طلاب و طالبات

التوجيهي العلمي

جيل 2006

الإقترانات المثلثية

من

الألف إلى الياء

إعداد

0799948198

الإقترانات المثلثية

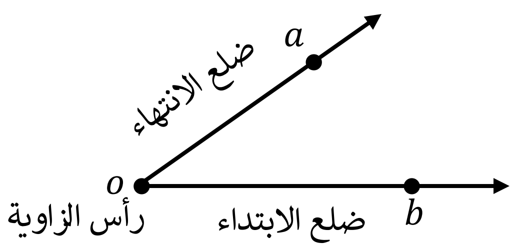
1 تعريف الزاوية

هي اتحاد شعاعين لهما نقطة

بداية واحدة تسمى برأس الزاوية

والشعاعان هما ضلعا الزاوية

كما بالشكل المجاور :



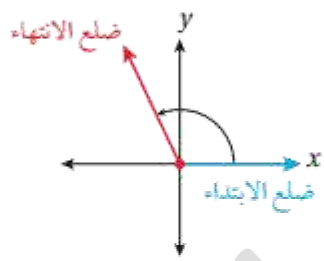
2 الزاوية فى الوضع القياسى

هي زاوية يقع رأسها عند نقطة

الأصل (0 ، 0) ، وضلع أبتدائها

منطبق على المحور x الموجب

كما بالشكل المجاور :



زاوية في الوضع القياسي

3 قياس الزاوية

قياس الزاوية يصف مقدار الدوران

و اتجاهه اللازمين للانتقال من ضلع

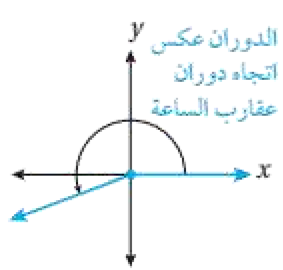
الابتداء إلى ضلع الانتهاء

◄ قياس الزاوية يكون موجب إذا كان الدوران

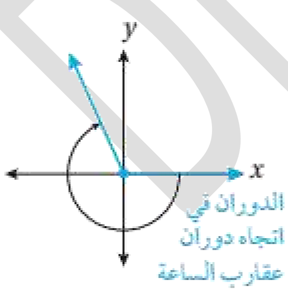
عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، و سالبا

إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة

كما بالاشكال المجاورة :

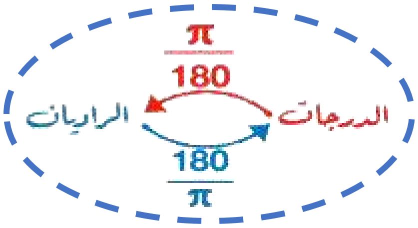


زاوية قياسها موجب



زاوية قياسها سالب

4 وحدات قياس الزاوية



◄ القياس الستيني للزاوية : وحدة قياسه هي الدرجة

◄ القياس الدائري للزاوية : وحدة قياسه هي الراديان

◄ للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان نضرب قياس الزاوية في $\frac{\pi}{180}$

◄ للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات نضرب قياس الزاوية في $\frac{180}{\pi}$

5 الزوايا المشتركة

يطلق على الزوايا بالوضع القياسي

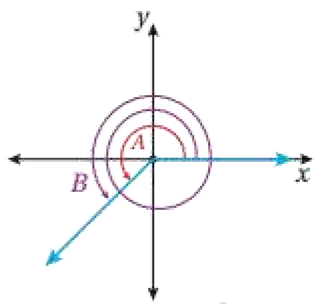
التي لها ضلع الأنتهاء نفسه ، لكن

قياسها مختلف ، أسم الزوايا المشتركة

ففي الشكل المجاور الزاويتين A ، B

مختلفتين في القياس و لهما ضلع الأنتهاء

نفسه فهما زاويتان مشتركتان



ملاحظة مهمه :

يُمكِن إيجاد زاوية مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع زاوية أُخرى عن طريق الجمع أو الطرح لأحد مضاعفات الزاوية $360°$ أو 2π

