفترةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ.

بما أنَّ رتبةَ الوسيطِ هيَ 15.5، فإنَّ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ يقعُ في الفترةِ: $14 \le t < 16$؛ لأنَّ التكرارَ التراكميَّ لهذهِ الفترةِ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي 15.5

وبذلكَ، فإنَّ الوسيطَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، وسيطُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

• إيجادُ الانحرافِ المعياريِّ، والتباينِ لبياناتٍ منظّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ (الدرسُ 3)

24 أَجِدُ المَدى، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للبياناتِ في الجدولِ التكراريِّ الآتي:

القيمةُ	التكرارُ
5	3
6	5
7	8
8	3
15	1

المدى هو 10، والتباين 5.4،
والانحراف المعياري هو 2.3

مثالٌ: أَجِدُ الانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للبياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ:

القيمةُ x	10	12	15	17
التكرارُ f	1	3	4	2

أُضيفُ إلى الجدولِ أعمدةً لأحسُبَ فيها القيمَ الآتيةَ:

$$x \times f,\ x - \mu,\ (x - \mu)^2,\ (x - \mu)^2 f$$

القيمةُ x	التكرارُ f	$x \times f$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 f$
10	1	10	−4	16	16
12	3	36	−2	4	12
15	4	60	1	1	4
17	2	34	3	9	18
المجموعُ	10	140			50

الوسطُ الحسابيُّ $\mu = \dfrac{\Sigma x \times f}{\Sigma f}$

بالتعويضِ والتبسيطِ $= \dfrac{140}{10} = 14$

التباينُ $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma (x - \mu)^2 \times f}{(\Sigma f)}$

بالتعويضِ والتبسيطِ $= \dfrac{50}{10} = 5$

الانحرافُ المعياريُّ $\sigma = \sqrt{5} \approx 2.24$

• إيجادُ احتمالِ وقوعِ حادثٍ في تجربةٍ عشوائيةٍ (الدرسُ 4)

يحتوي كيسٌ على 6 كراتٍ حمراءَ، وَ5 كراتٍ زرقاءَ، وَ4 كراتٍ خضراءَ، علمًا بأنَّ جميعَ الكراتِ مُتماثِلةٌ. سحبَتْ هندُ كرةً واحدةً عشوائيًّا، ما احتمالُ سحبِ كرةٍ:

25 حمراءَ؟ $\frac{2}{5}$

26 ليسَتْ زرقاءَ؟ $\frac{2}{3}$

27 صفراءَ؟ 0

كتاب التمارين

مثالٌ: رمى خليلٌ حجرَ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً. أَجِدُ احتمالَ وقوعِ كلٍّ منَ الحادثيْنِ الآتييْنِ:

a) ظهورُ عددٍ أقلَّ منْ 3

إذا افترضْتُ أنَّ A هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أقلَّ منْ 3، فإنَّ:

عناصرَ الحادثِ A، وعددَها: $A = \{1, 2\}\ , n(A) = 2$

عناصرَ فضاءِ العيِّنةِ، وعددَها: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ , n(\Omega) = 6$

احتمالَ الحادثِ A: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) ظهورُ عددٍ أكبرَ منْ 6

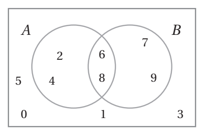
إذا افترضْتُ أنَّ B هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 6، فإنَّ:

عناصرَ الحادثِ B، وعددَها: $B = \varnothing\ , n(B) = 0$

احتمالَ الحادثِ B: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$

- **إيجادُ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ** (الدرسُ 4)

كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 0 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثَيْنِ A و B في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

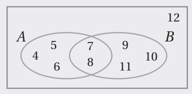


28 $P(A)$ $\frac{2}{5}$ 29 $P(B)$ $\frac{2}{5}$ 30 $P(A\cap B)$ $\frac{1}{5}$

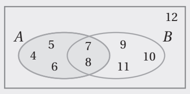
31 $P(A\cup B)$ $\frac{3}{5}$ 32 $P(\overline{A})$ $\frac{3}{5}$ 33 $P(\overline{B})$ $\frac{3}{5}$

34 $P(\overline{A\cap B})$ $\frac{4}{5}$ 35 $P(\overline{A\cup B})$ $\frac{2}{5}$ 36 $P(B-A)$ $\frac{1}{5}$

مثالٌ: كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 4 إلى 12 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



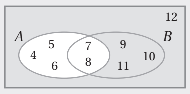
a) $P(A)$



بمـا أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ هوَ 9، وعددَ عناصرِ الحادثِ A هوَ 5 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(A) = \frac{5}{9}$$

b) $P(\overline{A})$

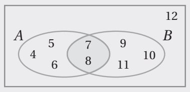


صيغةُ احتمالِ المُتمِّمةِ: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

بالتعويضِ: $= 1 - \frac{5}{9}$

بالتبسيطِ: $= \frac{4}{9}$

c) $P(A \cap B)$

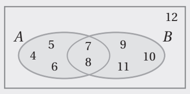


بما أنَّ $A\cap B$ يعني وقوعَ الحادثِ A والحادثِ B معًا، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 2 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A\cap B)= \frac{2}{9}$$

d) $P(A \cup B)$

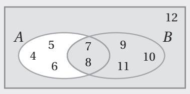


بمـا أنَّ $A\cup B$ يعني وقوعَ الحادثِ A، أوْ وقوعَ الحادثِ B، أوْ وقوعَ الحادثَيـنِ معًا، فإنَّ عـددَ عناصرِ هذا الحادثِ هـوَ 8 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A\cup B) = \frac{8}{9}$$

e) $P(\overline{A} \cup B)$

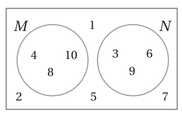


بما أنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 6 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(\overline{A}\cup B) = \frac{6}{9}$$

