KINGDOM OF BAHRAIN
Ministry of Education

مملكة البحرين
وزارة التربية والتعليم

دليل المعلم

ريض ١٥١

الرياضيات ١

للمرحلة الثانوية

البحرين 2030
BAHRAIN

العبيكان
Obeikan

ريض ١٥١

قررت وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين اعتماد هذا الكتاب لتدريس منهج الرياضيات ١ للمرحلة الثانوية

الرياضيات ١

للمرحلة الثانوية

دليل المعلم

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الطبعة الثانية
١٤٣٦هـ - ٢٠١٥م

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

الرياضيات ١
للمرحلة الثانوية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عمر محمد أبوغليون
هاني جميل زريقات
أحمد محمود أبو صهيون

التعريب
يوسف جرادات
فاضل شطناوي
د. هارون الربضي
مجد محيلان

التحرير اللغوي
عمر الصاوي
محمد رمضان
أحمد عليَّان

المواءمة والمراجعة لنسخة مملكة البحرين
هند إبراهيم الجودر
نسيمة محمد غلوم
بهرام حسين حاجي
نور محمد حسان
إيمان ناصر المسيفر

إعداد الصور
د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

الغلاف:
برج المراقبة الجوية
بمطار البحرين الدولي.

Original Title:

Geometry & Algebra 2
©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Jerry Cummins
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M.Casey

Contributing Authors
Prof. Viken Hovsepian
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph. D
Arthur K. Wayman, Ph. D

Differentiated Instruction
Nancy Frey, Ph. D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro, Ph.D

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releach Cossett Lent
Lynn T. Havens

www.obeikaneducation.com

www.glencoe.com

McGraw Hill Education

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies. Inc.
All rights reserved.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies. Inc. © 2010.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

حضرة صاحب الجلالة الملك حمد بن عيسى آل خليفة
ملك مملكة البحرين المفدّى

المقـدمـة

أخي المعلم/ أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلبة، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلبة، وبأساليب متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس، كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة حسب مستويات الطلبة تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.

كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلبة (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلبة.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

مخطط الفصل 1 .... 10A
التقويم والمعالجة 10C
تنويع التعليم 10D
التركيز في المحتوى الرياضي 10E
التهيئة للفصل الأول 10
1-1 المسافة ونقطة المنتصف 12
توسّع 1-1 معمل الهندسة: الإحداثيات في الفضاء 23
1-2 الوسط الهندسي 25
1-3 المثلثات القائمة الخاصة 34
اختبار منتصف الفصل 37
استكشاف 1-4 معمل الآلة الحاسبة البيانية: حساب المثلثات 44
1-4 حساب المثلثات 45
توسّع 1-4 معمل الآلة الحاسبة البيانية: القاطع وقاطع التمام وظل التمام 55
1-5 زوايا الارتفاع والانخفاض 56
1-6 قانون الجيب وقانون جيب التمام 64
توسّع 1-6 معمل الهندسة المحوسب: الحالة المبهمة لقانون الجيب 74
دليل الدراسة والمراجعة 75
اختبار الفصل الأول 79
التهيئة للاختبارات المعيارية 80
اختبار معياري 82
ملحق إجابات الفصل الأول 83A

الفصل 2 الدائرة

مخطط الفصل 2 .... 84A
التقويم والمعالجة 84C
تنويع التعليم 84D
التركيز في المحتوى الرياضي 84E
التهيئة للفصل الثاني 84
2-1 الدائرة ومحيطها 86

الفهرس

2-2 قياس الزوايا والأقواس 95
2-3 الأقواس والأوتار 104
2-4 الزوايا المحيطية 112
اختبار منتصف الفصل 120
2-5 المماسات 121
توسّع 2-5 معمل الهندسة: الدوائر المحاطة بمثلث والدوائر التي يحيط بها مثلث ... 129
2-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا 130
2-7 قطع مستقيمة خاصّة في الدائرة 139
2-8 معادلة الدائرة 146
دليل الدراسة والمراجعة 152
اختبار الفصل الثاني 157
التهيئة للاختبارات المعيارية 158
اختبار معياري تراكمي 160
ملحق إجابات الفصل الثاني 161A

الفصل 3 المعادلات والمتباينات

مخطط الفصل 3 .... 162A
التقويم والمعالجة 162C
تنويع التعليم 162D
التركيز في المحتوى الرياضي 162E
التهيئة للفصل الثالث 163
3-1 خصائص الأعداد الحقيقية 164
توسع 3-1 معمل الجبر: المجموعات 170
3-2 حَلّ معادلات القيمة المطلقة 172
اختبار منتصف الفصل 178
3-3 حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد 179
استكشاف 3-4 معمل الجبر: رمز الفترة 186
3-4 حَلّ المتباينات المركّبة ومتباينات القيمة المطلقة 187
دليل الدراسة والمراجعة 196
اختبار الفصل الثالث 199
التهيئة للاختبارات المعيارية 200
اختبار معياري 202
ملحق إجابات الفصل الثالث 203A
إجابات كتاب التمارين 204

دليل المعلم

أهلًا بك في عالم الرياضيات

منهج الرياضيات المترابط رأسيًّا
ابتداءً من الصف الأول وحتى الصف الثاني عشر

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسي:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسي للمحتوى عملية مهمة تساعد طلبتك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى وتتابعه من مستوى إلى مستوى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه وتعزيزه وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سد الثغرات وتجنب التكرار غير المبرر، مما يمكنك من توجيه تدريسك وتكييفه ليتلاءم مع حاجات الطلبة.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسي القوي بين الأساليب التدريسية بدءًا من الصف الأول يُسَهِّل على الطلبة الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى الإعدادية، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية، وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلبة عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صف إلى آخر، تساعد الطلبة على الانتقال بسلاسة من مرحلة إلى أخرى، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفة لديهم.

الحلقة الأولى من المرحلة الإبتدائية

الحلقة الثانية من المرحلة الإبتدائية

المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

تراعي السلسلة الخرائط المفاهيمية وتطورها اعتمادًا على نتائج الطلبة في رياضيات المرحلة الثانوية.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلبة صعوبات فيها، مثل حَلّ المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 1, 2	الصفوف 3-5
1) حَلّ المسألة	1) حَلّ المسألة
2) النقود	2) الكسور الاعتيادية
3) الزمن	3) القياس
4) القياس	4) الكسور العشرية
5) الكسور الاعتيادية	5) الزمن
6) الحساب	6) الجبر
الصفوف 6-8	**الصفوف 9-12**
1) الكسور الاعتيادية	1) حَلّ المسألة
2) حَلّ المسألة	2) الكسور الاعتيادية
3) القياس	3) الجبر
4) الجبر	4) الهندسة
5) الحساب	5) الحساب
	6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة تقويمات تشخيصية وتكوينية وختامية، وخططًا علاجية، وإثرائية.

4 الخطط العلاجية وتنويع التدريس

توفر السلسلة خطة علاجية ذات ثلاثة مستويات:

المعالجة 1 **المعالجة اليومية** تحدّد بدائل متنوعة في دليل المعلم لتدريس المفاهيم وفق أنماط التعلم المختلفة.

المعالجة 2 **المعالجة الاستراتيجية** يستعمل المعلمون إرشادات علاجية ومواد مساندة.

المعالجة 3 **المعالجة المكثفة** توفر إرشادات للتدريس، ومفردات داعمة، وخططًا علاجية لمساعدة الطلبة على النجاح.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصًا عديدة للمعلم ليطوّر أداءه مهنيًّا، بطرق تعليم إضافية، مثل: الفيديو، والرياضيات المحوسبة، والمواقع الإلكترونية المترابطة ترابطًا رأسيًّا متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر.

المرحلة الإعدادية

المرحلة الثانوية

قاعدة البحوث لبرامج الرياضيات

تساعد البحوث المستمرة مع الطلبة والمعلمين والأكاديميين والخبراء على بناء جميع برامج الرياضيات من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر على أسس قوية متينة.

1 بحوث تطوير البرامج

- تقويم المعايير الوطنية
- بحوث نوعية لحاجات سوق العمل
- بحوث خاصة بالمحتوى العلمي

2 البحوث التكوينية

- قاعدة البحوث الخاصة بطرائق التدريس
- اختبارات صفية تجريبية
- لجان المعلمين الاستشارية
- مراجعون ومستشارون أكاديميون

3 البحوث الختامية

- مؤشرات على تحسّن درجات الاختبارات
- بحوث شبه تجريبية لفاعلية البرامج
- دراسات طولية
- تقويمات نوعية للبرامج

www.obeikaneducation.com

إعداد الطلبة للدراسة الجامعية ولسوق العمل

دليل المعلم

تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلبة في المدرسة الثانوية وما يتوقع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلبة بصورة أفضل للدراسة الجامعية؟

إن المنهج القوي للمدارس الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية (Adelman 2006). فالطلبة الّذين يدرسون كتب الرياضيات المعدة للمرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية من الّذين لم يدرسوها (Abraham & Crrech 2002).

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طورها: David Conley at the University of Oregon

- **مهارات عقلية** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل: التفكير الناقد، وحَلّ المسألة، والتبرير، وتتاح في كل يوم للطلبة الّذين يدرسون هذه السلسلة فرص لتنمية مهارات التفكير العليا من خلال المسائل الخاصة بذلك.

- **المحتوى العلمي** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية، وغيرها.

- **مهارات عامة** تشمل مهارات مثل: الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصًا لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات قراءة الرياضيات وروابط المفردات، ودليل التوقّع وغيرها.

ماذا عن الطلبة الّذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرة على الطلبة الّذين يلتحقون بالجامعات. فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريبيّة التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر، والهندسة، وتحليل البيانات، والإحصاء يماثل مستوى الطالب الذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة حتى ينجح في عمله.

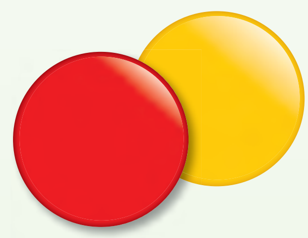
فلسفة السلسلة

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر

يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر دمجًا متوازنًا للتعليم. وتوفر هذه السلسلة للطلبة منحى متوازنًا للرياضيات من خلال:

- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حَلّ مسائل من واقع الحياة.

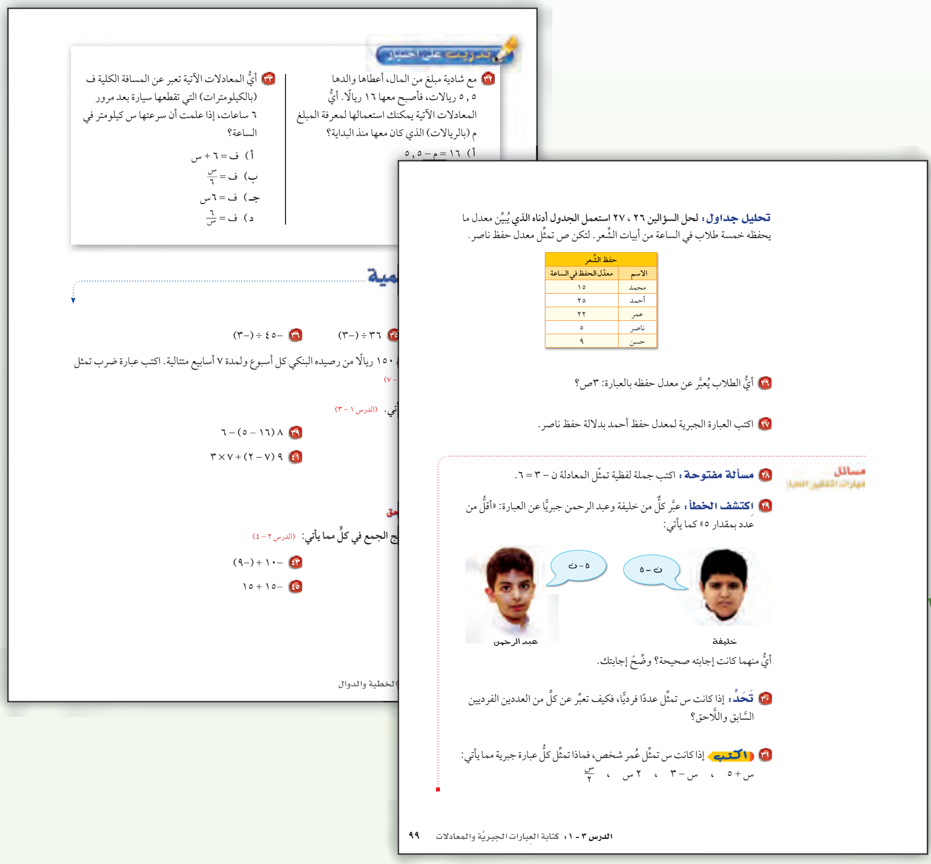
ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطور الترابط الرأسي للفهم الإدراكي، والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوع مهم في الجبر.



يستعمل طلبة الحلقة الأولى من **المرحلة الابتدائية** قطع عد بلونين مختلفين؛ لتمثيل جمل الجمع. ويُعدُّ هذا النشاط أساسًا للفهم والنجاح في حَلّ معادلات جبرية.

أما طلبة الحلقة الثانية من **المرحلة الابتدائية** فإنهم يستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحلها.

ينتقل طلبة **المرحلة الإعدادية** خلال التعامل مع الجبر، من استعمال الأكواب وقطع العد إلى استعمال نماذج جبرية أكثر تجريدًا. ويحلّ الطلبة في الدروس اللاحقة، معادلات بسيطة تحتوي على رموز جبرية.



استمرارية التعليم

يوضّح التسلسل التعليمي الّذي تم وصفه قوّة المقابلة بين النتيجة المرغوب فيها والنجاح في الجبر. وتعمل هذه العملية التطويرية على تجنب وجود فجوات أو تداخلات بين مستويات الصفوف، وتؤكّد على أنّ مفاهيم كل صف ومهاراته مبنيّة على أساس قوي تم تطويره في صفوف سابقة. ويستعمل المنحى نفسه عبر المسارات جميعها، ابتداءً من الصف الأول وحتى الصف الثاني عشر.

دليل المعلم

فلسفة البرنامج

توازن عملية التدريس

- مفاهيم
- مهارات
- حَلّ مسائل

حَلّ المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلبة بخطط ملائمة لحَلّ المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر للطلبة فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحَلّ المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

استراتيجيات حَلّ المسألة

تساعد استراتيجيات حَلّ المسألة الطلبة على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل اللفظية.

١ - ٩ خطة حـل المسألة

فكرة الدرس: أحل المسائل باستعمال استراتيجية "البحث عن نمط"

البحث عن نمط

أحمد: أشارك في مسابقة التحدي للياقة البدنية. وهدفي الوصول إلى أكثر من ٥٦ مرة في الدقيقة من تمرين البطن، وقد حققت في الأسابيع: الأول، والثاني، والثالث، والرابع ٨، ١٢، ١٨، ٢٦ مرة في الدقيقة على الترتيب.

مهمتك: البحث عن نمط لإيجاد عدد الأسابيع التي يصل فيها أحمد إلى هدفه.

افهم	تعرف عدد مرات تمارين البطن لأحمد في أول ٤ أسابيع، وتريد أن تعرف عدد الأسابيع التي يحتاج إليها للوصول إلى هدفه.
خطط	ابحث عن نمط في الأسابيع التي تدرب فيها، ثم أكمل النمط على أساس أنه سيكمل أكثر من ٥٦ مرة من تمرين البطن.
حل	يتهي أحمد أكثر من ٥٦ مرة من تمرين البطن خلال الأسبوع السابع.
تحقق	تحقق من النمط للتأكد من الإجابة الصحيحة.

الأسبوع	١	٢	٣	٤			
عدد مرات تمرين البطن	٨	١٢	١٨	٢٦			

+١ +١ +١ +١

+٤ +٦ +٨ +١٠

حلل الاستراتيجية

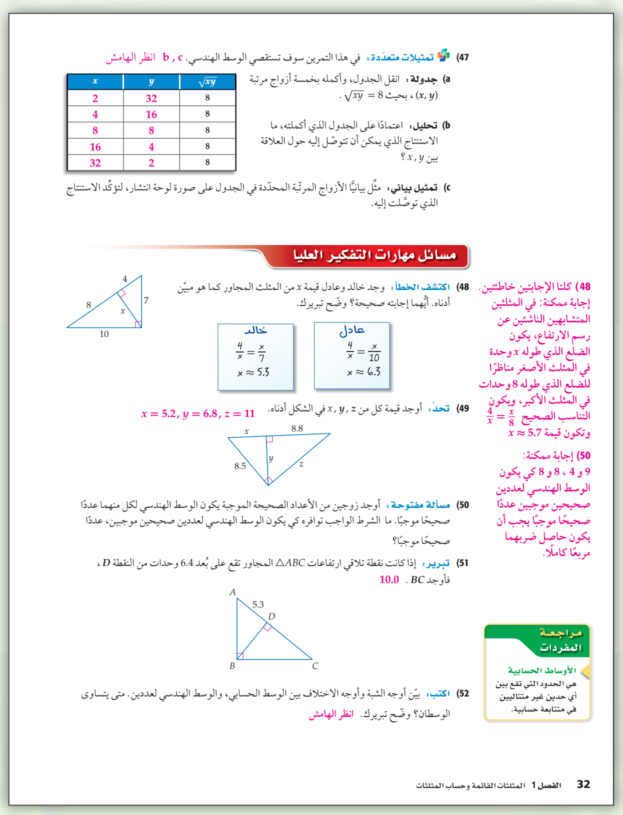
١ صف النمط في السطر الثاني، ثم أوجد عدد المرات التي يمكن لأحمد أداؤها بعد الأسبوع الثامن.

٢ اكتب مسألة يمكن حلها عن طريق البحث عن نمط، وصف ذلك النمط.

٤٤ الفصل الأول

مسائل مهارات التفكير العليا

تتطلب هذه المسائل استعمال مهارات التفكير العليا (التحليل، والتركيب، ... ، إلخ).



47) تمثيلات متعدّدة: في هذا التمرين سوف تستقصي الوسط الهندسي. b , c انظر الهامش

a) جدولة: انقل الجدول، وأكمله بخمسة أزواج مرتبة (x, y)، بحيث $\sqrt{xy} = 8$.

x	y	$\sqrt{xy}$
2	32	8
4	16	8
8	8	8
16	4	8
32	2	8

b) تحليل: اعتمادًا على الجدول الذي أكملته، ما الاستنتاج الذي يمكن أن تتوصّل إليه حول العلاقة بين x , y؟

c) تمثيل بياني: مثّل بيانيًا الأزواج المرتّبة المحدّدة في الجدول على صورة لوحة انتشار، لتؤكّد الاستنتاج الذي توصّلت إليه.

مسائل مهارات التفكير العليا

48) اكتشف الخطأ: وجد خالد وعادل قيمة x من المثلث المجاور كما هو مبيّن أدناه. أيُّهما إجابته صحيحة؟ وضّح تبريرك.

خالد: $\frac{4}{x} = \frac{x}{7}$، $x \approx 5.3$

عادل: $\frac{4}{x} = \frac{x}{10}$، $x \approx 6.3$

48) كلتا الإجابتين خاطئتين. إجابة ممكنة: في المثلثين المتشابهين الناشئين عن رسم الارتفاع، يكون الضلع الذي طوله x وحدة في المثلث الأصغر مناظرًا للضلع الذي طوله 8 وحدات في المثلث الأكبر، ويكون التناسب الصحيح $\frac{4}{x} = \frac{x}{8}$ وتكون قيمة $x \approx 5.7$

49) تحدّ: أوجد قيمة كل من x , y , z في الشكل أدناه. $x = 5.2 , y = 6.8 , z = 11$

50) مسألة مفتوحة: أوجد زوجين من الأعداد الصحيحة الموجبة يكون الوسط الهندسي لكل منهما عددًا صحيحًا موجبًا. ما الشرط الواجب توافره كي يكون الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين، عددًا صحيحًا موجبًا؟

50) إجابة ممكنة: 9 و 4 ، 8 و 8 كي يكون الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين عددًا صحيحًا موجبًا يجب أن يكون حاصل ضربهما مربعًا كاملًا.

51) تبرير: إذا كانت نقطة تلاقي ارتفاعات $\triangle ABC$ المجاور تقع على بُعد 6.4 وحدات من النقطة D، فأوجد BC. 10.0

52) اكتب: بيّن أوجه الشبة وأوجه الاختلاف بين الوسط الحسابي، والوسط الهندسي لعددين. متى يتساوى الوسطان؟ وضّح تبريرك. انظر الهامش

مراجعة المفردات

الأوساط الحسابية هي الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

32 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

تمثيلات متعددة

تساعد مسائل التمثيلات المتعددة الطلبة على تصور المفاهيم وتعميق الفهم، وتتضمن العبارات اللفظية والعددية والجبرية، والتمثيل البياني، والجداول ... إلخ.

44) **التخطيط للمناسبات:** حجز طارق صالة في أحد المطاعم على شكل سداسي منتظم، طول ضلعه 7 ft، لتناول طعام الغداء مع 12 صديقًا بمناسبة تخرّجه في الجامعة. هل يتسع هذا المكان له ولأصدقائه؟ (إرشاد: استعمل نظرية مجموع الزوايا الداخلية للمضلع، وخصائص المثلثات القائمة الخاصة).

7 ft

الربط مع واقع الحياة

عند التخطيط للاحتفالات التي تحتوي على بوفية للطعام، يخصص لكل مدعو مساحة قدرها $8\,ft^2$.

المصدر: San Antonio News

45) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا التمرين، سوف تستقصي نسب المثلث القائم.

a) **هندسي:** ارسم ثلاثة مثلثات قائمة متشابهة في كل منها زاوية قياسها $50°$، سمِّ أحد المثلثات ABC فيه A الزاوية القائمة، وقياس الزاوية B يساوي $50°$، وسمِّ المثلث الثاني MNP، فيه M زاوية قائمة، وقياس الزاوية N يساوي $50°$، وسمِّ المثلث الثالث XYZ، حيث X الزاوية القائمة، وقياس الزاوية Y يساوي $50°$. انظر الهامش

b) **جدولة:** انسخ الجدول أدناه وأكمله. الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.

المثلث	الطول				النسبة	
ABC	AC	2.4 cm	BC	3.1 cm	$\frac{AC}{BC}$	0.77
MNP	MP	1.7 cm	NP	2.2 cm	$\frac{MP}{NP}$	0.77
XYZ	XZ	3.0 cm	YZ	3.9 cm	$\frac{XZ}{YZ}$	0.77

c) **تعبير لفظي:** خمّن نسبة طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $50°$ إلى طول الوتر في أي مثلث قائم الزاوية. انظر الهامش

44) نعم، إجابة ممكنة: مساحة الصالة $129\,ft^2$ تقريبًا، وهذه المساحة كافية لاستيعاب 16 مدعوًا. وبما أن عدد المدعوين ومعهم طارق هو 13 فردًا، فإن الصالة تسعهم جميعًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **اكتشف الخطأ:** أرادت فاطمة ورباب إيجاد قيمة x في المثلث المجاور. أيّهما حلّها صحيح؟ برّر إجابتك. انظر الهامش

فاطمة

$x = \frac{6\sqrt{2}}{2}$

$x = 3\sqrt{2}$

رباب

$x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

$x = 3\sqrt{3}$

47) **مسألة مفتوحة:** ارسم مستطيلًا طول قطره يساوي مثلَي عرضه، ثم اكتب معادلة لإيجاد طوله. انظر الهامش

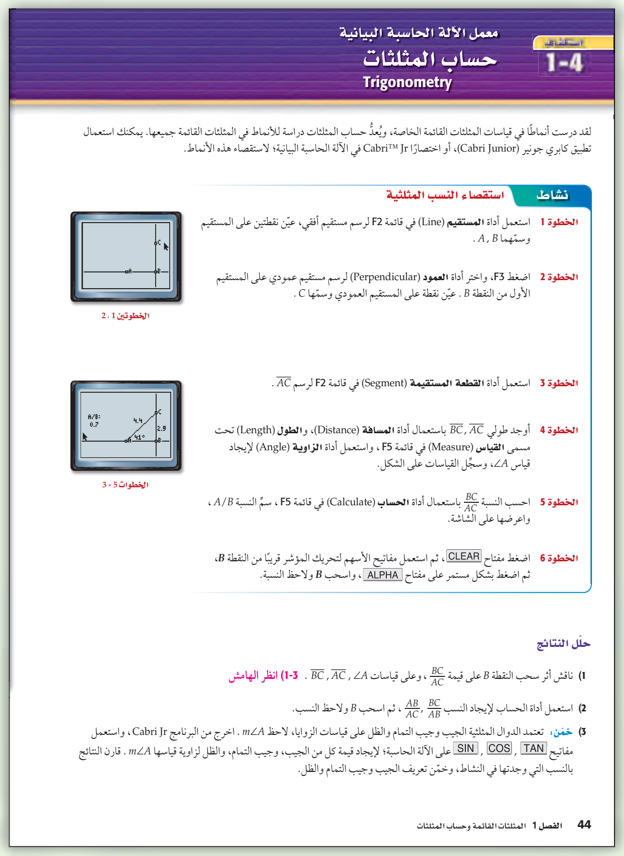
48) **تحدٍّ:** أوجد محيط الشكل الرباعي $ABCD$ المجاور. 59.8

49) **تبرير:** إذا كانت نسبة قياسات الزوايا في مثلث كنسبة 1:2:3، وكان طول الضلع الأقصر 8، فما محيط المثلث؟ 37.9

50) **اكتب:** إذا علمت طول الوتر في المثلث $90° - 60° - 30°$، فوضّح كيف يمكنك إيجاد طولَي ضلعيه بالصورة الجذرية.

50) إجابة ممكنة: طول وتر المثلث $90°-60°-30°$ يساوي مثلَي طول الضلع الأقصر. لذا، يمكن إيجاد طول الضلع الأقصر بقسمة طول الوتر على 2. وطول الضلع الأطول هو $\sqrt{3}$ في طول الضلع الأقصر. لذا، يمكن إيجاد طول الضلع الأطول بقسمة طول الوتر على 2 وضرب الناتج في $\sqrt{3}$.

41 الدرس 3-1 المثلثات القائمة الخاصة



استكشاف 4-1

معمل الآلة الحاسبة البيانية

حساب المثلثات
Trigonometry

لقد درست أنماطًا في قياسات المثلثات القائمة الخاصة، ويُعدُّ حساب المثلثات دراسة للأنماط في المثلثات القائمة جميعها. يمكنك استعمال تطبيق كابري جونير (Cabri Junior)، أو اختصارًا Cabri™ Jr في الآلة الحاسبة البيانية؛ لاستقصاء هذه الأنماط.

نشاط استقصاء النسب المثلثية

الخطوة 1 استعمل أداة **المستقيم** (Line) في قائمة F2 لرسم مستقيم أفقي، عيّن نقطتين على المستقيم وسمّهما A, B.

الخطوة 2 اضغط F3، واختر أداة **العمود** (Perpendicular) لرسم مستقيم عمودي على المستقيم الأول من النقطة B. عيّن نقطة على المستقيم العمودي وسمّها C.

الخطوتين 1، 2

الخطوة 3 استعمل أداة **القطعة المستقيمة** (Segment) في قائمة F2 لرسم $\overline{AC}$.

الخطوة 4 أوجد طولي $\overline{BC}, \overline{AC}$ باستعمال أداة **المسافة** (Distance)، و**الطول** (Length) تحت مسمى **القياس** (Measure) في قائمة F5، واستعمل أداة **الزاوية** (Angle) لإيجاد قياس $\angle A$، وسجِّل القياسات على الشكل.

الخطوات 5 - 3

الخطوة 5 احسب النسبة $\frac{BC}{AC}$ باستعمال أداة **الحساب** (Calculate) في قائمة F5، سمِّ النسبة A/B، واعرضها على الشاشة.

الخطوة 6 اضغط مفتاح CLEAR، ثم استعمل مفاتيح الأسهم لتحريك المؤشر قريبًا من النقطة B، ثم اضغط بشكل مستمر على مفتاح ALPHA، واسحب B ولاحظ النسبة.

حلّل النتائج

1) ناقش أثر سحب النقطة B على قيمة $\frac{BC}{AC}$، وعلى قياسات $\angle A$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. 1-3) انظر الهامش

2) استعمل أداة الحساب لإيجاد النسب $\frac{BC}{AB}, \frac{AB}{AC}$، ثم اسحب B ولاحظ النسب.

3) **خمّن:** تعتمد الدوال المثلثية الجيب وجيب التمام والظل على قياسات الزوايا، لاحظ $m\angle A$. اخرج من البرنامج Cabri Jr، واستعمل مفاتيح TAN, COS, SIN على الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قيمة كل من الجيب، وجيب التمام، والظل لزاوية قياسها $m\angle A$. قارن النتائج بالنسب التي وجدتها في النشاط، وخمّن تعريف الجيب وجيب التمام والظل.

44 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

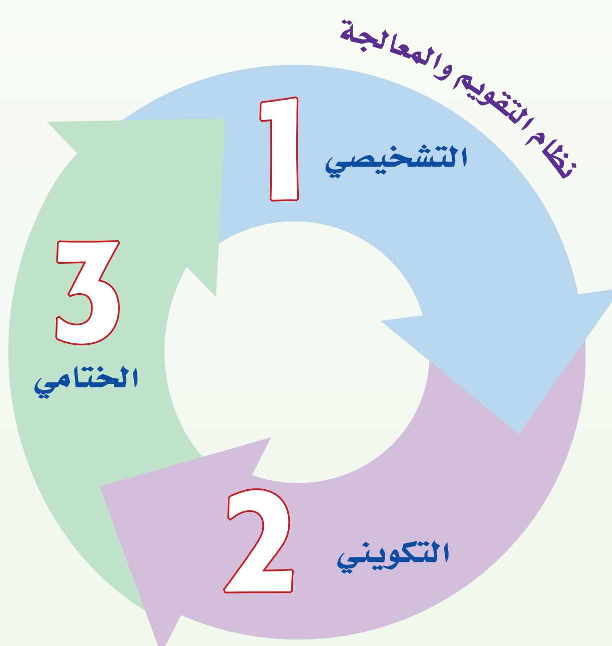
معامل الآلة الحاسبة البيانية

توفر هذه المعامل للطلبة فرصة لفهم الرياضيات من خلال التمثيلات البيانية.

نظام التقويم الشامل

معالجة الأخطاء

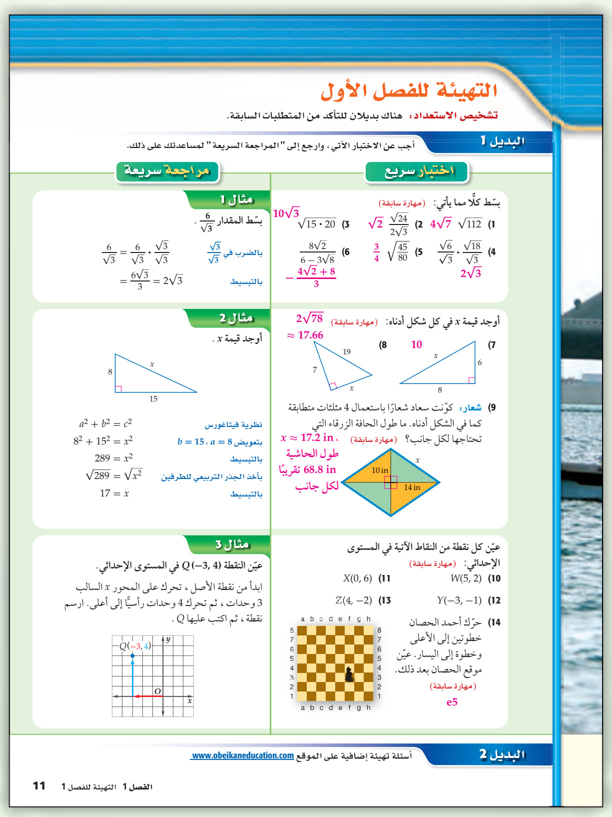
توفر السلسلة تقويمًا مستمرًا ذا معنى لمدى تقدم الطلبة في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.



1 التقويم التشخيصي

تقويم أوّلي قوِّم معرفة طلبتك في بداية العام الدراسي باستعمال اختبارات تشخيصية، واختبارات تحديد المستوى. وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلبتك لمواد ومصادر تعلم إضافية؛ ليكونوا قادرين على المواءمة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية قوِّم المعارف السابقة لطلبتك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال المصادرالموجودة في كتاب الطالب، أو دليل المعلم، أو أي مصادر أخرى تراها مناسبة.



التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

1) $\sqrt{112}$ $4\sqrt{7}$
2) $\frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{3}}$ $\sqrt{2}$
3) $\sqrt{15 \cdot 20}$ $10\sqrt{3}$
4) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ $2\sqrt{3}$
5) $\sqrt{\frac{45}{80}}$ $\frac{3}{4}$
6) $\frac{8\sqrt{2}}{6-3\sqrt{8}}$ $-\frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه: (مهارة سابقة)

7) 10
8) $2\sqrt{78} \approx 17.66$

9) شعار: كوّنت سعاد شعارًا باستعمال 4 مثلثات متطابقة كما في الشكل أدناه. ما طول الحافة الزرقاء التي تحتاجها لكل جانب؟ (مهارة سابقة) $x \approx 17.2$ in، طول الحاشية 68.8 in تقريبًا لكل جانب

عيّن كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى الإحداثي: (مهارة سابقة)

10) $W(5, 2)$
11) $X(0, 6)$
12) $Y(-3, -1)$
13) $Z(4, -2)$

14) حرّك أحمد الحصان خطوتين إلى الأعلى وخطوة إلى اليسار. عيّن موقع الحصان بعد ذلك. (مهارة سابقة) e5

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

بالضرب في $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

بالتبسيط: $= \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

مثال 2

أوجد قيمة x.

نظرية فيثاغورس: $a^2 + b^2 = c^2$

بتعويض $a = 8$، $b = 15$: $8^2 + 15^2 = x^2$

بالتبسيط: $289 = x^2$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين: $\sqrt{289} = \sqrt{x^2}$

بالتبسيط: $17 = x$

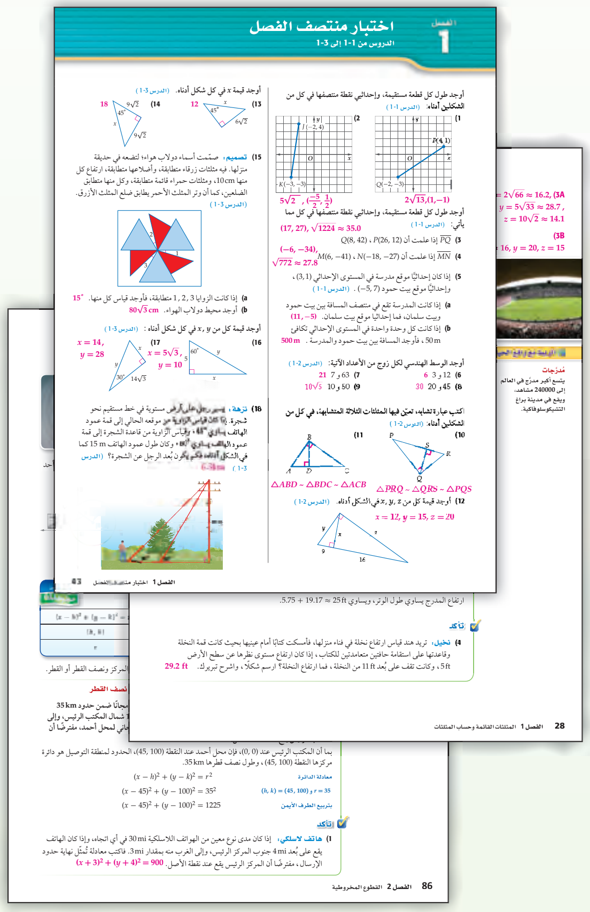
مثال 3

عيّن النقطة $Q(-3, 4)$ في المستوى الإحداثي.

ابدأ من نقطة الأصل، تحرك على المحور x السالب 3 وحدات، ثم تحرك 4 وحدات رأسيًا إلى أعلى. ارسم نقطة، ثم اكتب عليها Q.

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

11 الفصل 1 التهيئة للفصل 1



2 التقويم التكويني

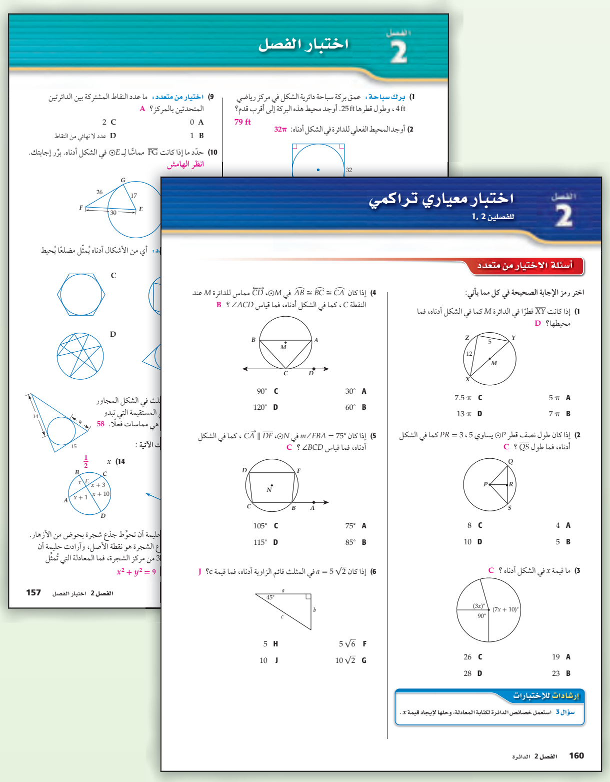
مراقبة التقدم حدِّد إذا كان طلبتك يحرزون تقدمًا مناسبًا في أثناء تعلمهم في كل درس أو لا، باستعمال أنواع التقويم الآتية لتنويع التدريس والتدريبات:

كتاب الطالب

- تأكد
- تأكد من فهمك
- اختبار منتصف الفصل
- دليل الدراسة والمراجعة
- المطويات

دليل المعلم

- بدائل تنويع التعليم
- الخطوة الرابعة (التقويم) في خطة التدريس
- معالجة الأخطاء



3 التقويم الختامي

التقويم الختامي قوِّم مدى نجاح طلبتك في تعلم مفاهيم كل فصل باستعمال ما يأتي:

كتاب الطالب

- اختبار الفصل
- الاختبار المعياري التراكمي
- المطويات

دليل المعلم

- معالجة الأخطاء

تنويع التعليم

تلبية حاجات الطلبة

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات؛ لتحديد احتياجات طلبتك وتلبيتها.

كما أن تنويع التعليم يلبي حاجات الفئتين الآتيتين :

- دون الطلبة دون المتوسط
- فوق الطلبة فوق المتوسط

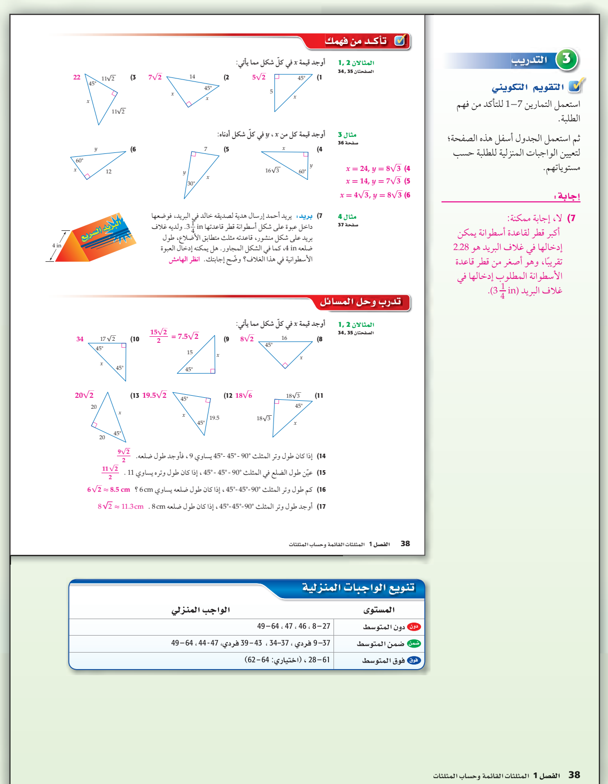
الطلبة من المستوى المتقدم

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية ، التي تم تصنيفها للطلبة فوق المتوسط، مع الطلبة ذوي المستوى التعليمي المتقدم.

مجموعات أسئلة متعددة المستويات

تم تنويع الواجبات المنزلية لكل درس حسب مستويات الطلبة:

- دون دون المتوسط
- ضمن ضمن المتوسط
- فوق فوق المتوسط



دليل المعلم

المعالجة

معالجة متعددة المستويات

يُقدِّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخلًا شاملًا للمعالجة.

التقويم والمعالجة

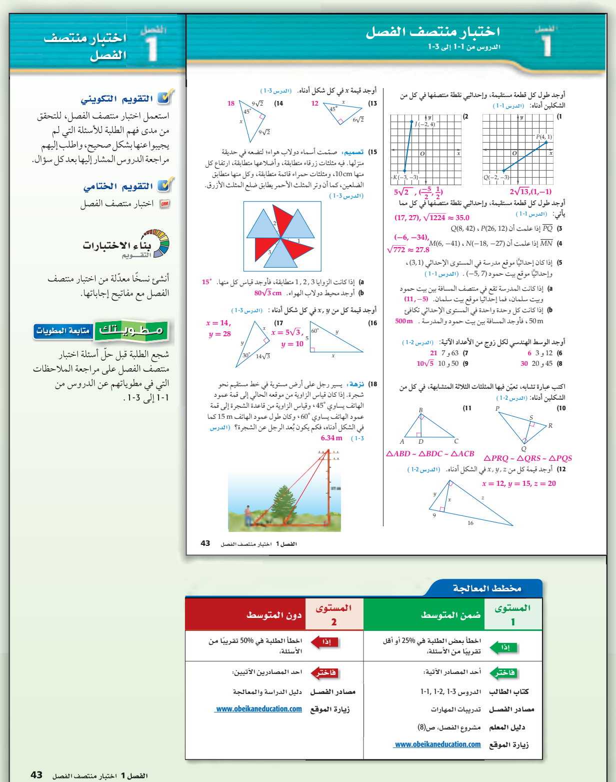
يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

المعالجة 1 استعمال مجموعات أسئلة.

المعالجة 2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنويع التعليم.

في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلبة بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل. وتساعدك العبارات الشرطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الذي تستعمله.



خلال كل درس

توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل؛ ليحدّد المعلم إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلبة.

ما بعد الفصل

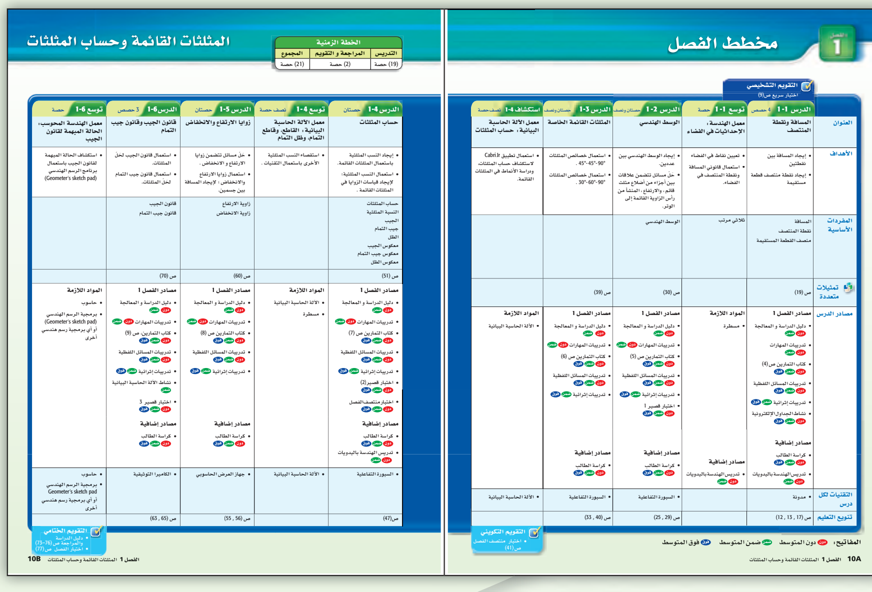
توفر السلسلة بدائل متعددة للطلبة الّذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل تساعدهم على تحسين مستوياتهم.

دليل المعلم

التخطيط للنجاح

سهولة الاستعمال

تتميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسُّع، وإرشادات للمعلم تساعده على تعرّف مستويات الطلبة، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.



تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.

الترابط الرأسي (بين الفصول)

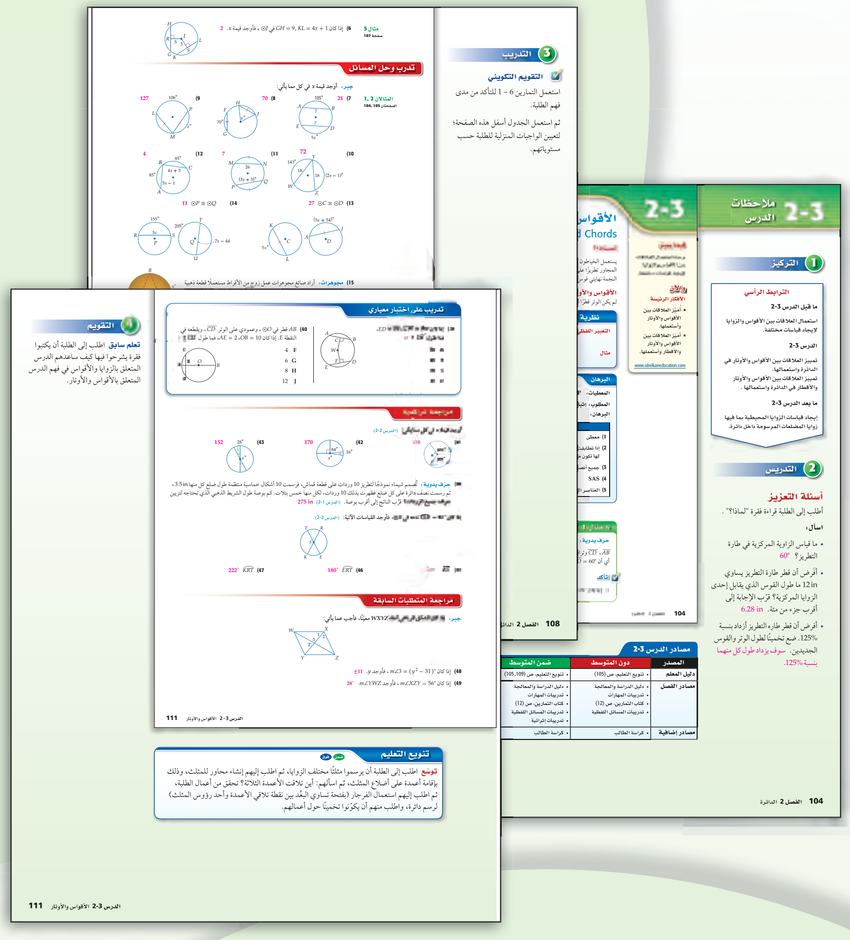
بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.

خطة التعليم ذات الخطوات الأربع

تُنظم تعليمك، وتتضمن:

1 التركيز 3 التدريب

2 التدريس 4 التقويم



الترابط الرأسي (بين الدروس)

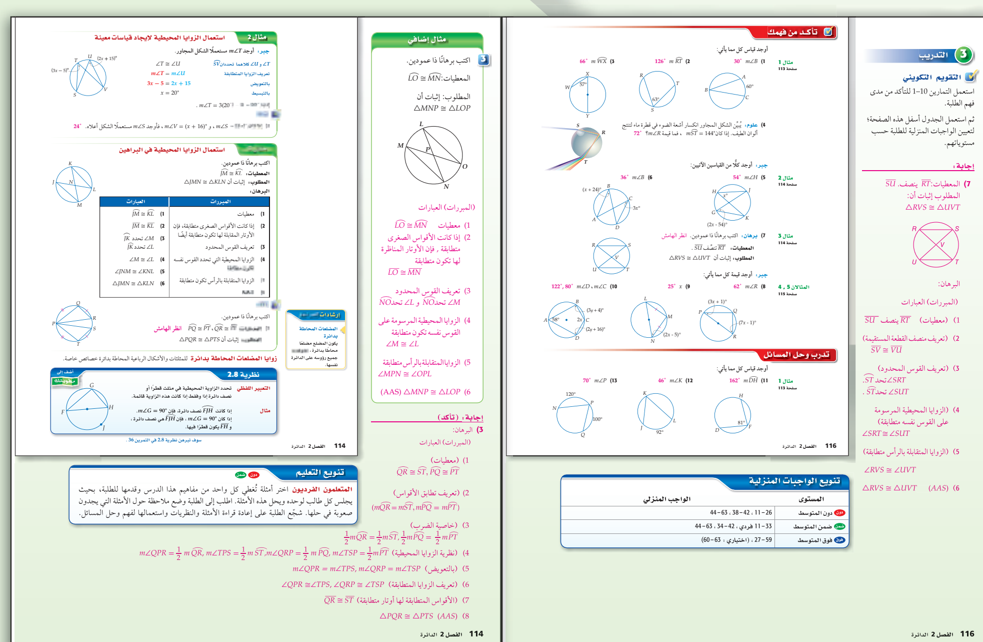
يوضح الترابط الرأسي في بداية كل درس الأهداف التي تؤدي إلى محتوى الدرس الحالي والأهداف التي تتبعه، والّذي يأتي في إطار وثيقة المدى والتتابع من الصف الأول إلى الصف الثاني عشر.

أسئلة التعزيز

يحتوي كل درس على أسئلة تعزيز؛ لتستعملها في مساعدة الطلبة على استقصاء الأفكار الرئيسة للدرس وفهمها.

أمثلة إضافية

يُعدُّ كل مثال إضافي انعكاسًا لمثال في كتاب الطالب.



بدائل تنويع الواجبات المنزلية

بما أن معظم الصفوف تشمل طلبة ذوي قدرات مختلفة، فإن بدائل تنويع الواجبات المنزلية يسمح لك بتعديل أسئلة الواجب المنزلي.

نشاطات تقويمية

توفر نشاطات التقويم التكويني طرائق بديلة؛ لتحديد مدى استيعاب الطلبة في نهاية كل درس، مثل:

تعلم سابق يربط الطلبة ما تعلموه في الدرس الحالي بما تعلموه سابقًا.

تعلم لاحق يتوقّع الطلبة كيفية ارتباط الدرس الحالي بالدرس التالي.

التسمية في الرياضيات يُحدّد الطلبة المعلومات الرياضية المستعملة في المسألة.

بطاقة خروج يكتب الطلبة جواب السؤال على ورقة خارجية يسلمونها قبل مغادرتك غرفة الصف.

الفصل 1

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص(9)

	الدرس 1-1 (4 حصص)	توسع 1-1 (حصة)	الدرس 1-2 (حصتان ونصف)	الدرس 1-3 (حصتان ونصف)	استكشاف 1-4 (نصف حصة)
العنوان	المسافة ونقطة المنتصف	معمل الهندسة: الإحداثيات في الفضاء	الوسط الهندسي	المثلثات القائمة الخاصة	معمل الآلة الحاسبة البيانية: حساب المثلثات
الأهداف	• إيجاد المسافة بين نقطتين • إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة	• تعيين نقاط في الفضاء • استعمال قانوني المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء.	• إيجاد الوسط الهندسي بين عددين. • حَلّ مسائل تتضمن علاقات بين أجزاء من أضلاع مثلث قائم، والارتفاع، المنشأ من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر.	• استعمال خصائص المثلثات 90°-45°-45°. • استعمال خصائص المثلثات 90°-60°-30°.	• استعمال تطبيق Cabri Jr لاستكشاف حساب المثلثات، ودراسة الأنماط في المثلثات القائمة.
المفردات الأساسية	المسافة نقطة المنتصف منصف القطعة المستقيمة	ثلاثي مرتب	الوسط الهندسي		
تمثيلات متعددة	ص (19)		ص (30)	ص (39)	
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (4) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الجداول الإلكترونية دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الهندسة باليدويات دون ضمن	**المواد اللازمة** • مسطرة **مصادر إضافية** • تدريس الهندسة باليدويات دون ضمن	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (5) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (6) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية
التقنيات لكل درس	• مدونة		• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية	• الآلة الحاسبة البيانية
تنويع التعليم	ص (12 ، 13 ، 17)		ص (25 ، 29)	ص (33 ، 40)	

التقويم التكويني
• اختبار منتصف الفصل ص (41)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المثلثات القائمة وحساب المثلثات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(19) حصة	(2) حصة	(21) حصة

الدرس 1-4 حصتان	توسع 1-4 نصف حصة	الدرس 1-5 حصتان	الدرس 1-6 3 حصص	توسع 1-6 حصة
حساب المثلثات	**معمل الآلة الحاسبة البيانية : القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام**	**زوايا الارتفاع والانخفاض**	**قانون الجيب وقانون جيب التمام**	**معمل الهندسة المحوسب: الحالة المبهمة لقانون الجيب**
• إيجاد النسب المثلثية باستعمال المثلثات القائمة. • استعمال النسب المثلثية؛ لإيجاد قياسات الزوايا في المثلثات القائمة .	• استقصاء النسب المثلثية الأخرى باستعمال التقنيات .	• حَلّ مسائل تتضمن زوايا الارتفاع و الانخفاض . • استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض ؛ لإيجاد المسافة بين جسمين.	• استعمال قانون الجيب لحَلّ المثلثات. • استعمال قانون جيب التمام لحَلّ المثلثات.	• استكشاف الحالة المبهمة لقانون الجيب باستعمال برنامج الرسم الهندسي (Geometer's sketch pad)
حساب المثلثات النسبة المثلثية الجيب جيب التمام الظل معكوس الجيب معكوس جيب التمام معكوس الظل		زاوية الارتفاع زاوية الانخفاض	قانون الجيب قانون جيب التمام	
ص (51)		ص (60)	ص (70)	
مصادر الفصل 1 • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (7) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير(2) دون ضمن فوق • اختبار منتصف الفصل دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الهندسة باليدويات دون ضمن	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية • مسطرة	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (9) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • حاسوب • برمجية الرسم الهندسي (Geometer's sketch pad) أو أي برمجية رسم هندسي أخرى
• السبورة التفاعلية	• الآلة الحاسبة البيانية	• جهاز العرض الحاسوبي	• الكاميرا التوثيقية	• حاسوب • برمجية الرسم الهندسي Geometer's sketch pad أو أي برمجية رسم هندسي أخرى
ص(47)		ص (55 , 56)	ص (63 , 65)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (76-73)
- اختبار الفصل ص (77)

الفصل 1

التقويم والمعالجة

التقويم	التشخيص	المرجع	إرشادات المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 1**	**المرجع**		**المرجع**
	التهيئة للفصل الأول ص(9)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة ص (9)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم		
	تنبيه!	دليل المعلم		
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل ص (41)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 1 ص (73-76)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل ص (77)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري ص (80 ، 81)	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات			
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

الفصل 1 تنويع التعليم

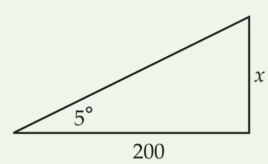
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون اللفظيون اطلب إلى الطلبة أن يعيدوا كتابة معادلات قانون جيب التمام بلغتهم الخاصة دون استعمال المتغيرات. وبعد ذلك يمكنهم وصف الحالات التي يكون قانون جيب التمام فيها أكثر فائدة. وأخيرًا اطلب إليهم أن يغلقوا كتبهم وأن يرسموا شكلاً مثلثيًّا ويسموه، ويكتبوا معادلة قانون جيب التمام باستعمال توضيحاتهم وتوصيفاتهم. .

المتعلمون الطبيعيون اطلب إلى الطلبة أن يبحثوا في الإنترنت عن طريقة صنع مقياس الميل Clinometer. وإذا سمح الوقت، اطلب إليهم أن يبحثوا في تاريخ استعمالات هذه الأداة و استعمالاتها الحالية، ثم يخرجوا إلى الطبيعة؛ لإيجاد ارتفاعات الأشجار، أو ارتفاعات الأجسام العالية حول المدرسة.

البديل 2 دون المتوسط دون

أعط الطلبة المسألة الآتية كتدريب إضافي. يميل تل على الأفقي بزاوية $5°$، سار طارق على هذا التل قاطعًا مسافة أفقية قدرها $200\,ft$. ما مقدار التغير الرأسي في موقع طارق؟ وما المسافة التي قطعها على امتداد التل؟مقربًا النواتج إلى أقرب عُشر. $17.5\ ft,\ 200.8\ ft$



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات صغيرة، ثم اطلب إليهم أن يحددوا مقياس رسم؛ لعمل خريطة لمدرستهم. وأن يعينوا عليها بعض المواقع الرئيسة في المدرسة مثل: غرفة الإدارة، غرفة المعلمين، المكتبة، دورة المياه، .... وذلك باستعمال المستوى الإحداثي.
أخبر الطلبة أنه يمكنهم معرفة المسافة بين أيِّ موقعين عن طريق مقياس الرسم.

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 1

مواضيع ذات علاقة من الهندسة

- إيجاد حلول مسائل تطبيقية تتضمن علاقات التناسب.
- استعمال المفاهيم الهندسية لحَلِّ المسائل .

الفصل 1

مواضيع ذات علاقة من الهندسة

- استعمال خصائص التشابه وتعميمها؛ لاستكشاف تخمينات حول الأشكال الهندسية و تبريرها.
- تعيين أنماط من المثلثات القائمة وتوظيفها؛ لحَلّ مسائل واقعية تشمل المثلثات القائمة الخاصة ($90°-45°-45°$، و $90°-60°-30°$)، و مثلثات أضلاعها تكوّن ثلاثيات فيثاغورس.
- تطوير علاقات التشابه مثل النسب المثلثية باستعمال طرق مختلفة و تبريرها و توظيفها.

ما بعد الفصل 1

الإعداد لما قبل حساب التفاضل والتكامل

- حَلّ مسائل من واقع الحياة باستعمال حساب المثلثات بما في ذلك استعمال قانون الجيب، وقانون جيب التمام، وقوانين المساحات.

نظرة على الدروس

1-1 المسافة ونقطة المنتصف

يمكن استعمال إحداثيِّي طرفي القطعة المستقيمة لإيجاد طولها.

إن طول القطعة المستقيمة على خط الأعداد هو القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيِّي طرفيها.

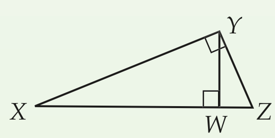
يمكن استعمال قانون المسافة أو نظرية فيثاغورس لإيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

نقطة منتصف القطعة المستقيمة هي نقطة منتصف المسافة بين طرفيها. على خط الأعداد، إحداثيًّا منتصف القطعة المستقيمة التي طرفيها a , b هو $\frac{a+b}{2}$.

لإيجاد إحداثيِّي منتصف القطعة المستقيمة بين نقطتين في المستوى الإحداثي، استعمل صيغة المنتصف.

1-2 الوسط الهندسي

الوسط الهندسي لعددين موجبين هو الجذر التربيعي الموجب لحاصل ضربهما. الوسط الهندسي للعددين الموجبين a, b هو العدد الموجب x الذي يجعل التناسب $a : x = x : b$ صحيحًا. وهذا التناسب يكافئ $x = \sqrt{ab}$.



يوجد للوسط الهندسي تطبيق خاص في المثلث القائم. إذا رسم ارتفاع من رأس الزاوية القائمة في مثلث قائم إلى الوتر، فإن المثلثين الناتجين متشابهان، وكل منهما يشبه المثلث الأصلي. طول هذا الارتفاع هو الوسط الهندسي لطولي القطعتين المستقيمتين اللتين انقسم إليهما الوتر. وإضافة لذلك، فإن طول أي ضلع في المثلث يساوي الوسط الهندسي بين طولي الوتر وقطعة الوتر المستقيمة المجاورة لهذا الضلع. الارتفاع YW يساوي الوسط الهندسي لـ XW و ZW

المثلثات القائمة وحساب المثلثات

1-3 المثلثات القائمة الخاصة

المثلث $45°-45°-90°$ هو المثلث الوحيد من المثلثات المتطابقة الضلعين و القائمة الزاوية ومن خصائصه أن طول وتره يساوي حاصل ضرب $\sqrt{2}$ في طول ضلعه. لذلك، فإن النسبة بين أطوال الأضلاع هي $1:1:\sqrt{2}$.
والمثلث $30°-60°-90°$ أيضًا له خصائص معينة، فأطوال أضلاعه $x, x\sqrt{3}, 2x$ مما يجعل النسبة بينها $1:\sqrt{3}:2$. يمكنك بمعرفة هذه خصائص توفير الوقت عند حَلّ مسائل تتضّمن مثلثات قائمة خاصة.

1-4 حساب المثلثات

تُسمى النسبة بين طولي أي ضلعين في مثلث قائم نسبة مثلثية. والنسب المثلثية الأساسية الثلاث هي الجيب، وجيب التمام، والظل، وتكتب باختصار sin، cos، tan. جيب$\angle A$ يساوي طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$ مقسومًا على طول الوتر، وجيب تمام $\angle A$ يساوي طول الضلع المجاور لِـ $\angle A$ مقسومًا على طول الوتر، وظل $\angle A$ يساوي طول الضلع المقابل للزاوية مقسومًا على طول الضلع المجاور لها. وقيمة أيٍّ من هذه النسب لا تعتمد على أطوال أضلاع المثلث.

تستعمل النسب المثلثية، لإيجاد القياسات المجهولة في المثلث القائم. إذا علمت طولي ضلعين، أو طول أحد الأضلاع، وقياس زاوية حادة واحدة، يمكنك إيجاد بقية عناصر المثلث القائم.
ومعكوس كل نسبة مثلثية يعطي قياس الزاوية. ويرمز لمعكوس النسب المثلثية بـ $\sin^{-1}$، $\cos^{-1}$، $\tan^{-1}$.

1-5 زوايا الارتفاع و الانخفاض

زاوية الارتفاع هي الزاوية المُكَوّنة من الخط الأفقي وخط النظر عندما ينظر الراصد إلى الجسم المرصود فوق الخط الأفقي.
وزاوية الانخفاض هي الزاوية المَكوّنة من الخط الأفقي وخط النظر عندما ينظر الراصد إلى الجسم المرصود تحت الخط الأفقي. يمكن استعمال النسب المثلثية في حَلّ مسائل تحتوي على زوايا الارتفاع أو زوايا الانخفاض. ويمكن استعمال زوايا الارتفاع أو زوايا الانخفاض لجسمين مختلفين؛ لإيجاد المسافة بينهما .

1-6 قانون الجيب و قانون جيب التمام

يمكن استعمال قانون الجيب في حساب المثلثات؛ لإيجاد القياسات المجهولة في المثلثات غير القائمة.

افرض أن $\triangle ABC$ أي مثلث أطوال أضلاعه a, b, c التي تقابل الزوايا التي قياساتها A, B, C على الترتيب، فإن:
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

ويمكن استعمال قانون الجيب لحَلّ المثلث. وهذا يعني إيجاد قياس كل ضلع و كل زاوية. يمكنك استعمال قانون الجيب لحَلّ المثلث إذا علمت قياسي زاويتين وضلع فيه(ASA)، أو إذا علمت قياسي ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما (SSA).

يستعمل قانون جيب التمام لحَلّ المثلث في بعض الحالات عندما لا يمكن استعمال قانون الجيب، ويحدث هذا إذا علم طولا ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (SAS)، أو ثلاثة أضلاع (SSS). افرض أن $\triangle ABC$ أي مثلث أطوال أضلاعه a, b, c تقابل الزوايا التي قياساتها A, B, C, على الترتيب، فإن المعادلات الآتية صحيحة.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

الفصل 1 ملاحظات

مشروع الفصل

جسر الشيخ عيسى

يستعمل الطلبة ما تعلموه حول المثلثات القائمة الخاصة، والوسط الهندسي، لتقييم نموذج لأحد الشراعين القائمين على جسر الشيخ عيسى الذي يربط بين المنامة والمحرق.

- اطلب إلى الطلبة أن يفترضوا أن المثلث المُمثِّل للشراع، مثلث قائم متطابق الضلعين، وطول ضلعه 50 cm.
- إذا أراد الطلبة إنارة حواف الشراع بسلك من المصابيح الكهربائية، فما طول هذا السلك؟
- اطلب إلى الطلبة أن يفترضوا أن المثلث القائم المُمثِّل للشراع مختلف الأضلاع، وأن طول قاعدة الشراع 100cm، وارتفاعه يقسم القاعدة إلى قطعتين مستقيمتين طول كل منهما 40 cm, 60 cm. ماطول السلك في هذه الحالة؟
- اطلب إلى الطلبة رسم مخطط للنموذج في كل حالة.
- اطلب إلى الطلبة استعمال المكتبة أو الإنترنت للبحث عن معلومات أخرى حول جسر الشيخ عيسى.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في هذا الفصل باستعمال الآتي:

تعريف: الوسط الهندسي لعددين موجبين حقيقيين a , b هو العدد x حيث $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$

مثال: الوسط الهندسي للعددين 1 و 16 يساوي 4 ؛ لأن $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$

سؤال: هل الوسط الهندسي لعددين يساوي الوسط الحسابي لهما؟ ما العلاقات المتكافئة التي يُبينُها الوسط الهندسي؟ لا ،

$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}, x^2=ab, x=\sqrt{ab}$

الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

Right Triangles and Trigonometry

فيما سبق

درستُ حل التناسب.

والآن

الأفكار العامة

- أجد المسافة بين نقطتين.
- أحلّ مسائل باستعمال الوسط الهندسي ونظرية فيثاغورس وعكسها.
- أستعمل خصائص المثلثات القائمة الخاصة.
- أستعمل حساب المثلثات ، لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث.

لماذا؟

جسور: جسر الشيخ عيسى هو ثاني جسر يربط بين المنامة والمحرق. ويبلغ طوله 254.3m . وقد تم افتتاحه في 4 يناير 1997 م. وصُمم الشراع القائم عليه على هيئة مثلثات متداخلة مثبتة بدعامات تقسمها إلى مثلثات قائمة.

مطويتك منظم أفكار

المثلثات القائمة وحساب المثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الأول حول المثلثات القائمة وحساب المثلثات ، مبتدئًا بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات ، وورقة رسم واحدة.

1 **رتّب** ورق الملاحظات فوق ورقة الرسم.

2 **اطوِ** الأوراق قطريًا لتُكوّن مثلثًا ، ثم قُصّ الأجزاء الزائدة.

3 **افرد** الأوراق ، ثم ثبّت الأوراق عند الثنية الداخلية لتُكوّن كتيبًا.

4 **اكتب** على كل صفحة ، عنوان الدرس ورقمه.

مطويتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة ملاحظاتهم أثناء دراستهم للمثلثات القائمة و حساب المثلثات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل؛ لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجِّع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

CRM مسرد مفردات الطالب

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضاً للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كلًا مما يأتي: (مهارة سابقة)

1) $\sqrt{112}$ $4\sqrt{7}$

2) $\frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{3}}$ $\sqrt{2}$

3) $\sqrt{15 \cdot 20}$ $10\sqrt{3}$

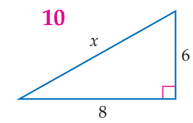
4) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ $2\sqrt{3}$

5) $\sqrt{\frac{45}{80}}$ $\frac{3}{4}$

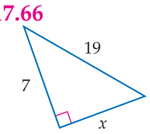
6) $\frac{8\sqrt{2}}{6-3\sqrt{8}}$ $-\frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه: (مهارة سابقة)

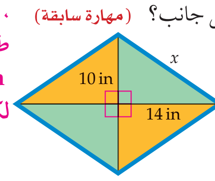
7) 10



8) $2\sqrt{78}$ ≈ 17.66



9) **شعار:** كوّنت سعاد شعارًا باستعمال 4 مثلثات متطابقة كما في الشكل أدناه. ما طول الحافة الزرقاء التي تحتاجها لكل جانب؟ (مهارة سابقة) $x \approx 17.2$ in، طول الحاشية 68.8 in تقريبًا لكل جانب



عيّن كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى الإحداثي: (مهارة سابقة)

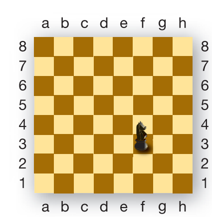
10) $W(5, 2)$

11) $X(0, 6)$

12) $Y(-3, -1)$

13) $Z(4, -2)$

14) حرّك أحمد الحصان خطوتين إلى الأعلى وخطوة إلى اليسار. عيّن موقع الحصان بعد ذلك. (مهارة سابقة) e5



مراجعة سريعة

مثال 1

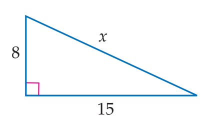
بسّط المقدار $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

بالضرب في $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

بالتبسيط $\quad = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

مثال 2

أوجد قيمة x.



نظرية فيثاغورس $\quad a^2 + b^2 = c^2$

بتعويض $a = 8$ ، $b = 15$ $\quad 8^2 + 15^2 = x^2$

بالتبسيط $\quad 289 = x^2$

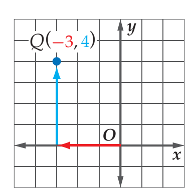
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\quad \sqrt{289} = \sqrt{x^2}$

بالتبسيط $\quad 17 = x$

مثال 3

عيّن النقطة $Q(-3, 4)$ في المستوى الإحداثي.

ابدأ من نقطة الأصل، تحرك على المحور x السالب 3 وحدات، ثم تحرك 4 وحدات رأسيًّا إلى أعلى. ارسم نقطة، ثم اكتب عليها Q.



البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل الأول

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومُخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد المعالجة؛ المناسبة. كما تساعد العبارة "إذا ... فاختر"؛ في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،

فاختر أحد المصادر الآتية:

مصادر الفصل بنك المفاهيم و المهارات، تدريبات المهارات

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من التمارين،

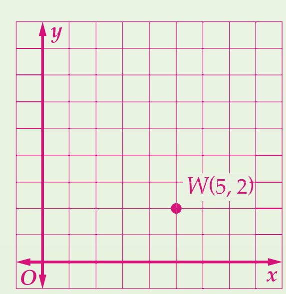
فاختر أحد المصدرين الآتيين:

مصادر الفصل دليل الدراسة و المعالجة

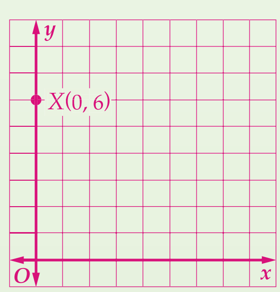
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

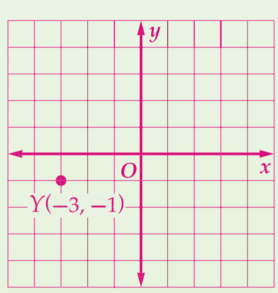
10)



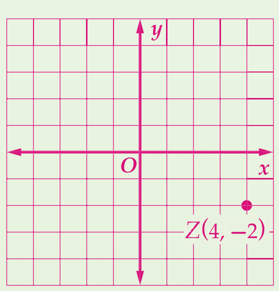
11)



12)



13)



1-1 المسافة ونقطة المنتصف
Distance and Midpoints

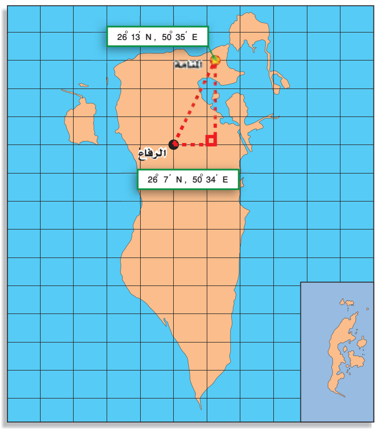
فيما سبق
درست تعيين نقاط في المستوى الإحداثي.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجد المسافة بين نقطتين.
- أجد نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

المفردات الأساسية
المسافة
distance
نقطة المنتصف
midpoint
منصف القطعة المستقيمة
segment bisector

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يُحدّد موقع مدينة على الخارطة بدرجات العرض والطول، ويمكن حساب المسافات القصيرة باستعمال نظرية فيثاغورس.

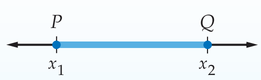


المسافة بين نقطتين تُعرّف **المسافة** بين نقطتين بأنها طول القطعة المستقيمة التي طرفاها هاتان النقطتان. ويمكن استعمال إحداثيات النقطتين لحساب المسافة. وبما أن $\overline{PQ}$ هي نفسها $\overline{QP}$، فإن الترتيب الذي تُسمى فيه النقطتان ليس له أهمية عند حساب المسافة.

مفهوم أساسي قانون المسافة بين نقطتين (على خط الأعداد) — أضف إلى مطويتك

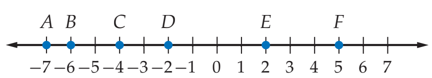
التعبير اللفظي المسافة بين نقطتين تساوي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثييهما.

بالرموز إذا كان إحداثي P يساوي x_1 وإحداثي Q يساوي x_2، فإن:
$PQ = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$



مثال 1 إيجاد المسافة على خط الأعداد

استعمل خط الأعداد لإيجاد BE.



إحداثي B هو -6، وإحداثي E هو 2.

قانون المسافة	$BE = \|x_2 - x_1\|$
بتعويض $x_1 = -6$ ، $x_2 = 2$	$= \|2 - (-6)\|$
بالتبسيط	$= 8$

تأكد

استعمل خط الأعداد أعلاه لإيجاد كل من القياسات الآتية:

1A) AC 3   1B) CF 9   1C) BF 11

1-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1
استعمال نقاط ممثّلة على المستوى الإحداثي.

الدرس 1-1
إيجاد المسافة بين نقطتين.
إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

ما بعد الدرس 1-1
استعمال المسافات ونقاط المنتصفات؛ لحَلّ المسائل وكتابة البراهين الهندسية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا ؟".

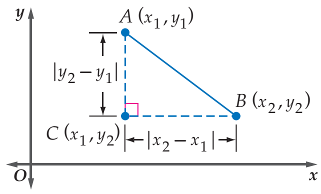
اسأل:
- يوجد 60′ في 1° طول و 60′ في 1° عرض. ما إحداثيات مدينة المنامة بالدرجات؟ (26.22, 50.42) وما إحداثيات مدينة الرفاع بالدرجات؟ (26.12, 50.57)
- ما طول كل من ضلعي القائمة في المثلث القائم المُبيّن على الخارطة بالدرجات؟ طول الضلع الأفقي: 0.1°، والضلع الرأسي: 0.15°
- استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة بين المنامة والرفاع. 0.18° تقريبًا
- لماذا يجب تحديد طول اضلاع المثلث والمسافة بين المنامة والرفاع بالدرجات؟ لأن موقع المدينتين على المستوى الإحداثي يمثل درجات خطي الطول والعرض، ولذلك عند إيجاد المسافة بينهما فإنها ستكون بالدرجات.

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص(13)	• تنويع التعليم ص (12 , 13 , 17)	• تنويع التعليم ص (12, 17)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الجداول الإلكترونية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الهندسة باليدوية	• كراسة الطالب • تدريس الهندسة باليدوية	• كراسة الطالب

> **إرشادات للدراسة**
>
> **نظرية فيثاغورس** تذكَّر أن نظرية فيثاغورس تكتب على الصورة $a^2 + b^2 = c^2$ ، حيث يمثِّل a, b طولي ضلعي القائمة ، ويمثل c طول الوتر .

لإيجاد المسافة بين النقطتين A , B في إضافة المستوى الإحداثي يمكن تكوين مثلث قائم الزاوية وتره $\overline{AB}$، ورأس زاويته القائمة C . وبعد ذلك يمكن حساب AB باستعمال نظرية فيثاغورس.



نظرية فيثاغورس	$(CB)^2 + (AC)^2 = (AB)^2$
$CB = \|x_2 - x_1\|, AC = \|y_2 - y_1\|$	$(\|x_2 - x_1\|)^2 + (\|y_2 - y_1\|)^2 = (AB)^2$
مربع العدد يكون دائمًا موجبًا	$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (AB)^2$
بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$

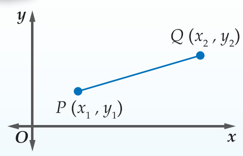
وهذا هو قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي
قانون المسافة بين نقطتين (في المستوى الإحداثي)

أضف إلى مطويتك

إذا كانت النقطة P هي (x_1, y_1) والنقطة Q هي (x_2, y_2) ، فإن :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



وكما هو في الإحداثيات على خط الأعداد ،
فإن ترتيب الإحداثيات x ، والإحداثيات y في كل من القوسين ليس ذا أهمية.

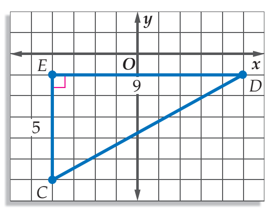
مثال 2 إيجاد المسافة في المستوى الإحداثي

أوجد المسافة بين النقطتين $C(-4, -6) , D(5, -1)$.

قانون المسافة	$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$(x_1, y_1) = (-4, -6), (x_2, y_2) = (5, -1)$	$= \sqrt{[5 - (-4)]^2 + [-1 - (-6)]^2}$
بالطرح	$= \sqrt{9^2 + 5^2}$
بالتبسيط	$= \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$

إذن المسافة بين C ، D هي $\sqrt{106}$ وحدة. وباستعمال الآلة الحاسبة تجد أن $\sqrt{106}$ يساوي 10.3 وحدات تقريبًا.

تحقق عيِّن النقطتين في المستوى الإحداثي، وتحقَّق من صحة الحل باستعمال نظرية فيثاغورس.



$$(CD)^2 = (EC)^2 + (ED)^2$$
$$(CD)^2 = 5^2 + 9^2$$
$$(CD)^2 = 106$$
$$CD = \sqrt{106}\ ✓$$

تأكد

أوجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي:

2A) $E(-5, 6) , F(8, -4)$
$\sqrt{269}$ أو 16.4 وحدة تقريبًا

2B) $J(4, 3) , K(-3, -7)$
$\sqrt{149}$ أو 12.2 وحدة تقريبًا

المسافة بين نقطتين

مثال 1 يُبيِّن كيفية حساب المسافة بين نقطتين على خط الأعداد.

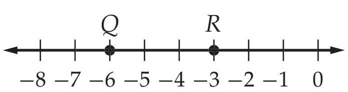
مثال 2 يُبيِّن كيفية حساب المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي باستعمال نظرية فيثاغورس أو قانون المسافة.

التقويم التكويني

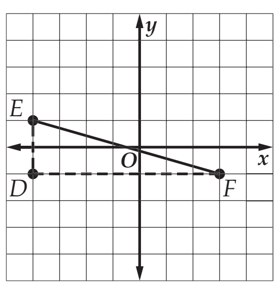
استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 استعمل خط الأعداد لإيجاد QR. 3



2 أوجد المسافة بين النقطتين $E(-4, 1) , F(3, -1)$



$\sqrt{53} \approx 7.28$

إرشادات للمعلم الجديد

إيجاد المسافة شجّع الطلبة على استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة بين نقطتين في عدة أمثلة قبل أن تقدم لهم قانون المسافة. وبذلك يجد الطلبة بديلًا عن القانون لحساب المسافة بين نقطتين، إذا واجهوا صعوبة في تذكر القانون.

التعليم باستعمال التقنيات

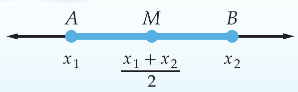
مدونة اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا فقرة في المدونة تُبيّن أوجه الشبه بين قانون المسافة بين نقطتين ونظرية فيثاغورس.

نقطة منتصف قطعة مستقيمة **نقطة منتصف** القطعة المستقيمة هي النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين طرفي القطعة المستقيمة. إذا كانت X نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإن $AX = XB$، وتكون $\overline{AX} \cong \overline{XB}$.
ويمكن إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد بإيجاد وسط طرفيها.

مفهوم أساسي — قانون نقطة منتصف قطعة مستقيمة (على خط الأعداد)

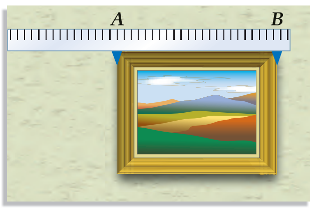
أضف إلى مطويتك

إذا كان x_1, x_2 طرفي $\overline{AB}$ على خط الأعداد،
فإن M نقطة منتصف $\overline{AB}$ هو $\frac{x_1 + x_2}{2}$.



مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد

زينة: يعلق أحمد صورة على حائط، بحيث تبعُد الحافة اليسرى للصورة 15 in عن الجانب الأيسر للحائط. على أي بُعد عن عن الجانب الأيسر للحائط يضع أحمد المسمار الذي يعلق عليه الصورة، إذا كانت الحافة اليمنى للصورة تبعُد 37.5 in عن الجانب الأيسر للحائط؟



طرفا الحافة العلوية لإطار الصورة هما 15 in، 37.5 in
إذن، M نقطة منتصف $\overline{AB}$، هي:

قانون نقطة المنتصف $\frac{x_1 + x_2}{2}$

بتعويض $x_1 = 15, x_2 = 37.5$ $= \frac{15 + 37.5}{2}$

بالتبسيط $= \frac{52.5}{2} = 26.25$

إذن، يضع أحمد المسمار عند نقطة منتصف $\overline{AB}$ التي تبعُد 26.25 in أو $26\frac{1}{4}$ in عن الجانب الأيسر للحائط.

تأكد

3) **درجة حرارة:** هبطت درجة الحرارة على ميزان الحرارة من القراءة 25° إلى −8° . أوجد نقطة منتصف هاتين الدرجتين. 8.5°

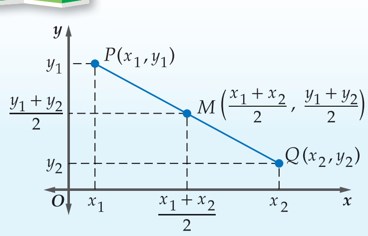
ويمكن إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي بإيجاد وسط الإحداثيين x، ووسط الإحداثيين y لطرفي القطعة المستقيمة.

مفهوم أساسي — قانون نقطة منتصف قطعة مستقيمة (في المستوى الإحداثي)

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ طرفي $\overline{PQ}$ في المستوى الإحداثي، فإن M نقطة منتصف $\overline{PQ}$ هي:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



إن ترتيب إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة ليس مهمًا عند إيجاد إحداثيي نقطة منتصفها.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة
في المثال 3 يمكن إيجاد نقطة المنتصف بإيجاد طول $\overline{AB}$ أولًا وهو $37.5 - 15 = 22.5$ in. وستبعُد نقطة المنتصف عن A نصف المسافة بين A، B أو $\frac{22.5}{2} = 11.25$ in. أجمع هذه المسافة إلى بُعد النقطة A عن الجانب الأيسر للحائط، ولذلك، فإن نقطة المنتصف بين A، B تبعُد $15 + 11.25 = 26.25$ in عن الجانب الأيسر للحائط.

نقطة منتصف قطعة مستقيمة

نقطة منتصف قطعة مستقيمة هي النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين طرفي القطعة.

الأمثلة 3-6 تُبيّن كيفية إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة حسابيًّا وجبريًّا على خط الأعداد وفي المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

3 **زينة:** وضع ماجد لوحة فنية عرضها 225 cm، تبعد حافتها اليمنى 75 cm عن الجانب الأيمن للحائط. ما بُعد منتصف اللوحة عن الحائط بالسنتمترات؟ 187.5 cm

إرشادات للمعلم الجديد

قانون نقطة المنتصف قد يرغب الطلبة في تطوير قوانين خاصة بهم؛ لإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة من خلال اختبار عدة أمثلة.

تنبيه !

التخلص من الأخطاء المفاهيمية
من الأخطاء الشائعة في حساب إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة أن يطرح الطلبة الإحداثيين في قانون نقطة المنتصف، وذلك لاستعمال الطرح في قانون المسافة وفي قانون الميل. ذكّر الطلبة أن نقطة المنتصف هي وسط كل من الإحداثيين، ولإيجاد الوسط أو المتوسط نقسم المجموع على عدد المفردات.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة رسم ثلاث قطع مستقيمة يكون منتصفها النقطة (0, 0) . وأن يكتبوا إحداثيي طرفي كل قطعة، وملاحظاتهم على إحداثيي هذه النقط؟
إجابة ممكنة: الإحداثيات x والإحداثيان y لطرفي كل قطعة مستقيمة متعاكسة.

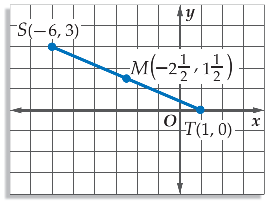
مثال 4 إيجاد نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

أوجد إحداثيي النقطة M ، نقطة منتصف $\overline{ST}$ ، إذا كانت $S(-6, 3)$, $T(1, 0)$.

قانون نقطة المنتصف $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

بتعويض $(x_1, y_1) = S(-6, 3)$، $(x_2, y_2) = T(1, 0)$: $= M\left(\frac{-6+1}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$

بالتبسيط $= M\left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right) = M\left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$



تحقق عيّن النقاط S, T, M في المستوى الإحداثي. تلاحظ أن المسافة من S إلى M تبدو مساوية فعلًا للمسافة من M إلى T. لذا، فإن الحل معقول.

✓ تأكد

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

4A) $A(5, 12), B(-4, 8)$ $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$

4B) $C(-8, -2), D(5, 1)$ $\left(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ويمكن أيضًا أن تجد إحداثيي طرف قطعة مستقيمة، إذا علمت إحداثيي نقطة منتصفها وإحداثيي طرفها الآخر.

مثال 5 إيجاد إحداثيي أحد طرفي قطعة مستقيمة

أوجد إحداثيي J ، إذا كانت $K(-1, 2)$ نقطة منتصف $\overline{JL}$ ، وكانت $L(3, -5)$.

الخطوة 1 افترض أن $J(x_1, y_1)$ ، وأن $L(x_2, y_2)$ ، وبالتعويض في قانون نقطة المنتصف ينتج أن :

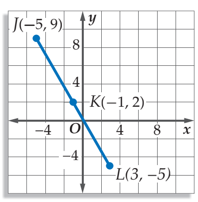
$(x_2, y_2) = (3, -5)$ $\quad K\left(\frac{x_1+3}{2}, \frac{y_1+(-5)}{2}\right) = K(-1, 2)$

الخطوة 2 اكتب معادلتين لإيجاد إحداثيي J .

قانون نقطة المنتصف	$\frac{y_1+(-5)}{2} = 2$	قانون نقطة المنتصف	$\frac{x_1+3}{2} = -1$
بضرب كل من الطرفين في 2	$y_1 - 5 = 4$	بضرب كل من الطرفين في 2	$x_1 + 3 = -2$
بإضافة 5 لكلا الطرفين	$y_1 = 9$	بطرح 3 من كلا الطرفين	$x_1 = -5$

إذن، إحداثيا J هما $(-5, 9)$.

تحقق عيّن النقاط J, K, L في المستوى الإحداثي. تلاحظ أن المسافة من J الى K تبدو مساوية فعلًا للمسافة من K إلى L . لذا، فإن الحل معقول.



✓ تأكد

أوجد إحداثيي النقطة المجهولة في كل مما يأتي، علمًا بأن P منتصف $\overline{EG}$.

5A) $E(-8, 6), P(-5, 10)$ $G(-2, 14)$

5B) $P(-1, 3), G(5, 6)$ $E(-7, 0)$

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية
عيّن دائمًا النقاط المعلومة، والإحداثيين اللذين تمّ حسابهما للنقطة الثالثة؛ كي تتحقق من معقولية الحل.

إرشادات للمعلم الجديد

استعمال الرموز وضح أنه إذا كانت النقاط A, B, C على قطعة مستقيمة، وكان هناك شرطة صغيرة على $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ، فإن هذا يعني أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$ وتنصفها.

مثالان إضافيان

4 أوجد إحداثيي النقطة M ، نقطة منتصف $\overline{GH}$ ، إذا كانت $G(8, -6)$, $H(-14, 12)$.
$(-3, 3)$

5 أوجد إحداثيي D ، إذا كانت $E(-6, 4)$ نقطة منتصف $\overline{DF}$ وكانت $F(-5, -3)$.
$(-7, 11)$

التركيز في المحتوى الرياضي

جمع القطع المستقيمة إذا وقعت B بين A, C وكانت النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة، ففي العادة يُعبّر عن جمع القطع المستقيمة وفق ترتيب النقاط هكذا: $AB + BC = AC$. ولكن بما أن عملية الجمع تحقق خاصية الإبدال، فإن العبارة $BC + AB = AC$ صحيحة أيضًا.

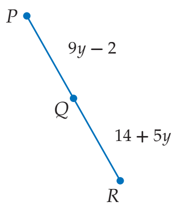
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اعرض مسطرة مترية على الطلبة، بحيث تكون الجهة غير المدرجة مواجهة لهم. واطلب إلى أحد الطلبة أن يتطوع ويحدّد علامة على الجهة غير المدرجة في المكان الّذي يتخيل أنه منتصف المتر. اطلب إلى طالب آخر أن يؤكد الّذي اختاره الطالب الأول، أو أن يضع علامة أخرى. ضع قلمًا بشكل رأسي عند علامة 50 cm التي تُبيّن منتصف المسطرة المترية، وقارنها مع العلامات التي وضعها الطلبة. وضح كيف يستعمل الناس المهارات المكانية؛ لتحديد نقطة قريبة جدًّا من نقطة المنتصف الفعلية لكثير من الأشياء.

يمكن استعمال الجبر لإيجاد طول مجهول، أو قيمة مجهولة في شكل يتضمن نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

مثال 6 استعمال الجبر لإيجاد أطوال



جبر: أوجد طول $\overline{PQ}$، إذا كانت Q نقطة منتصف $\overline{PR}$.

افهم تعلم أن Q نقطة منتصف $\overline{PR}$. وطلب منك إيجاد طول $\overline{PQ}$.

خطط بما أن Q نقطة المنتصف، فإن $PQ = QR$. استعمل هذه المعادلة لإيجاد قيمة y.

حل

تعريف نقطة المنتصف	$PQ = QR$
$PQ = 9y - 2, QR = 14 + 5y$	$9y - 2 = 14 + 5y$
بطرح $5y$ من كلا الطرفين	$4y - 2 = 14$
بإضافة 2 إلى كلا الطرفين	$4y = 16$
بقسمة كلا الطرفين على 4	$y = 4$

والآن عوِّض عن قيمة y بـ 4 في التعبير الذي يمثِّل طول $\overline{PQ}$.

الطول المعطى	$PQ = 9y - 2$
بتعويض $y = 4$	$= 9(4) - 2$
بالتبسيط	$= 36 - 2 = 34$

إذن، طول $\overline{PQ}$ يساوي 34.

تحقق بما أن $PQ = QR$، فإذا عوَّضنا قيمة 4 = y في التعبير الذي يمثِّل طول $\overline{QR}$، فسيكون هذا الطول 34 أيضًا.

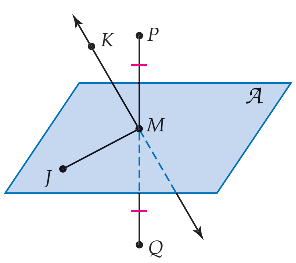
الطول المعطى	$QR = 14 + 5y$
بتعويض $y = 4$	$= 14 + 5(4)$
بالتبسيط	$= 34$ ✓

تأكد

6A) أوجد طول $\overline{YZ}$، إذا كانت Y نقطة منتصف $\overline{XZ}$، وكان $XY = 2x - 3, YZ = 27 - 4x$. 7

6B) أوجد قيمة x، إذا كانت C نقطة منتصف $\overline{AB}$، وكان $AC = 4x + 5, AB = 78$. 8.5

كل قطعة مستقيمة أو مستقيم أو مستوى يقطع قطعة مستقيمة في نقطة منتصفها، يسمى **منصف القطعة المستقيمة**. في الشكل المجاور، M نقطة منتصف $\overline{PQ}$ المستوى $\mathcal{A}$، $\overleftrightarrow{MJ}$، $\overleftrightarrow{KM}$، والنقطة M تُعد جميعها منصِّفات للقطعة $\overline{PQ}$. ونقول عنها: إنها تنصف $\overline{PQ}$.



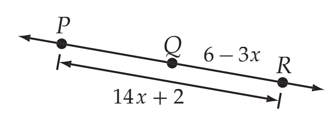
إرشادات للدراسة

منصفات القطعة المستقيمة يمكن أن يكون للقطعة المستقيمة عدد غير محدود من المنصِّفات، ويجب أن يحتوي كل منها نقطة منتصف تلك القطعة المستقيمة.

ويوضِّح الإنشاء الهندسي في الصفحة التالية طريقة إنشاء مستقيم ينصِّف قطعة مستقيمة لتحديد نقطة منتصف قطعة مستقيمة معلومة.

مثال إضافي

6 جبر: أوجد طول $\overline{PR}$، إذا كانت Q نقطة منتصف $\overline{PR}$. 9



16 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

3 التدريب

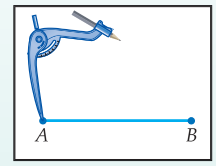
التقويم التكويني

استعمل التمارين 12 - 1 للتأكد من فهم الطلبة.

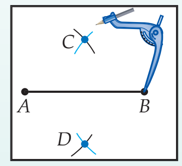
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إنشاء هندسي: تنصيف قطعة مستقيمة

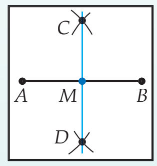
الخطوة 1 ارسم قطعة مستقيمة وسمّها $\overline{AB}$. وضع رأس الفرجار عند A، وافتحه فتحة أكبر من نصف طول $\overline{AB}$. ارسم قوسين أحدهما فوق $\overline{AB}$ والآخر تحتها.



الخطوة 2 باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند النقطة B، وارسم قوسين يقطعان القوسين اللذين رسمتهما في الخطوة 1. سمّ نقطتي التقاطع C, D.



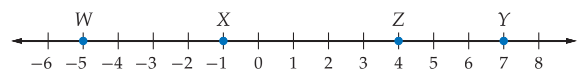
الخطوة 3 استعمل مسطرة غير مدرجة لرسم $\overline{CD}$. سمّ نقطة تقاطعها مع $\overline{AB}$ بالحرف M. النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$، وتُعد $\overline{CD}$ منصفًا للقطعة $\overline{AB}$.



تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 12

استعمل خط الأعداد؛ لإيجاد كل مما يأتي:

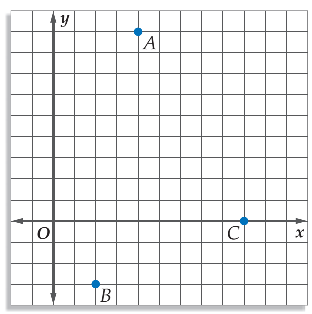


1) XY **8**

2) WZ **9**

مثال 2 صفحة 13

أشجار: يزرع طلاب الصف الثالث ثانوي في إحدى المدارس الثانوية شجرة في حديقة المدرسة، واستمر هذا التقليد لأكثر من 20 سنة. يُبيّن الشكل المجاور مواقع ثلاث أشجار. أوجد المسافة بين كل زوج من هذه الأشجار.



3) $A(4, 9)$, $B(2, -3)$ **$\sqrt{148} \approx 12.2$ وحدة**

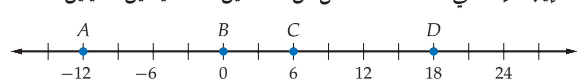
4) $A(4, 9)$, $C(9, 0)$ **$\sqrt{106} \approx 10.3$ وحدة**

5) $B(2, -3)$, $C(9, 0)$ **$\sqrt{58} \approx 7.6$ وحدة**

6) أي شجرتين من هذا الأشجار الثلاث أقرب إلى بعضهما؟ وأي شجرتين الأبعد عن بعضهما؟ **الأقرب: B, C، الأبعد: A, B**

مثال 3 صفحة 14

استعمل خط الأعداد ؛ لإيجاد إحداثي نقطة منتصف كل من القطعتين المستقيمتين الآتيتين:



7) $\overline{AC}$ **−3**

8) $\overline{BD}$ **9**

مثال 4 صفحة 15

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

9) $J(5, -3), K(3, -8)$ **(4, −5.5)**

10) $M(7, 1), N(4, -1)$ **(5.5, 0)**

تنويع الواجبات المنزلية

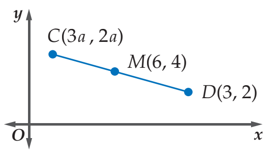
المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	56 - 13 ، 65 ، 66 ، 81 - 68
ضمن المتوسط	55 - 13 فردي ، 60 - 57 ، 62 - 58 زوجي ، 81 - 63،
فوق المتوسط	77 - 57 (اختياري: 81 - 78)

مثال 5 صفحة 15

11) أوجد إحداثيي G، إذا كانت $F(1, 3.5)$ نقطة منتصف $\overline{GJ}$، وكانت $J(6, -2)$. **$(-4, 9)$**

مثال 6 صفحة 16

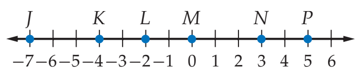
12) **جبر:** النقطة M هي منتصف $\overline{CD}$. ما قيمة a في الشكل المجاور؟ **3**



تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 12

استعمل خط الأعداد؛ لإيجاد كل مما يأتي:



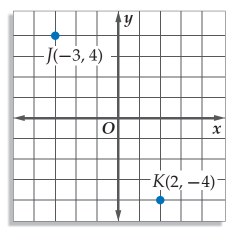
13) JL **5**   14) JK **3**   15) KP **9**

16) NP **2**   17) JP **12**   18) LN **5**

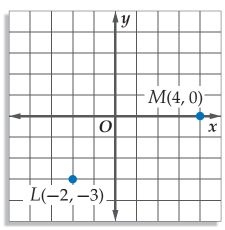
مثال 2 صفحة 13

أوجد المسافة بين كل نقطتين في كل مما يأتي: **للتمارين 30-22 انظر الهامش**

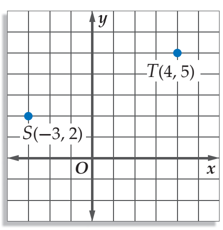
19)



20)

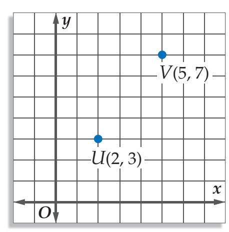


21)

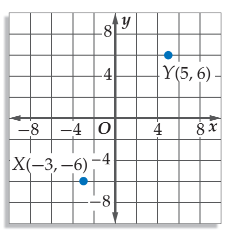


19) $\sqrt{89}$ أو 9.4 وحدة تقريبًا
20) $\sqrt{45}$ أو 6.7 وحدة تقريبًا
21) $\sqrt{58}$ أو 7.6 وحدة تقريبًا

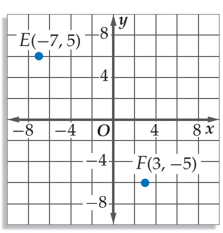
22)



23)

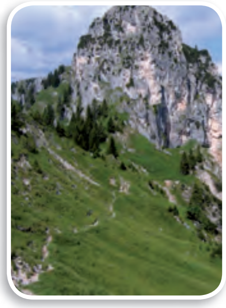


24)



25) $X(1, 2), Y(5, 9)$ 26) $P(3, 4), Q(7, 2)$ 27) $M(-3, 8), N(-5, 1)$

28) $Y(-4, 9), Z(-5, 3)$ 29) $A(2, 4), B(5, 7)$ 30) $C(5, 1), D(3, 6)$

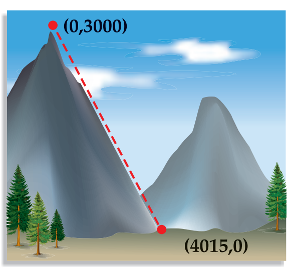


الربط مع واقع الحياة

يسبب الصعود إلى ارتفاعات عالية (أكثر من 8000 ft) غثيان الارتفاع؛ بسبب نقص كثافة الأوكسجين في الهواء. يجب إعطاء الجسم فرصة للتأقلم مع ارتفاعات جديدة قبل الانخراط في مثل هذه الأنشطة.

المصدر:
Encyclopedia Britannica

31) **تسلّق الجبال:** يُخطّط منصور لتسلّق قمة جبل السودة بأبها في المملكة العربية السعودية خلال رحلة مع عائلته في إجازة الربيع. يظهر في الشكل إحداثيات قمة الجبل، وإحداثيات نقطة الانطلاق للمسار الذي سيسلكه في تسلق الجبل. إذا أمكن تقريب المسار إلى مستقيم، فقدّر طول هذا المسار بالأمتار. **5012 m تقريبًا**



إجابات:

22) 5 وحدات
23) $\sqrt{208}$ أو 14.4 وحدة تقريبًا
24) $\sqrt{200}$ أو 14.1 وحدة تقريبًا
25) $\sqrt{65}$ أو 8.1 وحدات تقريبًا
26) $\sqrt{20}$ أو 4.5 وحدات تقريبًا
27) $\sqrt{53}$ أو 7.3 وحدات تقريبًا
28) $\sqrt{37}$ أو 6.1 وحدات تقريبًا
29) $\sqrt{18}$ أو 4.2 وحدات تقريبًا
30) $\sqrt{29}$ أو 5.4 وحدات تقريبًا

18 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

32) **خرائط:** تبين الخارطة أدناه موقعي كلٍّ من أحمد وخليل.

a) إذا مثّل كل مربع على الشبكة 60 m ، وكان موقع نقطة الأصل في الركن الأيسر السفلي في الشبكة ، فما المسافة بين أحمد وخليل؟ **349.9 m**

b) تحرك أحمد 180 m إلى الشمال، وتحرك خليل 300 m إلى الغرب، كم تصبح المسافة بينهما؟ **494.8 m**

مثال 3
صفحة 14

استعمل خط الأعداد ؛ لإيجاد إحداثي نقطة منتصف كل من القطع المستقيمة الآتية:

E F G H J K L
-6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

33) $\overline{HK}$ **6**

34) $\overline{JL}$ **8.5**

35) $\overline{EF}$ **−4.5**

36) $\overline{FG}$ **−1.5**

37) $\overline{FK}$ **3**

38) $\overline{EL}$ **2.5**

مثال 4
صفحة 15

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

39) $C(22, 4), B(15, 7)$ **(18.5, 5.5)**

40) $W(12, 2), X(7, 9)$ **(9.5, 5.5)**

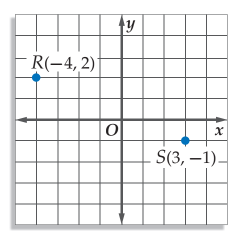
41) $D(-15, 4), E(2, -10)$ **(−6.5, −3)**

42) $V(-2, 5), Z(3, -17)$ **(0.5, −6)**

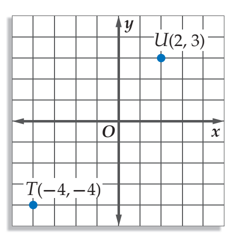
43) $X(-2.4, -14), Y(-6, -6.8)$ **(−4.2, −10.4)**

44) $J(-11.2, -3.4), K(-5.6, -7.8)$ **(−8.4, −5.6)**

45) **$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$**



46) **$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$**



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة استقصاء الفرق بين المسافات الأرضية التي تقطعها السيارة والمسافات الجوية. أي هاتين المسافتين يمكن حسابها باستعمال قانون المسافة؟ وأيها تحسب باستعمال تقنيات مثل برمجيات الرسم؟

مثال 5
صفحة 15

أوجد إحداثيي النقطة المجهولة، إذا كانت B منتصف $\overline{AC}$ في كل مما يأتي:

47) $C(-5, 4), B(-2, 5)$ **$A(1, 6)$**

48) $A(1, 7), B(-3, 1)$ **$C(-7, -5)$**

49) $A(-4, 2), B(6, -1)$ **$C(16, -4)$**

50) $C(-6, -2), B(-3, -5)$ **$A(0, -8)$**

51) $A(4, -0.25), B(-4, 6.5)$ **$C(-12, 13.25)$**

52) $C\left(\frac{5}{3}, -6\right), B\left(\frac{8}{3}, 4\right)$ **$A\left(\frac{11}{3}, 14\right)$**

مثال 6
صفحة 16

جبر: افرض أن M نقطة منتصف $\overline{FG}$. استعمل المعلومات المعطاة؛ لإيجاد الطول المجهول، أو القيمة المجهولة في كل مما يأتي:

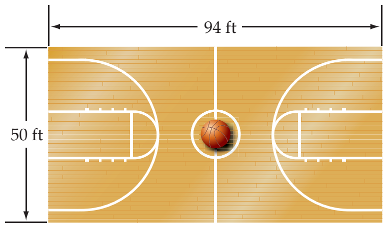
53) $FM = 3x - 4, MG = 5x - 26, FG = ?$ **58**

54) $FM = 5y + 13, MG = 5 - 3y, FG = ?$ **16**

55) $MG = 7x - 15, FG = 33, x = ?$ **4.5**

56) $FM = 8a + 1, FG = 42, a = ?$ **2.5**

57) **كرة السلة:** يُبيّن الشكل أدناه أبعاد ملعب كرة السلة. افترض أن لاعبًا رمى الكرة من الركن السفلي الأيمن للملعب إلى لاعب آخر من فريقه في مركز الملعب.



a) إذا كان مركز الملعب في نقطة الأصل، فأوجد الإحداثيين الذين يمثِّلان موقع اللاعب الذي رمى الكرة. **(47, −25)**

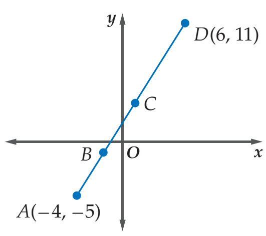
b) أوجد المسافة بين اللاعبين. **53.2 ft تقريبًا**

سمّ النقطة (أو النقاط) في كل من الحالات الآتية:

58) نقطتان على المحور x تبعُدان 10 وحدات عن $(1, 8)$. **$(-5, 0), (7, 0)$**

59) نقطتان على المحور y تبعُدان 25 وحدة عن $(-24, 3)$. **$(0, -4), (0, 10)$**

60) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي B، إذا كانت B منتصف $\overline{AC}$، وكانت C منتصف $\overline{AD}$. **$\left(-1\frac{1}{2}, -1\right)$**

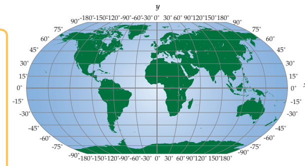


جبر: حدّد قيمة (أو قيم) n في كل مما يأتي:

61) $J(n, n + 2), K(3n, n - 1), JK = 5$ **± 2**

62) $P(3n, n - 7), Q(4n, n + 5), PQ = 13$ **± 5**

20 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات



الربط مع واقع الحياة

خطوط العرض توازي خط الاستواء، وهي تبيّن المسافة شمالاً وجنوبًا، بينما تُبيّن خطوط الطول المسافات شرقًا وغربًا من خطوط الطول الأساسي الذي يمر بمدينة جرينتش في إنجلترا.

المصدر: National Geographic

63) جغرافيا: تقع مدينة المنامة عند (26، 50)، التي تمثّل نقطة تقاطع خطي الطول والعرض. وتقع كذلك مدينة دبي عند (25، 55).

a) أوجد نقطة تقاطع خطي الطول والعرض لنقطة منتصف القطعة الواصلة بين مدينتي المنامة ودبي. **(52.5, 25.5)**

b) استعمل الأطلس أو الإنترنت لتجد المدينة القريبة من موقع نقطة المنتصف بين المنامة ودبي. **انظر إجابات الطلبة**

c) احسب المسافة بين المنامة ودبي حسب موقعهما على خطي الطول والعرض. $\sqrt{26}$

d) استعمل الأطلس أو الإنترنت في إيجاد المسافة الفعلية بين المنامة ودبي. وقارنها بإجابتك في الفرع c. **انظر إجابات الطلبة.**

64) تمثيلات متعددة: في هذا التمرين سوف تستكشف العلاقة بين نقطة منتصف قطعة مستقيمة، ونقطة المنتصف بين أحد طرفي القطعة ونقطة منتصفها. **للفروع a-c انظر الهامش**

a) هندسي: استعمل مسطرة غير مدرَّجة لرسم ثلاث قطع مستقيمة مختلفة، ثم سمّ طرفي كل قطعة A، B.

b) جبري: أوجد نقطة منتصف كل قطعة وسمِّها C، ثم أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ وسمِّها D.

c) جدولة: قِس طول كل من $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$، وسجِّل الأطوال في جدول.

d) جبري: إذا كان $AB = x$، فاكتب تعبيرًا جبريًّا للطولين AC، AD.

e) تعبير لفظي: كوّن تخمينًا عن العلاقة بين AB وكل قطعة إذا واصلت إيجاد نقطة المنتصف بين طرف القطعة والمنتصف الذي وجدته قبله.

مسائل مهارات التفكير العليا

65) اكتب: اشرح العلاقة بين نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين. **انظر الهامش**

66) تبرير: هل النقطة التي تبعُد عن (x_1, y_1) ثلث المسافة بين (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، هي النقطة $\left(\frac{x_1+x_2}{3}, \frac{y_1+y_2}{3}\right)$ دائمًا، أو أحيانًا، أو ليست تلك النقطة أبدًا؟ وضّح إجابتك.

67) تحدٍّ: تقع النقطة P على القطعة التي طرفاها $A(1, 4), D(7, 13)$. والمسافة من A إلى P تساوي مِثلَيْ المسافة من P إلى D، ما إحداثيا النقطة P؟ **(5, 10)**

68) مسألة مفتوحة: ارسم قطعة مستقيمة وسمِّها $\overline{AB}$. أنشئ باستعمال الفرجار ومسطرة غير مدرَّجة القطعة $\overline{CD}$، بحيث يكون $CD = 5\frac{1}{4}AB$. اشرح الإنشاء الهندسي، وبرّر إجابتك. **انظر الهامش**

69) اكتب: صِفْ طريقة؛ لإيجاد منتصف قطعة مستقيمة يكون أحد طرفيها (0 ,0). أعطِ مثالاً تستعمل فيه هذه الطريقة، واشرح لماذا تكون هذه الطريقة صحيحة.

64d) $AC = \frac{1}{2}x$, $AD = \frac{1}{4}x$

64e) إجابة ممكنة: إذا وجدت n من نقاط المنتصف سيكون طول أصغر قطعة $\frac{1}{2n}x$.

66) إجابة ممكنة: أحيانًا، عندما تكون (x_1, y_1) عند نقطة الأصل.

69) إجابة ممكنة: أقسم إحداثي الطرف الآخر على 2. إذا كان طرفا القطعة $(-10, 6)$، $(0, 0)$، فإن نقطة المنتصف هي: $\left(\frac{-10}{2}, \frac{6}{2}\right) = (-5, 3)$

إذا كان طرفا القطعة $(0, 0)$، (a, b) باستعمال قانون نقطة المنتصف، فتكون نقطة المنتصف $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

تنبيه لحَل تمرين

الإنترنت أو الأطلس يتطلب التمرين 63 استعمال الإنترنت أو الأطلس.

المسطرة يتطلب التمرين 64 استعمال مسطرة.

الفرجار والمسطرة غير المدرجة يتطلب التمرين 68 استعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة.

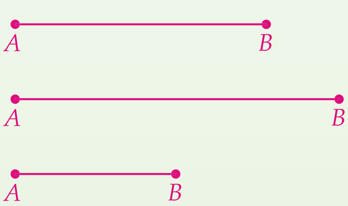
تمثيلات متعددة في التمرين 64، يستعمل الطلبة الأشكال الهندسية والجدول، والتعابير الجبرية؛ لاستقصاء العلاقة بين نقطة منتصف قطعة مستقيمة، ونقطة المنتصف بين أحد طرفي القطعة ونقطة منتصفها.

إرشادات للمعلم الجديد

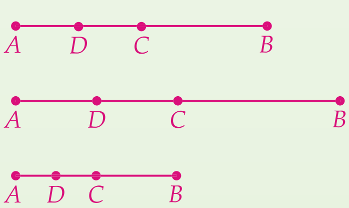
تحد قد ترغب في استعمال مسألة التحدي مثل المسألة 67 كتمرين في بداية الحصة التالية بعد تدريس هذا الدرس. وبذلك تكون افتتاحية لمناقشة الواجبات المنزلية، أو التهيئة للانتقال للدرس التالي، وتبقي الطلبة منهمكين في العمل أثناء تفقد الغياب، أو متابعة الواجبات.

إجابات:

64a) إجابة ممكنة:



64b) إجابة ممكنة:



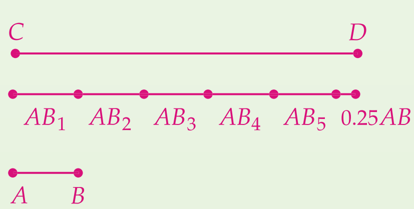
64c) إجابة ممكنة:

AD	AC	AB	المستقيم
1	2	4	1
1.5	3	6	2
0.75	1.5	3	6

65) إجابة ممكنة: تربط نظرية فيثاغورس طولي ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية بطول وتره باستعمال الصيغة $c^2 = a^2 + b^2$، وإذا أخذت الجذر التربيعي للطرفين تحصل على $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. تخيّل أن الوتر هو المسافة بين نقطتين، فتكون a المسافة الأفقية $(x_2 - x_1)$، وتكون b المسافة الرأسية $(y_2 - y_1)$. وإذا عوضت عن قيمتي a, b، تتحول نظرية فيثاغورس إلى قانون المسافة بين نقطتين.

$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

68) إجابة ممكنة:



ارسم $\overline{AB}$، ثم ارسم خط إنشاء وعيّن عليه النقطة C، ثم ارسم من C ستة أقواس متتابعة بفتحة فرجار تساوي AB، ثم نفذ عملية تنصيف القطعة المستقيمة مرتين على القطعة $\overline{AB}$ السادسة؛ للحصول على قطعة طولها $\frac{1}{4}AB$، وسَم نقطة المنتصف الثانية D.

تدريب على اختبار معياري

70) إذا كانت $A(0, 3)$ ، $B(-3, 0)$ ، فإن نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي: C

A $(-3, 3)$

B $(0, 0)$

C $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

D $(-1, 1)$

71) إذا كانت $X(-2, 0)$ ، $Y(2, 3)$ ، فما طول $\overline{XY}$ ؟ J

F $\sqrt{3}$

G $\sqrt{7}$

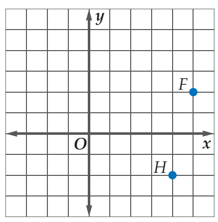
H 3

J 5

72) أحد طرفي $\overline{AB}$ هي $(-3, 5)$. إذا كانت نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $(2, -6)$ ، فما الطول التقريبي لـ $\overline{AB}$ ؟ 24.2

مراجعة تراكمية

باستعمال الشكل المجاور، اكتب إحداثيي كل مما يأتي: (مهارة سابقة)



73) النقطة F (5, 2)

74) النقطة H (4, −2)

أوجد قيمة كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

75) $(-4-5)^2$ 81

76) $(6-10)^2$ 16

77) $(8-5)^2+[9-(-3)]^2$ 153

مراجعة المتطلبات السابقة

بسِّط كلًّا مما يأتي:

78) $\sqrt{4 \times 16}$ 8

79) $\sqrt{3 \times 27}$ 9

80) $\sqrt{15 \times 16}$ $4\sqrt{15} \approx 15.5$

81) $\sqrt{33 \times 21}$ $3\sqrt{77} \approx 26.3$

4 التقويم

بطاقة خروج اعمل خمسة تمارين شبيهة بتلك الموجودة في **مثال 2** بعدة نسخ، وأعط تمرينًا لكل طالب لحله، واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

22 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

توسـع 1-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف
تعيين نقاط في الفضاء، واستعمال قانوني المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء.

المواد اللازمة
- مسطرة

إرشادات التدريس
وضّح للطلبة أن الفضاء الثلاثي الأبعاد يرتكز على ثلاث مستويات إحداثية وهي: المستوى xy، المستوى yz، المستوى xz.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
وزع الطلبة في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاطين 1,2 .

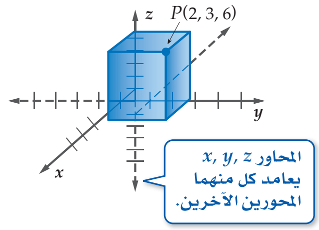
إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في تعيين النقاط حسب الرسم المنظوري، فاطلب إليهم استعمال المسطرة ليتلاءم كل إحداثي مع المحور المقابل له.

تدريب اطلب إلى الطلبة حَلّ التمارين 1-5 , 10-14 .

توسـع 1-1 معمل الهندسة
الإحداثيات في الفضاء
Coordinates in Space

لقد استعملت الأزواج المرتّبة المكوّنة من إحداثيين؛ لتحديد موقع نقطة في المستوى الإحداثي.

وبما أن للفضاء ثلاثة أبعاد، لذا، يلزم لتحديد موقع نقطة في الفضاء معرفة ثلاثة أعداد أو إحداثيات. لذا، تُمثَّل أية نقطة في الفضاء **بثلاثي مرتب** من الأعداد الحقيقية (x, y, z). يحدّد الثلاثي المرتب $(2, 3, 6)$ النقطة P في الشكل المجاور. لاحظ أننا استعملنا متوازي متسطيلات للمساعدة في تخيل موقع النقطة.



نشاط 1 تمثيل متوازي المستطيلات بيانيًا

مثِّل بيانيًّا متوازي المستطيلات الذي له رأسان فيه هما $L(4, -5, 2)$ ، ونقطة الأصل ، ثم حدّد الرؤوس الأخرى له.

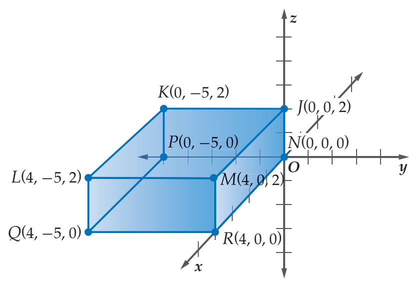
الخطوة 1 عيّن الإحداثي x أولًا. ارسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل طولها 4 وحدات بالاتجاه الموجب.

الخطوة 2 لتعيين الإحداثي y ، ارسم قطعة مستقيمة طولها 5 وحدات بالاتجاه السالب.

الخطوة 3 لرسم الإحداثي z ، ارسم قطعة مستقيمة بطول وحدتين في الاتجاه الموجب.

الخطوة 4 عيّن النقطة L .

الخطوة 5 ارسم متوازي المستطيلات، وعيّنْ كل رأس:
$L(4, -5, 2), K(0, -5, 2), J(0, 0, 2), M(4, 0, 2)\ Q(4, -5, 0), P(0, -5, 0), N(0, 0, 0), R(4, 0, 0)$



تشبه طريقة إيجاد المسافة بين نقطتين، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء، طريقة إيجاد المسافة، ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

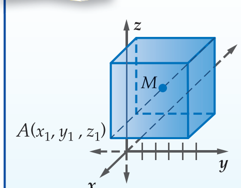
مفهوم أساسي قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء
أضف إلى مطويتك

إذا كانت $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ ، فإن :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ونقطة منتصف $\overline{AB}$ هي :

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 21-15 ,9-6؛ لتقويم مدى قدرة الطلبة على العمل في الفضاء.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة أن يقارنوا بين قانوني المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء مع نظيريهما في المستوى الإحداثي عندما يكون الإحداثي z يساوي صفرًا.

التوسّع في المفهوم

اطلب إلى الطلبة أن يستكشفوا كيف يستعملون إحداثيات رؤوس مجسم على شكل متوازي مستطيلات؛ لإيجاد حجمه.

إجابات:

(10 $DE = 5\sqrt{3}\,,\ \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

(11 $GH = \sqrt{186}\,,\ \left(1, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(12 $KL = 4\sqrt{2}\,,\ (0, 0, 0)$

(13 $PQ = \sqrt{115}\,,\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

(14 $AB = \sqrt{339}\,,\ \left(\frac{1}{2}, \frac{15}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(15 $WZ = \sqrt{257}\,,\ \left(-8, \frac{9}{2}, 4\right)$

(16 $FG = \sqrt{10}\,,\ \left(\frac{3}{10}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right)$

(17 $GH = \sqrt{17}\,,\ \left(\frac{3}{5}, -\frac{7}{10}, 4\right)$

(18 $BC = \sqrt{39}\,,\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 3, 3\sqrt{2}\right)$

(19 $ST = \sqrt{31}\,,\ \left(5\sqrt{3}, \frac{9}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

(21 تحتوي صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي على إحداثيين بينما يحتويان في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد على ثلاثة إحداثيات. يتضمن كل من صيغتي المسافة الجذر التربيعي لمجموع مربعات الفروق بين الإحداثيات ويتضمن كل من قانوني نقطة المنتصف متوسط الإحداثيات.

معمل الهندسة

الإحداثيات في الفضاء
Coordinates in Space

نشاط 2 قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

افترض أن $J(2, 4, 9)$ ، $K(-4, -5, 11)$.

a) أوجد JK .

قانون المسافة في الفضاء $JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

بالتعويض $= \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-5 - 4)^2 + (11 - 9)^2}$

بالتبسيط $= \sqrt{121}$

باستعمال الآلة الحاسبة $= 11$

b) عيّنْ إحداثيي M نقطة منتصف $\overline{JK}$.

قانون نقطة المنتصف في الفضاء $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

بالتعويض $= M\left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{4 + (-5)}{2}, \frac{9 + 11}{2}\right)$

بالتبسيط $= M\left(-1, -\frac{1}{2}, 10\right)$

تمارين:

1-9) انظر ملحق الإجابات

ارسم متوازي المستطيلات الذي رأساه النقطة المعطاة، ونقطة الأصل لكلّ ممّا يأتي، واكتب إحداثيات كل رأس:

(1 $A(2, 1, 5)$
(2 $P(-1, 4, 2)$
(3 $C(-2, 2, 2)$
(4 $R(3, -4, 1)$
(5 $P(4, 6, -3)$
(6 $G(4, 1, -3)$
(7 $K(-2, -4, -4)$
(8 $W(-1, -3, -6)$
(9 $W(3, 3, 4)$

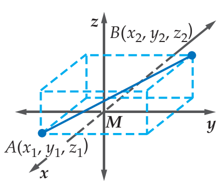
أوجد المسافة بين النقطتين في كلّ ممّا يأتي، ثم أوجد إحداثيي M نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بينهما: **10-19) انظر الهامش**

(10 $D(0, 0, 0), E(1, 5, 7)$
(11 $G(-3, -4, 6), H(5, -3, -5)$
(12 $K(2, 2, 0), L(-2, -2, 0)$
(13 $P(-2, -5, 8), Q(3, -2, -1)$
(14 $A(4, 7, 9), B(-3, 8, -8)$
(15 $W(-12, 8, 10), Z(-4, 1, -2)$
(16 $F\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), G(0, 3, 0)$
(17 $G(1, -1, 6), H\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 2\right)$
(18 $B(\sqrt{3}, 2, 2\sqrt{2}), C(-2\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$
(19 $T(4\sqrt{3}, 5, \sqrt{2})$ و $S(6\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$

(20 **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا لقانون المسافة بين نقطتين في الفضاء. **انظر الهامش**

المعطيات: $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$.

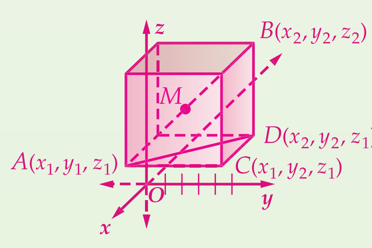
المطلوب: إثبات أنّ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



(21 **اكتب:** بيّن أوجه الشبه والاختلاف بين قانوني المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي، وفي الفضاء الثلاثي الأبعاد. **انظر الهامش**

> **إرشادات لحل المسألة**
>
> **البرهان الإحداثي** هو برهان يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر والمفاهيم الهندسية.

(20



في $\triangle ACD$ ، $DC = (x_2 - x_1)$, $AC = (y_2 - y_1)$.
وحسب نظرية فيثاغورس فإن :
$(AD)^2 = (DC)^2 + (AC)^2$. لذا فإن
$(AD)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
وفي $\triangle ADB$ ، $BD = (z_2 - z_1)$. وحسب نظرية فيثاغورس $(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$. ولذا فإن،
$(AB)^2 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] + (z_2 - z_1)^2$

لذلك

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

1-2 الوسط الهندسي
Geometric Mean

فيما سبق

درست استعمال علاقات التناسب لمنصّفات الزوايا المتناظرة، والارتفاعات، والقطع المتوسطة في المثلثات المتشابهة.

والآن

الأفكار الرئيسة

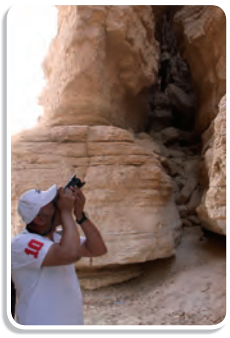
- أجد الوسط الهندسي بين عددين.
- أحلّ مسائل تتضمّن علاقات بين أجزاء من أضلاع مثلث قائم، والارتفاع المُنشأ من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر.

المفردات الأساسية

الوسط الهندسي
geometric mean

www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟



يمكن أن يكون تصوير المعالم العالية أو الممتدة تحدّيًا. إذ من الصعب أن تحتوي صورة واحدة على المنظر كله في لقطة واحدة من آلة التصوير، دون حدوث تشويه لها، إذا وضعت آلة التصوير بحيث تكون زاوية النظر رأسية قياسها °90، وكنت تعلم ارتفاع الجسم الذي ترغب في تصويره، فيمكنك استعمال الوسط الهندسي للمسافة من قمة الجسم إلى مستوى آلة التصوير، والمسافة بين قاعدة الجسم ومستوى الآلة.

الوسط الهندسي عندما يكون وسطا التناسب العدد نفسه، يُسمّى ذلك العدد الوسط الهندسي لطرفي التناسب. و**الوسط الهندسي** لعددين موجبين هو الجذر التربيعي الموجب لحاصل ضربهما.

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

طرف ← a ، وسط ← x ؛ وسط ← x ، طرف ← b

مفهوم أساسي — **الوسط الهندسي** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي الوسط الهندسي لعددين موجبين a و b هو العدد الموجب x بحيث: $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ ، لذا $x^2=ab, x=\sqrt{ab}$.

مثال الوسط الهندسي للعددين $a=9, b=4$ يساوي 6 ؛ لأن $6=\sqrt{9\cdot 4}$.

مثال 1 **الوسط الهندسي**

أوجد الوسط الهندسي للعددين 8 و 10

تعريف الوسط الهندسي	$x=\sqrt{ab}$
$a=8, b=10$	$=\sqrt{8\cdot 10}$
بالتحليل	$=\sqrt{(4\cdot 2)\cdot(2\cdot 5)}$
خاصية التجميع	$=\sqrt{16\cdot 5}$
بالتبسيط	$=4\sqrt{5}$

الوسط الهندسي للعددين 8 و 10 يساوي $4\sqrt{5}\approx 8.9$.

تأكد

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

1A) 5 و 45   15

1B) 12 و 15 $6\sqrt{5}\approx 13.4$

1-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2

استعمال علاقات التناسب لمنصفات الزوايا، والارتفاعات، والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة.

الدرس 1-2

إيجاد الوسط الهندسي بين عددين.
حَلّ مسائل تتضمن العلاقات بين أجزاء من أضلاع مثلث قائم و الارتفاع المُنشأ من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر.

ما بعد الدرس 1-2

تطوير علاقات تشابه المثلثات مثل النسب المثلثية، وثلاثيات فيثاغورس باستعمال طرق متنوعة وتوظيفها و تبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما المشكلة المتوقّعة عند التقاط صورة لجسم طويل جدًّا؟
إجابة ممكنة: يمكن أن تُشوّه الصورة.
- في أي زاوية نظر رأسية يمكن وضع الكاميرا لاستعمال الوسط الهندسي لتصوير جسم ؟ °90
- ما القياس الذي تحتاج إليه عند استعمال الوسط الهندسي لتصوير جسم طويل جدًّا؟ ارتفاع الجسم

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (25)	• تنويع التعليم ص (25,29)	• تنويع التعليم ص (25,29)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الأوساط الهندسية والمثلثات القائمة يُكوِّن الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى وتر المثلث القائم الزاوية مثلثين إضافيين قائمين. وتشترك هذه المثلثات الثلاثة القائمة بعلاقة خاصة فيما بينها.

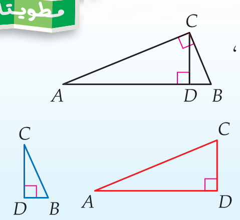
نظرية 1.1

أضف إلى مطويتك

إذا رُسم ارتفاع في المثلث القائم الزاوية من رأس الزاوية القائمة إلى وتره، فإن المثلثين الناتجين متشابهان، ويشابهان المثلث الأصلي.

مثال إذا كانت $\overline{CD}$ هي الارتفاع في المثلث القائم ABC،

فإن $\triangle ACD \sim \triangle ABC$، و $\triangle CBD \sim \triangle ABC$، و $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.



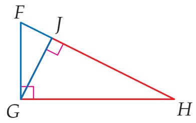
ستبرهن نظرية 1.1 في التمرين 38

مراجعة المفردات

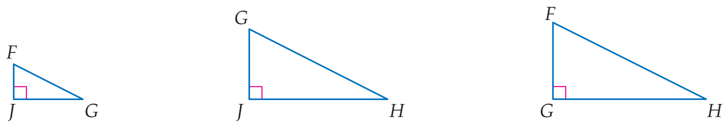
ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحتوي على الضلع المقابل وتعامده.

مثال 2 تعيين المثلثات القائمة المتشابهة

اكتب عبارة تَشابُه، تُعيِّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في الشكل المجاور.



افصل المثلث إلى مثلثين على طول ارتفاعه، ثم ارسم المثلثات الثلاثة مع ترتيب رؤوس المثلثين الأصغرين، بحيث تكون زواياهما وأضلاعهما المتناظرة بالترتيب نفسه، كما في المثلث الأصلي.



إذن $\triangle FJG \sim \triangle GJH \sim \triangle FGH$ بحسب النظرية 1.1.

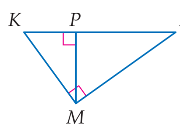
إرشادات للدراسة

إعادة ترتيب المثلثات حتى ترتيب المثلثات القائمة في مثال 2، أولًا قابل بين الزوايا القوائم، ثم قابل بين أقصر الضلعين.

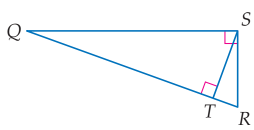
تأكد

اكتب عبارة تَشابُه، تُعيِّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في كل شكل أدناه:

(2A



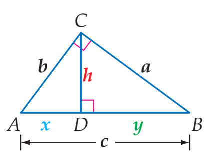
(2B

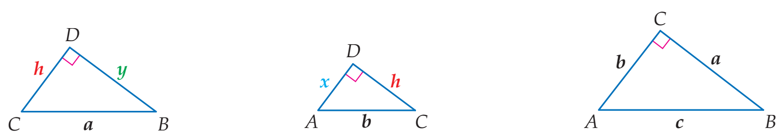


$\triangle KML \sim \triangle MPL \sim$ (2A $\triangle KPM$

$\triangle STR \sim \triangle QTS \sim$ (2B $\triangle QSR$

تعلم من النظرية 1.1 أن الارتفاع $\overline{CD}$ المرسوم إلى وتر المثلث القائم ABC يُكوِّن ثلاثة مثلثات متشابهة هي $\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$. وحسب تعريف المضلعات المتشابهة، يمكنك كتابة التناسبات الآتية التي تقارن بين أطوال أضلاع المثلثات.





$\frac{\text{الضلع الأقصر}}{\text{الضلع الأطول}} = \frac{b}{a} = \frac{x}{h} = \frac{h}{y}$

$\frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع الأقصر}} = \frac{c}{b} = \frac{b}{x} = \frac{a}{h}$

$\frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع الأطول}} = \frac{c}{a} = \frac{b}{h} = \frac{a}{y}$

لاحظ أن التناسبات المحاطة بدائرة تحتوي على أوساط هندسية، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

التقويم التكويني

استعمل تدريبات" تأكد "بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

الوسط الهندسي

مثال 1 يُبيِّن كيفية إيجاد الوسط الهندسي بين عددين.

مثال إضافي

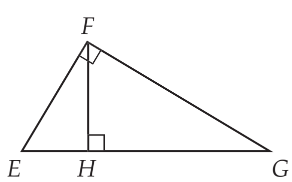
1 أوجد الوسط الهندسي للعددين 2, 50. **10**

الوسط الهندسي في المثلث القائم

مثال 2 يُبيِّنْ كيفية استعمال النظرية 1.1.

مثال إضافي

2 اكتب عبارة تَشابُه تُعيِّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في الشكل أدناه.



$\triangle EGF \sim \triangle EFH \sim \triangle FGH$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

ارسم مثلثًا قائمًا على السبورة، وارسم ارتفاعه، ثم ارسم المثلثين الناتجين عن الارتفاع. استعمل التحويلات الهندسية؛ لتوضح علاقات الأضلاع و الزوايا بين المثلث الأول والمثلثين الآخرين الّذين يُكوّنانه.

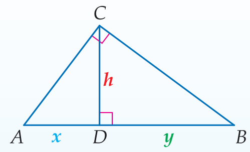
تنبيه !

تسمية المثلثات عند كتابة عبارة تَشابُه المثلثات، تأكد من تسمية الرؤوس المتناظرة في كل مثلث على الترتيب.

نظريات

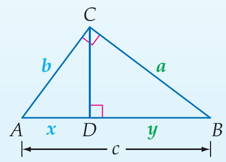
أضف إلى مطويتك

نظريات الوسط الهندسي في المثلث القائم



1.2 نظرية الارتفاع في الوسط الهندسي: الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى وتر المثلث القائم، يقسم الوتر إلى قطعتين. يُمثّل طول الارتفاع الوسط الهندسي لطولَي هاتين القطعتين.

مثال إذا كانت $\overline{CD}$ هي الارتفاع المرسوم إلى الوتر $\overline{AB}$ في $\triangle ABC$ القائم الزاوية، فإن $\frac{x}{h}=\frac{h}{y}$ أو $h=\sqrt{xy}$

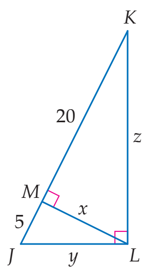


1.3 نظرية الضلع في الوسط الهندسي: الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى وتر المثلث القائم يقسم الوتر إلى قطعتين. ويكون طول كلّ ضلع في هذا المثلث هو الوسط الهندسي لطول الوتر وقطعة الوتر المجاورة لذلك الضلع.

مثال إذا كانت $\overline{CD}$ هي الارتفاع المرسوم إلى الوتر $\overline{AB}$ في $\triangle ABC$ القائم الزاوية، فإن: $\frac{c}{b}=\frac{b}{x}$ أو $b=\sqrt{xc}$ و $\frac{c}{a}=\frac{a}{y}$ أو $a=\sqrt{yc}$.

ستبرهن النظريتان 1.2 و 1.3 في التمرينين 39 و 40 على الترتيب

مثال 3 استعمال الوسط الهندسي في المثلثات القائمة



أوجد قيمة كل من x, y, z، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، إذا لزم ذلك.

بما أن x طول الارتفاع المرسوم إلى وتر المثلث القائم JKL، فإن x يساوي الوسط الهندسي لطولي $\overline{JM}$ و $\overline{MK}$ اللتين تكوّنان الوتر.

$x=\sqrt{JM \cdot MK}$ نظرية الارتفاع في الوسط الهندسي

$=\sqrt{5 \cdot 20}$ بالتعويض

$=\sqrt{100}=10$ بالتبسيط

بما أن y هو طول $\overline{JL}$، فإن y يساوي الوسط الهندسي لطول $\overline{JM}$ وطول $\overline{JK}$.

$y=\sqrt{JM \cdot JK}$ نظرية الضلع في الوسط الهندسي

$=\sqrt{5 \cdot (20+5)}$ بالتعويض

$=\sqrt{125} \approx 11.2$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

بما أن z هو طول الضلع $\overline{KL}$، فإن z يساوي الوسط الهندسي لطول $\overline{MK}$ المجاورة لهذا الضلع، وطول الوتر $\overline{JK}$.

$z=\sqrt{MK \cdot JK}$ نظرية الضلع في الوسط الهندسي

$=\sqrt{20 \cdot (20+5)}$ بالتعويض

$=\sqrt{500} \approx 22.4$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

إرشادات للدراسة

استعمال التناسب يمكن إيجاد قيمة x في مثال 3 أيضًا بحل التناسب $\frac{5}{x}=\frac{x}{20}$.

التركيز في المحتوى الرياضي

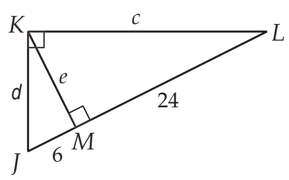
الطول ذكّر الطلبة أن يستبعدوا تلقائيًّا الجذر السالب عند إيجاد الارتفاع، أو الوسط الهندسي؛ لأن هذه القيم تُمثّل أطوالًا ولا يمكن أن يكون للأطوال قيم سالبة.

الوسط الهندسي في المثلث القائم

المثالان 3,4 يُبيِّنان كيفية استعمال الوسط الهندسي لإيجاد القيم المجهولة في المثلث.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة كل من c, d, e في الشكل أدناه، مقربًا النواتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، كلما لزم ذلك.



$c \approx 26.8, d \approx 13.4, e=12$

المثالان 3,4 يُبيِّنان كيفية استعمال الوسط الهندسي لإيجاد القيم المجهولة في المثلث.

إرشادات للمعلم الجديد

الارتفاع يبدأ الارتفاع المرسوم على الوتر من رأس القائمة. والارتفاعان الآخران في المثلث القائم هما ضلعاه.

تنويع التعليم

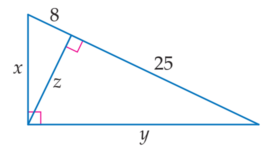
دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اسمح للطلبة أن يجلسوا بهدوء ويكتشفوا أوجه التشابه وأوجه الاختلاف بين النظريتين 1.2 و 1.3. وشجّعهم على استعمال أمثلة الكتاب، أو كتابة أمثلتهم الخاصة؛ لتعزيز المفاهيم في هاتين النظريتين. اطلب إليهم أن يفكروا ويكتبوا كيف يستعمل الوسط الهندسي للمثلث القائم والارتفاع المرسوم على وتره.

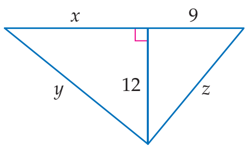
✓ تأكد

أوجد قيمة كل من z ، y ، x ، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، إذا لزم ذلك في كل شكل أدناه:

3A)



3B)



3A) $x = 2\sqrt{66} \approx 16.2$, $y = 5\sqrt{33} \approx 28.7$, $z = 10\sqrt{2} \approx 14.1$

3B) $x = 16, y = 20, z = 15$

الربط مع واقع الحياة

مُدرَّجات

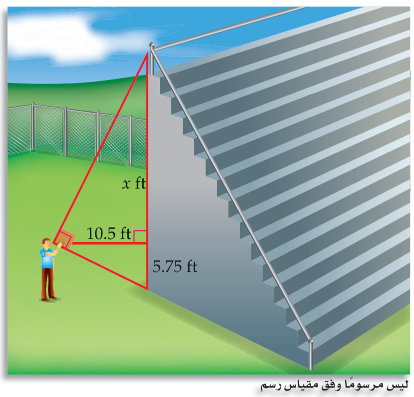
يتسع أكبر مدرّج في العالم إلى 240000 مشاهد، ويقع في مدينة براغ التشيكوسلوفاكية.

