سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب النشاط

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1445 هـ - 2023 م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445هـ - 2023م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS ، المملكة المتحدة.

تشكل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي المسموح به قانونًا ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

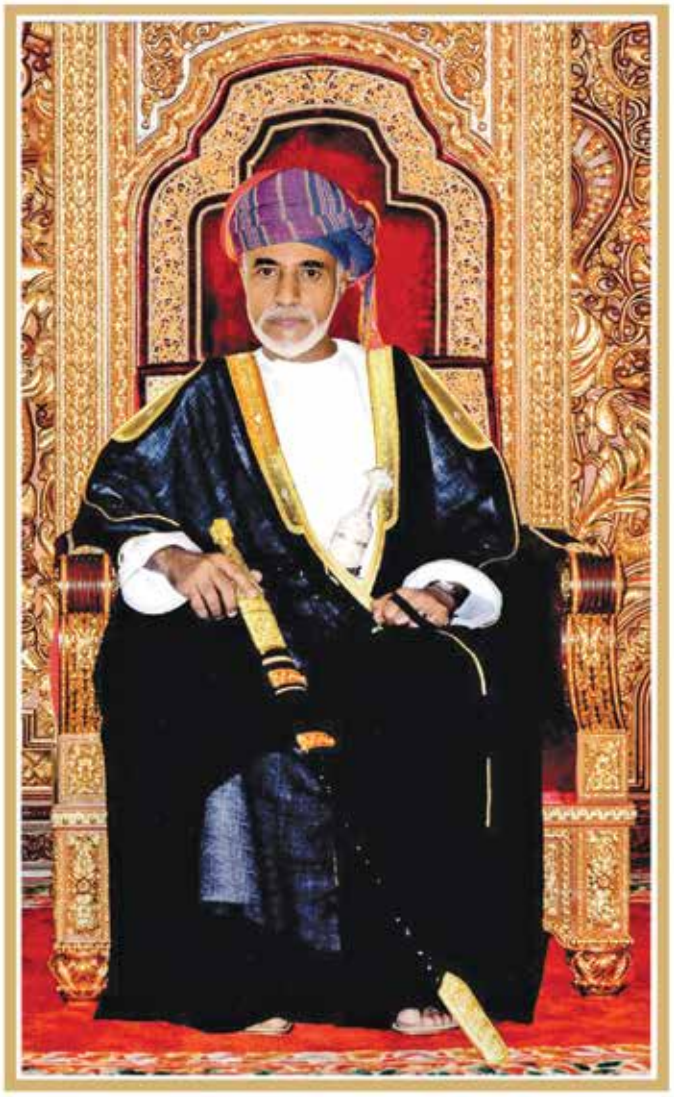
هذه نسخة تمت مواءمتها من كتاب النشاط – الرياضيات للصف الثاني عشر – من سلسلة Cambridge international AS & A level Mathematics 1، للمؤلفين موريل جايمز، ودين تشالمرز.

تمت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد الموقع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة جامعة كامبريدج.
لا تتحمل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توافر أو دقة المواقع الإلكترونية المستخدمة في هذا الكتاب ومصداقيتها، ولا تؤكد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه

جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم
لا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملًا أو مجزأً أو ترجمته أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال إلّا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.



المغفور له

السلطان قابوس بن سعيد

-طيّب الله ثراه-

حضرة صاحب الجلالة

السلطان هيثم بن طارق المعظم

-حفظه الله ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلاً مُمَجَّدًا
بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء
وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مُكوِّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقرّرات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلبة، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلبة النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

كيف تستخدم هذا الكتاب؟ xii

الوحدة الخامسة: المزيد من التفاضل

٥–١ قاعدة مشتقة ضرب دالتين ١٣
٥–٢ قاعدة مشتقة قسمة دالتين ١٧
٥–٣ مشتقات الدوال الأسّية ٢٠
٥–٤ مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية ٢٤
٥–٥ مشتقات الدوال المثلثية ٢٧
تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة ٣١

الوحدة السادسة: التكامل

٦–١ التكامل كعملية عكسيّة للتفاضل ٣٤
٦–٢ تكامل عبارات في صورة (أ س + ب)^{ن} ٣٩
٦–٣ المزيد من التكامل غير المحدود ٤١
٦–٤ إيجاد ثابت التكامل ٤٣
٦–٥ التكامل المحدود ٤٩
٦–٦ المساحة تحت منحنى الدالة ٥٢
٦–٧ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيَين ٥٧
٦–٨ حجوم الأجسام الدورانية ٦٠
تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة ٦٣

الوحدة السابعة: الأعداد المركبة

٧–١ الأعداد التخيلية ٦٧
٧–٢ الأعداد المركبة ٦٩
٧–٣ العمليات على الأعداد المركبة ٧٠
٧–٤ المستوى المركب ٧٣
٧–٥ حل المعادلات ٨١
تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة ٨٤

الوحدة الثامنة: التوزيع الطبيعي

٨–١ المتغير العشوائي المتصل والمنحنى الطبيعي ٨٩
٨–٢ التوزيع الطبيعي ٩٢
٨–٣ معيارية التوزيع الطبيعي ٩٩
٨–٣ أ معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات ٩٩
٨–٣ ب معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد و ، ع ، س ١٠٤
تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة ١٠٩
جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري ١١٣

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم. يعطي هذا الجزء صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥-١ تجد مشتقة ضرب دالتين، ومشتقة قسمة دالتين مكوناتها مضروبة بالثوابت، والجمع والطرح للدوال في صيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن).

٥-٢ تحدد النقاط الحرجة لدوال في صورة ضرب أو قسمة دالتين في صيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، وتحدد طبيعة (نوع) النقطة الحرجة، وتستخدم معلومات عن النقطة الحرجة لرسم المنحنيات مستخدمًا المشتقة الأولى.

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

مساعدة

تذكّر أن:

$\text{قتا س} = \frac{١}{\text{جا س}}$

$\text{قا س} = \frac{١}{\text{جتا س}}$

$\text{ظتا س} = \frac{١}{\text{ظا س}}$

مساعدة: إطارات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول محتوى الكتاب.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) إذا كانت هـ(س) = ٣س + لـط ٢س، فأوجِد:

أ هـ′(س)، ثم برهن أنه يوجد دالة عكسية لـ هـ(س).

مساعدة

إذا لم توجد قيم حرجة للدالة فهذا يعني أنه لا توجد نقاط عظمى أو صغرى وبالتالي الدالة واحد إلى واحد.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة:

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي أسئلة الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس، وقد تم ترميزها بنجمة صفراء.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

الوحدة الخامسة

المزيد من التفاضل
Further Differentiation

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥-١ تجد مشتقة ضرب دالتين، ومشتقة قسمة دالتين مكوناتها مضروبة بالثوابت، والجمع والطرح للدوال في صيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن).

٥-٢ تحدد النقاط الحرجة لدوال في صورة ضرب أو قسمة دالتين في صيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، وتحدد طبيعة (نوع) النقطة الحرجة، وتستخدم معلومات عن النقطة الحرجة لرسم المنحنيات مستخدمًا المشتقة الأولى.

٥-٣ تجد مشتقات الدوال الأسية (أساسها هـ) والدوال اللوغاريتمية الطبيعية مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، والضرب والقسمة للدوال والدوال المركبة.

٥-٤ تجد مشتقات جا س، جتا س مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، والضرب والقسمة للدوال والدوال المركبة.

٥-١ قاعدة مشتقة ضرب دالتين

Rule of the derivative of the product of two functions

تمارين ٥-١

١) أوجِد د′(س)، وحلل الناتج إلى العوامل في كلّ ممّا يأتي:

أ ١) د(س) = (س + ١)^{٤}(س − ٢)^{٥}

٢) د(س) = (س − ٣)^{٧}(س + ٥)^{٤}

ب ١) د(س) = (٢س − ١)^{٤}(١ − ٣س)^{٣}

٢) د(س) = (١ − س)^{٥}(٤س + ١)^{٢}

٢) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي:

أ) $ص = س\sqrt{س + ١}$

ب) $ص = ٢س\sqrt{٣ - س}$

ج) $ص = س^{٢}\sqrt{٣ - ٤س}$

د) $ص = (١ - ٣س)\sqrt{٢س + ٥}$

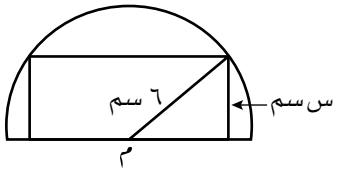
هـ) $ص = (٣س + ٥)^{٢}\sqrt{س - ٢}$

و) $ص = \sqrt{س}(٥س - ٤)^{٣}$

٣) أوجِد معادلة المماس على المنحنى $ص = س^{٢}(س + ١)^{٤}$ عند النقطة (١، ١٦).

٤) أوجِد إحداثيات النقطة الحرجة الواقعة على المنحنى $ص = س\sqrt{٢س + ٣}$

٥) يبيّن الرسم المجاور مستطيلًا داخل نصف دائرة نصف قطرها ٦ سم، ومركزها م.



إذا علمت أن عرض المستطيل س سم، فبيّن أن مساحة المستطيل تساوي ٢س $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$. احسب القيمة العظمى لهذه المساحة، وقيمة س عندها.

٦) أوجِد قيمة الإحداثي السيني للنقاط الحرجة الواقعة على المنحنى ص = (٣س + ١)^{٥}(٣ − س)^{٣}

٧) جسم حجمه ح معطى بالمعادلة ح = س^{٢} $\sqrt{٨ - س}$. استخدم المشتقة لتجد القيمة العظمى لـ ح، وقيمة س عندها.

٨) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} $\sqrt{١ + س}$ ، فبيّن أن د′(س) = $\frac{س(أ + ب\ س)}{٢\sqrt{١ + س}}$، حيث أ ، ب عددان ثابتان، وأوجد قيمتَي أ ، ب.

★ **٩)** أ إذا علمت أن أ < ب، وأن ل، ك عددان صحيحان موجبان، فأوجِد الإحداثي السيني للنقطة الحرجة الواقعة على منحنى الدالة ص = (س − أ)^{ل} (س − ب)^{ك} في الفترة أ < س < ب.

ب ارسم منحنى الدالة عندما ل = ٢، ك = ٣

ج باستخدام التمثيل البياني لمنحنى الدالة أو أي طريقة أخرى، حدد شرطًا على ل (و/أو) ك لتحديد متى تكون هذه النقطة الحرجة نقطة صغرى.

٢-٥ قاعدة مشتقة قسمة دالتين

Rule of the derivative of the quotient of two functions

تمارين ٢-٥

١) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي باستخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتين:

أ ١) $ص = \frac{س - ١}{س + ١}$

ب ١) $ص = \frac{\sqrt{٢س + ١}}{س}$

ج ١) $ص = \frac{١ - ٢س}{س^{٢} + ٢}$

٢) $ص = \frac{س + ٢}{س - ٣}$

٢) $ص = \frac{س^{٢}}{\sqrt{س - ١}}$

٢) $ص = \frac{٤ - س^{٢}}{١ + س}$

مساعدة

يمكن إيجاد مشتقة دالة ما، مثل $ص = \frac{٢س}{(س + ٣)^{٢}}$ بالنسبة إلى س، باستخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتين، أو إعادة كتابتها في صورة $ص = ٢س(س + ٣)^{-٢}$، واستخدام قاعدة مشتقة ضرب دالتين.

٢) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ $ص = \frac{س}{\sqrt{س + ١}}$

ب $ص = \frac{\sqrt{س - ٥}}{س}$

ج $ص = \frac{\sqrt{٣س + ٢}}{٢س}$

٣) أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة للمنحنى ص = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢س} - ١}$

٤) إذا علمت أن ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + ٢}$ يساوي ١ عند النقطة (أ، ٠)، حيث أ ≠ −٢، فأوجِد قيمة أ.

٥) أوجِد معادلة العمودي على مماس المنحنى ص = $\frac{\text{٢س} - ١}{\text{س}(\text{س} - ٣)}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى، والتي عندها س = ٢

٦) أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة لمنحنى الدالة ص = $\frac{\text{س}^{٢} + ٤}{\text{٢س} - \text{س}^{٢}}$

٧) إذا كانت د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\text{س} + ١}$ ، حيث س ≠ −١، فأوجد د′(س).

٨) إذا علمت أن ص = $\frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س} + ١}}$، فبيّن أن $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \frac{\text{س}(\text{أ س} + \text{ب})}{٢(\text{س} + ١)^{\text{ل}}}$، ثم أوجِد قيمة كل من أ، ب، ل.

٣-٥ مشتقات الدوال الأسّية Derivatives of exponential functions

تمارين ٣-٥

١) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) ص = هـ^{٣س}

ب) ص = ٣هـ$^{\frac{س}{٢}}$

ج) ص = ٤هـ$^{\sqrt{س}}$

د) ص = هـ$^{\frac{٢}{س}}$

هـ) ص = هـ$^{٣س - ٢}$

و) ص = هـ$^{٣س^{٢} + ١}$

ز) ص = $\frac{٢}{هـ^{٣س}}$

ح) ص = $(٢ + هـ^{٢س})^{٢}$

ط) ص = $\frac{١}{هـ^{س} + ٢}$

ي) ص = $\sqrt{١ - ٣هـ^{٤س}}$

ك) ص = $(١ + هـ^{٣س})^{٣}$

ل) ص = هـ$^{س}\sqrt{١ - ٤س}$

مساعدة

$\frac{ء}{ء س}(هـ^{س}) = هـ^{س}$

$\frac{ء}{ء س}(هـ^{د(س)}) = د'(س) \times هـ^{د(س)}$

$\frac{ء}{ء س}(هـ^{أس + ب}) = أ هـ^{أس + ب}$

م $ص = \frac{س^{٢} - ٢س هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}$

ن $ص = \frac{هـ^{٥س}}{٢هـ^{\sqrt{س}}}$

س $ص = هـ^{٣س}(١ - هـ^{س})^{٢}$

٢) إذا علمت أن للمنحنى ص = س $هـ^{-ك س}$ نقطة حرجة عند س = $\frac{٢}{٥}$، فأوجِد قيمة ك.

٣) أ أوجِد معادلتَي المماسَين للمنحنى ص = س $هـ^{س}$ عند س = ١، س = −١

ب أوجِد الإحداثي السيني لنقطة التقاطع بين المماسَين، واكتب الإجابة في أبسط صورة.

٤) أوجِد قيمة س إذا علمت أن ميل مماس منحنى الدالة د(س) = ٥ − ٢هـ^{س} يساوي −٦

٥) أوجِد معادلة المماس للمنحنى ص = هـ^{س} + س الموازي للمستقيم ص = ٣س.