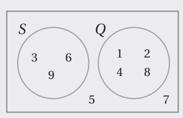
- **إيجادُ احتمالِ الحوادثِ المتنافيةِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ** (الدرسُ 4)

كُتِبَـتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 10 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشـوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ M و N في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



37 $P(M\cap N)$ 0 38 $P(M\cup N)$ $\frac{3}{5}$ 39 $P(M-N)$ $\frac{3}{10}$

مثالٌ: كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثَينِ Q و S في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



a) $P(S \cap Q)$

أُلاحِظُ منْ شكلِ فِنْ أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا توجدُ عناصرُ مشتركةٌ بينَهُما. إذنْ:

$$P(S \cap Q) = \frac{0}{9} = 0$$

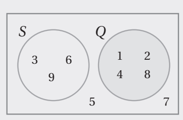
b) $P(S \cup Q)$

بمـا أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ، فإنَّ $S\cup Q$ يعني وقـوعَ الحادثِ S فقطْ، أوْ وقوعَ الحادثِ Q فقطْ؛ لأنَّهُما لا يقعانِ معًا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 7 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ، احتمالُ الحادثِ $S\cup Q$ هوَ:

$$P(S \cup Q) = \frac{7}{9}$$

c) $P(Q - S)$

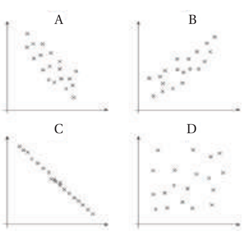


بمـا أنَّ الحـادثَ S والحادثَ Q متنافيـانِ، فـإنَّ $Q-S$ يعني وقوعَ الحادثِ Q فقطْ؛ لأنَّهُما لا يقعانِ معًا كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ. إذنْ:

$$P(Q - S) = \frac{4}{9}$$

الدرسُ 1

أشكالُ الانتشارِ
Scatter Graphs



مستعينًا بالأشكالِ المجاورةِ، أكتبُ في الفراغِ الآتي رمزَ شكلِ الانتشارِ المناسبِ:

1 يدلُّ شكلُ الانتشارِ ...D... على عدمِ وجودِ ارتباطٍ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.

2 يدلُّ شكلُ الانتشارِ ...B... على وجودِ ارتباطٍ موجبٍ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.

3 يدلُّ شكلُ الانتشارِ ...C... على وجودِ ارتباطٍ سالبٍ وقويٍّ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.

(5–4) أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ الكتلَ والأطوالَ لِـ 12 طالبةً في الصفِّ السابعِ:

الاسمُ	الكتلةُ (kg)	الطولُ (cm)
مريمُ	41	123
شيماءُ	48	125
نانسي	47.5	127
خلودُ	52	128
أسيلُ	49.5	129
لانا	55	129
يقينُ	55	133
لورا	55.5	135
هيا	61	137
بيانُ	65.5	140
ياسمينُ	60	143
تمارا	68	145

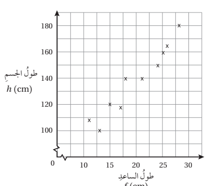
4 أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ، واصفًا الارتباطَ بينَ الكتلةِ والطولِ.

5 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ المُمثَّلةِ في شكلِ الانتشارِ.

6 صفاءُ إحدى طالباتِ الصفِّ السابعِ، وطولُها 132 cm أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً لتقديرِ كتلتِها. 54 kg تقريبًا.

7 انتقلَتْ طالبةٌ في الصفِّ السابعِ منْ مدرسةٍ أُخرى إلى مدرسةِ هؤلاءِ الطالباتِ. أُقدِّرُ طولَ الطالبةِ الجديدةِ، علمًا بأنَّ كتلتَها 45 kg. 123 cm تقريبًا.

يُمثِّلُ شكلُ الانتشارِ المجاورِ العلاقةَ بينَ طولِ الساعدِ f بالسنتيمترِ، وطولِ الجسمِ h بالسنتيمترِ لعشرةِ أشخاصٍ:



8 أَصِفُ الارتباطَ بينَ طولِ الجسمِ وطولِ الساعدِ. الارتباط موجب قوي.

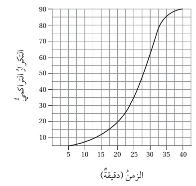
9 أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أكتبُ معادلتَهُ. أنظر ملحق الإجابات.

10 أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً لتقديرِ طولِ شخصٍ، طولُ ساعدِهِ 27 cm. 168 cm تقريبًا.

كتاب التمارين

الدرس 2
المنحنى التكراريُّ التراكميُّ
Cumulative Frequency Graph

سُجِّلَ الزمنُ الذي استغرقَتْهُ سيّارةُ الإسعافِ لنقلِ مريضٍ منْ مكانِهِ إلى المستشفى في عددٍ منَ الحالاتِ. مستعينًا بالمنحنى التكراريِّ التراكميِّ المجاورِ الذي يُمثِّلُ البياناتِ المُتعلِّقةَ بذلكَ:



1. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. $Q_2 \approx 27$
2. أَجِدُ المدى الربيعيَّ. $Q_2 \approx 10$
3. أَجِدُ المئينَ 40، مُفسِّرًا معناهُ.
المئين 40 يساوي 25 تقريبًا، ويعني أن 60% من الأزمان المستغرقة لنقل المريض تزيد على 25 min

نشرَ موقعٌ إخباريٌّ 177 خبرًا في أحدِ الأيامِ. وقدْ رصدَ القائمونَ على الموقعِ عددَ الأشخاصِ الذينَ قرؤوا كلَّ خبرٍ، ثمَّ نظَّموا البياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ:

الفئاتُ (عددُ القُرّاءِ)	التكرارُ (عددُ الأخبارِ)
$0 \le x < 50$	6
$50 \le x < 100$	9
$100 \le x < 150$	15
$150 \le x < 200$	25
$200 \le x < 250$	31
$250 \le x < 300$	37
$300 \le x < 350$	32
$350 \le x < 400$	17
$400 \le x \le 450$	5

4. أُكمِلُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ. أنظر ملحق الإجابات.
5. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ. أنظر ملحق الإجابات.
6. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ، والمدى الربيعيَّ. $Q_2 \approx 252, IQR \approx 150$
7. إذا قرَّرَ القائمونَ على هذا الموقعِ حذفَ الأخبارِ التي قرأَها أقلُّ منْ 60 شخصًا، فما عددُ الأخبارِ التي ستُحذَفُ؟ 10 تقريبًا.