بالدرجات

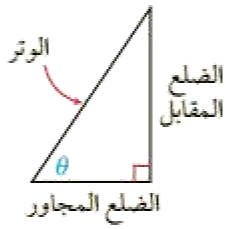
إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالدرجات لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 360° n$ هي زوايا مشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

بالراديان

إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالراديان لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 2n\pi$ هي زوايا مُشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

6 الاقترانات الدائرية

إذا مثَّلــت θ قياس زاوية حادَّة في مثلث قائم الزاوية، فإنَّ الاقترانات المثلثية الستة تُعرَّف بدلالة الوتر، والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:



قاطع التمام (cosecant) $\csc\theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ الجيب (sine) $\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

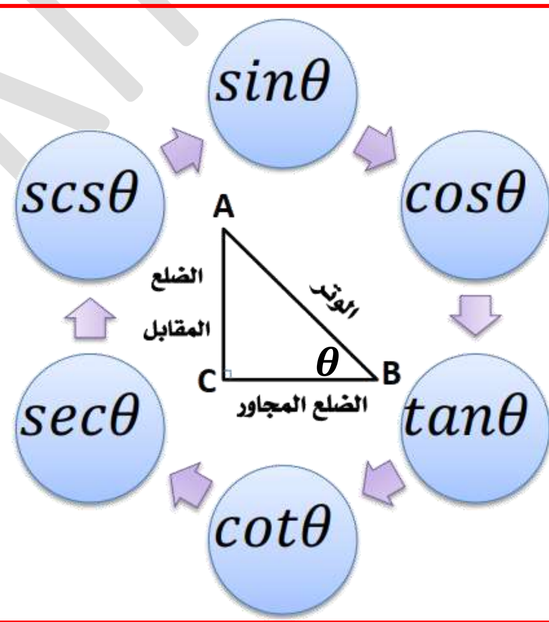
القاطع (secant) $\sec\theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ جيب التمام (cosine) $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظل التمام (cotangent) $\cot\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ الظل (tangent) $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

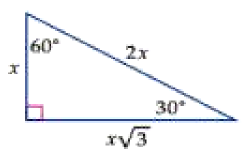
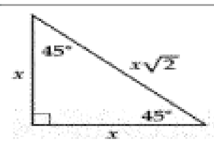
ملاحظة مهمه :

يُطلَــق علـــى اقترانات قاطـــع التمـــام، والقاطع، وظـــل التمام، اســـم **اقترانـــات المقلوب** (reciprocal functions)؛ لأنَّهـــا مقلـــوب نســـب الجيب، وجيب التمـــام، والظل على الترتيب، ويُمكِن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

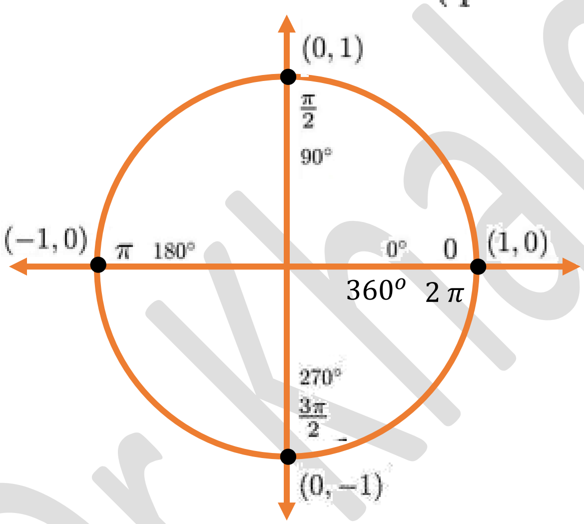


7 النسب المثلثية للزوايا الخاصة

الزاوية 60° و 30°		$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
		$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
الزاوية 45°		$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$

8 النسب المثلثية للزوايا الربعية

إذا انطبق ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على أحد المحورين الإحداثيين، فإنَّ هذه الزاوية تُسمّى **زاوية ربعية** (quadrantal angle).