٦) أوجِد مشتقة ص = (٣س^{٢} − س + ٢) هـ^{٢س}، وأعط الإجابة في صورة ل(س)هـ^{٢س}، حيث ل(س) كثيرة حدود.

٧) أوجِد الإحداثي السيني للنقاط الحرجة الواقعة على المنحنى ص = (٢س + ١)^{٥} هـ$^{-٢س}$.

٨) نظير مشعّ يتحلل وفقًا للصيغة م = ٦٠٠ + ٨٠هـ$^{(-٠,٠٠٤)ن}$، حيث م الكتلة بالجرام، ن الزمن بالسنوات بدءًا من الملاحظة الأولى، أوجِد:

أ قيمة ن عندما م = ٦٣٠

ب معدل التغيّر $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ الذي تتناقص عنده كتلة النظير عندما ن = ١٢٠ لأقرب ٣ أرقام معنوية.

٩) ★ بقعة زيت دائرية مساحتها م = ٢هـ$^{(٠,٠٥)^{ن}}$، حيث ن الزمن بالدقائق، م المساحة بالمتر المربع. أوجِد:

أ المعدل الذي تتزايد عنده مساحة بقعة الزيت بالدقيقة عندما ن = ٣

ب الزمن (لأقرب دقيقة) الذي تستغرقه بقعة الزيت لتصبح مساحتها ٦٥ م^{٢}

١٠) أوجِد معادلة العمودي على المماس للمنحنى ص = ٣هـ^{س} عند النقطة س = لـط ٣، وأعط الإجابة في الصورة س + ك ص = ل + لـط ق، حيث ك، ل، ق أعداد صحيحة.

٥-٤ مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية
Derivatives of natural logarithmic functions

تمارين ٥-٤

١) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) ص = لـط ٢س

ب) ص = لـط(٢س − ١)

ج) ص = لـط(١ − ٢س)

د) ص = لـط $س^{٢}$

هـ) ص = لـط(أ + ب س)

و) ص = لـط $\frac{١}{س}$

ز) ص = لـط $\left(\frac{١}{٣س + ١}\right)$

ح) ص = لـط $\left(\frac{٢س + ١}{٣س - ١}\right)$

ط) ص = ٣ لـط $س^{-٢}$

ي) ص = لـط(س(س + ١))

ك) ص = لـط$\left(س^{٢}(س - ١)\right)$

ل) ص = لـط$\left(س^{٢} + س - ٢\right)$

م $ص = \frac{\text{لط } ٣س}{س}$

ن $ص = \frac{\text{لط } ٢س}{س^{٢}}$

٢) أوجِد معادلة العمودي على مماس المنحنى ص = ٢هـ$^{-س}$ عند س = لط٢، وأعط الإجابة في الصورة أ س + ب ص = جـ + لط ك، حيث أ، ب، جـ، ك أعداد صحيحة.

٣) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س، وبسّط الناتج:

أ $ص = س^{٢}$ لط س

ب $ص = \frac{\text{لط } س}{س^{٢}}$

ج $ص = \frac{هـ^{س}}{س^{٢}هـ^{س} + ١}$

د $ص = س هـ^{س^{٢}}$

٤) بيّن أن للمعادلة د(س) = لط س + $\frac{١}{س^{ك}}$ نقطة حرجة إحداثيها الصادي $\frac{\text{لط } ك + ١}{ك}$

٥) أوجِد ميل المماس للمنحنى د(س) = هـ^{س} − $\frac{\text{لـط س}}{٢}$ عند س = لـط ٣

٥-٥ مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of trigonometric functions

تمارين ٥-٥

١) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) ص = – جا س

ب) ص = – جتا س

ج) ص = جا ٤س

د) ص = ٢جتا ٣س

هـ) ص = جا $\frac{١}{٢}\pi$ س

و) ص = جتا ٣π س

ز) ص = جتا (٢س – ١)

ح) ص = ٥ جا $\left(\frac{١}{٤}\pi + ٣س\right)$

ط) ص = جتا $\left(\frac{١}{٢}\pi - ٥س\right)$

ي) ص = – جا $\left(\frac{١}{٤}\pi - ٢س\right)$

ك) ص = – جتا $\left(\frac{١}{٢}\pi + ٢س\right)$

ل) ص = جا $\left(\frac{١}{٢}\pi (١ + ٢س)\right)$

مساعدة

من المهم أن تتذكر أنه في حساب التفاضل والتكامل، تُقاس جميع الزوايا بالراديان ما لم يُطلب في التمارين خلاف ذلك.

٢) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = جا^{٢}س

ب ص = جتا^{٢}س

ج ص = جتا^{٣}س

د ص = ٥ جا$^{٢}\frac{١}{٢}$س

هـ ص = جتا^{٤}٢س

و ص = جا س^{٢}

ز ص = ٧ جتا ٢س^{٣}

ح ص = جا$^{٢}\left(\frac{١}{٢}\text{س} + \pi\frac{١}{٣}\right)$

ط ص = جتا^{٣}٢ π س

ي ص = جا^{٣}س^{٢}

ك ص = جا^{٢}س^{٢} + جتا^{٢}س^{٢}

ل ص = جتا$^{٢}\frac{١}{٢}$س

٣) أ بيّن أن $\frac{د}{د\text{س}}$ (لطـ(قتا س)) = − ظتا س، $\frac{د}{د\text{س}}$ (لطـ(جتا س)) = − ظا س

مساعدة

تذكّر أن:

قتا س = $\frac{١}{\text{جا س}}$

قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

ظتا س = $\frac{١}{\text{ظا س}}$

ب استخدم هذه النتائج، ونتائج أخرى لتجد مشتقة كل ممّا يأتي بدلالة س:

١) ص = لـط(جا ٢س)

٢) ص = لـط(جتا ٣س)

٣) ص = لـط(جا^{٢} س)

٤) ص = لـط(جتا^{٣} ٢س)

٤) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = هـ$^{\text{جا س}}$

ب ص = هـ$^{\text{جتا ٣س}}$

ج ص = ٥هـ$^{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$

٥) أوجِد معادلة كل من المماس، والعمودي عليه للمنحنى ص = ٣ ظا س − ٢$\sqrt{٢}$ جا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$، وأعطِ كل المعاملات في صورة أعداد صحيحة أو مضاعفات π.

٦) إذا علمت أن ص = $\frac{١}{٤}$ ظا س + $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$، ٠ < س ≤ ٢π، فحلّ المعادلة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١ − $\frac{٢}{\text{س}^{٣}}$

★ **٧)** أ) عبّر عن قا^{٢}س بدلالة ظا س.

ب) لتكن ص = ظا$^{-١}$(س). اكتب أولًا س بدلالة ص، ثم برهن أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{١ + س^{٢}}$.

مساعدة

ظا(ظا$^{-١}$س) = س

ج) أوجِد معادلة العمودي على المنحنى ص = ظا$^{-١}$(٣س) عند النقطة، التي إحداثيها السيني يساوي س = $\frac{١}{٣\sqrt{٧}}$.

مساعدة

ظا(ظا$^{-١}$ أ س) = أ س

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) إذا كانت هـ(س) = ٣س + لـط ٢س، فأوجِد:

أ هـ′(س)، ثم برهن أنه يوجد دالة عكسية لـ هـ(س).

مساعدة

إذا لم توجد قيم حرجة للدالة فهذا يعني أنه لا توجد نقاط عظمى أو صغرى وبالتالي الدالة واحد إلى واحد.

ب ميل مماس منحنى الدالة هـ′(س) عند س = ٣

٢) تتدلى سلسلة بين عمودَين، ويتمثل ارتفاعها ع فوق الأرض بالمعادلة ع(س) = هـ^{س} + $\frac{١}{هـ^{٢س}}$،
حيث −١ ≤ س ≤ ٢، يقع العمود الأول عند س = −١، ويقع العمود الثاني عند س = ٢

أ اذكر أيّ عمود هو الأطول، مبرّرًا إجابتك.

ب بيّن أن القيمة الصغرى لارتفاع السلسلة فوق الأرض تكون عندما س = $\frac{١}{٣}$ لـط ٢

ج أوجِد القيمة الدقيقة للقيمة الصغرى لارتفاع السلسلة فوق الأرض.

٣) إذا كانت ص = هـ$^{٣س^{٢} - ٦س}$، فأوجِد $\frac{د ص}{د س}$

٤) أ بيّن أن $\frac{د}{د س}$ (قتا س) = − قتا س ظتا س

ب أوجِد إحداثيات النقاط الواقعة على المنحنى ص = قتا س، حيث ٠ ≤ س ≤ π عندما يكون ميل مماس المنحنى مساويًا لـ ٢ $\sqrt{٣}$

٥) أوجد القيمة الصغرى الموجبة لـ س عندما يكون:

أ ميل مماس المنحنى ص = جتا س + ٢س + ١ يساوي ٢

ب ميل مماس المنحنى ص = ظا س − جا س يساوي صفرًا.

٦) أوجد القيمة الصغرى الموجبة لـ س عندما يكون ميل المنحنيات الآتية يساوي صفرًا:

أ ص = س − $\frac{\sqrt{٣}}{٧}$ جا س

ب ص = لط(س) − س^{٢}

الوحدة السادسة

التكامل Integration

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٦-١ تفهم التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل، وتجد تكامل (أس + ب)^{ن} (لأي عدد نسبي ن ما عدا −١)، مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح للدوال.

٦-٢ تحسب ثابت التكامل.

٦-٣ تحسب التكامل المحدود.

٦-٤ تستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة لمنطقة محصورة بين منحنى ومستقيمات متوازية مع المحورَين، أو بين منحنى ومستقيم، أو بين منحنيَين.

٦-٥ تستخدم التكامل المحدود لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنى، وأحد المحورَين.

٦-١ التكامل كعملية عكسيّة للتفاضل

Integration as the reverse of differentiation

تمارين ٦-١

١) أوجِد د(س) لكل ممّا يأتي:

أ) د′(س) = ٤س^{٣}

ب) د′(س) = ٦س^{٥}

ج) د′(س) = ٢س

د) د′(س) = ٣س^{٢} + ٥س^{٤}

هـ) د′(س) = ١٠س^{٩} − ٨س^{٧} − ١

و) د′(س) = −٧س^{٦} + ٣س^{٢} + ١

مساعدة

إذا كانت د′(س) = س^{ن}، فإن

د(س) = $\frac{١}{ن + ١}$ س$^{ن + ١}$ + جـ،

حيث جـ عدد ثابت، ن ≠ −١

٢) أوجِد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ ١) $\int ٥ \, د س$

٢) $\int س^{\frac{١}{٣}} \, د س$

ب ١) $\int ٥ س^{\frac{٢}{٣}} \, د س$

٢) $\int ١٤ س^{\frac{٢}{٤}} \, د س$

ج ١) $\int \frac{٥}{٤} س^{\frac{١}{٤}} \, د س$

٢) $\int -\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} \, د س$

د ١) $\int -\frac{٧ س^{\frac{٤}{٣}}}{٦} \, د س$

٢) $\int \frac{١٤ س^{\frac{٢}{٥}}}{١٥} \, د س$

هـ ١) $\int (٥ س - ٧ س^{\frac{٥}{٢}}) \, د س$

٢) $\int (٦ + \frac{س}{٣} - ١٢ س^{\frac{١}{٢}}) \, د س$

و ١) $\int س^{-٢} \, د س$

٢) $\int س^{-٣} \, د س$

ز ١) $\int س^{-\frac{١}{٣}}\ ى س$

٢) $\int س^{-\frac{١}{٤}}\ ى س$

ح ١) $\int -٤س^{-\frac{٢}{٣}}\ ى س$

٢) $\int -٥س^{-\frac{٣}{٢}}\ ى س$

ط ١) $\int \left(س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٦س^{-٤}}{٥}\right) ى س$

٢) $\int \left(٣س^{-٥} + ٧س^{-\frac{١}{٦}}\right) ى س$

٣) إذا كانت د′(س) = $\frac{س^{٣}}{٢} - ٦س^{-\frac{٥}{٣}} + ٢$، فأوجِد د(س).

٤) أوجِد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ ١) $\int (٢س + ٣)(س + ١)\ ى س$

٢) $\int ٣س^{٢}(س - ٢)\ ى س$

ب ١) $\int \sqrt{س}(٥س + ٤)\ ى س$

٢) $\int \sqrt[٣]{س}(٢س^{٢} + ٣)\ ى س$

ج ١) $\int (\sqrt[٤]{س} + ٣س)^{٢}$ ء س

٢) $\int (\sqrt[٧]{س} - س^{٢})^{٢}$ ء س

د ١) $\int (س - \frac{١}{س})^{٢}$ ء س

٢) $\int (٢س + \frac{١}{س^{٢}})(٢س - \frac{١}{س^{٢}})$ ء س

٥) أوجِد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ ١) $\int \frac{٧س - ٢}{س^{٣}}$ ء س

٢) $\int \frac{٢ + ٥س}{٤س^{٣}}$ ء س

ب ١) $\int \frac{\sqrt[٧]{س} - ٣}{س^{٢}}$ ء س

٢) $\int \frac{س^{٢} - ٦س}{\sqrt[٧]{س}}$ ء س

٦) لتكن ص = $\frac{(س + ٢)(س - ٢)}{٢\sqrt[٧]{س}}$:

أ ضع ص في الصورة أ $س^{\frac{٣}{٢}}$ + ب $س^{-\frac{١}{٢}}$، حيث أ، ب عددان ثابتان، ثم أوجد قيمة كل من أ ، ب.

ب أوجِد $\int$ ص ء س

٧) بيّن أن $\int \left(١٢ \sqrt{س} - \frac{٤}{\sqrt{س}} \right) ى س = ٨ \sqrt{س} (س - ١) + جـ$.