خضعَتْ مجموعتانِ لاختبارِ حسابٍ ذهنيٍّ. وقدْ رُصِدَ عددُ الإجاباتِ الصحيحةِ لكلِّ مجموعةٍ في الجدولِ الآتي:

عددُ الإجاباتِ الصحيحةِ	$0 \le x < 4$	$4 \le x < 8$	$8 \le x < 12$	$12 \le x < 16$	$16 \le x \le 20$
A: الفتيانُ	5	9	23	28	17
B: الفتياتُ	6	10	19	25	22

8. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكلٍّ منَ الفتيانِ والفتياتِ على ورقةِ الرسمِ البيانيِّ نفسِها. أنظر ملحق الإجابات.
9. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ، والمدى الربيعيَّ لكلٍّ منْهُما.
للفتيان: الوسيط = 13 تقريبًا، المدى الربيعي = 7 تقريبًا.
للفتيات: الوسيط = 14 تقريبًا، المدى الربيعي = 8 تقريبًا.
10. أيُّ المجموعتيْنِ أداؤُها أفضلُ في الاختبارِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
يبدوا أداء المجموعتين متقاربًا مع أفضلية بسيطة لمجموعة الفتيات؛ لأن وسيط الأداء عندهن أعلى من وسيط الأداء لمجموعة الفتيان.

الدرس 3
مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ
Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ الآتي توزيعًا لأطوالِ بعضِ النباتاتِ على مدارِ أسبوعٍ في تجربةٍ زراعيةٍ:

الطولُ (cm)	(f)	(x)	$f.x$	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$	$f \times (x-\mu)^2$
$25 \le t < 29$	2	27	54	−16	256	512
$30 \le t < 34$	4	32	128	−11	121	484
$35 \le t < 39$	7	37	259	−6	36	252
$40 \le t < 44$	10	42	420	−1	1	10
$45 \le t < 49$	8	47	376	4	16	128
$50 \le t < 54$	6	52	312	9	81	486
$55 \le t \le 59$	3	57	171	14	196	588
المجموعُ	40		1720			2460

1. أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ.
2. أُقدِّرُ كلًّا منَ الوسطِ الحسابيِّ، والتباينِ.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x.f}{\Sigma f} = \frac{1720}{40} = 43$$
$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (x-\mu)^2 \times f}{\Sigma f} = \frac{2460}{40} = 61.5$$

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعَ مدَّةِ الانتظارِ t بالدقيقةِ لعددٍ منْ مُراجِعي دائرةٍ حكوميةٍ منْ لحظةِ أخْذِ المُراجِعِ بطاقةَ المراجعةِ إلى لحظةِ استدعائِهِ منَ الموظفِ المعنيِّ:

الزمنُ (min)	التكرارُ
$0 \le t < 5$	4
$5 \le t < 10$	9
$10 \le t < 15$	20
$15 \le t < 20$	7
$20 \le t \le 25$	5

3. أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ. أنظر ملحق الإجابات.
4. أُقدِّرُ التباينَ، والانحرافَ المعياريَّ.

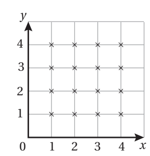
$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x^2.f) - (\Sigma f)(\mu)^2}{\Sigma f} = \frac{8331.25 - (45)(12.5)^2}{45} \approx 28.89$$
$$\sigma \approx \sqrt{28.89} \approx 5.37$$

5. **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجمعُ بياناتٍ لـ 20 مشاهدةً، وأُنظِّمُها في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ، ثمَّ أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والتباينَ.
يعتمد على البيانات التي يجمعها الطلبة.

الدرس 4
احتمالاتُ الحوادثِ المتنافيةِ
Probability of Mutually Exclusive Events

في تجربةِ اختيارِ عددٍ عشوائيًّا منْ بينِ الأعدادِ: 10 , 9 , 8 , 7 , 6 ، 5 , 4 , 3 , 2 , 1، إذا كانَ (A) حادثَ اختيارِ عددٍ أكبرَ منْ 4، و(B) حادثَ اختيارِ عددٍ يقبلُ القسمةَ على 3 منْ دونِ باقٍ، فأَجِدُ:

1. احتمالَ اختيارِ عددٍ أقلَّ منْ 4، ويقبلُ القسمةَ على 3
A: عدد أقل من 4، B: عدد يقبل القسمة على 3
$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 6, 9\}, A \cap B = \{3\}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$
2. احتمالَ اختيارِ عددٍ أقلَّ منْ 4، أوْ يقبلُ القسمةَ على 3
$P(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
3. يُبيِّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ فضاءَ العيِّنةِ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ. إذا كانَ (A) يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $x = 3$، وكانَ (B) يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y = 5 - x$، إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ تقعَ على كلا المستقيميْنِ: $x = 3$، وَ $y = 5 - x$؟ $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$



إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:
(4–6) أنظر ملحق الإجابات.

4. $P(A \cap B)$
5. $P(A \cap \bar{B})$
6. $P(B \cup \bar{A})$

سُئِلَتْ 516 مهندسةً كهربائيةً وكيميائيةً وميكانيكيةً عنِ المبحثِ المُفضَّلِ لكلٍّ منْهُنَّ عندما كُنَّ في الصفِّ العاشرِ، وقدْ نُظِّمَتْ إجاباتُهُنَّ في الجدولِ المجاورِ.