يمكنك استعمال الوسط الهندسي ؛ لقياس الارتفاع بصورة غير مباشرة.

مثال 4 من واقع الحياة — القياس غير المباشر

مدرَّجات: يقيس سلمان ارتفاع الجدار الجانبي لمدرّج ملعب كما في الشكل المجاور.

لإيجاد هذا الارتفاع، يستعمل مربعًا من الورق المقوى. بحيث تكون قمة المدرّج وقاعدته على استقامة ضلعي قائمة المربع. قاس سلمان المسافة الأفقية بينه وبين المدرّج، والمسافة بين مستوى نظره وسطح الأرض. أوجد ارتفاع المدرج إلى أقرب قدم.



ليس مرسومًا وفق مقياس رسم

بُعد سلمان عن المدرج يساوي الارتفاع إلى وتر المثلث القائم، ويساوي الوسط الهندسي بين القطعتين المستقيمتين المكوّنتين للوتر، حيث إن قياس الصغرى يساوي 5.75 ft. افترض أن القياس المجهول x ft .

نظرية الارتفاع في الوسط الهندسي	$10.5 = \sqrt{5.75 \cdot x}$
بتربيع الطرفين	$110.25 = 5.75x$
بقسمة كل طرف على 5.75	$19.17 \approx x$

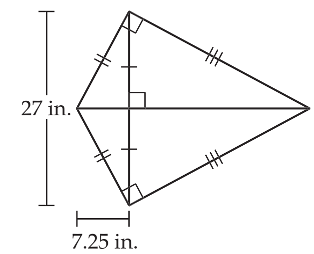
ارتفاع المدرج يساوي طول الوتر، ويساوي $5.75 + 19.17 \approx 25$ ft.

✓ تأكد

4) **نخيل:** تريد هند قياس ارتفاع نخلة في فناء منزلها، فأمسكت كتابًا أمام عينيها بحيث كانت قمة النخلة وقاعدتها على استقامة حافتين متعامدتين للكتاب، إذا كان ارتفاع مستوى نظرها عن سطح الأرض 5 ft، وكانت تقف على بُعد 11 ft من النخلة، فما ارتفاع النخلة؟ ارسم شكلًا، واشرح تبريرك. 29.2 ft

مثال إضافي

4 **طائرة ورقية:** يصنع عصام طائرة ورقية لابنه، فيتعيّن عليه أن يثبّت دعامتين، بحيث تكونان متعامدتين. إذا كان طول الدعامة القصيرة 27 in، ووضعها على بعْد 7.25 in عن أحد طرفي الدعامة الطويلة، فما طول الدعامة الطويلة لتكون زاويتا الطائرة الورقية عند طرفي الدعامة القصيرة قائمتين؟



32.39 in تقريبًا

28 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 25

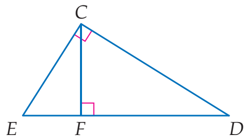
أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

1) 5 و 20 **10** 2) 36 و 4 **12** 3) 40 و 15 $10\sqrt{6} \approx 24.5$

مثال 2 صفحة 26

4) اكتب عبارة تَشابُه، تُعيّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في الشكل المجاور.

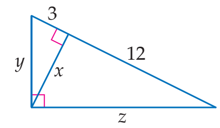
$\triangle CFD \sim \triangle ECD \sim \triangle EFC$



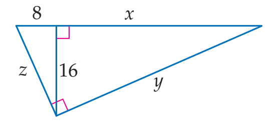
مثال 3 صفحة 27

أوجد قيمة كل من x, y, z في كل شكل أدناه:

5)



6)

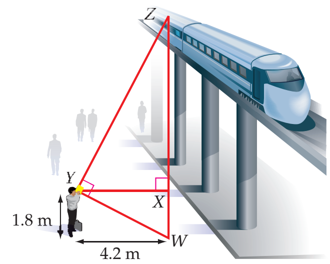


5) $x = 6, y = 3\sqrt{5} \approx 6.7, z = 6\sqrt{5} \approx 13.4$

6) $x = 32; y = 16\sqrt{5} \approx 35.8, z = 8\sqrt{5} \approx 17.9$

مثال 4 صفحة 28

7) **قطارات:** زار علي إحدى الدول، وشاهد قطارًا يسير فوق جسر يعلو شارعًا. أراد علي أن يُقدِّر ارتفاع القطار عن الشارع، فوقف على بُعد 4.2 m من الشارع وأمسك كتابًا أمام عينيه، بحيث كان القطار والشارع على استقامة حافتين متعامدتين للكتاب، إذا كان ارتفاع مستوى نظره عن الشارع 1.8 m، فأوجد ارتفاع القطار عن الشارع. **11.6 m**



تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 25

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

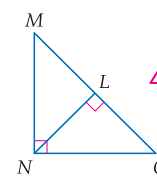
8) 81 و 4 **18** 9) 25 و 16 انظر الهامش 10) 20 و 25 $10\sqrt{5} \approx 22.4$

11) 36 و 24 $12\sqrt{6} \approx 29.4$ 12) 12 و 2.4 $\frac{12\sqrt{5}}{5} \approx 5.4$ 13) 18 و 1.5 $3\sqrt{3} \approx 5.2$

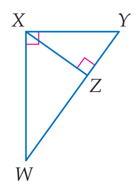
مثال 2 صفحة 26

اكتب عبارة تَشابُه، تُعيّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في كل شكل أدناه:

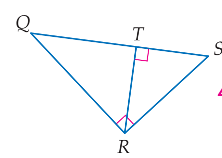
14)



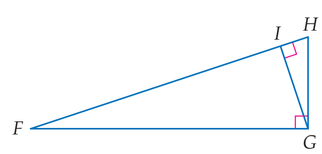
15)



16)



17)



14) $\triangle MNO \sim \triangle NLO \sim \triangle MLN$

15) $\triangle WXY \sim \triangle XZY \sim \triangle WZX$

16) $\triangle QRS \sim \triangle RTS \sim \triangle QTR$

17) $\triangle HGF \sim \triangle HIG \sim \triangle GIF$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-7 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم .

إجابة :

9) $x = \sqrt{(a)\,(b)}$ تعريف الوسط الهندسي

$= \sqrt{(16)\,(25)}$ a = 16, b = 25

$= \sqrt{(4)\,(4)\,(5)\,(5)}$ التحليل إلى العوامل

$= (4)\,(5)$ بالتبسيط

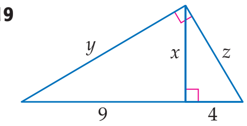
$= 20$ بالتبسيط

تنويع الواجبات المنزلية

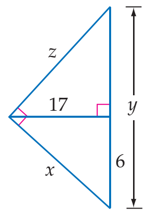
المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	8-24، 48، 50-66
ضمن المتوسط	9-35 فردي، 26-40 زوجي، 37، 41، 42-48 زوجي، 47، 50-66
فوق المتوسط	26-61، (اختياري: 62-66)

أوجد قيمة كل من x, y, z في كلّ شكل أدناه.

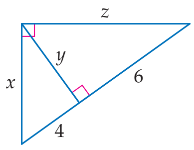
مثال 3
صفحة 27

18) 

$x = 6,\ y = 3\sqrt{13} \approx 10.8,\ z = 2\sqrt{13} \approx 7.2$

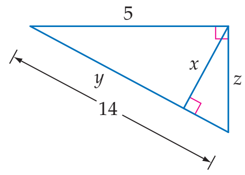
19) 

$x = 5\sqrt{13} \approx 18.0,\ y = 54\frac{1}{6} \approx 54.2,\ z \approx 51.1$

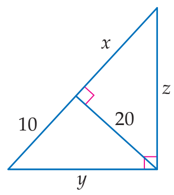
20) 

$x = 2\sqrt{10} \approx 6.3,\ y = 2\sqrt{6} \approx 4.9,\ z = 2\sqrt{15} \approx 7.7$

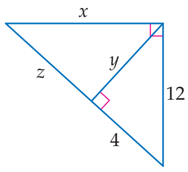
مثال 4
صفحة 28

21) 

$x \approx 4.7,\ y \approx 1.8,\ z \approx 13.1$

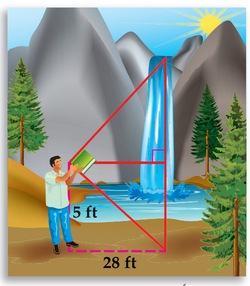
22) 

$x = 40,\ y = 10\sqrt{5} \approx 22.4,\ z = 20\sqrt{5} \approx 44.7$

23) 

$x = 24\sqrt{2} \approx 33.9,\ y = 8\sqrt{2} \approx 11.3,\ z = 32$

24) **شلالات:** يستعمل أحمد كتابًا؛ لتحديد خط النظر إلى قمّة شلال، إذا كان مستوى عينيه يرتفع 5 ft فوق سطح الأرض، وبُعده الأفقي عن الشلال 28 ft ، فأوجد ارتفاع الشلال إلى أقرب عُشر القدم. **161.8 ft**



ليس مرسومًا وفق مقياس رسم

إرشادات للدراسة

المثلثات المتشابهة
إذا لم تكن متأكدًا من تطبيق نظريات الوسط الهندسي، يمكنك أن تكتب عبارة التشابه والتناسب الذي يربط أطوال الأضلاع المتناظرة ؛ لإيجاد الأطوال المجهولة.

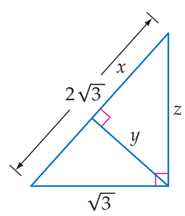
أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

25) $\frac{1}{5}$ و 60 $\quad 2\sqrt{3} \approx 3.5$

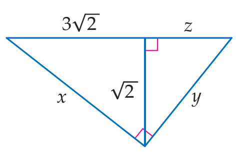
26) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ و $\frac{5\sqrt{2}}{7}$ $\quad \frac{\sqrt{30}}{7} \approx 0.8$

27) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ و $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ $\quad \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2.2$

أوجد قيمة كل من x, y, z في كل شكل أدناه:

28) 

$x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6,\ y = \frac{3}{2},\ z = 3$

29) 

$x = 2\sqrt{5} \approx 4.5,\ y = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1.5,\ z = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.5$

30) **جبر:** الوسط الهندسي لعدد وأربعة أمثاله يساوي 22. ما ذلك العدد؟ **11**

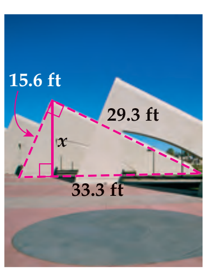
استعمل المثلثات المتشابهة؛ لإيجاد قيمة x في كل شكل أدناه:

31) 

6.4 ft

32) 

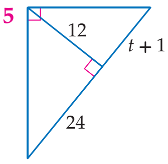
3.7 ft

33) 

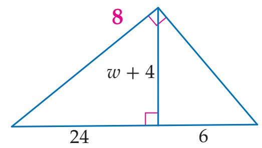
13.7 ft

30 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

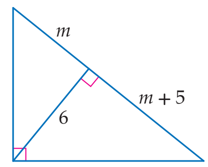
جبر: أوجد قيمة كل من m, t, w في كل شكل أدناه:

34) 

5

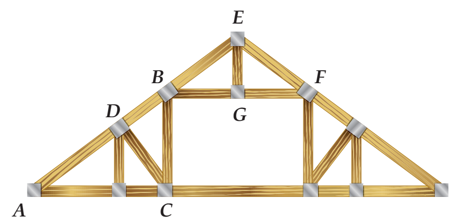
35) 

8

36) 

4

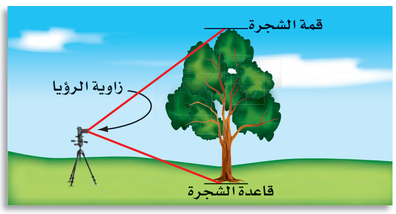
37) **إنشاءات:** صمّمت دعامات معدنية لسقف، بحيث تبقى مساحة يمكن الاستفادة منها بصور مختلفة في الشكل المبيّن أدناه. وفيه $\angle BCA$ و $\angle EGB$ زاويتان قائمتان، $\triangle BEF$ متطابق الضلعين، $\overline{CD}$ ارتفاع في $\triangle ABC$ ، و $\overline{EG}$ ارتفاع في $\triangle BEF$. إذا كان DB يساوي 5 ft و CD يساوي 6 ft و 4 in ، و BF يساوي 10 ft و 10 in، و EG يساوي 4 ft و 6 in، فما طول $\overline{AE}$ ؟ **20.07 ft تقريبًا**



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلّ من النظريات الآتية: للتمارين 40-38 انظر ملحق الإجابات

38) نظرية 1.1　　39) نظرية 1.2　　40) نظرية 1.3

41) **فن التصوير:** تُسمّى الزاوية المُتكوّنة من خطّي النظر إلى قمة الشجرة وقاعدتها زاوية الرؤيا. يريد سعود أن يلتقط صورة لشجرة ارتفاعها 15.5 ft، فثبّت الكاميرا على حامل ارتفاعه 5 ft عن سطح الأرض، وحدّد قياس زاوية الرؤية الرأسية في آلة التصوير على 90° كما في الشكل المجاور.

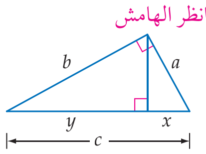


a) ارسم شكلًا يوضّح الموقف. **انظر ملحق الإجابات**

b) على أي بُعد عن الشجرة، يقف سعود كي يلتقط صورة كاملة لها؟ **7.2 ft تقريبًا**

42) **مالية:** مُعدَّل عائد الاستثمار خلال سنتين هو الوسط الهندسي للعائدين السنويين. إذا كان العائد في السنة الأولى 12%، وفي السنة الثانية 7%، فما مُعدَّل عائد الاستثمار خلال السنتين؟ **انظر الهامش**

43) **برهان:** برهن نظرية فيثاغورس باستعمال الشكل المجاور ونظريةِ الضلع في الوسط الهندسي. **انظر الهامش**



حدّد إن كانت العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح تبريرك.

44) الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين متتاليين يساوي الوسط الهندسي لهذين العددين. **انظر الهامش**

45) الوسط الهندسي لمربعين كاملين يساوي عددًا صحيحًا موجبًا.

46) الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين يساوي عددًا صحيحًا آخر.

مراجعة المفردات

البرهان الحر (غير الشكلي) إحدى الطرق المستعملة لإثبات صحة العبارات والتخمينات، وتكتب فيه فقرة تفسر أسباب صحة التخمين المتعلق بموقف معين.

الربط مع واقع الحياة

شجرة الحياة هي شجرة تنتصب وحيدة في صحراء الصخير جنوب مملكة البحرين منذ أكثر من 400 عام، تحوَّلت إلى أحد المعالم السياحية البحرينية. وخلف بقاء "شجرة الحياة" على قيد الحياة حتى الآن سر لم يستطع أحد الوصول إلى تفسير منطقي وعلمي أكيد له.

المصدر: ويكيبيديا، الموسوعة الحرة

45) صحيحة دائمًا، إجابة ممكنة: بما أن $\sqrt{ab}$ يساوي $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ، فسيكون الوسط الهندسي لمربعين كاملين، ناتج ضرب عددين صحيحين موجبين، أي عددًا صحيحًا موجبًا .

46) صحيحة أحيانًا، إجابة ممكنة: يكون الوسط الهندسي لعددين عددًا صحيحًا موجبًا، عندما يكون حاصل ضربهما مربعًا كاملًا.

إجابات:

42

تعريف الوسط الهندسي	$x = \sqrt{ab}$
$a = 7, b = 12$	$= \sqrt{7.12}$
بالتبسيط	$= \sqrt{84}$
بالتبسيط	≈ 9

مُعدَّل عائد الاستثمار خلال السنتين يساوي 9%.

43) باستعمال نظرية الضلع في الوسط الهندسي $a = \sqrt{xc}$، $b = \sqrt{yc}$. وبتربيع القيمتين ينتج أن $a^2 = xc$ ، $b^2 = yc$. ويكون مجموع المربعين $a^2 + b^2 = xc + yc$. وبأخذ c عاملًا مشتركًا من الطرف الأيمن للمعادلة ينتج أن $a^2 + b^2 = c\,(x + y)$. وحسب مُسلَّمة جمع أطوال القطع المستقيمة فإن، $c = y + x$. وبالتعويض ينتج أن $a^2 + b^2 = c(c)$ ، أو $a^2 + b^2 = c^2$

44 إجابة ممكنة: غير صحيحة أبدًا؛ لأن الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين متتاليين يساوي $\sqrt{x(x+1)}$ ، والوسط الحسابي لهما يساوي $\frac{x(x+1)}{2}$

$$\sqrt{x + (x+1)} \stackrel{?}{=} \frac{x + (x+1)}{2}$$

$$\sqrt{x^2 + x} \stackrel{?}{=} \frac{2x+1}{2}$$

$$x^2 + x \stackrel{?}{=} (x + \tfrac{1}{2})^2$$

$$x^2 + x \stackrel{?}{=} x^2 + x + \tfrac{1}{4}$$

$$0 \neq \tfrac{1}{4}$$

تنويع التعليم

ضمن　فوق

توسّع سابقًا تم عمل مقارنة بين المفردات التي لها معانٍ مختلفة في الرياضيات. فكلمة وسط يمكن تطبيقها في الهندسة، أو الإحصاء. اطلب إلى الطلبة أن يُبيّنوا بلغتهم الخاصة أوجه الشبه وأوجه الاختلاف لمعنى" الوسط "عند تطبيقه على مثلث.

إجابة ممكنة: التشابه هو أن الوسط الهندسي في مثلث و الوسط في الإحصاء يقارنان بين عددين أو أكثر. أما الاختلاف فهو أن الوسط الهندسي في مثلث يستعمل تطبيقات رياضية مختلفة عمّا في الإحصاء.

47) **تمثيلات متعدِّدة:** في هذا التمرين سوف تستقصي الوسط الهندسي. b , c انظر الهامش

a) **جدولة:** انقل الجدول، وأكمله بخمسة أزواج مرتبة (x, y)، بحيث $\sqrt{xy} = 8$.

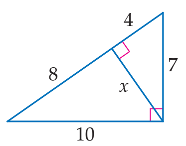
x	y	$\sqrt{xy}$
2	32	8
4	16	8
8	8	8
16	4	8
32	2	8

b) **تحليل:** اعتمادًا على الجدول الذي أكملته، ما الاستنتاج الذي يمكن أن تتوصّل إليه حول العلاقة بين x, y ؟

c) **تمثيل بياني:** مثِّل بيانيًا الأزواج المرتّبة المحدّدة في الجدول على صورة لوحة انتشار، لتؤكّد الاستنتاج الذي توصَّلت إليه.

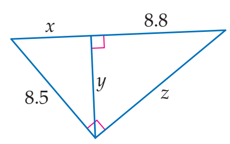
مسائل مهارات التفكير العليا

48) **اكتشف الخطأ:** وجد خالد وعادل قيمة x من المثلث المجاور كما هو مبيّن أدناه. أيُّهما إجابته صحيحة؟ وضّح تبريرك.



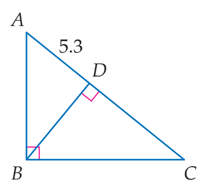
خالد	عادل
$\frac{4}{x} = \frac{x}{7}$	$\frac{4}{x} = \frac{x}{10}$
$x \approx 5.3$	$x \approx 6.3$

49) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه. $x = 5.2, y = 6.8, z = 11$



50) **مسألة مفتوحة:** أوجد زوجين من الأعداد الصحيحة الموجبة يكون الوسط الهندسي لكل منهما عددًا صحيحًا موجبًا. ما الشرط الواجب توافره كي يكون الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين، عددًا صحيحًا موجبًا؟

51) **تبرير:** إذا كانت نقطة تلاقي ارتفاعات $\triangle ABC$ المجاور تقع على بُعد 6.4 وحدات من النقطة D، فأوجد BC . 10.0



52) **اكتب:** بيّن أوجه الشبة وأوجه الاختلاف بين الوسط الحسابي، والوسط الهندسي لعددين. متى يتساوى الوسطان؟ وضّح تبريرك. انظر الهامش

مراجعة المفردات

الأوساط الحسابية هي الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

48) كلتا الإجابتين خاطئتين. إجابة ممكنة: في المثلثين المتشابهين الناشئين عن رسم الارتفاع، يكون الضلع الذي طوله x وحدة في المثلث الأصغر مناظرًا للضلع الذي طوله 8 وحدات في المثلث الأكبر، ويكون التناسب الصحيح $\frac{4}{x} = \frac{x}{8}$ وتكون قيمة $x \approx 5.7$

50) إجابة ممكنة: 4 و 9 ، 8 و 8 كي يكون الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين عددًا صحيحًا موجبًا يجب أن يكون حاصل ضربهما مربعًا كاملًا.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 47 الجدول والتمثيل البياني و الوصف اللفظي لاستقصاء الوسط الهندسي.

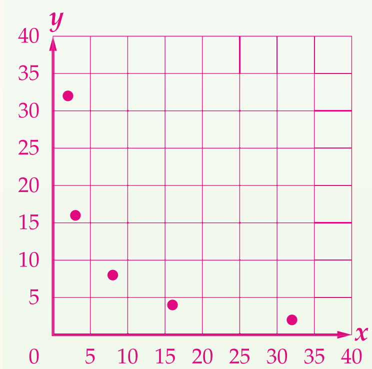
تنبيه !

اكتشف الخطأ يجب أن يتذكر الطلبة أن التناسبات تقارن العناصر المتشابهة للمثلثات المختلفة. استعمل خالد في السؤال 48. أطوال القطع المستقيمة من المثلث الأصغر فقط

إجابات:

47b) علاقة عكسية، فكلما زادت قيمة x تتناقص قيمة y، وكلما تناقصت قيمة x تزداد قيمة y.

47c)



52) إجابة ممكنة: قيمة كل من الوسطين الحسابي والهندسي تقع بين العددين المعطيين. الوسط الحسابي للعددين a ، b يساوي $\frac{a+b}{2}$ ،

أما الوسط الهندسي للعددين الموجبين a ، b يساوي $\sqrt{ab}$.

ويتساوى الوسطان عندما $a = b$.

الإثبات: $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} = ab$$

$$(a+b)^2 = 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a - b = 0$$

$$a = b$$

32 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

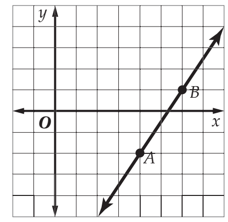
تدريب على اختبار معياري

53) ما الوسط الهندسي للعددين 8 و 22 في أبسط صورة؟ A

A $4\sqrt{11}$ **C** $16\sqrt{11}$

B 15 **D** 176

54) ما المسافة بين A, B الموضّحة في الشكل المجاور؟ G



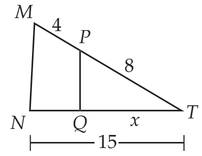
F $\sqrt{5}$

G $\sqrt{13}$

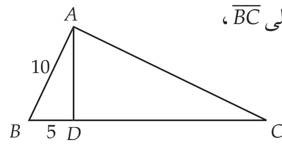
H $\sqrt{101}$

J 13

55) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$، فاستعمل تناسبًا لإيجاد قيمة x. موضّحًا خطوات الحل. 10



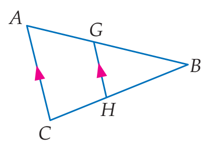
56) إذا كانت $\overline{AD}$ عمودية على $\overline{BC}$، و $\overline{AB}$ عمودية على $\overline{AC}$ في الشكل المجاور، فما طول $\overline{BC}$ ؟ C



A $5\sqrt{2}$ **B** $5\sqrt{3}$ **C** 20 **D** 25

مراجعة تراكمية

57) إذا كان BH = 8 , AG = 4 , GB = 6، فأوجد BC في الشكل المجاور. (مهارة سابقة) $13\frac{1}{3}$



أوجد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

58) $A(7, 2), B(5, 6)$ **(6, 4)**

59) $A(1, -3), B(3, 3)$ **(2, 0)**

60) $A(-5, 0), B(4, 0)$ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

61) $A(a, b), B(-a, -b)$ **(0, 0)**

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كلاً مما يأتي بإنطاق المقام (جعل المقام عددًا نسبيًّا):

62) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}$

63) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

64) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

65) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ $\frac{3\sqrt{55}}{11}$

66) $\frac{21}{\sqrt{3}}$ $7\sqrt{3}$

4 التقويم

بطاقة خروج اعمل خمسة تمارين شبيهة بتلك الموجودة في المثال 3 بعدة نسخ. وأعط تمرينًا لكل طالب لحله. واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-1، 2-2 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 1.

1-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-3

استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين و المتطابقة الأضلاع.

الدرس 1-3

استعمال خصائص المثلثات $45°-45°-90°$، وخصائص المثلثات $30°-60°-90°$.

ما بعد الدرس 1-3

تطوير علاقات تَشابُه المثلثات ، مثل نسب المثلث القائم باستعمال طرق مختلفة وتبريرها و تطبيقها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا ؟ ".

اسأل :

- ما نوع المثلث الذي يُمثِّله قلم التظليل؟ متطابق الأضلاع
- صِف ارتفاع المثلث. إنه طول القطعة المستقيمة التي تنصف زاوية الرأس، و تنصف قاعدة المثلث.
- ما قياسات الزوايا في المثلثين المتكوّنين من ارتفاع المثلث؟ $30°, 60°, 90°$

1-3 المثلثات القائمة الخاصة
Special Right Triangles

فيما سبق

درست استعمال خصائص المثلث المتطابق الضلعين والمثلث المتطابق الأضلاع.

والآن

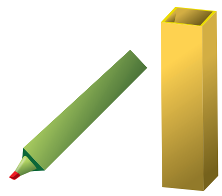
الأفكار الرئيسة

- أستعمل خصائص المثلثات $45°-45°-90°$.
- أستعمل خصائص المثلثات $30°-60°-90°$.

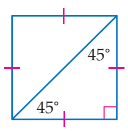
www.obeikaneducation.com

لمــاذا؟

صنعت نجلاء عبوة كرتونية على شكل متوازي مستطيلات، بُعدا قاعدته $3\,cm$, $2.5\,cm$، وارتفاعه $12\,cm$؛ لتضع فيها قلم تظليل على شكل منشور ثلاثي، طول كل من أضلاع قاعدته $3\,cm$، وارتفاعه $12\,cm$. لتهديه صديقتها، لكن العبوة التي صنعتها لم تتسع لقلم التظليل. يمكن لنجلاء استعمال خصائص المثلثات القائمة الخاصة لتحسب بعدي قاعدة العبوة، بحيث تتسع لقلم التظليل.

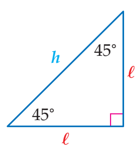


خصائص المثلث $45°-45°-90°$ يُكوّن قطر المربع مثلثين قائمين متطابقَي الضلعين. بما أن زاويتي قاعدة المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، فإن قياس كل زاوية حادة تساوي $90° \div 2 = 45°$ ، وهذا المثلث يُسمى بالمثلث $45°-45°-90°$.



يمكنك استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث القائم $45°-45°-90°$.

نظرية فيثاغورس	$\ell^2 + \ell^2 = h^2$
بالتبسيط	$2\ell^2 = h^2$
بأخذ الجذر التربيع الموجب لكل من الطرفين	$\sqrt{2\ell^2} = \sqrt{h^2}$
بالتبسيط	$\ell\sqrt{2} = h$



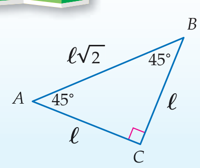
يُثبت هذا البرهان الجبري النظرية الآتية:

نظرية 1.4 نظرية المثلث $45°-45°-90°$

أضف إلى مطويتك

ضلعا المثلث $45°-45°-90°$ متطابقان، إذا كان طول ضلع المثلث ℓ ، فإن طول الوتر h يساوي $\sqrt{2}$ مضروبًا في طول الضلع.

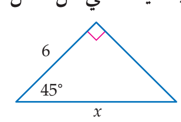
بالرموز في المثلث $45°-45°-90°$ ، $h = \ell\sqrt{2}$.



مثال 1 إيجاد طول الوتر في المثلث $45° - 45° - 90°$

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه:

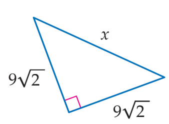
a)



الزاويتان الحادتان في المثلث القائم متتامتان.
لذا فإن قياس الزاوية الثالثة $90° - 45° = 45°$.
إذن المثلث هو $45° - 45° - 90°$
استعمل النظرية 1.4 .

النظرية 1.4	$h = \ell\sqrt{2}$
بالتعويض	$x = 6\sqrt{2}$

b)



ضلعا المثلث القائم لهما القياس نفسه.
لذا، فهو مثلث متطابق الضلعين.
إذن المثلث هو $45° - 45° - 90°$
استعمل النظرية 1.4 .

النظرية 1.4	$h = \ell\sqrt{2}$
بالتعويض	$x = 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$	$x = 9 \cdot 2 = 18$

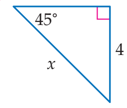
مصادر الدرس 1-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (33,40)	• تنويع التعليم ص (33, 40)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

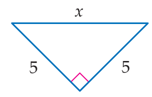
تأكد

أوجد قيمة x في كل من الأشكال الآتية:

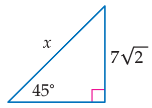
(1A $4\sqrt{2}$



(1B $5\sqrt{2}$



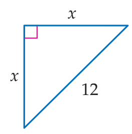
(1C 14



يمكنك أيضًا أن تحل عكسيًا، وتستعمل النظرية 1.4 لإيجاد طولَي ضلعي المثلث °90 - °45 - °45 إذا عُلِمَ طول الوتر.

مثال 2 إيجاد طولَي الضلعين في المثلث °90 - °45 - °45

أوجد قيمة x في الشكل المجاور:



ضلعا المثلث القائم لهما القياس نفسه x . لذا فإنه مثلث °90 - °45 - °45 . استعمل نظرية 1.4 لإيجاد x .

نظرية المثلث °90 - °45 - °45	$h = \ell\sqrt{2}$
بالتعويض	$12 = x\sqrt{2}$
بقسمة كل طرف على $\sqrt{2}$	$\frac{12}{\sqrt{2}} = x$
بإنطاق المقام	$\frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = x$
بالضرب	$\frac{12\sqrt{2}}{2} = x$
بالتبسيط	$6\sqrt{2} = x$

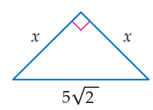
مراجعة المفردات

إنطاق المقام لإنطاق المقام اضرب الكسر في العدد 1 مكتوبًا على صورة عدد مقسوم على نفسه، بحيث يكون حاصل الضرب في المقام عددًا نسبيًا.

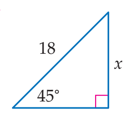
تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل مما يأتي:

(2A 5

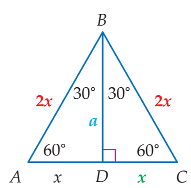


(2B $9\sqrt{2}$



خصائص المثلثات °90 - °60 - °30 المثلث °90 - °60 - °30 مثلث آخر خاص قائم الزاوية، أو مثلث قائم أضلاعه تشترك بعلاقة خاصة. يمكنك استعمال المثلث المتطابق الأضلاع لتجد هذه العلاقة.

عند رسم ارتفاع من أي رأس من رؤوس المثلث متطابق الأضلاع، يتكوّن مثلثان °90 - °60 - °30 متطابقان. في الشكل المجاور $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ،
لذا، $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. إذا كان $AD = x$ ، فإن $CD = x$ و $AC = 2x$.
بما أن $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع، فإن $AB = 2x$ و $BC = 2x$.



استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد الارتفاع a الذي يساوي طول $\overline{BD}$.

نظرية فيثاغورس	$a^2 + x^2 = (2x)^2$
بالتبسيط	$a^2 + x^2 = 4x^2$
بطرح x^2 من كل طرف	$a^2 = 3x^2$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف	$a = \sqrt{3x^2}$
بالتبسيط	$a = x\sqrt{3}$

إرشادات للدراسة

ارتفاعات المثلث المتطابق الضلعين لاحظ أن أحد ارتفاعات المثلث المتطابق الضلعين هو أيضًا قطعة متوسطة فيه. في الشكل المجاور، $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$.

خصائص المثلثات °90 - °45 - °45

المثالان 1,2 يُبيّنان كيفية استعمال نظرية المثلث °90 – °45 – °45 ؛ لإيجاد طولي الضلعين أو الوتر في المثلث القائم.

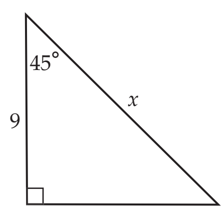
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

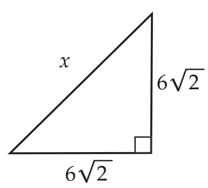
مثالان إضافيان

1 أوجد قيمة x في كل شكل أدناه.

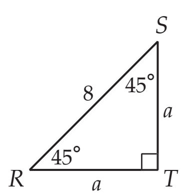
(a $9\sqrt{2}$



(b 12



2 أوجد قيمة a في الشكل أدناه.



$a = 4\sqrt{2}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

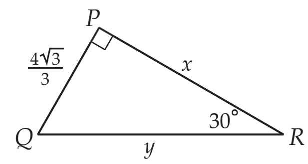
المتعلمون المنطقيون / الرياضيون اطلب إلى الطلبة أن يغلقوا كتبهم، وأن يقسموا قطعة من الورق إلى عمودين ، ثم اطلب إليهم أن يرسموا في رأس العمود الأول مربعًا قطره d وضلعه x، وأن يرسموا في رأس العمود الثاني مثلثًا متطابق الأضلاع وارتفاعًا له. و اطلب إليهم أن يُسمّوا كلًّا من الجزأين اللذين قسم إليهما الضلع بوساطة الارتفاع بالحرف x، ثم يستعملوا نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد علاقات الأضلاع في المثلثين °90 – °45 – °45 ، °90 – °60 – °30 في هذين الشكلين.

خصائص المثلث 30° - 60° - 90°

المثالان 3,4 يُبيّنان كيفية استعمال نظرية المثلث $90^\circ-60^\circ-30^\circ$؛ لإيجاد طولي الضلعين، أو الوتر في المثلث القائم الزاوية.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة كل من x، y. في الشكل أدناه.



$x = 4,\ y = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

التركيز في المحتوى الرياضي

المعالجة قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حفظ خصائص المثلثين $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ و $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ بشكل صحيح. اقترح عليهم أن يعيدوا الحصول على الأشكال من النظريتين 1.4 و 1.5 بشكل دوري لتبقى هذه العلاقات حاضرة في أذهانهم، ثم بيّن لهم أنه يمكنهم أشتقاق أيّ من الشكلين باستعمال نظرية فيثاغورس مع المربع، أو المثلث المتطابق الأضلاع.

تنبيه !

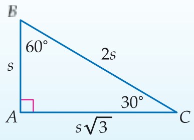
الكسور عند إعطاء أطوال أضلاع المثلثات الخاصة، تأكد من التخلص من الجذر في المقام (إنطاق المقام).

يُثبت هذا البرهان الجبري النظرية الآتية:

نظرية 1.5 نظرية المثلث 30° - 60° - 90°

أضف إلى مطويتك

طول الوتر h في المثلث 90° - 60° - 30° يساوي مثلَي طول الضلع الأقصر s، وطول الضلع الأطول ℓ يساوي طول الضلع الأقصر مضروبًا في $\sqrt{3}$.



بالرموز إذا كان طول الضلع الأقصر في المثلث 90° - 60° - 30° هو s، فإن $h = 2s$ ، $\ell = s\sqrt{3}$.

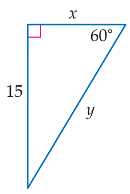
تذكّر أن الضلع الأقصر في المثلث يقابل الزاوية الصغرى، لذا فالضلع الأقصر في المثلث 90° - 60° - 30° يقابل الزاوية 30°، والضلع الأطول يقابل الزاوية 60° .

إرشادات للدراسة

استعمال النسب
نسبة أطوال أضلاع المثلث 90° - 60° - 30° كنسبة 1 إلى $\sqrt{3}$ إلى 2 أو $1 : \sqrt{3} : 2$.

مثال 3 إيجاد أطوال أضلاع المثلث 90° - 60° - 30°

أوجد قيمة كل من x، y في الشكل المجاور.



الزاويتان الحادتان في المثلث القائم متتامتان. لذا، فإن قياس الزاوية الثالثة في هذا المثلث تساوي $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. فيكون المثلث 90° - 60° - 30° .

استعمل النظرية 1.5؛ لإيجاد قيمة x طول الضلع الأقصر.

النظرية 1.5	$\ell = s\sqrt{3}$
بالتعويض	$15 = x\sqrt{3}$
بقسمة كل طرف على $\sqrt{3}$	$\frac{15}{\sqrt{3}} = x$
بإنطاق المقام	$\frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = x$
بالضرب	$\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = x$
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$	$\frac{15\sqrt{3}}{3} = x$
بالتبسيط	$5\sqrt{3} = x$

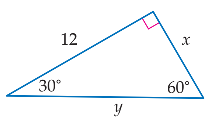
الآن، استعمل النظرية 1.5؛ لإيجاد قيمة y ، الذي يُمثّل طول الوتر.

النظرية 1.5	$h = 2s$
بالتعويض	$y = 2(5\sqrt{3})$
	$= 10\sqrt{3}$

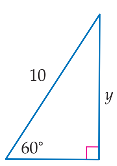
تأكد

أوجد قيمة كلّ من x، y في كل شكل مما يأتي:

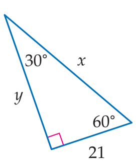
(3A



(3B



(3C



3A) $x = 4\sqrt{3},\ y = 8\sqrt{3}$
3B) $x = 5,\ y = 5\sqrt{3}$
3C) $x = 42,\ y = 21\sqrt{3}$

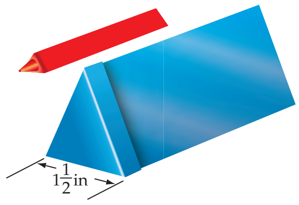
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل السبورة التفاعلية؛ لحَلّ مسألة تتضمن أطوال الأضلاع في المثلثين $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ و $30^\circ-60^\circ-90^\circ$. احتفظ بالحَلّ، ثم وزِّعه على الطلبة عند نهاية الحصة.

يمكنك استعمال خصائص المثلثات القائمة الخاصة °90 - °60 - °30 و °90 - °45 - °45 لحلّ مسائل من واقع الحياة.

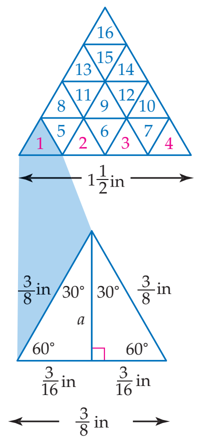
مثال 4 من واقع الحياة — استعمال خصائص المثلثات القائمة الخاصة

أقلام: تُصنع بعض الأقلام على شكل منشور، بحيث لا تتدحرج على الطاولة. إذا مُلئت علبة على شكل منشور ثلاثي، طول كل من أضلاع قاعدته $1\frac{1}{2}$ in بستة عشر قلم تلوين متشابهة كل منها على شكل منشور ثلاثي قاعدته مثلث متطابق الأضلاع، بحيث ارتكزت قاعدة كل قلم على قاعدة العلبة. فما أبعاد قاعدة كل قلم؟



اِفْهم 16 قلمًا تملأ العلبة، وعليك أن تجد طول قاعدة كل قلم وارتفاعها.

خطِّط خمّن وتحقق من كيفية ترتيب 16 قلمًا لتملأ العلبة تمامًا. أوجد عرض قاعدة أحد الأقلام، ثم استعمل نظرية المثلث °90 - °60 - °30 لإيجاد ارتفاعه.



حُلّ خمّن أنه يمكن وضع 4 أقلام على عرض قاعدة الصندوق، والشكل المجاور يوضّح أن عدد الأقلام الكلّي اللازم لملء الصندوق يساوي 16 قلمًا. ✓

عرض الصندوق يساوي $1\frac{1}{2}$ in. لذا، فإن عرض القلم الواحد يساوي $1\frac{1}{2} \div 4 = \frac{3}{8}$ in.

ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع يُمثّل أحد الأقلام. ارتفاع هذا المثلث يُمثّل الضلع الأطول في المثلث °90-°60-°30 . استعمل النظرية 1.5 لإيجاد الطول التقريبي للارتفاع a .

(طول الضلع الأقصر) • $\sqrt{3}$ = (طول الضلع الأطول)

$$a = \frac{3}{16} \cdot \sqrt{3} \approx 0.3$$

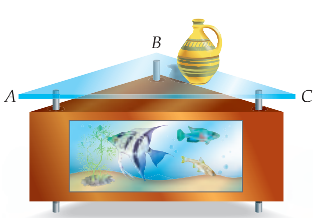
طول ضلع قاعدة كل قلم $\frac{3}{8} \approx 0.4$ in ، وارتفاعها 0.3 in تقريبًا.

تحقق أوجد ارتفاع قاعدة الصندوق باستعمال نظرية المثلث °90-°60-°30 ، ثم اقسم على أربعة؛ لأن ارتفاع قاعدة الصندوق يساوي مجموع ارتفاعات قواعد أربعة أقلام. النتيجة هي ارتفاع قاعدة القلم 0.3 in تقريبًا. ✓

✓ تأكد

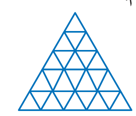
53.5 cm, 75.7 cm

4) **أثاث:** سطح المنضدة التي تعلو حوض الأسماك المجاور مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول ضلعها الأطول $\overline{AC}$ يساوي 107 cm، ما المسافة من الرأس B إلى $\overline{AC}$ ؟ وما طول كل من الضلعين الآخرين؟



إرشادات لحل المسألة

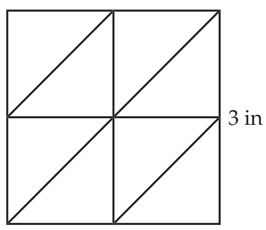
التخمين والتحقق
عند استعمال طريقة التخمين والتحقق، يكون من المفيد الاحتفاظ بقائمة التخمينات التي جربتها ولم تصلح. ففي مثال 4، افترض أن تخمينك الأول كان 5 أقلام.



يُبيّن هذا الشكل أنه يمكن وضع 25 قلمًا في العلبة، وليس 16 قلمًا.

مثال إضافي

4 **تنجيد:** يُبيّن الشكل أدناه تصميم لحاف، قُسم المربع إلى 8 مثلثات قائمة متطابقة الضلعين. إذا كان طول ضلع المربع 3 in، فما أبعاد كل مثلث؟



طول الضلع = 1.5 in
طول الوتر = $1.5\sqrt{2}$ in

إرشادات للمعلم الجديد

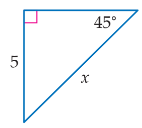
أخطاء مفاهيمية شائعة بيّن للطلبة أن من الأخطاء الشائعة فرض أن طول الضلع الأطول في المثلث °30–°60–°90 يساوي مثلي طول الضلع الأقصر. أثبت أن ذلك ليس صحيحًا بإعطاء مثال مضادّ أو أكثر.

الدرس 3-1 المثلثات القائمة الخاصة 37

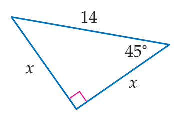
تأكد من فهمك

المثالان 1, 2
الصفحتان 34, 35

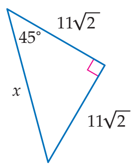
أوجد قيمة x في كلّ شكل مما يأتي:

1) 

$5\sqrt{2}$

2) 

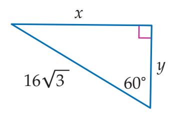
$7\sqrt{2}$

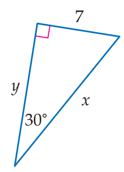
3) 

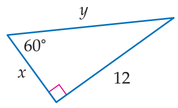
22

مثال 3
صفحة 36

أوجد قيمة كل من x ، y في كلّ شكل أدناه:

4) 

5) 

6) 

4) $x = 24, y = 8\sqrt{3}$
5) $x = 14, y = 7\sqrt{3}$
6) $x = 4\sqrt{3}, y = 8\sqrt{3}$

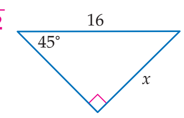
مثال 4
صفحة 37

7) **بريد:** يريد أحمد إرسال هدية لصديقه خالد في البريد، فوضعها داخل عبوة على شكل أسطوانة قطر قاعدتها $3\frac{1}{4}$ in. ولديه غلاف بريد على شكل منشور، قاعدته مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 4 in، كما في الشكل المجاور. هل يمكنه إدخال العبوة الأسطوانية في هذا الغلاف؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

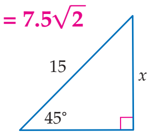
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2
الصفحتان 34, 35

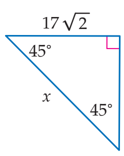
أوجد قيمة x في كلّ شكل مما يأتي:

8) 

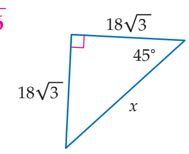
$8\sqrt{2}$

9) 

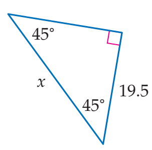
$\frac{15\sqrt{2}}{2} = 7.5\sqrt{2}$

10) 

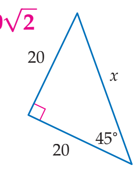
34

11) 

$18\sqrt{6}$

12) 

$19.5\sqrt{2}$

13) 

$20\sqrt{2}$

14) إذا كان طول وتر المثلث $90° - 45° - 45°$ يساوي 9 ، فأوجد طول ضلعه. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

15) عيّن طول الضلع في المثلث $90° - 45° - 45°$ ، إذا كان طول وتره يساوي 11 . $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

16) كم طول وتر المثلث $90°-45°-45°$ ، إذا كان طول ضلعه يساوي 6 cm ؟ $6\sqrt{2} \approx 8.5$ cm

17) أوجد طول وتر المثلث $90°-45°-45°$ ، إذا كان طول ضلعه 8 cm . $8\sqrt{2} \approx 11.3$ cm

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 7–1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

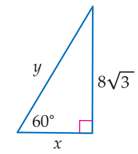
7) لا، إجابة ممكنة: أكبر قطر لقاعدة أسطوانة يمكن إدخالها في غلاف البريد هو 2.28 تقريبًا، وهو أصغر من قطر قاعدة الأسطوانة المطلوب إدخالها في غلاف البريد ($3\frac{1}{4}$ in).

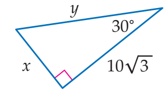
تنويع الواجبات المنزلية

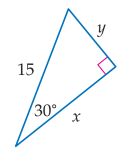
المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	8–27 ، 46 ، 47 ، 49–64
ضمن المتوسط	9–37 فردي ، 34–37 ، 39–43 فردي، 44-47 ، 49–64
فوق المتوسط	28–61 ، (اختياري: 62–64)

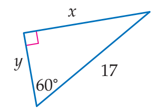
أوجد قيمة كل من x ، y في كلّ شكل مما يأتي :

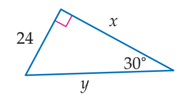
مثال 3
صفحة 36

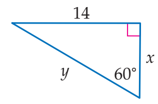
(18


(19


(20


(21


(22


(23


(18 $x = 8, y = 16$
(19 $x = 10, y = 20$
(20 $x = \frac{15\sqrt{3}}{2}, y = \frac{15}{2}$
(21 $x = \frac{17\sqrt{3}}{2}, y = \frac{17}{2}$
(22 $x = 24\sqrt{3}, y = 48$
(23 $x = \frac{14\sqrt{3}}{3}, y = \frac{28\sqrt{3}}{3}$

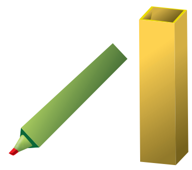
(24 إذا كان ارتفاع مثلث متطابق الأضلاع يساوي 18 ft، فأوجد طول ضلعه. $12\sqrt{3} \approx 20.8$ ft

(25 إذا كان ارتفاع مثلث متطابق الأضلاع يساوي 24 ft، فأوجد طول ضلعه. $16\sqrt{3} \approx 27.7$ ft

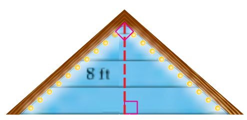
مثال 4
صفحة 37

(26 **تغليف:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، احسب بُعدي قاعدة العبوة الجديدة بحيث تتسع لقلم التظليل؟ وضّح إجابتك.

2.6 cm تقريبًا، 3 cm ؛ لأنه لهما الارتفاع نفسه.



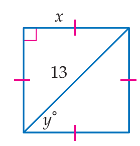
(27 **التخطيط للاحتفالات:** يرغب خليل في تزيين سقف منزله كما يظهر في الشكل المجاور احتفالًا بتخرّجه في الجامعة. إذا كانت واجهة السقف مثلثًا قائمًا متطابق الضلعين، وارتفاعه المرسوم إلى الوتر 8 ft، فما طول حبل الزينة اللازم لتغطية جانبي سقف المنزل؟ 22.6 ft تقريبًا

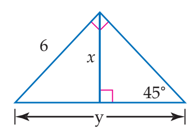


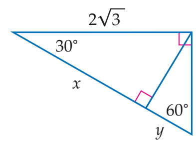
أوجد قيمة كل من x ، y في كلّ شكل مما يأتي:

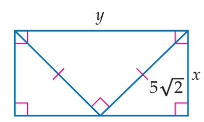
إرشادات للدراسة

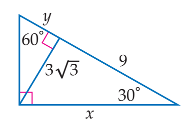
استعمال النسب
نسبة أطوال أضلاع المثلث 90°-45°-45° كنسبة 1 إلى 1 إلى $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{2}$: 1 :1 .

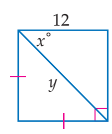
(28


(29


(30


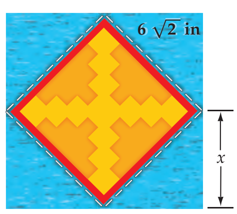
(31


(32


(33


(28 $x = \frac{13\sqrt{2}}{2}, y = 45°$
(29 $x = 3\sqrt{2}, y = 6\sqrt{2}$
(30 $x = 3, y = 1$
(31 $x = 5, y = 10$
(32 $x = 6\sqrt{3}, y = 3$
(33 $x = 45°, y = 12\sqrt{2}$

(34 **تنجيد:** يتكوّن نموذج تنجيد لحاف من مربع وأربعة مثلثات قائمة الزاوية، ومتطابقة الضلعين كما في الشكل المجاور، ما قيمة x؟ وما طول ضلع النموذج كاملًا؟ 12 in ، 6in

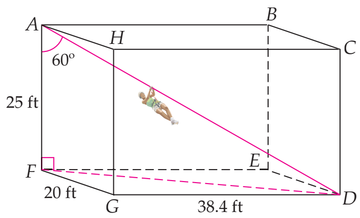


39 الدرس 3-1 المثلثات القائمة الخاصة

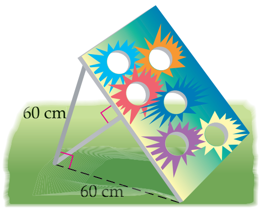
الربط مع واقع الحياة

يُعدَ التنقل باستعمال الحبال من المغامرات الشيقة، حيث يستعمل المشاركون مقعدًا وحزامًا خاصًا وبكرات أو خطّافات يتعلقون بوساطتها بمجموعة من الكوابل تنقلهم من موقع إلى موقع آخر في المناطق الجبلية. وتُستعمل معظم هذه الكوابل في الغابات، حيث يتم ربطها بالأشجار.

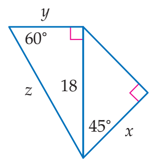
35) افترض أن حبلًا مربوطًا في ركن علوي لملعب مسقوف على شكل متوازي المستطيلات، والطرف الآخر للحبل مربوط بالركن السفلي المقابل، كما في الشكل المجاور. إذا كان قياس الزاوية بين الحبل و الدعامة $\overline{AF}$ يساوي $60°$، فأوجد طول الحبل AD. **50 ft**



36) **إعلانات:** ترتكز منصة رسم من طرفها العلوي على دعامة عمودية على سطح الأرض طولها 60 cm، ويبعُد طرفها السفلي 60 cm عن أسفل اللوحة، ودعامة أخرى عمودية على اللوحة كما في الشكل المجاور، ما طول هذه الدعامة؟ **42.4 cm تقريبًا**

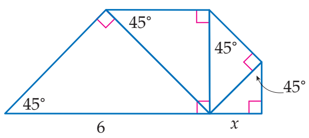


37) أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه.

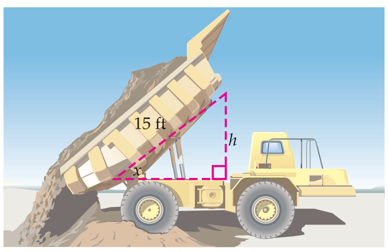


$x = 9\sqrt{2}$, $y = 6\sqrt{3}$, $z = 12\sqrt{3}$

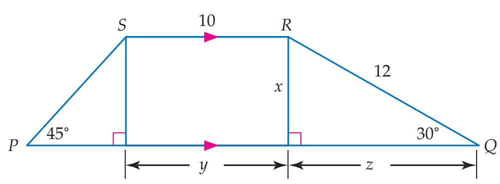
38) أوجد قيمة x في الشكل أدناه. $\frac{3}{2}$



39) **معدات:** طول صندوق شاحنة القلاب 15 ft، كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع الصندوق h عندما يكون قياس الزاوية x يساوي $30°$، $45°$، $60°$؟ **7.5 ft, 10.6 ft, 13.0 ft**



40) أوجد قيمة كل من x, y, z، ومحيط شبه المنحرف $PQRS$ في الشكل أدناه:.



$x = 6, y = 10; z = 6\sqrt{3},$
$38 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} \approx 56.9$

41) **هندسة إحداثية:** $\triangle XYZ$ مثلث $90°$ - $45°$ - $45°$ قائم الزاوية في Z. أوجد إحداثيي الرأس X في الربع الأول، إذا كانت $Y(-1, 2)$، $Z(6, 2)$. **(6, 9)**

42) **هندسة إحداثية:** $\triangle EFG$ مثلث $90°$-$60°$-$30°$ فيه $m\angle F = 90°$، إذا كانت $F(-3, -4), G(-3, 2)$، وكانت $\overline{FG}$ الضلع الأطول، فأوجد إحداثيي الرأس E في الربع الثالث. $(-3 - 2\sqrt{3}, -4)$

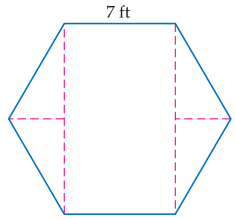
43) **هندسة إحداثية:** $\triangle JKL$ مثلث $90°$ - $45°$ - $45°$ قائم الزاوية في K. أوجد إحداثيي الرأس L في الربع الرابع، إذا كانت $J(-3, 5), K(-3, -2)$. **(4, −2)**

40 الفصل 1 المثلثات القائمة وحساب المثلثات

الربط مع واقع الحياة

عند التخطيط للاحتفالات التي تحتوي على بوفية للطعام، يخصص لكل مدعو مساحة قدرها $8\ ft^2$.

المصدر: San Antonio News



44) التخطيط للمناسبات: حجز طارق صالة في أحد المطاعم على شكل سداسي منتظم، طول ضلعه 7 ft، لتناول طعام الغداء مع 12 صديقًا بمناسبة تخرّجه في الجامعة. هل يتسع هذا المكان له ولأصدقائه؟ (إرشاد: استعمل نظرية مجموع الزوايا الداخلية للمضلع، وخصائص المثلثات القائمة الخاصة).

45) تمثيلات متعدّدة: في هذا التمرين، سوف تستقصي نسب المثلث القائم.

a) هندسي: ارسم ثلاثة مثلثات قائمة متشابهة في كل منها زاوية قياسها $50°$ ، سمِّ أحد المثلثات ABC فيه A الزاوية القائمة، وقياس الزاوية B يساوي $50°$ ، وسمِّ المثلث الثاني MNP ، فيه M زاوية قائمة، وقياس الزاوية N يساوي $50°$ ، وسمِّ المثلث الثالث XYZ ، حيث X الزاوية القائمة، وقياس الزاوية Y يساوي $50°$. انظر الهامش

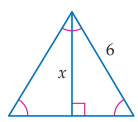
b) جدولة: انسخ الجدول أدناه وأكمله. الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.

المثلث	الطول				النسبة	
ABC	AC	2.4 cm	BC	3.1 cm	$\frac{AC}{BC}$	0.77
MNP	MP	1.7 cm	NP	2.2 cm	$\frac{MP}{NP}$	0.77
XYZ	XZ	3.0 cm	YZ	3.9 cm	$\frac{XZ}{YZ}$	0.77

c) تعبير لفظي: خمّن نسبة طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $50°$ إلى طول الوتر في أي مثلث قائم الزاوية. انظر الهامش

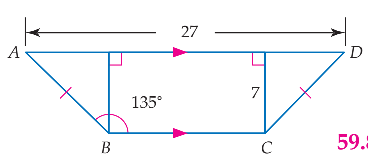
مسائل مهارات التفكير العليا

46) اكتشف الخطأ: أرادت فاطمة ورباب إيجاد قيمة x في المثلث المجاور. أيّهما حلّها صحيح؟ برّر إجابتك. انظر الهامش



فاطمة	رباب
$x = \frac{6\sqrt{2}}{2}$	$x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$
$x = 3\sqrt{2}$	$x = 3\sqrt{3}$

47) مسألة مفتوحة: ارسم مستطيلًا طول قطره يساوي مثلَي عرضه، ثم اكتب معادلة لإيجاد طوله. انظر الهامش



48) تحدٍّ: أوجد محيط الشكل الرباعي $ABCD$ المجاور. 59.8

49) تبرير: إذا كانت نسبة قياسات الزوايا في مثلث كنسبة 1:2:3 ، وكان طول الضلع الأقصر 8 ، فما محيط المثلث؟ 37.9

50) اكتب: إذا علمت طول الوتر في المثلث $90° - 60° - 30°$ ، فوضّح كيف يمكنك إيجاد طولَي ضلعيه بالصورة الجذرية.

44) نعم، إجابة ممكنة: مساحة الصالة $129\ ft^2$ تقريبًا، وهذه المساحة كافية لاستيعاب 16 مدعوًا. وبما أن عدد المدعوين ومعهم طارق هو 13 فردًا، فإن الصالة تسعهم جميعًا.

50) إجابة ممكنة: طول وتر المثلث $90°$-$60°$-$30°$ يساوي مثلَي طول الضلع الأقصر. لذا، يمكن إيجاد طول الضلع الأقصر بقسمة طول الوتر على 2. وطول الضلع الأطول هو $\sqrt{3}$ في طول الضلع الأقصر. لذا، يمكن إيجاد طول الضلع الأطول بقسمة طول الوتر على 2 وضرب الناتج في $\sqrt{3}$.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 45 الرسوم الهندسية، والجدول والوصف اللفظي؛ لاستقصاء نسب المثلث القائم.

تنبيه لحَلّ التمرين

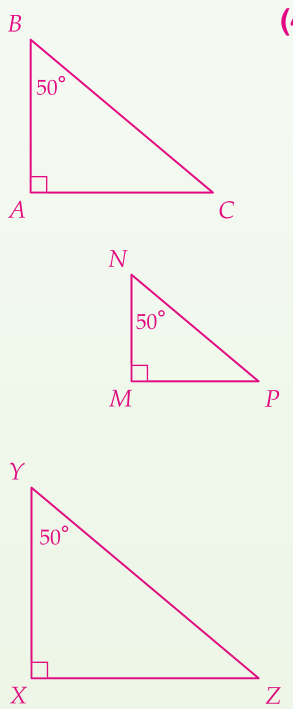
المنقلة و المسطرة يتطلّب التمرين 45 استعمال المنقلة، والمسطرة .

تنبيه !

اكتشف الخطأ كتبت فاطمة في التمرين 46 التعبير الذي يعطي طول الضلع بشكل غير صحيح. قد لا يفرق بعض الطلبة بين نسب أضلاع المثلث $90°$-$45°$-$45°$ و نسب أضلاع المثلث $90°$-$60°$-$30°$.

إجابات:

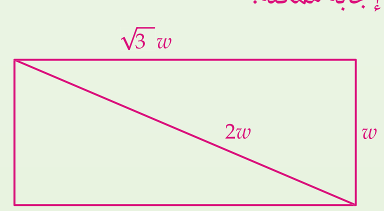
45a)



45c) تكون النسب دائمًا هي نفسها.

46) رباب، إجابة ممكنة: بما أن الزوايا الثلاث في المثلث الكبير متطابقة، فإنه مثلث متطابق الأضلاع، والمثلثان القائمان المتكوّنان عن الارتفاع من النوع $90° - 60° - 30°$، و طول الوتر يساوي 6 لذا، فإن طول الضلع الأقصر يساوي 3، وطول الضلع الأطول x يساوي $3\sqrt{3}$.

47) إجابة ممكنة:



افرض أن ℓ يمثل الطول .

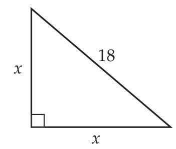
$\ell^2 + w^2 = (2w)^2,\ \ell^2 = 3w^2,\ \ \ell = w\sqrt{3}$.

تدريب على اختبار معياري

51) إذا كان طول الضلع الأطول في المثلث °90-°60-°30 يساوي $5\sqrt{3}$، فما طول الضلع الأقصر؟ C

A 3 B $5\sqrt{2}$ C 5 D 10

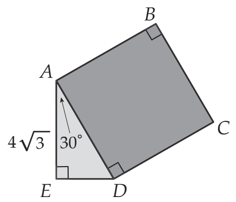
52) باستعمال المثلث القائم أدناه. أي مما يأتي يُمثّل قيمة x؟ G



F 9 G $9\sqrt{2}$ H $18\sqrt{2}$ J 36

53) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** $\triangle XYZ$ مثلث °90 - °45 - °45 قائم الزاوية في Y . أوجد إحداثيي الرأس X في الربع الثالث، إذا كانت $Y(-3, -3)$ ، $Z(-3, 7)$. **$(-13, -3)$**

54) المربع $ABCD$ متصل مع $\triangle ADE$ كما في الشكل المجاور. إذا كان $m\angle EAD = 30°$، $AE = 4\sqrt{3}$ ، فما مساحة سطح المربع $ABCD$؟ B



A $8\sqrt{3}$ B 64 C 72 D $64\sqrt{2}$

مراجعة تراكمية

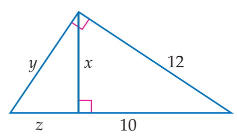
أوجد إحداثيي النقطة المجهولة، إذا كانت النقطة N منتصف $\overline{AB}$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

55) $N(-1, 3)$, $B(0, -2)$ **A (−2, 8)**

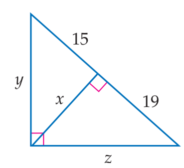
56) $A(5, -0.35)$, $N(-4, 4.7)$ **B (−13, 9.75)**

أوجد قيمة كل من x, y, z في كلّ ممّا يأتي: (الدرس 1-2) **59 - 57) انظر الهامش**

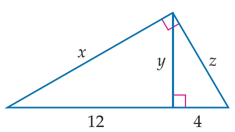
57)



58)



59)



في كل مما يأتي معطى الوسط الهندسي لعددين، أوجد العدد المجهول: (الدرس 1-2)

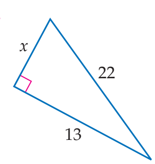
60) الوسط الهندسي للعددين a ، b يساوي $\sqrt{17}$ ، أوجد b إذا كانت $a = 7$. **2.43 تقريبًا**

61) الوسط الهندسي للعددين x ، y يساوي $\sqrt{12}$ ، أوجد x إذا كانت $y = \sqrt{3}$. **$4\sqrt{3} \approx 6.93$**

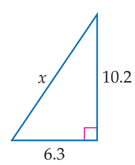
مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

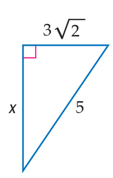
62) **17.7 تقريبًا**



63) **12.0 تقريبًا**



64) **$\sqrt{7}$**



4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا العلاقات بين أضلاع المثلث °90 – °45 – °45 ، والمثلث °90 – °60 – °30 وأن يسلمّوا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابات:

57) $x = 2\sqrt{11} \approx 6.6, y \approx 8.0, z = 4.4$

58) $x \approx 16.9, y \approx 22.6, z \approx 25.4$

59) $x = 8\sqrt{3}, y = 4\sqrt{3}, z = 8$

تنويع التعليم

ضمن فوق

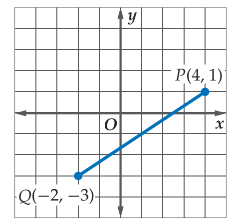
توسّع اطلب إلى الطلبة أن يرسموا المثلثين °90 – °45 – °45، °90 – °60 – °30 ، وأن يكتبوا طول كل ضلع عليهما، و أن يستعملوا رسومهم؛ لاختيار الزوايا الحادة ويجدوا نسبة طول الضلع المقابل إلى طول الضلع المجاور. موضحًا أن هذه النسبة تُسمى نسبة الظل. ناقش ما توصل إليه الطلبة.
يمكن أن تختلف الإجابات: الظل هو طول الضلع المقابل مقسومًا على طول الضلع المجاور.

الفصل 1 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-1 إلى 1-3

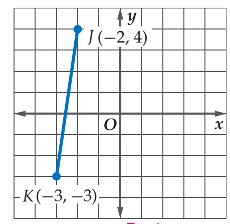
أوجد طول كل قطعة مستقيمة، وإحداثيي نقطة منتصفها في كل من الشكلين أدناه: (الدرس 1-1)

1)



$2\sqrt{13}, (1, -1)$

2)



$5\sqrt{2}, \left(\frac{-5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

أوجد طول كل قطعة مستقيمة، وإحداثيي نقطة منتصفها في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

3) $\overline{PQ}$ إذا علمت أن $P(26, 12)$ ، $Q(8, 42)$ 　 $(17, 27), \sqrt{1224} \approx 35.0$

4) $\overline{MN}$ إذا علمت أن $N(-18, -27)$ ، $M(6, -41)$ 　 $(-6, -34), \sqrt{772} \approx 27.8$

5) إذا كان إحداثيًّا موقع مدرسة في المستوى الإحداثي $(3, 1)$، وإحداثيًّا موقع بيت حمود $(-5, 7)$. (الدرس 1-1)

a) إذا كانت المدرسة تقع في منتصف المسافة بين بيت حمود وبيت سلمان، فما إحداثيا موقع بيت سلمان. $(11, -5)$

b) إذا كانت كل وحدة واحدة في المستوى الإحداثي تكافئ 50 m ، فأوجد المسافة بين بيت حمود والمدرسة . 500 m

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية: (الدرس 1-2)

6) 3 و 12 　 6

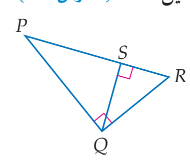
7) 7 و 63 　 21

8) 20 و 45 　 30

9) 10 و 50 　 $10\sqrt{5}$

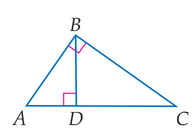
اكتب عبارة تشابه، تعيّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة، في كل من الشكلين أدناه: (الدرس 1-2)

10)



$\triangle PRQ \sim \triangle QRS \sim \triangle PQS$

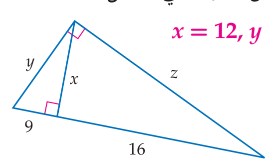
11)



$\triangle ABD \sim \triangle BDC \sim \triangle ACB$

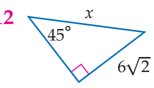
12) أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه. (الدرس 1-2)

$x = 12, y = 15, z = 20$



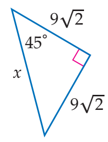
أوجد قيمة x في كل شكل أدناه. (الدرس 1-3)

13)



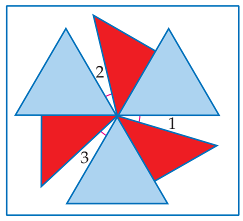
12

14)



18

15) **تصميم:** صمّمت أسماء دولاب هواء؛ لتضعه في حديقة منزلها. فيه مثلثات زرقاء متطابقة، وأضلاعها متطابقة، ارتفاع كل منها 10 cm، ومثلثات حمراء قائمة متطابقة، وكل منها متطابق الضلعين، كما أن وتر المثلث الأحمر يطابق ضلع المثلث الأزرق. (الدرس 1-3)

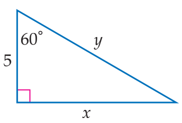


a) إذا كانت الزوايا 3 , 2 , 1 متطابقة، فأوجد قياس كل منها. $15°$

b) أوجد محيط دولاب الهواء. $80\sqrt{3}$ cm

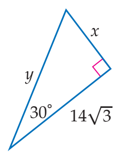
أوجد قيمة كل من x, y في كل شكل أدناه: (الدرس 1-3)

16)



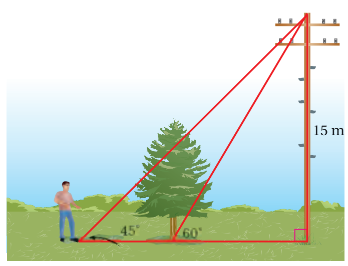
$x = 5\sqrt{3}, y = 10$

17)



$x = 14, y = 28$

18) **نزهة:** يسير رجل على أرض مستوية في خط مستقيم نحو شجرة. إذا كان قياس الزاوية من موقعه الحالي إلى قمة عمود الهاتف يساوي 45°، وقياس الزاوية من قاعدة الشجرة إلى قمة عمود الهاتف يساوي 60°، وكان طول عمود الهاتف 15 m كما في الشكل أدناه، فكم يكون بُعد الرجل عن الشجرة؟ (الدرس 1-3) 　 6.34 m



الفصل 1 اختبار منتصف الفصل

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل، للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، واطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

CRM اختبار منتصف الفصل

بناء الاختبارات

التقويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

مطوياتك — متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حلّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 1-1 إلى 1-3.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	اخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	اخطأ الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	احد المصادرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-1, 1-2, 1-3	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص(8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف

- استعمال تطبيق Cabri Jr ؛ لاستكشاف حساب المثلثات، ودراسة الأنماط في المثلثات القائمة.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

2 التدريس

العمل في مجموعات ثنائية

وزِّع الطلبة في مجموعات بحيث تضم كل مجموعة طالبين متفاوتي القدرات. واطلب إليهم تنفيذ النشاط.