٨) أوجِد $\int \frac{(س + ٤)^{٢}}{٨ س \sqrt{س}} ى س$

٦-٢ تكامل عبارات في صورة (أ س + ب)^{ن}

Integration of expressions of the form $(ax + b)^n$

تمارين ٦-٢

١) أوجِد كلًّا من التكاملات غير المحدودة الآتية:

أ ١) $\int 5(س + 3)^{4}\ د س$

٢) $\int (س - 2)^{5}\ د س$

ب ١) $\int (4س - 5)^{7}\ د س$

٢) $\int \left(\frac{1}{8} س + 1\right)^{3}\ د س$

ج ١) $\int 4\left(3 - \frac{1}{2} س\right)^{6}\ د س$

٢) $\int (4 - س)^{8}\ د س$

د ١) $\int \sqrt[7]{2س - 1}\ د س$

٢) $\int 7(2 - 5س)^{\frac{3}{4}}\ د س$

هـ ١) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{س}{3} + 2}}\ د س$

٢) $\int \frac{6}{(4 - 3س)^{2}}\ د س$

٢) أوجِد تكامل كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ $(٢س + ١)^{٦}$

ب $(٣س - ٥)^{٤}$

ج $(١ - ٧س)^{٣}$

د $\left(\frac{١}{٢}س + ١\right)^{١٠}$

هـ $(٥س + ٢)^{-٣}$

و $٢(١ - ٣س)^{-٢}$

ز $\frac{١}{(س + ١)^{٥}}$

ح $\frac{٣}{٢(٤س + ١)^{٤}}$

ط $\sqrt[٧]{١٠س + ١}$

ي $\frac{١}{\sqrt[٧]{٢س - ١}}$

ك $\left(\frac{١}{٢}س + ٢\right)^{\frac{٢}{٣}}$

ل $\frac{٨}{\sqrt[٤]{٢ + ٦س}}$

٦-٣ المزيد من التكامل غير المحدود Further indefinite integration

تمارين ٦-٣

١ أ أوجِد مشتقة $(س^{٢} + ٣)^{٥}$ بالنسبة إلى س.

ب أوجِد $\int ٢س(س^{٢} + ٣)^{٤}\ ى س$

٢ أ أوجِد مشتقة $(٢ - ٣س^{٢})^{٥}$ بالنسبة إلى س.

ب أوجِد $\int س(٢ - ٣س^{٢})^{٤}\ ى س$

٣ أ إذا علمت أن $ص = \frac{١}{٣س^{٢} - ١}$، فبيّن أن $\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ك س}{(٣س^{٢} - ١)^{٢}}$، وأوجِد قيمة ك.

ب أوجِد $\int \frac{٤س}{(٣س^{٢} - ١)^{٢}}\ ى س$

٤) أ أوجِد مشتقة $\frac{١}{(١ - ٢س^{٢})^{٣}}$ بالنسبة إلى س.

ب أوجِد $\int \frac{٣س}{(١ - ٢س^{٢})^{٤}} \, د س$

٥) أ أوجِد مشتقة $(س^{٢} - ٤)^{٤}$ بالنسبة إلى س.

ب أوجِد $\int ٤س(س^{٢} - ٤)^{٣} \, د س$

٦) أ أوجِد مشتقة $(\sqrt{س} + ١)^{٥}$ بدلالة س.

ب أوجِد $\int \frac{(\sqrt{س} + ١)^{٤}}{\sqrt{س}} \, د س$

٦-٤ إيجاد ثابت التكامل Finding the constant of integration

تمارين ٦-٤

١) أوجِد معادلة منحنى الدالة إذا علمت أن:

أ ١) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = س، والمنحنى يمر بالنقطة (-٢، ٧).

٢) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٦س^{٢}، والمنحنى يمر بالنقطة (٠، ٥).

ب ١) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$، والمنحنى يمر بالنقطة (١، -١).

٢) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$، والمنحنى يمر بالنقطة (١، ٣).

ج ١) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣س - ٥، والمنحنى يمر بالنقطة (٢، ٦).

٢) $\frac{د ص}{د س} = ٣ - ٢س^{٣}$، والمنحنى يمر بالنقطة (١، ٥).

د ١) $\frac{د ص}{د س} = ٣\sqrt{س}$، والمنحنى يمر بالنقطة (٩، −٢).

٢) $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\sqrt{س}}$، والمنحنى يمر بالنقطة (٤، ٨).

٢) إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى الدالة هو $\frac{د ص}{د س} = س - \frac{١}{س^{٢}}$، والمنحنى يمر بالنقطة (١، ٣)، فأوجِد معادلة المنحنى.

٣) إذا كانت د′(س) = $\frac{٢س - ١}{\sqrt{س}}$، د(٤) = ٢، فأوجِد د(س).

٤) إذا كانت د′(س) = $\sqrt{س}$ (٥س − ٤)، د (١) = $\frac{١٩}{٣}$، فأوجِد د(٤).

٥) يتناسب ميل مماس المنحنى عند أي نقطة طرديًا مع الإحداثي السيني لهذه النقطة. إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة ا(٣، ٢)، وميل مماسه عند ا يساوي ١٢، فأوجِد معادلة المنحنى.

٦) ميل مماس المنحنى $\frac{ى ص}{ى س}$ = س^{٢} − ٤:

أ أوجِد الإحداثي السيني للنقطة العظمى.

ب إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٢)، فبيّن أن الإحداثي الصادي للنقطة العظمى يساوي ٧$\frac{١}{٣}$

٧) منحنى ميل العمودي على مماسه عند أي نقطة يساوي مربع الإحداثي السيني لهذه النقطة. إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٣)، فأوجِد معادلة المنحنى في صورة ص = د(س).

٨) شجرة ارتفاعها الآن ٥ سم، وتنمو بحيث يزداد ارتفاعها بمعدل $\frac{٣٠}{\sqrt[٣]{ن}}$ سم في السنة، حيث ن عدد السنوات.

أ أوجِد ارتفاع الشجرة بعد مرور ٤ سنوات.

ب بعد مرور كم سنة يصبح ارتفاع الشجرة ٤,١ مترًا؟

٩) إذا علمت أن د′(س) = ٩س^{٢} + ٤س + جـ، حيث جـ عدد ثابت، د(٢) = ١٤، د(٣) = ٧٤، فأوجِد قيمة د(٤).

١٠ أوجِد معادلة المنحنى بمعلومية $\frac{د ص}{د س}$، والنقطة ل التي تقع على المنحنى في كل مما يأتي:

أ $\frac{د ص}{د س} = (س - ٢)^{٣}$، ل(٣، ٤)

ب $\frac{د ص}{د س} = \sqrt{٤ - س}$، ل(٠، ٢)

ج $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\sqrt[٣]{٣س - ٥}}$، ل(٢، ١)

د $\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{(١ - ٣س)^{٣}}$، ل$(٠، \frac{١}{٢})$

١١ إذا علمت أن $\frac{د ص}{د س} = ك(٢س - ١)^{٢}$، حيث ك عدد ثابت، وميل العمودي على المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١، ٥) يساوي $-\frac{١}{٦}$، فأوجِد معادلة المنحنى.

١٢ إذا علمت أن $\frac{د ص}{د س} = ك - س^{-\frac{١}{٢}}$، س $>$ ٠، والمنحنى يمر بالنقطتَين ا(١، -٢)، ب(٤، ٥)، فأوجِد:

أ قيمة ك.

ب معادلة العمودي على المماس للمنحنى عند النقطة ا.

١٣) إذا علمت أن $\frac{د ص}{د س} = ١٠س^{\frac{٢}{٣}} - ٢س^{-\frac{١}{٢}}$، حيث س $\geq$ ٠، والمنحنى يمر بالنقطة (٠، ٧)، فأوجِد معادلة المنحنى.

١٤) سقطت بقعة حبر على قطعة من القماش، وبدأت بالتوسع في المساحة بمعدل $\frac{٢}{\sqrt{٧ن}}$ سم^{٢} في الدقيقة. بافتراض أنها تنتشر بشكل غير منتظم، ما المدة التي ستستغرقها البقعة لتصبح مساحتها ٤٠ سم^{٢}؟

١٥) إذا علمت أن $\frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢} - ٤س - ١$، والمماس على المنحنى عند النقطة ا التي إحداثيها السيني ٢ يمر بنقطة الأصل، فأوجِد معادلة المنحنى.

٦-٥ التكامل المحدود The definite integration

تمارين ٦-٥

١) أوجِد قيمة كلّ من التكاملات المحدودة الآتية:

مساعدة

$$\int_{أ}^{ب} (د(س) \pm هـ(س)) \, ى س = \int_{أ}^{ب} د(س) \, ى س \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, ى س$$

أ ١) $\int_{٢}^{٦} س^{٣} \, ى س$

٢) $\int_{٤}^{٥} س^{٤} \, ى س$

ب ١) $\int_{-٢}^{٢} ٣س^{٥} \, ى س$

٢) $\int_{-٣}^{٣} ٢س^{٢} \, ى س$

ج ١) $\int_{-٣}^{-١} (٦س^{٢} - ٣) \, ى س$

٢) $\int_{-٤}^{-٢} (٣س^{٢} - ٤) \, ى س$

د ١) $\int_{١}^{٤} (س^{٢} + س) \, ى س$

٢) $\int_{-٢}^{١} (٣س^{٢} - ٥س) \, ى س$

هـ ١) $\int_{٤}^{٩} ٢\sqrt{س}\ ى س$

٢) $\int_{٥}^{٥} ٦\sqrt[٣]{س}\ ى س$

و ١) $\int_{١}^{١٦} \frac{٦}{\sqrt{س}}\ ى س$

٢) $\int_{-٣}^{-١} \frac{٣}{س^{٢}}\ ى س$

ز ١) $\int_{-٤}^{-٢} \left(١ + \frac{٢}{س^{٢}}\right) ى س$

٢) $\int_{-٣}^{-١} \left(٢س - \frac{١}{س^{٢}}\right) ى س$

٢) أوجِد قيمة كلّ من التكاملات المحدودة الآتية:

أ $\int_{٠}^{٨} ١٢\sqrt[٣]{س}\ ى س$

ب $\int_{١}^{٢} \frac{٣}{س^{٢}}\ ى س$

ج $\int_{١}^{٤} \frac{١٠}{\sqrt{س}}\ ى س$

د $\int_{١}^{٢} \left(\frac{٨}{س^{٣}} + س^{٣}\right) ى س$

هـ $\int_{٤}^{٩} \frac{٢\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س}}\ ى س$

و $\int_{١}^{٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\ ى س$

٣) أوجِد قيمة $\int_{٢}^{٨} \left(٣\sqrt{س} - ٢س\right) ى س$، ثم اكتب الناتج في صورة $أ + ب\sqrt{٢}$.

٤) إذا علمت أن $\int_{١}^{٣} \left(٩\sqrt{س} - \frac{٤}{\sqrt{س}} \right) ى س = أ + ب\sqrt{٣}$ ، حيث أ، ب عددان صحيحان، فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

٥) أوجِد قيمة التكامل $\int_{١}^{ك} \left(٢ - \frac{١}{س^{٢}} \right) ى س$ بدلالة ك.

٦) أوجِد قيمة التكامل $\int_{-أ}^{٢} س^{٢} (٤س - ٣) ى س$ بدلالة أ.

٧) أوجِد قيمة أ إذا علمت أن $\int_{١}^{أ} \sqrt{ع} ى ع = ٤٢$

٨) أوجِد كل القيم الممكنة للعدد ل إذا علمت أن $\int_{-٢}^{ل} \left(١ - \frac{١٠}{٣س^{٢}} \right) ى س = -\frac{٢}{٣}$

٦-٦ المساحة تحت منحنى الدالة Area under a curve

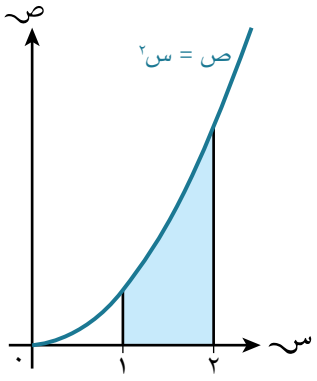
مساعدة

عندما تكون المساحات فوق المحور السيني وتحته في التمرين نفسه، عليك إيجاد كل مساحة على حدة.

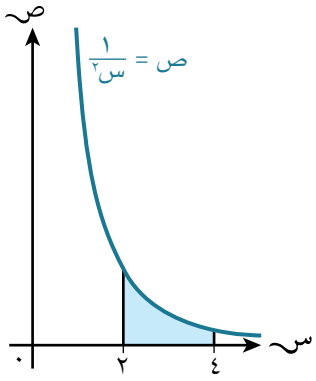
تمارين ٦-٦

١) أوجِد مساحة المنطقة المظللة في كل ممّا يأتي:

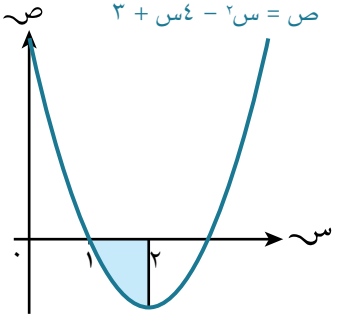
أ ١)



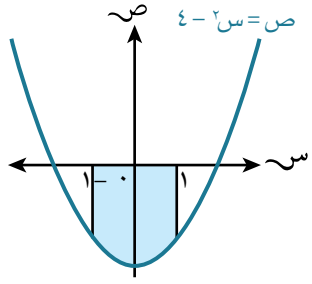
٢)

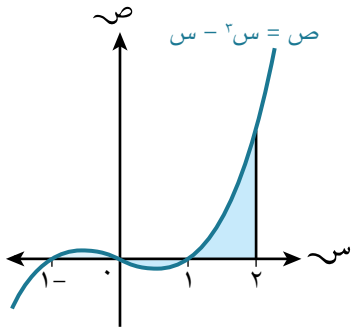


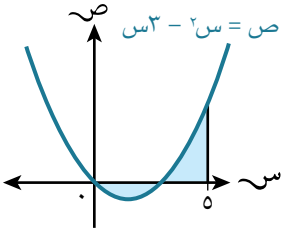
ب ١)



٢)



ج ١) 

٢) 

٢) أوجِد مساحة المنطقة المحصورة في كلّ ممّا يأتي:

مساعدة

حاول دائمًا أن ترسم المنحنى أولًا (إن لم يكن معطى) عندما تُسأل عن إيجاد المساحة.

أ ١) بين المنحنى ص = س٢ + ٢، والمحور السيني، والمستقيمَين س = ٢، س = ٥

٢) بين المنحنى ص = ٢س٢ + ١، والمحور السيني، والمستقيمَين س = ١، س = ٢

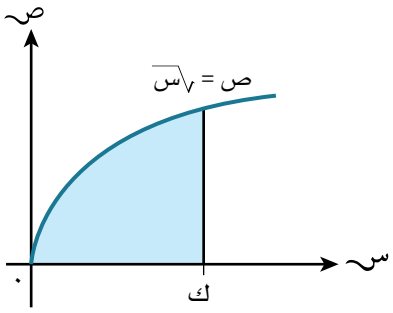
ب ١) بين المنحنى ص = ٤ – س٢، والمحور السيني.

٢) بين المنحنى ص = س٢ – ١، والمحور السيني.

ج ١) بين المنحنى ص = س^{٢} − ٩س، والمحور السيني.

٢) بين المنحنى ص = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢س، والمحور السيني.