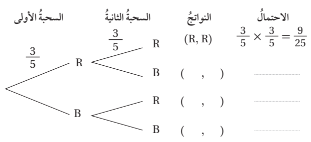
المبحثُ المُفضَّلُ	العلومُ	الرياضياتُ	المجموعُ
مهندسةٌ كهربائيةٌ:	90	85	175
مهندسةٌ كيميائيةٌ:	91	80	171
مهندسةٌ ميكانيكيةٌ:	81	89	170
المجموعُ:	262	254	516

إذا اختيرَتْ مهندسةٌ عشوائيًّا منْ هذهِ العيِّنةِ، فما احتمالُ:

7. اختيارِ مهندسةٍ كهربائيةٍ تُفضِّلُ مبحثَ العلومِ؟ $\frac{90}{516} = \frac{15}{86}$
8. اختيارِ مهندسةٍ ميكانيكيةٍ تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ؟ $\frac{89}{516}$
9. اختيارِ مهندسةٍ ميكانيكيةٍ، أوْ مهندسةٍ تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ؟ $\frac{335}{516}$
10. اختيارِ مهندسةٍ لا تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ، لكنَّها ليسَتْ مهندسةً كيميائيةً؟ $\frac{171}{516}$

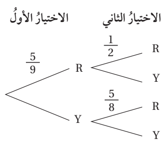
الدرس 5
احتمالاتُ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ غيرِ المستقلةِ
Probability of Independent and Dependent Events

يحتوي كيسٌ على 3 كراتٍ زجاجيةٍ حمراءَ (R)، وَكرتيْنِ زجاجيتيْنِ زرقاويْنِ (B)، علمًا بأنَّ جميعَ الكراتِ مُتماثِلةٌ. إذا سُحِبَتْ منَ الكيسِ كرتانِ على التوالي معَ الإرجاعِ:



1. أُكمِلُ الشجرةَ الاحتماليةَ المجاورةَ. أنظر ملحق الإجابات.
2. أَجِدُ احتمالَ أنْ تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ منَ اللونِ نفسِهِ. $\frac{13}{25}$
3. أَجِدُ احتمالَ أنْ تكونَ واحدةٌ على الأقلِّ منَ الكراتِ المسحوبةِ حمراءَ اللونِ. $\frac{21}{25}$
4. أَجِدُ احتمالَ ألّا تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ حمراويْنِ. $\frac{16}{25}$

يحتوي كيسٌ على 5 حبّاتِ حلوى بنكهةِ النعناعِ (R)، وَ4 حبّاتٍ أُخرى بنكهةِ الكراميلِ (Y)، علمًا بأنَّ جميعَ الحبّاتِ مُتماثِلةٌ. اختارَ طفلٌ منَ الكيسِ حبَّةَ حلوى عشوائيًّا وأكلَها، ثمَّ اختارَ حبَّةً أُخرى عشوائيًّا وأكلَها:



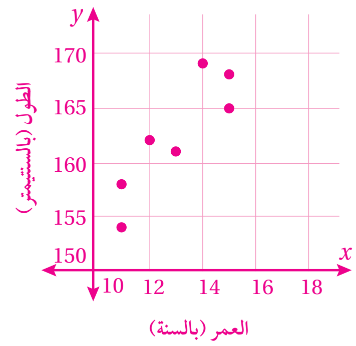
5. أُكمِلُ الشجرةَ الاحتماليةَ المجاورةَ. أنظر ملحق الإجابات.
6. ما احتمالُ أنْ يكونَ الطفلُ قدَ أكلَ حبَّتَيْ حلوى بنكهةِ الكراميلِ؟ $\frac{1}{6}$
7. ما احتمالُ أنْ يكونَ الطفلُ قدْ أكلَ حبَّةَ حلوى بنكهةِ النعناعِ في المرَّةِ الثانيةِ، علمًا بأنَّهُ أكلَ حبَّةً بنكهةِ الكراميلِ في المرَّةِ الأولى؟ $\frac{5}{8}$

إذا كانَ $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A \cup B) = 0.8$، فأَجِدُ:

8. $P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = 0.4$
9. $P(B \mid A)$
$P(B \mid A) = \frac{4}{5} = 0.8$
10. $P(A \mid B)$
$P(A \mid B) = \frac{4}{7} \approx 0.57$
11. أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٍ عشوائيًّا مرَّتيْنِ متتاليتيْنِ، وجُمِعَ الرقمانِ الظاهرانِ على الوجهِ العلويِّ. أَجِدُ احتمالَ أنْ يكونَ المجموعُ 8 إذا ظهرَ الرقمُ 5 مرَّةً واحدةً على الأقلِّ. $P(A \mid B) = \frac{2}{11} \approx 0.18$

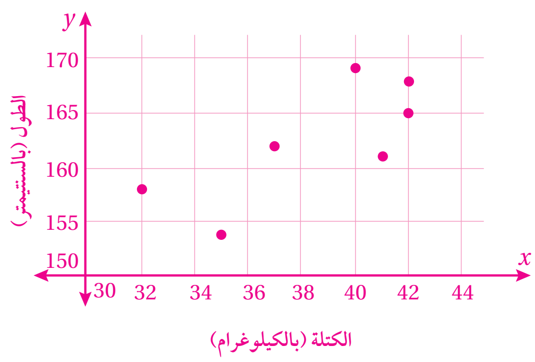
الدرس 1:

4)



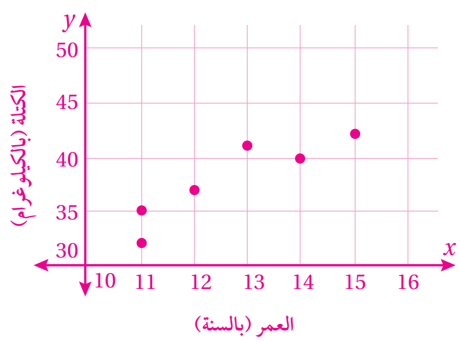
يوجد ارتباط قوي موجب بين عمر اللاعبة وطولها.