(x, y)

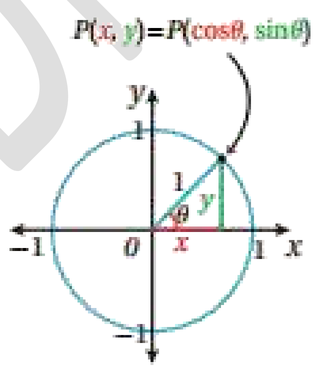
0° 0 ، 360° 2π → $(1, 0)$

$\frac{\pi}{2}$ 90° → $(0, 1)$

π 180° → $(-1, 0)$

270° $\frac{3\pi}{2}$ → $(0, -1)$

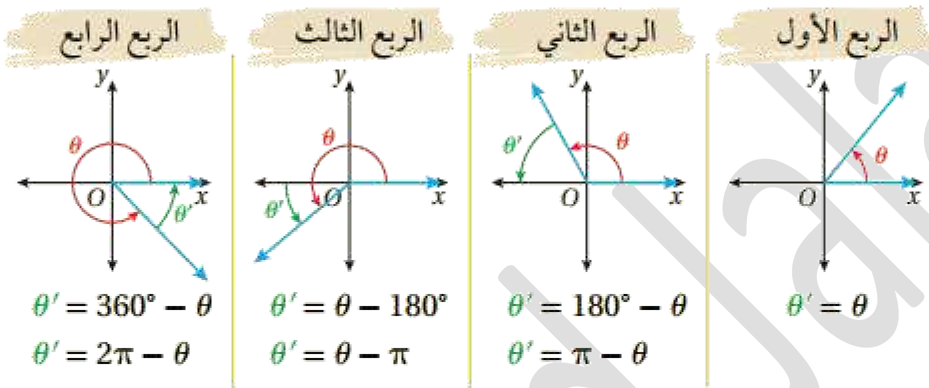
$\sin = y$ $\cos = x$ $\tan = \frac{y}{x}$



إذا رُسمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإنَّ ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$.

9 النسب المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية

إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإنَّ **الزاوية المرجعية** (reference angle) للزاوية θ هي الزاوية الحادَّة θ' المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. يُبيِّن الجدول الآتي العلاقة بين θ و θ' لأيِّ زاوية θ غير ربعية.



تُستعمَل الزوايا المرجعية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ، وتعتمد إشارة قيمة الاقتران المثلثي على الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ.

أتَّبع الخطوات الآتية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ:

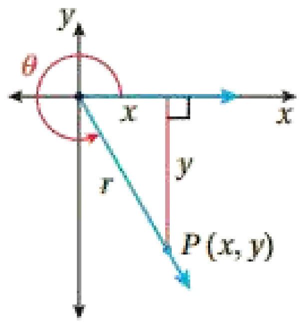
الخطوة 1: أجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أجد قيمة الاقتران المثلثي للزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 3: أستعمل الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ، لتحديد إشارة قيمة الاقتران المثلثي للزاوية θ، مستعينًا بالمُخطَّط المجاور.

الربع الأول: جميع النسب موجبة+
الربع الثاني: *sin* و *cosec* موجبة+ والبقية سالبة
الربع الثالث: *tan* و *cot* موجبة+ والبقية سالبة
الربع الرابع: *cos* و *sec* موجبة+ والبقية سالبة

⑩ النسب المثلثية لأي زاوية ضلع أنتهائها يمر بنقطة معلومة



إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، والنقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ، و r يُمثِّل البُعْد بين النقطة P ونقطة الأصل، حيث: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, r \neq 0$،
فإنَّ الاقترانات المثلثية للزاوية θ تُعرَّف كما يأتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

⑪ معكوس النسب المثلثية

معكوس اقتران الجيب

$y = \sin^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\sin y = x$، حيث: $-1 \leq x \leq 1$ ، و $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

معكوس اقتران جيب التمام

$y = \cos^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\cos y = x$، حيث: $-1 \leq x \leq 1$ ، و $0 \leq y \leq \pi$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $[0, \pi]$.