٣) يبيّن الشكل أدناه المنحنى ص = $\sqrt{س}$. أوجد قيمة ك إذا علمت أن مساحة المنطقة المظللة تساوي ١٨



مساعدة

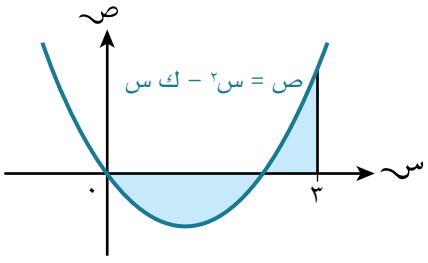
المساحة م المحصورة بين المنحنى ص = د(س)، والمحور السيني، والمستقيمين س = أ، س = ب تُعطى بالصيغة:

$م = \int_{أ}^{ب} ص \, د س$،

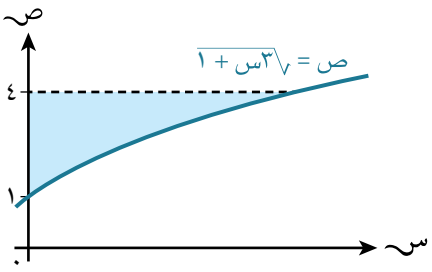
حيث ص ⩾ ٠

٤) أ) أوجِد إحداثيات النقاط التي يتقاطع فيها المنحنى ص = س^{٢} − ك س مع المحور السيني.

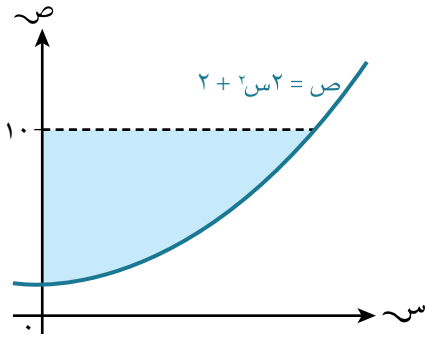
ب) مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين المنحنى ص = س^{٢} − ك س، والمحور السيني والمستقيمَين س = ٠، س = ٣. إذا علمت أن المساحة تحت المحور السيني مساوية للمساحة فوقه، فأوجِد قيمة ك.



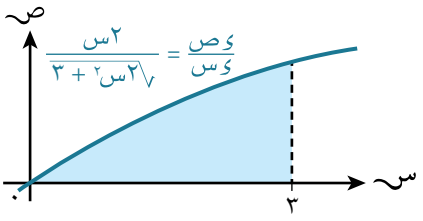
٥) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = $\sqrt[٣]{٣س + ١}$. أوجِد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى، والمحور الصادي، والمستقيم ص = ٤



٦) في الشكل المجاور: أوجِد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = ٢س^{٢} + ٢، والمستقيم ص = ١٠، والمحور الصادي.

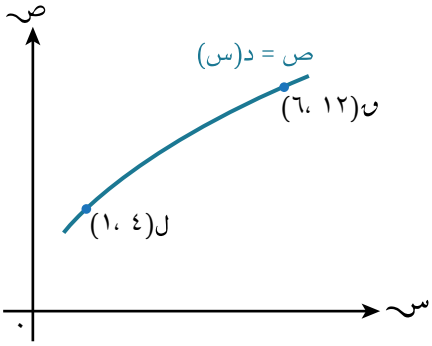


٧) أ بيّن أن $\frac{د}{د س}\left(\sqrt[٢]{٢س^{٢} + ٣}\right) = \frac{٢س}{\sqrt[٢]{٢س^{٢} + ٣}}$



ب استخدم النتيجة في الجزئية (أ) لتجد مساحة المنطقة المظللة.

٨) ★ يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى ص = د(س). تقع النقطتان ل(١، ٤)، ن(٦، ١٢) على المنحنى. إذا علمت أن $\int_{١}^{٦} ص\ د س = ٣٠$، فأوجِد قيمة $\int_{٤}^{١٢} س\ د ص$.



★ **٩)** إذا كانت د(س)، هـ(س) دالتَين حيث $\int_{0}^{4} د(س)\,ك س = ١٧$، $\int_{0}^{4} هـ(س)\,ك س = ١١$، فأوجِد حيث أمكن قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\int_{0}^{4} (د(س) - هـ(س))\,ك س$

ب $\int_{0}^{4} (٢د(س) + ٣ هـ(س))\,ك س$

ج $\int_{0}^{٢} د(س)\,ك س$

د $\int_{0}^{4} (د(س) + ٢س + ٣)\,ك س$

هـ $\int_{0}^{١} د(س)\,ك س + \int_{١}^{4} د(س)\,ك س$

و $\int_{-4}^{0} هـ(س)\,ك س$

٦-٧ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيَين

Area bounded by a curve and a line or by two curves

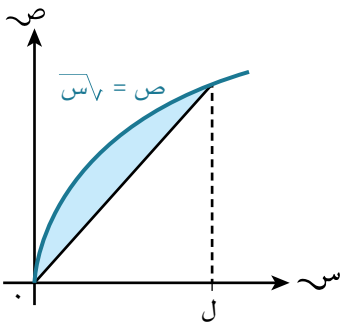
مساعدة

المساحة م = $\left|\int_{أ}^{ب} د(س)\ ى س - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ى س\right|$ أو

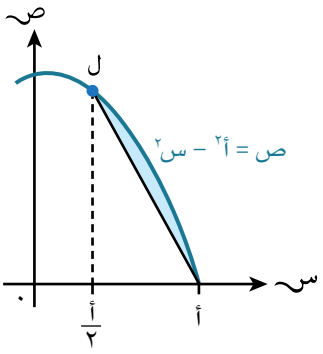
$م = \left|\int_{أ}^{ب} (د(س) - هـ(س))\ ى س\right|$

تمارين ٦-٧

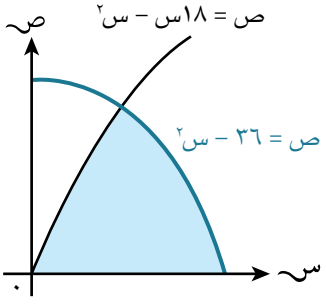
١) في الشكل المجاور، إذا علمت أن ص = $\sqrt{٧س}$، فأوجِد مساحة المنطقة المظللة بدلالة ل.



٢) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الدالة ص = $أ^{٢} - س^{٢}$. أوجِد مساحة المنطقة المظللة بدلالة أ إذا علمت أن الإحداثي السيني للنقطة ل هو $\frac{أ}{٢}$.

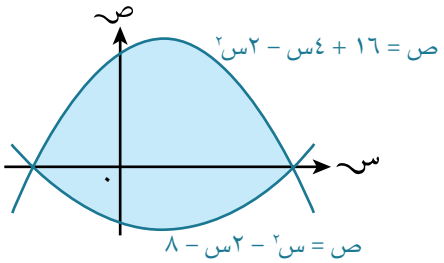


٣) يبيّن الشكل المجاور المنحنيَين ص = ٣٦ - $س^{٢}$، ص = ١٨س - $س^{٢}$. أوجِد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنيَين، والمحور السيني.



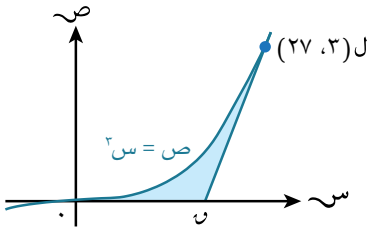
٤) أوجِد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم ص = ١٢س + ١٤، والمنحنى ص = ٣س^{٢} + ٦س + ٥

٥) يبيّن الشكل المجاور المنحنيَين ص = ١٦ + ٤س − ٢س^{٢}، ص = س^{٢} − ٢س − ٨. أوجِد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنيَين.

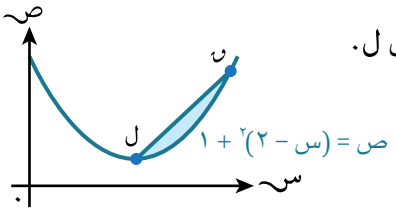


٦) أوجِد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيَين ص = (س − ٤)(٣س − ١)، ص = (٤ − س)(١ + س).

٧) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = س^{٣}. إذا علمت أن $\overline{\text{ل ن}}$ مماس على المنحنى عند ل(٣، ٢٧)، فأوجِد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى، والمماس $\overline{\text{ل ن}}$، والمحور السيني.



٨) يبيّن الرسم المجاور المنحنى ص = (س − ٢)^{٢} + ١، والنقطة الصغرى ل.



إذا علمت أن النقطتَين ن، ل تقعان على المنحنى حيث ميل $\overline{ل ن}$ يساوي ٢، فأوجِد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين ل ن، والمنحنى.

٩) بيّن أن المساحة المحصورة بين المنحنيَين ص = ٩ − س^{٢}، ص = س^{٢} − ٧ تساوي $\frac{١٢٨\sqrt{٢}}{٣}$ وحدة مربعة.

٦-٨ حجوم الأجسام الدورانية Volumes of revolution

مساعدة

حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران الدالة ص = د(س) حول محور السينات دورة كاملة بين القيمتين س = أ، س = ب:

$ع = \pi \int_{أ}^{ب} ص^{٢} \, ى س$

حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران س = د(ص) حول محور الصادات دورة كاملة بين القيمتين ص = أ، ص = ب:

$ع = \pi \int_{أ}^{ب} س^{٢} \, ى ص$

تمارين ٦-٨

١) أوجِد حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنحنى ص = د(س) بين المستقيمَين س = أ، س = ب دورة كاملة (٣٦٠°) حول المحور السيني في كل ممّا يأتي:

أ) د(س) = س + ٣، أ = ٣، ب = ٩

ب) د(س) = $س^{٢}$ + ١، أ = ٢، ب = ٥

ج) د(س) = $\sqrt{س + ١}$، أ = ٠، ب = ٣

د) د(س) = س(س − ٢)، أ = ٠، ب = ٢

٢) أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران كل من المنحنيات الآتية بين المستقيمَين ص = جـ، ص = د دورة كاملة (٣٦٠°) حول المحور الصادي:

أ) د(س) = $س^{٢}$، جـ = ١، د = ٣

ب) د(س) = س + ١، جـ = ١، د = ٤

ج د(س) = $\sqrt[7]{س}$، جـ = ٢، د = ٧

د د(س) = $\frac{١}{س}$، جـ = ٢، د = ٥

هـ د(س) = $\sqrt[7]{٩ - س}$، جـ = ٠، د = ٣

و د(س) = $س^{٢} + ١$، جـ = ١، د = ٤

ز د(س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$، جـ = ١، د = ٥

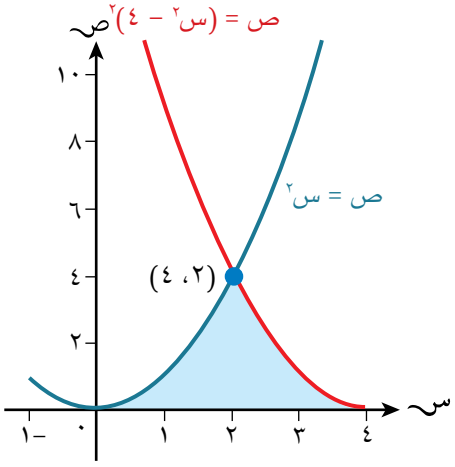
ح د(س) = $\frac{١}{س} + ٢$، جـ = ٣، د = ٥

٣) أوجِد حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المحورَين السيني والصادي، والمستقيم س = ٢، والمنحنى ص = $\frac{١}{٨}س^{٢} + ٢$

٤) تم دوران جزء من المنحنى ص = ك $س^{٢}$، حيث ك عدد ثابت، حول المستقيمَين ص = ١، ص = ٣ دورة كاملة (٣٦٠°) حول المحور الصادي. إذا علمت أن حجم الجسم الدوراني يساوي ١٢π وحدة مكعبة، فأوجِد قيمة ك.

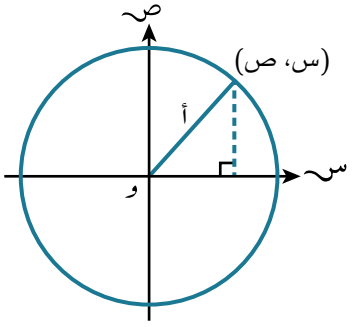
٥) تم دوران جزء من منحنى الدالة ص = $\frac{٩}{٢س + ٣}$ الواقع بين س = ٠، س = ٣ دورة كاملة (٢π) حول المحور السيني. أوجِد حجم الجسم الدوراني الناتج.

٦) يبيّن الشكل المجاور المنحنيَين ص = س^{٢}، ص = (س − ٤)^{٢} اللذين يتقاطعان في النقطة (٢، ٤).



إذا علمت أنه تم دوران المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنيين والمحور السيني والمستقيمين س = ٠، س= ٤، بمقدار ٢π حول المحور السيني، فأوجد حجم الجسم الدوراني الناتج بدلالة π.

٧) ★ في الشكل المجاور، دائرة معادلتها



س^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢}

تم دوران نصف الدائرة الواقع فوق المحور السيني دورة كاملة (٢π) لتشكل كرة نصف قطرها أ. برهن أن حجم الكرة (ح) = $\frac{٤}{٣}\pi$ أ^{٣}

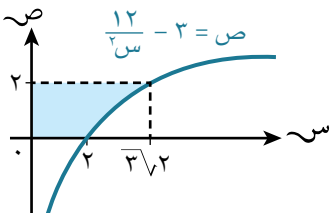
تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أوجِد معادلة المنحنى الذي دالة ميل مماسه $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣\text{س} - \sqrt{\text{س}}$، ويمر بالنقطة (٤، −١).

٢) أ) أوجِد قيمة $\int_{٢}^{٣\sqrt{٢}} \left(٣ - \frac{١٢}{\text{س}^٢}\right) \text{د س}$. واكتب الإجابة في صورة أ + ب $\sqrt{٣}$، حيث أ، ب عددان صحيحان.

ب) في الشكل المجاور: منحنى معادلته ص = ٣ − $\frac{١٢}{\text{س}^٢}$، ويقطع المحور السيني عند س = ٢

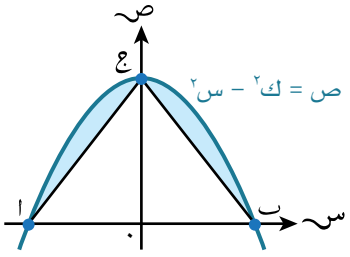
أوجِد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى، والمحور الصادي، والمستقيمَين ص = ٠، ص = ٢



٣) أ) أوجِد القيمة الموجبة للعدد أ إذا علمت أن $\int_{٠}^{\text{أ}} (\text{س}^٣ - \text{س}) \text{د س} = ٠$

ب) من خلال قيمة أ التي وجدتها في الجزئية (أ)، أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني، والمنحنى ص = س^٣ − س، حيث ٠ ≤ س ≤ أ.