5)



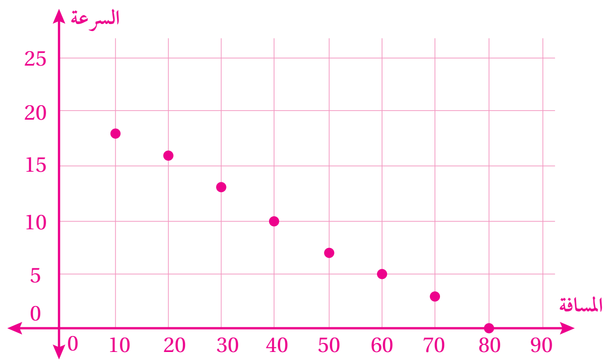
يوجد ارتباط ضعيف موجب بين طول اللاعبة وكتلة جسمها.

6)

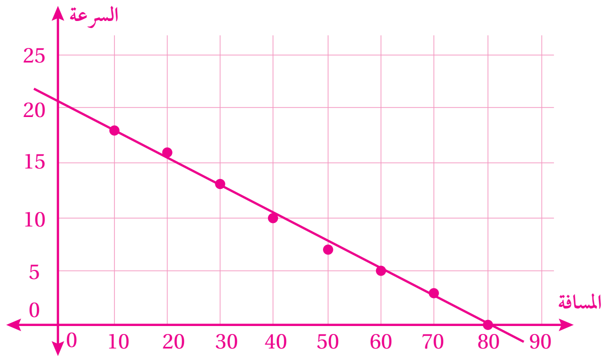


يوجد ارتباط قوي موجب بين عمر اللاعبة وكتلة جسمها.

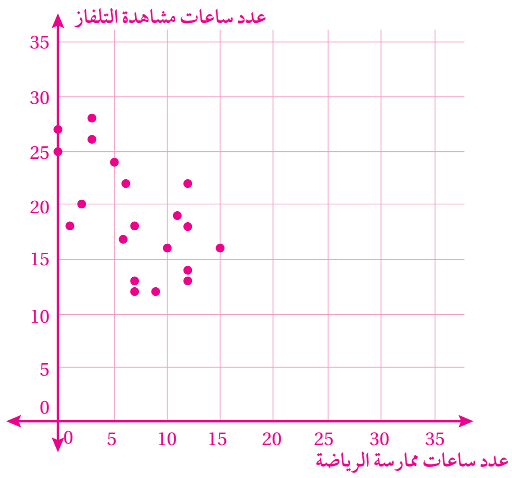
7)



8)



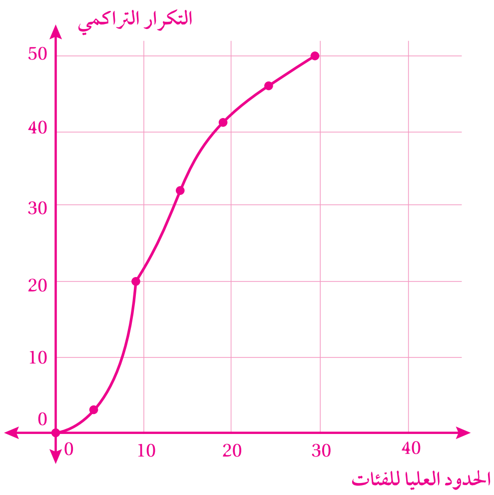
17)



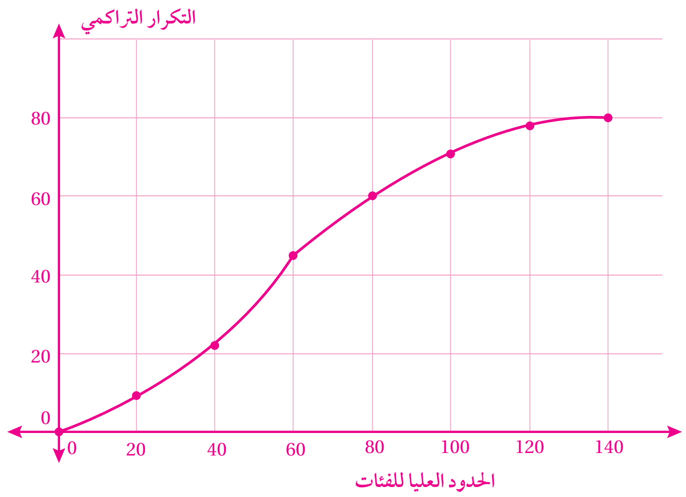
18) لا، لأنَّ العدد 8 خارج بيانات ساعات مشاهدة التلفاز المعطاة في الدراسة.