معكوس اقتران الظل

$y = \tan^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\tan y = x$، حيث: $-\infty < x < \infty$ ، و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

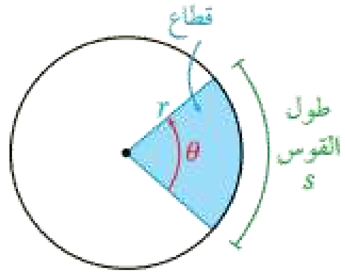
المجال: $(-\infty, \infty)$.

المدى: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

⑫ طول القوس و مساحة القطاع

طول القوس

بالكلمات: طول القــوس s من الدائرة المقابل لزاوية مركزية قياســها θ بالراديان يســاوي ناتج ضــرب طول نصف القُطْر r في θ.



بالرموز: $s = r\theta$

مساحة القطاع

بالكلمات: مســاحة القطاع A الذي قياس زاويته المركزيــة θ بالراديان في دائرة طول نصف قُطْرها r تســاوي نصف ناتج ضــرب مربع طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

⑬ الحركة الدائرية

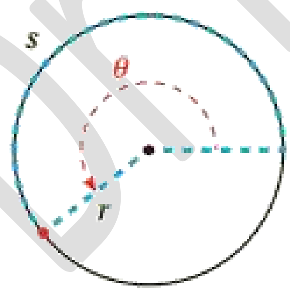
بافتراض أنَّ نقطة تتحرَّك بسرعة ثابتة على محيط دائرة، طول نصف قُطْرها r:

- إذا كان s هو طول القوس الذي تقطعه النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ الســرعة الخطية v لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$v = \frac{s}{t}$$

- إذا كانت θ هي زاويــة الدوران (بالراديان) التي دارتها النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ السرعة الزاويَّة ω لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

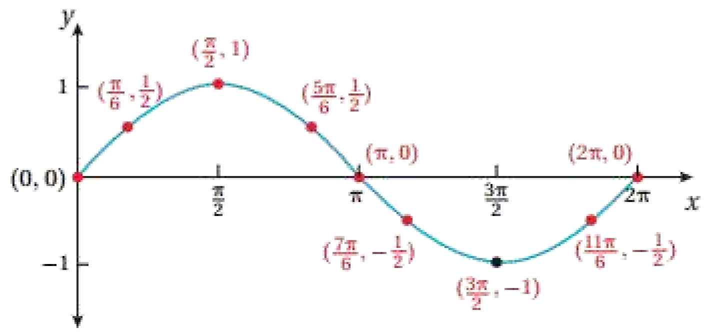
$$\omega = \frac{\theta}{t}$$



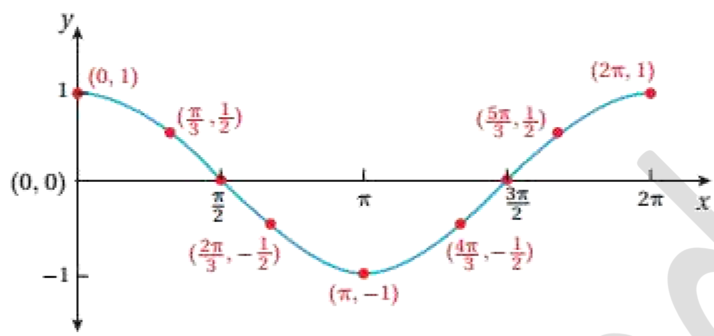
الحرف اليوناني ω يُقرَأ: أوميغــا، وهو يُســتعمَل للدلالــة على الســرعة الزاويَّة.