أسأل:

- ماذا تتوقّع أن يحدث للنسبة $\frac{BC}{AC}$ عندما تتحرك B ؟

تدريب اطلب إلى الطلبة أن يحلوا التمارين 3–1.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 3–1 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة لمفاهيم النسب المثلثية باستعمال المثلثات القائمة الخاصة .

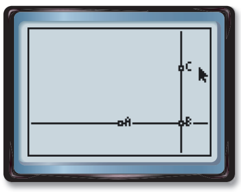
حساب المثلثات
Trigonometry

لقد درست أنماطًا في قياسات المثلثات القائمة الخاصة، ويُعدُّ حساب المثلثات دراسة للأنماط في المثلثات القائمة جميعها. يمكنك استعمال تطبيق كابري جونير (Cabri Junior)، أو اختصارًا Cabri™ Jr في الآلة الحاسبة البيانية؛ لاستقصاء هذه الأنماط.

نشاط استقصاء النسب المثلثية

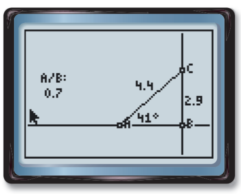
الخطوة 1 استعمل أداة **المستقيم** (Line) في قائمة F2 لرسم مستقيم أفقي، عيّن نقطتين على المستقيم وسمّهما A , B .

الخطوة 2 اضغط F3، واختر أداة **العمود** (Perpendicular) لرسم مستقيم عمودي على المستقيم الأول من النقطة B . عيّن نقطة على المستقيم العمودي وسمّها C .


الخطوتين 1، 2

الخطوة 3 استعمل أداة **القطعة المستقيمة** (Segment) في قائمة F2 لرسم $\overline{AC}$.

الخطوة 4 أوجد طولي $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ باستعمال أداة **المسافة** (Distance)، و**الطول** (Length) تحت مسمى **القياس** (Measure) في قائمة F5 ، واستعمل أداة **الزاوية** (Angle) لإيجاد قياس $\angle A$، وسجِّل القياسات على الشكل.


الخطوات 3 - 5

الخطوة 5 احسب النسبة $\frac{BC}{AC}$ باستعمال أداة **الحساب** (Calculate) في قائمة F5 ، سمِّ النسبة A/B ، واعرضها على الشاشة.

الخطوة 6 اضغط مفتاح CLEAR ، ثم استعمل مفاتيح الأسهم لتحريك المؤشر قريبًا من النقطة B، ثم اضغط بشكل مستمر على مفتاح ALPHA ، واسحب B ولاحظ النسبة.

حلّل النتائج

1) ناقش أثر سحب النقطة B على قيمة $\frac{BC}{AC}$ ، وعلى قياسات $\angle A$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. **(3-1) انظر الهامش**

2) استعمل أداة الحساب لإيجاد النسب $\frac{BC}{AB}$ ، $\frac{AB}{AC}$ ، ثم اسحب B ولاحظ النسب.

3) **خمّن:** تعتمد الدوال المثلثية الجيب وجيب التمام والظل على قياسات الزوايا، لاحظ $m\angle A$. اخرج من البرنامج Cabri Jr، واستعمل مفاتيح TAN , COS , SIN على الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قيمة كل من الجيب، وجيب التمام، والظل لزاوية قياسها $m\angle A$. قارن النتائج بالنسب التي وجدتها في النشاط، وخمّن تعريف الجيب وجيب التمام والظل.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى كل طالب أن يطوي قطعة من الورق قطريًّا ؛ لتكوين مثلث قائم. واطلب إليهم قياس طول الضلع المقابل للزاوية القائمة وأحد الضلعين. ما نسبة طول الوتر إلى طول الضلع؟ قارن ذلك بالنسبة A/B في النشاط؟

يجب أن تكون النسبة هي نفسها.

التوسع في المفهوم

أسأل:

- كيف يمكن استعمال ما تعلمته حول العلاقات بين الدوال المثلثية. الجيب،وجيب التمام والظل، والنسب بين أطوال الأضلاع في المثلث القائم؟ أجد القياسات المجهولة في المثلث القائم.

إجابات:

1) يتغير كل من AC، BC ولكن $m\angle A$ و $\frac{BC}{AC}$ لا يتغيران.

2) لا تتغير كل من $\frac{AB}{AC}$ و $\frac{BC}{AB}$ عندما تتحرك B.

3) إجابة ممكنة:

$$\tan A = \frac{BC}{AB}, \cos A = \frac{AB}{AC}, \sin A = \frac{BC}{AC}$$

1-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-4

استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد الطول المجهول في المثلثات القائمة.

الدرس 1-4

إيجاد النسب المثلثية باستعمال المثلثات القائمة.

استعمال النسب المثلثية؛ لإيجاد قياسات الزوايا في المثلثات القائمة.

ما بعد الدرس 1-4

استعمال الدوال مثل الدوال المثلثية؛ لنمذجة بيانات من واقع الحياة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة " لماذا "؟.

واسأل:

- ماذا تقيس نسبة الانحدار المئوية؟ انحدار المستوى المائل
- ما النسبة التي تحدد النسبة المئوية للانحدار؟ المسافة الرأسية مقسومة على المسافة الأفقية
- ما النسبة المئوية لانحدار ممر ينخفض 8.5 ft لكل مسافة أفقية قدرها 100 ft؟ 8.5%

1-4 حساب المثلثات

Trigonometry

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد الأطوال المجهولة في المثلثات القائمة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد النسب المثلثية باستعمال المثلثات القائمة.
- أستعمل النسب المثلثية؛ لإيجاد قياسات الزوايا في المثلثات القائمة.

المفردات الأساسية

حساب المثلثات
trigonometry

النسبة المثلثية
trigonometric ratio

الجيب
sine

جيب التمام
cosine

الظل
tangent

معكوس الجيب
inverse sine

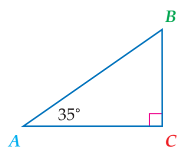
معكوس جيب التمام
inverse cosine

معكوس الظل
inverse tangent

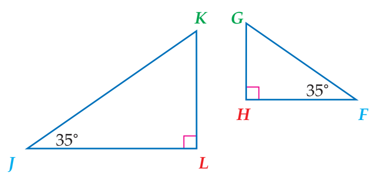
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يُعبّر عادة عن شدة انحدار الممرات الجبلية بنسبة الانحدار المئوية. إذا كانت نسبة انحدار أحد الممرات الجبلية 15.7%، فإن هذا يعني أن الممر يرتفع أو ينخفض 15.7 m لكل مسافة 100 m أفقية. يمكنك استعمال النسب المثلثية، لتُحدّد أن هذا الانحدار يعادل زاوية قياسها 9° تقريبًا.



النسب المثلثية جاءت كلمة trigonometry من كلمتين إغريقيتين trigon، وتعني مثلثًا، و metron تعني قياسًا، ويُعنى **حساب المثلثات** بدراسة قياسات عناصر المثلث، و **النسبة المثلثية** هي نسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم، وإحدى هذه النسب المثلثية في $\triangle ABC$ هي $\frac{AC}{AB}$.

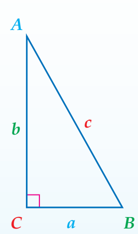


حسب مسلّمة التشابه AA (تساوي زاويتين)، إذا عُلم قياس زاوية حادة في مثلث قائم، فإن هذا المثلث يشابه كل مثلث قائم فيه زاوية حادة لها القياس نفسه. لذا، فإن النسب المثلثية تكون ثابتة لأي زاوية قياسها معلوم.

$\triangle ABC \sim \triangle FGH \sim \triangle JKL$. لذا، فإن، $\frac{AC}{AB} = \frac{FH}{FG} = \frac{JL}{JK}$

فيما يأتي توضيح للنسب المثلثية الثلاث الأساسية.

مفاهيم أساسية **النسب المثلثية** أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	بالرموز	التمثيل
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائمًا فيه $\angle A$ حادة، فإن **جيب** $\angle A$ (يكتب $\sin A$) هي نسبة طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$ إلى طول الوتر.	$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$ $\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$	
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائمًا فيه $\angle A$ حادة، فإن **جيب تمام** $\angle A$ (يكتب $\cos A$) هي نسبة طول الضلع المجاور لِـ $\angle A$ إلى طول الوتر.	$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$ $\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$	
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائمًا فيه $\angle A$ حادة، فإن **ظل** $\angle A$ (يكتب $\tan A$) هي نسبة طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$ إلى طول الضلع المجاور لها.	$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$ $\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{b}{a}$	

مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (47)	• تنويع التعليم ص (47)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الهندسة باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الهندسة باليدويات	• كراسة الطالب

النسب المثلثية

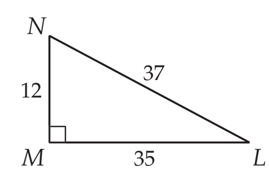
المثالان 1,2 يُبيّنان كيفية إيجاد النسب المثلثية باستعمال أطوال أضلاع المثلث القائم.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري مقربًا إلى أقرب جزء من مئة:



a) $\sin L$ $\frac{12}{37} \approx 0.32$

b) $\cos L$ $\frac{35}{37} \approx 0.95$

c) $\tan L$ $\frac{12}{35} \approx 0.34$

d) $\sin N$ $\frac{35}{37} \approx 0.95$

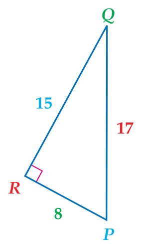
e) $\cos N$ $\frac{12}{37} \approx 0.32$

f) $\tan N$ $\frac{35}{12} \approx 2.92$

2 استعمل مثلثًا قائمًا خاصًّا؛ لإيجاد $\cos 60°$ على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري مقربًا إلى أقرب جزء من مئة. $\frac{1}{2}, 0.5$

مثال 1 إيجاد نسب الجيب وجيب التمام والظل

أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري إلى أقرب جزء من مئة :



a) $\sin P$

$\sin P = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \approx 0.88$

b) $\cos P$

$\cos P = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \approx 0.47$

c) $\tan P$

$\tan P = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{15}{8} \approx 1.88$

d) $\sin Q$

$\sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \approx 0.47$

e) $\cos Q$

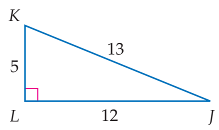
$\cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \approx 0.88$

f) $\tan Q$

$\tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15} \approx 0.53$

تأكد

1) أوجد $\sin J, \cos J, \tan J, \sin K, \cos K, \tan K$. واكتب كل نسبة على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.



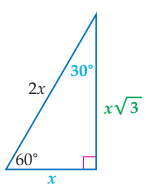
1) $\sin J = \frac{5}{13} \approx 0.38$
$\cos J = \frac{12}{13} \approx 0.92$
$\tan J = \frac{5}{12} \approx 0.42$
$\sin K = \frac{12}{13} \approx 0.92$
$\cos K = \frac{5}{13} \approx 0.38$
$\tan K = \frac{12}{5} \approx 2.4$

يمكن استعمال المثلثات القائمة الخاصة؛ لإيجاد الجيب وجيب التمام والظل للزوايا $30°$، $45°$، $60°$.

مثال 2 استعمال المثلثات القائمة الخاصة لإيجاد النسب المثلثية

استعمل مثلثًا قائمًا خاصًّا لإيجاد $\tan 30°$ على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

ارسم المثلث القائم $90° - 60° - 30°$ ، واكتب أطوال أضلاعه على افتراض أن طول الضلع الأقصر يساوي x .



بما أن طول الضلع المقابل للزاوية $30°$ هو x ، فإن طول الضلع المجاور للزاوية $30°$ يساوي $x\sqrt{3}$.

تعريف نسبة الظل	$\tan 30° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
بالتعويض	$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{3}}$
بالتبسيط وإنطاق المقام	$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
بالتبسيط وباستعمال الآلة الحاسبة	$= \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$

تأكد

2) استعمل مثلثًا قائمًا خاصًّا؛ لإيجاد $\cos 45°$ على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة. $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$

التعليم باستعمال التقنيات

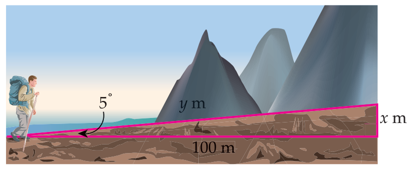
السبورة التفاعلية ارسم مثلثًا قائمًا على السبورة واكتب عليه أطوال الأضلاع. ولكتابة النسب المثلثية، اسحب أطوال الأضلاع عن أضلاع المثلث إلى النسب المثلثية.

إرشادات للمعلم الجديد

حساب المثلثات عُرفتْ النسب المثلثية فقط للقيم غير السالبة. ويمكن تعميم هذه التعريفات لتعطي الدوال المثلثية المعرفة على الأعداد الحقيقية جميعها.

مثال 3 من واقع الحياة — تقدير القياسات باستعمال حساب المثلثات

مشي: يرتفع جزء من ممر جبلي في مناطق وعرة بزاوية °5 إلى أعلى. إذا مشى شخص على هذا الجزء قاطعًا مسافة أفقية قدرها 100 m، فما مقدار التغيّر الرأسي لموقع الشخص؟ وما طول المسافة التي قطعها من الممر؟ قَرِّب النواتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.



الربط مع واقع الحياة

يتغير انحدار الممر الجبلي عدة مرات. ومتوسط الانحدار هو متوسط عدة انحدارات متتالية في الممر. والانحدار الأقصى هو أصغر جزء يتجاوز انحداره متوسط انحدار الممر. ويكون لهذه الممرات أحيانًا انحدارات قصوى أكثر ميلاً من متوسط انحدارها.

المصدر: Federal Highway Administration

افترض أن $m\angle A = 5°$، وأن التغيّر الرأسي بين موقعي الشخص يساوي x. وهذا يساوي طول الضلع المقابل لـ $\angle A$. المسافة الأفقية المقطوعة 100 m تُمثّل طول الضلع المجاور لـ $\angle A$، وبما أن المعلومات تتضمّن طول الضلع المقابل، وطول الضلع المجاور للزاوية المعلومة؛ لذا اكتب معادلة باستعمال نسبة الظل.

تعريف نسبة الظل	$\tan A = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
بالتعويض	$\tan 5° = \dfrac{x}{100}$
بضرب كل طرف في 100	$100 \cdot \tan 5° = x$

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة x.

100 [TAN] 5 [ENTER] 8.748866353

سيرتفع الشخص 8.75 m تقريبًا عن موقعه عند البداية.

تُمثِّل y المسافة التي قُطعت من الممر الجبلي، وتساوي طول الوتر؛ لذا يمكنك استعمال نسبة جيب التمام لإيجاد هذه المسافة.

تعريف نسبة جيب التمام	$\cos A = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
بالتعويض	$\cos 5° = \dfrac{100}{y}$
بضرب الطرفين في y	$y \cdot \cos 5° = 100$
بقسمة كل طرف على $\cos 5°$	$y = \dfrac{100}{\cos 5°}$

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة y.

100 [÷] [COS] 5 [ENTER] 100.3819838

لقد قطع الشخص مسافة تساوي 100.38 m تقريبًا من الممر الجبلي.

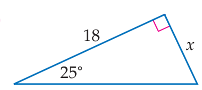
إرشادات للدراسة

الآلة الحاسبة البيانية تأكد من وضع الآلة الحاسبة على وضعية القياس بالدرجات degree، وليس القياس بالراديان rad.

✓ تأكد

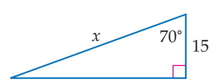
أوجد قيمة x إلى أقرب جزء من مئة في كل شكل أدناه:

3A)



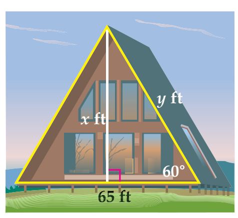
8.39

3B)



43.86

3C) هندسة معمارية: يُبيّن الشكل المجاور الواجهة الأمامية لمنزل على هيئة مثلث متطابق الضلعين. ما قيمة x التي تُمثّل ارتفاع رأس هذه الواجهة عن قاعدتها؟ و ما قيمة y التي تُمثّل طولها الجانبي؟ مقربًا النواتج إلى أقرب قدم، اشرح تبريرك.



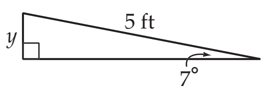
$x \approx 56$ ft؛ لأن $x = 32.5 \tan 60°$؛ وبما أن قياس كل زاوية من زوايا المثلث يساوي °60، فإنه متطابق الأضلاع، ولذا، فإن $y = 65$ ft.

النسب المثلثية

المثال 3 يُبيّن كيفية استعمال النسبة المثلثية لإيجاد الطول المجهول في المثلث القائم.

مثال إضافي

3 تمرين: ثبّت مدرب اللياقة جهاز المشي المائل على زاوية ميل مقدارها °7. إذا كان طول السطح الذي يمشي عليه المتدرب 5 ft كما في الشكل أدناه، فكم ترتفع نهاية سطح جهاز المشي عن سطح الأرض إلى أقرب بوصة؟



7 in تقريبًا.

التركيز في المحتوى الرياضي

المثلثات القائمة تطبق تعريفات الدوال المثلثية كنسب فقط على المثلثات القائمة. ويمكن استعمال قانوني الجيب وجيب التمام في الدرس 6-1؛ لحَلّ المسائل المشابهة عندما لا يكون المثلث قائم الزاوية.

استعمال معكوس النسب المثلثية وجدت في المثال 2 أن $\tan 30° \approx 0.58$. ينتج عن ذلك أنه إذا كان ظل الزاوية الحادة يساوي 0.58 تقريبًا، فإن قياسها يساوي °30 تقريبًا.

إذا علمتَ الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، يمكنك استعمال الآلة الحاسبة ؛ لإيجاد قياس الزاوية وهو معكوس النسبة المثلثية.

مفاهيم أساسية — معكوس النسب المثلثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، وكان جيب A يساوي x، فإن **معكوس جيب** x يساوي قياس $\angle A$.
بالرموز	إذا كان $\sin A = x$ ، فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$.
التعبير اللفظي	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، وكان جيب تمام A يساوي x، فإن **معكوس جيب تمام** x يساوي قياس $\angle A$.
بالرموز	إذا كان $\cos A = x$ ، فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$.
التعبير اللفظي	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، وكان ظل A يساوي x، فإن **معكوس ظل** x يساوي قياس $\angle A$.
بالرموز	إذا كان $\tan A = x$ ، فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$.

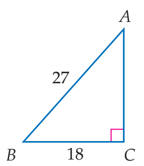
لذا، إذا كان $\tan 30° \approx 0.58$ ، فإن $\tan^{-1} 0.58 \approx 30°$.

قراءة الرياضيات

معكوس النسبة المثلثية يُقرأ التعبير $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x ، ويفسَّر على أنه الزاوية التي جيبها يساوي x . احرص على تمييز هذا الرمز عن الأس السالب. $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$ ، وهذا الرمز شبيه برمز معكوس الدالة $f^{-1}(x)$.

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا باستعمال معكوسات النسب المثلثية

استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس $\angle A$ مقرّبًا إلى أقرب عُشْر.



يظهر في الشكل المجاور طول الضلع المقابل للزاوية A وطول الوتر.
لذا اكتب معادلة تستعمل فيها نسبة الجيب.

$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\sin A = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$

إذا كان $\sin A = \frac{2}{3}$ ، فإن $\sin^{-1} \frac{2}{3} = m\angle A$. استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: 2nd [SIN] (2 ÷ 3) ENTER 41.8103149

لذا فإن $m\angle A \approx 41.8°$.

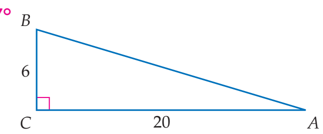
إرشادات للدراسة

الآلة الحاسبة البيانية تكون الوظيفة الثانية للمفاتيح SIN ، COS ، TAN عادة هي معكوس هذه النسب

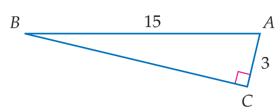
تأكد

استعمل الآلة الحاسبة ؛ لإيجاد قياس $\angle A$ مقرّبًا إلى أقرب عُشر في كل شكل أدناه :

4A) 16.7°



4B) 78.5°



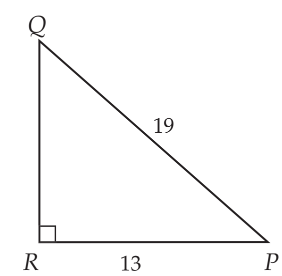
استعمال معكوس النسب المثلثية

المثالان 4, 5 يُبيّنان كيفية استعمال معكوس النسب المثلثية؛ لإيجاد القياسات المجهولة في المثلث القائم.

مثال إضافي

4 استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس $\angle P$ مقربًا إلى أقرب عُشر.

46.8°



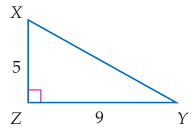
تنبيه !

التقريب عند إيجاد القياسات المجهولة في مثلث، يمكن ألاّ يكون مجموع قياسات زوايا المثلث °180 بسبب أخطاء في التقريب.

تُسمّى عملية إيجاد قياسات زوايا وأطوال أضلاع غير معلومة في مثلث قائم الزاوية حَلّ المثلث القائم.
لحل المثلث القائم يجب أن تعرف طولي ضلعين فيه، أو طول أحد الأضلاع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين.

مثال 5 حَلّ المثلث القائم

حُلّ المثلث القائم المجاور مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



الخطوة 1 أوجد $m\angle X$ باستعمال نسبة الظل.

$\tan X = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\tan X = \frac{9}{5}$
تعريف معكوس الظل	$\tan^{-1}\frac{9}{5} = m\angle X$
باستعمال الآلة الحاسبة	$60.9453959 \approx m\angle X$

لذا، فإن $m\angle X \approx 61°$.

الخطوة 2 أوجد $m\angle Y$ باستعمال النتيجة التي تنص على أن الزاويتين الحادتين في المثلث القائم متتامتان.

نتيجة	$m\angle X + m\angle Y = 90°$
$m\angle X \approx 61°$	$61° + m\angle Y \approx 90°$
بطرح $61°$ من كل طرف	$m\angle Y \approx 29°$

لذا فإن $m\angle Y \approx 29°$.

الخطوة 3 أوجد XY باستعمال نظرية فيثاغورس.

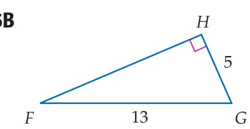
نظرية فيثاغورس	$(XZ)^2 + (ZY)^2 = (XY)^2$
بالتعويض	$5^2 + 9^2 = (XY)^2$
بالتبسيط	$106 = (XY)^2$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل من الطرفين	$\sqrt{106} = XY$
باستعمال الآلة الحاسبة	$10.3 \approx XY$

لذا، فإن $XY \approx 10.3$.

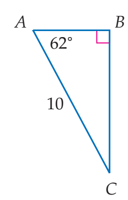
تأكد (5A–5C) انظر الهامش

حُلّ كلّ مثلث قائم أدناه مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :

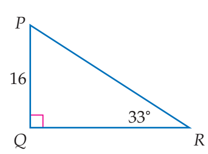
(5A



(5B



(5C



إرشادات للدراسة

طرق بديلة يمكن حل المثلثات القائمة باستعمال طرق مختلفة في مثال 5 ، يمكن إيجاد $m\angle Y$ باستعمال نسبة الظل. ويمكن استعمال $m\angle X$ مع نسبة الجيب، لإيجاد طول $\overline{XY}$.

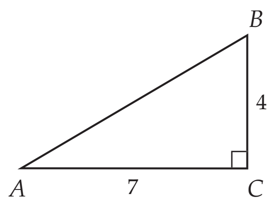
تنبيه !

التقريب عند استعمال قياسات محسوبة لإيجاد قياسات أخرى في مثلث قائم، كن حذرًا بأن لا تُقرّب القيم حتى الخطوة الأخيرة. لذا في المعادلة الآتية استعمل $\tan^{-1}\frac{9}{5}$ بدلًا من قيمتها التقريبية $61°$.

$$XY = \frac{9}{\sin X}$$
$$= \frac{9}{\sin\left(\tan^{-1}\frac{9}{5}\right)}$$
$$\approx 10.3$$

مثال إضافي

5 حُلّ المثلث القائم أدناه مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من مئة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



$m\angle A, \approx 30°, m\angle B \approx 60°,$
$AB \approx 8.06$

إجابات:

(5A $m\angle F \approx 23°, m\angle G \approx 67°, FH = 12.0$

(5B $m\angle C = 28°, AB \approx 4.7, BC \approx 8.8$

(5C $m\angle P = 57°, QR \approx 24.6, PR \approx 29.4$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أعط الطلبة طول أحد أضلاع مثلث قائم وقياس إحدى زاويتيه الحادتين. واسألهم: أي النسب المثلثية تستعمل لإيجاد الوتر؟ إذا أعطيتهم طول الضلع المجاور للزاوية المعطاة فاستعمل نسبة جيب التمام ، و إذا أعطيتهم طول الضلع المقابل للزاوية فاستعمل نسبة الجيب.

3 التدريب

التقويم التكويني

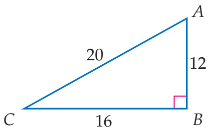
استعمل التمارين 15-1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

✓ تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 46

أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة في كل مما يأتي:



1) $\sin A$ $\quad \frac{16}{20} = 0.80$

2) $\tan C$ $\quad \frac{12}{16} = 0.75$

3) $\cos A$ $\quad \frac{12}{20} = 0.60$

4) $\tan A$ $\quad \frac{16}{12} \approx 1.33$

5) $\cos C$ $\quad \frac{16}{20} = 0.80$

6) $\sin C$ $\quad \frac{12}{20} = 0.60$

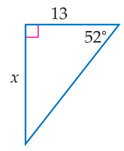
مثال 2 صفحة 46

7) استعمل مثلثًا قائمًا خاصًا للتعبير عن $\sin 60°$ على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة. $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$

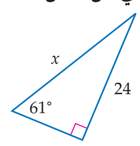
مثال 3 صفحة 47

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب جزء من مئة في كل شكل أدناه:

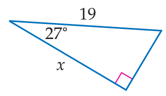
8) 16.64



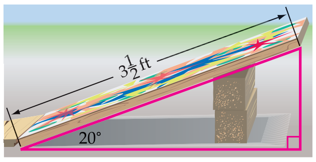
9) 27.44



10) 16.93



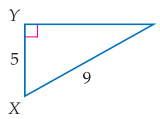
11) **رياضة:** صنع سالم منحدر تزحلق يُشكل مع سطح الأرض زاوية قياسها $20°$. إذا كان طول اللوح الذي استعمله يساوي $3\frac{1}{2}$ ft ، فما ارتفاع أعلى نقطة في المنحدر؟ **1.2 ft تقريبًا**



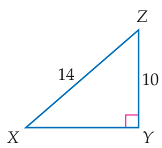
مثال 4 صفحة 48

استعمل الآلة الحاسبة ؛ لإيجاد قياس $\angle Z$ إلى أقرب درجة في كل شكل مما يأتي :

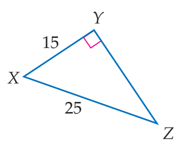
12) $33.7°$



13) $44.4°$

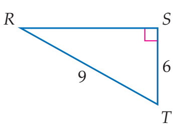


14) $36.9°$



مثال 5 صفحة 49

15) حُلّ المثلث القائم المجاور مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. $RS \approx 6.7, m\angle R \approx 42°, m\angle T \approx 48°$

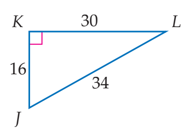


تدرب وحل المسائل

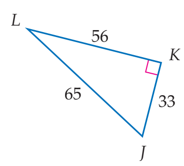
مثال 1 صفحة 46

أوجد $\sin J, \cos J, \tan J, \sin L, \cos L, \tan L$ ، وعبّر عن كل نسبة مثلثية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة. **16-21) انظر الهامش**

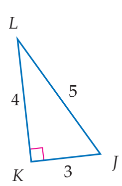
16)



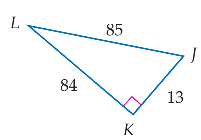
17)



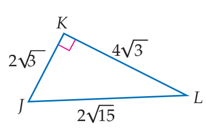
18)



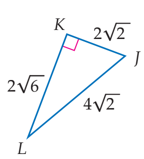
19)



20)



21)



إجابات:

16)

$\sin J = \frac{30}{34} \approx 0.88; \cos J = \frac{16}{34} \approx 0.47,$

$\tan J = \frac{30}{16} \approx 1.88, \sin L \approx \frac{16}{34} \approx 0.47,$

$\cos L = \frac{30}{34} \approx 0.88, \tan L = \frac{16}{30} \approx 0.53$

17)

$\sin J = \frac{56}{65} \approx 0.86, \cos J = \frac{33}{65} \approx 0.51,$

$\tan J = \frac{56}{33} \approx 1.70, \sin L = \frac{33}{65} = 0.51,$

$\cos L = \frac{56}{65} \approx 0.86, \tan L = \frac{33}{56} \approx 0.59$

18)

$\sin J = \frac{4}{5} \approx 0.80, \cos J = \frac{3}{5} \approx 0.60,$

$\tan J = \frac{4}{3} \approx 1.33, \sin L = \frac{3}{5} \approx 0.60,$

$\cos L = \frac{4}{5} \approx 0.80, \tan L = \frac{3}{4} \approx 0.75$

19)

$\sin J = \frac{84}{85} \approx 0.99, \cos J = \frac{13}{85} \approx 0.15,$

$\tan J = \frac{84}{13} \approx 6.46, \sin L = \frac{13}{85} \approx 0.15,$

$\cos L = \frac{84}{85} \approx 0.99, \tan L = \frac{13}{84} \approx 0.15$

20)

$\sin J = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.89, \cos J = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.45,$

$\tan J = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx 2, \sin L = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.45,$

$\cos L = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.89, \tan L = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \approx 0.50$

21)

$\sin J = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87, \cos J = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \approx 0.50,$

$\tan J = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3} \approx 1.73, \sin L = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \approx 0.50,$

$\cos L = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87, \tan L = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	16–46 , 63–86
ضمن المتوسط	17–59 فردي ، 46, 50, 56, 60–86
فوق المتوسط	47–80 ، (اختياري: 81–86)

مثال 2 صفحة 46

استعمل مثلثًا قائمًا خاصًا لتعبّر عن كل نسبة مثلثية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة في كلّ ممّا يأتي:

22) $\tan 60°$ $\sqrt{3} \approx 1.73$

23) $\cos 30°$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$

24) $\sin 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$

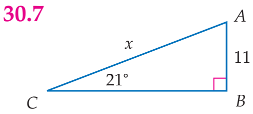
25) $\sin 30°$ $\frac{1}{2}$ أو 0.5

26) $\tan 45°$ 1

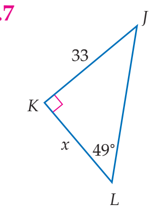
27) $\cos 60°$ $\frac{1}{2}$ أو 0.5

مثال 3 صفحة 47

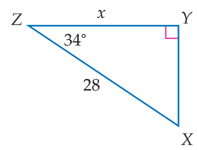
أوجد قيمة x مقرّبة إلى أقرب عُشر، في كل شكل أدناه:

28) 

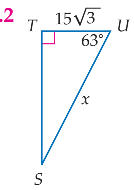
30.7

29) 

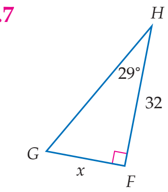
28.7

30) 

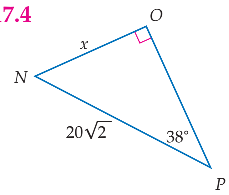
23.2

31) 

57.2

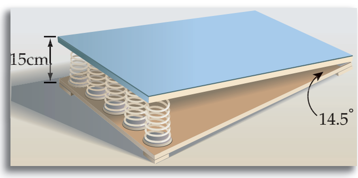
32) 

17.7

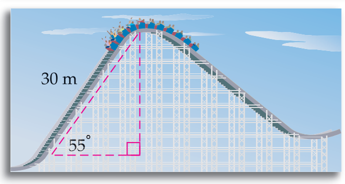
33) 

17.4

34) **جمباز:** يستعمل حمد في حصة التربية البدنية لوح قفز مرن يرتفع من أحد طرفيه على زنبركات ارتفاعها 15 cm، ويميل اللوح على القاعدة الأفقية بزاوية قياسها 14.5°، ما طول لوح القفز إلى أقرب سنتمتر؟ **60 cm تقريبًا**

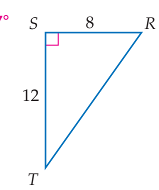


35) **أفعوانية:** قياس زاوية صعود التلة الأولى في سكة الأفعوانية في مدينة الألعاب 55°. إذا كان طول المسار الصاعد من البداية إلى أعلى نقطة 30 m، فما ارتفاع القاطرة عندما تصل إلى قمة التلة الأولى إلى أقرب عُشر؟ **24.6 m**

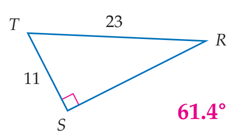


مثال 4 صفحة 48

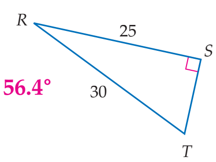
استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس $\angle T$ مقرّبًا إلى أقرب درجة في كل شكل مما يأتي:

36) 

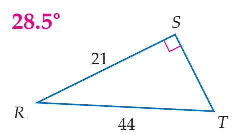
33.7°

37) 

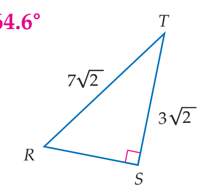
61.4°

38) 

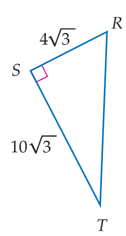
56.4°

39) 

28.5°

40) 

64.6°

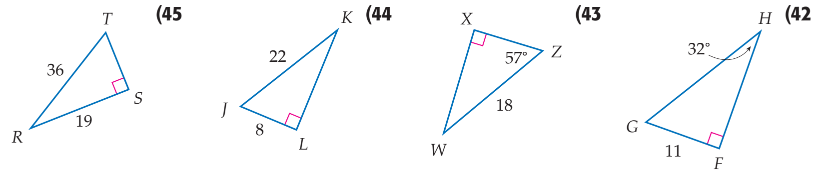
41) 

21.8°

الدرس 4-1 حساب المثلثات 51

مثال 5
صفحة 49

حُلّ كل مثلث قائم أدناه مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



الربط مع واقع الحياة

ينصح الأطباء ألاّ يزيد وزن حقيبة الظهر عن 20% من وزن جسم الطالب حتى لا تُحدث أضرارًا. وتساعد الحقائب ذات العجلات على الحد من الأضرار.

المصدر: International Chiropractic Pediatric Association

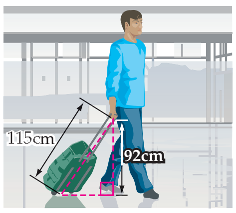
42) $HF \approx 17.6$, $GH \approx 20.8$, $m\angle G = 58°$

43) $WX \approx 15.1$, $XZ \approx 9.8$, $m\angle W = 33°$

44) $LK \approx 20.5$, $m\angle J \approx 69°$, $m\angle K \approx 21°$

45) $ST \approx 30.6$, $m\angle R \approx 58°$, $m\angle T \approx 32°$

46) **حقائب الظهر:** لدى مبارك حقيبة ظهر بعجلات، طولها مضافًا إليه طول مقبضها 115 cm. وعندما يسحب الحقيبة بيده تكون يده على ارتفاع 92 cm عن سطح الأرض كما في الشكل المجاور. ما قياس الزاوية التي تكوّنها الحقيبة مع سطح الأرض؟ قرّب الناتج إلى أقرب درجة. 53°



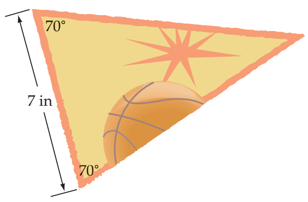
B **هندسة إحداثية:** أوجد قياس كل زاوية إلى أقرب عُشر الدرجة باستعمال قانون المسافة، ومعكوس إحدى النسب المثلثية.

47) $\angle K$ في المثلث القائم JKL، الذي رؤوسه $J(-2, -3), K(-7, -3), L(-2, 4)$ انظر الهامش

48) $\angle Y$ في المثلث القائم XYZ، الذي رؤوسه $X(4, 1), Y(-6, 3), Z(-2, 7)$ 56.3°

49) $\angle A$ في المثلث القائم ABC، الذي رؤوسه $A(3, 1), B(3, -3), C(8, -3)$ 51.3°

50) **أنشطة مدرسية:** صمم صالح راية لكل طالب في فريق كرة السلة وعددهم 18، ما طول الشريط البرتقالي الذي يحتاج إليه ليصنع منه إطارًا لكل هذه الرايات؟ 494 in تقريبًا

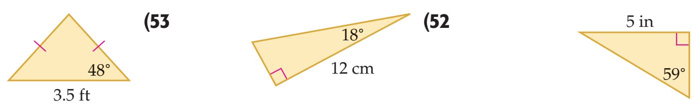


أوجد محيط ومساحة سطح كلّ مثلث أدناه، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

51) 13.83 in تقريبًا, 7.50 in² تقريبًا

52) 28.52 cm تقريبًا, 23.40 cm² تقريبًا

53) 8.73 ft تقريبًا, 3.40 ft² تقريبًا

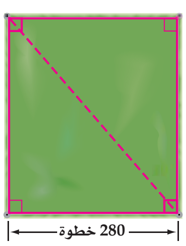


54) أوجد ظل أكبر زاوية حادة في المثلث الذي أطوال أضلاعه 3 cm, 4 cm, 5 cm. $\frac{4}{3}$

55) أوجد جيب تمام الزاوية الحادة الصغرى في مثلث أطوال أضلاعه 10 cm, 24 cm, 26 cm. $\frac{12}{13}$

56) **تقدير:** أراد زياد وطارق تقدير مساحة الملعب الذي سيتدرب فيه فريقهم لكرة القدم، ويعلمان أن الملعب مستطيل الشكل، فقاسا عرضه بالخطوات كما هو مبيّن في الشكل المجاور، واستعملا أعمدة السياج عند أركان الملعب ليقدّرا الزاوية بين الضلع الأطول للملعب وقطره فكانت 40° تقريبًا. إذا كان طول كل خطوة من خطواتهما 18 in تقريبًا، فما مساحة الملعب إلى أقرب بوصة مربعة؟

210225 ft² تقريبًا



إجابة:

47)
$$JL = \sqrt{[-2-(-2)]^2 + [4-(-3)]^2} = 7$$
$$KJ = \sqrt{[-2-(-7)]^2 + [-3-(-3)]^2} = 5$$
تعريف نسبة الظل $\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

بالتعويض $= \frac{7}{5}$

استعمال الآلة الحاسبة $m\angle k = \tan^{-1}\frac{7}{5} \approx 54.5°$

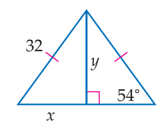
أوجد قيمة كل من x، y إلى أقرب عُشر في كل شكل مما يأتي :

57) $x \approx 18.8, y \approx 25.9$

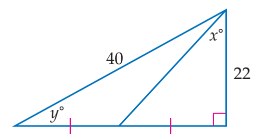
58) $x \approx 37.2^\circ, y \approx 33.4^\circ$

59) $x \approx 9.2, y \approx 11.7$

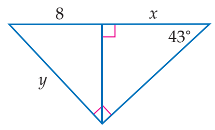
(57



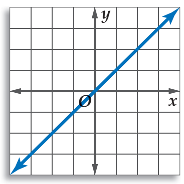
(58



(59



60) **هندسة إحداثية :** بيّن أن ميلي المستقيمين اللّذين يصنعان زاويتين قياساهما $45°$, $225°$ مع المحور x على الترتيب، متساويان. انظر ملحق الإجابات



61) **تمثيلات متعدّدة :** في هذا التمرين سوف تستقصي العلاقة الجبرية بين نسبتي الجيب وجيب التمام. a) انظر الهامش

a) **هندسي :** ارسم ثلاثة مثلثات قائمة غير متشابهة. سمِّ المثلثات ABC, MNP, XYZ، بحيث تكون زواياها القوائم عند الرؤوس B, N, Y على الترتيب. وأوجد طول كل ضلع في هذه المثلثات، واكتب الأطوال على الأضلاع.

b) **جدولة :** انقل الجدول أدناه، وأكمله. الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة

المثلث	النسب المثلثية				مجموع مربعات النسب	
ABC	$\cos A$	0.677	$\sin A$	0.742	$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 =$	1
	$\cos C$	0.742	$\sin C$	0.677	$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 =$	1
MNP	$\cos M$	0.406	$\sin M$	0.906	$(\cos M)^2 + (\sin M)^2 =$	1
	$\cos P$	0.906	$\sin P$	0.406	$(\cos P)^2 + (\sin P)^2 =$	1
XYZ	$\cos X$	0.667	$\sin X$	0.75	$(\cos X)^2 + (\sin X)^2 =$	1
	$\cos Z$	0.75	$\sin Z$	0.667	$(\cos Z)^2 + (\sin Z)^2 =$	1

إرشادات للدراسة

النسب المثلثية

نسبة الظل

$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

تكافئ:

$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \cdot \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

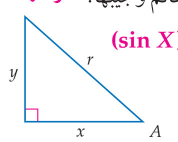
أو

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

c) **تعبير لفظي:** كوّن تخمينًا حول مجموع مربعَي جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم وجيبها. انظر الهامش

d) **جبري:** اكتب تخمينك للزاوية X على الصورة الجبرية. $(\sin X)^2 + (\cos X)^2 = 1$

e) **تحليل:** بيّن أن تخمينك صحيح للزاوية A في الشكل المجاور باستعمال الدوال المثلثية ونظرية فيثاغورس. انظر الهامش

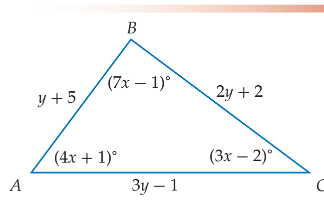


62) $m\angle A = 53°$, $m\angle B = 90°$, $m\angle C = 37°$, $AB \approx 12$, $BC \approx 16$, $AC \approx 20$

63) إجابة ممكنة: نعم، بما أنه يتم حساب قيم الجيب، وجيب التمام بقسمة طولَي ضلعي المثلث القائم على طول وتره، وبما أن الوتر هو أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية دائمًا، فستكون قيم الجيب، وجيب التمام أقل من 1 دائمًا؛ لأنك تقسم عددًا على عدد آخر أكبر منه.

مسائل مهارات التفكير العليا

62) **تحدٍّ:** حُلّ $\triangle ABC$ المجاور، مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح موجب، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



63) **تبرير:** حَلّ فيصل عدة مسائل على المثلثات القائمة في حساب المثلثات، فلاحظ أن قيم الجيب وجيب التمام للزوايا الحادة في المثلث القائم أقل من 1. هل قيم الجيب وجيب التمام لأي زاوية حادة أقل من 1 دائمًا؟ وضّح إجابتك.

64) **مسألة مفتوحة :** ارسم $\triangle ABC$ القائم الزاوية في B مستعملًا مسطرة لقياس كل ضلع، ثم أوجد النسبتين $\sin A$, $\cos C$. ما العلاقة بين هاتين النسبتين؟ انظر الهامش

65) **اكتب:** وضّح كيف يمكن استعمال النسب بين أطوال الأضلاع لإيجاد قياسات الزوايا الحادة في مثلث قائم الزاوية. انظر ملحق الإجابات

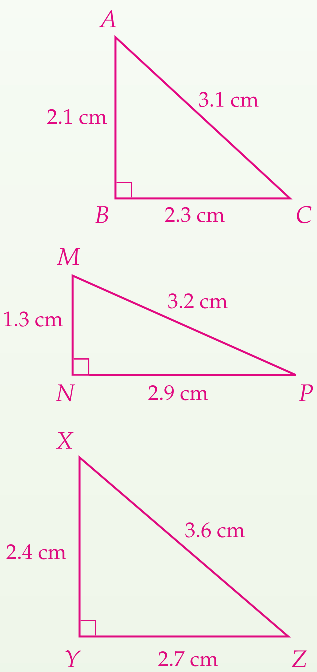
تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 61 الأشكال الهندسية، وجدول التخمين الجبري والبرهان الجبري لاستقصاء العلاقات الجبرية بين الجيب وجيب التمام.

تنبيه لسؤال

المسطرة يتطلب التمرين 64 استعمال المسطرة.

إجابات:

61a) إجابة ممكنة :



61c) إجابة ممكنة: مجموع مربع جيب تمام زاوية حادة ومربع جيبها في مثلث قائم الزاوية يساوي 1.

61e) إجابة ممكنة :

$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 \stackrel{?}{=} 1$ بالتخمين

$\left(\sin A = \frac{y}{r}, \cos A = \frac{x}{r}\right)$

$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$

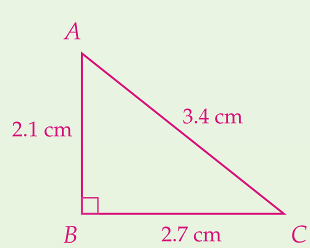
$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \stackrel{?}{=} 1$ بالتبسيط

$\frac{y^2 + x^2}{r^2} \stackrel{?}{=} 1$ بجمع كسرين متشابهين

$\frac{r^2}{r^2} \stackrel{?}{=} 1$ نظرية فيثاغورس

$1 = 1$ بالتبسيط.

64) إجابة ممكنة:

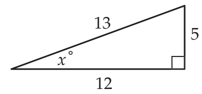


$\sin A = \frac{2.7}{3.4}, \cos C = \frac{2.7}{3.4}$,

النسبتان متساويتان .

تدريب على اختبار معياري

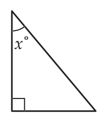
66) ما قيمة $\tan x$ في الشكل أدناه ؟ **C**



A $\tan x = \frac{13}{5}$ **C** $\tan x = \frac{5}{12}$

B $\tan x = \frac{12}{5}$ **D** $\tan x = \frac{5}{13}$

67) في الشكل المجاور إذا كان $\cos x = \frac{20}{29}$ ، فما قيمة كل من $\sin x$ ، $\tan x$ ؟ **D**



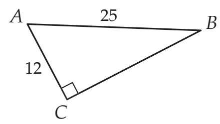
A $\sin x = \frac{29}{21}$, $\tan x = \frac{29}{21}$

B $\sin x = \frac{21}{29}$, $\tan x = \frac{20}{21}$

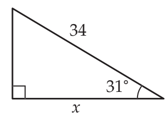
C $\sin x = \frac{29}{21}$, $\tan x = \frac{21}{20}$

D $\sin x = \frac{21}{29}$, $\tan x = \frac{21}{20}$

68) في الشكل أدناه إذا كان $AB = 25$, $AC = 12$ ، فما قياس $\angle B$ مقرّبًا إلى أقرب درجة؟ **29°**



69) ما قيمة x إلى أقرب جزء من عشرة في الشكل أدناه؟ **G**



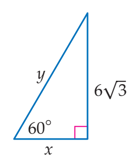
F 17.5 **G** 29.1

H 20.4 **J** 39.7

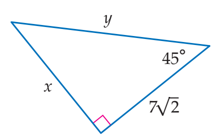
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل من x, y في كل شكل أدناه : (الدرس 1-3)

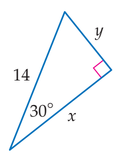
70) **$x = 6, y = 12$**



71) **$x = 7\sqrt{2}$, $y = 14$**



72) **$x = 7\sqrt{3}, y = 7$**



أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية : (الدرس 1-2)

73) $\sqrt{1372}$, $\sqrt{28}$ **14**

74) $1, \frac{3}{5}$ **0.77**

75) $\frac{8\sqrt{3}}{5}, \frac{6\sqrt{3}}{5}$ **2.4**

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية: (الدرس 1-1) **للتمارين 76-78 انظر الهامش**

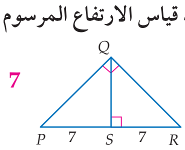
76) $A(-1, -8), B(3, 4)$

77) $C(0, 1), D(-2, 9)$

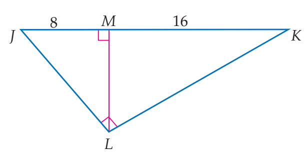
78) $L(-5, \frac{8}{5}), M(5, \frac{2}{5})$

أوجد قياس الارتفاع المرسوم على الوتر في كل مما يأتي : (الدرس 1-2)

79) **7**



80) **$8\sqrt{2} \approx 11.3$**



مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ التناسبات الآتية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر كلما لزم ذلك :

81) $2.14 = \frac{x}{12}$ **25.7**

82) $0.05x = 13$ **260**

83) $0.37 = \frac{32}{x}$ **86.5**

84) $0.74 = \frac{14}{x}$ **18.9**

85) $1.66 = \frac{x}{23}$ **38.2**

86) $0.21 = \frac{33}{x}$ **157.1**

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا فقرة تُبيّن كيف ساعدتهم خصائص المثلثات القائمة الخاصة على تعلم حساب المثلثات.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-1، 3-1 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 1.

إجابات:

76) $4\sqrt{10} \approx 12.65$

77) $2\sqrt{17} \approx 8.25$

78) $\frac{2}{5}\sqrt{634} \approx 10.07$

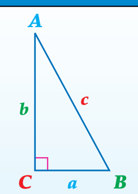
معمل الآلة الحاسبة البيانية: القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام
Secant, Cosecant, and Cotangent

الهدف
استقصاء النسب المثلثية الأخرى باستعمال التقنيات.

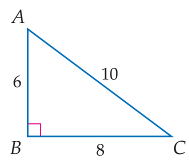
استعملت الدوال المثلثية الجيب، وجيب التمام، والظل؛ لإيجاد علاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثات القائمة. وفي هذا النشاط ستستعمل مقلوب كل من تلك الدوال؛ وهي قاطع التمام والقاطع وظل التمام؛ لتكتشف العلاقة بين الزوايا والأضلاع في المثلثات القائمة.

مفاهيم أساسية — مقلوبات النسب المثلثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	التمثيل
قاطع تمام $\angle A$ (يكتب $\csc A$) يساوي مقلوب $\sin A$	$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{c}{a}$	
قاطع $\angle A$ (يكتب $\sec A$) يساوي مقلوب $\cos A$	$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$	
ظل تمام $\angle A$ (يكتب $\cot A$) يساوي مقلوب $\tan A$	$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a}$	

نشاط: إيجاد قيم النسب المثلثية



الخطوة 1 ارسم مثلثًا قائم الزاوية، واكتب طول كل ضلع عليه كما في الشكل المجاور.

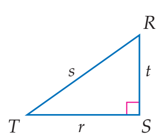
الخطوة 2 استعمل آلتك الحاسبة البيانية؛ لإيجاد قيم $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$.

الخطوة 3 بعد ذلك، أوجد قيمة $\csc A$، بإيجاد ناتج قسمة 1 على A SIN.
كرِّر الخطوة 3؛ لإيجاد $\sec A$, $\cot A$.

الخطوة 4 انقل الجدول أدناه، وسجِّل نتائجك، ثمّ أوجد قيمة كل دالة مثلثية للزاويتين B, C.

الزاوية	sin	cos	tan	csc	sec	cot
A						
B						
C						

تمارين:



1) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية $45°$ في المثلث $45°$-$45°$-$90°$ إذا كان طول كل من ضلعيه $4\,cm$. **للتمارين 3-1 انظر الهامش**

2) إذا كانت $\angle G$ قائمة في $\triangle FGH$، وكان $\tan F = \frac{5}{12}$، فأوجد $\sin F$, $\cot F$.

3) إذا كان $r = 12$, $m\angle R = 36°$، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية T في $\triangle RST$ مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة.

1 التركيز

الهدف
استقصاء النسب المثلثية الأخرى باستعمال التقنيات.

المواد اللازمة
- الآلة الحاسبة البيانية.
- مسطرة.

إرشادات التدريس
اطلب إلى الطلبة تنفيذ النشاط باستعمال المثلث $30°-60°-90°$، وإيجاد جميع قيم النسب المثلثية جبريًّا بدلًا من استعمال الآلة الحاسبة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
اطلب إلى الطلبة أن يعملوا في مجموعات ثلاثية متفاوتة القدرات و أن يتناوب الطلبة في إيجاد كل دالة مثلثية في الخطوتين 2، 3.

وضّح للطلبة تكافؤ التعريفين الجديدين بالرموز لكل دالة باستعمال الكسور المركبة.

تدريب اطلب إلى الطلبة حَلّ التمرينين 1، 2.

3 التقويم

التقويم التكويني
استعمل التمرين 3؛ لتقويم مدى فهم الطلبة للمفاهيم القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام.

من المحسوس إلى المجرد
أعطِ الطلبة جدولًا مثّل الجدول المُبيّن في الخطوة 4 كتبت فيه نصف القيم، واطلب إليهم أن يستعملوا المقلوب؛ لإيجاد القيم المجهولة.

التوسّع في المفهوم
اطلب إلى الطلبة أن يجدوا الشروط التي تجعل الجيب، وجيب التمام، و الظل مساوية لمقلوبها.

إجابات:

1) $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\tan 45° = 1$,
$\csc 45° = \sqrt{2}$,
$\sec 45° = \sqrt{2}$,
$\cot 45° = 1$

2) $\sin F = \frac{5}{13} \approx 0.38$
$\cot F = \frac{12}{5} = 2.4$

3) $\sin T \approx 0.81$
$\cos T \approx 0.59$
$\tan T \approx 1.38$
$\csc T \approx 1.24$
$\sec T \approx 1.70$
$\cot T \approx 0.73$

1-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-5

قياس المسافات بطريقة غير مباشر باستعمال المثلثات المتشابهة.

الدرس 1-5

حَلّ مسائل تتضمن زوايا الارتفاع والانخفاض
استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض؛ لإيجاد المسافة بين جسمين

ما بعد الدرس 1-5

استعمال دوال مثل الدوال المثلثية؛ لنمذجة بيانات من واقع الحياة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة " لماذا ؟ ".

أسأل

- ما الشعاعان اللذان يكونان زاوية الارتفاع؟ أحدهما من الكرة إلى قاعدة العارضة العلوية للمرمى، والآخر أفقي من الكرة إلى قاعدة المرمى الأفقية.
- ما القيم المعقولة التي تتوقّع أن تأخذها زاوية الارتفاع؟ إجابة ممكنة: 30° إلى 60°
- هل تكون زاوية الارتفاع أكبر إذا كانت الكرة أقرب إلى قائم المرمى أم أبعد عنه؟ إذا كانت الكرة أقرب.

1-5 زوايا الارتفاع والانخفاض
Angles of Elevation and Depression

فيما سبق

درست قياس المسافات بطريقة غير مباشرة مستعملاً المثلثات المتشابهة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل مسائل تتضمّن زوايا الارتفاع والانخفاض.
- أستعمل زوايا الارتفاع والانخفاض لإيجاد المسافة بين جسمين.

المفردات الأساسية

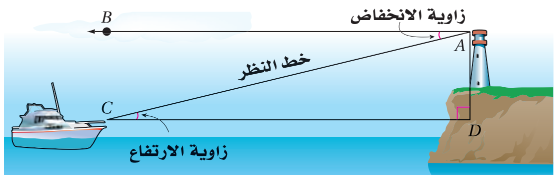
زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند تنفيذ الركلات الحرة المباشرة في مباريات كرة القدم، يركل اللاعبون الكرة بقوة، وبزاوية ارتفاع مناسبة، بحيث تمر أسفل العارضة (تدخل المرمى)، وتتغيّر هذه الزاوية بناءً على بُعد المكان الذي تُضرب منه الكرة عن المرمى.

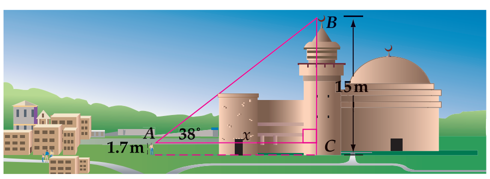
زوايا الارتفاع والانخفاض **زاوية الارتفاع** هي الزاوية المتكوّنة من الخط الأفقي وخط النظر من الراصد إلى الجسم المرصود فوق الخط الأفقي. **وزاوية الانخفاض** هي الزاوية المتكوّنة من الخط الأفقي وخط النظر من الراصد إلى الجسم المرصود تحت الخط الأفقي.



بما أن المستقيمات الأفقية متوازية. لذا فإن زاويتي الارتفاع والانخفاض في الصورة متطابقتان حسب نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين.

مثال 1 زاوية الارتفاع

رصد عمر قمة مئذنة مسجد ارتفاعها 15 m ، فكانت زاوية ارتفاع قمة المأذنة 38°. إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.7 m ، فعلى أي بُعد عن المأذنة كان يقف عمر؟ قرّب الناتج إلى أقرب متر.



بما أن ارتفاع مستوى عيني عمر عن سطح الأرض 1.7 m، فإن $BC = 15 - 1.7 = 13.3$ m . افترض أن x تُمثّل المسافة AC بين عمر والمأذنة.

$\tan A = \frac{BC}{AC}$ — $\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan 38° = \frac{13.3}{x}$ — $m\angle A = 38°, BC = 13.3, AC = x$

$x = \frac{13.3}{\tan 38°}$ — الحل بالنسبة للمتغير x

$x \approx 17.02$ — باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، بُعد عمر عن المأذنة يساوي 17 m تقريبًا.

مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (56)	• تنويع التعليم ص (55,56)	• تنويع التعليم ص (55,56)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

✓ تأكد

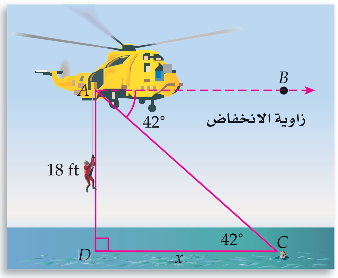
1) **كرة القدم:** إذا كان ارتفاع مرمى كرة القدم 8 ft، وحاول أحد اللاعبين تسديد الكرة نحو المرمى من مسافة 25 yd عن قاعدة المرمى، فما أكبر زاوية ارتفاع يمكن للاعب أن يضرب الكرة كي يسجّل هدفًا، إذا لم يعترض الكرة في حركتها أي عائق؟ مقرّبًا الناتج إلى أقرب درجة. $6°$

مثال 2 زاوية الانخفاض

طوارئ: في أثناء عملية إنقاذ المصابين من موقع حادث تصادم قاربين في البحر، شاهد فريق البحث والإنقاذ من على طائرتهم المروحيّة رجلاً يستغيث. إذا كانت زاوية انخفاض هذا الرجل $42°$، وكان ارتفاع المروحية 18 ft فوق سطح البحر، فما المسافة الأفقية بين المنقذين والرجل إلى أقرب قدم؟

تنبيه!
زوايا الارتفاع والانخفاض لتتجنب خطأ تعيين زوايا الارتفاع والانخفاض تذكر أنها تتكوّن دائمًا مع الخط الأفقي، وليس مع الخط الرأسي.

ارسم شكلاً يُمثّل هذا الوضع.



ملاحظة: ليس مرسومًا وفق مقياس رسم

بما أن $\overrightarrow{AB}$, $\overline{DC}$ متوازيان، فإن $m\angle BAC = m\angle ACD$ حسب نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين.

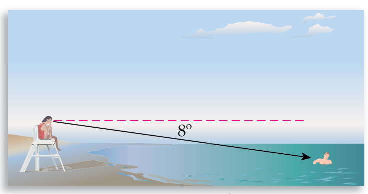
افترض أن x تُمثّل المسافة الأفقية DC بين المنقذين والرجل.

$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\tan C = \frac{AD}{DC}$
$m\angle C = 42°, AD = 18, DC = x$	$\tan 42° = \frac{18}{x}$
بضرب كل طرف في x	$x \tan 42° = 18$
بقسمة كل طرف على $\tan 42°$	$x = \frac{18}{\tan 42°}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 20$

إذن المسافة الأفقية بين المنقذين والرجل تساوي 20 ft تقريبًا.

✓ تأكد

2) **إنقاذ:** يراقب منقذ السّباحين الشاطئ من موقع يرتفع 6 ft فوق سطح الأرض. شاهد سبّاحًا بزاوية انخفاض قياسها $8°$، كم يبعد السبّاح عن قاعدة موقع المراقبة إلى أقرب قدم؟ **43 ft**



ملاحظة: ليس مرسومًا وفق مقياس رسم

زاويتا الارتفاع أو الانخفاض يمكن استعمال زاويتي الارتفاع أو الانخفاض لجسمين مختلفين لتقدير البُعد بينهما. وبالمثل يمكن استعمال الزاويتين من مكاني رصد مختلفين للجسم نفسه لتقدير ارتفاعه.

زوايا الارتفاع و الانخفاض

المثالان 1,2 يُبيِّنان كيفية إيجاد زوايا الارتفاع و الانخفاض في مواقف من واقع الحياة.

✓ التقويم التكويني

استعمل تدريبات" تأكد "بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلبة للمفاهيم.

التعليم باستعمال التقنيات

جهاز العرض الحاسوبي استعمل جهاز العرض الحاسوبي؛ لإيجاد زاوية الانخفاض. قِسِ المسافة من السقف إلى أسفل الشاشة، والمسافة الأفقية من جهاز العرض إلى الشاشة، ثم اعرض على الطلبة كيفية استعمال حساب المثلثات؛ لإيجاد زاوية الانخفاض.

مثالان إضافيان

1 **سيرك:** يجلس أحد المشاهدين في السيرك على الأرض و يتابع الألعاب على الحبال. بينما يقف لاعب أكروبات طوله 5 ft و 6 in على منصة ترتفع 25 ft عن سطح الأرض. كم يبعُد المشاهد عن قاعدة المنصّة إلى أقرب قدم، إذا كان قياس زاوية الارتفاع من عين المشاهد إلى قمة رأس اللاعب $27°$.
60 ft تقريبًا

2 **مسافة:** تقف سارة على قمة صخرة على شاطئ البحر وتنظر إلى حيوان الفقمة في مياه البحر. إذا كان ارتفاع الصخرة فوق البحر 40 ft، وزاوية الانخفاض $52°$، فأوجد المسافة الأفقية بين حيوان الفقمة، وقاعدة الصخرة إلى أقرب قدم؟
31 ft

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع يُستعمل سلم طوله 14 ft؛ لطلاء جدار ارتفاعه 13 ft. ما قياس زاوية الارتفاع التي يصنعها السلم حتى يصل إلى أعلى الجدار إلى أقرب منزلة عشرية؟
قياس زاوية الارتفاع حتى يصل السلم إلى أعلى الجدار $68.2°$ تقريبًا.

زاويتا ارتفاع أو انخفاض

المثال 3 يُبيّن كيفية استعمال زاويتي الارتفاع؛ لإيجاد البعد بين جسمين.

مثال إضافي

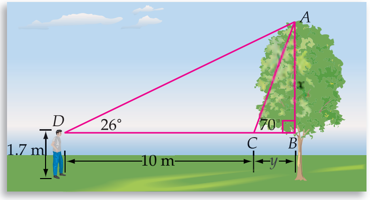
3 **مسافة :** يقف ياسر على ظهر سفينة طوافّة ويراقب دُلفينين يتبعان بعضهما مبتعدين عن السفينة في خط مستقيم. إذا كان ياسر يقف على ارتفاع 154 m فوق سطح البحر، وزاويتا الانخفاض إلى الدُلفينين °35، °36 على الترتيب ، فأوجد المسافة بين الدُلفينين إلى أقرب متر. 8 m تقريبًا.

التركيز في المحتوى الرياضي

معالجة ذكّر الطلبة أن يراجعوا معلوماتهم السابقة عن العلاقات بين الزوايا الناشئة بين مستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع.

مثال 3 استعمال زاويتي الارتفاع أو الانخفاض

أشجار: قاس عبد الله زاوية ارتفاع شجرة فكانت °70 ، ثم تحرّك إلى الخلف مسافة 10 m ، وقاس زاوية ارتفاعها فكانت °26 . إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.7 m، فما ارتفاع الشجرة إلى أقرب متر؟



افهم $\triangle ABC, \triangle ABD$ مثلثان قائمان. ارتفاع الشجرة يساوي ارتفاع مستوى عيني عبدالله عن سطح الأرض مضافًا إليه AB .

خطّط بما أن بُعد عبد الله عن الشجرة غير مُعطى. اكتب نظامًا من المعادلات باستعمال كل من المثلثين. افترض أن $AB = x, CB = y$ وحُله؛ لذا فإن $DB = y + 10$ ، وارتفاع الشجرة يساوي $x + 1.7$.

حُل في $\triangle ABC$.

$\tan 70° = \frac{x}{y}$ $\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$, $m\angle ACB = 70°$

$y \tan 70° = x$ بضرب كل طرف في y

في $\triangle ABD$

$\tan 26° = \frac{x}{y + 10}$ $\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$, $m\angle D = 26°$

$(y + 10) \tan 26° = x$ بضرب كل طرف في $(y + 10)$

عوِّض عن قيمة x الناتجة من $\triangle ABD$ في المعادلة الناتجة من $\triangle ABC$ ، ثم حلّها لإيجاد y .

$$y \tan 70° = x$$
$$y \tan 70° = (y + 10) \tan 26°$$
$$y \tan 70° = y \tan 26° + 10 \tan 26°$$
$$y \tan 70° - y \tan 26° = 10 \tan 26°$$
$$y(\tan 70° - \tan 26°) = 10 \tan 26°$$
$$y = \frac{10 \tan 26°}{\tan 70° - \tan 26°}$$

استعمل الآلة الحاسبة لتجد أن $y \approx 2.16$. وباستعمال المعادلة من $\triangle ABC$ ، نجد أن $x = 2.16 \tan 70° \approx 5.9$

ارتفاع الشجرة يساوي $5.9 + 1.7 \approx 8$ m

تحقق عوِّض عن قيمة y في المعادلة الناتجة من $\triangle ABD$.

$x = (2.16 + 10) \tan 26° \approx 5.9$ ، وهي القيمة نفسها التي وُجدت باستعمال المعادلة من $\triangle ABC$. ✓

إرشادات للدراسة

القياس غير المباشر عند استعمال زوايا الانخفاض لحساب المسافة بين جسمين مختلفين، من المهم أن يقع الجسمان في المستوى الأفقي نفسه. بمعنى آخر ألاّ يكون أحد الجسمين أعلى أو أخفض من الآخر.

تأكد

3) **بنايات شاهقة :** رُصد مبنيان من قمة برج ارتفاعه 200 m ، فكانت زاوية انخفاض المبنى A تساوي°35 ، بينما كانت زاوية انخفاض المبنى B تساوي °36 . إذا كان المبنيان في جهة واحدة من البرج، فما البُعد بينهما إلى أقرب متر؟ 10 m

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون يمكن لمجموعات من الطلبة إيجاد زوايا الارتفاع و الانخفاض لأجسام مختلفة في غرفة الصف باستعمال المسطرة المترية والآلة الحاسبة. كذلك يمكن أن تقيس المجموعة ارتفاع عين الناظر عن سطح الأرض، وارتفاع قمة ساعة حائط عن سطح الأرض لشخص يقف على بعد 5 ft من الحائط. وتحسب المجموعة زاوية الارتفاع من خط النظر للشخص إلى قمة الجسم. كرّر العملية لأجسام موضوعة على سطح الأرض مع إجراء تغييرات مثل وقوف الشخص فوق منصّة، أو وضع جسمين على سطح الأرض تفصلهما مسافة معينة.

3 التدريب

التقويم التكويني

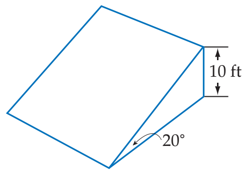
استعمل التمارين 3-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 56

1) **دراجات هوائية:** يرغب عبد الرحمن في بناء سطح مائل للقفز بدراجته الهوائية كما هو مبيّن في الشكل المجاور. أوجد طول قاعدة السطح المائل مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. **27.5 ft**

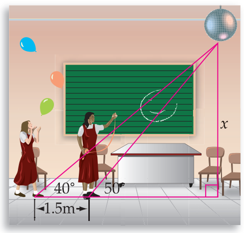


مثال 2 صفحة 57

2) **كرة قدم:** يجلس أحد المشاهدين في مدرّج إستاد رياضي على بُعد أفقي قدره 60 m عن مرمى كرة القدم. إذا كانت زاوية انخفاض المرمى °41 ، فما ارتفاع هذا المشاهد عن سطح أرض الملعب إلى أقرب متر؟ **52 m**

مثال 3 صفحة 58

3) **تزيين:** تقوم كوثر وحنان بتزيين قاعة مدرستهما؛ لإقامة احتفال المدرسة السنوي. تقف حنان على بُعد 1.5 m أمام كوثر، إذا كان قياس زاوية ارتفاع بالون معلّق في السقف من عند كوثر يساوي °40، وقياس ارتفاعه من عند حنان يساوي °50 ، فما ارتفاع البالون مقرِّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية. **4.3 m**

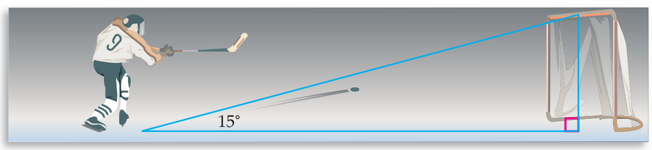


تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 56

لا؛ لأن 5 < 5.4 أو لأن °14 < °15

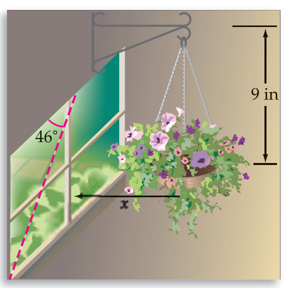
4) **هوكي:** يضرب لاعب هوكي كرةً نحو المرمى من نقطة على بُعد 20 ft، إذا كان ارتفاع المرمى 5 ft ، وقياس زاوية ارتفاع مسار الكرة نحو مركز المرمى يساوي °15، فهل يُسجّل اللاعب هدفًا؟ برِّر إجابتك.