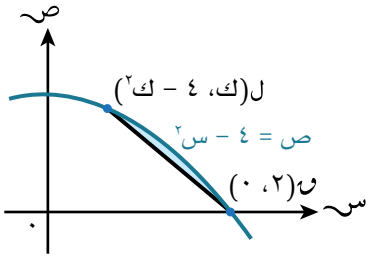
٤) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الدالة ص = ك^{٢} − س^{٢}. يقطع المنحنى المحور السيني في النقطتَين ا ، ب، والمحور الصادي في النقطة ع. أوجد:



أ إحداثيات النقاط ا، ب، ع بدلالة ك.

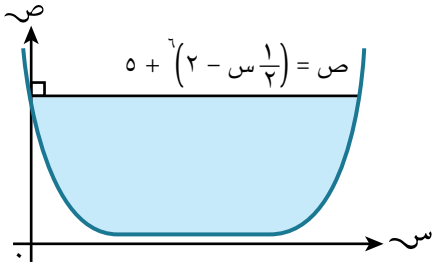
ب مساحة المنطقة المظللة بدلالة ك.

٥) ★ يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى ص = ٤ − س^{٢} الذي يمر بالنقطتين ل(ك، ٤ − ك^{٢})، ن(٢، ٠).



بيّن أن مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى، والقطعة المستقيمة ل ن تساوي $\frac{١}{٦}$(٢ − ك)^{٣}.

٦) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = $\left(\frac{١}{٢}\text{س} - ٢\right)^{٦}$ + ٥. أوجِد مساحة المنطقة المظللة.



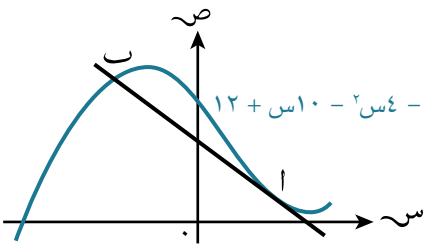
٧) لتكن ر المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = ٩ − س^{٢}، والمحور السيني. أوجد:

أ مساحة ر، ثم أوجِد $\int_{٠}^{٩} \sqrt{٩ - ص}\ ﻫ س$.

ب حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة (ر) ٣٦٠° حول المحور السيني.

ج حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة (ر) ٣٦٠° حول المحور الصادي.

٨) يبيّن الشكل المجاور المنحنى
ص = ٤س^{٣} − ٤س^{٢} − ١٠س + ١٢،
والمماس عند النقطة ا عند س = ١



أ أوجد معادلة المماس.

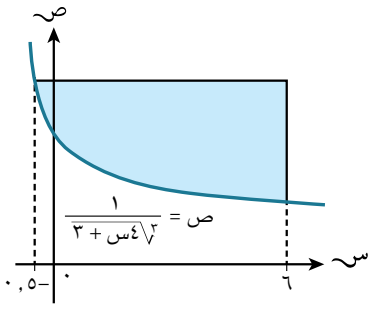
ب أثبت أن المماس يقطع المنحنى مرة أخرى في النقطة ب عند س = −١

ج أوجِد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى، والمماس ا ب.

٩) يتكون جسم دوراني ناتج من دوران المنطقة المحصورة بين جزء من المنحنى ص = (٣س − ١)$^{\frac{٣}{٢}}$، والمحور السيني، والمستقيمين س = $\frac{١}{٣}$ ، س = $\frac{٢}{٣}$ دورة كاملة. أوجد حجم الجسم الدوراني بدلالة π.

١٠) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٤س + ٣}}$.

أوجِد مساحة المنطقة المظللة.



الوحدة السابعة
الأعداد المركبة
Complex numbers

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٧–١ تتعرّف على مفهوم الأعداد المركبة، ومعنى المفردات: الجزء الحقيقي والجزء التخيلي، ومرافق ومقياس وسعة العدد المركب.

٧–٢ تستخدم حقيقة أن عددَين مركبَين يتساويان فقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان والجزآن التخيليان.

٧–٣ تجري عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة لعددَين مركبَين في صورة أ + ت ب.

٧–٤ تمثّل الأعداد المركبة بيانيًّا باستخدام مخطط أرجاند (Argand).

٧–٥ تحول الأعداد المركبة من صيغة إلى أخرى (ديكارتية، قطبية، أسية).

٧–٦ تنفذ عمليات الضرب والقسمة لعددَين مركبَين مكتوبَين في الصورة القطبية ر(جتا أ + ت جا أ) = ر هـ$^{ت أ}$.

٧–٧ تستخدم النتيجة أن كل جذر غير حقيقي في المعادلة كثيرة الحدود ذات المعاملات الحقيقية، مرافقة بعضها لبعض.

٧–٨ تجد الجذور التربيعية لعدد مركب، والجذور التكعيبية للواحد.

١–٧ الأعداد التخيلية Imaginary numbers

تمارين ١-٧

١) اكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

أ $\sqrt{-١٦٩}$

ب $\sqrt{-\frac{٦٤}{١٦٩}}$

ج $\sqrt{-٩٠}$

د $\sqrt{-٦٤} + \sqrt{-١٦}$

٢) بسط كلًّا مما يأتي:

أ $(-٥ت)^{٢} + ٥ت^{٢}$

ب $٣ت - (ت\sqrt{٣})^{٤}$

ج $\frac{١٦ت^{٢} - ٦٤ت^{٤}}{٤}$

د $\frac{-١٠}{١٢ت^{٢}}$

٧-٢ الأعداد المركبة Complex numbers

تمارين ٧-٢

١) حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $س^{٢} + \frac{٤}{٩} = ٠$

ب) $٣س^{٢} + ٤ = ٠$

ج) $١٦س^{٢} + ٢٥ = ٠$

٢) حل كلًّا من المعادلات التربيعية الآتية، واكتب الحل في صورة أ + ب ت، حيث أ، ب عددان حقيقيان:

أ) $ع^{٢} + ٩ = ٠$

ب) $ع^{٢} + ٤ع + ٥ = ٠$

ج) $ع^{٢} - ٦ع + ٢٥ = ٠$

د) $٢ع^{٢} + ٢ع + ١٣ = ٠$

٣) اكتب مرافق كل مما يأتي:

أ) $١ + ٧ت$

ب) $-٢ + ت$

ج) ٥

د) $٣ت$

٧-٣ العمليات على الأعداد المركبة
Operations on complex numbers

تمارين ٧-٣

١) إذا علمت أن ل = ٢ + ٣ت، ك = ٢ − ٣ت، فاكتب كلًّا مما يأتي في صورة أ + ب ت، حيث أ، ب عددان حقيقيان:

أ ل + ك

ب ل − ك

ج ل × ك

د (ل + ك)(ل − ك)

هـ $ل^{٢} - ك^{٢}$

و $ل^{٢} + ك^{٢}$

ز $(ل + ك)^{٢}$

ح $(ل - ك)^{٢}$

٢) إذا علمت أن ل = ٣ + ت، ق = ١ − ٢ت، فاكتب كلًّا مما يأتي في صورة أ + ب ت، حيث أ، ب عددان حقيقيان:

أ ل + ق

ب ل − ق

ج ٢ل + ق

د ل + ق ت

هـ ل × ق

و $ل^{٢}$

ز $\frac{ل}{ق}$

ح $\frac{ق}{ل}$

ط $\frac{ل}{ت}$

ي (١ + ت)ل

ك $\frac{ق}{١ + ت}$

ل $\frac{١ - ت}{ق}$

٣) إذا علمت أن (٢ + ت)(س + ص ت) = ١ + ٣ت، حيث س، ص عددان حقيقيان، فأوجد قيمتَي س، ص.

٤) إذا علمت أن ل = ٣ + ٤ت، ك = ١ − ت، ف = −٢ + ٣ت، فأوجد العدد المركب ع في كل مما يأتي:

أ ل + ع = ك

ب ٢ف + ٣ع = ل

ج ك ع = ف

د ل ع + ك = ف

٥) حل كل زوج من المعادلات الآنية لتوجد س، ص في كل مما يأتي:

أ $(١ + ت)س + (٢ - ت)ص = ٣ + ٤ت$

$ت س + (٣ + ت)ص = -١ + ٥ت$

ب $٥س - (٣ + ت)ص = ٧ - ت$

$(٢ - ت)س + ٢ت ص = -١ + ت$

٦) أوجد العدد المركب الذي يحقق المعادلتَين الآنيتَين $ع \times ع^{*} = ٢٥$، $ع + ع^{*} = ٦$، واكتب الناتج في صورة $أ + ب ت$، $(ب > ٠)$.

٧) أوجد المعادلة التربيعية ذات الجذرَين المعطيَين في كل مما يأتي:

أ $١ + ٢ت$، $١ - ٢ت$

ب $٣ + ٤ت$، $٣ - ٤ت$

ج $-١ + ت\sqrt{٥}$ ، $-١ - ت\sqrt{٥}$

٨) إذا علمت أن $س(١ + ٢ت) + ص(٢ - ت) = ٤ + ٣ت$، فأوجد القيمتَين الحقيقيتَين للعددَين س، ص.

٧-٤ المستوى المركب The complex plane

تمارين ٧-٤

١) عيّن النقاط ا، ب، ع التي تمثل الأعداد المركبة ت، ٣ − ت، ٤ + ٢ت على الترتيب في مخطط أرجاند.

٢) إذا علمت أن ل = ٢(جتا $\frac{١}{٣}\pi$ + ت جا $\frac{١}{٣}\pi$)، ك = جتا $\frac{١}{٤}\pi$ + ت جا $\frac{١}{٤}\pi$،

ق = ٤(جتا $(-\frac{٥}{٦}\pi)$ + ت جا $(-\frac{٥}{٦}\pi)$)، فاكتب كلًّا مما يأتي في الصورة القطبية:

أ ل × ك

ب $\frac{ل}{ك}$

ج $\frac{ق}{ل}$

د ل × ك*

٣) اكتب كلًّا مما يأتي في الصورة القطبية:

أ إذا علمت أن ق = جتا أ + ت جا أ، فاكتب ق* بدلالة أ.

ب إذا علمت أن ق = جتا أ + ت جا أ، فاكتب $\frac{١}{ق}$ بدلالة أ.

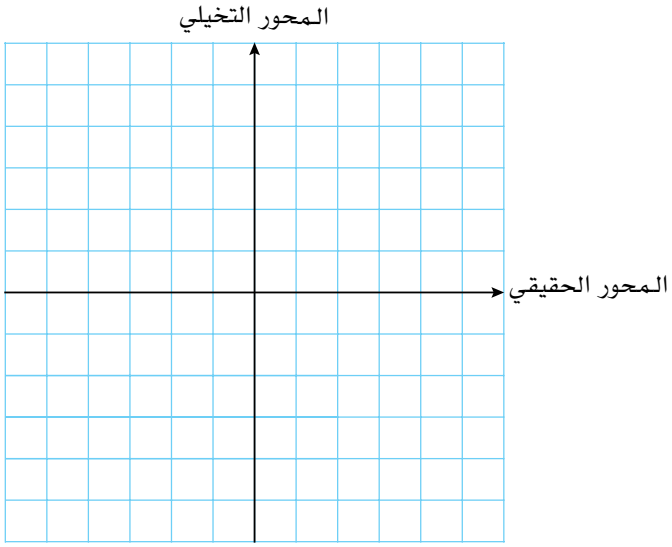
ج إذا علمت أن ك = ر(جتا أ + ت جا أ)، فاكتب ك* بدلالة ر، أ.

د إذا علمت أن ك = ر(جتا أ + ت جا أ)، فاكتب $\frac{١}{ك}$ بدلالة أ.

٤) أ اكتب ١ + ت$\sqrt{٣}$ ، ١ − ت في الصورة القطبية.

ب اكتب $\frac{(١ + ت\sqrt{٣})^{٤}}{(١ - ت)^{٦}}$ في صورة أ + ب ت.

٥) أ عيّن النقاط التي تمثل الأعداد المركبة:
ت، −ت، $\sqrt{٣}$ على مخطط أرجاند.



ب أوجد السعة لكل من الأعداد المركبة الآتية:

١) $\sqrt{٣} - ت$

٢) $\sqrt{٣} + ت$

٣) $\frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت}$

٤) $\frac{٢ت}{\sqrt{٣} + ت}$

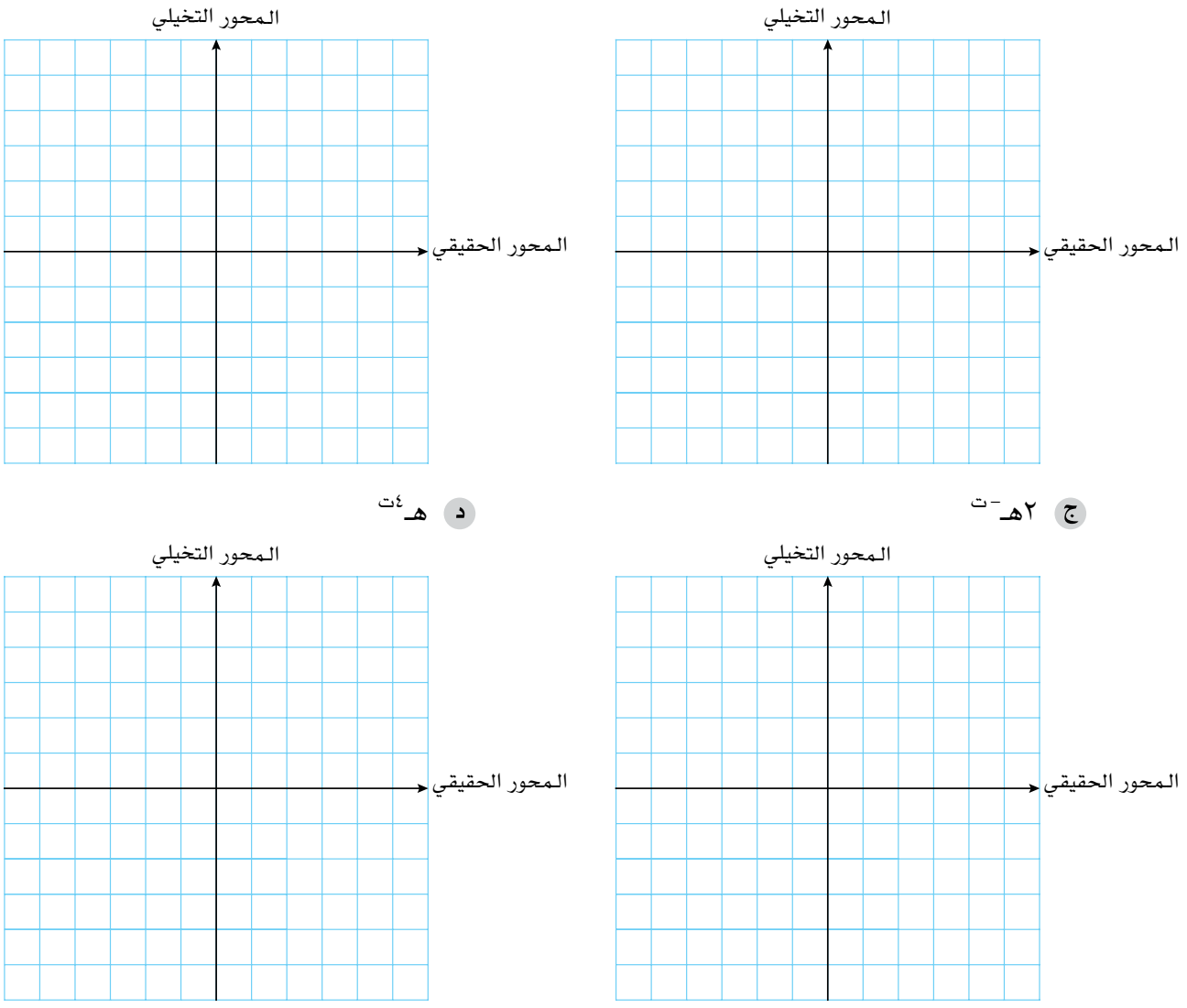
٦) حدّد كلًّا من الأعداد المركبة الآتية على مخطط أرجاند:

أ $هـ^{\pi ت}$

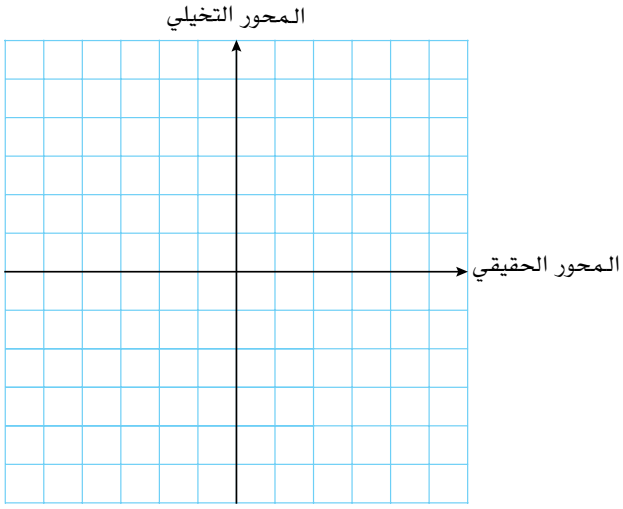
ب $هـ^{\frac{١}{٢}\pi ت}$

ج $٢هـ^{-ت}$

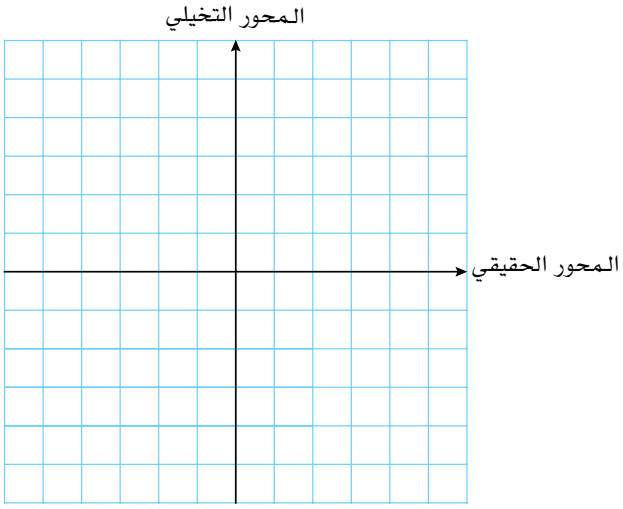
د $هـ^{٤ت}$



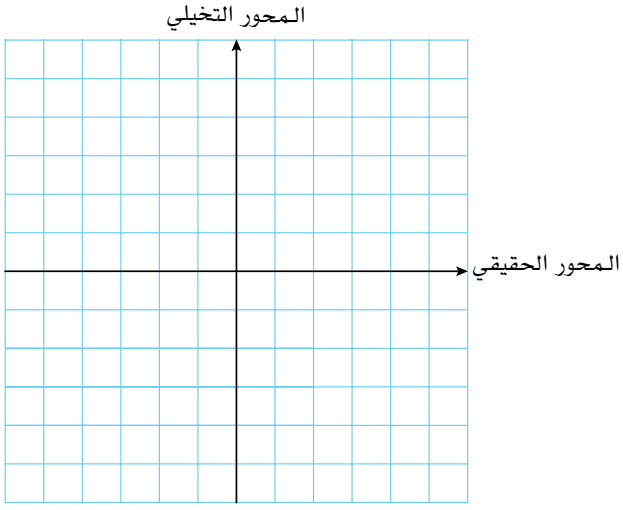
هـ $هـ_{١ + ت}$



و $هـ_{-١ + ت}$



ز $هـ_{١ - ت}$



٧) إذا علمت أن ع = جتا أ + ت جا أ، فأوجد المقياس والسعة للعدد $هـ_{ع}$ بدلالة أ.

٨) مثّل كل عدد من الأعداد الآتية على مخطط أرجاند، واكتب قيمة كل منها في صورة أ + ب ت. اترك الإجابة في الصورة الجذرية، أو أعطِ إجابات صحيحة مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ $٢\left(\text{جتا } \frac{١}{٣}\pi + \text{ت جا } \frac{١}{٣}\pi\right)$

المحور التخيلي

المحور الحقيقي

ب $١٠\left(\text{جتا } \frac{٣}{٤}\pi + \text{ت جا } \frac{٣}{٤}\pi\right)$

المحور التخيلي

المحور الحقيقي

ج $٥\left(\text{جتا}\left(-\frac{١}{٢}\pi\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{١}{٢}\pi\right)\right)$

المحور التخيلي

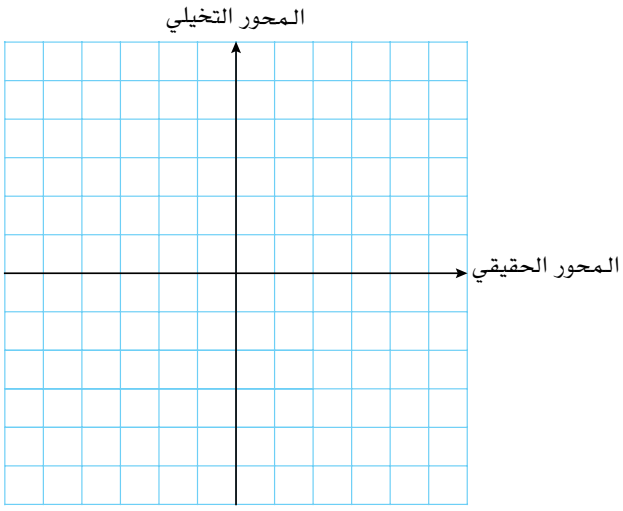
المحور الحقيقي

د $٣(\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi)$

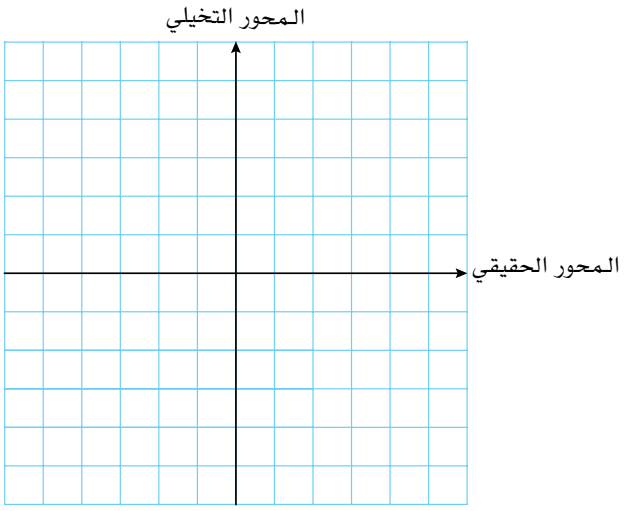
المحور التخيلي

المحور الحقيقي

هـ ١٠(جتا ٢ + ت جا ٢)



و جتا(−٣) + ت جا(−٣)



٩) اكتب كل عدد مركب من الأعداد الآتية في الصورة القطبية، واكتب السعة كعدد نسبي مضروب في π. في حال استحالة ذلك، فاكتب المقياس والسعة مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ ١ + ٢ت

ب ٣ − ٤ت

ج −٥ + ٦ت

د −٧ − ٨ت

هـ ١

و ٢ت

ز −٣

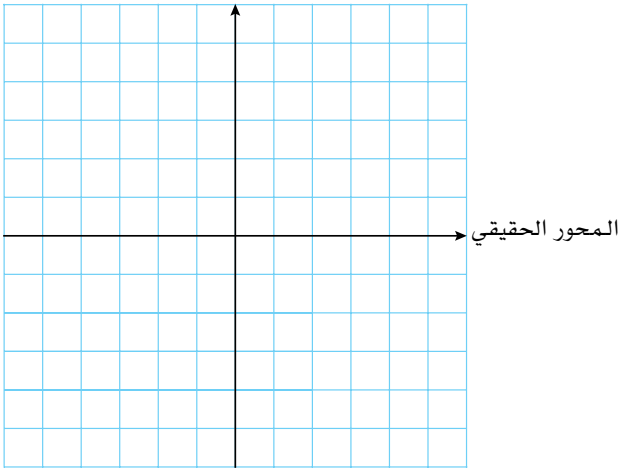
ح −٤ت

ط $\sqrt{٢}$ – $\sqrt{٢}$ ت

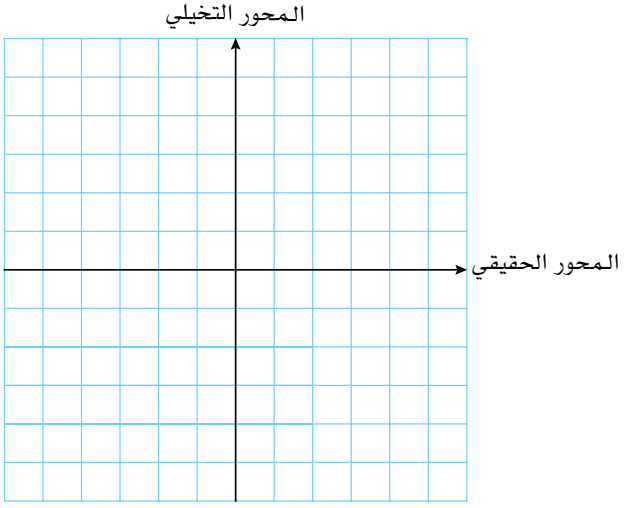
ي –١ + $\sqrt{٣}$ ت

١٠) استخدم مخطط أرجاند لتجد الأعداد المركبة التي تحقق كلًّا مما يأتي، واكتب الناتج في صورة أ + ب ت:

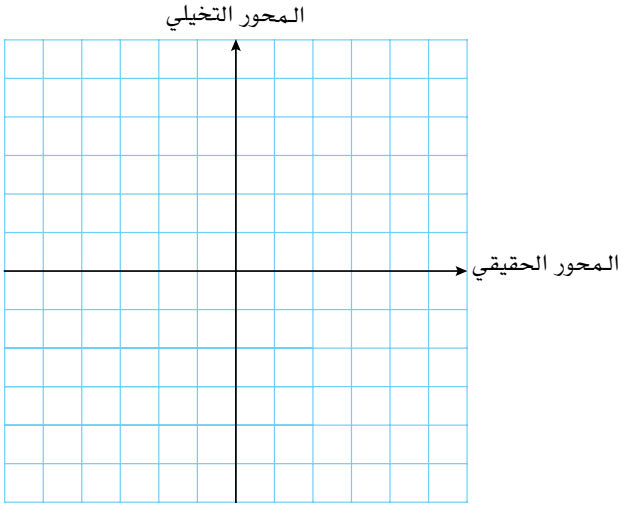
أ السعة لـ ع = $\frac{١}{٦}\pi$، |ع| = ٢



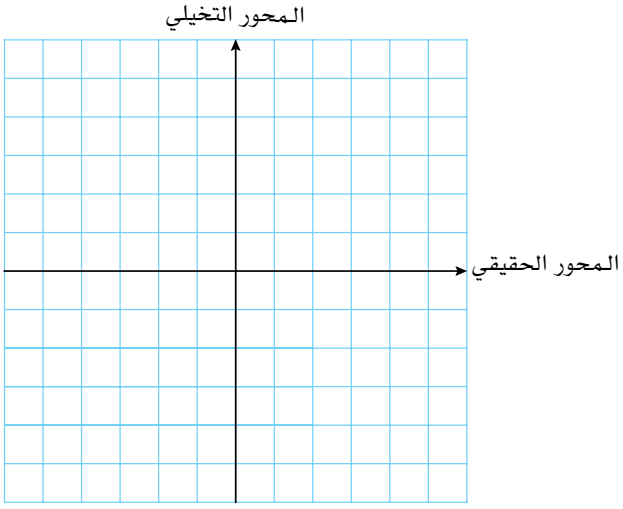
ب السعة لـ (ع – ٣) = $\frac{١}{٢}\pi$، |ع| = ٥



ج السعة لـ (ع − ٤ت) = π، |ع + ٦| = ٥



د السعة لـ (ع − ٢) = $\frac{٣}{٤}$π، |ع + ٢| = ٣



٧-٥ حل المعادلات Solving equations

تمارين ٧-٥

١) أوجد الجذرَين ع١، ع٢ للمعادلة ع^{٢} − ٥ + ١٢ت = ٠، واكتب كلًّا منهما في صورة أ + ب ت، حيث أ، ب عددان حقيقيان.

٢) حلّل كثيرات الحدود الآتية إلى عوامل خطية:

أ ع^{٢} + ٢٥

ب ٩ع^{٢} − ٦ع + ٥

ج ٤ع^{٢} + ١٢ع + ١٣

د ع^{٤} − ١٦

هـ ع^{٤} − ٨ع^{٢} − ٩

٣) لتكن المعادلة ع^{٤} + ٣ع^{٢} − ٦ع + ١٠ = ٠:

أ بيّن أن (١ + ت) أحد جذور المعادلة.

ب أوجد الجذور الأخرى للمعادلة.

٤) لتكن المعادلة $ع^{٤} + ٢٤ع + ٥٥ = ٠$:

أ بيّن أن $(-٢ + ت)$ أحد جذور المعادلة.

ب أوجد الجذور الأخرى للمعادلة.