الدرس 2:

1)



(8



(9 الوسيط: $Q_2 \approx 56$

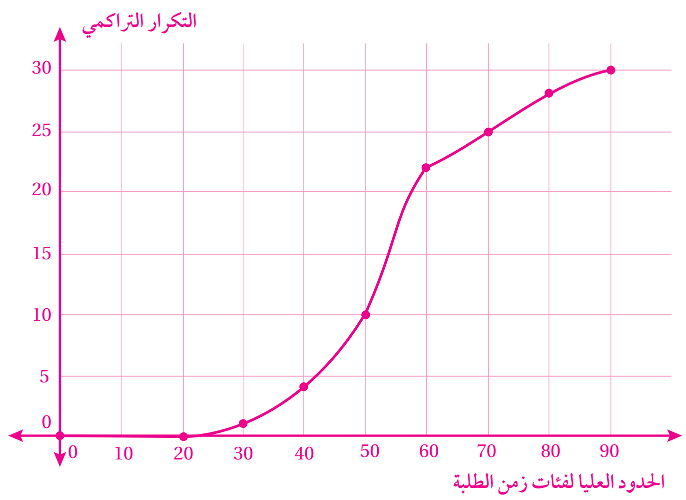
$IQR = Q_3 - Q_1$

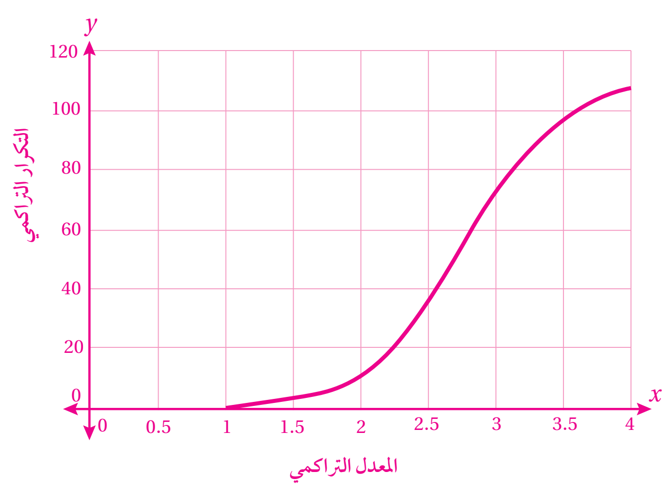
$= 80 - 37$

$= 43$

(10 16% تقريبًا.

(11





(12 (للطلبة) الوسيط: $Q_2 \approx 54$

$IQR = Q_3 - Q_1$

$= 60 - 44$

$= 16$

(للمُعلِّمين) الوسيط: $Q_2 \approx 56$

$IQR = Q_3 - Q_1$

$= 65 - 48$

$= 17$

الدرس 3:

(4 الطريقة الأولى:

x	f	$x \times f$	$x - \mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 \times f$
90	2	180	−42.61	1815.6121	3631.2242
110	5	550	−22.61	511.2121	2556.0605
130	7	910	−2.61	6.8121	47.6847
150	6	900	17.39	302.4121	1814.4726
170	3	510	37.39	1398.0121	4194.0363
المجموع	**23**	**3050**			**12243.4783**

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{3050}{23} \approx 132.61$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2 \times f}{\sum f}$$

$$= \frac{12243.4783}{23} \approx 532$$

$$\sigma = \sqrt{532} \approx 23.07$$

الطريقة الثانية:

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
90	2	8100	180	16200
110	5	12100	550	60500
130	7	16900	910	118300
150	6	22500	900	135000
170	3	28900	510	86700
المجموع	**23**		**3050**	**416700**

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{3050}{23} \approx 132.61$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\ (\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{416700 - (23)(132.61)^2}{23}$$

$$\approx 532$$

$$\sigma = \sqrt{532} \approx 23.07$$

5) فريق النسور: $\mu = 187.5$

$\sigma^2 = 101.25$

فريق الأسود: $\mu = 187.5$

$\sigma^2 = 85.05$

11) أُنشِئ جدولًا على النحو الآتي:

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
72.5	6	5256.25	435	31537.5
77.5	8	6006.25	620	48050
82.5	4	6806.25	330	27225
87.5	2	7656.25	175	15312.5
المجموع	**20**		**1560**	**122125**

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{1560}{20} = 78$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)\ (\mu)^2}{\sum f}$$

$$= \frac{122125 - (20)(78)^2}{20}$$

$$= 22.25$$

$$\sigma = \sqrt{22.25} \approx 4.72$$

إذن، قول المدير المالي صحيح.

13) ســتختلف قيمة التباين عن القيمة الدقيقة عند تقديرها بعد تنظيم البيانــات في جــداول ذات فئات وتكرارات بحســب طول الفئة المُحــدَّدة. وكلَّما زاد طــول الفئة قلَّ عدد الفئــات في الجدول، وقلَّت الدقة في تقدير التباين.

14) نعم، يمكــن تقدير التبايــن؛ لأنَّ حدود الفئــات معطاة، ويمكن تحديــد التكرار المقابل لكل فئة بطرح التكرار التراكمي الســابق من التكــرار التراكمي اللاحق والمقابل للحدود العليا للفئات، ثم إنشاء الجدول على النحو الآتي:

الفئات	التكرار
$0 < x \leq 10$	$10 - 0 = 10$
$10 < x \leq 20$	$22 - 10 = 12$
$20 < x \leq 30$	$44 - 22 = 22$
$30 < x \leq 40$	$70 - 44 = 26$
$40 < x \leq 50$	$88 - 70 = 18$
$50 < x \leq 60$	$100 - 88 = 12$

الدرس 4 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 4):

ليكن الحادث A: اختيار عدد أولي، والحادث B: اختيار عدد من عوامل 10

إذن، $A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 5, 10\}, A \cap B = \{2, 5\}$

أيْ إنَّ الحادثين A, B غير متنافيين.

a) $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{4}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

الدرس 4 إجابة سؤال بند (أتحقق من فهمي 5):

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.5 + 0.3 - 0.2 = 0.6$

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$

c) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3$

d) $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$

$= P(A) + 1 - P(B) - P(A - B)$

$= P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B))$

$= 1 - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - 0.3 + 0.2 = 0.9$

e) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 0.6 = 0.4$

الدرس 4:

8) $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

9) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.4 + 0.25 = 0.65$

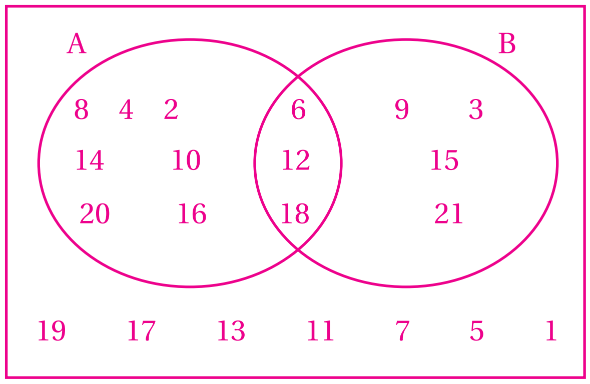
10) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.65 = 035$

11) $P(A - B) = P(A) = 0.4$

12) A : عدد زوجي.