5) **جبال:** يقف محمد على بعد 155 m عن نقطة افتراضية على سطح الأرض، تقع أسفل قمة جبل ارتفاعها 350 m عن سطح الأرض. أوجد زاوية ارتفاع قمة الجبل عن محمد إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض 1.5 m . **انظر الهامش**

مثال 2 صفحة 57

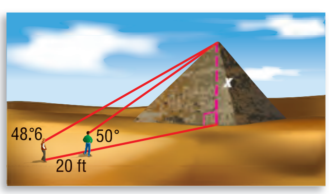
6) **نباتات:** تعلّق هند سلة نبات زينة عند نافذة غرفتها. إذا سقطت أشعة الشمس عليها بزاوية انخفاض °46 ، وكان طول سلسلة التعليق 9 in. فكم يبعد منتصف قاعدة السلة عن النافذة؟ قرِّب الناتج إلى أقرب عُشر. **8.7 in**



7) **ملاحة جوية:** تطير طائرة على ارتفاع 528 ft، قرّر قائد الطائرة أن يهبط اضطراريًّا بسبب عاصفة جوية. إذا كانت المسافة الأفقية التي يمكنه أن يهبط فيها 2000 ft، فما قياس زاوية الانخفاض التي يجب أن يهبط بها؟ قرِّب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية. **°14.8**

مثال 3 صفحة 58

8) **أهرامات:** يزور سلطان وسلمان الهرم الأكبر في مصر. فوقف كل منهما بجانب الهرم، بحيث كانت المسافة بينهما 20 ft . وكانت زاويتا ارتفاع قمة الهرم بالنسبة لكل منهما °48.6 ، °50 على الترتيب. أوجد ارتفاع الهرم إلى أقرب قدم؟ **470 ft تقريبًا**

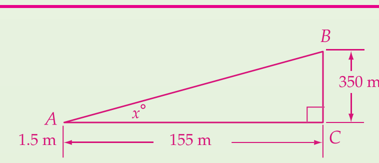


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	4–11 ، 22 ، 24–47
ضمن المتوسط	5–11 فردي ، 12–22 ، 24–47
فوق المتوسط	12–43 ، (اختياري: 44–47)

إجابة:

5



$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\tan = \frac{BC}{AC}$

$m\angle A = x,$

$BC = 350 - 1.5$

$= 348.5$

$\tan x = \frac{348.5}{155}$

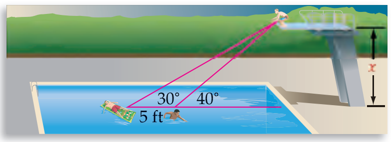
الحل بالنسبة لـِ x $x = \tan^{-1}\left(\frac{348.5}{155}\right)$

استعمال الآلة الحاسبة ≈ 66.0

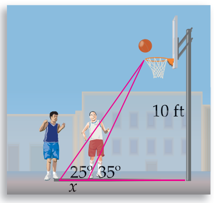
إذن، زاوية ارتفاع قمة الجبل $\approx 66°$

9 **غوص:** يقف هشام على منصة قفز تعلو بركة يسبح فيها صديقه. إذا كانت زاويتا الانخفاض لصديقيه 40°، 30° على الترتيب، والبُعد بينهما 5 ft، فما ارتفاع المنصة؟ قرِّب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

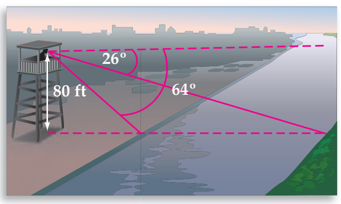
انظر الهامش



10) **كرة السلّة:** ينتظر لاعبا كرة السلة أحمد ومحمد الكرة المرتدة في أثناء مباراة كرة السلة. إذا كان ارتفاع حلقة السلة 10 ft، وزاويتا الارتفاع بين موقعيهما والحلقة 25°، 35° على الترتيب، فما المسافة بينهما إلى أقرب عُشر؟ **7.2 ft**



11) **أنهار:** ينظر هيثم إلى نهر من برج مراقبة. إذا كانت زاوية انخفاض الضفة القريبة 64°، وزاوية انخفاض الضفة البعيدة 26°، وارتفاع البرج 80 ft . فقدِّر عرض النهر عند هذا الموقع إلى أقرب قدم. **1309 ft تقريبًا**

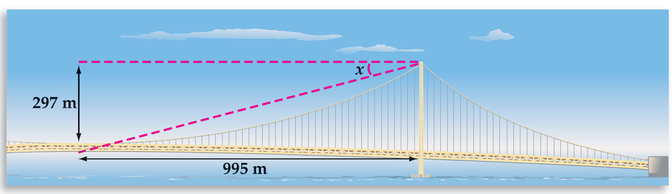


الربط مع واقع الحياة

جسر كاسي كايكو (Akashi Kaikyo) في اليابان أطول جسر معلق في العالم. طوله 1991 m، ويزيد 366 m على ثاني أطول جسر، وهو جسر ستورابلت (Stora Baelt) في الدنمارك.

المصدر:
U.S. Department of Transportation

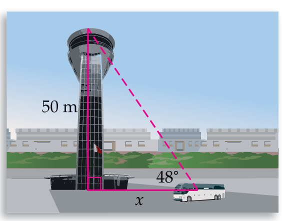
12) **جسور:** ارتفاع أعلى دعامة في منتصف أطول جسر معلق في العالم 297 m، إذا كانت بداية الجسر تبعُد عن منتصفه 995 m كما في الشكل أدناه، فما قياس زاوية انخفاض بداية الجسر عن قمة الدعامة، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية؟ **16.6°**



13) **منارات:** تُستعمل المنارات في الملاحة البحرية لإرشاد السفن، تصدر المنارة A أشعتها من ارتفاع 91 ft بزاوية انخفاض 6°، وتقع المنارة B على بُعد 1800 ft عن المنارة A، وتصدر أشعتها من ارتفاع 34 ft، وبزاوية انخفاض 2°، أي المنارتين يصل ضوؤها إلى قارب يقع في منتصف المسافة بين المنارتين؟

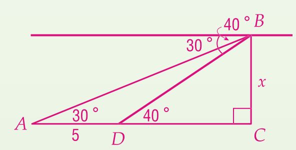
13) يصل ضوء المنارة A إلى بُعد 866 ft، و يصل ضوء المنارة B إلى بُعد 974 ft . لذا، فإن ضوء المنارة B يصل إلى القارب.

14) **سياحة:** رصد سليمان قمة برج المراقبة الجوية بمطار البحرين الدولي من حافلة تُقله، فكانت زاوية ارتفاعه 48° . إذا كان ارتفاع البرج 50 m تقريبًا، فكم تبعُد الحافلة عن البرج، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب متر؟ **45 تقريبًا**



إجابة:

9



$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\quad \tan 30 = \frac{x}{5 + DC}$

الحل بالنسبة لِـ x $\quad (5 + DC) \tan 30 = x$

$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\quad \tan 40 = \frac{x}{DC}$

الحل بالنسبة لِـ x $\quad DC \tan 40 = x$

بالتعويض $\quad DC \tan 40 = (5 + DC) \tan 30$

خاصية التوزيع $\quad DC \tan 40 = 5 \tan 30 + DC \tan 30$

بطرح DC tan 30 من الطرفين $\quad DC \tan 40 - DC \tan 30 = 5 \tan 30$

DC عامل مشترك $\quad DC (\tan 40 - \tan 30) = 5 \tan 30$

بقسمة كل طرف على tan 30 − tan 30 $\quad DC = \frac{5 \tan 30}{\tan 40 - \tan 30}$

استعمال الآلة الحاسبة $\quad DC \approx 11.0$

$\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ $\quad \tan A = \frac{BC}{AC}$

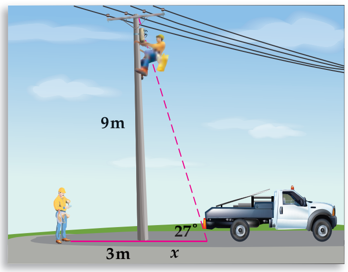
A= 30, BC = x, AC = 5+11.0 = 16.0 $\quad \tan 30 = \frac{x}{16.5}$

ضرب كل طرف في 16.0 $\quad 16.0 \tan 30 = x$

استعمال الآلة الحاسبة $\quad 9.3 = x$

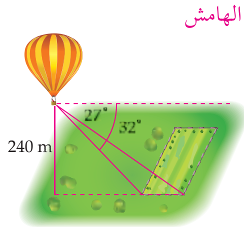
إذن، ارتفاع المنصة ≈ 9.3ft

15) صيانة: وصل عاملا صيانة أعطال الكهرباء إلى موقع لإصلاح انقطاع التيار الكهربائي. تسلّق أحدهما العمود وبقي يصلح العُطل عند ارتفاع 9 m فوق سطح الأرض، فكانت زاوية ارتفاعه عن الشاحنة °27، بينما وقف الآخر على بُعد 3 m عن العمود وعلى استقامة مع العمود والشاحنة. ما بُعد العامل الواقف على سطح الأرض عن الشاحنة؟ قرِّب الناتج إلى أقرب عُشر. **20.7m**



16) تصوير: توصف آلة تصوير رقمية عدستها بانورامية بأنها تلتقط منظرًا بزاوية ارتفاع °38 . إذا نُصبت آلة التصوير على حامل ارتفاعه 3 ft ، ووُجِّهت نحو مبنى ارتفاعه 124 ft، فعلى أي بُعد من المبنى يجب أن تكون لتأخذ صورة للمبنى كاملاً؟ قرِّب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية. انظر الهامش

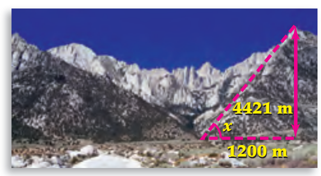
17) منطاد: ركب خالد منطادًا، وعندما أصبح ارتفاعه عن سطح الأرض 240 m رأى حقلًا مستطيلًا محاطًا بسياج، فكانت زاوية انخفاض الحافة القريبة من السياج °32 ، وزاوية انخفاض الحافة البعيدة للسياج °27 . قدّر عرض الحقل إلى أقرب متر. **87.0 m**



18) سباق الماراثون: يبدأ سباق ماراثون من موقع ينخفض 86 m عن سطح البحر، وينتهي على قمة جبل ارتفاعه 4421 m فوق سطح البحر.

a) حدِّد زاوية ارتفاع الجبل، إذا كانت المسافة الأفقية من طرف قاعدته إلى قمته تساوي 1200 m ، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. **74.8°**

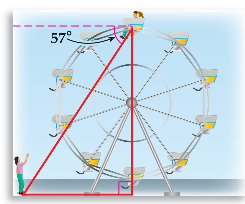
b) إذا كانت زاوية انخفاض نقطة بداية السباق من نقطة على مستوى سطح البحر °38، فما المسافة الأفقية بين هذه النقطة وموقع بداية السباق؟ قرِّب الناتج إلى أقرب عُشر. **110.1 m**

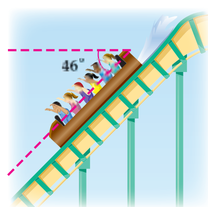


C 19) مدينة الألعاب: ذهب حسن وسامي وفهد إلى مدينة ألعاب، فركب حسن وسامي لعبة العجلة الدوارة المتحركة أولًا التي قطرها 100 m ، ثم ركبوا جميعًا لعبة السقوط على منحدر ارتفاعه 80 m .

a) إذا كان حسن وسامي في أعلى نقطة في لعبة العجلة الدوارة كما هو مبيّن أدناه، فكم يكون بُعدهما عن فهد؟ قرِّب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية. **119.2 m**

b) إذا كان قياس زاوية انخفاض لعبة السقوط عن المنحدر °46 ، فما طول المنحدر؟ قرِّب الناتج إلى أقرب منزلة عشرية. **111.2 m**





تاريخ الرياضيات

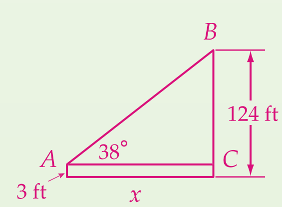
إيراتوسثينس
(276-194 ق.م.)

كان إيراتوسثينس (Eratosthenes) رياضيًا وفلكيًا، ولد في سايرين التي هي ليبيا الآن، وقد استعمل زاوية ارتفاع الشمس عند الظهر في مدينتي الإسكندرية وأسوان في مصر لقياس محيط الأرض.

المصدر: Encyclopaedia Britannica

إجابة:

16



$\tan = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\qquad \tan A = \dfrac{BC}{AC}$

$m\angle A = 38, BC = 124 - 3, AC = x$ $\qquad \tan 38° = \dfrac{121}{x}$

الحل بالنسبة لـ x $\qquad x = \dfrac{121}{\tan 38°}$

استعمال الآلة الحاسبة $\qquad x \approx 154.9$

إذن، يجب أن تكون آلة التصوير على بعد 154 ft تقريبًا

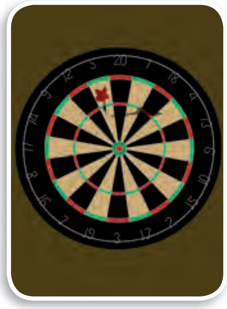
تنبيه لحَلّ تمرين

المسطرة والمنقلة يتطلّب التمرين 21 استعمال المسطرة، والمنقلة.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 21 الأشكال الهندسية، والجدول ، والوصف اللفظي؛ لاستقصاء العلاقات بين أضلاع المثلث، وزواياه .

تنبيه !

اكتشف الخطأ في التمرين 22 لم يوضح عبدالوهاب معنى زاوية الانخفاض بشكل صحيح. ويجب أن يتذكر الطلبة أن زاويتي الارتفاع والانخفاض متطابقتان.

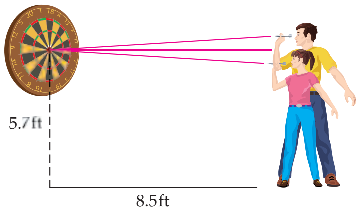


الربط مع واقع الحياة

قُطر لوحة لعبة السهام يساوي 18 in، وتقسم هذه اللوحة إلى 20 قسمًا. تُعلّق اللوحة في المباريات الرسمية بحيث يكون ارتفاع مركز اللوحة 5 ft و 8 in عن سطح الأرض.

المصدر: World Darts Federation

20) **لعبة رمي السهام:** يتبارى عبدالله وياسر في لعبة رمي السهام. وكان ارتفاع مركز لوحة الهدف 5.7 ft عن سطح الأرض، إذا رمى اللاعبان السهام من بُعد 8.5 ft ، حيث رمى ياسر سهمه من ارتفاع 6 ft عن سطح الأرض، ورمى عبدالله سهمه من ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، أوجد زاويتي الارتفاع أو الانخفاض التي يجب أن يوجّه بها كل منها سهمه حتى يصيب مركز اللوحة؟ انظر الهامش



21) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا التمرين سوف تستقصي العلاقات بين أضلاع المثلثات وزواياها.

a) **هندسي:** ارسم ثلاثة مثلثات الأول حاد الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية. سمِّ المثلث الأول ABC ، والثاني MNP ، والثالث XYZ . اكتب أطوال الأضلاع، وقياسات الزوايا على كلّ مثلث. انظر الهامش

b) **جدولة:** انقل الجدول أدناه وأكمله. الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة

المثلث	النسب		
ABC	$\frac{\sin A}{BC} = 0.3$	$\frac{\sin B}{CA} = 0.3$	$\frac{\sin C}{AB} = 0.3$
MNP	$\frac{\sin M}{NP} = 0.2$	$\frac{\sin N}{PM} = 0.2$	$\frac{\sin P}{MN} = 0.2$
XYZ	$\frac{\sin X}{YZ} = 0.3$	$\frac{\sin Y}{ZX} = 0.3$	$\frac{\sin Z}{XY} = 0.3$

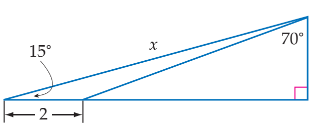
c) **تعبير لفظي:** كوّن تخمينًا حول نسبة جيب الزاوية إلى طول الضلع المقابل لها في المثلث. انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

22) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من عبدالوهاب وطاهر تحديد العلاقة بين زاويتي الارتفاع والانخفاض. يقول عبدالوهاب: إذا نظرت إلى شخص آخر بزاوية ارتفاع °35 ، فإن هذا الشخص ينظر إليك إلى أسفل بزاوية انخفاض °55 ، وهي متممة °35 . لا يوافقه طاهر ويقول: إن ذلك الشخص ينظر إليك إلى أسفل بزاوية انخفاض تساوي زاوية الارتفاع أي °35. أيهما على صواب؟برّر إجابتك.

22) طاهر على صواب؛ إجابة ممكنة: بما أن خط نظرك الأفقي يوازي خط النظر الأفقي للشخص الآخر، فإن زاويتي الارتفاع والانخفاض متطابقتان بحسب نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين.

23) **تحدّ:** أوجد قيمة x في الشكل المجاور. قرّب إلى أقرب عُشر. 7.9



24) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة ، أو خاطئة. برِّر إجابتك. انظر الهامش

" إذا اقترب شخص من جسم وهو ينظر إلى هذا الجسم؛ فإن زاوية الارتفاع تزداد " .

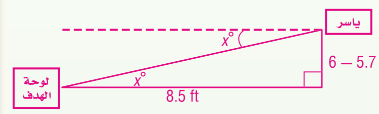
25) **اكتب سؤالًا:** يجد أحد الطلاب زاوية ارتفاع جسم، ولكنه يحاول إيجاد زاوية الانخفاض. اكتب سؤالًا يساعده على حل هذه المسألة.

25) إجابة ممكنة: ما العلاقة بين زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض؟

26) **اكتب:** صف طريقة يمكنك من خلالها تقدير ارتفاع جسم دون استعمال حساب المثلثات باختيار زاوية ارتفاع مناسبة. وضّح لماذا تكون هذه الطريقة صحيحة؟ انظر الهامش

إجابات:

20

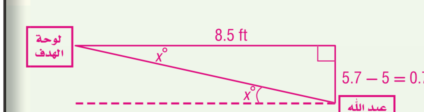


$\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\tan x^\circ = \frac{0.3}{8.5}$

$x = \tan^{-1}\left(\frac{0.3}{8.5}\right)$

استعمال الآلة الحاسبة $x = 2.02$

إذن، قياس الزاوية التي يجب أن يوجه بها ياسر هو °2.02 تقريبًا



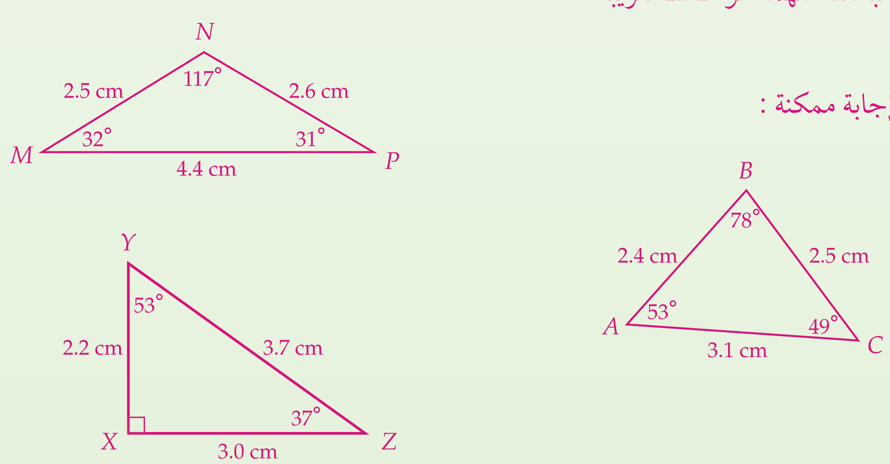
$\tan x = \frac{0.07}{8.5}$

$x = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{8.5}\right)$

$x \approx 4.71$

إذن، قياس الزاوية التي يجب أن يوجه بها عبدالله سهمه هو °4.71 تقريبًا

21a) إجابة ممكنة :



21c) إجابة ممكنة: نسبة جيب الزاوية إلى طول الضلع المقابل لها تقريبًا متساوية لزوايا المثلث الثلاث.

24) صحيحة، إجابة ممكنة: عندما يقترب شخص نحو الجسم تنقص المسافة الأفقية ويبقى ارتفاع الجسم ثابتًا. لذا، فإن نسبة الظل تزداد، وبذلك يزداد قياس الزاوية.

26) إجابة ممكنة: إذا نظرت إلى جسم بزاوية ارتفاع °45، فإنك لست بحاجة إلى استعمال حساب المثلثات؛ لإيجاد ارتفاعه. بما أن ضلعَي المثلث °90 − °45 − °45 متطابقان، فإن ارتفاع الجسم يساوي بُعدك الأفقي عنه.

4 التقويم

بطاقة خروج قسِّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم اطلب إليهم أن يكوِّنوا أسئلة حول زوايا الارتفاع أو الانخفاض تتضمن مواقف من واقع الحياة. اطلب من كل طالب أن يتبادل مع زميله الأسئلة؛ ليحُلَّها خطوة خطوة، ثم يُسلِّم ورقته قبل مغادرتك غرفة الصف.

تدريب على اختبار معياري

27) أراد علي أن يعرف ارتفاع برج الهاتف المحمول قرب منزله بأن سار $26\,m$ من قاعدة البرج، ثم قاس زاوية ارتفاع قمة البرج فكانت $54°$. إذا كان ارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض $1.5\,m$ ، فما ارتفاع البرج إلى أقرب عُشر؟ **D**

A $16.9\,m$

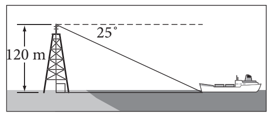
B $20.6\,m$

C $25.8\,m$

D $37.3\,m$

28) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** يقع كشّاف ضوئي على بُعد $6500\,ft$ من محطة لرصد الأحوال الجوية. رصدت بقعة ضوئية من موقع الكشاف في الغيوم فوق المحطة، فكانت زاوية ارتفاعها $45°$، كم يكون ارتفاع الغيوم؟ **6500 ft**

29) ترتفع قمة برج إرسال $120\,m$ فوق سطح البحر. إذا كانت زاوية الانخفاض من قمة البرج إلى سفينة عابرة $25°$. فأي القيم الآتية أقرب إلى المسافة من قاعدة البرج إلى السفينة؟ **B**



$\sin 25°$	≈ 0.42
$\cos 25°$	≈ 0.91
$\tan 25°$	≈ 0.47

A $283.9\,m$ C $132.4\,m$

B $257.3\,m$ D $56.0\,m$

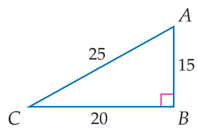
30) **مساحة:** وجد مسّاح يبعُد عن عمارة مسافة $100\,m$ أن زاوية ارتفاع قمة العمارة $23°$. إذا كان مستوى عيني المسّاح يرتفع فوق سطح الأرض $1.55\,m$ ، فما ارتفاع العمارة إلى أقرب متر؟ **D**

A $41\,m$ C $43\,m$

B $42\,m$ D $44\,m$

مراجعة تراكمية

أوجد النسب المثلثية الآتية، واكتب كلًّا منها على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 4-1)



31) $\sin C$ $\frac{15}{25} = 0.60$

32) $\tan A$ $\frac{20}{15} \approx 1.33$

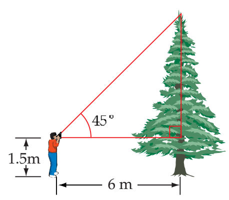
33) $\cos C$ $\frac{20}{25} = 0.80$

34) $\tan C$ $\frac{15}{20} = 0.75$

35) $\cos A$ $\frac{15}{25} = 0.60$

36) $\sin A$ $\frac{20}{25} = 0.80$

37) **مناظر طبيعية:** يريد عماد أن يجد ارتفاع شجرة، فأمسك مثلث الرسم القائم الزاوية، والذي قياس زاويته الحادة $45°$، بحيث كان أحد الضلعين أفقيًا، وشاهد قمة الشجرة على استقامة الوتر كما في الشكل المجاور. إذا كان عماد على بُعد $6\,m$ من الشجرة، وارتفاع مستوى عينيه عن سطح الأرض $1.5\,m$ ، فأوجد ارتفاع الشجرة. (الدرس 5-1) **7.5 m**



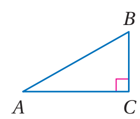
أوجد قياس كل زاوية مما يأتي إلى أقرب عُشر الدرجة:

38) $\cos A = 0.6717$ **47.8°**

39) $\sin B = 0.5127$ **30.8°**

40) $\tan C = 2.1758$ **65.3°**

41) إذا كان $\cos B = \frac{1}{4}$ ، فأوجد $\tan B$. (الدرس 4-1) $\sqrt{15}$



أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المُعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

42) $A(2, 2)$, $B(7, 8)$ $\left(\frac{9}{2}, 5\right)$

43) $X(-4, 6)$, $Y(4, -6)$ $(0, 0)$

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ التناسبات الآتية مقرّبًا إلى أقرب عُشر:

44) $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$ **2.0**

45) $\frac{2x}{11} = \frac{3}{8}$ **2.1**

46) $\frac{4x}{16} = \frac{62}{118}$ **2.1**

47) $\frac{12}{21} = \frac{45}{10x}$ **7.9**

الدرس 5-1 زوايا الارتفاع والانخفاض 63

1-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-6

استعمال النسب المثلثية؛ لحَلّ المثلثات القائمة.

الدرس 1-6

استعمال قانون الجيب، وقانون جيب التمام؛ لحَلّ المثلثات.

ما بعد الدرس 1-6

استعمال الدوال المثلثية؛ لحَلّ مسائل تتضمن المتجهات .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة " لماذا ؟".

اسأل:

- ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإيجاد ارتفاع شجرة؟ استعمال النسب المثلثية في المثلث القائم.
- ما القياسات التي تحتاج إليها لإيجاد ارتفاع شجرة؟ زاوية الارتفاع والمسافة الأفقية إلى الشجرة.
- إذا كانت الشجرة مائلة بزاوية، لماذا لا يمكنك استعمال النسب المثلثية في المثلث القائم؟ لأن الشجرة لا تكوّن زاوية قائمة مع سطح الأرض.

1-6 قانون الجيب وقانون جيب التمام

The Law of Sines and Law of Cosines

فيما سبق

درستُ استعمال النسب المثلثية لحل المثلثات القائمة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعمل قانون الجيب لحل المثلثات.
- أستعمل قانون جيب التمام لحل المثلثات.

المفردات الأساسية

قانون الجيب
Law of Sines

قانون جيب التمام
Law of Cosines

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تعلمت سابقًا كيف يمكنك إيجاد ارتفاع شجرة باستعمال حساب المثلثات القائمة، إذا علمتَ زاوية ارتفاع قمة الشجرة وبُعدك عنها. ولكن بعض الأشجار تنمو مائلة بزاوية، أو تميل بسبب عوامل الطقس. ولحساب أطوال مثل هذه الأشجار، يجب أن تستعمل صيغًا أخرى في حساب المثلثات.

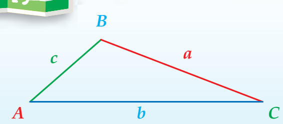
قانون الجيب استعملت النسب المثلثية في الدرس 4-1 ؛ لإيجاد قياسات زوايا المثلثات القائمة وأطوال أضلاعها، ويمكن استعمال **قانون الجيب** ؛ لإيجاد القياسات المجهولة في المثلثات غير القائمة.

نظرية 1.6

أضف إلى مطويتك

إذا مثلت a, b, c أطوال أضلاع $\triangle ABC$ المقابلة لزواياه التي قياساتها A, B, C على الترتيب، فإن:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



ستبرهن أحد التناسبات للنظرية 1.6 في التمرين 45

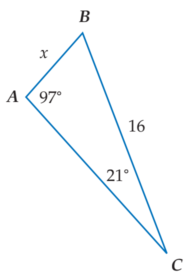
إذا علمتَ قياسات زاويتين وأي ضلع في المثلث، وهما الحالتان (AAS أو ASA)، فإنه يمكنك استعمال قانون الجيب لحل هذا المثلث في حالة ASA . استعمل نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث؛ لتجد قياس الزاوية الثالثة ثم قانون الجيب.

قراءة الرياضيات

حالات التطابق يمثل الحرف A في حالات التطابق اختصارًا للكلمة (Angle)، وتعني زاوية، أما الحرف S فيمثل اختصارًا للكلمة (Side) وتعني ضلعًا.

مثال 1 قانون الجيب (AAS أو ASA)

أوجد قيمة x في الشكل المجاور مقرّبة إلى أقرب عُشر.



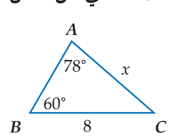
تعلم من الشكل قياسي زاويتين وضلع لا يقع بينهما. لذا استعمل قانون الجيب لكتابة التناسب.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$	قانون الجيب
$\frac{\sin 97°}{16} = \frac{\sin 21°}{x}$	$m\angle A = 97°, a = 16, m\angle C = 21°, c = x$
$x \sin 97° = 16 \sin 21°$	خاصية الضرب التبادلي
$x = \frac{16 \sin 21°}{\sin 97°}$	بقسمة كل طرف على $\sin 97°$
$x \approx 5.8$	باستعمال الآلة الحاسبة

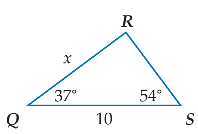
تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه مقرّبة إلى أقرب عُشر:

1A) 7.1



1B) 8.1



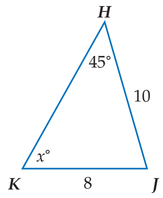
يمكنك أيضًا استعمال قانون الجيب لحل المثلث، إذا علمتَ منه طولَي ضلعين وقياس زاوية غير محصورة بينهما (SSA).

مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (63)	• تنويع التعليم ص (63,65)	• تنويع التعليم ص (65)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثال 2 قانون الجيب (SSA)

أوجد قيمة x في الشكل المجاور مقرّبة إلى أقرب درجة.

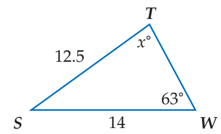


قانون الجيب	$\frac{\sin H}{h} = \frac{\sin K}{k}$
$m\angle H = 45°,\ h = 8,\ m\angle K = x°,\ k = 10$	$\frac{\sin 45°}{8} = \frac{\sin x°}{10}$
خاصية الضرب التبادلي	$10 \sin 45° = 8 \sin x°$
بقسمة كل طرف على 8	$\frac{10 \sin 45°}{8} = \sin x°$
باستعمال نسبة معكوس الجيب	$x = \sin^{-1} \frac{10 \sin 45°}{8}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 62°$

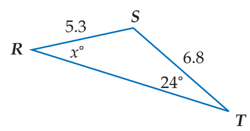
تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه مقرّبة إلى أقرب درجة :

(2A 86



(2B 31



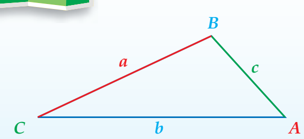
قانون جيب التمام عند تعذُّر استعمال قانون الجيب لحل المثلث، يمكن تطبيق **قانون جيب التمام** .

نظرية 1.7 قانون جيب التمام

أضف إلى مطويتك

إذا مثّلت a, b, c أطوال أضلاع $\triangle ABC$ المقابلة لزواياه التي قياساتها A, B, C ، فإن:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

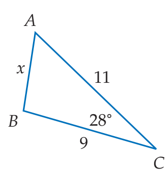


ستبرهن إحدى معادلات النظرية 1.7 في التمرين 46

يمكنك استعمال قانون جيب التمام لحل مثلث، إذا علمت طولَي ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما (SAS).

مثال 3 قانون جيب التمام (SAS)

أوجد قيمة x في الشكل المجاور، مقرّبة إلى أقرب عُشر.



تعلم من الشكل طولَي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما؛ لذا استعمل قانون جيب التمام.

قانون جيب التمام	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
بالتعويض	$x^2 = 9^2 + 11^2 - 2(9)(11) \cos 28°$
بالتبسيط	$x^2 = 202 - 198 \cos 28°$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف	$x = \sqrt{202 - 198 \cos 28°}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 5.2°$

إرشادات للدراسة

قانون جيب التمام لاحظ أن الزاوية المستعملة في كل معادلة في قانون جيب التمام تناظر الضلع المقابل لتلك الزاوية في الطرف الآخر للمعادلة.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

تنبيه!

ترتيب العمليات تذكر اتباع ترتيب العمليات عند تبسيط التعابير. فيجب إجراء عمليتي الضرب والقسمة قبل عمليتي الجمع والطرح. فلا يمكن تبسيط التعبير $202 - 198 \cos 28°$ إلى $4 \cos 28°$.

قانون الجيب

المثالان 1,2 يُبيّنان كيفية استعمال قانون الجيب؛ لإيجاد القياسات المجهولة في المثلث.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات" تأكد "بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

إرشادات للمعلم الجديد

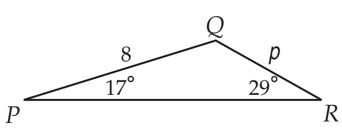
توفير الوقت في المثال 2 اختصارًا للخطوات والوقت يمكن أن يكتب الطلبة أيضًا $k \sin H = h \sin K$ ، ثم يعوضوا القيم؛ لإيجاد الحل.

قانون جيب التمام

المثالان 3,4 يُبيّنان كيفية استعمال قانون جيب التمام؛ لإيجاد القياسات المجهولة في المثلث.

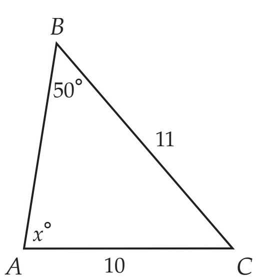
مثالان إضافيان

1 أوجد قيمة p في الشكل أدناه مقربة إلى أقرب عُشر.



4.8

2 أوجد قيمة x في الشكل أدناه مقربة إلى أقرب درجة.



57.4°

تنويع التعليم

دون ضمن

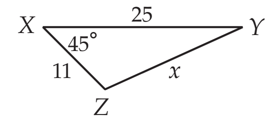
المتعلمون الاجتماعيون نظّم الطلبة في مجموعات ثلاثية؛ لحَلّ التمارين. يمكن أن يختار أحد أفراد المجموعة التمرين، ويكتب الثاني معادلة قانون الجيب ويعوّض بالقيم المعطاة ، ويستعمل الثالث الآلة الحاسبة؛ لحَلّ المسألة. ويتبادل أفراد المجموعة الأدوار حتى يشارك كل فرد في كل جزء من النشاط.

قانون جيب التمام

المثالان 5,6 يُبيّنان كيفية استعمال قانون الجيب، وقانون جيب التمام؛ لحَلّ المثلث.

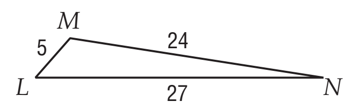
إمثلة إضافية

3 أوجد قيمة x في الشكل أدناه مقرّبة إلى أقرب عُشر.



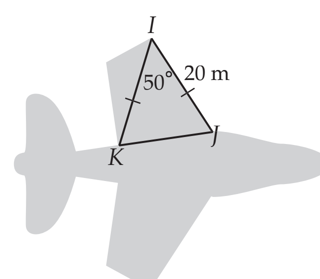
18.9 تقريبًا

4 أوجد $m\angle L$ في الشكل أدناه مقربًا إلى أقرب درجة.



49° تقريبًا

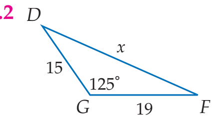
5 **طائرات:** من شكل الطائرة المُبيّن أدناه، أوجد العرض التقريبي لكل جناح مقرّبًا إلى أقرب عُشر متر.
16.9 m تقريبًا



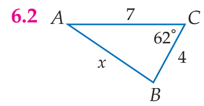
تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرّبة إلى أقرب عُشر :

(3A 30.2



(3B 6.2



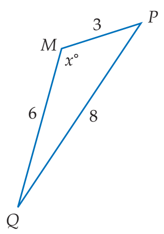
إرشادات للدراسة

الزوايا المنفرجة
توجد أيضًا قيم لـ: $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ عندما تكون $A \geq 90°$. ستجد قيم النسب لهذه الزوايا باستعمال النسب المثلثية في آلتك الحاسبة.

يمكنك أيضًا استعمال قانون جيب التمام، إذا علمت أطوال الأضلاع الثلاثة (SSS).

مثال 4 قانون جيب التمام (SSS)

أوجد قيمة x في الشكل المجاور ، مقرّبة إلى أقرب درجة.

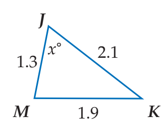


قانون جيب التمام	$m^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos M$
بالتعويض	$8^2 = 6^2 + 3^2 - 2(6)(3) \cos x°$
بالتبسيط	$64 = 45 - 36 \cos x°$
بطرح 45 من كل طرف	$19 = -36 \cos x°$
بقسمة الطرفين على -36	$\frac{19}{-36} = \cos x°$
باستعمال نسبة معكوس جيب التمام	$x = \cos^{-1} -\frac{19}{36}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 122$

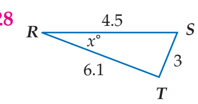
تأكد

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرّبة إلى أقرب درجة :

(4A 63



(4B 28



يمكنك استعمال قانون الجيب أو قانون جيب التمام لحل مسائل على القياس المباشر أو غير المباشر.

مثال 5 من واقع الحياة قياس غير مباشر

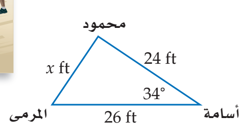
الربط مع واقع الحياة

لُعبت أول مباراة لكرة السلة في YMCA في Massassheutts (Massassheutts) بتاريخ Spring fied) 1/12/1891) . وقد ابتكر الرياضي James) Naismith هذه اللعبة مستعملاً كرة قدم ومكيالي حبوب كسلتين.

المصدر: Encylo paedia Britamnia

لعبة كرة السلة : يلعب أسامة ومحمود كرة السلة. مرّر أسامة الكرة إلى محمود عندما كان على بُعد 26 ft عن المرمى، و 24 ft عن محمود. إذا كان قياس الزاوية المكوّنة من القطعة المستقيمة بين المرمى وأسامة، والقطعة المستقيمة بين أسامة ومحمود يساوي 34° ، فكم يبعُد محمود عن المرمى؟

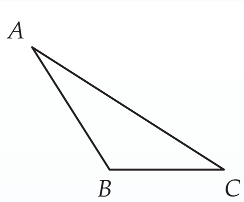
ارسم شكلًا توضيحيًّا. بما أننا نعلم طولَي ضلعين في المثلث والزاوية المحصورة بينهما، فنستعمل قانون جيب التمام.



قانون جيب التمام	$x^2 = 24^2 + 26^2 - 2(24)(26) \cos 34°$
بالتبسيط ، وأخذ الجذر الموجب لكل من الطرفين	$x = \sqrt{1252 - 1248 \cos 34°}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 15$

يبعُد محمود 15 ft عن المرمى، عندما تلقّى الكرة من أسامة.

التركيز في المحتوى الرياضي



تحقق من المعقولية لنأخذ $\triangle ABC$ المجاور، حيث $m\angle A = 25°, BC = 8$، $AC = 16$. لإيجاد $m\angle B$ نطبق قانون الجيب. لذا، فإن $\frac{\sin 25}{8} = \frac{\sin B}{16}$. وبحلّ المعادلة، نجد أن $B = \sin^{-1} 0.845$ ، وتُبيّن الآلة الحاسبة أن الإجابة هي $m\angle B = 57.7°$ ، ولكن هذا الجواب غير معقول؛ لأن $\angle B$ منفرجة، أكد على أن جيب زاوية x يساوي أيضًا جيب مكملتها، أي أن $\sin x = \sin(180° - x)$. عند إيجاد قياس زاوية منفرجة يتعين على الطلبة أن يجدوا مكملتها. لذا، فإن $m\angle B = 180° - 57.7° = 122.3°$.

إرشادات للمعلم الجديد

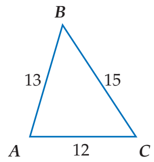
تبرير شجّع الطلبة على ملاحظة النمط في معادلة قانون جيب التمام. وضّح لهم أن بإمكانهم حفظ معادلة واحدة، و إيجاد المعادلتين الأخريتين بتغيير الأحرف. فمثلًا، في المعادلة: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ، إذا بدّلت a , b ، فتصبح المعادلة: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

✓ تأكد

5) **مناظر طبيعية:** قيست زاوية ارتفاع قمة شجرة عند نقطة على سطح الأرض تبعُد 10 ft عن قاعدتها فكانت 61°. إذا كانت الشجرة ليست رأسية، بل تصنع زاوية قياسها 78° مع سطح الأرض، فما طول الشجرة إلى أقرب قدم؟ **13 ft تقريبًا**

عند حل المثلثات القائمة يمكنك استعمال الجيب أو جيب التمام أو الظل. وعند حل مثلثات أخرى يمكنك استعمال قانون الجيب أو قانون جيب التمام حسب المعلومات المعطاة.

مثال 6 حَل المثلث



حُلّ المثلث ABC المجاور، مقرّبًا النواتج إلى أقرب درجة.

بما أن $15^2 \neq 12^2 + 13^2$، فالمثلث ليس قائم الزاوية.

بما أن قياسات أطوال الأضلاع الثلاثة معطاة (SSS)، ابدأ باستعمال قانون جيب التمام؛ لإيجاد $m\angle A$.

قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$a = 15, b = 12, c = 13$	$15^2 = 12^2 + 13^2 - 2(12)(13) \cos A$
بالتبسيط	$225 = 313 - 312 \cos A$
بطرح 313 من الطرفين	$-88 = -312 \cos A$
بقسمة كل طرف على -312	$\frac{-88}{-312} = \cos A$
باستعمال نسبة معكوس جيب التمام	$m\angle A = \cos^{-1} \frac{88}{312}$
	$m\angle A \approx 74^\circ$

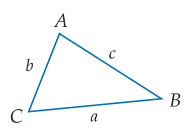
استعمل قانون الجيب، لإيجاد $m\angle B$.

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$
$m\angle A \approx 74^\circ, a = 15, b = 12$	$\frac{\sin 74^\circ}{15} \approx \frac{\sin B}{12}$
خاصية الضرب التبادلي	$12 \sin 74^\circ = 15 \sin B$
بقسمة كل طرف على 15	$\frac{12 \sin 74^\circ}{15} = \sin B$
باستعمال نسبة معكوس الجيب	$m\angle B = \sin^{-1} \frac{12 \sin 74^\circ}{15}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$m\angle B \approx 50^\circ$

باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث $m\angle C \approx 180^\circ - (74^\circ + 50^\circ) \approx 56^\circ$.

لذلك، $m\angle A \approx 74^\circ, m\angle B \approx 50^\circ, m\angle C \approx 56^\circ$.

✓ تأكد



حُلّ المثلث ABC المجاور، مستعملًا المعلومات المعطاة مقرّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر.

6A) $b = 10.2, c = 9.3, m\angle A = 26^\circ$ **$a \approx 4.5, m\angle B \approx 84^\circ, m\angle C \approx 70^\circ$**

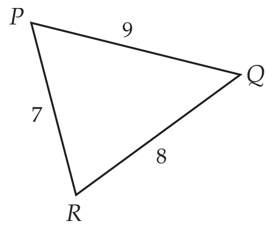
6B) $a = 6.4, c = 5.8, m\angle C = 46^\circ$ **$b \approx 7.9, m\angle B \approx 81^\circ, m\angle A \approx 53^\circ$**

قراءة الرياضيات

حَل المثلث
تذكر أن حَل المثلث يعني أن تجد أطوال الأضلاع جميعها، و/أو قياسات الزوايا المجهولة.

مثال إضافي

6 حُلّ المثلث PQR أدناه مقرّبًا النواتج إلى أقرب درجة.



$m\angle P = 58^\circ, m\angle Q = 48^\circ,$
$m\angle R = 74$

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية عين عدة مسائل لفظية واجبًا للصف ، اعط الطلبة الوقت الكافي لحَلّها، ثم اختر عددًا منهم ليتشاركوا حلولهم مع الصف ويوضحوها. تأكد من أن الطلبة قد رسموا أشكالًا، وأنهم وضحوا السبب وراء استعمالهم قانون الجيب، أو قانون جيب التمام لحَلّ المسألة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يرسموا مثلثات قائمة، وأن يستعملوا المسطرة، والمنقلة؛ لإيجاد طول الوتر و قياس إحدى الزوايا الحادة. يجب أن يستعمل الطلبة نسبتي الجيب أو جيب التمام؛ لإيجاد طولي ضلعي المثلث. واطلب إليهم أن يتحققوا من إجاباتهم بقياس طولي الضلعين مباشرة. ستختلف الإجابات

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 11–1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيــه!

التقريب عندما تقرب حلًا عدديًا ثم تستعمله في حسابات لاحقة، فيمكن أن تكون إجاباتك غير دقيقة. أجّل التقريب إلى ما بعد انتهاء العمليات الحسابية.

ملخص المفاهيم — حَل المثلث

أضف إلى مطويتك

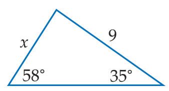
لحِل . . .	المعطيات	ابدأ باستعمال . . .
المثلث القائم	ضلع-ضلع (SS)	نسبة الظل
	وتر-ضلع (HS)	نسبة الجيب أو جيب التمام
	زاوية حادة-وتر (AH)	نسبة الجيب أو جيب التمام
	زاوية حادة-ضلع (AS)	نسبة الجيب، أو جيب التمام أو الظل
أي مثلث	زاوية-زاوية-ضلع (AAS أو ASA)	قانون الجيب
	ضلع-ضلع-زاوية (SSA)	قانون الجيب
	ضلع-زاوية-ضلع (SAS)	قانون جيب التمام
	ضلع-ضلع-ضلع (SSS)	قانون جيب التمام

تأكد من فهمك

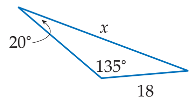
الأمثلة 1–4 الصفحتان 64, 66

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:

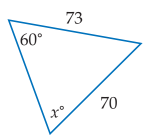
(1 **6.1**



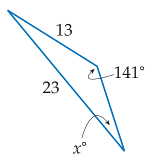
(2 **37.2**



(3 **65**

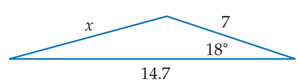


(4 **21**

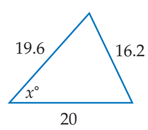


المثالان 3, 4 الصفحتان 65,66

(5 **8.3**



(6 **48**

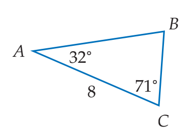


مثال 5 صفحة 66

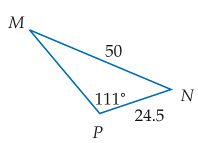
(7 **قوارب شراعية:** عيّن طول حافة قاعدة الشراع في الشكل المجاور إلى أقرب منزلة عشرية. **47.1 ft**

حُلّ كلَّ مثلث أدناه، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:

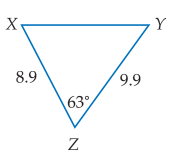
(8



(9



(10



(8 $m\angle B \approx 77°$, $AB \approx 7.8$, $BC \approx 4.4$

(9 $m\angle M \approx 27°$, $m\angle N \approx 42°$, $MP \approx 35.8$

(10 $m\angle X \approx 63°$, $m\angle Y \approx 54°$, $XY \approx 9.9$

(11 إذا كان $FD = 20$، $EF = 21.6$، $DE = 16$، فحُلّ $\triangle DEF$. $m\angle D \approx 73°$, $m\angle E \approx 62°$, $m\angle F \approx 45°$

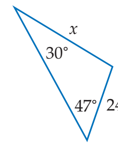
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	12–42، 54، 56–70
ضمن المتوسط	11–49 فردي، 51–54, 56–70
فوق المتوسط	43–70

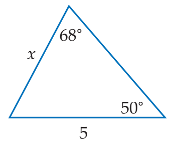
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2
الصفحتان 64, 65

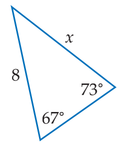
أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر :

(12 

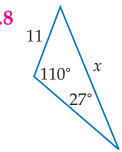
35.1

(13 

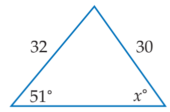
4.1

(14 

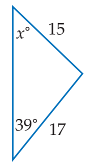
7.7

(15 

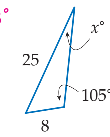
22.8

(16 

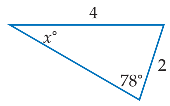
56°

(17 

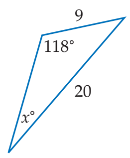
45°

(18 

18°

(19 

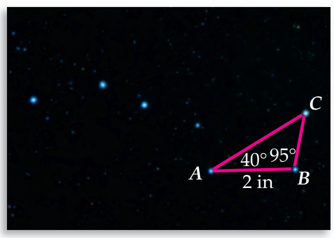
29°

(20 

23°

(21 **فلك:** يرصد ناصر مجموعة نجوم الدب الأكبر من خلال تلسكوب، فلاحظ أن بعض نجوم هذه المجموعة النجمية تشكِّل مثلثًا بالقياسات المبينة في الشكل المجاور. استعمل قانون الجيب لتعيّن المسافة بين A ، C إلى أقرب منزلة عشرية.

2.8 in.



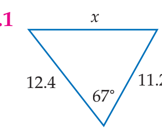
الربط مع واقع الحياة

نجم الدب الأكبر واحد من مجموعة نجوم الدب الأكبر (Ursa). ستُسبِّب الحركة النجمية تغييرًا في وضع هذه مجموعة على مدى السنوات الـ 100000 القادمة.

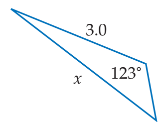
المصدر: NASA

المثالان 3, 4
الصفحتان 65, 66

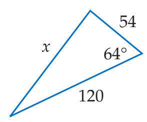
أوجد قيمة x في كلّ شكل أدناه، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:

(22 

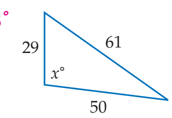
13.1

(23 

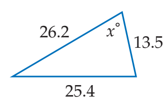
3.8

(24 

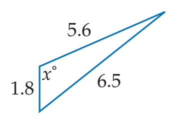
107.9

(25 

98°

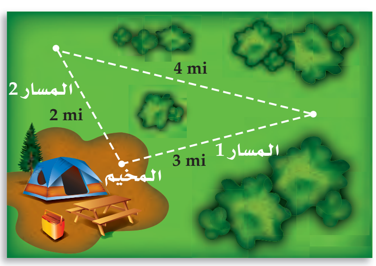
(26 

72°

(27 

112°

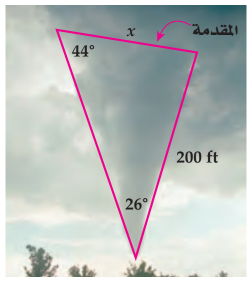
(28 **رحلات:** قرّرت مجموعة من الأصدقاء القيام برحلة سيرًا على الأقدام، حسب الخريطة في الشكل المجاور. ما قياس الزاوية بين المسارين 1 ، 2 ؟ **104°**



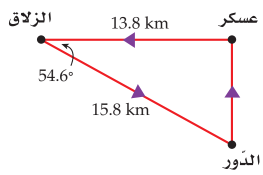
69 الدرس 1-6 قانون الجيب وقانون جيب التمام

مثال 5 صفحة 66

29) **زوابع:** أوجد عرض مقدمة الزوبعة المبينة في الشكل أدناه. **126.2 ft**



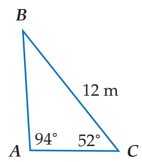
30) **رحلة:** تقطع سيارة مسافة 13.8 km تقريبًا من عسكر إلى الزلاق، ثم تقطع 15.8 km تقريبًا إلى الدَّور، وتعود منها إلى عسكر. ما المسافة بين الدَّور وعسكر إلى أقرب كيلومتر؟ **14 km تقريبًا**



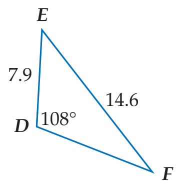
مثال 6 صفحة 67

حُلّ كلّ مثلث أدناه، مقرّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر: **للتمارين 31-42 انظر الهامش**

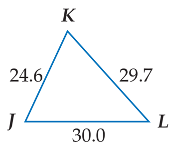
31)



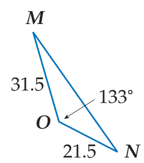
32)



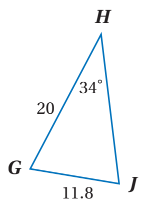
33)



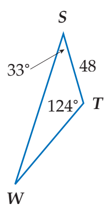
34)



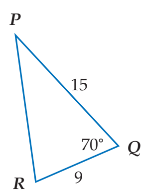
35)



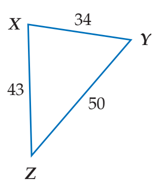
36)



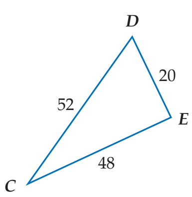
37)



38)



39)

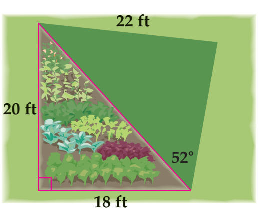


40) حُلّ $\triangle JKL$، إذا كان $JK = 33, KL = 56, LJ = 65$.

41) حُلّ $\triangle ABC$، إذا كان $m\angle B = 119°, m\angle C = 26°, CA = 15$.

42) حُلّ $\triangle XYZ$، إذا كان $XY = 190, YZ = 184, ZX = 75$.

B 43) **زراعة:** لدى يوسف حديقة لزراعة الخضراوات مثلثة الشكل. ويرغب في توسعتها، وذلك بزراعة قطعة أرض مثلّثة الشكل مجاورة لها. إذا كانت الأبعاد كما في الشكل المجاور، فأوجد محيط الحديقة الجديدة. **82.4 ft**



إجابات:

31) $m\angle B \approx 34°, AB \approx 9.5, CA \approx 6.7$

32) $m\angle E \approx 41°, m\angle F \approx 31°, DF \approx 10.1$

33) $m\angle J \approx 65°, m\angle K \approx 66°, m\angle L \approx 49°$

34) $m\angle M \approx 19°, m\angle N \approx 28°, MN \approx 48.8$

35) $m\angle G \approx 75°, m\angle J \approx 71°, HJ \approx 20.3$

36) $m\angle W \approx 23°, WS \approx 101.8, TW \approx 66.9$

37) $m\angle P \approx 35°, m\angle R \approx 75°, RP \approx 14.6$

38) $m\angle X \approx 80°, m\angle Y \approx 58°, m\angle Z \approx 42°$

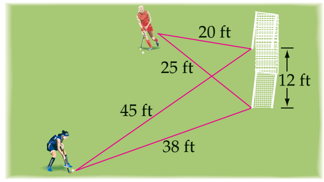
39) $m\angle C \approx 23°, m\angle D \approx 67°, m\angle E \approx 90°$

40) $m\angle L \approx 31°, m\angle K \approx 90°, m\angle J \approx 59°$

41) $m\angle A \approx 35°, AB \approx 7.5, BC \approx 9.8$

42) $m\angle X \approx 74°, m\angle Y \approx 23°, m\angle Z \approx 83°$

44) **هوكي:** يلعب حسن وخالد الهوكي. يقف حسن على بُعد 20 ft من أحد قائمي المرمى و25 ft من القائم الآخر، بينما يقف خالد على بُعد 45 ft من أحد قائمي المرمى، و 38 ft عن القائم الآخر. إذا كان عرض المرمى 12 ft ، فأي اللاعبَين فرصته في تسجيل هدف هي الأكبر؟ وما قياس زاوية التسجيل لهذا اللاعب إلى أقرب منزلة عشرية؟ **حسن، 28.2**

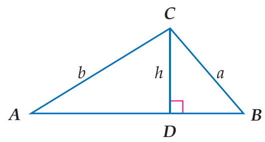


45) **برهان:** برّر كل عبارة في اشتقاق قانون الجيب.

المعطيات: $\overline{CD}$ ارتفاع في $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

البرهان:



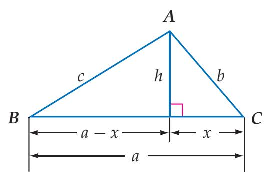
المبررات	العبارات
a) ____?____	a) $\sin A = \frac{h}{b}, \sin B = \frac{h}{a}$
b) ____?____	b) $b \sin A = h, a \sin B = h$
c) ____?____	c) $b \sin A = a \sin B$
d) ____?____	d) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

46) **برهان:** برّر كل عبارة في اشتقاق قانون جيب التمام.

المعطيات: h ارتفاع في $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

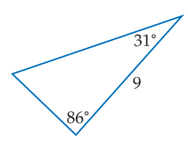
البرهان:



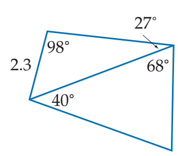
المبررات	العبارات
a) ____?____	a) $c^2 = (a - x)^2 + h^2$
b) ____?____	b) $c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$
c) ____?____	c) $x^2 + h^2 = b^2$
d) ____?____	d) $c^2 = a^2 - 2ax + b^2$
e) ____?____	e) $\cos C = \frac{x}{b}$
f) ____?____	f) $b \cos C = x$
g) ____?____	g) $c^2 = a^2 - 2a(b \cos C) + b^2$
h) ____?____	h) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

أوجد محيط كلّ شكل أدناه، مقرّبًا إلى أقرب عُشر :

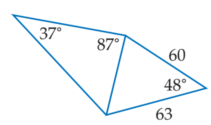
47) **24.3**



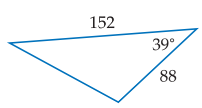
48) **14.7**



49) **انظر الهامش**



50) **340.3**



الربط مع واقع الحياة

تنتشر لعبة الهوكي في بعض الدول العربية، وتصل في بعض الدول إلى حد الشعبية، وهي من الألعاب القديمة التي مارسها العرب منذ قديم الزمان وسموها الحكشة والهولة، أو المحجنية.

مراجعة المفردات

البرهان ذو العمودين (الشكلي) البرهان المستعمل في التمرينين 45، 46 يُسمى برهانًا ذا عمودين، وهو يحتوي عبارات ومبرّرات منظمة في عمودين تؤكد صحة كل منها.

45a) تعريف الجيب
45b) خاصية الضرب
45c) بالتعويض
45d) خاصية القسمة
46a) نظرية فيثاغورس
46b) بالتعويض
46c) نظرية فيثاغورس
46d) بالتعويض
46e) تعريف جيب التمام
46f) خاصية الضرب
46g) بالتعويض
46h) خاصية الإبدال

إجابة:

49) قانون جيب التمام $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

بالتعويض $x^2 = 60^2 + 63^2 - 2(60)(63) \cos 48°$

بالتبسيط $x^2 = 7569 - 7560 \cos 48°$

بالتبسيط $x^2 = \sqrt{7569 - 7560 \cos 48°}$

استعمال الآلة الحاسبة $x \approx 50.1$

قانون الجيب $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

بالتعويض $\frac{\sin 37°}{50.1} = \frac{\sin 87°}{y}$

بالضرب التبادلي $y \sin 37° = 50.1 \sin 87°$

بالقسمة $y = \frac{50.1 \sin 87°}{\sin 37°}$

استعمال الآلة الحاسبة $y \approx 83.1$

مجموع قياسات زوايا المثلث °180 $z = 180 - (37 + 87)$

$z = 56$

قانون الجيب $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

بالتعويض $\frac{\sin 73°}{50.1} = \frac{\sin 56°}{z}$

بالضرب التبادلي $z \sin 37° = 50.1 \sin 56°$

بالقسمة $z = 50.1 \sin 56° / \sin 37°$

استعمال الآلة الحاسبة ≈ 69.0

محيط الشكل $= 60 + 63 + y + z$

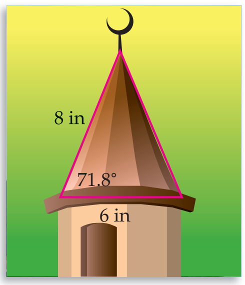
$= 60 + 63 + 83.1 + 69$

$= 275.1$

يبتكر متخصصون نماذج عالية الجودة للعرض وللشركات ولهواة جمع النماذج. يمكن أن تزيد كلفة النموذج على BD 4000 .

المصدر: Twenty–First Century Models

51) **نماذج:** يعمل عيسى على صنع نموذج لمئذنة مسجد. أوجد طول الضلع المجهول باستعمال الشكل المجاور، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية. انظر الهامش



52) **هندسة إحداثية:** أوجد قياس أكبر زاوية في $\triangle ABC$، الذي إحداثيات رؤوسه $A(-3, 6), B(4, 2), C(-5, 1)$. وضّح تبريرك. انظر الهامش

53) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين ستستعمل حساب المثلثات؛ لإيجاد مساحة سطح المثلث.

a) **هندسي:** ارسم المثلث $\triangle ABC$ حاد الزوايا، ومختلف الأضلاع، وارتفاعه النازل من الرأس A على القاعدة المقابلة يساوي h. انظر الهامش

b) **جبري:** استعمل حساب المثلثات لإيجاد h بدلالة $m\angle B$. $h = AB \sin B$

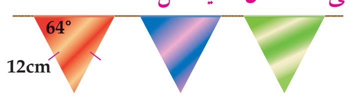
c) **جبري:** اكتب معادلة لإيجاد مساحة سطح $\triangle ABC$ باستعمال حساب المثلثات. $A = \frac{1}{2}(BC)(AB \sin B)$

d) **عددي:** إذا كان $BC = 14.1$ ، $CA = 10.4$ ، $AB = 11.1$ ، $m\angle B = 47°$ ، فأوجد مساحة سطح $\triangle ABC$ مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. 57.2 وحدة مربعة

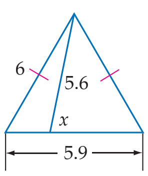
e) **تحليل:** اكتب معادلة لإيجاد مساحة سطح $\triangle ABC$ باستعمال حساب المثلثات بدلالة زاوية أخرى. $A = \frac{1}{2}(BC)(CA \sin C)$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **اكتشف الخطأ:** تحاول فاطمة ولطيفة حياكة قطع من القماش مثلثة الشكل، وهما بحاجة إلى معرفة محيط أحد هذه المثلثات لشراء حاشية تكفي لتزيين المثلثات جميعها. والمثلثات جميعها متطابقة الضلعين، وقياس كلٍّ من زاويتي القاعدة 64°، وطول كلٍّ من الضلعين المتطابقين يساوي 12 cm. تعتقد فاطمة أن المحيط يساوي 37.7 cm، بينما تعتقد لطيفة أنه يساوي 36 cm. أيّهما كان اعتقادها صحيحًا؟
كلتاهما على خطأ؛ لأن محيط كل مثلث $12+12+10.5 = 34.5$ cm.



55) **تحدٍّ:** أوجد قيمة x في الشكل المجاور، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. 68.9°



56) **تبرير:** هل توجد مجموعة من ثلاثة قياسات لا يمكن استعمالها لحل المثلث؟ وضّح إجابتك.

57) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا، واكتب عليه قياسات بحيث يمكن حلّه: للفرعين a-b انظر الهامش

a) باستعمال قانون الجيب فقط.

b) باستعمال قانون جيب التمام فقط.

58) **اكتب:** وضّح لماذا لا يمكن استعمال قانون الجيب لحل مثلث، إذا عُلِمت أطوال أضلاعه الثلاثة، ضمّنْ ذلك مثالًا يوضّح تفسيرك.

56) نعم، إجابة ممكنة: إذا علمت قياسات الزوايا الثلاث في المثلث، فلا يمكن إيجاد أطوال أضلاعه، إذ يكون الحَلّ في هذه الحالة عددًا لانهائيًا من المثلثات المتشابهة.

58) إجابة ممكنة: لا يمكن استعمال قانون الجيب لحَلّ المثلث، إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة؛ لأن هذا القانون قائم على التناسب بين قياس الزوايا، وأطوال الأضلاع. فإذا لم يكن قياس أي زاوية معلومًا ستحتوي المعادلة على متغيّرين ولا يمكن حَلّها.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 53، الأشكال الهندسية، والمعادلات الجبرية، والعمليات الحسابية؛ لاستقصاء مساحات المثلثات.

تنبيه !

اكتشف الخطأ لم تطبق فاطمة في حَلّ التمرين 54 قانون الجيب بشكل صحيح، من المهم الانتباه لاستعمال النسب الصحيحة؛ لمقارنة الزوايا، وأطوال الأضلاع المناظرة لها. بالإضافة إلى أن لطيفة على خطأ؛ لأن المثلث ليس متطابق الأضلاع.

إجابات:

51) قانون جيب التمام
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

بالتعويض
$x^2 = 8^2 + 6^2 - 2(8)(6) \cos 71.8°$

بالتبسيط
$x^2 = 100 - 96 \cos 71.8$

الجذر التربيعي للطرفين
$x = \sqrt{100 - 96 \cos 71.8}$

استعمال الآلة الحاسبة $x = 8.4$ in

52) إجابة ممكنة:
أوجد أطوال أضلاع المثلث.

$AB = \sqrt{(4-(-3))^2 + (2-6)^2} \approx 8.1$

$BC = \sqrt{(-5-4)^2 + (1-2)^2} \approx 9.1$

$AC = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (1-6)^2} \approx 5.4$

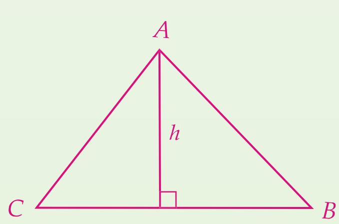
$9.1 > 8.1 > 5.4$. لذا، فإن: $BC > AB > AC$. وباستعمال نظرية متباينة المثلث، فإن الزاوية المقابلة للضلع الأطول، أي $\angle A$ هي الزاوية الكبرى. ولإيجاد قياس $\angle A$، استعمل قانون جيب التمام.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC) \cos A$

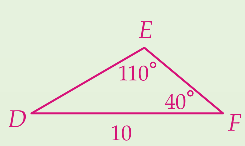
$(9.1)^2 = (8.1)^2 + (5.4)^2 - 2(8.1)(5.4)\cos A$

إذن، $m\angle A = 82°$.

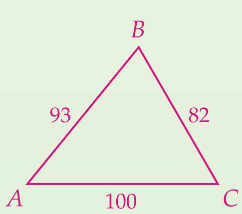
53a)



57a) إجابة ممكنة:



57b) إجابة ممكنة:



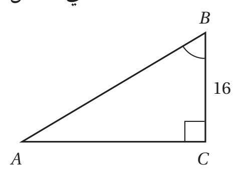
تدريب على اختبار معياري

59) $\triangle ABC$ فيه $m\angle A = 42°$, $m\angle B = 74°$, $a = 3$ ،
ما قيمة b ، مقرَّبة إلى أقرب عُشر؟ **A**

A 4.3 **C** 2.1

B 3.8 **D** 1.5

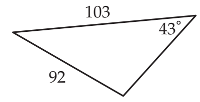
60) إذا كان $\cos B = 0.8$ في الشكل أدناه، فما طول $\overline{AB}$ ؟ **C**



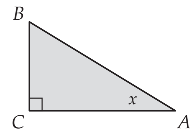
A 12.8 **B** 16.8

C 20.0 **D** 28.8

61) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** ما محيط المثلث المبيّن أدناه؟
مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. **329.7**



62) إذا كان $\sin x = 0.6$, $AB = 12$ ، فما مساحة سطح $\triangle ABC$
بالوحدات المربعة؟ مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر. **C**

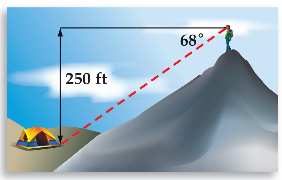


A 28.8 وحدة مربعة **C** 34.6 وحدة مربعة

B 31.2 وحدة مربعة **D** 42.3 وحدة مربعة

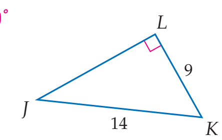
مراجعة تراكمية

63) **متسلّقو الجبال:** يقف أحد المتسلّقين على قمة جبل يرتفع 250 ft فوق سطح البحر، نظر إلى المخيم فكانت زاوية انخفاضه 68° ، كم يبعُد المخيم عن قمة الجبل؟ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية (الدرس 1-5) **269.6 ft**

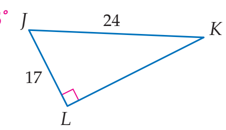


استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس $\angle J$ في كل شكل أدناه، مقرّبًا إلى أقرب درجة : (الدرس 1-4)

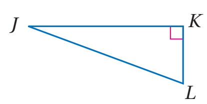
64) **40°**



65) **45°**



استعمل $\triangle JKL$ لإيجاد $\sin J, \cos J, \tan J, \sin L, \cos L, \tan L$. وعبّر عن كل نسبة بكسر اعتيادي، وبكسر عشري، إلى أقرب جزء من مئة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-4) **انظر الهامش**



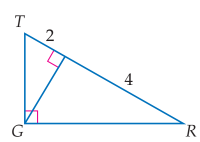
66) $j = 8, k = 17, l = 15$

67) $j = 12, k = 24, l = 12\sqrt{3}$

68) **نجارة:** صنع حسن طاولة مربعة الشكل، طول قطرها 90 cm. ما طول ضلعها؟ (الدرس 1-3) $45\sqrt{2}$

69) **سفر:** نظرت أسماء من الطائرة نحو مبنى، إذا نظرت إلى الأسفل بزاوية قياسها 9° ، وكانت الطائرة على ارتفاع نصف كيلومتر فوق سطح الأرض، فما مقدار المسافة الأفقية إلى المبنى مقربة إلى أقرب كيلومتر؟ (الدرس 1-5) **3 km تقريبًا**

70) أوجد TG في $\triangle TGR$ المجاور. (الدرس 1-2) $2\sqrt{3}$



إجابات:

66) $\sin J = \frac{8}{17} \approx 0.47$

$\cos J = \frac{15}{17} \approx 0.88$

$\tan J = \frac{8}{15} \approx 0.53$

$\sin L = \frac{15}{17} \approx 0.88$

$\cos L = \frac{8}{17} \approx 0.47$

$\tan L = \frac{15}{8} \approx 1.88$

67) $\sin J = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\cos J = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan J = \frac{12}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin L = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos L = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\tan L = \frac{12\sqrt{3}}{12} = \sqrt{3}$

توسّع 1-6 ملاحظات الدرس

4 التقويم

تعلم لاحق يعلم الطلبة أنه توجد ثلاثة أنواع من المثلثات التي يمكن حَلّها باستعمال قانون الجيب وهي: (SSA , AAS, ASA). اطلب إليهم أن يكتبوا قائمة بأنواع المثلثات الأخرى التي يمكن حَلّها باستعمال قانون جيب التمام.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 6-1 ، 5-1 بإعطائهم اختبار قصير (3) من مصادر الفصل1.