٥) إذا علمت أن $ع = أ + ب ت$، $\frac{ع}{ع^{*}} = جـ + د ت$، حيث أ، ب، جـ، د أعداد حقيقية، فبرهن أن $جـ^{٢} + د^{٢} = ١$

٦) أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب $٨ت - \sqrt{٣}\sqrt{٧}$

٧) أوجد الجذور التربيعية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ $-٢ت$

ب $٢٠ت - ٢١$

ج $١ + ت$

د $٥ - ١٢ت$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) بيّن أن (١ + ت) أحد جذور المعادلة ع^{٣} + ٤ع^{٢} − ١٠ع + ١٢ = ٠، وأوجد الجذور الأخرى للمعادلة.

٢) إذا علمت أن ع عدد حقيقي، ع = $\frac{\text{ك} + ٤\text{ت}}{١ + \text{ك ت}}$، ك عدد حقيقي، فأوجد القيم الممكنة للعدد ك.

٣) أ أوجد المقياس والسعة للعدد المركب ٢ + ت ٢$\sqrt{٣}$

ب أوجد الجذرَين التربيعيَين للعدد ٢ + ت ٢$\sqrt{٣}$، وأعطِ الإجابة في صورة أ + ب ت.

ج أوجد الجذور الدقيقة للمعادلة ت ع^{٢} − ٢ ٢$\sqrt{٢}$ ع − ٢ ٣$\sqrt{٢}$ = ٠، واكتب الإجابة في صورة أ + ب ت.

٤) إذا علمت أن ع = جتا أ + ت جا أ، حيث $-\pi < أ \geq \pi$، فأوجد المقياس والسعة لكل مما يأتي:

أ $ع^{٢}$

ب $ع^{٢} + ١$

في الحالات الآتية:

١) أ = ٠

٢) أ = $\frac{١}{٢}\pi$

٣) أ = π

٤) أ = $\frac{١}{٢}\pi$

٥) إذا علمت أن ع = $-٣ + ٤ت$، ع × جـ = $-١٤ + ٢ت$، فأوجد:

أ جـ في صورة أ + ب ت، حيث أ، ب ∋ ع، ب ≠ ٠

ب المقياس والسعة للعدد جـ.

٦) إذا علمت أن ع = ١ − ٢ت أحد جذور المعادلة التكعيبية $٢ع^{٣} - ٥ع^{٢} + ك ع - ٥ = ٠$، فأوجد:

أ قيمة ك.

ب الجذرَين الآخرَين للمعادلة.

٧) حل كلًّا مما يأتي:

أ $ع^{٣} - ٢٧ = ٠$

ب $ك^{٢} - ت(ك - ٢) = ك - ٢$

٨) أ حوّل هـ$^{-\frac{\pi}{٦}ت}$ إلى الصورة الديكارتية.

ب اكتب ع = ١ − ت$\sqrt{٣}$ في صورة ر(جتا أ + ت جا أ).

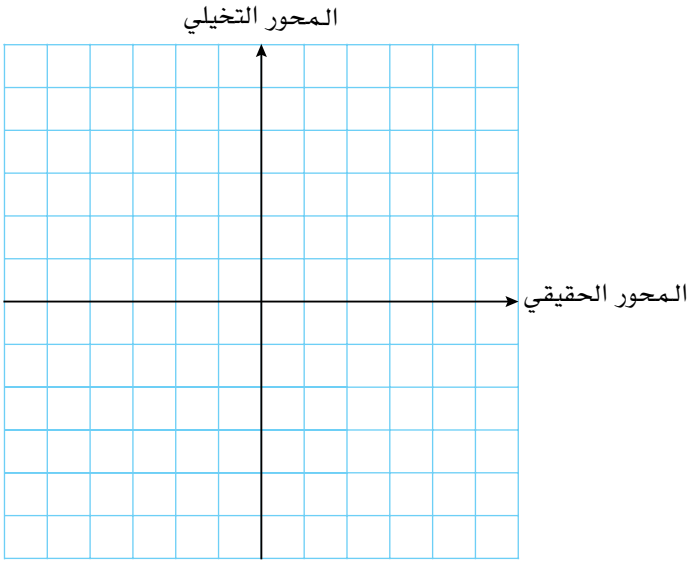
ج اكتب ٨$\left(\text{جتا } \frac{\pi}{٦} - ت \text{ جا } \frac{\pi}{٦}\right)$ في صورة ر هـ$^{أ ت}$.

د أوجد المقياس والسعة للعدد $\frac{(١ + ت)^{٥}}{(١ - ت)^{٧}}$.

٩) ★ ليكن (١ + ٢ت) أحد جذور المعادلة التكعيبية $ع^{٣} + أ ع + ١٠ = ٠$:

أ أوجد قيمة العدد الحقيقي الثابت أ.

ب حدّد الجذور الثلاثة للمعادلة، وبيّنها على مخطط أرجاند.



ج بيّن أن جميع الجذور الثلاثة تحقق المعادلة: $|ع^{٦} - ١| = ١٣$، حيث $|$ $|$ تمثل المقياس.

١٠) أوجد الأعداد المركبة التي تحقق كلًّا مما يأتي:

أ $(١ + ت)ع = ١ + ٣ت$

ب $ع^{٢} + ٤ع + ١٣ = ٠$

ج $\begin{cases} (١ - ت)ع + (١ + ت)ق = ٢ \\ (١ + ٣ت)ع - (٤ + ت)ق = ٣ت \end{cases}$

مساعدة

استخدم الصيغة التربيعية.

الوحدة الثامنة
التوزيع الطبيعي
The normal distribution

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٨-١ تعرف خصائص المتغير العشوائي المتصل، واستخدام التوزيع الطبيعي لتمثيل المتغير العشوائي المتصل حيث يكون مناسبًا.

٨-٢ تتذكر خصائص التوزيع الطبيعي.

٨-٣ تستخدم جدول التوزيع الطبيعي، عندما ز ~ ط(٠، ١) لإيجاد:

- قيمة ل(ز > ز١)، أو قيمة احتمال متعلقة بها.
- قيمة ز١، بمعلومية قيمة ل(ز > ز١)، أو قيمة احتمال متعلقة بها.

٨-٤ تستخدم جدول التوزيع الطبيعي لتحل المسائل المتعلقة بالمتغير س، حيث س ~ ط(و، ع٢)، بما في ذلك إيجاد:

- قيمة ل(س > س١)، أو قيمة احتمال متعلق بذلك، بمعلومية قيم س١، و، ع
- قيمة س١، و، ع إذا علمت قيمة ل(س > س١)، أو قيمة احتمال متعلق بذلك.

٨-١ المتغير العشوائي المتصل والمنحنى الطبيعي
Continuous random variable and the normal curve

تمارين ٨-١

١) اذكر ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تصف متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، أو منفصلًا، أو لا تصف أيًّا منهما:

أ الوقت المخصص للرياضيين عندما يقومون بالتمرينات اليومية.

ب عدد السيارات التي تمر بالقرب من المدرسة كل ساعة.

ج رقم المتسابق الذي يضعه الرياضي على قميصه أثناء التمرين.

د ارتفاعات الأشجار في إحدى الحدائق.

٢) يباع نوعان من الشاي (أ)، (ب) في عبوات مكتوب على كل منهما ٢٠٠ جم. توزيع كتلة الشاي في العبوات لكلا النوعَين يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٢٠٤ جم للنوع (أ)، ٢٠٨ جم للنوع (ب)، والتباين لكلا النوعَين ١٦,٥ جم^{٢}.

صِف أوجه التشابه وأوجه الاختلاف بين منحنيَي التوزيع الطبيعي اللذَين يمكن رسمهما لتمثيل التوزيع الاحتمالي للنوعَين (أ)، (ب).

٣) أطوال مجموعة كبيرة من النساء يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ١٥٨ سم، وانحرافه المعياري ٥ سم. وأطوال مجموعة الأطفال يتبع أيضًا التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي أقل من ١٥٨ سم، وانحرافه المعياري أكبر من ٥ سم.

ارسم، على المخطط نفسه، مخططًا يمثل توزيع كل طول من هذه الأطوال.

٤) تم تمثيل توزيع كتل الخيول الموجودة في مزرعة ما بمنحنى يتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي $و_{١}$، وانحرافه المعياري $ع_{١}$.

وضعت كل خيل مهرًا واحدًا، وكان لتوزيع كتل هذه الخيول والمهور معًا وسط حسابي $و_{٢}$، وانحراف معياري $ع_{٢}$.

استخدم المتباينات لتقارن بين القيمتَين في كل مما يأتي:

أ $و_{١}$ ، $و_{٢}$

ب $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$

٥) يصنّع أحد المصانع نوعًا معيّنًا من الأحذية بقياسات مختلفة.

توزيع كل زوج من هذا النوع من الأحذية يتبع توزيعًا طبيعيًّا بوسط حسابي ٠,٧٦٤ كجم، وتباين ٠,٠٠٠٢٤ كجم^{٢}.

أ اكتب الوسط الحسابي، والتباين لكتلة فردة الحذاء الواحدة.

ب ما الفرضية التي عليك اعتمادها للإجابة عن الجزئية (أ)؟

٨-٢ التوزيع الطبيعي The normal distribution

تمارين ٨-٢

١) إذا علمت أن ز ~ ط(٠، ١)، فأوجد كلًّا مما يأتي:

أ ل(ز > ٠,٢٣)

ب ل(ز ⩾ ٢,٤٦)

ج ل(ز > ٠,١٥)

د ل(ز ⩽ ٢,٢٣)

هـ ل(ز > ٢,٣٧)

و ل(ز ⩽ ٠,٥٨)

ز ل(ز > -١,٨٣)

ح ل(ز ⩽ -٢,٠٥)

ط ل(ز > -٠,٠٦)

ي ل(ز ⩾ -١,٨٣)

ك ل(ز > -٢,٧٥)

ل ل(ز ⩾ -٠,٢٠)

م ل(ز > ١,٦٤)

ن ل(ز ⩽ ١,٦٤)

س ل(ز > -١,٦٤)

ع ل(ز ⩾ -١,٦٤)

٢) يتبع المتغير العشوائي (ز) التوزيع الطبيعي المعياري. أوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(١,١٥ < ز < ١,٣٥)

ب ل(١,١١ < ز < ٢,٢٢)

ج ل(٠,٣٨ < ز < ٢,٤١)

د ل(٠ < ز < ١,٥٥)

هـ ل(-١,٨١ < ز < ٢,٣٣)

و ل(-٠,٨٤ < ز < ٢,٠٣)

٣) يتوزع المتغير العشوائي (ز) بحيث ز ~ ط(٠، ١). أوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(-٢,٥٠ < ز < ١,٠٨)

ب ل(-٠,٥٥ < ز < ٠)

ج ل(-٢,٨٢ < ز < -١,٨٢)

د ل(-١,٧٤ < ز < -٠,٩٩)

هـ ل(-٢,٥٦ < ز < -٠,١٢)

و ل(-١,٩٦ < ز < ١,٩٦)

مساعدة

إذا كان |ز| ≥ أ، فإن −أ ≥ ز ≥ أ
إذا كان |ز| > أ، فإن ز > −أ أو ز < أ

ز ل(−٢,٣٢ < ز < ٢,٣٢)

ح ل(|ز| ≥ ١,٣)

ط ل(|ز| < ٢,٤)

٤) المتغير العشوائي ز ~ ط(٠، ١). أوجد قيمة ق، ك، م، ن، في كل مما يأتي:

أ ل(ز > ق) = ٠,٦٧٠٠

ب ل(ز > ك) = ٠,٨٧٧٠

ج ل(ز > م) = ٠,٩٨٤٢

د ل(ز > ن) = ٠,٨٤٨٥

هـ ل(ز < ق) = ٠,٤٠٥١

و ل(ز < ك) = ٠,١١٩٠

ز ل(ز < م) = ٠,٠٠٧١

ح ل(ز < ن) = ٠,٢٢٣٦

ط ل(ز < ق) = ٠,٩٩٧٧

ي ل(ز < ك) = ٠,٩٧٥٠

ك ل(ز < م) = ٠,٨٤٨٥

ل ل(ز < ن) = ٠,٥

م ل(ز > ق) = ٠,٠٠٣١

ن ل(ز > ك) = ٠,٠١٤٣

س ل(ز > م) = ٠,٠٤٦٥

ع ل(ز > ن) = ٠,٤٧٦١

ف ل(−ق < ز < ق) = ٠,٩٠١٠

ص ل(−ك < ز < ك) = ٠,٧٩٩٤

ق ل(−م < ز < م) = ٠,٩٨٩٨

ر ل(|ز| < ن) = ٠,٥٨٢٠

٥) توزيع الدخل السنوي للشخص الذي يعمل بدوام كامل في مدينة ما يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (و) ريال عُماني، وانحرافه المعياري (ع) ريال عُماني.

أ أوجد النسبة المئوية للأشخاص العاملين بدوام كامل، والذين يتراوح دخلهم السنوي بين (و − ٢ع) ريال عُماني و (و + ٢ع) ريال عُماني.

ب بالنظر إلى أن هناك ٤٥٠٠٠ شخص يعملون بدوام كامل، قم بتقدير العدد الذي لا يتراوح دخله السنوي بين (و − ٢ع) ريال عُماني، (و + ٢ع) ريال عُماني.

٦) المتغير العشوائي س يتبع توزيعًا طبيعيًّا.

أ أوجد النسبة المئوية لقيم س التي تتجاوز الوسط الحسابي بأكثر من انحرافَين معياريَّين.

ب إذا أخذت عيّنة عشوائيّة مكوّنة من ٥٠٠٠ قيمة من قيم المتغير العشوائي س، فقم بتقدير العدد الذي يتجاوز الوسط الحسابي بأكثر من انحرافَين معياريَّين.

٧) المتغير العشوائي ص يتبع توزيعًا طبيعيًّا. أوجد قيمة ك، إذا علمت أن ٢,٥٪ من قيم ص تتجاوز الوسط الحسابي بأكثر من ك انحرافات معيارية.

٨) بيّنت قراءات المقاييس أن المتغير العشوائي المتصل يتبع توزيعًا طبيعيًّا. إذا علمت أن ٤٢٦٢ من القراءات تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي، فأوجد عدد القراءات التي تقع ضمن أكثر من انحراف معياري واحد، ولكن أقل من انحرافَين معياريَّين عن الوسط الحسابي.

٩) تتبع درجات حرارة الجسم للمرضى الذين يراجعون عيادة طبية فصليًّا توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي (م°) سيليزية، وانحرافه المعياري (ق°) سيليزية.

أ احسب النسبة المئوية للمرضى الذين من المتوقع أن تتراوح درجات حرارتهم بين (م − ق)° سيليزية و (م + ٢ق)° سيليزية.