B: عدد من مضاعفات 3

إذن،



$P(\text{A}) = \dfrac{10}{21}$

13) $P(\text{B}) = \dfrac{7}{21} = \dfrac{1}{3}$

14) $P(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$

15) $P(\text{A} \cup \text{B}) = \dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3}$

16) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.3 + 0.5 - 0.15 = 0.65$

17) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$

18) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.15 = 0.35$

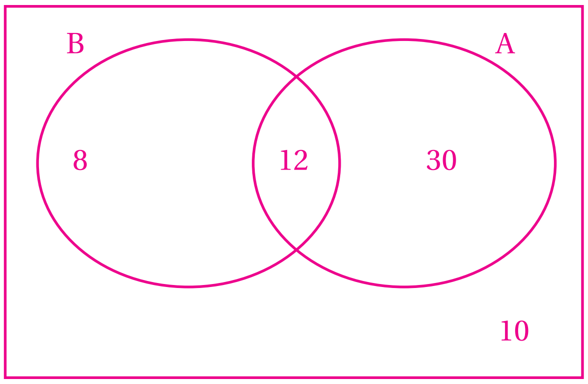
19) $P(A \cup \bar{B}) = P(\bar{B}) + P(A \cap B) = 1 - 0.5 + 0.15 = 0.65$

20) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0.15 = 0.85$

21) A : لاعب يمارس كرة القدم.

B: لاعب يمارس كرة السلَّة.

إذن،



$P(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$

22) $P(\text{A} \cap \bar{\text{B}}) = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$

23) $P(\bar{\text{A}} \cap \text{B}) = \dfrac{8}{60} = \dfrac{2}{15}$

24) $P(\bar{\text{A}} \cap \bar{\text{B}}) = \dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}$

26) $P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S)$

$0.75 = 3P\,(R \cap S) + 3P(R \cap S) - P(R \cap S)$

$0.75 = 5P\,(R \cap S) \Longrightarrow P(R \cap S) = 0.15$

27) $P(R) = 3P(R \cap S) = 0.45$

28) $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.45 = 0.55$

29) $P(\bar{R} \cap \bar{S}) = P(\overline{R \cup S}) = 1 - P(R \cup S)$

$= 1 - 0.75 = 0.25$

30) قــول زيد غير صحيح؛ لأنَّ فضاء العيِّنة لنتيجة مباراة كرة القدم فيه 3 نواتج، هي: الفوز، أو الخسارة، أو التعادل. فمتممة الفوز ليست خسارة، وإنَّما هي خسارة أو تعادل. وبذلك، فإنَّ احتمال الخسارة أو التعادل هو 0.7، واحتمال الخسارة هو أقل من 0.7

الدرس 5:

18) $P(\text{R}_1 \cap \text{R}_2) = P(\text{R}_1) \times P(\text{R}_2 | \text{R}_1)$

$= 0.7 \times 0.8 = 0.56$

19) $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \times P(G_2 | G_1)$

$= 0.3 \times 0.6 = 0.18$

20) $P(R \cap G) + P(G \cap R) = P(R) \times P(G|R) + P(G) \times P(R|G)$

$= 0.7 \times 0.2 + 0.3 \times 0.4 = 0.26$

21) $P(T) = 90\%, P(M) = 25\%$

$P(T \cap \overline{M}) = P(T) \times P(\overline{M})$

$= 0.90 \times 0.75 = 0.675$

22) $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = P(\overline{M}) \times P(\overline{T})$

$= 0.75 \times 0.1 = 0.075$

23) $P(M \cup T) = P(M) + P(T) - P(M \cap T)$

$= 0.25 + 0.9 - 0.25 \times 0.9 = 0.925$

29) $P(A|B) = 0$ ؛ لأن $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ، و $P(A \cap B) = 0$؛

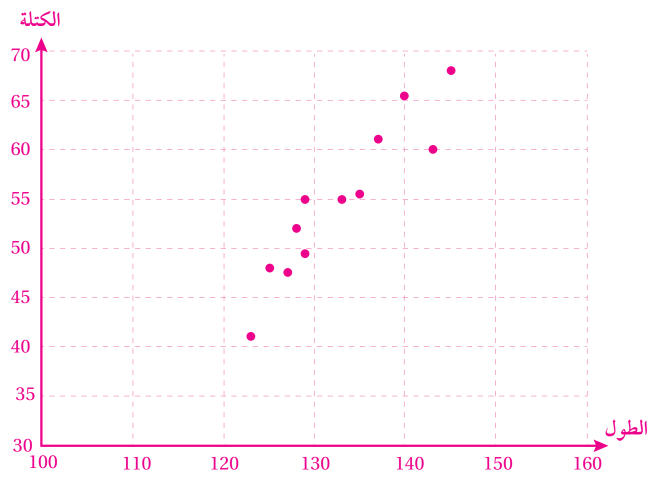
شرط أنّ $P(B) \neq 0$

30) غير صحيح؛ لأنّ $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$، و $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$،

ولا يكونـــان متســـاويين إلا إذا كان $P(A) = P(B)$ ، وكلاهما لا يساوي صفرًا.