1 التركيز

الهدف

استكشاف الحالة المبهمة لقانون الجيب باستعمال برمجية الرسم الهندسي Geometer's Sketchpad

المواد اللازمة

- حاسوب
- برمجية الرسم الهندسي أو أي برمجية رسم هندسي آخرى Geometer's Sketchpad

إرشادات التدريس

يمكن أن يُسمّي الطلبة نقطتي تقاطع الدائرة مع $\overline{AD}$، D_1 ، D_2، وإنشاء نصفي قطرين $\overline{BD_1}$ ، $\overline{BD_2}$. ثم يمكنهم إيجاد جميع القياسات على الشاشة وعرضها في آن واحد.

معمل الهندسة المحوسب

توسع 1-6 الحالة المبهمة لقانون الجيب
The Ambiguous Case of the Laws of Sines

تعلّمت في الدرس 6-1 حَل المثلثات باستعمال قانون الجيب، إذا علمتَ قياسَي زاويتين، وطول أحد أضلاع المثلث (AAS أو ASA). ويمكنك أيضًا حَل المثلث باستعمال قانون الجيب، إذا علمتَ قياسَي ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما (SSA). عندما تستعمل SSA لحل المثلث وتكون الزاوية حادة، فيمكن أحيانًا إيجاد مثلثين مختلفين. يمكنك استعمال برمجية الرسم الهندسي Geometer's Sketchpad لاستكشاف هذه الحالة، وتُسمّى الحالة المبهمة لقانون الجيب.

نشاط

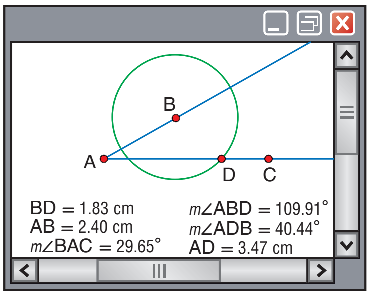
الخطوة 1 ارسم $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$. وارسم دائرة مركزها B ، بحيث تقطع $\overrightarrow{AC}$ في نقطتين، ثم ارسم أيّ نصف قطر $\overline{BD}$.

الخطوة 2 أوجد قياسات $\overline{AB}$ ، $\overline{BD}$ ، $\angle A$.

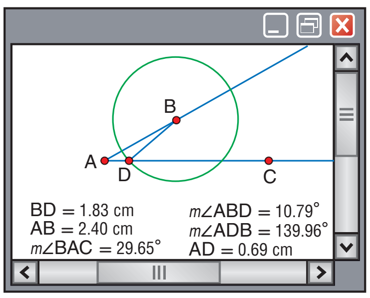
الخطوة 3 استعمل أداة التدوير لتحرّك D ، بحيث تقع على إحدى نقطتي تقاطع الدائرة B مع $\overrightarrow{AC}$. أوجد قياسات $\overline{AD}, \angle BDA, \angle ABD$ في $\triangle ABD$.

الخطوة 4 باستعمال أداة التدوير حرّك D إلى نقطة التقاطع الأخرى للدائرة B مع $\overrightarrow{AC}$.

الخطوة 5 لاحظ قياسات $\overline{AD}, \angle BDA, \angle ABD$ في $\triangle ABD$.



الخطوات 3-1



الخطوتان 4,5

حلّل النتائج

1) أي القياسات متساوية في المثلثين؟ $BD, AB, m\angle A$

2) كرّر النشاط باستعمال قياسات مختلفة لـ $\overline{AB}, \overline{BD}, \angle A$ ، قارن هذه النتائج بالنتائج السابقة؟ إجابة ممكنة: يوجد مثلثان مختلفان في كل مرة.

خمّن :

3) قارن نتائجك بنتائج زملائك. ما وجه الشبه بينها؟ 4-3) انظر الهامش

4) ما علاقة الدائرة B مع $\overrightarrow{AC}$ ، حتى يوجد حل واحد فقط؟ اختبر تخمينك بإعادة النشاط.

5) **اكتب:** إذا عُلِمت قياسات $\overline{AB}, \overline{BD}, \angle A$ ، فهل من الممكن ألاّ يوجد حل؟ اختبر تخمينك ووضّحه. نعم، إجابة ممكنة: لا يوجد حل، إذا لم تتقاطع الدائرة B مع $\overrightarrow{AC}$.

---

2 التدريس

العمل بصورة فردية أو في مجموعات ثنائية

يمكن أن يعمل الطلبة منفردين، أو في مجوعات ثنائية متفاوتة القدرات. و اطلب إليهم تنفيذ الخطوات 5-1 في النشاط.

اسأل:

- ماذا تلاحظ حول القياسين الممكنين للزاوية D؟ مجموع القياسين °180.

تدريب اطلب إلى الطلبة حَلّ التمارين 5-1.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 5-1 ؛ لتقويم مدى استيعاب الطلبة لمفهوم الحالة المبهمة لقانون الجيب.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا ملخصًا مع التوضيح بالأشكال للحالة المبهمة لقانون الجيب. واطلب إليهم أن يوضحوا كل حالة ممكنة .

التوسّع في المفهوم

اسأل:

- ما نوع $\triangle ABD$ إذا تقاطعت $\overrightarrow{AC}$ مع $\odot B$ في نقطة واحدة؟ وكيف تعرف ذلك؟ مثلث قائم. إذا تقاطعت $\odot B$ مع $\overrightarrow{AC}$ في نقطة واحدة فقط، فإن $\overrightarrow{AC}$ تكون مماسًّا للدائرة $\odot B$. إذن، $\triangle ABD$ قائم الزاوية في D .

إجابات:

3) إجابة ممكنة: النتائج نفسها. يوجد في كل حالة مثلثان ممكنان .

4) إجابة ممكنة: تقطع الدائرة B $\overrightarrow{AC}$ في نقطة واحدة. انظر حلول الطلبة.

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

ملخّص الفصل

مفاهيم أساسية

المسافة ونقطة المنتصف (الدرس 1-1)

- في المستوى الإحداثي المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هي $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

وإحداثيا نقطة المنتصف بينهما هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

الوسط الهندسي (الدرس 1-2)

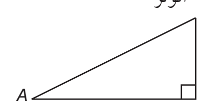
- الوسط الهندسي لأي عددين موجبين a ، b هو العدد الموجب x ، ليكون التناسب $a : x = x : b$ صحيحًا.

المثلثات القائمة الخاصة (الدرس 1-3)

- قياسات أضلاع المثلث °90 - °45 - °45 هي $x, x, x\sqrt{2}$.
- قياسات أضلاع المثلث °90 - °60 - °30 هي $x, 2x, x\sqrt{3}$.

حساب المثلثات (الدرس 1-4)

- $\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ • $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
- $\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



زوايا الارتفاع والانخفاض (الدرس 1-5)

- زاوية الارتفاع هي الزاوية المتكوّنة من الخط الأفقي، وخط النظر من الراصد إلى الجسم المرصود فوق الخط الأفقي.
- زاوية الانخفاض هي الزاوية المتكوّنة من الخط الأفقي، وخط النظر من الراصد إلى الجسم المرصود تحت الخط الأفقي.

قانون الجيب وقانون جيب التمام (الدرس 1-6)

ليكن $\triangle ABC$ أي مثلث، حيث a, b, c تُمثّل أطوال أضلاعه المقابلة للزوايا التي قياساتها A, B, C على الترتيب، فإن

- قانون الجيب: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

مطويات منظم أفكار

تأكّد أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

المسافة ص 12	الظل ص 45
نقطة المنتصف ص 14	معكوس الجيب ص 48
منصف القطعة المستقيمة ص 16	معكوس جيب التمام ص 48
الوسط الهندسي ص 25	معكوس الظل ص 48
حساب المثلثات ص 45	زاوية الارتفاع ص 56
النسبة المثلثية ص 45	زاوية الانخفاض ص 56
الجيب ص 45	قانون الجيب ص 64
جيب التمام ص 45	قانون جيب التمام ص 65

اختبر مفرداتك

بيّن إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة.

1) طول القطعة المستقيمة التي إحداثيا طرفيها $(2, 0)$ ، $(0, 2)$ يساوي 2 وحدة. خطأ، $2\sqrt{2}$

2) النقطة $(2, 1)$ هي منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيا طرفيها $(-1, 2)$ ، $(5, 0)$. صحيحة

3) الوسط الحسابي لعددين موجبين، هو الجذر التربيعي الموجب لحاصل ضرب العددين. خطأ، الهندسي

4) زاوية الارتفاع هي الزاوية المكوّنة من الخط الأفقي وخط نظر الراصد لجسم يقع تحت الخط الأفقي. خطأ، الانخفاض

5) يمكن استعمال قانون الجيب ؛ لإيجاد قياس زاوية، إذا عُلِمت أطوال أضلاع المثلث الثلاثة. خطأ، قانون جيب التمام

6) النسبة المثلثية هي نسبة طولَي ضلعين في مثلث قائم. صحيحة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبة في حَلّ الأسئلة 6 -1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل 1.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة ، والحروف المبعثرة ، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن الكلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت، أو على أوراق عمل مطبوعة.

مطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل ليتحققوا من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حَلّ أسئلة دليل الدراسة والمراجعة. وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

1-1 المسافة ونقطة المنتصف (الصفحات 22-12)

أوجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:

1) $A(-3, 1), B(7, 13)$ $\sqrt{244} \approx 15.6$

2) $P(2, -1), Q(10, -7)$ 10

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

3) $L(-3, 16), M(17, 4)$ $(7, 10)$

4) $C(32, -1), D(0, -12)$ $(16, \frac{-13}{2})$

أوجد إحداثيي النقطة المجهولة في كل مما يأتي علمًا بأن M منتصف $\overline{XY}$:

5) $X(-11, -6), M(15, 4)$ $(41, 14)$ $(41, 14)$

6) $M(-4, 8), Y(19, 0)$ $(-27, 16)$ $(-27, 16)$

7) **الصلاة:** يذهب عثمان من بيته الذي إحداثيا موقعه في المستوى الإحداثي $(3, 5)$ إلى المسجد الذي إحداثيا موقعه $(7, 13)$ لأداء الصلاة يوميًّا.

a أوجد المسافة بين بيت عثمان والمسجد. $4\sqrt{5}$

b أوجد إحداثيي نقطة المنتصف بين بيت عثمان والمسجد. $(5, 9)$

مثال 1

أوجد المسافة بين النقطتين $X(5, 7)$ ، $Y(-7, 2)$.

$(x_1, y_1) = (5, 7)$ ، $(x_2, y_2) = (-7, 2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-7 - 5)^2 + (2 - 7)^2}$$
$$= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{169} = 13$$

إذن المسافة بين X ، Y تساوي 13 وحدة.

مثال 2

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها هي $P(-4, 13)$ ، $Q(6, 5)$

$(x_1, y_1) = (-4, 13)$ ، $(x_2, y_2) = (6, 5)$.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = M\left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{13 + 5}{2}\right)$$
$$= M(1, 9)$$

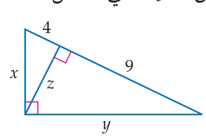
إذن، إحداثيا نقطة المنتصف هي $(1, 9)$.

1-2 الوسط الهندسي (الصفحات 33-25)

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

8) 9 و 4 6 9) $\sqrt{20}$ و $\sqrt{80}$ 40 10) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ و $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ $\frac{8}{3}$

11) أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه.



$x = 2\sqrt{13}$, $y = 3\sqrt{13}$, $z = 6$

12) **قياس:** يريد جميل قياس ارتفاع منزله. استعمل كتابًا للنظر إلى قمة المنزل وقاعدته، إذا كان جميل على بعد 5m عن المنزل، وكان مستوى عينيه على ارتفاع 1.7m عن سطح الأرض، فما ارتفاع المنزل؟ 16.4 ft

مثال 3

أوجد الوسط الهندسي للعددين 10 و 15 .

$x = \sqrt{ab}$	تعريف الوسط الهندسي
$= \sqrt{10 \cdot 15}$	$a = 10, b = 15$
$= \sqrt{(5 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 5)}$	بالتحليل
$= \sqrt{25 \cdot 6}$	خاصية التجميع
$= 5\sqrt{6}$	بالتبسيط

مراجعة الدروس

مداخلة إن كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها التمارين، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

15) 10 ft ، إجابة ممكنة: بما أن الزاوية بين سطح الأرض وحائط الملعب تساوي °90، فإن هذا مثلث °90 – °60 – °30، وطول الضلع الأقصر 5 ft، والسطح المائل هو الوتر. لذا، فإن طوله يساوي 10 ft.

16) $\sin A = \frac{5}{13} \approx 0.38$

17) $\tan B = \frac{12}{5} \approx 2.40$

18) $\sin B = \frac{12}{13} \approx 0.92$

19) $\cos A = \frac{12}{13} \approx 0.92$

20) $\tan A = \frac{5}{12} \approx 0.42$

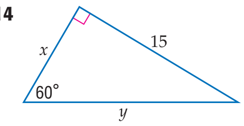
21) $\cos B = \frac{5}{13} \approx 0.38$

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

1-3 المثلثات القائمة الخاصة (الصفحات 42-34)

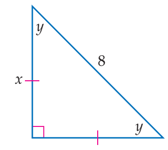
أوجد قيمة كل من x ، y في كل شكل أدناه:

13)



$x = 5\sqrt{3}, y = 10\sqrt{3}$

14)

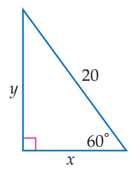


$x = 4\sqrt{2}, y = 45°$

15) تزحلق: يرغب عثمان في بناء منحدر تزحلق يميل بزاوية °60 على سطح الأرض، إذا بدأ البناء على بُعد 5 ft من جدار قائم، فكم يكون طول السطح المائل؟ انظر الهامش

مثال 4

أوجد قيمة كلّ من x ، y في الشكل المجاور؟



قياس الزاوية الثالثة في المثلث المجاور °30 ، فهذا مثلث °90 - °60 - °30 .

$h = 2s$	نظرية المثلث °90 - °60 - °30
$20 = 2x$	بالتعويض
$10 = x$	بالقسمة

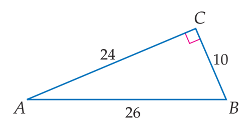
والآن، أوجد y طول الضلع الأطول.

$\ell = s\sqrt{3}$	نظرية المثلث °90 - °60 - °30
$y = 10\sqrt{3}$	بالتعويض

1-4 حساب المثلثات (الصفحات 54-45)

أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، إلى أقرب جزء من مئة :

21–16) انظر الهامش



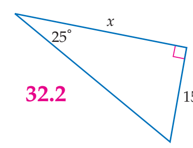
16) $\sin A$ 17) $\tan B$

18) $\sin B$ 19) $\cos A$

20) $\tan A$ 21) $\cos B$

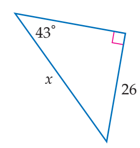
أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، إلى أقرب عُشر :

22)



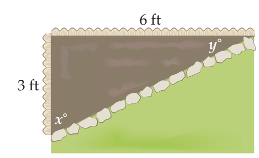
32.2

23)



38.1

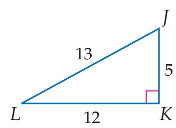
24) بستنة : ترغب سارة في زراعة حوض ورود في فناء منزلها. فوضعت حدًّا فاصلاً من الحجارة يبدأ على بُعد 3 ft عن أحد أركان المنزل، وينتهي على بُعد 6 ft من ذلك الركن على الضلع المجاور من السور. أوجد قياس الزاويتين x, y اللتين يصنعهما هذا الحد مع جانبي السور إلى أقرب منزلة عشرية.



$63.4°, 26.6°$

مثال 5

أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري، إلى أقرب جزء من مئة.



a) $\sin L$

$\sin L = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\sin L = \frac{5}{13} \approx 0.38$

b) $\cos L$

$\cos L = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\cos L = \frac{12}{13} \approx 0.92$

c) $\tan L$

$\tan L = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\tan L = \frac{5}{12} \approx 0.42$

مراجعة حَلّ المسائل

إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حَلّ المسألة ، فذكرهم بخطوات حَلّ المسألة وناقشهم فيها ، وقدم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقّع من مصادر الفصل 1، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 1.

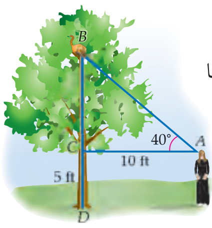
الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

1-5 زوايا الارتفاع والانخفاض (الصفحات 56—63)

25) **نسور:** رأى نسر يطير على ارتفاع 400 m أرنبًا على الأرض. إذا كانت المسافة الأفقية بين النسر والأرنب 210 m، فبأي زاوية انخفاض يجب أن ينقضّ النسر ليمسك بالأرنب، إذا كان يطير في مسار مستقيم؟ **62.3°**

26) **أبراج:** يقع برج إرسال للهواتف المحمولة في ساحة مقابل بيت عبد الرحمن. وعندما كان عبد الرحمن على بُعد 50 ft من قاعدة البرج، وجد أن زاوية ارتفاع قمته 60°، ما ارتفاع البرج إلى أقرب عُشر؟ **86.6 ft**

مثال 6



تسلّقت قطة شجرة، رصدت مريم زاوية ارتفاعها فكانت 40°، وكان مستوى عينيها على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، ما ارتفاع القطة عن سطح الأرض؟ مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية.

لإيجاد ارتفاع القطة عن سطح الأرض أوجد CB.

$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\tan 40 = \frac{CB}{10}$

بالضرب $10(\tan 40) = CB$

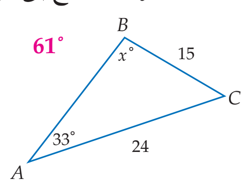
بالتبسيط $8.4 \approx CB$

بما أن ارتفاع مستوى عيني مريم 5 ft فوق سطح الأرض. اجمع 5 إلى 8.4 ، فيكون ارتفاع القطة 13.4 ft تقريبًا عن سطح الأرض.

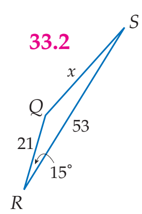
1-6 قانون الجيب وقانون جيب التمام (الصفحات 64-73)

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر:

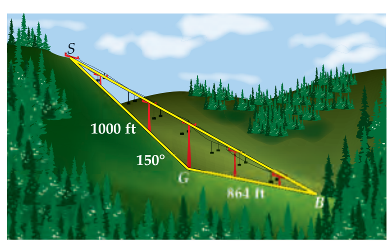
27) **61°**



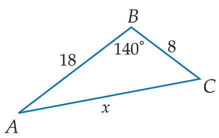
28) **33.2**



29) **سياحة:** في منطقة سياحية جبلية، تريد دائرة السياحة أن تقيم مصعدًا ينقل السياح من قاعدة الجبل إلى القمة كما في المخطّط أدناه. طول مسار المصعد ممثّل بطول $\overline{SB}$.
إذا علمت أن طول الكوابل يساوي مثلَي طول المسار، فكم طول الكوابل التي تحتاج إليها دائرة السياحة؟ مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. **3601.7 ft**



مثال 7



أوجد قيمة x في المثلث المجاور، مقربة إلى أقرب عشر.

عُلم طولا الضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. لذا، نستعمل قانون جيب التمام.

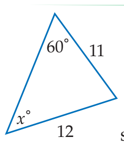
قانون جيب التمام $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

بالتعويض $x^2 = 8^2 + 18^2 - 2(8)(18) \cos 140°$

بالتبسيط $x^2 = 388 - 288 \cos 140°$

بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف $x = \sqrt{388 - 288 \cos 140°} \approx 24.7$

مثال 8



أوجد قيمة x في المثلث المجاور، مقرّبة إلى أقرب عُشر.

قانون الجيب $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

بالتعويض $\frac{\sin 60}{12} = \frac{\sin x}{11}$

خاصية الضرب التبادلي $11 \sin 60° = 12 \sin x$

بالقسمة $\frac{11 \sin 60}{12} = \sin x$

$x = \sin^{-1} \frac{11 \sin 60}{12}$

$\approx 52.5°$

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المعطى إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

1) $(16, 5)$ ، $(28, -13)$ **$(22, -4)$**

2) $(-11, 34)$ ، $(47, 0)$ **$(18, 17)$**

3) $(-4, -14)$ ، $(-22, 9)$ **$\left(-13, -\frac{5}{2}\right)$**

أوجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:

4) $(43, -15)$ ، $(29, -3)$ **$2\sqrt{17} \approx 18.44$**

5) $(21, 5)$ ، $(28, -1)$ **$\sqrt{85} \approx 9.22$**

6) $(0, -5)$ ، $(18, -10)$ **$\sqrt{349} \approx 18.68$**

أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية:

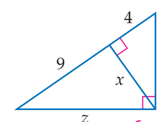
7) 7 و 11 **$\sqrt{77} \approx 8.8$**

8) 12 و 9 **$6\sqrt{3} \approx 10.4$**

9) 14 و 21 **$7\sqrt{6} \approx 17.1$**

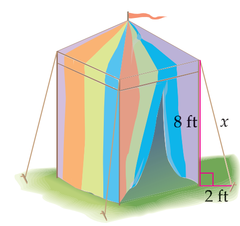
10) $4\sqrt{3}$ و $10\sqrt{3}$ **$2\sqrt{30} \approx 11.0$**

11) أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه.



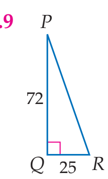
$x = 6, y = 2\sqrt{13}, z = 3\sqrt{13}$

12) ينصب سليم خيمته كما في الشكل أدناه. إذا كان ارتفاع الخيمة 8 ft ، و يبعُد الوتد 2 ft عن الخيمة، فما طول حبل الخيمة إلى أقرب منزلة عشرية؟ **8.2 ft**

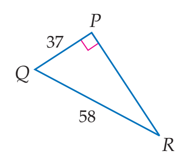


استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle R$ في كل شكل أدناه، مقرّبًا إلى أقرب عُشر الدرجة:

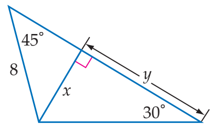
13) **70.9**



14) **39.6**

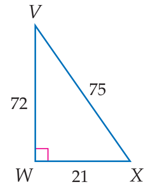


15) أوجد قيمة كلّ من x ، y في الشكل المجاور. **$x = 4\sqrt{2}, y = 4\sqrt{6}$**



للأسئلة 16-19 انظر الهامش

أوجد النسب المثلثية الآتية على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشر، مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة :



16) $\cos X$

17) $\tan X$

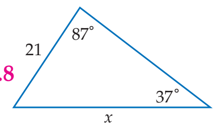
18) $\tan V$

19) $\sin V$

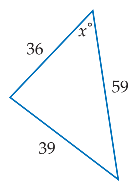
20) **فضاء:** يراقب حسين إطلاق منطاد من على بُعد 160 m. كم يكون ارتفاع المنطاد عندما تكون زاوية ارتفاعه °80؟ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية. **907.4 m**

أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر :

21) **34.8**



22) **40°**



23) **اختيار من متعدّد:** إذا كان طول الوتر 20 ، فأي ممّا يأتي يساوي طول ضلع المثلث °90 - °45 - °45؟ **B**

A 10

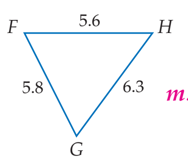
B $10\sqrt{2}$

C 20

D $20\sqrt{2}$

24) **مخلوقات بحرية:** ينظر إبراهيم بالمنظار في رحلة لمراقبة المخلوقات البحرية، فشاهد ثعلب ماء عن بُعد. إذا كان يقف في منطاد على ارتفاع 20 ft عن سطح الماء، وكانت زاوية انخفاض الثعلب °30، فكم يبعُد الثعلب عن المنطاد مقرّبًا إلى أقرب قدم؟ **35 ft**

25) حُلّ $\triangle FGH$ ، مقرّبًا النواتج إلى أقرب درجة. **$m\angle H \approx 58°, m\angle G \approx 55°, m\angle F \approx 67°$**



الفصل 1 اختبار الفصل

بناء الاختبارات
التقويم

التقويم أنشئ نسخًا معدلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 1 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابات:

16) $\cos X = \frac{21}{75} = 0.28$

17) $\tan X = \frac{72}{21} \approx 3.43$

18) $\tan V = \frac{21}{72} \approx 0.29$

19) $\sin V = \frac{21}{75} = 0.28$

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا اخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	**إذا** اخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	**فاختر** احد المصادرين الآتيين:
كتاب الطالب الدروس 1-1، 1-2، 1-3، 1-4، 1-5، 1-6	**مصادر الفصل** دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل تدريبات المهارات	**زيارة الموقع** www.obeikaneducation.com
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

1 التركيز

الهدف تعلُّم استعمال صيغ لحَلّ مسائل الاختبار المعياري .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

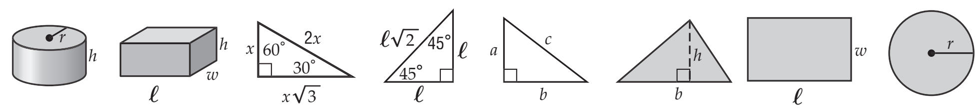
- متى استعملت صيغًا لحَلّ المسائل في مباحث أخرى؟ تختلف إجابات الطلبة
- ما الطرق التي تتذكر بها صيغ هذا الفصل؟ انظر إجابات الطلبة
- ما الصيغ التي تعرف طريقة اشتقاقها إذا لم تتذكرها بصورة دقيقة؟ انظر إجابات الطلبة

استعمل صيغة

من الضروري أحيانًا استعمال صيغة لحل المسائل في الاختبارات المعيارية .

ويمكن في بعض الحالات أن تُعطى قائمة الصيغ التي يُسمح لك بالرجوع إليها في أثناء تقديم الاختبار.

صيغ



محيط الدائرة ومساحتها $C = 2\pi r$ $A = \pi r^2$	مساحة المستطيل $A = \ell w$	مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$	نظرية فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$	مثلثات قائمة خاصة	حجم متوازي المستطيلات $V = \ell wh$	حجم الأسطوانة $V = \pi r^2 h$

يوجد °360 درجة في الدائرة.
مجموع قياسات زوايا المثلث °180

استراتيجيات استعمال صيغة

الخطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حلّه؟
- ما المعطيات في المسألة؟
- هل توجد صيغ يمكنني استعمالها؛ لمساعدتي على حل المسألة؟

الخطوة 2

حُلّ المسألة.

- عوّض الكميات المعطاة في نص المسألة في الصيغة.
- بسّط؛ لإيجاد القيم المجهولة في الصيغة.

الخطوة 3

تحقّق من الحل.

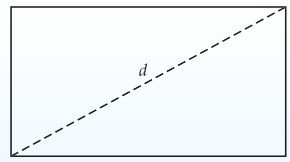
- حدّد مدى معقولًا لقيم الإجابة.
- تحقّق من معقولية إجابتك.
- تحقّق من إجابتك، إذا سمح الوقت بذلك.

الفصل 1 التهيئة للاختبارات المعيارية

مثال

أقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها.

نسبة عرض شاشة تلفاز إلى ارتفاعها 16:9 . ويُعطى قياس التلفاز بدلالة طول قطر شاشته. إذا كان ارتفاع شاشة تلفزيون 25.5 in ، فما قياس شاشته إلى أقرب بوصة؟



25.5 in

A 48 in **C** 51 in

B 50 in **D** 52 in

اقرأ نص المسألة بعناية. عُلم ارتفاع الشاشة، ونسبة العرض إلى الارتفاع. والمطلوب إيجاد طول قطر الشاشة. يمكنك استعمال **نظرية فيثاغورس** لحل المسألة.

اكتب تناسبًا باستعمال النسبة 16:9 وحُلّه؛ لإيجاد عرض الشاشة.

$\frac{16}{9} = \frac{w}{25.5}$ ← عرض الشاشة ← ارتفاع الشاشة

$9w = 408$ خاصية الضرب التبادلي

$w = 45\frac{1}{3}$ بقسمة كل طرف على 9

لذا فإن عرض الشاشة $45\frac{1}{3}$ in . والآن استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد طول قطر الشاشة.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = (25.5)^2 + \left(45\frac{1}{3}\right)^2$ عوّض عن a ، b

$c \approx 52.01$ بالتبسيط، وبأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل من الطرفين لإيجاد c

طول قطر الشاشة 52 in تقريبًا، فالإجابة الصحيحة هي D

تمارين

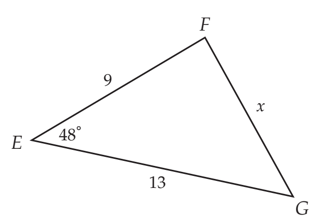
اقرأ المسألة في السؤالين الآتيين وحدّد المطلوب. ثم استعمل المعطيات لحلها.

1) يطيّر جاسم طائرةً ورقيةً متصلة بخيط مشدود، وطرفه الآخر بيده. إذا كان ارتفاعها فوق سطح الأرض 54 m، وبُعدها الأفقي عن مكان وقوفه 40 m، فما طول خيط الطائرة مقربًا إلى أقرب متر؟ B

A 62 m **C** 69 m

B 67 m **D** 72 m

2) ما قيمة x في الشكل أدناه، مقرّبة إلى أقرب عُشر؟ F

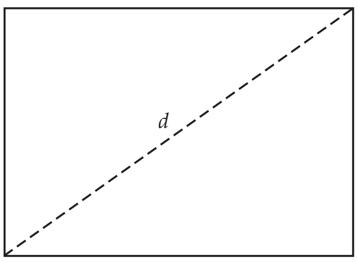


F 9.7 **G** 10.2 **H** 10.5 **J** 11.1

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري

نسبة عرض شاشة تلفاز إلى ارتفاعه تساوي 4:3. يُعطى قياس التلفاز بدلالة قطر شاشته. إذا كان عرض تلفاز 21.6 in. فما قياس الشاشة إلى أقرب بوصة؟ B



21.6 in

A 16 in

B 27 in

C 38 in

D 42 in

3 التقويم

استعمل التمرينين 1,2؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملًا لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) F خطأ في استعمال قانون المسافة بين نقطتين
G خطأ حسابي
H خطأ في استعمال قانون المسافة بين نقطتين
J الإجابة الصحيحة

2) F خطأ حسابي
G خطأ حسابي
H الإجابة الصحيحة
J خطأ حسابي

3) A الإجابة الصحيحة
B خطأ في المفهوم
C خطأ في استعمال قانون المسافة بين نقطتين
D خطأ في استعمال قانون المسافة بين نقطتين

4) A خطأ في المفهوم
B خطأ حسابي
C الإجابة الصحيحة
D خطأ حسابي

5) F ضرب طول الضلع في $\sqrt{3}$ بدلًا من $\sqrt{2}$
G خطأ حسابي
H الإجابة الصحيحة
J خطأ حسابي

6) A الإجابة الصحيحة
B خطأ في استعمال قانون جيب التمام
C خطأ حسابي
D خطأ حسابي

7) F استعمال نسبة مثلثية خاطئة.
G استعمال نسبة مثلثية خاطئة.
H خطأ حسابي
J الإجابة الصحيحة

8) A خطأ في المفهوم
B الإجابة الصحيحة
C خطأ حسابي
D خطأ في المفهوم

9) F الإجابة الصحيحة
G خطأ حسابي
H خطأ حسابي
J استعمال نسبة مثلثية خاطئة.

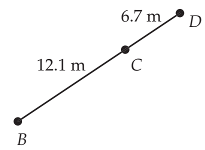
أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) ما المسافة بين النقطتين $N(2, 8)$ ، $M(-3, 1)$ ؟ J

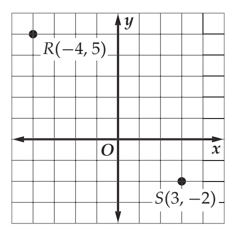
F 6.1 وحدة
G 6.9 وحدة
H 7.3 وحدة
J 8.6 وحدة

2) ما طول القطعة المستقيمة BD ؟ H



F 17.4 m
G 18.3 m
H 18.8 m
J 19.1 m

3) ما المسافة بين النقطتين R ، S المبينة في المستوى الإحداثي أدناه؟ A

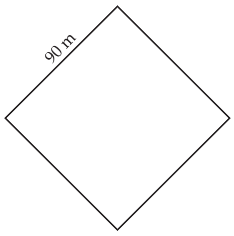


A $7\sqrt{2}$
B 7
C $\sqrt{10}$
D $\sqrt{5}$

4) ما الوسط الهندسي للعددين 24 , 25 ؟ C

A 7
B $6\sqrt{10}$
C $10\sqrt{6}$
D $20\sqrt{3}$

5) ساحة مربعة الشكل طول ضلعها 90 m، ما طول قطر هذه الساحة مقرّبًا إلى أقرب عُشر؟ H

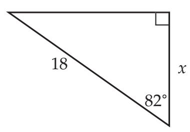


F 155.9 m
G 141.6 m
H 127.3 m
J 118.2 m

6) ما قياس الضلع الثالث في $\triangle TUV$ الذي فيه $u = 17$, $t = 11$ ، $m\angle V = 78°$ ؟ A

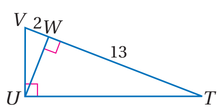
A 18.2
B 19.3
C 21.2
D 28.1

7) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ مقرّبة إلى أقرب عُشر. J



F 18.2
G 17.8
H 7.7
J 2.5

8) ما قياس الارتفاع المرسوم على الوتر في الشكل أدناه؟ B



A $\sqrt{15}$
B $\sqrt{26}$
C 13
D 26

9) يُطيّر صلاح الدين طائرةً ورقيةً مربوطة بخيط طوله 350 ft ، وزاوية ارتفاع الطائرة 74° . كم ترتفع الطائرة فوق سطح الأرض، مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر؟ F

F 336.4 ft
G 295.96 ft
H 141.2 ft
J 96.5 ft

الفصل 1 اختبار معياري للفصل 1

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

بناء الاختبارات التقويم

التقويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات؛ لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل: اختبارات Timss أو NAEP.

بديل الواجب المنزلي

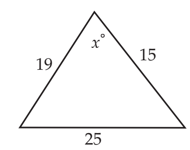
التهيئة للفصل الثاني تُعطى الأسئلة الواردة في الصفحة 83 واجبًا منزليًّا للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم المتطلبات السابقة للفصل 2.

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

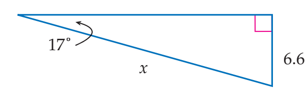
10) أوجد قيمة x في الشكل أدناه، مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب درجة، إذا لزم ذلك.

$94°$



11) في $\triangle PQR$، إذا كان $r = 3\sqrt{3}$، $q = \sqrt{15}$، $p = 2\sqrt{3}$
فأوجد قياس الزاوية Q إلى أقرب عُشر الدرجة. $48.2°$

12) أوجد قيمة x إلى أقرب عُشر في الشكل أدناه. $22.6°$



13) يقلع نموذج طائرة بزاوية ارتفاع $30°$. كم يكون ارتفاعه بعد أن يقطع 100 ft أفقيًّا؟ مقرِّبًا إلى أقرب عُشر. وضّح إجابتك. **57.7 ft**

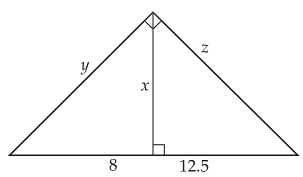
14) منحدر يصنع زاوية ارتفاع قياسها $24.4°$ مع المستوى الأفقي لسطح الأرض، وترتفع أعلى نقطة في هذا المنحدر عن سطح الأرض بمقدار 300 m. أوجد طول المنحدر مقرِّبًا الناتج إلى أقرب متر. **726 m**

15) في $\triangle KLM$، إذا كان $k = 10, m = 4.8, m\angle K = 96°$، فأوجد قياس الزاوية M إلى أقرب درجة. $29°$

سؤال ذو إجابة مطولة

سجّل إجاباتك على ورقة مبيّنًا خطوات الحَلّ.

16) أوجد قيمة كل من x, y, z في الشكل أدناه، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. وضّح إجابتك.



$x = 10.0$

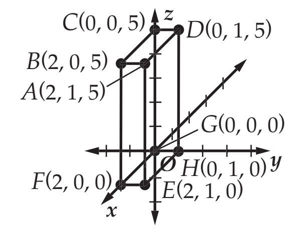
$y = 12.8$

$z = 16.0$

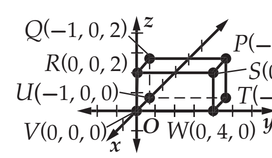
هل تحتاج مساعدة إضافية؟																
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
اذهب إلى الدرس ...	1-1	1-1	1-1	1-2	1-3	1-6	1-4	1-2	1-5	1-6	1-4	1-4	1-5	1-5	1-6	1-2

الدرس 1-1 (توسّع) ص 24

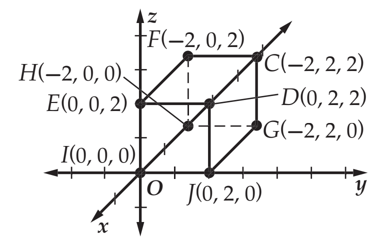
1)



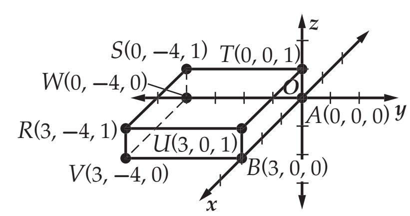
2)



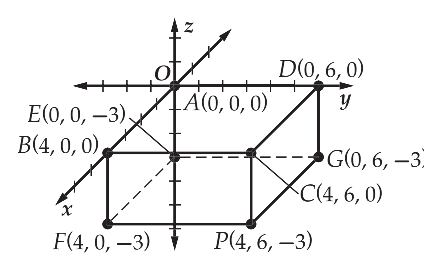
3)



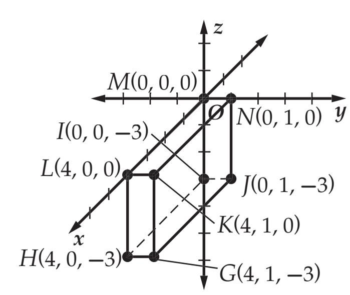
4)



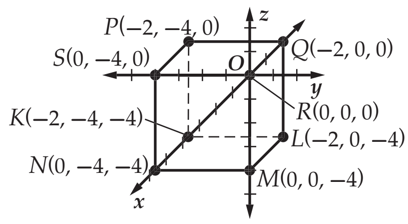
5)



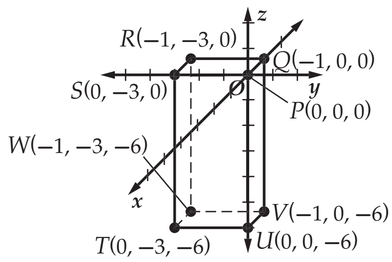
6)



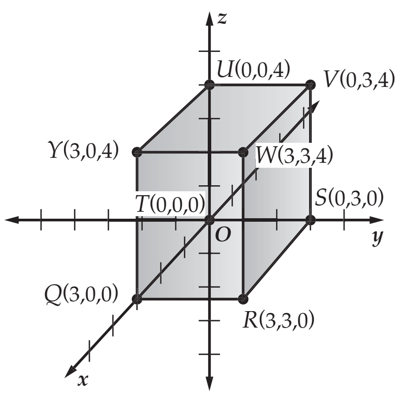
7)



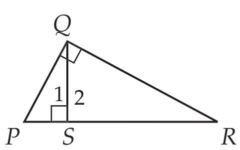
8)



9)



الدرس 2-1 ص 31, 32



38) المعطيات: $\angle PQR$ قائمة .

$\overline{QS}$ ارتفاع في $\triangle PQR$.

المطلوب إثبات أن $\triangle PSQ \sim \triangle PQR$

$\triangle PQR \sim \triangle QSR$

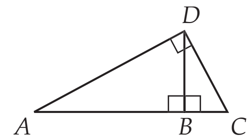
$\triangle PSQ \sim \triangle QSR$

البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\angle PQR$ قائمة
2) معطيات	2) $\overline{QS}$ ارتفاع في $\triangle PQR$
3) تعريف الارتفاع	3) $\overline{QS} \perp \overline{RP}$
4) تعريف تعامد مستقيمين	4) $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان
5) الزوايا القوائم متطابقة	5) $\angle 1 \cong \angle PQR, \angle 2 \cong \angle PQR$
6) تطابق الزوايا يحقق خاصية الانعكاس	6) $\angle P \cong \angle P, \angle R \cong \angle R$
7) التشابه بـ AA ، العبارتان 5, 6	7) $\triangle PSQ \sim \triangle PQR,$ $\triangle PQR \sim \triangle QSR$
8) تشابه المثلثات يحقّق خاصية التعدي	8) $\triangle PSQ \sim \triangle QSR$

39) المعطيات: $\triangle ADC$ قائم.

$\overline{DB}$ ارتفاع في $\triangle ADC$.

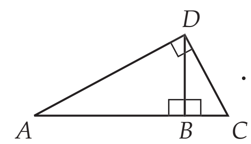


المطلوب إثبات ان: $\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{CB}$

البرهان: معطى أن $\triangle ADC$ قائم و $\overline{DB}$ ارتفاع $\triangle ADC$ ، $\angle ADC$ قائمة حسب تعريف المثلث القائم. لذلك، $\triangle ADB \sim \triangle DCB$ ؛ لأنه إذا رُسم ارتفاع من رأس الزاوية القائمة إلى وتر المثلث القائم، فإن المثلثين المتكونين متشابهان و يشابهان المثلث الأصلي. وينتج من التشابه أن: $\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{CB}$ حسب تعريف المثلثات المتشابهة.

40) المعطيات: $\angle ADC$ قائمة

$\overline{DB}$ ارتفاع في $\triangle ADC$.



المطلوب: إثبات أن $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}, \frac{BC}{DC} = \frac{DC}{AC}$

البرهان:

(المبررات) العبارات

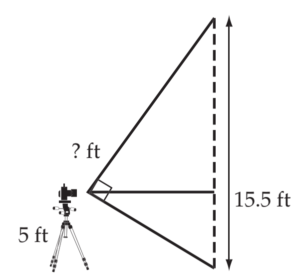
1) $\angle ADC$ قائمة . $\overline{DB}$ ارتفاع في $\triangle ADC$. (معطيات)

2) $\triangle ADC$ قائم. (تعريف المثلث القائم)

3) $\triangle ABD \sim \triangle ADC, \triangle DBC \sim \triangle ADC$. (إذا رُسم ارتفاع من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر في المثلث القائم، فإن المثلثين المتكوّنين متشابهان و يشابهان المثلث الأصلي)

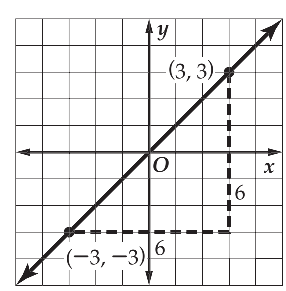
4) $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}, \frac{BC}{DC} = \frac{DC}{AC}$. (تعريف المثلثات المتشابهة)

41a)



الدرس 4-1 ص 53

60) إجابة ممكنة :



الميل يساوي $1 = \frac{6}{6} = \frac{-3-3}{-3-3}$.

بما أن الميل يساوي 1 ، و الميل يساوي التغيّر الرأسي على التغيّر الأفقي. و الذي هو tan 45° أو tan 225°. وباستعمال الآلة الحاسبة نجد أن كلًّا منهما يساوي 1.

65) إجابة ممكنة : لإيجاد قياس زاوية حادة في مثلث قائم يمكن إيجاد نسبة الضلع المقابل للزاوية إلى الوتر، ومن ثم استعمال الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس الزاوية باستعمال معكوس الجيب. و يمكن إيجاد نسبة الضلع المجاور للزاوية إلى الوتر واستعمال الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس الزاوية باستعمال معكوس جيب التمام. أو يمكن إيجاد نسبة الضلع المقابل للزاوية إلى الضلع المجاور لها واستعمال الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس الزاوية باستعمال معكوس الظل.

الفصل 2

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (83)

	الدرس 2-1 3 حصص	الدرس 2-2 3 حصص	الدرس 2-3 3 حصص	الدرس 2-4 3 حصص
العنوان	**الدائرة ومحيطها**	**قياس الزوايا والأقواس**	**الأقواس والأوتار**	**الزوايا المحيطية**
الأهداف	• تحديد عناصر الدائرة واستعمالها . • حل مسائل تتضمن محيط الدائرة .	• تعيين الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى، والأقواس الصغرى، ونصف الدائرة، وإيجاد قياسها. • إيجاد طول القوس .	• تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار واستعمالها. • تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار واستعمالها.	• إيجاد قياس الزاوية المحيطية . • إيجاد قياس زوايا المضلعات المحاطة بدائرة .
المفردات الأساسية	الدائرة المركز نصف القطر الوتر القطر الدوائر المتطابقة الدوائر المتحدة في المركز محيط الدائرة باي (π) مُحاط بِ مُحيط بِ	الزاوية المركزية القوس القوس الأصغر القوس الأكبر نصف الدائرة الأقواس المتطابقة الأقواس المتجاورة طول القوس		الزوايا المحيطية القوس المحدود
تمثيلات متعددة	ص (90)	ص (100)		ص (116)
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (10) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (11) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (12) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الهندسة باليدويات دون ضمن	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق • اختبار منصف الفصل دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الهندسة باليدويات دون ضمن
التقنيات لكل درس	• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية	• البحث في المواقع الإلكترونية
تنويع التعليم	ص (86, 87)	ص (95, 96, 99)	ص (105, 109)	ص (111, 112, 117)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (118)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الدائرة

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(24) حصة	(2) حصة	(26) حصة

حصتان ونصف	توسع 2-5 حصة	الدرس 2-6 3 حصص	الدرس 2-7 3 حصص	حصتان ونصف
المماسات	**معمل الهندسة : الدوائر المحُاطة بمثلث والدوائر التي يحيط بها مثلث**	**القاطع والمماس وقياس الزوايا**	**قطع مستقيمة خاصة في الدائرة**	**معادلة الدائرة**
• استعمال خصائص المماسات؛ لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة. • حل مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة .	• إنشاء دائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل. • إنشاء مثلث يحيط بدائرة	• إيجاد قياس الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها. • إيجاد قياس الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.	• إيجاد قياس الأوتار التي تتقاطع داخل الدائرة. • إيجاد قياس القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج الدائرة.	• كتابة معادلة الدائرة . • تمثيل الدائرة في المستوى الإحداثي بيانيًا.
المماس نقطة التماس المماس المشترك		القاطع	قطعة القاطع الخارجية	محل هندسي مركب
		ص (135)		ص (148)
مصادر الفصل 2 • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات ضمن فوق • كتاب التمارين، ص (14) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الهندسة باليدويات دون ضمن	**المواد اللازمة** • مسطرة غير مدرَّجة • فرجار **مصادر إضافية** • تدريس الهندسة باليدويات دون ضمن	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون فوق • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (15) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (16) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (17) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 4 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
• مدونة		• تسجيل فيديو	• الموقع الإلكتروني	• السبورة التفاعلية
ص (121, 122)		ص (129, 130, 136)	ص (138, 139)	ص (146, 149)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة، ص (150-154)
- اختبار الفصل، ص (155)

الفصل 2

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 2	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الثاني ,ص(83)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (83)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	خلال كل درس وبعده			
	الأمثلة، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	تنبيه!	دليل المعلم	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (118)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 1، ص (150-154)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (155)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري تراكمي، ص (158 ، 159)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	بعد انتهاء الفصل 2			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

تنويع التعليم

البديل 1 جميع مستويات الطلبة فوق ضمن دون

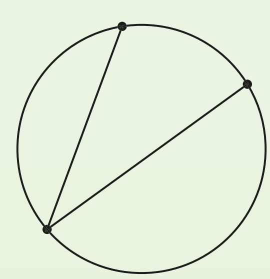
المتعلمون الحركيون التفاعليون ارسم دوائر كبيرة على مواقف السيارات أو على أيّ منطقة سوداء اللون في حَرَم المدرسة. ومن أجل رسم دائرة مثالية أربط طرف الطبشورة بحبل، ثم اطلب من أحد الطلبة الإمساك بأحد طرفي الحبل جيدًا مع شدِّه، وهذا يمثل مركز الدائرة. وبالمقابل يمسك طالب آخر الطرف الآخر مع الاحتفاظ بشد الحبل أثناء سيره بشكل دائري ورسمه للدائرة الكبيرة.

إذا كان بالإمكان ارسم عدة دوائر. وسمها A، B، C، D، ... وهكذا. اطلب إلى الطلبة العمل سويًّا لإيجاد محيط كل دائرة. يجب أن ينتقلوا من دائرة إلى الأخرى ويدونوا نتائجهم على أوراق مثبتة على لوح صغير. اطلب إليهم عرض الإستراتيجيات التي استعملوها أمام الصف عند عودتهم إلى غرفة الصف.

المتعلمون الحركيون / المنطقيون وفر للطلبة فرصة فَهم تعريف الدائرة بشكل أفضل من خلال رسم دائرة دون استعمال الفرجار. اطلب إليهم أن يكونوا مبدعين ويفكروا في أدوات يمكن استعمالها لرسم دائرة تامة عند عدم توفر الفرجار. واطلب إلى الطلبة استعمال هذه الأدوات قبل بداية الفصل ووضع تعريف خاص بهم لمصطلح الدائرة.

البديل 2 دون المستوى دون

نظّم الطلبة في مجموعات صغيرة من ذوي قدرات مختلفة. استعمل لوحًا من الفلين، ودبابيس، ودوائر مقصوصة وحلقات مطاطية لصنع نماذج للزوايا المحيطية. ضع الدائرة على لوح الفلين وضع عليها دبوسين لتمثيل طرفي القوس المحدود ثم قم بلَفْ حلقة المطاط حول الدبابيس، ثم استعمل قلم الرصاص واسحب حلقة المطاط إلى الجهة المقابلة من الدائرة لتمثيل رأس الزاوية المحيطية. يمكن للطلبة تحريك القلم على الدائرة واستعمال المنقلة لقياس الزاوية وسيجدون أن قياس الزاوية يبقى ثابتًا.



البديل 3 فوق المستوى فوق

استعمل القرص المُدمج كنموذج، واطلب إلى الطلبة رسم دائرة حوله على قطعة من الورق. ثم اطلب إلى الطلبة وضع مسطرتين بجانب القرص من أجل تمثيل مماسين. اطلب من الطلبة تقريب المسطرتين بحيث يتكون مماسين متقاطعين على الورقة. اطلب إلى الطلبة أن يرسموا القطعتين المماسيتين من الدائرة لنقطة التقاطع وأن يقيسوا المسافة من الدائرة إلى نقطة التقاطع لإثبات أن القياسين متساويان.

الفصل
2

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 2

مواضيع ذات علاقة من الصف الثاني الإعدادي

- تقريب قيمة الأعداد غير النسبية أينما وردت (مثل $\sqrt{2}$ ، π).
- التواصل بالأفكار الرياضية باستعمال اللغة والأدوات الفعّالة والوحدات المناسبة والتمثيل البياني أو العددي أو المادي أو النماذج الجبرية.

الفصل 2

موضوعات ذات علاقة من الهندسة

- إيجاد أطوال الأقواس وقياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة في الدائرة.
- التعرف إلى أجزاء الدائرة وكتابة معادلتها، وحل مسائل تتضمن محيطها.
- استعمال الأنماط العددية والهندسية لصياغة تعميمات حول الخصائص الهندسية التي تتضمن خصائص علاقات الزوايا في الدائرة.

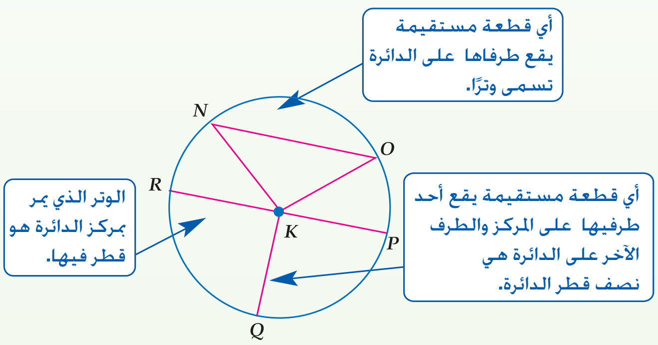
ما بعد الفصل 2

الإعداد لموضوعات في الجبر

- استعمال خصائص الدالة التربيعية الأم لتمثيل الدوال المرتبطة بها بيانيًّا. والربط بين صورتي الدالة التربيعية الآتيتين: $y = a(x - h)^2 + k$, $y = ax^2 + bx + c$.
- استعمال الدالة التربيعية الأم لاستقصاء ووصف وتوقع تأثير التغيير في قيم a, h, k على منحنى الدالة التربيعية $y = a(x - h)^2 + k$ في المواقف الرياضية البحتة والتطبيقية.

2-1 الدائرة ومحيطها

الدائرة هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة معلومة تسمى مركز الدائرة. وفي المستوى تُسمى الدائرة بمركزها. والقطعة المستقيمة التي يقع طرفاها على الدائرة تسمى وترًا. والوتر الذي يحوي مركز الدائرة هو قطر فيها. والقطعة المستقيمة التي يقع أحد طرفيها عند المركز والطرف الآخر على الدائرة تسمى نصف القطر. وأنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة. وكذلك أقطارها جميعها متطابقة أيضًا.



محيط الدائرة هو المسافة حول الدائرة. والنسبة بين محيط الدائرة وقطرها يساوي π دائمًا، إذا كان محيط دائرة يساوي C وحدة وقطرها d وحدة أو نصف قطرها r من الوحدات, فإن $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$.

2-2 قياس الزوايا والأقواس

الزاوية المركزية في الدائرة هي زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة. وتقسم الزاوية المركزية الدائرة إلى جزأين، يسمى كل منهما قوسًا.

يرتبط قياس كل من هذين القوسين بقياس زاويته المركزية، فقياس القوس الأصغر بالدرجات يساوي قياس الزاوية المركزية ويكون أقل من $180°$. وكذلك يُعدُّ نصف الدائرة أيضًا قوسًا قياسه يساوي $180°$. وهناك طريقة أخرى لقياس القوس، وهي بإيجاد طوله.

فالقوس جزء من الدائرة. لذا فطول القوس جزء من محيط الدائرة. والنسبة بين قياس القوس بالدرجات إلى $360°$ تساوي النسبة بين طول القوس إلى محيط الدائرة. ويمكنك استعمال هاتين النسبتين لإيجاد طول القوس.

2-3 الأقواس والأوتار

طرفا القوس هما أيضًا طرفا الوتر. وتوجد علاقات خاصة تربط الأقواس بالأوتار. في الدائرة الواحدة، أو في الدوائر المتطابقة، يكون القوسان الأصغران متطابقين إذا وفقط إذا كان الوتران المقابلان لهما متطابقين. ويكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان بعداهما عن مركز الدائرة متساويين.

يمكن أن تكون أوتار الأقواس المتجاورة مضلعًا، وهذا المضلع يسمى مضلعًا مُحاطًا بدائرة، وذلك لأن جميع رؤوسه تقع على الدائرة، ويقال إن الدائرة تحيط بالمضلّع.

الدائرة

2-4 الزوايا المحيطية

الزاوية المحيطية هي زاوية يقع رأسها على الدائرة ويحتوي ضلعاها وترين في الدائرة. وقياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها (أو قياس القوس المحدود بالزاوية المحيطية يساوي ضِعف قياس هذه الزاوية). في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة، إذا كانت زاويتان محيطيتان تحدان القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإنهما متطابقتان.

وهناك خصائص خاصة تتعلق بالمضلعات المحاطة بدائرة. فالمثلث المحاط بدائرة الذي يكون أحد أضلاعه قطرًا للدائرة يكون نوعًا خاصًا من أنواع المثلثات. والزاوية المحيطية التي تحدد نصف دائرة، هي زاوية قائمة. وإذا كان الشكل الرباعي دائريًا (محاطًا بدائرة)، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتين.

2-5 المماسات

يقطع المماس الدائرة في نقطة واحدة فقط تُسمى نقطة التماس. ويكون المستقيم مماسًا للدائرة إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر المار بنقطة التماس.

ويمكن أن يكون هناك أكثر من مماس للدائرة نفسها. وإذا رُسم مماسان للدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.

ويمكن أن تحاط الدوائر بالمضلعات بحيث يكون كل ضلع من أضلاع المضلع مماسًا للدائرة، مثلما يمكن أن يحاط المضلع بدائرة بحيث تقع رؤوس المضلع على الدائرة.

2-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين بالضبط يسمى قاطعًا. إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس الزاوية المتكونة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المحدودين بهذه الزاوية والزاوية المقابلة لها بالرأس.

ويمكن أن يتقاطع القاطع مع المماس عند نقطة التماس. ففي هذه الحالة يكون قياس كل زاوية متكونة يساوي نصف قياس القوس المحدود بها. وكذلك يمكن أن تتقاطع القواطع والمماسات خارج الدائرة. فإذا تقاطع قاطعان أو مماسان أو قاطع ومماس خارج الدائرة فإن قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المحدودين بها.

2-7 قِطَع مستقيمة خاصة في الدائرة

إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الثاني.

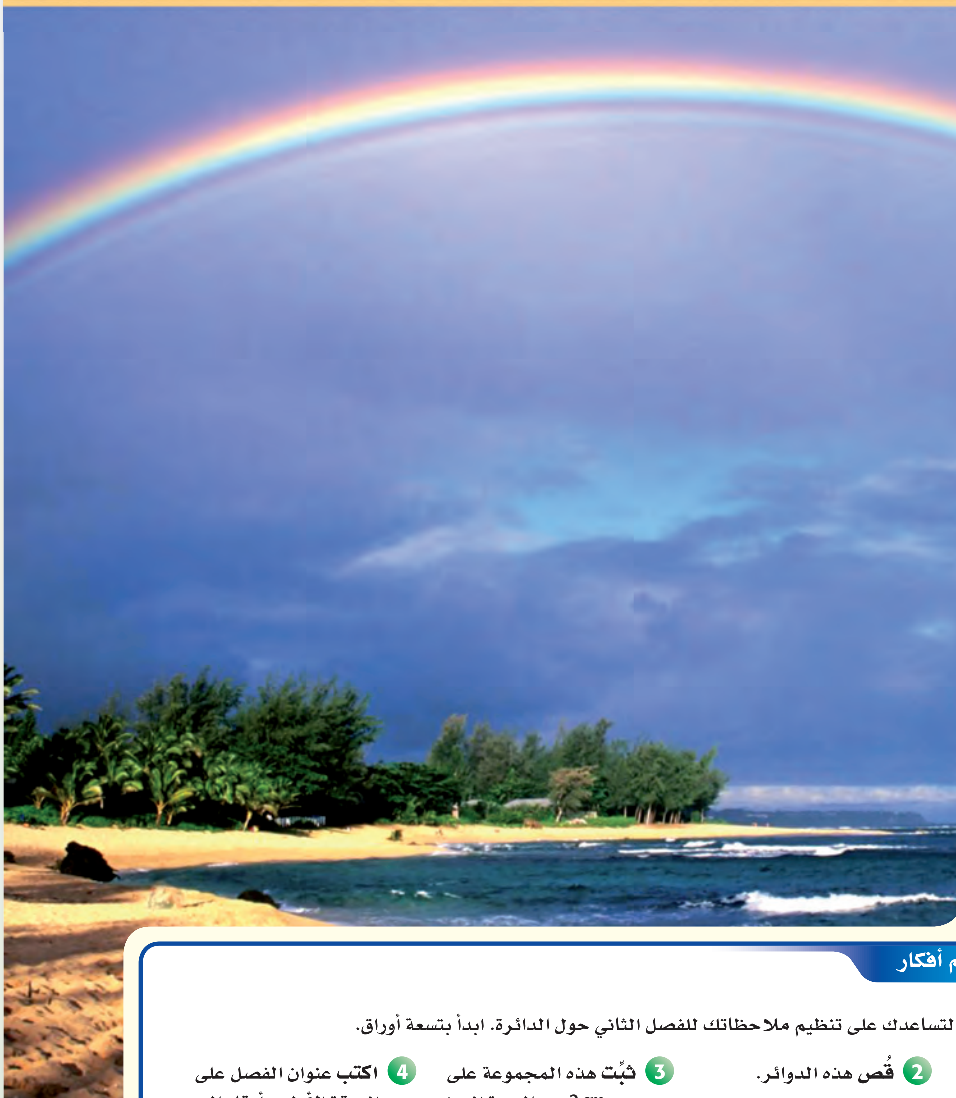
ويمكنك استعمال الأوتار المتقاطعة لإيجاد قياس الأقواس.

إذا رُسمت قطعتان تمثلان قاطعين من نقطة خارج الدائرة فإن حاصل ضرب طولي القاطع والقطعة الخارجية يساوي حاصل ضرب طولي القاطع الآخر في قطعته الخارجية. ويمكن تطبيق هذه العلاقة على القاطع وقطعة المماس المرسومتين من نقطة خارج دائرة، وفي هذه الحالة يكون مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه.

2-8 معادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند (h , k) ونصف قطرها r وحدة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. ويمكنك تحليل معادلة الدائرة لإيجاد معلومات تمكنك من تمثيلها في المستوى الإحداثي بيانيًا. وعندما تعرف إحداثيات مركز الدائرة ونصف قطرها يمكنك كتابة معادلتها وتمثيلها بيانيًا.

الفصل 2 الدائرة
Circle



فيما سبق
درستُ أنواعًا من القطع المستقيمة الخاصة، وعلاقات الزوايا في المثلث.

والآن
الأفكار العامة
- أتعرف العلاقة بين الزوايا المركزية، والأقواس، والزوايا المحيطية في الدائرة.
- أعرِّف القاطع والمماس، وأستعملهما.
- أعرف الدائرة أو أصفها مستعملاً معادلتها.

لماذا؟
علوم الشكل الحقيقي لقوس المطر هو دائرة كاملة، ويُسمَّى الجزء الذي يمكن رؤيته منها فوق الأفق قوسًا.

مطويتك منظم أفكار

الدائرة: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الثاني حول الدائرة. ابدأ بتسعة أوراق.

1. **ارسم** دائرة طول قطرها 18 cm على كل ورقة باستعمال الفرجار.
2. **قُص** هذه الدوائر.
3. **ثبِّت** هذه المجموعة على بعد 2 cm من الجهة اليمنى للأوراق.
4. **اكتب** عنوان الفصل على الورقة الأولى وأرقام الدروس على الأوراق المتبقية.

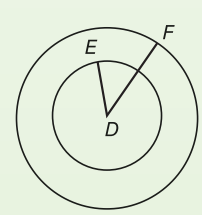
مشروع الفصل
رشاشات الري المحورية
يستعمل الطلبة ما تعلموه عن خصائص الدائرة لرسم دوائر تمثل محاصيل يتم ريّها باستعمال رشاشات محورية.

- تعد الرشاشات المحورية من أهم أنظمة الري الحديثة، حيث يمكن من خلالها ري مساحات كبيرة من الأراضي وبكميات محدودة من المياه.
  اطلب إلى الطلبة أن يبحثوا عن تاريخ استعمال هذه التقنية في الزراعة، واسأل: ما أنواع المحاصيل الزراعية التي تُروى باستعمال الرشاشات المحورية؟ إلى أيٍّ مدى يصل طول الرشاشات المحورية؟
- اطلب إلى الطلبة رسم دوائر تمثل محاصيل متجاورة ومتفاوتة الأقطار على ورقة مقواة باستعمال القلم والخيط والمسطرة، واسأل: كيف يمكنك أن تستعمل الخيط والقلم لرسم دوائر بأقطار مختلفة؟ كيف يمكنك استعمال المماسات والمثلثات لتحديد مراكز دوائر جديدة في تصميمك؟
- اطلب إليهم عرض تصاميم دوائر المحاصيل التي رسموها، وتوضيح كيف استعملوا الخصائص الهندسية للدائرة في إنشاء هذا التصميم.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية لهذا الفصل باستعمال الآتي:

التعريف: الدوائر المتحدة بالمركز هي دوائر مرسومة على المستوى نفسه وتشترك بالمركز نفسه.

مثال:



سؤال: هل الدوائر المستوية متشابهة أم متطابقة؟ وضح إجابتك. الدوائر متشابهة لأن لها الشكل نفسه. ولكن هذه الدوائر ليست متطابقة لأن لها أنصاف أقطار مختلفة.

مطويتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة فيها ملاحظاتهم أثناء دراستهم للدائرة في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل، لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجّع الطلبة في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم
CRM مسرد مفردات الطالب

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضًا للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومُخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.

كما تساعد العبارة "إذا ... فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	**ضمن المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية :
مصادر الفصل	بنك المفاهيم و المهارات، تدريبات المهارات
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين :
مصادر الفصل	دليل الدراسة و المعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل الثاني

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1 أجب عن أسئلة الاختبار الآتي، وارجع إلى" المراجعة السريعة " لمساعدتك على ذلك.

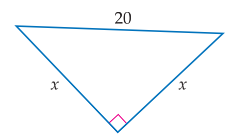
اختبار سريع

أوجد النسبة المئوية من العدد المُعطى في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

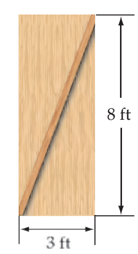
1) 26% من 500 **130**
2) 79% من 623 **492.17**
3) 19% من 82 **15.58**
4) 10% من 180 **18**
5) 92% من 90 **82.8**
6) 65% من 360 **234**

7) **مطاعم:** يُضيف مطعم رسم خدمة قدره 5% على كل وجبة يقدمها. إذا تناول حامد وجبة غداء سعرها 4 BD، فما رسم الخدمة الذي دفعه إلى المطعم؟ **BD 0.2**

8) أوجد قيمة x مقربًا الناتج إلى أقرب عشر. (مهارة سابقة) **14.1**



9) **بناء:** أراد أحمد أن يضع دعامة على لوح من الخشب، كما في الشكل المجاور. ما طول هذه الدعامة؟ **8.5 ft**



حُلّ كلاً من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام لحَلّ المعادلة التربيعية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة)

10) $5x^2 + 4x - 20 = 0$ **1.6, −2.4**

11) $x^2 = x + 12$ **−3, 4**

12) **ألعاب نارية:** أطلقت ألعاب نارية في الهواء احتفاءً باليوم الوطني. ولم تنفجر إحدى هذه الألعاب، إذا كان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يُعطى بـ $d = 80t - 16t^2$، فبعد كم ثانية تصل سطح الأرض؟ **5 sec**

مراجعة سريعة

مثال 1

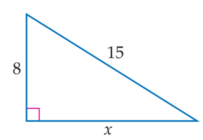
أوجد قيمة 15% من 35 .

بتغيير النسبة إلى كسر عشري	$= (0.15)(35)$
بالضرب	$= 5.25$

إذن، 15% من 35 تساوي 5.25

مثال 2

أوجد قيمة x . مقربة إلى أقرب عشر.



نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بالتعويض	$x^2 + 8^2 = 15^2$
بالتبسيط	$x^2 + 64 = 225$
بالطرح	$x^2 = 161$
	$x = \sqrt{161} \simeq 12.7$

مثال 3

حُلّ المعادلة $x^2 + 3x - 40 = 0$ باستعمال القانون العام مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر.

القانون العام لحَلّ المعادلة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
التعويض	$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$
بالتبسيط	$= \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$
بالتبسيط	$= -8$ أو 5

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

2-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

تعيين عناصر متوازي الأضلاع واستعمالها .

الدرس 2-1

تعيين عناصر الدائرة واستعمالها.

حل مسائل تتضمن محيط الدائرة.

ما بعد الدرس 2-1

تعيين زوايا وأقواس في دائرة وإيجاد قياساتها.

2 التدريس

أسئلة تعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ماذا تمثل المسافة الذي يقطعها الراكب في الدورة الواحدة؟ محيط الدائرة
- كيف يمكننا استعمال العجلة الدوارة لقياس مسافة معينة؟ أوجد محيط العجلة الدوارة واضربه في عدد الدورات التي يدورها لقطع المسافة المراد قياسها.
- كيف تُستعمل فكرة قياس المسافة باستعمال العجلة الدوارة في الحياة الواقعية؟ إجابة ممكنة: في جهاز قياس المسافة في السيارة تستعمل دورات عجلات السيارة لقياس المسافة المقطوعة ويستعمل المساحون أيضًا عجلات لقياس المسافة وهكذا.
- لماذا يكون استعمال العجلة في القياس أحيانًا أفضل من القياس باستعمال المتر أو شريط القياس؟ إجابة ممكنة: يكون القياس بالعجلة متصلًا أي يقيس المسافة بشكل متصل أما المتر أو شريط القياس فيجب رفعه ونقله. ويمكن إيجاد قياسات المسافات التي يوجد فيها انحناءات بواسطة العجلة ولكن القياس بواسطة شريط القياس أو المتر لا يكون دقيقًا حول المنحنيات .