⑭ التمثيل البياني

تمثيل الاقتران: $y = \sin x$



تمثيل الاقتران: $y = \cos x$

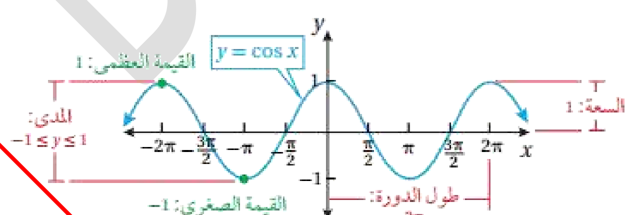


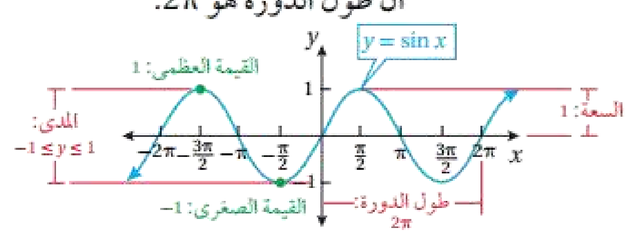
خصائص التمثيل البياني للمنحنيين

- مجال كلّ من الاقترانين هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- مدى كلٍّ من الاقترانين هو الفترة $[-1, 1]$؛ لذا، فإنَّ القيمة الصغرى لكلٍّ منهما -1، والقيمة العظمى لكلٍّ منهما 1
- سعة (amplitude) منحنى الاقتران هي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى، وتساوي 1 لكلٍّ من الاقترانين؛ لأنَّ:

$$\frac{1}{2}(1-(-1)) = 1$$

- كلٌّ من الاقترانين هو اقتران دوري (periodic function)، وهذا يعني أنَّ التمثيل البياني لمنحنى كلٍّ منهما له نمط مُتكرِّر، وأنَّ أقصر جزء مُتكرِّر من التمثيل يُسمّى الدورة
- الطول الأفقي لكل دورة يُسمّى طول الدورة (period)، والتمثيل البياني للاقترانين يُظهِر أنَّ طول الدورة هو 2π.





⑮ الإقترانات الجيبية

الاقترانات الجيبية (sinusoidal functions) هـــي اقترانات الجيب وجيب التمام و الصورة العامة للاقترانات الجيبية هي:

$$y = a\sin(bx - c) + d \qquad\qquad y = a\cos(bx - c) + d$$

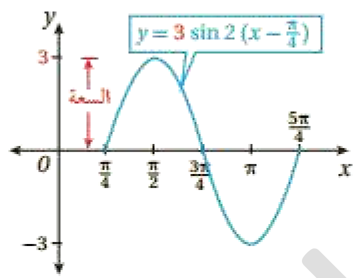
حيث: a, b, c, d أعداد حقيقية، و a و b لا يساويان صفرًا.

سعة الاقترانات الجيبية

بالكلمات: سعة منحنى الاقتران الجيبي هي نصف المسافة بين قيمتيه العظمى والصغرى، أو نصف ارتفاع الموجة.

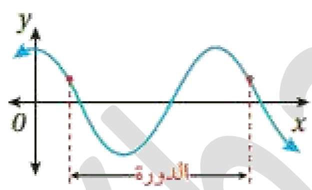
بالرموز: سعة كلٍّ من: $y = a\sin(bx-c)+d$، و $y = a\cos(bx-c)+d$، هي $|a|$.

مثال:



طول دورة الاقترانات الجيبية

بالكلمات: طول دورة الاقتران الجيبي هو المســـافة بيـــن مجموعتين مُتكرِّرتيـــن من النقاط على منحناه.



بالرموز: طول دورة كلٍّ من: $y = a\sin(bx-c)+d$، و $y = a\cos(bx-c)+d$، هو $\frac{2\pi}{|b|}$، حيث: $b \neq 0$.