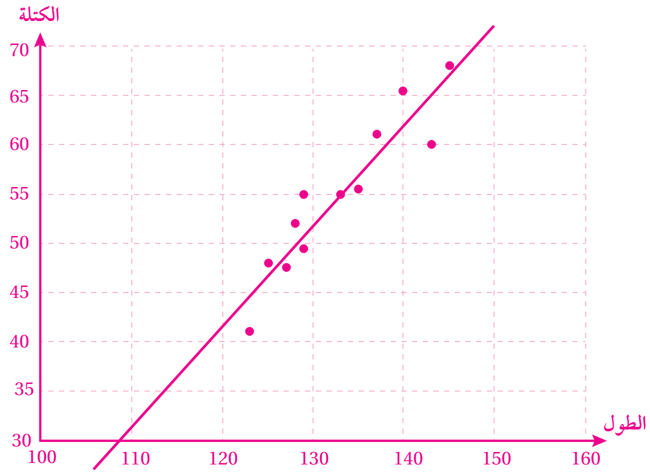
إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

4)

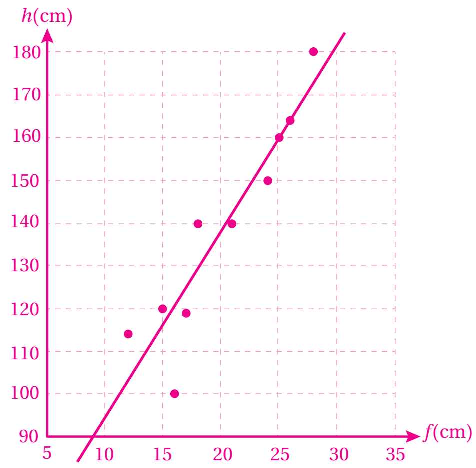


الارتباط موجب قوي

5)



9)



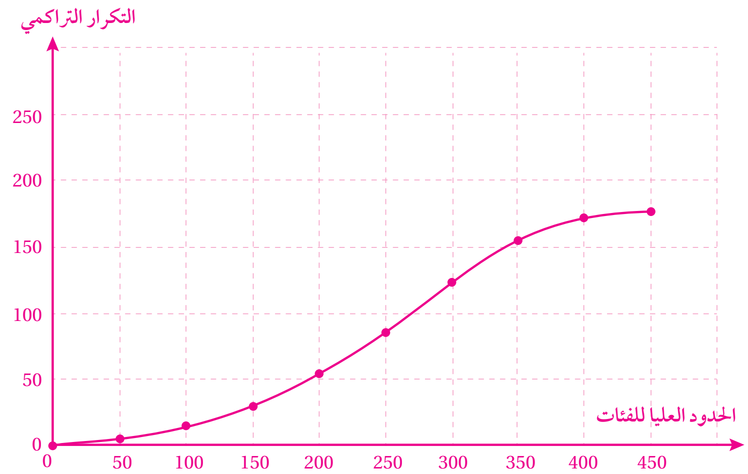
$y = 4.38x + 50.18$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

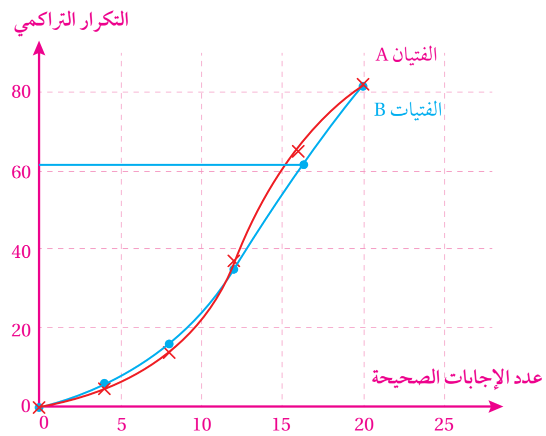
4) الجدول التكراري التراكمي

التكرار التراكمي	الحدود العليا
0	0
6	50
15	100
30	150
55	200
86	250
123	300
155	350
172	400
177	450

5) المنحنى التكراري التراكمي



8) المنحنى التكراري التراكمي للفتيان A ، وللفتيات B



إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

3)

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
2.5	4	6.25	10	25
7.5	9	56.25	67.5	506.25
12.5	20	156.25	250	3125
17.5	7	306.25	122.5	2143.75
22.5	5	506.25	112.5	2531.25
المجموع	**45**		**562.5**	**8331.25**

$$\mu = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{562.5}{45} = 12.5$$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 4:

4) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$0.3 = 1 - P(A \cup B) \Longrightarrow P(A \cup B) = 0.7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.7 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0.4$

5) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.4 = 0.1$

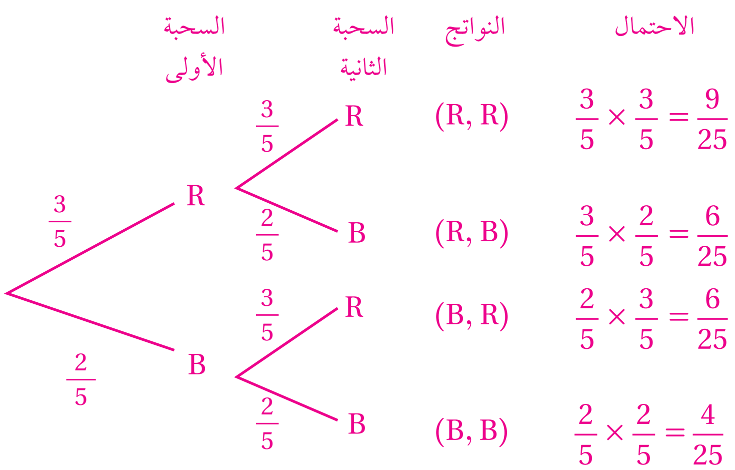
6) $P(B \cup \overline{A}) = P(B) + P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)$

$= P(B) + P(\overline{A}) - (P(B) - P(A \cap B))$

$= P(\overline{A}) + P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 = 0.9$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 5:

1)



5)