2-1 الدائرة ومحيطها
Circle and Circumference

فيما سبق

درستُ بعض عناصر الدائرة، واستعمالها.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحدِّد عناصر الدائرة وأستعملها.
- أحل مسائل تتضمَّن محيط الدائرة.

المفردات الأساسية

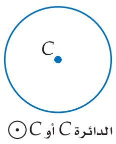
الدائرة circle
المركز center
نصف القطر radius
الوتر chord
القطر diameter
الدوائر المتطابقة congruent circles
الدوائر المتحدة في المركز concentric circles
محيط الدائرة circumference
باي (π) Pi
مُحاط بـ inscribed
محيط بـ circumscribed

www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟

إذا ركبت العجلة الدوارة، فإن بُعد موقعك عن محور دورانها يكون ثابتًا، فإذا كانت المسافة بين موقعك والمحور 44 ft ، فإنه يمكنك أن تجد المسافة التي تقطعها في الدورة الواحدة.

القطع المستقيمة في الدائرة **الدائرة** هي المحل الهندسي أو مجموعة النقاط في المستوى، والتي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة معلومة تُسمَّى **مركز** الدائرة. وعادة ما تسمى الدائرة بمركزها، والشكل المجاور يُبيّن الدائرة C التي يمكن أن يُرمز لها بالرمز ⊙C .



الدائرة C أو ⊙C

وللقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

مفهوم أساسي — قطع مستقيمة خاصة في الدائرة — أضف إلى مطويتك

نصف القطر هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها في المركز، و الطرف الآخر على الدائرة.

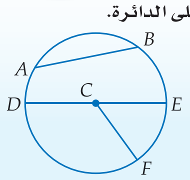
أمثلة $\overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}$ أنصاف أقطار في ⊙ C .

الوتر قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة.

أمثلة $\overline{AB}, \overline{DE}$ وتران في ⊙ C .

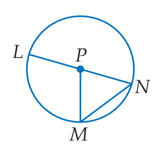
القطر هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكوّن من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة.

مثال $\overline{DE}$ قطر في ⊙ C . يتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفي القطرين $\overline{CD}, \overline{CE}$ الواقعين على استقامة واحدة.



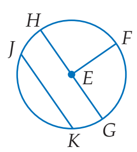
مثال 1 تعيين القطع المستقيمة في الدائرة

a) سمِّ الدائرة، وعيّن نصف قطر فيها.



مركز الدائرة هو P ، إذن يمكن تسميتها الدائرة P ، أو ⊙P . تظهر في الشكل ثلاثة أنصاف أقطار هي $\overline{PL}, \overline{PN}, \overline{PM}$.

b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.

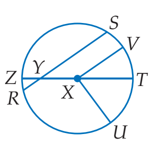


يظهر في هذه الدائرة وتران هما $\overline{JK}, \overline{HG}$ يمر $\overline{HG}$ بالمركز، إذن $\overline{HG}$ قطر .

✓ **تأكد**

1) سمِّ الدائرة، ونصف قطر، ووترًا، وقطرًا فيها.

الدائرة X، نصف القطر: $\overline{XV}$ أو $\overline{XT}$ أو $\overline{XU}$ أو $\overline{XZ}$ ، الوتر $\overline{RS}$ أو $\overline{TZ}$ القطر $\overline{TZ}$



مصادر الدرس 2-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (87)	• تنويع التعليم، ص (86,87)	• تنويع التعليم، ص (86)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

ومن تعريف الدائرة، فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة عليها ثابتة دائمًا، إذن، أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة. وبما أن قطر الدائرة يتكوّن من نصفَي قطرين، فإن أقطار الدائرة أيضًا جميعها متطابقة.

قراءة الرياضيات

القطر ونصف القطر تستعمل الكلمتان القطر ونصف القطر للتعبير عن الطول وعن القطع المستقيمة أيضًا. وبما أن للدائرة عدة أنصاف أقطار وعدة أقطار أيضًا. لذا، فإنه عند قولنا: نصف القطر أو القطر، فإننا نعني الطول وليس القطعة المستقيمة.

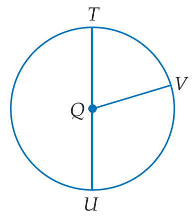
مفهوم أساسي **العلاقة بين القطر ونصف القطر** أضف إلى مطويتك

إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d ، فإن العلاقات الآتية صحيحة:

صيغة نصف القطر $r = \frac{1}{2}d$ أو $r = \frac{d}{2}$ صيغة القطر $d = 2r$

مثال 2 **إيجاد نصف القطر والقطر**

إذا كان $QV = 8\,cm$ ، فما قطر $\odot Q$؟



صيغة القطر $d = 2r$

بالتعويض والتبسيط $d = 2(8) = 16$

القطر في $\odot Q$ يساوي $16\,cm$.

تأكد

2A) إذا كان $TU = 14\,ft$ ، فما نصف قطر $\odot Q$ ؟ **7 ft**

2B) إذا كان $QT = 11\,m$ ، فأوجد QU. **11 m**

مراجعة المفردات

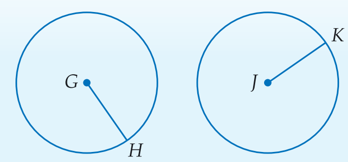
النقاط المستوية هي النقاط التي تقع في المستوى نفسه.

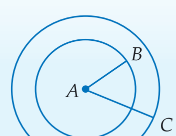
كما هو الحال في الأشكال الأخرى ، يمكن أن تكون أزواج الدوائر متطابقة، أو أن تربطهما بعض العلاقات الخاصة.

مفهوم أساسي **أزواج الدوائر المتطابقة** أضف إلى مطويتك

تكون **الدائرتان متطابقتين**، إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.

الدوائر المتحدة في المركز هي الدوائر المستوية التي لها المركز نفسه.





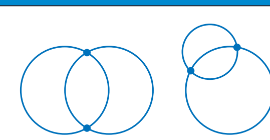
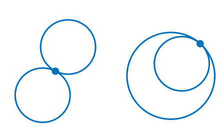
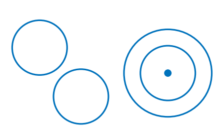
مثال $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ إذن، $\odot G \cong \odot J$.

مثال $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ و$\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ دائرتان متحدتان في المركز.

قراءة الرياضيات

إذا وفقط إذا العبارة (إذا وفقط إذا كان) تعني أنه يمكن تبديل الافتراض مع النتيجة، وتبقى العملية صائبة.

إذا تقاطعت دائرتان، فيمكن أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين على النحو الآتي:

تقاطع في نقطتين	تقاطع في نقطة واحدة	لا يوجد تقاطع
		

قطع مستقيمة في الدائرة

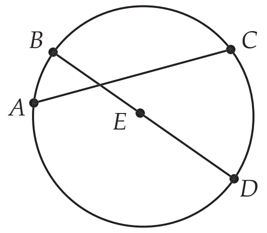
الأمثلة 3-1 تبين كيفية التعرّف على قطع مستقيمة في الدائرة وتحديدها، وإيجاد قياساتها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم .

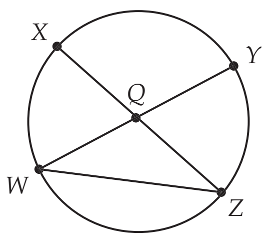
مثال إضافي

1 **a)** سمِّ الدائرة أدناه وعيّن نصف قطر فيها.



اسمها: الدائرة E أو $\odot E$
يظهر في الشكل نصفا قطرين هما $\overline{ED}$, $\overline{EB}$

b) عيّن وترًا وقطرًا للدائرة أدناه.



يوجد ثلاثة أوتار هي $\overline{WY}, \overline{XZ}, \overline{WZ}$
ويوجد قطران هما $\overline{WY}, \overline{XZ}$

التعليم باستعمال التقنيات

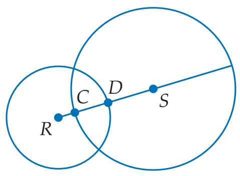
السبورة التفاعلية اعرض دائرة على السبورة واستعملها كنموذج لترسم فيها أنصاف أقطار وأقطار وأوتار.

يمكن أن تحوي القطعة المستقيمة التي تصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين على نصفَي قطرَي الدائرتين.

مثال 3 إيجاد قياسات في دائرتين متقاطعتين

قطر $\odot S$ يساوي 30 وحدة، وقطر $\odot R$ يساوي 20 وحدة، وDS يساوي 9 وحدات ، أوجد CD .

بما أن قطر $\odot S$ يساوي 30 ، فإن $CS = 15$ و $\overline{CD}$ جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.



مسلّمة جمع القطع المستقيمة	$CD + DS = CS$
بالتعويض	$CD + 9 = 15$
بطرح 9 من كلا الطرفين	$CD = 6$

تأكد

3) استعمل الشكل أعلاه ؛ لإيجاد RC . 4 وحدات

محيط الدائرة **محيط الدائرة** هو طول المنحنى المغلق الذي يُمثّل الدائرة، ويرمز له بالرمز C. وتُعرف النسبة $\frac{C}{d}$ بأنها عدد غير نسبي يُسمّى **باي (π)**. ويمكن استنتاج صيغتين لحساب محيط الدائرة باستعمال هذا التعريف.

تعريف π	$\frac{C}{d} = \pi$
بضرب الطرفين في d	$C = \pi d$
$d = 2r$	$C = \pi(2r)$
بالتبسيط	$C = 2\pi r$

مفهوم أساسي محيط الدائرة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كان قطر الدائرة يساوي d ونصف قطرها يساوي r ، فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π أو حاصل ضرب مثلي نصف القطر في π .

بالرموز $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مثال 4 من واقع الحياة إيجاد محيط الدائرة

تنس: أوجد محيط المهبط الدائري الموصوف في فقرة الربط بالحياة.

صيغة محيط الدائرة	$C = \pi d$
بالتعويض	$= \pi(79)$
بالتبسيط	$= 79\pi$
باستعمال الآلة الحاسبة	≈ 248.19

محيط المهبط الدائري يساوي 79π ft، أو 248.19 ft تقريبًا.

تأكد

أوجد محيط كلّ من الدائرتين الآتيتين مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

4A) نصف القطر يساوي 2.5 cm   15.71 cm

4B) القطر يساوي 16 ft   50.27 ft

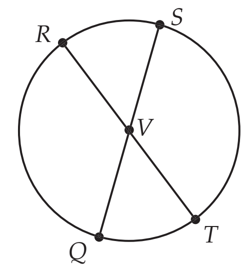
الربط مع واقع الحياة

أُقيمت في عام 2005، مباراة استعراضية في التنس على مهبط للطائرات العمودية فوق فندق برج العرب في الإمارات العربية المتحدة. يرتفع هذا المهبط الدائري 700 ft تقريبًا عن سطح الأرض، وقطره يساوي 79 ft .

المصدر: Burj Al Arab, Emporis Buildings

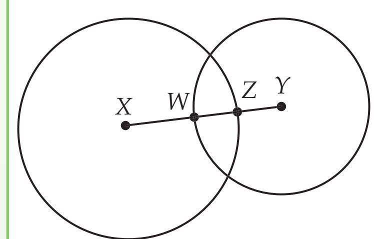
مثالان إضافيان

2 إذا كان $RT = 21$ cm، فأوجد طول $\overline{QV}$ ؟



10.5 cm

3 إذا كان قطر $\odot X$ يساوي 22 وحدة، وقطر $\odot Y$ يساوي 16 وحدة، و WZ يساوي 5 وحدات. أوجد XY. 14 وحدة



محيط الدائرة

محيط الدائرة هو المسافة حول الدائرة. **الأمثلة 4-6** تُبين كيفية إيجاد محيط الدائرة واستعماله.

مثال إضافي

4 **دوائر المحاصيل:** اكتشفت سلسة من دوائر المحاصيل في إحدى البلدان في الرابع من سبتمبر عام 1999. نصف قطر أكبر هذه الدوائر يساوي 30 ft. فأوجد محيطها؟ 188.50 ft تقريبًا

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة الإجابة عن السؤال الآتي: ضرب أحد الكويكبات سطح الأرض فأحدث فجوة ضخمة ذات فوّهة دائرية. قاس العلماء المسافة حول هذه الفوّهة فكانت 126.3 km. أوجد قطر هذه الفوّهة؟ 40.2 km تقريبًا

تنبيه !

القطر أونصف القطر في المسائل التي تتضمن الدوائر، انتبه جيدًا للتأكد ما إذا كانت المعطيات تتعلق بنصف قطر الدائرة أم بقطرها.

يمكنك باستعمال صيغتي حساب محيط الدائرة، وحساب قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها.

مثال 5 إيجاد القطر ونصف القطر

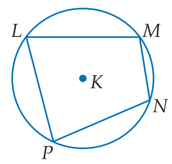
أوجد القطر ونصف القطر مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة للدائرة التي محيطها 106.4 mm .

صيغة محيط الدائرة	$C = \pi d$	صيغة نصف القطر	$r = \frac{1}{2}d$
بالتعويض	$106.4 = \pi d$	$d \approx 33.87$	$\approx \frac{1}{2}(33.87)$
بالقسمة على π	$\frac{106.4}{\pi} = d$	باستعمال الآلة الحاسبة	≈ 16.94 mm
باستعمال الآلة الحاسبة	$33.87 \text{ mm} \approx d$		

تأكد

5) إذا كان محيط دائرة يساوي 77.8 cm ، فأوجد قطر الدائرة ونصف قطرها مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة. **24.76 cm, 12.38 cm**

يكون المضلّع **محاطًا ب** دائرة إذ وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة. أي أن الدائرة **مُحيطة ب** المضلع، إذا احتوت على رؤوس هذا المضلع جميعها.



- فالشكل الرباعي $LMNP$ مُحاط بالدائرة K .
- و $\odot K$ مُحيطة بالمضلّع $LMNP$.

مثال 6 على اختبار معياري

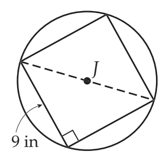
سؤال ذو إجابة قصيرة: طول ضلع مربع 9 in، مُحاط بالدائرة J . أوجد القيمة الفعلية لمحيط $\odot J$.

اقرأ فقرة الاختبار

احسب قطر الدائرة، واستعمله لحساب محيطها.

حُلّ فقرة الاختبار

ارسم شكلًا توضيحيًّا أولًا. يُمثّل قطر المربع قطرًا للدائرة أيضًا، ويكون وترًا لمثلث قائم الزاوية.



نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بالتعويض	$9^2 + 9^2 = c^2$
بالتبسيط	$162 = c^2$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين	$9\sqrt{2} = c$

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ in.

أوجد المحيط بدلالة π ، بتعويض $9\sqrt{2}$ لقيمة d في الصيغة $C = \pi d$.

محيط الدائرة يساوي $9\pi\sqrt{2}$ in.

تأكد

أوجد القيمة الفعلية لمحيط الدائرة في كل مما يأتي:

6A) إذا كانت محيطة بمثلث قائم الزاوية طولا ضلعي القائمة فيه 7 m , 3 m . $\pi\sqrt{58}$ **m**

6B) إذا كانت محيطة بمربع طول ضلعه 10 ft . **10π ft**

إرشادات للدراسة

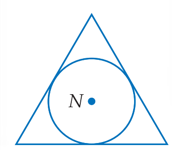
مستويات الدقّة

بما أن π عدد غير نسبي فلا يمكن كتابته على صورة كسر عشري منته. ولكن لأغراض الحصول على تقدير سريع في الحسابات، يمكن اعتبار قيمته 3. وإذا استعملت 3.14 أو $\frac{22}{7}$ فستحصل على تقريب أكثر دقة، وللحصول على التقريب الأكثر دقة، استعمل مفتاح π في الآلة الحاسبة. وحيثما وردت π في هذا الكتاب فإن قيمتها هي القيمة التي يعطيها المفتاح π في الآلة الحاسبة مالم يذكر خلاف ذلك.

إرشادات للدراسة

الدائرة المحيطة

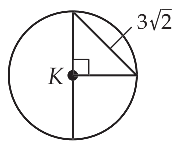
الدائرة المحيطة بمضلع هي الدائرة المارة برؤوس هذا المضلع. وتكون الدائرة محاطة بمضلع إذا مست جميع أضلاعه، كما هو مُبيّن في الدائرة N أدناه.



مثالان إضافيان

5 أوجد القطر ونصف القطر مقربين إلى أقرب جزء من مئة للدائرة التي محيطها يساوي 65.4 ft.
قطرها 20.82 ft تقريبًا
ونصف قطرها 10.41 ft تقريبًا

6 أوجد القيمة الفعلية لمحيط $\odot K$ في الشكل أدناه.



6π وحدة

التركيز في المحتوى الرياضي

الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية
يمكن أن يُحاط كل مثلث بدائرة تسمى الدائرة الخارجية، كما يمكن أن يحيط بدائرة تسمى الدائرة الداخلية. والمضلعات الرباعية (باستثناء المضلع على شكل الطائرة الورقية المحدبة) يمكن أن تحيط دائرة أو تحاط بدائرة فقط عندما تكون زاويتا الشكل الرباعي المتقابلتين متكاملتين. يمكن أن تُحيط جميع المضلعات على شكل الطائرات الورقية المحدبة بدوائر، وليس جميعها يمكن أن تحاط بدائرة. وأما المضلعات الأخرى فيجب أن تكون منتظمة حتى يمكن أن تُحاط بدائرة أو تحيط بدائرة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون وجّه الطلبة أن يستعملوا قطعة من خيط لتقدير محيط قرص أو اسطوانة. ثم اطلب إليهم قياس قطر هذا الشكل راجع معهم قوانين إيجاد محيط الدائرة باستعمال قطرها أو نصف قطرها. اطلب إلى الطلبة إيجاد محيط الدائرة بالطريقة الرياضية باستعمال القطر أو نصف القطر. ثم اطلب إليهم مقارنة النتيجة التي حصلوا عليه بالحسابات مع التقدير الذي حصلوا عليه باستعمال الخيط.

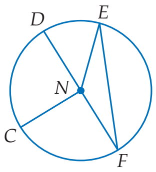
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 9-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تأكد من فهمك



المثالان 1, 2 الصفحتان 86, 87

للتمارين 4 – 1 ، ارجع إلى $\odot N$ في الشكل المجاور.

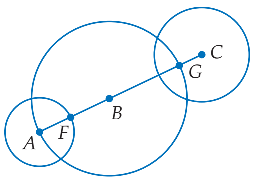
1) سمِّ هذه الدائرة. $\odot N$

2) حدّد كلًّا ممّا يأتي: **2c)** $\overline{NC}, \overline{ND}, \overline{NE}, \overline{NF}$

a) وترًا $\overline{EF}, \overline{DF}$ **b)** قطرًا $\overline{DF}$ **c)** نصف قطر

3) إذا كان $CN = 8$ cm ، فأوجد DN. **8 cm**

4) إذا كان $EN = 13$ ft ، فما قطر الدائرة؟ **26 ft**



مثال 3 صفحة 88

القطر لكلّ من $\odot A, \odot B, \odot C$ يساوي 8 cm, 18 cm, 11 cm على الترتيب. أوجد قياس كل مما يأتي:

5) FG **14 cm**

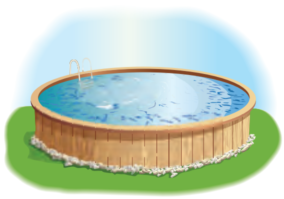
6) FB **5 cm**

مثال 4 صفحة 88

7) **عجلة دوارة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، ما نصف قطر العجلة الدوارة؟ وما محيطها؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة كلما لزم ذلك. **22 ft, 138.23 ft**

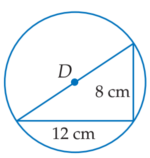
مثال 5 صفحة 89

8) **بركة سباحة:** محيط بركة السباحة الدائرية في الشكل المجاور يساوي 56.5 ft تقريبًا، ما قطر البركة، وما نصف قطرها؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة. **17.98 ft, 8.99 ft**

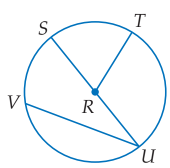


مثال 6 صفحة 89

9) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** المثلث القائم في الشكل المجاور مُحاط بالدائرة D. أوجد القيمة الفعلية لمحيط $\odot D$. **$4\pi\sqrt{13}$ cm**



تدرب وحل المسائل



المثالان 1, 2 الصفحتان 86, 87

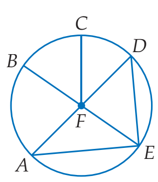
للتمارين 13 – 10 ، ارجع إلى $\odot R$ في الشكل المجاور.

10) ما مركز الدائرة؟ **R**

11) حدّد وترًا يكون قطرًا؟ **$\overline{SU}$**

12) هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ فسّر إجابتك. **لا، إنه وتر**

13) إذا كان $SU = 16.2$ cm، فأوجد RT. **8.1 cm**



للتمارين 17-14 ، ارجع إلى $\odot F$ في الشكل المجاور.

14) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا. **$\overline{AE}$ أو $\overline{DE}$**

15) إذا كان $CF = 14$ in، فما قطر الدائرة؟ **28 in.**

16) هل $\overline{AF} \cong \overline{EF}$ ؟ فسّر إجابتك. **نعم؛ كلاهما نصف قطر في $\odot F$**

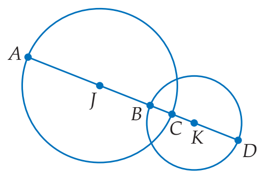
17) إذا كان $DA = 7.4$ cm ، فأوجد EF. **3.7 cm**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	10–34، 46 ، 47 ، 49 ، 51–62
ضمن المتوسط	11–33 فردي ، 34–40 زوجي ، 42–47 ، 49 ، 51–62
فوق المتوسط	35–58 ، (اختياري: 59–62)

مثال 3 صفحة 88

في الشكل المجاور إذا كان نصف قطر $\odot J$ يساوي 10 وحدات، ونصف قطر $\odot K$ يساوي 8 وحدات ، BC يساوي 5.4 وحدات، فأوجد قياس كلٍ ممّا يأتي:



18) CK **2.6**

19) AB **14.6**

20) JK **12.6**

21) AD **30.6**

مثال 4 صفحة 88

22) **بيتزا:** أوجد نصف قطر قرص البيتزا ومحيطها في الشكل المجاور مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك. **8 in, 50.27 in**

23) **درّاجات:** قطر إطار دراجة يساوي 26 in. أوجد نصف قطر الإطار ومحيطه مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك. **13 in, 81.68 in**

مثال 5 صفحة 89

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها في كلّ ممّا يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

24) $C = 18$ in **5.73 in, 2.86 in**

25) $C = 124$ ft **39.47 ft, 19.74 ft**

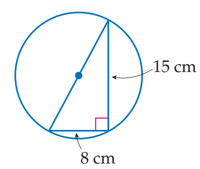
26) $C = 375.3$ cm

27) $C = 2608.25$ m

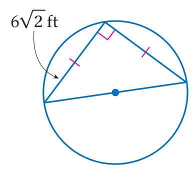
مثال 6 صفحة 89

أوجد القيمة الفعلية لمحيط كلّ من الدوائر الآتية، باستعمال المضلّع الذي تحيطه أو الذي يحيطها.

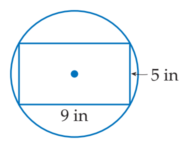
28)



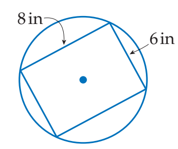
29)



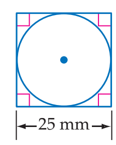
30)



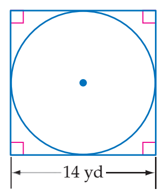
31)



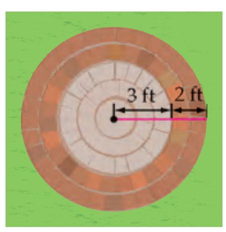
32)



33)



34) **فِناء:** أراد مصطفى أن يرصف فناءً دائري الشكل، كما في الشكل المجاور.



a) ما المحيط التقريبي لهذا الفناء؟ **31.42 ft**

b) إذا غيّر مصطفى خطة إنشاء هذا الفناء بحيث يصبح محيط الدائرة الداخلية 25 ft تقريبًا، فكم يكون نصف قطر الدائرة إلى أقرب قدم؟ **4 ft**

إذا عُلِم نصف القطر أو القطر أو المحيط في دائرة ما ، فأوجد القياسات المجهولة لكل مما يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

35) $d = 8\frac{1}{2}$ in, $r = \underline{\ ?\ }$, $C = \underline{\ ?\ }$

36) $r = 11\frac{2}{5}$ ft, $d = \underline{\ ?\ }$, $C = \underline{\ ?\ }$

37) $C = 35x$ cm, $d = \underline{\ ?\ }$, $r = \underline{\ ?\ }$

38) $r = \frac{x}{8}$, $d = \underline{\ ?\ }$, $C = \underline{\ ?\ }$

26) **119.46 cm, 59.73 cm**

27) **830.23 m, 415.12 m**

28) **17π cm**

29) **12π ft**

30) **$\sqrt{106}\,\pi$ in**

31) **10π in**

32) **25π mm**

33) **14π yd**

35) **4.25 in, 26.70 in**

36) **22.80 ft, 71.63 ft**

37) **11.14x cm, 5.57 x cm**

38) **0.25x, 0.79x**

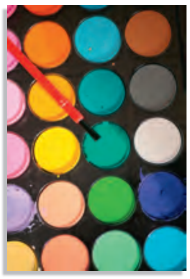
91 الدرس 1-2 الدائرة ومحيطها

حدّد إن كانت الدوائر الظاهرة في كل صورة أدناه متطابقة، أو متّحدة في المركز، أو غير ذلك.

(39

(40

(41



39) متّحدة في المركز

40) غير ذلك

41) متطابقة

42) **حدائق:** يُراد إنشاء رصيف عرضه يساوي 4 m حول بركة دائرية الشكل، محيطها يساوي 68 m . ما المحيط الخارجي للرصيف؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة. **93.13 m**

43) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا التمرين سوف تستكشف أثر تغيير الأبعاد في الدائرة.

a) **هندسي:** ارسم ثلاث دوائر باستعمال الفرجار. بحيث يكون عامل التمدّد من أي دائرة إلى الدائرة الأكبر التي تليها 1:2 . **انظر الهامش**

b) **جدولة:** احسب نصف القطر مقرّبًا إلى أقرب عُشر، والمحيط مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة لكلّ من الدوائر السابقة، وسجّل النتائج في جدول. **انظر الهامش**

c) **تعبير لفظي:** فسّر لماذا تكون هذه الدوائر الثلاث متشابهة هندسيًّا.

d) **تعبير لفظي:** كوّن تخمينًا حول النسبة بين محيطي دائرتين، عندما تكون النسبة بين نصفَي قطريهما تساوي 2 .

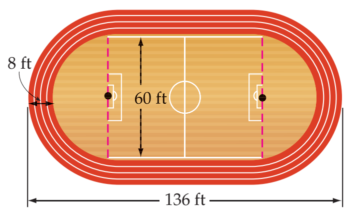
e) **تحليل:** معامل التمدد من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلة تربط C_A (محيط $\odot A$) مع C_B (محيط $\odot B$) . $(C_B)=\frac{b}{a}(C_A)$

f) **عددي:** إذا كان معامل التمدد من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$ ، ومحيط $\odot A$ يساوي 12 in، فما محيط $\odot B$؟ **4 in**

43c) لأن لها الشكل الدائري نفسه، وتختلف عن بعضها من حيث كبر أبعادها أو صغرها.

43d) النسبة بين محيطيهما تساوي 2 .

44) **تمارين رياضية:** يظهر في الشكل أدناه مضمار للجري.



a) كم تزيد المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الخارجي للمضمار، على المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الداخلي؟

b) كم دورة تقريبًا يجب أن يركض شخص حول المسار الخارجي للمضمار ليقطع ميلًا واحدًا؟ **15 مرة تقريبًا**

44a) تزيد المسافة التي يقطعها الشخص الذي يجري على المسار الخارجي 50.27 ft تقريبًا، على المسافة التي يقطعها الشخص الذي يجري على المسار الداخلي.

الربط مع واقع الحياة

يمكن أن يحرق الشخص الذي يزن 68 kg ، 240 سعرًا حراريًا، إذا ركض بسرعة 9 km/h لمدة 20 min. وذلك أكثر من مثلَي عدد السعرات التي يحرقها إذا سار بسرعة 7.2 km/h للمدة الزمنية نفسها.

المصدر: Health Discovery

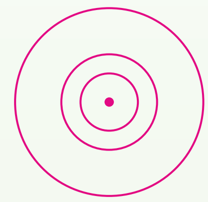
تنبيه لتمرين

الفرجار يتطلب تمرين 43 استعمال الفرجار.

تمثيلات متعددة في تمرين 43 يستعمل الطلبة الهندسة والجداول والوصف اللفظي والحسابات العددية لاستقصاء العلاقة بين معامل التمدد والأبعاد الأخرى للدائرة.

إجابات:

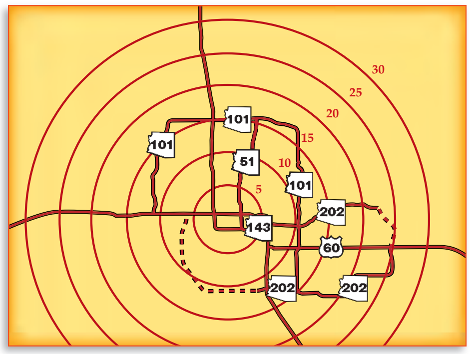
43a) إجابة ممكنة :



43b) إجابة ممكنة :

نصف قطر الدائرة (cm)	محيط الدائرة (cm)
0.5	3.14
1	6.28
2	12.57

45) **خرائط:** تحتوي الخريطة أدناه على دوائر متحدة في المركز، تُمثّل مناطق تبعُد عن مركز إحدى المدن المسافات km (30 , 25 , 20 , 15 , 10 , 5) .



a) كم يزيد محيط الدائرة الأبعد عن المركز عن محيط الدائرة الأقرب من المركز؟ **157.08 km**

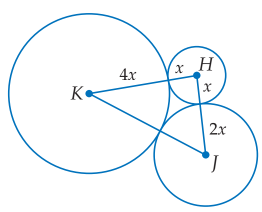
b) يزيد نصف قطر كل دائرة عن الدائرة التي تسبقها بـ 5 km. كم يزيد محيط كل دائرة عن محيط الدائرة التي تسبقها؟ **31.42 km تقريبًا**

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة يكون محيطها بين 8 m , 12 m، ما نصف قطر هذه الدائرة؟ **انظر الهامش**

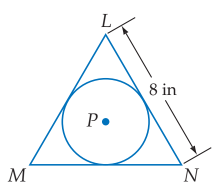
47) **اكتشف الخطأ:** رسم كلّ من سلمان وخليل شكلًا يُمثّل مجموعة النقاط التي تبعُد 4 cm عن النقطة J . هل كانت إجابة أيّ منهما صحيحة؟ فسّر تبريرك.

48) **تحدٍّ:** مجموع محيطات الدوائر H, J, K التي تظهر في الشكل المجاور يساوي 56π ، أوجد KJ . **24 وحدة**



49) **تبرير:** هل المسافة بين مركز الدائرة وأية نقطة داخلها أقل من نصف قطرها دائمًا، أو أحيانًا، أو لا تكون كذلك أبدًا؟ فسّر إجابتك.

50) **تحدٍّ:** $\odot P$ مُحاطة بمثلث متطابق الأضلاع LMN ، كما في الشكل المجاور. ما محيط $\odot P$؟ $\frac{8\pi}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$



51) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدوائر المتطابقة، والدوائر المتحدة في المركز. **انظر الهامش**

الربط مع واقع الحياة

يمكنك استعمال فكرة الدوائر المتحدة في المركز عند تخطيطك لقضاء إجازة. اختر مركزًا تمكث فيه بحيث يمكن أن تقضي معظم أعمالك ضمن دائرة نصف قطرها المسافة التي تقطعها سيارة في نصف ساعة من ذلك المركز. سوف تُقلّل الوقت الذي تقضيه في التنقل، باختيارك مكان إقامتك بحكمة.

المصدر: Show Travel

47) كلاهما إجابته صحيحة. مجموعة النقاط التي عيّنها سلمان تبعد 4 cm عن J ، ولكنها واقعة في مستوى ثنائي الأبعاد. وأمّا النقاط التي عيّنها خليل فهي تبعد 4 cm عن J ، ولكنها في فضاء ثلاثي الأبعاد.

49) دائمًا. لأن نصف قطر الدائرة قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة عليها. لذا، فإن طول القطعة التي تصل مركز الدائرة مع نقطة داخلها يكون أقل من نصف قطر الدائرة.

تنبيه لتمرين

الفرجار يتطلب تمرين 46 استعمال الفرجار.

تنبيه !

اكتشف الخطأ في تمرين 47 يجب أن يدرك الطلبة أن الدائرة هي مجموعة النقاط في المستوى المتساوية البُعد عن المركز، ولذلك فإن كليهما إجابته صحيحة.

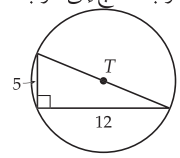
إجابات:

46) أنظر إجابات الطلبة، يجب أن يكون نصف القطر بين 1.91 cm , 1.27 cm .

51) إجابة ممكنة: عادة يكون للدوائر المتطابقة مراكز مختلفة ولكن لها طول نصف القطر نفسه. وأما الدوائر المتحدة بالمركز يكون لها المركز نفسه ولكن أطوال أنصاف أقطارها مختلفة.

تدريب على اختبار معياري

52) ما محيط $\odot T$ ؟ قرّب الناتج إلى أقرب عُشر. **40.8**



53) ما نصف قطر سطح طاولة دائري الشكل، محيطه 10 ft؟ **A**

A 1.6 ft   C 3.2 ft

B 2.5 ft   D 5 ft

54) **جبر:** أحاط إبراهيم حديقته الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج 50 m، فما نصف قطر الحديقة؟ قرّب الناتج إلى أقرب عُشر. **J**

F 10   H 8

G 9   J 7

55) ما نصف قطر الدائرة التي مساحة سطحها $\frac{\pi}{4}$ وحدة مربعة؟ **B**

A 0.4 وحدة   C 2 وحدة

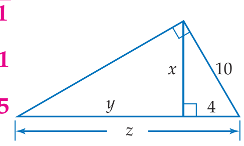
B 0.5 وحدة   D 4 وحدة

مراجعة تراكمية

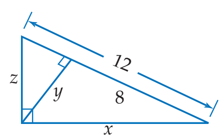
56) إذا كان محيط دائرة 26π cm ، فأوجد قطرها ونصف قطرها. (الدرس 2-1) **13 cm, 26 cm**

57) **حديقة:** إذا كانت أطوال أضلاع حديقة مثلثة الشكل 32 m , 24 m , 40 m ، فما قياسات زوايا الحديقة؟ (الدرس 1-4) **$53.1^\circ, 36.9^\circ, 90^\circ$**

58) أوجد قيمة كل من x, y, z ، في كلّ من الأشكال أدناه: (الدرس 1-2)



$x = 2\sqrt{21}$
$y = 21$
$z = 25$

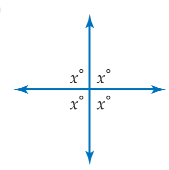


$x = 4\sqrt{6}$
$y = 4\sqrt{2}$
$z = 4\sqrt{3}$

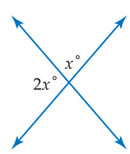
مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

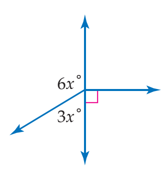
59) **90**



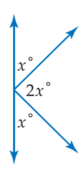
60) **60**



61) **20**



62) **45**



4 التقويم

التسمية في الرياضيات يمكن للطلبة التدرب على مصطلحات ومفردات هذا الدرس عن طريق وصف دوائر مختارة وتعريف المصطلحات بصوت عال .

94 الفصل 2 الدائرة

2-2 قياس الزوايا والأقواس
Measuring Angles and Arcs

فيما سبق

درستُ إيجاد قياس الزوايا، وتحديد الزوايا المتطابقة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أعيّن الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى، ونصف الدائرة، وأجد قياسها.
- أجد طول القوس.

المفردات الأساسية

الزاوية المركزية
central angle

القوس
arc

القوس الأصغر
minor arc

القوس الأكبر
major arc

نصف دائرة
semicircle

الأقواس المتطابقة
congruent arcs

الأقواس المتجاورة
adjacent arcs

طول القوس
arc length

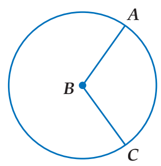
www.obeikaneducation.com

لمــاذا؟

معظم الساعات في الأجهزة الإلكترونية عبارة عن ساعات رقمية، وهي الساعات التي تُظهر الوقت على شكل أرقام.

و تستعمل الساعات العادية في تزيين المنزل، أو الاستعمال اليدوي. وهذه الساعات لها عقارب أو مؤشرات متحركة تشير إلى الساعة والدقيقة، وأحياناً يكون هناك مؤشر أو عقرب للثواني. ووجه هذه الساعة عبارة عن دائرة. وتكوّن العقارب الثلاثة زوايا مركزية فيها.

الزوايا والأقواس **الزاوية المركزية** في الدائرة هي زاوية يقع رأسها في المركز. وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة. في الشكل المجاور $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في $\odot B$.



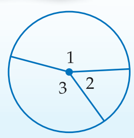
تذّكر أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي $360°$، لذا، فإن الدرجة الواحدة تساوي $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة حول نقطة. وهذا يعني أن مجموع قياسات الزوايا حول مركز الساعة يساوي $360°$، وهذا يقود إلى المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي **مجموع قياسات الزوايا المركزية**

أضف إلى مطويتك

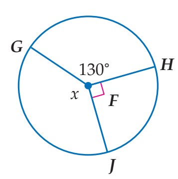
التعبير اللفظي مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة يساوي $360°$.

مثال $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$



مثال 1 **إيجاد قياس الزوايا المركزية**

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

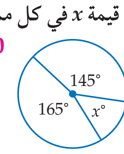


مجموع قياسات الزوايا المركزية	$m\angle GFH + m\angle HFJ + m\angle GFJ = 360°$
بالتعويض	$130° + 90° + m\angle GFJ = 360°$
بالتبسيط	$220° + m\angle GFJ = 360°$
بطرح $220°$ من كلا الطرفين	$x = m\angle GFJ = 140°$

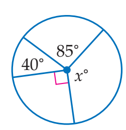
تأكد

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

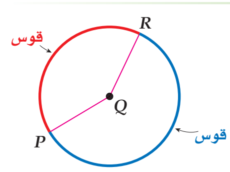
(1A **50**



(1B **145**



القوس جزء من دائرة يُحدَّد بنقطتَي طرفيه، وعند رسم زاوية مركزية، تنقسم الدائرة إلى قوسين، يرتبط قياس كل منهما بقياس تلك الزاوية المركزية.



2-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

إيجاد قياس الزوايا، وتحديد الزوايا المتطابقة.

الدرس 2-2

تعيين الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى والصغرى، ونصف الدائرة وإيجاد قياساتها.

ما بعد الدرس 2-2

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار في الدائرة واستعمالها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما النقطة التي تبعدُ مسافات متساوية عن الأرقام من 12 – 1؟ مركز الساعة
- افرض أن محيط الساعة يساوي 44 in، كم تقريبًا يبعُد كل عدد عن المركز؟ 7 in تقريبًا
- ضع تخمينًا حول سبب بقاء الزاوية المركزية في الساعة ثابتة بغض النظر عن كِبَر أو صِغَر الدائرة. تتغير المسافة بين أي عددين ومركز الساعة بنسبة مماثلة لنسبة التغير في محيط الساعة زيادةً أو نقصانًا.

مصادر الدرس 2-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (99)	• تنويع التعليم، ص (95 ,96 ,99)	• تنويع التعليم، ص (95 ,96 ,99)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الأقواس والزوايا

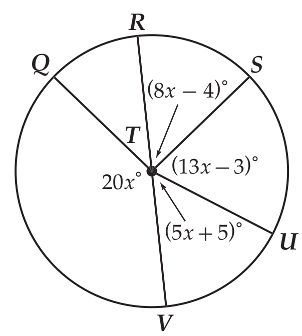
الأمثلة 4-1 تبين كيفية استعمال النظريات والمسلّمات لإيجاد قياس الأقواس والزوايا في الدائرة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

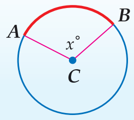
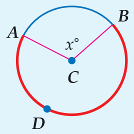
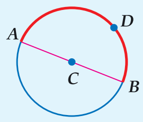
مثال إضافي

1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه. 7



مفاهيم أساسية — الأقواس وقياسها

أضف إلى مطويتك

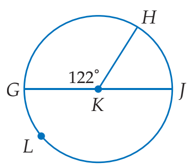
القوس	قياسه	
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يقل قياس القوس الأصغر عن $180°$ ويساوي قياس الزاوية المركزية المرتبطة به. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x°$	
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على $180°$، ويساوي $360°$ مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360° - m\widehat{AB} = 360° - x°$	
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي $180°$ $m\widehat{ADB} = 180°$	

إرشادات للدراسة

تسمية الأقواس يُسمّى القوس الأصغر بنقطتَي طرفيه، أما القوس الأكبر ونصف الدائرة فتتم تسميتهما بنقطتي الطرفين، بالإضافة إلى نقطة على القوس بينهما.

مثال 2 تصنيف الأقواس وإيجاد قياس القوس

$\overline{GJ}$ قطر في $\odot K$. حدّد إذا كان كلّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



a) $m\widehat{GH}$

$\widehat{GH}$ قوس أصغر، وقياسه $m\widehat{GH} = m\angle GKH = 122°$.

b) $m\widehat{GLH}$

$\widehat{GLH}$ هو القوس الأكبر الذي يشترك مع القوس الأصغر $\widehat{GH}$ بنقطتَي طرفيه.

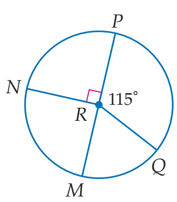
$m\widehat{GHL} = 360° - m\widehat{GH}$

$= 360° - 122° = 238°$

c) $m\widehat{GLJ}$

$\widehat{GLJ}$ هو نصف دائرة

$m\widehat{GLJ} = 180°$.



تأكد

$\overline{PM}$ قطر في $\odot R$. حدّد إذا كان كلّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.

2A) $\widehat{MQ}$ قوس أصغر، $65°$ 2B) $\widehat{MNP}$ نصف دائرة، $180°$ 2C) $\widehat{MNQ}$ قوس أكبر، $295°$

الربط مع واقع الحياة

إقليدس
(c. 325–265 b.c.)
ألف إقليدس 13 كتابًا سُميت العناصر، أحدثت تأثيرًا كبيرًا في العلوم، وفي هذه الكتب تم تطوير الهندسة وفروع أخرى في الرياضيات بصورة منطقية. ولقد خصّص الكتاب الثالث منها للبحث في الدوائر والأقواس والزوايا.

الأقواس المتطابقة هي الأقواس التي تقع في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، والتي يكون لها القياس نفسه.

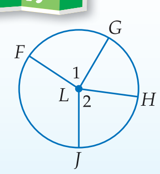
نظرية 2.1

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين يكون القوسان متطابقين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين.

مثال إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.

إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



سوف تبرهن نظرية 2.1 في التمرين 51

التعليم باستعمال التقنيات

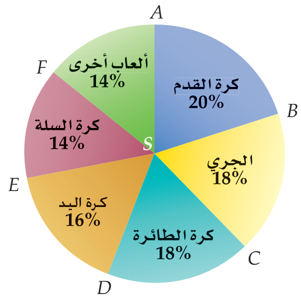
السبورة التفاعلية ارسم على السبورة دائرة، وعين فيها قطرًا وعدة أنصاف أقطار وضع قياسات زوايا معلومةٍ. اختر طالبًا ليوضح كيفية إيجاد قياس أحد الأقواس الصغرى. ثم اختر طالبًا آخر ليجد قياس الأقواس الصغرى المتبقية.

التركيز في المحتوى الرياضي

مصطلحات إن قياس القوس وطول القوس مصطلحان مختلفان لا يحل أحدهما محل الآخر، فقياس القوس يُعطي بالدرجات كما تُقاس الزوايا. ويرمز له بالرمز $m\widehat{AC}$. وكما الحال في طول القطعة المستقيمة، فإن طول القوس هو المسافة المقاسة على طول المنحنى.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد قياس القوس من القطاعات الدائرية

رياضة : استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور لإيجاد القياسات الآتية:



a) $m\widehat{CD}$

$\widehat{CD}$ هو قوس أصغر.

$m\widehat{CD} = m\angle CSD$

$\angle CSD$ تُمثّل 18% من الكل أو 18% من الدائرة.

$m\angle CSD = 0.18(360°)$ إيجاد 18% من °360

$= 64.8°$ بالتبسيط

b) $m\widehat{BC}$

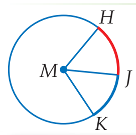
النسبتان المئويتان لكرة الطائرة والجري متساويتان. إذن الزاويتان المركزيتان متطابقتان. والقوسان المقابلان لهما متطابقان.

$m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 64.8°$

تأكد

استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية أعلاه ؛ لإيجاد القياسات الآتية:

3A) $m\widehat{EF}$ $50.4°$ **3B)** $m\widehat{FA}$ $50.4°$



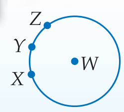
الأقواس المتجاورة هي أقواس في الدائرة تشترك مع بعضها في نقطة واحدة فقط. $\widehat{JK}$, $\widehat{HJ}$ قوسان متجاوران في $\odot M$. وكما هو الحال في الزوايا المتجاورة، يمكنك جمع قياس الأقواس المتجاورة.

مسلّمة 2.1 مسلّمة جمع الأقواس

أضف إلى مطويتك

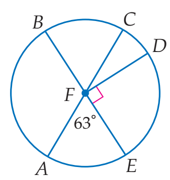
التعبير اللفظي قياس القوس المتكوّن من قوسين متجاورين يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين.

مثال $m\,\widehat{XYZ} = m\,\widehat{XY} + m\,\widehat{YZ}$



مثال 4 استعمال جمع الأقواس لإيجاد قياس الأقواس

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي في $\odot F$.



a) $m\widehat{AED}$

$m\widehat{AED} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= m\angle AFE + m\angle EFD$ $m\widehat{AE} = m\angle AFE, m\widehat{ED} = m\angle EFD$

$= 63° + 90° = 153°$ بالتعويض

b) $m\widehat{ADB}$

$m\widehat{ADB} = m\widehat{AE} + m\widehat{EDB}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= 63° + 180° = 243°$ $\widehat{EDB}$ نصف دائرة. إذن، $m\,\widehat{EDB} = 180°$

تأكد

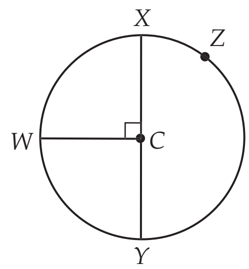
أوجد قياس كلّ ممّا يأتي في $\odot F$.

4A) $m\,\widehat{CE}$ $117°$ **4B)** $m\,\widehat{ABD}$ $207°$

أمثلة إضافية

2 $\overline{WC}$ نصف قطر في $\odot C$.

حدّد ما إذا كان كل من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة. ثم أوجد قياسه .



a) $m\widehat{XZY}$

نصف دائرة ، $m\widehat{XZY} = 180°$

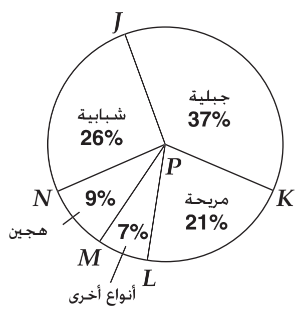
b) $m\widehat{WZX}$

قوس أكبر ، $m\widehat{WZX} = 270°$

c) $m\widehat{XW}$

قوس أصغر ، $m\widehat{XW} = 90°$

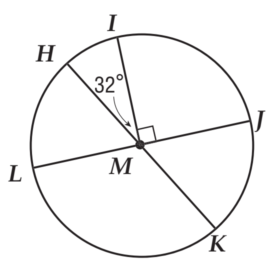
3 **دراجات هوائية :** استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه لإيجاد القياسات الآتية:



a) أوجد $m\widehat{KL}$ $75.6°$

b) أوجد $m\widehat{NJL}$ $302.4°$

4 أوجد قياس كل مما يأتي في $\odot M$.



a) $m\widehat{LHI}$ $90°$

b) $m\widehat{IJK}$ $148°$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون ارسم دائرة وقسمها باستعمال زوايا مركزية مختلفة القياس. ظلل كل جزء من أجزاء الدائرة بلون مختلف عن ألوان الأجزاء الأخرى كرر العملية مع دائرتين متطابقتين ولكن باستعمال زوايا مركزية مختلفة. اقطع أجزاء هذه الدوائر واخلط جميع أجزاء الدوائر الثلاثة. أعط هذه الأجزاء لمجموعات من الطلبة لإعادة ترتيبها في ثلاثة دوائر، اطلب إلى الطلبة إيجاد قياس الزاوية المركزية لهذه القطاعات وقياس الأقواس ومحيط هذه الدوائر وأطوال الأقواس. يمكن أن تقارن المجموعات أعمالها للتحقق من النتائج و/ أو لتحديد المجموعة الأكثر فعالية في إيجاد جميع المعلومات الصحيحة.

الربط مع واقع الحياة

عُرفت لعبة كرة الطائرة (volleyball) لأول مرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ثم انتقلت إلى كندا عام 1900 م ، لتصبح بعد ذلك من أكثر الرياضات شعبية في العالم.

المصدر: http://ar.wikipedia.org

طول القوس **طول القوس** هو المسافة بين نقطتَي طرفيه على الدائرة، ويُقاس بوحدات الطول. وبما أن القوس هو جزء من الدائرة، فإن طوله جزء من محيطها.

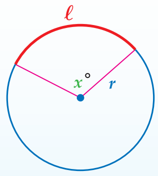
تنبيــه!
طول القوس يقاس طول القوس بوحدات الطول مثل السنتمترات، ولكن قياس القوس بالدرجات.

مفهوم أساسي **طول القوس** أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي نسبة طول القوس ℓ إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى $360°$.

التناسب $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x°}{360°}$ أو

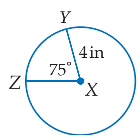
المعادلة $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$



مثال 5 إيجاد طول القوس

أوجد طول $\widehat{ZY}$ في كل مما يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

a)

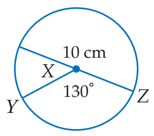


معادلة طول القوس $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$

بالتعويض $= \frac{75°}{360°} \cdot 2\pi(4)$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 5.24 in

b)

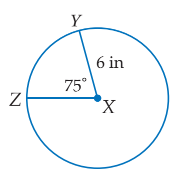


معادلة طول القوس $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$

بالتعويض $= \frac{130°}{360°} \cdot 2\pi(5)$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 11.34 cm

c)



معادلة طول القوس $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$

بالتعويض $= \frac{75°}{360°} \cdot 2\pi(6)$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 7.85 in

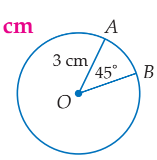
لاحظ أن $\widehat{ZY}$ له نفس القياس في 5a, 5c، ويساوي $75°$. إلا أن لهما طولين مختلفين، وذلك بسبب وجودهما في دائرتين نصفا قطريهما مختلفان.

إرشادات للدراسة
طريقة بديلة يمكن إيجاد طول القوس في الأمثلة 5a و 5b و 5c باستعمال التناسب $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x°}{360°}$

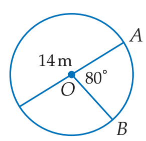
تأكد

أوجد طول $\widehat{AB}$ في كل مما يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

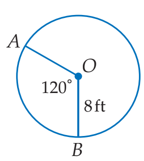
(5A 2.36 cm



(5B 9.77 m



(5C 16.76 ft



طول القوس

بما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طول هذا القوس جزء من محيط الدائرة.

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد طول قوس باستعمال معادلة طول القوس.

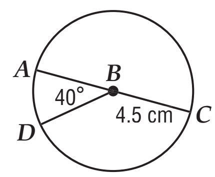
إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي بيّن للطلبة أنه يمكن أن يكون لقوسين القياس نفسه ولكن طوليهما مختلفان. وضح ذلك باستعمال قانون طول القوس، وبين للطلبة أن طول القوس يعتمد على نصف قطر الدائرة.

مثال إضافي

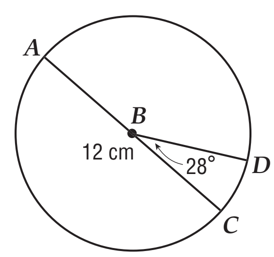
5 أوجد طول $\widehat{DA}$ في كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من مئة:

a)



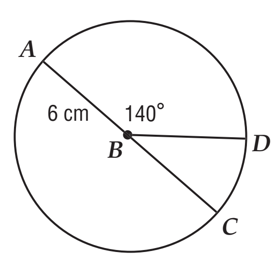
π أو 3.14 cm تقريبًا

b)



15.92 cm

c)



14.66 cm

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة إيجاد طول قوس الدائرة وذلك باستعمال ساعة أحد الأبراج إذا علمت أن قطر هذه الساعة يساوي 14 ft و 8 in. أوجد قياس الزاوية المركزية عندما تُشير عقارب الساعة إلى الساعة الخامسة. أوجد طول القوس المحدود بين عقربي الساعة عند الساعة الخامسة. قياس الزاوية المركزية يساوي $150°$. طول القوس يساوي 230 in تقريبًا أو 19 ft و 2 in.

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–11 للتأكد من فهم الطلبة .

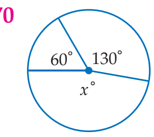
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تأكد من فهمك

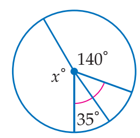
مثال 1 صفحة 95

أوجد قيمة x في التمرينين الآتيين:

(1 170

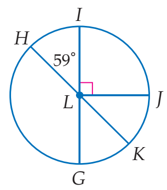


(2 150



مثال 2 صفحة 96

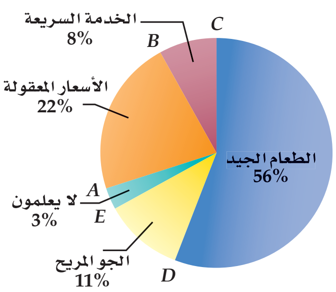
$\overline{HK}$, $\overline{IG}$ قطران في $\odot L$. حدّد إذا كان كلّ قوس فيما يأتي قوسًا أكبر أم أصغر أم نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.



(3 $\widehat{IHJ}$ قوس أكبر، 270°   (4 $\widehat{HI}$ قوس أصغر، 59°   (5 $\widehat{HGK}$ نصف دائرة، 180°

مثال 3 صفحة 97

(6 **مطاعم:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع لروّاد المطاعم، حول أهم ما يجب أن توفّره لهم المطاعم.



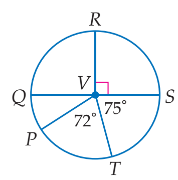
a) أوجد $m\widehat{AB}$. 79.2°

b) أوجد $m\widehat{BC}$. 28.8°

c) صف نوع القوس الذي يمثّله الطعام الجيد. قوس أكبر

مثال 4 صفحة 97

$\overline{QS}$ قطر في $\odot V$. أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور:



(7 $m\widehat{STP}$ 147°

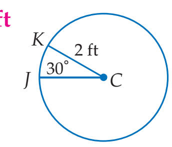
(8 $m\widehat{QRT}$ 255°

(9 $m\widehat{PQR}$ 123°

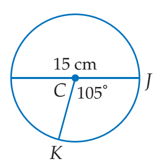
مثال 5 صفحة 98

أوجد طول $\widehat{JK}$ مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة في التمرينين 10، 11 .

(10 1.05 ft



(11 13.74 cm

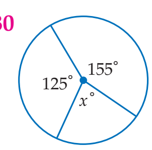


تدرب وحل المسائل

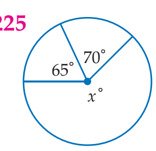
مثال 1 صفحة 95

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

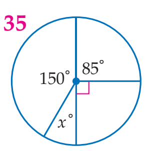
(12 80



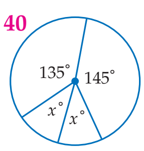
(13 225



(14 35



(15 40

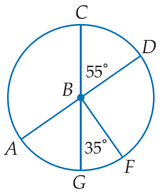


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	12 – 40 ، 54 – 57 ، 59 ، 61 – 75
ضمن المتوسط	13 – 49 فردي ، 50 ، 51 – 57 ، 61 – 75
فوق المتوسط	41 – 72 ، (اختياري : 73 – 75)

مثال 2
صفحة 96

$\overline{AD}$ و $\overline{CG}$ قطران في $\odot B$. حدّد ما إذا كان كلّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.

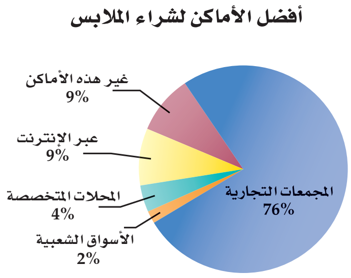


16) $m\widehat{CD}$ قوس أصغر، 55°
17) $m\widehat{AC}$ قوس أصغر، 125°
18) $m\widehat{CG}$
19) $m\widehat{CGD}$ قوس أكبر، 305°
20) $m\widehat{GCF}$ قوس أكبر، 325°
21) $m\widehat{ACD}$
22) $m\widehat{AG}$ قوس أصغر، 55°
23) $m\widehat{ACF}$ قوس أكبر، 270°

18) نصف دائرة، 180°
21) نصف دائرة، 180°

مثال 3
صفحة 97

24) **تسوّق:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.



a) ما قياس القوس المقابل لفئة التسوق في كل من المجمعات التجارية، والمحلات المتخصصة؟ 273.6, 14.4

b) صف نوع القوس المرافق لفئة المجمعات التجارية، ولفئة الأسواق الشعبية. قوس أكبر، قوس أصغر

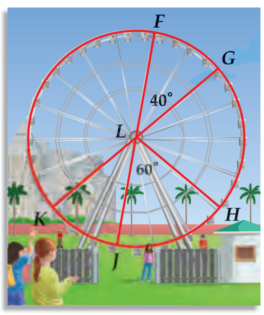
c) هل توجد أقواس متطابقة في هذا الشكل؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

الربط مع واقع الحياة

وجد أن الشباب يُنفقون مبالغ كبيرة على ملابسهم وأحذيتهم في السنوات الحالية.

مثال 2, 4
الصفحات 96, 97

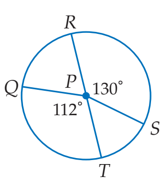
تسلية: استعمل العجلة الدوارة في الشكل المجاور؛ لإيجاد كلّ من القياسات الآتية:



25) $m\widehat{FG}$ 40°
26) $m\widehat{JH}$ 60°
27) $m\widehat{JKF}$ 180°
28) $m\widehat{JFH}$ 300°
29) $m\widehat{GHF}$ 320°
30) $m\widehat{GHK}$ 180°
31) $m\widehat{HK}$ 100°
32) $m\widehat{JKG}$ 220°
33) $m\widehat{KFH}$ 260°
34) $m\widehat{HGF}$ 120°

مثال 5
صفحة 98

استعمل $\odot P$ ؛ لإيجاد طول كل قوس مما يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.



35) $\widehat{RS}$ ، إذا كان نصف القطر يساوي 2 in 4.54 in
36) $\widehat{QT}$ ، إذا كان القطر يساوي 9 cm انظر الهامش
37) $\widehat{QR}$ ، إذا كان $PS = 4$ mm 4.75 mm
38) $\widehat{RS}$ ، إذا كان $RT = 15$ in 17.02 in
39) $\widehat{QRS}$ ، إذا كان $RT = 11$ ft 19.01 ft
40) $\widehat{RTS}$ ، إذا كان $PQ = 3$ m 12.04 m

إجابات:

24c) نعم؛ القوسان المقابلان للفئتين "عبر الإنترنت" "وغير هذه الأماكن" لهما القياس نفسه. لأن كل فئة من هاتين الفئتين لها النسبة المئوية نفسها من الدائرة 9%.

36) قانون طول القوس

$$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$$

بالتعويض

$$= \frac{112}{360} \cdot 2\pi\,(4.5)$$

استعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 8.80 \text{ cm}$$

الربط مع واقع الحياة

تُعد ساعة مكة المكرمة أكبر ساعة في العالم، إذ يزيد قُطر واجهتها عن 40 m ، ويبلغ طول عقرب الدقائق 22 m ، وطول عقرب الساعات 17 m . وتبلغ كتلة كل منهما 6 أطنان تقريبًا.

ساعات: يعرض الشكل المجاور الساعة التي وردت في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

41) ما قياس الزاوية المركزية المحصورة بين عقربي الساعة؟ فسّر الطريقة التي توصلت بها إلى إجابتك. **انظر الهامش**

42) إذا تضاعف قطر الدائرة، فما تأثير ذلك على طول القوس الأصغر بين الرقم 1 ، والرقم 12؟ **انظر الهامش**

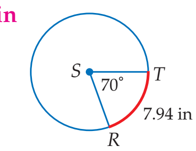
43) **مَزارِع:** قُسمت مزرعة دائرية الشكل إلى ثمانية قطاعات متساوية، وخُصِّص كل قطاع لزراعة صنف واحد من الأشجار أو النباتات، أو لتربية أحد أنواع الحيوانات.

a) ما قياس القوس الذي يُمثّل القطاعات التي تحتوي على الزيتون والطماطم والفلفل؟ **135°**

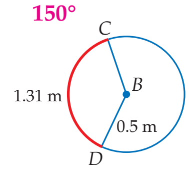
b) إذا كان قطر الدائرة يساوي 125 m، فما طول قوس كل قطاع؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة. **49.09 m**

أوجد كلًّا من القياسات الآتية مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياس كل قوس إلى أقرب درجة.

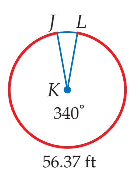
44) محيط $\odot S$ **40.84 in**



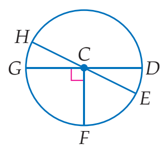
45) $m\widehat{CD}$ **150°**



46) نصف قطر $\odot K$ **9.50 ft**



جبر: إذا كان $m\angle HCG = 2x,\ m\angle HCD = 6x + 28$ في $\odot C$. فأوجد قياس كلّ ممّا يأتي:

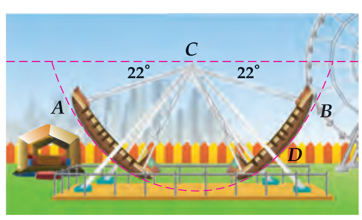


47) $\widehat{EF}$ **52**

48) $\widehat{HD}$ **142**

49) $\widehat{HGF}$ **128**

50) **ألعاب:** يأخذ مسار لعبة السفينة في مدينة الألعاب، شكل نصف دائرة، كما في الشكل المجاور.



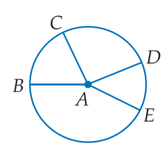
a) أوجد $m\widehat{AB}$. **136°**

b) إذا كان $CD = 62$ ft ، فما طول $\widehat{AB}$؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة. **147.17ft**

51) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.1 . **انظر الهامش**

المعطيات: $\angle BAC \cong \angle DAE$

المطلوب: إثبات أن $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$



إجابات:

41) $360° \div 12 = 30°$ قياس الزاوية بين كل رقمين، لذا قياس الزاوية المركزية المحصورة بين عقربي الساعة تساوي $60°$.

42) سيتضاعف طول القوس.

51) البرهان:

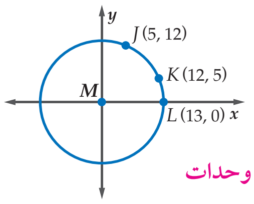
العبارات	المبررات
1) $\angle BAC = \angle DAE$	1) معطى
2) $m\angle BAC = m\angle DAE$	2) تعريف التكافؤ
3) $m\angle BAC = m\widehat{BC}$ $m\angle DAE = m\widehat{DE}$	3) تعريف قياس طول القوس
4) $m\widehat{BC} = m\widehat{DE}$	4) بالتعويض
5) $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$	5) تعريف تكافؤ الأقواس

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

توسّع إن استعمال التمثيل بالقطاعات الدائرية طريقة بسيطة وفعّالة لعرض البيانات. وبما أن الطلبة الموهوبين يشكلون باحثي المستقبل في مجالات متعددة. لذا أعطِ الطلبة فرصة لتطوير سؤال بحثي يتعلق بمجالات اهتماماتهم والإجابة عنه، ثم اطلب إليهم عَرض النتائج باستعمال القطاعات الدائرية بحيث تكون قياسات الأقواس التي تمثل البيانات التي جمعوها دقيقة وصحيحة.

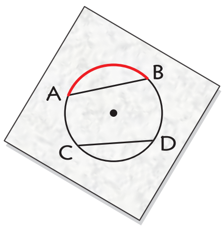
52) **هندسة إحداثية:** تُمثّل النقطة M نقطة الأصل في الشكل المجاور. أوجد كلًا مما يأتي في $\odot M$، مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة، وقياس كل قوس إلى أقرب عُشر درجة.



a) $m\widehat{JL}$ $67.4°$
b) $m\widehat{KL}$ $22.6°$
c) $m\widehat{JK}$ $44.8°$
d) طول $\widehat{JL}$ 15.29 وحدة
e) طول $\widehat{KL}$ 5.13 وحدة
f) طول $\widehat{JK}$ 10.16 وحدات

53) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذا التمرين العلاقة بين الأقواس والأوتار.

a) **هندسي:** ارسم دائرة فيها وتران متطابقان مثل $\overline{AB}, \overline{CD}$. حدّد مركز هذه الدائرة. كرّر العملية مع دائرتين أُخريين ووترين متطابقين في كل منهما.

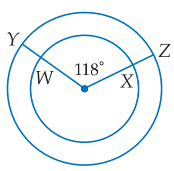


b) **حسي:** قُص ثلاث قطع من الورق الشفّاف مربعة الشكل أكبر من أي من الدوائر الثلاثة، ثم ثبّت ورقة شفافة من منتصفها مستعملًا دبوسًا عند مركز كل دائرة، ارسم القوس المقابل لأحد الوترين في كل دائرة على الورقة الشفافة، ثم قم بتدوير قطعة الورق الشفّاف حول الدبّوس لمقارنة طول القوس الذي رسمته بطول القوس المقابل للوتر الآخر، كرّر هذه العملية مع كل من الدوائر الثلاث.

c) **تعبير لفظي:** كوّن تخمينًا حول العلاقة بين الأقواس التي تقابل أوتارًا متطابقة في الدائرة، ثم أثبت صحته.

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **اكتشف الخطأ:** يقول إبراهيم: إن $\widehat{WX}$ و $\widehat{YZ}$ متطابقان؛ لأن زاويتيهما المركزيتين متطابقتان، بينما يقول سالم: إنهما غير متطابقين. أيّهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.



سالم؛ بما أن الدائرتين غير متطابقتين؛ لأن نصفَي قطريهما مختلفان، فإن القوسين غير متطابقين.

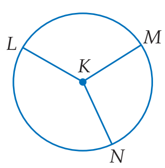
تبرير: حدّد إذا كانت كلّ من العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو ليست صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.

55) قياس القوس الأصغر أقل من $180°$.

56) إذا كانت الزاوية المركزية منفرجة، فإن القوس المقابل لها قوس أكبر.

57) يعتمد مجموع قياسي قوسين متجاورين في دائرة على قياس نصف قطر تلك الدائرة.

58) **تحدٍّ:** نسبة قياسات $\widehat{LM}, \widehat{MN}, \widehat{NL}$ كالنسبة 5:3:4. أوجد قياس كل من هذه الأقواس.



$m\widehat{LM} = 150°, m\widehat{MN} = 90°, m\widehat{NL} = 120°$

59) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة وعيّن عليها ثلاث نقاط. قدّر قياس الأقواس الثلاثة غير المتداخلة الناتجة، ثم استعمل المنقلة لإيجاد قياس كل منها، واكتب على كل قوس قياسه. انظر الهامش

60) **تحدٍّ:** تشير عقارب ساعة إلى الساعة 8:10. ما قياس الزاوية التي تقابل القوس الأصغر، والمتكوّنة من عقربَي الساعة؟ $175°$

61) **اكتب:** صف الأنواع الثلاثة للأقواس في الدائرة. وطريقة إيجاد قياس كلّ منها. انظر الهامش

53a) انظر الهامش

53b) انظر إجابات الطلبة

53c) إجابة ممكنة: عندما يكون الوتران في الدائرة متطابقين، فإن القوسين المحدودين بهذين الوترين يكونان متطابقين.

55) صحيحة دائمًا؛ لأن تعريف القوس الأصغر هو القوس الذي قياسه أقل من $180°$.

56) غير صحيحة أبدًا؛ الزاوية المنفرجة تُحدّد قوسًا قياسه بين $90°$ و $180°$.

57) غير صحيحة أبدًا؛ يعتمد مجموع قياسَي قوسين متجاورين على قياس القوسين.

تنبيه!

التناسب تذكّر أن ترتيب حدود التناسب مهم، فمثلًا إذا كانت نسبة A إلى B إلى C هي 1 إلى 2 إلى 3، فإن $A:B:C = 1:2:3$

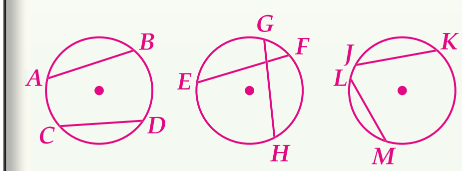
تنبيه لتمرين

فرجار ومسطرة غير مدرجة ومقص يتطلب التمرينان 53، 59 استعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة والمقص.