الحركة التوافقية البسيطة

إذا كانت المعادلة التي تصف الإزاحة y لجسم مع الزمن t هي:

$$y = a\sin\omega t \qquad \text{or} \qquad y = a\cos\omega t$$

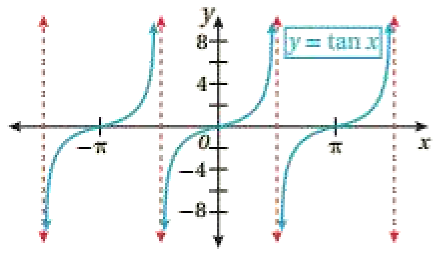
فإنَّ الجسم يكون في **حركة توافقية بسـيطة** (simple harmonic motion)، عندئذٍ يُمكِن إيجاد ما يأتي:

- أقصى إزاحة للجسم، وهي تساوي سعة الاقتران $|a|$.
- الزمن الذي يُكمِل فيه الجسم دورة كاملة، وهو يساوي $\frac{2\pi}{\omega}$.
- **التردُّد** (frequency)، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن، وهو يساوي $\frac{\omega}{2\pi}$.

16 إقتران الظل

يمتاز الاقتران $y = \tan x$ بالخصائص الآتية:

- طول الدورة هو π.
- المجال هو جميع الأعـداد الحقيقية، ما عدا $\frac{\pi}{2}n$، حيـث n عدد صحيح فردي.
- المدى هو جميع الأعداد الحقيقية.



17 المتطابقات

المتطابقة : هي علاقة مساواة صحيحة لكل القيم

- متطابقات المقلوب:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- المتطابقات النسبية:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات فيثاغورس:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

- متطابقات الزاوية السالبة:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

- متطابقات المجموع:

- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$

- متطابقات الفرق:

- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$

- متطابقات ضعف الزاوية

صيغة الجيب	صيغ جيب التمام	صيغة الظلّ
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

- متطابقات لتخفيض القوة

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

- متطابقات نصف الزاوية

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

- متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)]$$

- متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

18 المعادلة المثلثية و حلها

- نسمي المعادلة التي تحوي اقترانات مثلثية معادلة مثلثية
- المعادلة المثلثية الأساسية : هي معادلة في صورة $T(\theta) = c$ حيث $T(\theta)$ أقتران مثلثي ، c ثابت
- لحل أي معادلة مثلثية يجب تبسيطها بحيث تصبح معادلة مثلثية أساسية

حلُّ المعادلات المثلثية الأساسية

لحل المعادلة المثلثية الأساسية نتبع ما يلي :

- نجد الحل ضمن فترة واحدة
- نجد الحل العام بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى الحل أو الحلول الناتجة

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًا واحدًا

لحل معادلة مثلثية تحوي أقترانا مثلثيا واحدا نتبع ما يلي :

- نحول المعادلة المعطاة إلى معادلة مثلثية أساسية
- نقوم بحل المعادلة الناتجة حسب خطوات حل المعادلة الاساسية

حلُّ المعادلات المثلثية بالتحليل

- يمكن حل بعض المعادلات المثلثية بأستعمال التحليل ، مثل المعادلات في صورة معادلة تربيعية ، و المعادلات التي تتطلب أخراج عامل مشترك

حلُّ المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية

◄ تحوي بعض المعادلات المثلثية أقترانا مثلثيا أو أكثر ، و لكن يتعذر فصل هذه الأقترانات بالتحليل ، لذا يمكن حلها بالمتطابقات المثلثية ، إضافة لبعض العمليات الجبرية ، مع ملاحظة أن الناتج قد لا يحقق المعادلة الأصلية لذا يجب التحقق من صحة الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لضعف الزاوية

◄ يمكن حل معادلة مثلثية تحوي أقترانا مثلثيا لضعف الزاوية ، بحل المعادلة لإيجاد النسبة المثلثية لضعف الزاوية أولا ، ثم إجراء عملية القسمة لإيجاد قياس الزاوية

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لنصف الزاوية

◄ يمكن حل معادلة مثلثية تحوي أقترانا مثلثيا لنصف الزاوية ، بحل المعادلة لإيجاد النسبة المثلثية لنصف الزاوية أولا ، ثم إجراء عملية الضرب لإيجاد قياس الزاوية

تمت بحمد الله

مع أطيب تمنياتي لكم بالتوفيق و التفوق

دكتور خالد جلال