ب ضمن عيّنة عشوائية من ٩٣٧ مريضًا، كم مريضًا يُحتمل **ألّا تقع** درجات حرارتهم بين (م − ق)° سيليزية و (م + ٢ق)° سيليزية؟

١٠) يتّبع متغير عشوائي متصل توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي و، وانحرافه المعياري ع. ضمن عيّنة عشوائية من ٤٠٠٠ قراءة (مشاهدة) لهذا المتغير، كم قراءة من المتوقع أن تكون:

أ أقل من و + ع؟

ب أكبر من و + ٢ع؟

ج بين (و + ٠,٤٣ع)، (و + ١,٨٣ع)؟

١١) أطوال أوراق أحد الأنواع من الأشجار، بالسنتيمتر، تتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي (ك)، وانحرافه المعياري ٠,٢ ك.

أوجد النسبة المئوية لأطوال الأوراق التي تكون:

أ أقل من ١,١ ك سم.

ب أكبر من ١,٢٥ ك سم.

٨-٣ معيارية التوزيع الطبيعي Standardising a normal distribution

٨-٣أ معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات

Standardising a normal distribution to find probabilities

تمارين ٨-٣أ

١) يتبع المتغير (س) التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٢٠، وانحرافه المعياري ٤:

أ عرّف التوزيع س عبر كتابته في صورة س ~ ط(و، ع^{٢}).

ب أوجد القيمة المعيارية لـ س = ٢٦

ج استخدم النتائج في الجزئيتَين (أ)، (ب) لتوجد:

١) ل(س > ٢٦)

٢) ل(س > ١٤)

٢) أ إذا علمت أن ز ~ ط(٠، ١)، فأوجد ل(ز > ١,٥٥).

ب إذا علمت أن ص ~ ط(٥٤، ٣٧)، فأوجد ل(ص > ٥٤).

ج إذا علمت أن ق ~ ط(١٢٠٠ ، ٢٥٠٠)، فأوجد ل(ق > ١١٧٨).

د إذا علمت أن ك ~ ط(٨٢٣,٦ ، ٤٠٠)، فأوجد ل(ك > ٨٠٠).

٣) إذا علمت أن س ~ ط(٢٠، ١٦)، فأوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(س ⩾ ٢٥)

ب ل(س < ٣٠)

ج ل(س ⩽ ١٧)

د ل(س < ١٣)

٤) إذا علمت أن س ~ ط(٢٤، ٩)، فأوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(س ⩾ ٢٩)

ب ل(س < ٣١)

ج ل(س ⩽ ٢٢)

د ل(س > ١٦)

٥) إذا علمت أن س ~ ط(٥٠، ١٦)، فأوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(٥٤ ⩽ س ⩽ ٥٨)

ب ل(٤٠ < س ⩽ ٤٤)

ج ل(٤٧ < س < ٥٧)

د ل(٣٩ ⩽ س < ٥٣)

هـ ل(٤٤ ⩽ س ⩽ ٥٦)

٦) إذا علمت أن ت ~ ط(و، ع^{٢})، ع = ٠,٢٥ و، ل(ت > و + ١) = ٠,٢، فاحسب ل(ت > و − ٢).

مساعدة

لا تظهر القيمة المقابلة لـ د$^{-١}$(٠,٨٠) في الجدول.
لكن:
د$^{-١}$(٠,٧٩٩٥) = ٠,٨٤،
د$^{-١}$(٠,٨٠٢٣) = ٠,٨٥،
لذا نستخدم:
د$^{-١}$(٠,٨٠) = ٠,٨٤٥

٧) إذا علمت أن ك ~ ط(٥٠، ٣٦)، فأوجد ل(ك ⩾ ٥٥,١).

٨) المتغير العشوائي (س) للوقت المستغرق في انتظار تحضير الوصفة الطبية في الصيدلية يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ١٥ دقيقة، وانحرافه المعياري ٢,٨ دقيقة. أوجد احتمال أن يكون وقت الانتظار:

أ) أكثر من ٢٠ دقيقة.

ب) أقل من ٨ دقائق.

ج بين ١٠ دقائق، و ١٨ دقيقة.

٩) يبيّن التطور التكنولوجي أن قياسات المسافات التي كان يجريها علماء الفلك قديمًا كانت عرضة لأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي −٠,٠٠٥ ٪ وانحرافه المعياري ٠,٨١ ٪. أوجد احتمال أن تكون هذه المجموعة من علماء الفلك قد قللوا من تقدير المسافة إلى جرم سماوي ما بنسبة تزيد عن ٠,٣ ٪.

مساعدة

نسبة الخطأ السالبة تعني أن القياس كان أصغر من القيمة الحقيقية (أقل من القيمة المقدرة).

١٠) ينتج أحد المصانع محامل كروية بأقطار تتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابي ٠,٦٠١ سم، وتباينه $١,٤٤ \times ١٠^{-٤}$ سم. ما النسبة المئوية للمحامل الكروية التي يزيد قطرها عن ٠,٦٠٤ سم؟

٨-٣ ب معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد و، ع، س

Standardising a normal distribution to find μ, σ, X

تمارين ٨-٣ ب

١) المتغير العشوائي س يتبع توزيعًا طبيعيًّا. إذا علمت أن الوسط الحسابي هو و (حيث و > ٠)، والتباين هو $\frac{١}{٤}$ و^{٢}، فأوجد:

أ ل(س > ١,٥ و).

ب احتمال أن يكون س سالبًا.

٢) إذا علمت أن س ~ ط(٣٥,٤، ١٢,٥)، فأوجد قيمة كل من ق، ك، م، ن في كل مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب عدد عشري واحد:

أ ل(س > ق) = ٠,٩٦٠٨

ب ل(س < ك) = ٠,٩٣٨٢

ج ل(س < م) = ٠,٢٩٤٦

د ل(س > ن) = ٠,١٤٩٢

٣) المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي و، وانحرافه المعياري ع.

أ إذا علمت أن ل(س < ١٠) = ٠,٩٣٣٢، فبيّن أن ١٠ − و = ١,٥ ع

ب إذا علمت أن ل(س < ١٥,٠٥) = ٠,٩٩٤٠، فاكتب معادلة تبيّن العلاقة بين و، ع.

ج حل المعادلتَين من الجزئيتَين (أ)، (ب) لتجد قيمة كل من و، ع.

د استخدم الإجابات من الجزئية (ج) لتجد ل(س > ٨).

٤) المتغير العشوائي (س) يتبع توزيعًا طبيعيًّا، حيث ل(س > ٧٣,٠٥) = ٠,٠٢٧٤. إذا علمت أن تباين التوزيع يساوي ١٨، فأوجد الوسط الحسابي له.

٥) المتغير العشوائي (س) يتبع توزيعًا طبيعيًّا. إذا علمت أن ل(س ⩽ ٥٩,١) = ٠,٠٢١٧، ل(س ⩽ ٢٩,٢) = ٠,٩٣٤٥، فأوجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للتوزيع مقربًا الناتجَين إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

٦) المتغير العشوائي س ~ ط(و، ع^{٢}). إذا علمت أن ل(س ⩽ ٩,٨١) = ٠,١٥٨٧، ل(س ⩾ ٨,٨٢) = ٠,٠١١٦، فأوجد و، ع مقربًا الناتجَين إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

٧) تتبع أطوال سيقان زهرة الزنبق التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ١٨,٢ سم، وانحرافه المعياري ٢,٣ سم.

أ أوجد احتمال أن يكون طول ساق الزهرة بين ١٦ سم، و٢٠ سم.

ب ١) أوجد ح، إذا علمت أن ١٢ ٪ من سيقان الزهرة أطول من ح سم.

٢) أوجد ك، إذا علمت أن ٢٠ ٪ من سيقان الزهرة أقصر من ك سم.

ج أطوال الساق التي تقل عن ١٤ سم غير مقبولة في محل بيع الزهور. في مجموعة مكوّنة من ٥٠٠ زهرة زنبق، قدّر العدد **غير المقبول** من الزهرات.

٨) العمر المفترض لنوع معيّن من البطاريات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٢١٠ ساعة. إذا علمت أن ٤٪ من هذه البطاريات تعمل لأكثر من ٢٢٢ ساعة، فأوجد التباين في توزيع عمر البطارية، مقربًا الناتج إلى أقرب رقمَين معنويَّين.

٩) في امتحان الرياضيات، حصل ١٥٪ من الطلبة على درجة أكبر من ٦٣، وحصل ١٠٪ من الطلبة على درجة أقل من ٣٢ درجة. إذا افترضنا أن الدرجات تتبع توزيعًا طبيعيًا، فأوجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للدرجات.

١٠) يُنتج مصنع ملابس فساتين بأربعة مقاسات: ٨,٨٪ من الفساتين مقاساتها صغيرة، ٢٢,٥٪ متوسطة، ٣٦,١٪ كبيرة، والباقي كبيرة جدًا. هذه المقاسات الأربعة للفساتين تساوي مجموعة من قياسات الجسم التي تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٨٦ سم، وتباينه ٥٢ سم^{٢}.

أ أوجد مدى قياسات الجسم للزبائن بحيث يُعدّ المقاس الكبير هو المقاس الأنسب لهم، مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

ب احسب احتمال أن تحوي مجموعة عشوائية مكوّنة من ٤ فساتين على أكثر من واحد من المقاسات الأربعة: صغيرة أو متوسطة أو كبيرة أو كبيرة جدًا.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) إذا علمت أن ز ~ ط(٠، ١)، فأوجد كلًّا مما يأتي:

أ ل(ز > ١,٦٣).

ب ل(ز > ١,٩١).

٢) المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي و، وانحرافه المعياري ع. أوجد ل$\left(و \geq س > و + \frac{٣}{٥} ع\right)$.

٣) المتغير العشوائي المتصل ص يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (١٥)، وانحرافه المعياري ع. إذا علمت أن ل(ص > ٢١,٧٤) = ٠,٧٥، فأوجد:

مساعدة

في الجدول، تقع المساحة ٠,٧٥ بين ٠,٧٤٨٦ و٠,٧٥١٧

أ ع.

ب ل(ص > ٢٣,١).

٤) الكمية اليومية من النفايات (ن) كيلوجرامًا، التي تنتجها المطاعم في منطقة ما تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (و) وتباينه ($ع^{٢}$). إذا علمت أن ل(ن < ١٢٠) = ٠,٧٨٨١، ل(ن < ١١٥) = ٠,٧٥٨٠:

أ بيّن أن ١٢٠ − و = ٠,٨ ع.

ب اكتب معادلة أخرى تبيّن العلاقة بين و، ع.

ج حل المعادلتَين لإيجاد قيمة كل من و، ع.

د أوجد احتمال أن تنتج المطاعم في هذه المنطقة أكثر من ١٠٠ كجم من النفايات في أي يوم محدد.

٥) يتبع المتغير (ك) توزيعًا طبيعيًّا. إذا علمت أن ٧ع = ٢و، ل(ك < ٣٠) = ٠,٠٦٣، فأوجد:

أ قيمة كل من و، ع.

ب ل(ك < ٦٠).

٦) ثمن المنازل في منطقة معيّنة يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٢٣٥٤٢٠ ريالًا عُمانيًّا، وانحرافه المعياري ٢٨٧٢٤ ريالًا عُمانيًّا.

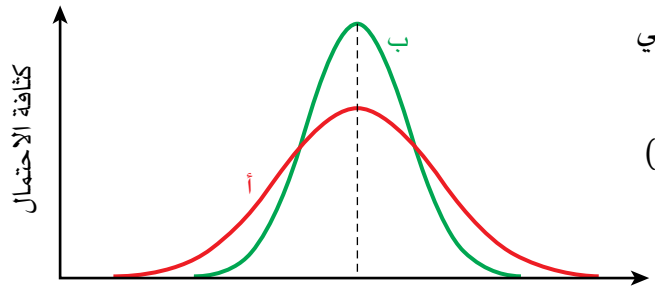
أوجد نسبة المنازل في هذه المنطقة التي يتراوح ثمنها بين ٢٠٠٠٠٠ ريال عُماني، و ٢٧٥٠٠٠ ريال عُماني.

٧) يتبع المتغير ص التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي و، وانحرافه المعياري ع. إذا علمت أن ل(ص < ك) = ٠,٦٧، ل(ص > ك − ٢) = ٠,٨٣٤، فأوجد:

أ ع.

ب ل(ص > ك + ٣).

٨) يوضّح الشكل المقابل منحنيَي التوزيع الاحتمالي للمتغيرَين (أ)، (ب).



من المعلوم أن أ ~ ط(١٥، ع^{٢})، ب ~ ط(و، ٩)

أ استخدم المنحنيَين لتجد:

١) قيمة و.

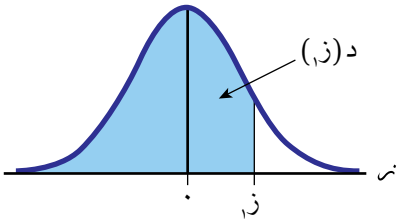
٢) متباينة دقيقة تتعلق بقيمة ع.

ب إذا علمت أن المنحنيَين يتقاطعان عند أ = ب = ١١، وعند أ = ب = ١٩، فحدّد أيًّا من زوجَي الاحتمالات له القيمة الكبرى في كل مما يأتي:

١) ل(أ > ١٩) أو ل(ب < ١١).

٢) ل(١١ < أ < ١٩) أو ل(١١ < ب < ١٩).

جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري



إذا كان المتغير (ز) يأخذ شكل التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٠ وتباينه ١، فإن الجدول يعطي قيمة د (ز) لكل قيمة من قيم ز، حيث:

- د (ز١) = ل(ز ≤ ز١)
- د (−ز١) = ١ − د (ز١)

ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٩	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨

رقم الإيداع:

٢٠٢٣/٧٢١٧

طبع بالمطابع الفنية، سلطنة عُمان - هاتف: ٢٤٨١٤١٥٣

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

كتاب النشاط

يتميز كتاب النشاط بمحتوى سهل يمكن استخدامه إلى جانب كتاب الطالب لمنهاج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر .

يتضمن كتاب النشاط:

- تمارين شاملة وهادفة تتبع ترتيب الدروس الموجودة في كتاب الطالب.
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة تحتوي على أسئلة تحاكي الاختبار، وتغطي جميع موضوعات الوحدة، ويمكن استخدامها للتحقق من فهم الطالب للموضوعات التي درسها.
- فقرات مساعدة تزودك بالنصائح والإرشادات لحل الأسئلة والتحقق من الإجابات.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر أيضًا:

- كتاب الطالب.
- دليل المعلّم.

ISBN 978-99992-56-13-1
9 789999 256131 >

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om