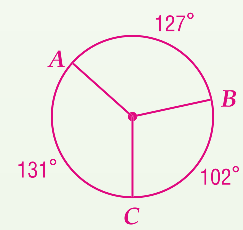
تمثيلات متعددة في التمرين 53 يستعمل الطلبة رسومات هندسية وقياسات الأطوال، والوصف اللفظي لاستقصاء العلاقة بين الأوتار والأقواس في الدائرة.

إجابات:

53a) إجابة ممكنة:



59) إجابة ممكنة:



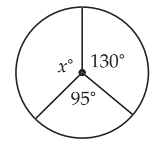
61) إجابة ممكنة: القوس الأصغر، القوس الأكبر، نصف الدائرة، قياس القوس الأصغر يساوي قياس الزاوية المركزية المناظرة له، وقياس القوس الأكبر يساوي $360°$ مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي له الطرفان نفساهما، وقياس نصف الدائرة يساوي $180°$.

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 54 يجب أن يدرك الطلبة أن الدوائر المتحدة في المركز والمشتركة في الزاوية المركزية يكون لها قياس القوس نفسه. ولكن عندما تكبر الدائرة تزداد المسافة بين نقطتي تقاطع ضلعي الزاوية مع الدائرة ولذلك يزداد طول القوس الذي يتناسب طرديًا مع قطر الدائرة. ولذا فإن إجابة سالم صحيحة.

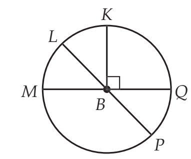
تدريب على اختبار معياري

62) ما قيمة x في الشكل المجاور؟ **B**

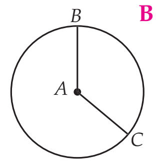


A 120
B 135
C 145
D 160

63) إذا كان $m\angle LBM = 3x, m\angle LBQ = 4x + 61$ في $\odot B$. فما قياس $\angle PBQ$ ؟ **$51°$**

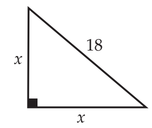


64) إذا كان نصف قطر $\odot A$ يساوي 5in، وطول القوس الأصغر $\widehat{BC}$ يساوي 4π in، فما قياس $\angle BAC$ ؟ **B**



A $150°$ **C** $120°$
B $144°$ **D** $72°$

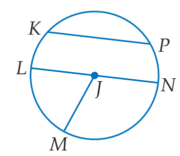
65) ما قيمة x في المثلث أدناه؟ **G**



F 9 **H** $18\sqrt{2}$
G $9\sqrt{2}$ **J** 36

مراجعة تراكمية

للتمارين 68-66 ، ارجع إلى $\odot J$: (الدرس 1-2)



66) سمِّ مركز الدائرة. *J*

67) عيّن وترًا يكون قطرًا أيضًا. $\overline{LN}$

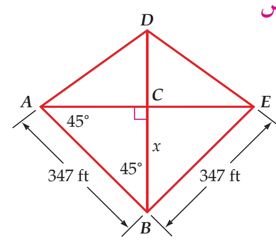
68) إذا كان $LN = 12.4$ ، فأوجد JM؟ **6.2**

حُلّ المثلث ABC، وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب عشر. (الدرس 1-5)

69) $m\angle A = 42°, m\angle C = 77°, C = 6$ cm **انظر الهامش**

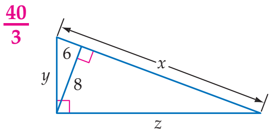
70) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. (الدرس 1-3)

$\frac{347\sqrt{2}}{2} \approx 245.4$ **ft**

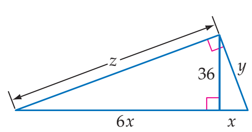


أوجد قيمة كل من x, y, z في التمرينين الآتيين: (الدرس 1-2)

71) $x = \frac{50}{3}, y = 10, z = \frac{40}{3}$



72) $x = 6\sqrt{6} \approx 14.7,$
$y = 6\sqrt{42} \approx 38.9,$
$z = 36\sqrt{7} \approx 95.2$



مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

73) $24^2 + x^2 = 26^2$ **$10, -10$**

74) $x^2 + 5^2 = 13^2$ **$12, -12$**

75) $30^2 + 35^2 = x^2$ **$46.1, -46.1$**

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة رسم دائرة، فيها زاوية مركزية معلومة، واطلب إليهم تحديد طول نصف قطر الدائرة ووضع قياس الزاوية المركزية بالدرجات على الشكل، ثم اطلب إليهم إيجاد طول أحد القوسين الأكبر أو الأصغر وأن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2–2 و 1–2 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 2 .

إجابة :

69) $x = 4.1$ cm

$y = 5.4$ cm

$m\angle B = 61°$

2-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مختلفة.

الدرس 3-2

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار في الدائرة واستعمالها.

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار في الدائرة واستعمالها .

ما بعد الدرس 3-2

إيجاد قياسات الزوايا المحيطية بما فيها زوايا المضلعات المرسومة داخل دائرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

أطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- ما قياس الزاوية المركزية في طارة التطريز؟ $60°$
- أفرض أن قطر طارة التطريز يساوي 12 in ما طول القوس الذي يقابل إحدى الزوايا المركزية؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة. 6.28 in
- أفرض أن قطر طاره التطريز أزداد بنسبة 125%. ضع تخمينًا لطول الوتر والقوس الجديدين. سوف يزداد طول كل منهما بنسبة 125%.

2-3 الأقواس والأوتار

Arcs and Chords

فيما سبق

درست استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مختلفة.

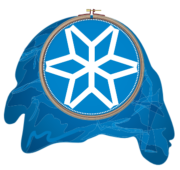
والآن

الأفكار الرئيسة

- أُميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار وأستعملها.
- أُميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار وأستعملها.

www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟



يستعمل الخياطون طارة لرتي الثياب أو تطريز زخارف جميلة عليها. ويُظهر الشكل المجاور تطريزًا على شكل نجمة مثبتًا بطارة، ويمثل كل رأسين متجاورين من رؤوس النجمة نهايتي قوس في الدائرة أو وترًا يكون أحد أضلاع شكل سداسي.

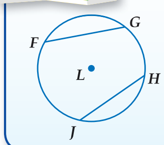
الأقواس والأوتار لقد تعلمت في الدرس 1–2 أن الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة. وإذا لم يكن الوتر قطرًا للدائرة، فإن طرفيه يقسمانها إلى قوسين أحدهما قوس أكبر، والآخر قوس أصغر.

نظرية 2.2

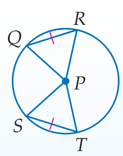
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان متطابقين إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.

مثال $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ إذا وفقط إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$.



البرهان نظرية 2.2 (الجزء 1)



المعطيات: $\odot P$ ، $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\odot P, \widehat{QR} \cong \widehat{ST}$	1) معطى
2) $\angle QPR \cong \angle SPT$	2) إذا تطابقت الأقواس، فإن الزوايا المركزية المقابلة لها تكون متطابقة
3) $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة
4) $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4) SAS
5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة

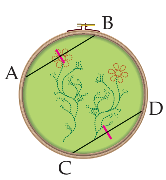
سوف تبرهن الجزء 2 من نظرية 2.2 في التمرين 25

مثال 1 من واقع الحياة استعمال الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس القوس

حرف يدوية : إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $m\widehat{AB} = 60°$ في طارة التطريز المجاورة، فأوجد $m\widehat{CD}$.

$\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ وتران متطابقان. إذن القوسان المقابلان لهما $\widehat{AB}$ ، $\widehat{CD}$ متطابقان.

أي أن $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60°$



تأكد

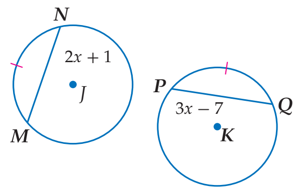
1) إذا كان $m\widehat{AB} = 78°$ في طارة التطريز، فأوجد $m\widehat{CD}$. $78°$

مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (105)	• تنويع التعليم، ص (105,109)	• تنويع التعليم، ص (109)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثال 2 استعمال الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار

جبر: إذا كان $\odot J \cong \odot K$ ، $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$ ، فأوجد PQ .



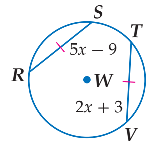
$\widehat{MN}$ و $\widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين،
لذا فإن الوترين $\overline{MN}$ و $\overline{PQ}$ متطابقان.

بتعريف القطع المتطابقة	$MN = PQ$
بالتعويض	$2x + 1 = 3x - 7$
بالتبسيط	$8 = x$

إذن، $PQ = 3(8) - 7 = 17$.

تأكد

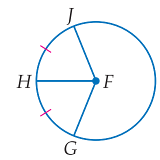
2) إذا كان $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$ في $\odot W$ ، فأوجد RS . **11**



تنصيف الأقواس والأوتار إذا قسم مستقيم، أو قطعة مستقيمة، أو شعاع قوسًا إلى قوسين متطابقين، فإنه ينصف القوس.

إرشادات للدراسة

منصف القوس في الشكل أدناه $\overline{FH}$ منصف للقوس $\widehat{JHG}$.

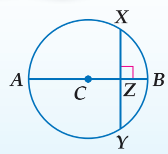


نظريات

أضف إلى مطويتك

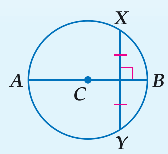
2.3 إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها فإنه ينصف ذلك الوتر وينصف قوسه أيضًا.

مثال إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على $\overline{XY}$ ، فإن $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$ و $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.



2.4 العمود المنصف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها.

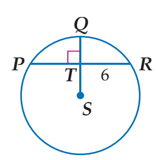
مثال إذا كان $\overline{AB}$ عمودًا منصفًا للوتر $\overline{XY}$ ، فإن $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.



سوف تبرهن النظريتين 2.3 و 2.4 في التمرينين 26 و 28 على الترتيب

مثال 3 استعمال نصف القطر العمودي على الوتر

إذا كان $m\widehat{PQR} = 98°$ في $\odot S$ ، فأوجد $m\widehat{PQ}$.



نصف القطر $\overline{SQ}$ عمودي على $\overline{PR}$. لذا وبحسب النظرية 2.3 ، فإن
$\overline{SQ}$ تنصف $\widehat{PQR}$. إذن، $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$.
وبالتعويض ينتج أن $m\widehat{PQ} = \frac{98°}{2} = 49°$.

تأكد

3) أوجد PR في $\odot S$. **12 وحدة**

الأقواس والأوتار

المثالان 1 , 2 يُبيّنان كيفية استعمال الأقواس والأوتار المتطابقة؛ لإيجاد قياس الأقواس وأطوال الأوتار.

التقويم التكويني

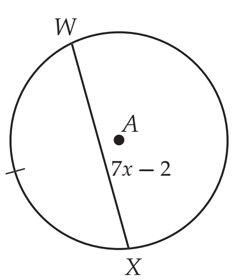
أستعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

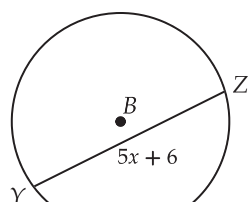
مثالان إضافيان

1 **مجوهرات:** قطعة دائرية من حجر كريم معلقة بسلسلة بواسطة سلكين ملتفين حول هذا الحجر الكريم إذا كان $\overline{LK} \cong \overline{MJ}$ ، $m\widehat{KL} = 90°$ ، فأوجد $m\widehat{JM}$.

$m\widehat{KL} = m\widehat{JM} = 90°$

2 **جبر:** في الشكلين أدناه، إذا كان $\odot A \cong \odot B$ ، $\widehat{WX} \cong \widehat{YZ}$، فأوجد WX.



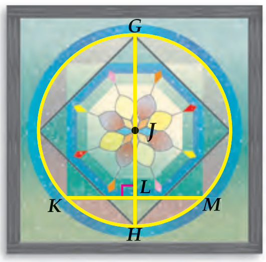


$WX = 26$

التعليم باستعمال التقنيات

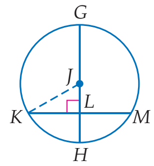
السبورة التفاعلية استعمل أحد برامج الرسم في الحاسب الخاص بك. واعرضه على السبورة. يمكنك هذا من توفير الوقت وإنشاء رسومات أكثر دقة.

مثال 4 من واقع الحياة استعمال القطر العمودي على الوتر



زجاج ملون: زجاج نافذة ملون كما في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GH}$ قطرًا طوله 30 in ، $\overline{KM}$ وترًا طوله 22 in، فأوجد JL .

خطوة 1 ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.



فيتكون مثلث قائم الزاوية JKL .

خطوة 2 أوجد JK ، KL .

بما أن $GH = 30$ ، فإن $JH = 15\,in$، وجميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة، فيكون $JK = 15\,in$.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عمودي على $\overline{KM}$ ، فإن $\overline{GH}$ تنصف الوتر $\overline{KM}$ بحسب النظرية 2.3 .

إذن، $KL = \frac{1}{2}(22) = 11$ in .

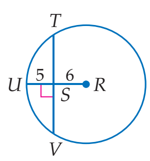
خطوة 3 أوجد JL قائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس	$KL^2 + JL^2 = JK^2$
$JK = 15$ و $KL = 11$	$11^2 + JL^2 = 15^2$
بالتبسيط	$121 + JL^2 = 225$
بطرح 121 من كلا الطرفين	$JL^2 = 104$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين	$JL = \sqrt{104}$

إذن، $JL = \sqrt{104} \approx 10.20$ in .

تأكد

4) أوجد TV في $\odot R$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة. **18.44 وحدة**



الربط مع واقع الحياة

لتلوين الزجاج؛ فإنه يُسخن إلى درجة حرارة °200 ، حتى يصبح لزجًا، ثم تضاف أكاسيد بعض المعادن فتكسبه لونًا.

المصدر:
Artistic Stained Glass by Regg

إرشادات للدراسة

رسم القطع المستقيمة
يمكنك إضافة أي معلومة معروفة إلى الشكل لمساعدتك على حل السؤال. ففي المثال 4 ، رسم نصف القطر $\overline{JK}$.

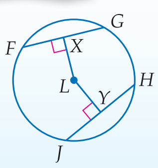
بالإضافة للنظرية 2.2، يمكنك استعمال النظرية الآتية؛ لتحديد ما إذا كان وتران في دائرة متطابقين.

نظرية 2.5

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي يكون الوتران في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين ، متطابقين إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن مركز الدائرة متساويين.

مثال $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ إذا وفقط إذا كان $LX = LY$



سوف تبرهن نظرية 2.5 في التمرينين 29 و 30

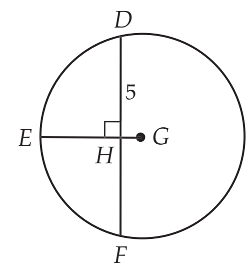
تنصيف الأقواس والأوتار

يكوّن المنصف العمودي للوتر نوعًا خاصًا من علاقات القطع المستقيمة وعلاقات الأقواس.

الأمثلة 3-5 تُبيّن كيفية استعمال النظريات لإيجاد قياسات عناصر الدائرة.

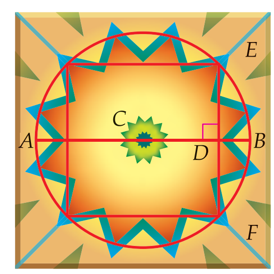
مثالان إضافيان

3 في $\odot G$ ، إذا كان $m\widehat{DEF} = 150°$، فأوجد $m\widehat{DE}$.



$m\widehat{DE} = 75°$

4 **بلاط السيراميك:** في بلاطة السيراميك المبيَّن شكلها أدناه طول القطر $\overline{AB}$ يساوي 18 in ، وطول الوتر $\overline{EF}$ يساوي 8 in. أوجد CD.



$CD = \sqrt{65} \approx 8.06\,in$

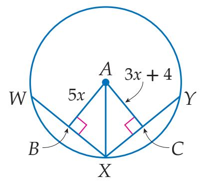
إرشادات للمعلم الجديد

توضيح المعطيات على الشكل

إن إضافة أي معلومة معطاة على الشكل يساعدك في حل المسألة. فيمكنك إضافة زوايا و أطوال قطع مستقيمة وأقواس وأنصاف أقطار وأقطار الدائرة؛ لأنها تكون موجودة وليس بالضرورة أن تكون أصلًا مرسومة على الشكل. وذكر الطلبة أيضًا بضرورة أتباع الخصائص الهندسية والتعريفات عند إضافة عناصر على الشكل.

مثال 5 من واقع الحياة — الأوتار التي تبعد أبعادًا متساوية عن المركز

جبر: إذا كان $WX = XY = 22$ في $\odot A$ ، فأوجد AB .



بما أن الوترين $\overline{WX}$ و $\overline{XY}$ متطابقان، فإن بُعديهما عن A متساويان. إذن، $AB = AC$.

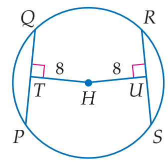
$AB = AC$

بالتعويض $5x = 3x + 4$

بالتبسيط $x = 2$

إذن، $AB = 5(2) = 10$

تأكد

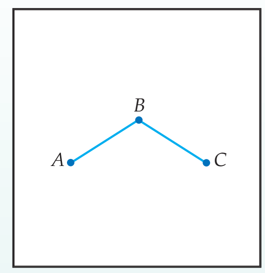


5) إذا كان $PQ = 3x - 4$ ، و $RS = 14$ في $\odot H$ ، فأوجد قيمة x . 6

بإمكانك استعمال النظرية 2.4 ؛ لإيجاد النقطة التي تبعُد مسافات متساوية عن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

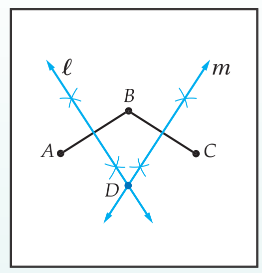
إنشاءات هندسية — الدائرة التي تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

خطوة 1



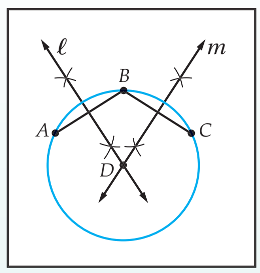
ارسم ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$.

خطوة 2



أنشئ العمودين ℓ ، m المنصفين للقطعتين $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$. وسمِّ نقطة التقاطع D .

خطوة 3



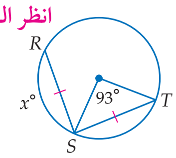
من النظرية 2.4، المستقيمان ℓ ، m يحويان قطرين في $\odot D$. ضع رأس الفرجار عند النقطة D ، وارسم دائرة تمر بالنقاط A, B, C .

تأكد من فهمك

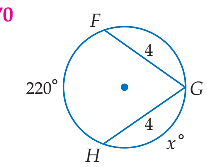
جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

المثالان 1, 2 الصفحتان 104, 105

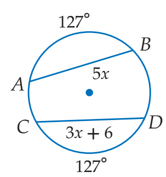
1) انظر الهامش



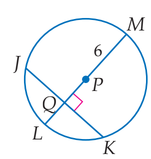
2) 70



3) 3



إذا كان $JK = 10$ ، و $m\widehat{JLK} = 134°$ في $\odot P$ ، فأوجد القياسات الآتية ، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.



المثالان 3, 4 الصفحتان 105, 106

4) $m\widehat{JL}$ $67°$

5) PQ 3.32

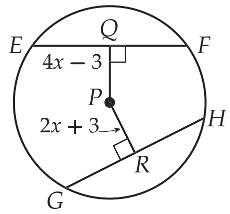
التركيز في المحتوى الرياضي

القطاع الدائري والقطعة الدائرية

تحصر الزاوية المركزية والقوس المحدود بها قطاعًا دائريًّا. ويحصر الوتر في الدائرة والقوس الذي يصل طرفي هذا الوتر جزءًا من الدائرة يسمى القطعة الدائرية. ويتكوّن دائمًا مثلث متطابق الضلعين عند رسم الوتر ونصفي القطرين المارين بطرفيه.

مثال إضافي

5 **جبر:** إذا كان في $\odot P$ ، $EF = GH = 24$ ، فأوجد PQ .



$PQ = 9$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون / اللغويون اطلب إلى الطلبة إنشاء دائرة ووترين متطابقين فيها والعمود المنصف لكل منهما. ثم اطلب إليهم إثبات تطابق هذين الإنشاءَين.

إجابة:

1) $\widehat{ST}$ هو القوس القصير في الدائرة لذلك $\widehat{ST} = 93$

$\overline{RS}$, $\overline{ST}$ وتران متطابقات لذلك فإن $\widehat{RS}$, $\widehat{ST}$ متطابقان:

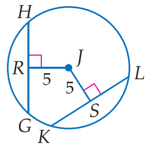
الاقواس المتماثلة متطابقة $\widehat{RS} \cong \widehat{ST}$

تعريف الاقواس المتطابقة $m\,\widehat{RS} \cong m\,\widehat{ST}$

بالتعويض $x = 93$

مثال 5
صفحة 107

6) إذا كان $GH = 9, KL = 4x + 1$ في $\odot J$ ، فأوجد قيمة x. **2**

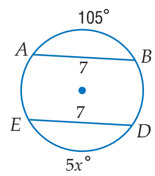


تدرب وحل المسائل

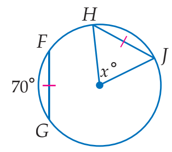
جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

المثالان 1, 2
الصفحتان 104, 105

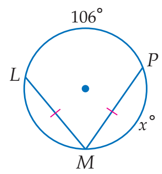
7) **21**



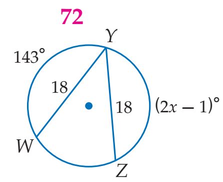
8) **70**



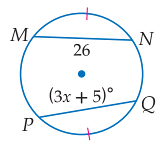
9) **127**



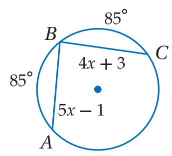
10) **72**



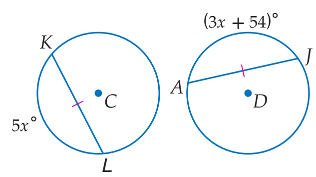
11) **7**



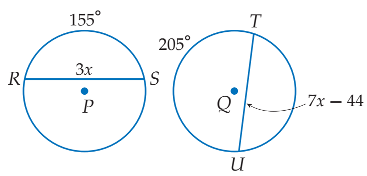
12) **4**



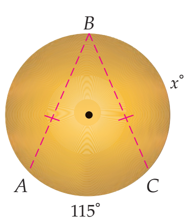
13) $\odot C \cong \odot D$ **27**



14) $\odot P \cong \odot Q$ **11**



15) **مجوهرات:** أراد صائغ مجوهرات عمل زوج من الأقراط مستعملًا قطعة ذهبية دائرية كما في الشكل المجاور، إذا كان قياس $\widehat{AC}$ يساوي 115°. وأراد أن يقص قطعتين متساويتين بحيث يكون $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ، فما قيمة x؟ **122.5°**

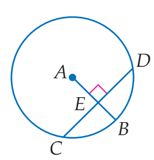


المثالان 3, 4
الصفحتان 105, 106

إذا كان نصف قطر $\odot A$ يساوي 14، $CD = 22$ ، فأوجد كلًا من القياسين الآتيين، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

16) CE **11**

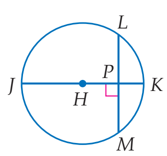
17) EB **5.34**



إذا كان قطر $\odot H$ يساوي 18، $LM = 12$ ، $m\widehat{LM} = 84$ ، فأوجد كلًا من القياسين الآتيين، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

18) $m\widehat{LK}$ **42°**

19) HP **6.71**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 6 – 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

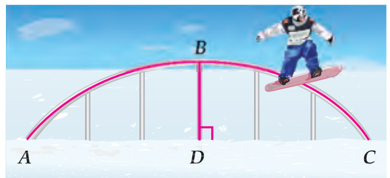
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	7–23 ، 32 ، 37–49
ضمن المتوسط	7–23 فردي ، 24–33 ، 37–49
فوق المتوسط	24–47 ، (اختياري : 48, 49)

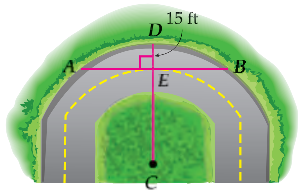
الربط مع واقع الحياة

في مناطق التزلج، يتم تثبيت سلك تمكن المتزلجين من القيام بحركات بهلوانية.

20) تزلّج: تأخذ سكة التزلّج في الشكل المجاور شكل قوس من دائرة. إذا كانت $\overline{BD}$ جزءًا من قطرها، وكان قياس $\widehat{ABC}$ يساوي 32% من الدائرة الكاملة، فأوجد $m\widehat{AB}$. $57.6°$

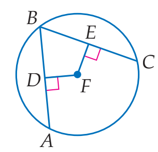


21) طُرق: حافة الطريق الخارجية المنحنية، والمبينة في الشكل المجاور هي جزء من $\odot C$، والتي نصف قطرها 88 ft . أوجد AB مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر. **98.3 ft**

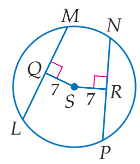


مثال 5 صفحة 107

22) جبر: إذا كانت $\widehat{AB} \cong \widehat{BC}$ ، $DF = 3x - 7$ ، و $FE = x + 9$ في $\odot F$ ، فأوجد قيمة x . **8**



23) جبر: إذا كان $LM = 16$ ، و $PN = 4x$ في $\odot S$ ، فأوجد قيمة x . **4**

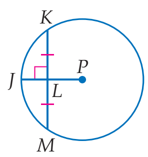


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

للتمارين 26-24 انظر ملحق الإجابات

24) **المعطيات:** $\odot P$، $\overline{KM} \perp \overline{JP}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{JP}$ تنصّف كلًّا من $\overline{KM}$ ، و $\widehat{KM}$.

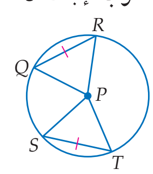


برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدَّد في كل من التمرينين الآتيين:

25) برهانًا حرًّا للجزء الثاني من النظرية 2.2

المعطيات: $\odot P$، $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

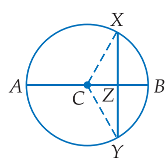
المطلوب: إثبات أن $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$



26) برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.3

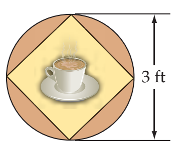
المعطيات: $\odot C$، $\overline{AB} \perp \overline{XY}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$، $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$



27) تصميم: صمَّم زيد شعارًا لمقهى، كما في الشكل المجاور . فإذا كانت أطوال الأوتار جميعها متساوية، فما قياس كل قوس؟ وما طول كل وتر؟

27) قياس كل قوس 90° وطول كل وتر 2.12 ft.



28) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.4. **انظر ملحق الإجابات**

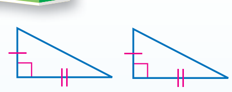
نظريات ومسلّمات

تطابق المثلثات القائمة

أضف إلى مطويتك

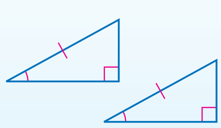
نظرية: التطابق ضلع - ضلع

إذا طابق ضلعا القائمة في مثلث قائم نظيريهما في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار ضَ ض.**



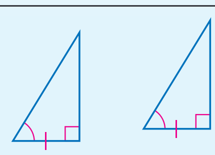
نظرية: التطابق وتر - زاوية حادة

إذا طابق وتر وزاوية حادة في مثلث قائم الوتر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار وز.**



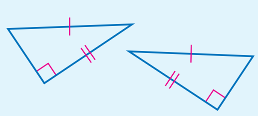
نظرية: التطابق ضلع - زاوية حادة

إذا طابق أحد ضلعي القائمة وزاوية حادة في مثلث قائم الضلع المناظر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار ض ز**



نظرية: التطابق وتر - ضلع

إذا طابق وتر وضلع في مثلث قائم وترًا وضلعًا في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. **الاختصار و ض**



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للجزء المُشار إليه من النظرية 2.5 .

للتمرينين 29, 30 انظر ملحق الإجابات

29) إذا تساوى بُعدا وترين في الدائرة عن مركزها، فإن هذين الوترين متطابقان.

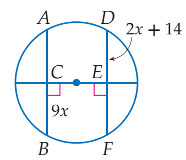
30) إذا تطابق وتران في الدائرة، فإن بُعديهما عن مركزها متساويان.

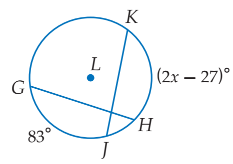
جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

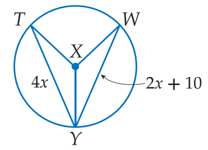
31) $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ 2

32) $\widehat{GJ} \cong \widehat{KH}$ 55

33) $\overline{TY} \cong \overline{WY}$ 5



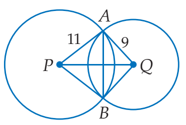




مسائل مهارات التفكير العليا

34) انظر ملحق الإجابات

34) **تحدٍ:** الوتر المشترك $\overline{AB}$ بين $\odot P$ و $\odot Q$ عمودي على القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي هاتين الدائرتين. إذا كان $AB = 10$ ، فما طول $\overline{PQ}$ ؟ برّر إجابتك.

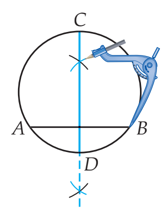


35) صحيحة أحيانًا؛ إذا كان القطر عموديًا على الوتر فإنه ينصف الوتر.

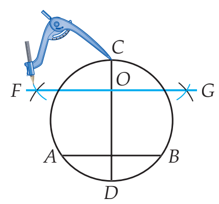
35) **تبرير:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة، و$\overline{HG}$ وتر يتقاطع مع $\overline{AB}$ في النقطة X. هل العبارة $HX = GX$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا؟

36) **تحدٍّ:** استعمل الفرجار لرسم دائرة يكون $\overline{AB}$ وترًا فيها. واستعمل هذا الإنشاء للإجابة عن كل مما يأتي:

للتمارين 36-38 انظر ملحق الإجابات



خطوة 1 أنشئ $\overline{CD}$ على أن تكون عمودًا ينصف $\overline{AB}$.



خطوة 2 أنشئ $\overline{FG}$ على أن تكون عمودًا ينصف $\overline{CD}$.
سمّ نقطة التقاطع O.

a) استعمل البرهان غير المباشر؛ لإثبات أن $\overline{CD}$ تمر بمركز الدائرة، بفرض أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.

b) أثبت أن O هي مركز الدائرة.

37) **مسألة مفتوحة:** أنشئ دائرة وارسم وترًا فيها. قس طول الوتر والمسافة بينه وبين المركز. ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة.

38) **اكتب:** إذا أصبح طول قوس في دائرة ثلاثة أمثال طوله الأصلي، فهل يصبح طول الوتر المقابل لهذا القوس الجديد ثلاثة أمثال طول الوتر المقابل للقوس الأصلي؟ ارسم شكلًا يؤيِّد استنتاجك.

إرشادات للدراسة

البرهان غير المباشر
تذكّر أن البرهان غير المباشر هو برهان تفترض فيه أن المطلوب غير صحيح، ثم تصل إلى تناقض مع المعطى، أو مع حقيقة مثبتة من قبل، أو مع تعريف، أو مع مسلَّمة.

تنبيه لتمرين

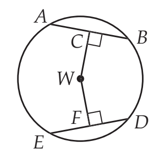
فرجار ومسطرة غير مدرجة

يتطلب التمرين 37 استعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة.

110 الفصل 2 الدائرة

تدريب على اختبار معياري

39) إذا كان $CW = WF$، $ED = 30$، فما طول $\overline{DF}$؟ **D**



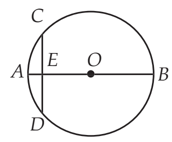
A 60

B 45

C 30

D 15

40) AB قطر في $\odot O$، وعمودي على الوتر $\overline{CD}$، ويقطعه في النقطة E. إذا كان $OB = 10$، $AE = 2$، فما طول $\overline{CD}$؟ **J**



F 4

G 6

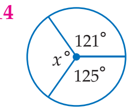
H 8

J 12

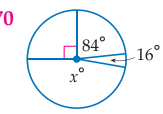
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 2-2)

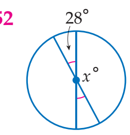
41) **114**



42) **170**

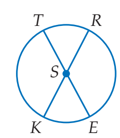


43) **152**



44) **حِرَف يدوية:** تُصمم شيماء نموذجًا لتطريز 10 وردات على قطعة قماش، فرسمت 10 أشكال خماسية منتظمة طول ضلع كل منها 3.5 in، ثم رسمت نصف دائرة على كل ضلع فظهرت بذلك 10 وردات، لكل منها خمس بتلات. كم بوصة طول الشريط الذهبي الذي تحتاجه لتزيين حواف جميع الوردات؟ قرِّب الناتج إلى أقرب بوصة. (الدرس 2-1) **275 in**

إذا كان $m\angle TSR = 42°$ في $\odot S$، فأوجد القياسات الآتية: (الدرس 2-2)



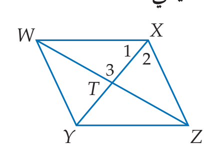
45) $\widehat{KT}$ **138°**

46) $\widehat{ERT}$ **180°**

47) $\widehat{KRT}$ **222°**

مراجعة المتطلبات السابقة

جبر: إذا كان الشكل الرباعي أدناه $WXYZ$ معيّنًا، فأجب عما يأتي:



48) إذا كان $m\angle 3 = (y^2 - 31)°$، فأوجد y. **±11**

49) إذا كان $m\angle XZY = 56°$، فأوجد $m\angle YWZ$. **28°**

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا فقرة يشرحوا فيها كيف ساعدهم الدرس المتعلق بالزوايا والأقواس في فهم الدرس المتعلق بالأقواس والأوتار.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يرسموا مثلثًا مختلف الزوايا، ثم اطلب إليهم إنشاء محاور للمثلث، وذلك بإقامة أعمدة على أضلاع المثلث، ثم اسألهم: أين تلاقت الأعمدة الثلاثة؟ تحقق من أعمال الطلبة، ثم اطلب إليهم استعمال الفرجار (بفتحة تساوي البُعد بين نقطة تلاقي الأعمدة وأحد رؤوس المثلث) لرسم دائرة، واطلب منهم أن يكوّنوا تخمينًا حول أعمالهم.

2-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4

إيجاد قياس الزوايا الداخلية في المضلعات .

الدرس 2-4

إيجاد قياس الزوايا المحيطية.

إيجاد قياس زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

ما بعد الدرس 2-4

استعمال خصائص المماسات لحل مسائل تتضمن مضلعات تحيط دوائر.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل :

- ما نوع القوس المتكون من أعلى المدخل والشريط الأفقي؟ نصف دائرة
- إذا كان قياس القوس من النقطة B إلى النقطة المثبت عندها الشريط على القنطرة تساوي °60. فما قياس القوس من النقطة A إلى النقطة المثبت عندها الشريط على القنطرة؟ °120
- أفرض أن عرض مدخل القاعة يساوي 3 ft. كيف يمكنك إيجاد طول القوس الذي يعلو المدخل؟ نصف القطر يساوي نصف عرض هذا الباب، أو 18 in. وبما أن القوس عبارة عن نصف دائرة، فإن قياسه يساوي °180 . عوّض نصف القطر وقياس القوس في قانون حساب طول القوس. $\ell = \frac{180}{360} \cdot 2\pi(18)$.

2-4 الزوايا المحيطية
Inscribed Angles

فيما سبق

درست إيجاد قياس زوايا المضلعات الداخلية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد قياس الزوايا المحيطية.
- أجد قياس زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

المفردات الأساسية

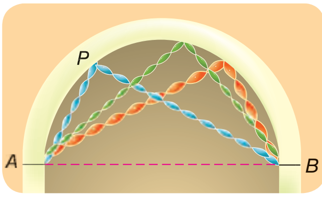
الزاوية المحيطية
inscribed angle

القوس المحدود
intercepted arc

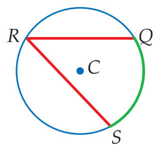
www.obeikaneducation.com

لمــاذا؟

تعلو مدخل قاعة احتفالات قنطرة على شكل نصف دائرة. زُيِّن هذا المدخل بأشرطة ملونة بحيث ثُبِّت أحد طرفي كل شريط عند النقطة A والطرف الآخر عند النقطة B . ثم رُفعت الأشرطة، وتم تثبيت كل منها عند نقطة مختلفة على القنطرة مثل P، كما في الشكل المجاور.

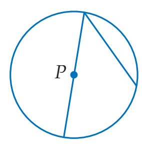
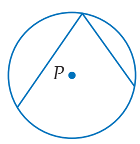
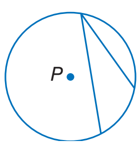


الزوايا المحيطية لاحظ أن الزوايا المتكوِّنة من هذه الأشرطة تبدو متطابقة، بغض النظر عن موقع النقطة P.
الزاوية المحيطية هي زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها وترين في الدائرة. $\angle QRS$ هي زاوية محيطية في $\odot C$.



القوس المحدود بالزاوية المحيطية يقع طرفاه على ضلعي الزاوية المحيطية ويقع في داخل الزاوية، القوس $\widehat{QS}$ في $\odot C$ هو القوس المحدود بالزاوية QRS.

هناك ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

حالة 1	حالة 2	حالة 3
		
مركز الدائرة P على أحد ضلعي الزاوية المحيطية.	مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.	مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.

في الحالة 1 يكون أحد ضلعي الزاوية المحيطة قطرًا للدائرة.

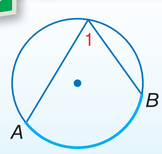
والنظرية الآتية صحيحة لجميع هذه الحالات الثلاث.

نظرية 2.6 نظرية الزاوية المحيطية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها .

مثال $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$, $m\widehat{AB} = 2\, m\angle 1$

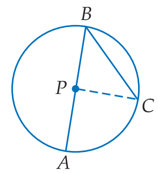


سوف تبرهن الحالتين 2 ، 3 لنظرية الزاوية المحيطية في التمرينين 33 و 34 على الترتيب.

مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (112)	• تنويع التعليم، ص (109, 111, 112,117)	• تنويع التعليم، ص (109,111,117)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

برهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة 1)



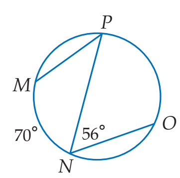
المعطيات: $\angle B$ محيطية في $\odot P$

المطلوب: إثبات أن $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

البرهان:

المبررات	العبارات
1) كل نقطتين تحددان مستقيمًا واحدًا	**1)** ارسم نصف قطر آخر $\overline{PC}$
2) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	**2)** $\overline{PB} \cong \overline{PC}$
3) تعريف المثلث المتطابق الضلعين	**3)** $\triangle PBC$ مثلث متطابق الضلعين
4) نظرية المثلث المتطابق الضلعين	**4)** $m\angle B = m\angle C$
5) نظرية الزاوية الخارجة	**5)** $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$
6) بالتعويض (الخطوتان 4, 5)	**6)** $m\angle APC = 2\, m\angle B$
7) تعريف قياس القوس	**7)** $m\widehat{AC} = m\angle APC$
8) بالتعويض (الخطوتان 6, 7)	**8)** $m\widehat{AC} = 2\, m\angle B$
9) خاصية التماثل للمساواة	**9)** $2\, m\angle B = m\widehat{AC}$
10) خاصية القسمة للمساواة	**10)** $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

مثال 1 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات



أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل المجاور:

a) $m\angle P$

$m\angle P = \frac{1}{2} m\widehat{MN}$

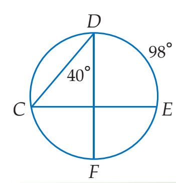
$= \frac{1}{2}(70°) = 35°$

b) $m\widehat{PO}$

$m\widehat{PO} = 2\, m\angle N$

$= 2\,(56°) = 112°$

تأكد



أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل المجاور:

1A) $m\widehat{CF}$ $80°$

1B) $m\angle C$ $49°$

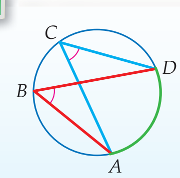
هناك علاقة بين الزاويتين المحيطيتين اللتين تحدان القوس نفسه في دائرة.

نظرية 2.7

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي الزاويتان المحيطيتان اللتان تحدان القوس نفسه أو قوسين متطابقين تكونان متطابقتين.

مثال $\angle B$ و $\angle C$ تُحدّدان $\widehat{AD}$. إذن، $\angle B \cong \angle C$.



سوف تبرهن النظرية 2.7 في التمرين 35

الزوايا المحيطية

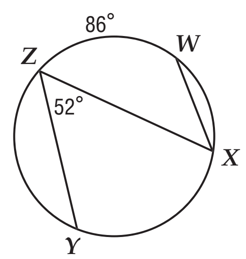
الأمثلة 1-3 تبين كيفية إيجاد قياس الزوايا المحيطية، وكتابة براهين باستعمال النظريات الخاصة بالزوايا المحيطية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

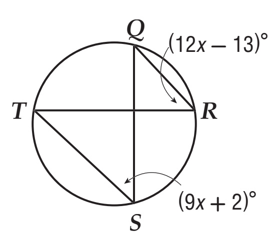
1 أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل أدناه.



a) $m\angle X$ $43°$

b) $m\widehat{YX}$ $104°$

2 **جبر:** أوجد $m\angle R$ مستعملًا الشكل أدناه.



$47°$

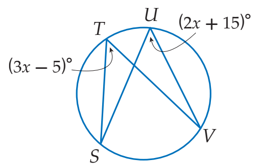
تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون يتضمن الدرس 4–2 براهين تحوي عدة حالات. حدّد أمثلة أخرى مستعينًا بكتب هندسية متقدمة أو الانترنت للنظريات التي تستعمل هذا النوع من البراهين. وذلك لمساعدة الطلبة الموهوبين في الرياضيات لتطوير قدراتهم وتحسين فهمهم وإدراكهم الأسباب التي تستدعي الأخذ بعين الاعتبار حالات متعددة عند إثبات النظريات.

مثال 2 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات معينة

جبر: أوجد $m\angle T$ مستعملاً الشكل المجاور.



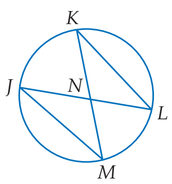
$\angle T$ و $\angle U$ كلاهما تحددان $\widehat{SV}$	$\angle T \cong \angle U$
تعريف الزوايا المتطابقة	$m\angle T = m\angle U$
بالتعويض	$3x - 5 = 2x + 15$
بالتبسيط	$x = 20°$

إذن، $m\angle T = 3(20°) - 5 = 55°$.

تأكد

2) إذا كان $m\angle S = (3x)°$ ، و $m\angle V = (x+16)°$ ، فأوجد $m\angle S$ مستعملاً الشكل أعلاه. $24°$

مثال 3 استعمال الزوايا المحيطية في البراهين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

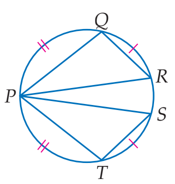
المعطيات: $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JMN \cong \triangle KLN$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$	1) معطيات
2) $\overline{JM} \cong \overline{KL}$	2) إذا كانت الأقواس الصغرى متطابقة، فإن الأوتار المقابلة لها تكون متطابقة أيضًا
3) $\angle M$ تحدد $\widehat{JK}$ $\angle L$ تحدد $\widehat{JK}$	3) تعريف القوس المحدود
4) $\angle M \cong \angle L$	4) الزوايا المحيطية التي تحدد القوس نفسه تكون متطابقة
5) $\angle JNM \cong \angle KNL$	5) الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متطابقة
6) $\triangle JMN \cong \triangle KLN$	6) AAS

تأكد



اكتب برهانًا ذا عمودين.

3) **المعطيات:** $\widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$ ، $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ انظر الهامش

المطلوب: إثبات أن $\triangle PQR \cong \triangle PTS$

إرشادات للدراسة

المضلعات المحاطة بدائرة

يكون المضلع مضلعًا محاطًا بدائرة، إذا وقعت جميع رؤوسه على الدائرة نفسها.

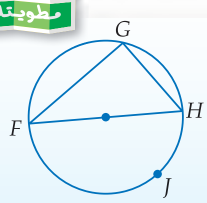
زوايا المضلعات المحاطة بدائرة للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرة خصائص خاصة.

نظرية 2.8

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تحدد الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.

مثال إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90°$.
إذا كان $m\angle G = 90°$ ، فإن $\widehat{FJH}$ هي نصف دائرة ، و $\overline{FH}$ يكون قطرًا فيها.



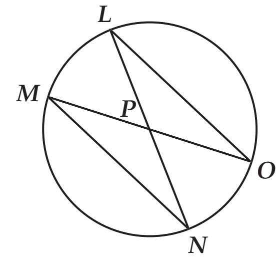
سوف تبرهن نظرية 2.8 في التمرين 36 .

مثال إضافي

3 اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\widehat{LO} \cong \widehat{MN}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle MNP \cong \triangle LOP$



(المبررات) العبارات

1) معطيات $\widehat{LO} \cong \widehat{MN}$

2) إذا كانت الأقواس الصغرى متطابقة , فإن الأوتار المناظرة لها تكون متطابقة
$\overline{LO} \cong \overline{MN}$

3) تعريف القوس المحدود
$\angle M$ تحدد $\widehat{NO}$ و $\angle L$ تحدد $\widehat{NO}$

4) الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه تكون متطابقة
$\angle M \cong \angle L$

5) الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
$\angle MPN \cong \angle OPL$

6) $\triangle MNP \cong \triangle LOP$ (AAS)

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الفرديون اختر أمثلة تُغطي كل واحد من مفاهيم هذا الدرس وقدمها للطلبة، بحيث يجلس كل طالب لوحده ويحل هذه الأمثلة. اطلب إلى الطلبة وضع ملاحظة حول الأمثلة التي يجدون صعوبة في حلها. شجّع الطلبة على إعادة قراءة الأمثلة والنظريات واستعمالها لفهم وحل المسائل.

إجابة: (تأكد)

3) البرهان:

(المبررات) العبارات

1) (معطيات)
$\widehat{QR} \cong \widehat{ST}, \widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$

2) (تعريف تطابق الأقواس)
$(m\widehat{QR} = m\widehat{ST}, m\widehat{PQ} = m\widehat{PT})$

3) (خاصية الضرب)
$\frac{1}{2}m\widehat{QR} = \frac{1}{2}m\widehat{ST}, \frac{1}{2}m\widehat{PQ} = \frac{1}{2}m\widehat{PT}$

4) (نظرية الزوايا المحيطية) $m\angle QPR = \frac{1}{2}\, m\widehat{QR}, m\angle TPS = \frac{1}{2}m\widehat{ST}, m\angle QRP = \frac{1}{2}\, m\widehat{PQ}, m\angle TSP = \frac{1}{2}m\widehat{PT}$

5) (بالتعويض) $m\angle QPR = m\angle TPS, m\angle QRP = m\angle TSP$

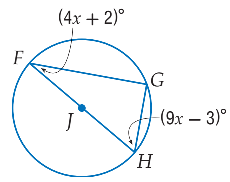
6) (تعريف الزوايا المتطابقة) $\angle QPR \cong \angle TPS, \angle QRP \cong \angle TSP$

7) (الأقواس المتطابقة لها أوتار متطابقة) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

8) $\triangle PQR \cong \triangle PTS$ (AAS)

مثال 4 إيجاد قياس الزوايا في المثلثات المحاطة بدائرة

جبر: أوجد $m\angle F$ مستعملاً الشكل المجاور.



$\triangle FGH$ قائم الزاوية ؛ لأن $\angle G$ زاوية محيطية تحدد نصف دائرة.

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث	$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180°$
بالتعويض	$(4x+2) + 90° + (9x-3) = 180°$
بالتبسيط	$13x + 89 = 180°$
بطرح 89 من كلا الطرفين	$13x = 91$
بقسمة كلا الطرفين على 13	$x = 7°$

إذن، $m\angle F = 4(7°) + 2 = 30°$.

تأكد

4) إذا كان $m\angle F = (7x+2)°$ ، $m\angle H = (17x-8)°$ ، فأوجد قيمة x مستعملاً الشكل أعلاه. $4°$

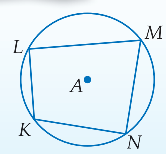
يمكن رسم مختلف أنواع المثلثات، بما فيها المثلث القائم الزاوية داخل الدائرة، بحيث تقع رؤوسه عليها. إلا أن أنواعًا معينة فقط من المضلعات الرباعية يمكن رسمها داخل الدائرة، بحيث تقع رؤوسها عليها.

نظرية 2.9

أضف إلى **مطويتك**

التعبير اللفظي إذا كان المضلع الرباعي دائريًا (محاطًا بدائرة)، فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان.

مثال إذا وقعت رؤوس المضلع الرباعي $KLMN$ على $\odot A$ ، فإن $\angle L$ ، $\angle N$ متكاملتان ، و $\angle K$ ، $\angle M$ متكاملتان أيضًا.



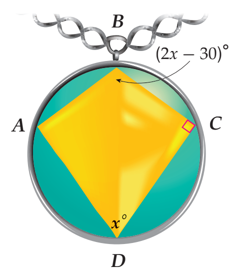
سوف تُبرهن نظرية 2.9 في التمرين 27 .

إرشادات للدراسة

الأشكال الرباعية يمكن إثبات نظرية 2.9 بأخذ الأقواس التي تحددها الزوايا المتقابلة في الرباعي الدائري وإثبات أنها تكون دائرة كاملة.

مثال 5 من واقع الحياة إيجاد قياس الزوايا

مجوهرات: يحتوي العقد الظاهر في الشكل المجاور على جوهرة بصورة مضلع رباعي دائري، أوجد $m\angle A$ ، $m\angle B$.



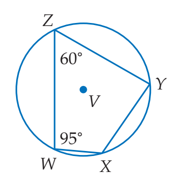
بما أن $ABCD$ رباعي دائري فالزاويتان المتقابلتان فيه متكاملتان .

$m\angle A + m\angle C = 180°$	$m\angle B + m\angle D = 180°$
$m\angle A + 90° = 180°$	$(2x-30) + x = 180°$
$m\angle A = 90°$	$3x - 30 = 180°$
	$3x = 210°$
	$x = 70°$

إذن، $m\angle A = 90°$ ، $m\angle B = 2(70) - 30 = 110°$

تأكد

5) المضلع $WXYZ$ رباعي دائري محاط بالدائرة V .
أوجد $m\angle Y$، $m\angle X$. $120°, 85°$

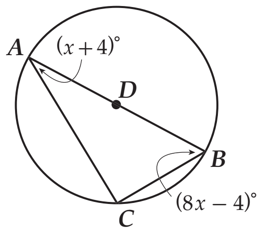


زوايا المضلعات المحاطة بدائرة

المثالان 5 , 4 يُبيّنان كيفية إيجاد قياسات زوايا المضلع المحاط بدائرة باستعمال النظريتين 2.7 ، 2.8 .

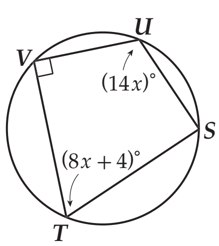
مثالان إضافيان

4 **جبر:** أوجد $m\angle B$ مستعملاً الشكل أدناه.



$m\angle B = 76°$

5 **شارات:** الشارة علامة مميزة تدل على مرتبة أو عمل الشخص في حقل أو عضويته أو على إنجازاته والشكل أدناه هو مضلع رباعي دائري. أوجد $m\angle S$, $m\angle T$.



$m\angle S = 90°$
$m\angle T = 68°$

التركيز في المحتوى الرياضي

النقاط الدائرية النقاط التي تقع على دائرة واحدة تسمى نقاطًا دائرية، وأي ثلاثة نقاط غير مستقيمة تكون دائمًا دائرية. أي أنه يوجد دائمًا دائرة واحدة تحوي ثلاثة نقاط غير مستقيمة، والمضلع الرباعي يُسمى دائريًا إذا وجدت دائرة تمر برؤوسه الأربعة. وكي يكون المضلع الرباعي دائريًا يجب أن تكون كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير هناك إستراتيجية أخرى يمكن استعمالها؛ لإيجاد قياس الزوايا المجهولة تعتمد على مجموع قياس الزوايا الداخلية في المضلع الرباعي. يمكن استعمال هذه الإستراتيجية؛ لإيجاد قياس الزاوية الرابعة، بطرح مجموع قياسات الزوايا الثلاثة الأولى من $360°$.

التعليم باستعمال التقنيات

البحث في المواقع الإلكترونية
اطلب إلى الطلبة البحث في الانترنت عن تطبيق تفاعلي للزوايا المحيطية. اطلب إليهم استكشاف المفهوم بسحب الزاوية لملاحظة كيف يتغيّر قياس القوس.

3 التدريب

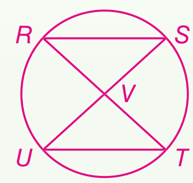
التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–10 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

7) المعطيات: $\overline{RT}$ ينصف $\overline{SU}$.
المطلوب إثبات أن:
$\triangle RVS \cong \triangle UVT$



البرهان:

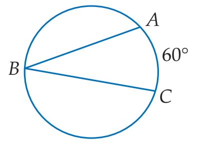
العبارات	(المبررات)
1) $\overline{RT}$ ينصف $\overline{SU}$	(معطيات)
2) $\overline{SV} \cong \overline{VU}$	(تعريف منصف القطعة المستقيمة)
3) $\angle SRT$ تحد $\overset{\frown}{ST}$. $\angle SUT$ تحد $\overset{\frown}{ST}$.	(تعريف القوس المحدود)
4) $\angle SRT \cong \angle SUT$	(الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه متطابقة)
5) $\angle RVS \cong \angle UVT$	(الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة)
6) $\triangle RVS \cong \triangle UVT$	(AAS)

تأكد من فهمك

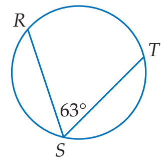
أوجد قياس كل مما يأتي:

مثال 1 صفحة 113

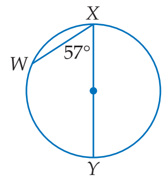
1) $m\angle B$ 30°



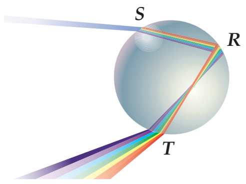
2) $m\overset{\frown}{RT}$ 126°



3) $m\overset{\frown}{WX}$ 66°



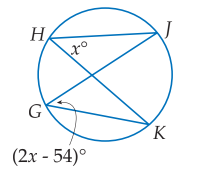
4) **علوم:** يُبيِّن الشكل المجاور انكسار أشعة الضوء في قطرة ماء لتنتج ألوان الطيف. إذا كان $m\overset{\frown}{ST} = 144^\circ$، فما قيمة $m\angle R$؟ 72°



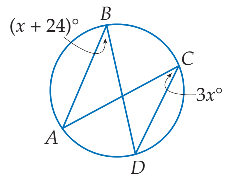
جبر: أوجد كلًا من القياسين الآتيين:

مثال 2 صفحة 114

5) $m\angle H$ 54°



6) $m\angle B$ 36°

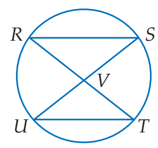


مثال 3 صفحة 114

7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر الهامش

المعطيات: $\overline{RT}$ تنصِّف $\overline{SU}$.

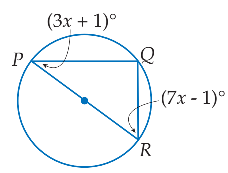
المطلوب: إثبات أن $\triangle RVS \cong \triangle UVT$



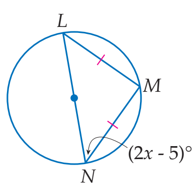
جبر: أوجد قيمة كل مما يأتي:

المثالان 4 , 5 صفحة 115

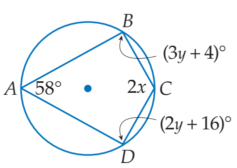
8) $m\angle R$ 62°



9) x 25°



10) $m\angle C$ ، $m\angle D$ $122^\circ, 80^\circ$

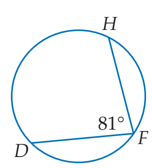


تدرب وحل المسائل

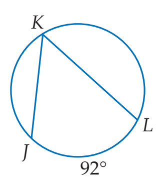
أوجد قياس كل مما يأتي:

مثال 1 صفحة 113

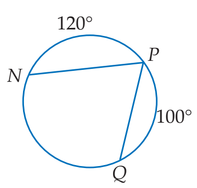
11) $m\overset{\frown}{DH}$ 162°



12) $m\angle K$ 46°



13) $m\angle P$ 70°



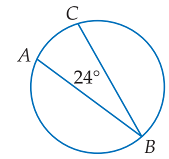
تنويع الواجبات المنزلية

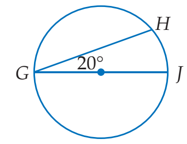
المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	11–26 ، 38–42 ، 44–63
ضمن المتوسط	11–33 فردي ، 34–42 ، 44–63
فوق المتوسط	27–59 ، (اختياري : 60–63)

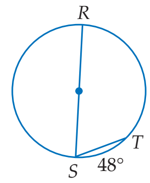
14) $m\widehat{AC}$ 48°

15) $m\widehat{GH}$ 140°

16) $m\angle S$ 66°







مثال 2
صفحة 114

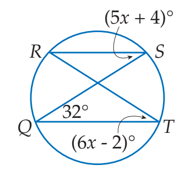
جبر: أوجد قياس كل مما يأتي:

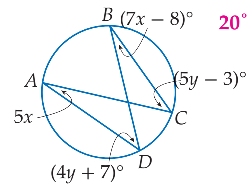
17) $m\angle R$ 32°

18) $m\angle A$ 20°

19) $m\angle S$ 34°

20) $m\angle C$ 47°





مثال 3
صفحة 114

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في التمرينين الآتيين: للتمرينين 22 , 21 انظر ملحق الإجابات

21) برهانًا ذا عمودين

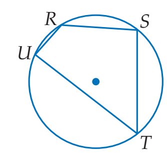
المعطيات: $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

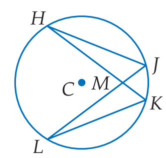
المطلوب: إثبات أن $m\widehat{TUR} = 2\, m\widehat{URS}$

22) برهانًا حرًّا

المعطيات: $\odot C$

المطلوب: إثبات أن $\triangle KML \sim \triangle JMH$



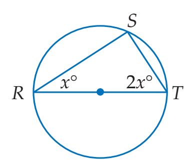


المثالان 4 ، 5
صفحة 115

جبر: أوجد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :

23) x 30°

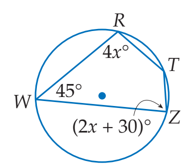
24) $m\angle T$ 60°



جبر: أوجد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :

25) $m\angle T$ 135°

26) $m\angle Z$ 80°



27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 2.9. انظر ملحق الإجابات

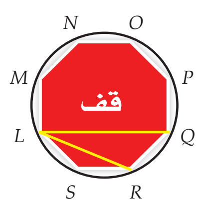
إشارات المرور: شكل إشارة قف هو مضلع ثماني منتظم تقع رؤوسه على دائرة. أوجد كلًّا مما يأتي:

28) $m\widehat{NPQ}$ 135°

29) $m\angle RLQ$ انظر الهامش

30) $m\angle LRQ$ 112.5°

31) $m\angle LSR$ 135°



إجابة:

29) بما أن كل الاضلاع متطابقة، فان الأقواس متطابقة.

$$8\, m\widehat{QR} = 360$$

$$m\widehat{QR} = \frac{360}{8} = 45$$

$$m\angle RLQ = \frac{1}{2} m\widehat{QR}$$

$$= \frac{1}{2}(45)$$

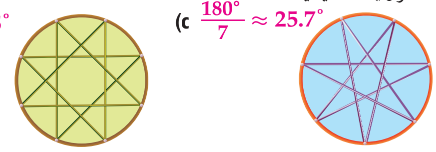
$$= 22.5$$

الربط مع واقع الحياة

يمكن استعمال فن الخيوط لتشكيل عدة نماذج هندسية.

32) **فن:** الأشكال الثلاثة أدناه هي نماذج لنجوم صُنعت من الخيوط. إذا كانت جميع الزوايا المحيطية في كل نجمة متطابقة ، فأوجد قياس كل من هذه الزوايا المحيطية.

a) $36°$ b) $\frac{180°}{7} \approx 25.7°$ c) $45°$

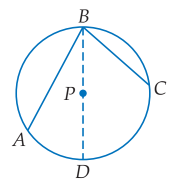


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للحالتين الآتيتين من حالات النظرية 2.6 . للتمرينين 33, 34 انظر الهامش

33) حالة 2

المعطيات: تقع P داخل $\angle ABC$.
$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

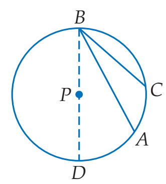
المطلوب: إثبات أن $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$



34) حالة 3

المعطيات: تقع P خارج الزاوية $\angle ABC$.
$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: إثبات أن $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$



برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكل من النظريتين الآتيتين: للتمرينين 35, 36 انظر ملحق الإجابات

35) النظرية 2.7 ، برهانًا ذا عمودين 36) النظرية 2.8 ، برهانًا حرًا

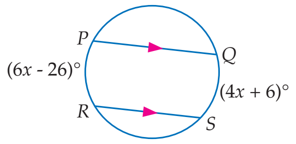
37) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

a) **هندسي:** ارسم دائرة تحوي وترين متوازيين هما $\overline{CD}$ ، $\overline{AB}$ مستعملاً الفرجار ، ثم صِل A و D برسم $\overline{AD}$.

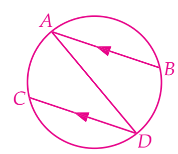
b) **عددي:** أوجد $m\angle A$ ، $m\angle D$ مستعملاً المنقلة، ثم حدِّد $m\overset{\frown}{AC}$ ، $m\overset{\frown}{BD}$. ما العلاقة بين هذين القوسين؟ فسِّر إجابتك.

c) **تعبير لفظي:** ارسم دائرة أخرى، وكرِّر الخطوتين a ، b. كوِّن تخمينًا حول القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

d) **تحليل:** استعمل هذا التخمين ؛ لإيجاد $m\overset{\frown}{PR}$ ، $m\overset{\frown}{QS}$ مستعينًا بالشكل المجاور، ثم أثبت صحة النتيجة بإيجاد قياس كل من هذين القوسين باستعمال الزوايا المحيطية. $70°, 70°$



(37a



(37b إجابة ممكنة:
$m\angle A = 30°, m\angle D = 30°,$
$m\overset{\frown}{AC} = 60°,$
القوسان $m\overset{\frown}{BD} = 60°$ متطابقان؛ لأن قياسيهما متساويان.

(37c إجابة ممكنة: يحصر الوتران المتوازيان في الدائرة قوسين متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

للتمارين 42–38 انظر ملحق الإجابات

تبرير: حدِّد ما إذا كان يمكن إحاطة كل من الأشكال الرباعية الآتية بدائرة، دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أبدًا. برِّر إجابتك.

38) المربع 39) المستطيل 40) متوازي الأضلاع 41) المعيّن 42) شكل الطائرة الورقية

43) **تحدٍّ:** مربع محاط بدائرة، ما نسبة مساحة سطح الدائرة إلى مساحة سطح المربع؟ $\frac{\pi}{2}$

44) **اكتب:** مثلث قائم زواياه $90° - 45° - 45°$ محاط بدائرة، إذا أُعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح طريقة لإيجاد طولي ضلعي قائمة هذا المثلث. انظر ملحق الإجابات

45) **مسألة مفتوحة:** أوجد شكلاً من واقع الحياة يحوي مضلعًا محاطًا بدائرة وارسمه. انظر إجابات الطلبة

46) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في الدائرة إذا كانت هاتان الزاويتان تحددان القوس نفسه، وما العلاقة بين قياسيهما؟ انظر ملحق الإجابات

تنبيه لتمرين

الفرجار والمنقلة والمسطرة غير المدرجة

يتطلب التمرين 37 استعمال الفرجار والمنقلة والمسطرة غير المدرجة.

تمثيلات متعددة في التمرين 37 يستعمل الطلبة رسومات هندسية، والقياسات، والوصف اللفظي لاستقصاء خصائص الأقواس المحصورة بين الأوتار المتوازية.

إجابات:

33) البرهان:

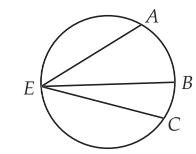
العبارات (المبررات)	
1) (مسلمة جمع الزوايا)	$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$
2) (مسلّمة جمع الأقواس)	$m\overset{\frown}{ADC} = m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{DC}$
3) (خاصية الضرب)	$\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC} = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}$
4) (قياس الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضلعيها قطرًا للدائرة تساوي نصف قياس القوس المحدود، الحالة 1)	$m\angle ABD = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AD}$, $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC} = m\angle DBC$
5) (بالتعويض (الخطوتان 3, 4))	$\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC} = m\angle ABD + m\angle DBC$
6) (بالتعويض (الخطوتان 1, 5))	$\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC} = m\angle ABC$

34) البرهان :

(المبررات)	العبارات
1) مسلمة جمع الزوايا، خاصية الطرح	$m\angle ABC = m\angle DBC - m\angle DBA$
2) مسلمة جمع الأقواس. خاصية الطرح	$m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{DC} - m\overset{\frown}{DA}$
3) خاصية الضرب	$\frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC} - \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DA}$
4) قياس الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضلعيها قطرًا في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المحدود (الحالة 1)	$m\angle DBA = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DA}$, $m\angle DBC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}$
5) بالتعويض (الخطوتان 1, 4)	$m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC} - \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DA}$
6) خاصية التوزيع	$m\angle ABC = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DC} - m\overset{\frown}{DA})$
7) بالتعويض (الخطوتان 6, 3)	$m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$

تدريب على اختبار معياري

47) إذا كان $m\widehat{AC} = 160°$ ، $m\angle BEC = 38°$ كما في الشكل أدناه، فما قيمة $m\angle AEB$؟ A



A 42°	**C** 80°
B 61°	**D** 84°

48) مربع يحيط بدائرة. ما نسبة محيط الدائرة إلى محيط المربع؟ D

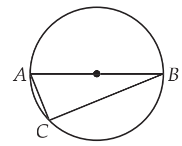
A $\frac{1}{4}$	**C** $\frac{\pi}{2}$
B $\frac{1}{2}$	**D** $\frac{\pi}{4}$

49) سؤال ذو إجابة قصيرة: $\overline{AB}$ قطر في الدائرة أدناه، $AC = 8\,in$ ، $BC = 15\,in$. أوجد قطر الدائرة ومحيطها.

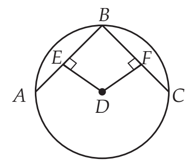
$d = 17\,in$

$c = 17\pi$

$\approx 53.4\,in$



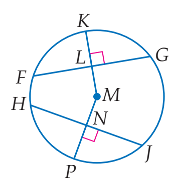
50) إذا كان $CF = 8$ ، $DC = 10$ ، $DE = FD$ في $\odot D$ ، كما في الشكل أدناه، فما طول $\overline{AB}$؟ J



F 14	**H** 10
G 8	**J** 16

مراجعة تراكمية

إذا كان $FL = 24$ ، $HJ = 48$ ، $m\,\widehat{HP} = 65°$ ، فأوجد كل مما يأتي مستعملًا $\odot M$: (الدرس 3-2)

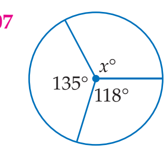


51) FG 48 **52)** $m\widehat{PJ}$ 65°

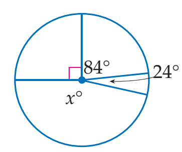
53) NJ 24 **54)** $m\widehat{HJ}$ 130°

أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 2–2)

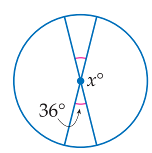
55) 107



56) 162



57) 144



تقع النقطتان Q ، R على $\odot P$. أوجد طول $\widehat{QR}$ ، إذا أُعطيت نصف القطر، وقياس الزاوية في كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

58) $PR = 12$ ، $m\angle QPR = 60°$ $4\pi \approx 12.57$

59) $PR = 16$ ، $m\angle QPR = 90°$ $8\pi \approx 25.1$

مراجعة المتطلبات السابقة

جبر: افترض أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. استعمل المعلومات المعطاة في كل مما يأتي؛ لإيجاد القياسات المجهولة :

60) $AB = 4x - 5,\ BC = 11 + 2x,\ AC = ?$ 54

61) $AB = 6y - 14,\ BC = 10 - 2y,\ AC = ?$ 8

62) $BC = 6 - 4m,\ AC = 8,\ m = ?$ $\frac{1}{2}$

63) $AB = 10s + 2,\ AC = 40,\ s = ?$ 1.8

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة كتابة فقرة توضح كيف يساعدهم الدرس 4-2 حول الزوايا المحيطية على فهم المماسات الواقعة خارج الدائرة .

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2–4 و 2–3 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 2 .

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يصفوا الفرق بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية، والعلاقة بين قياسهما إذا كان لهما القوس المحدود نفسه. رأس الزاوية المركزية هو مركز الدائرة وضلعاها يحتويان نصفي قطرين للدائرة. بينما يقع رأس الزاوية المحيطية على الدائرة وضلعاها يحتويان وترين في الدائرة. قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية التي تحد القوس نفسه.

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل للتحقق من مدى فهم الطلبة. للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

CRM اختبار منتصف الفصل

بناء الاختبارات التقويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

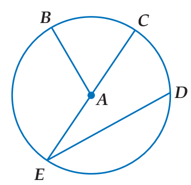
مطويـات متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حلّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 1–2 إلى 4–2 .

الفصل 2 اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-2 إلى 2-4

أجب عن الأسئلة 3 –1، مستعينًا بالدائرة $\odot A$. (الدرس 1–2)



1) سمِّ الدائرة. $\odot A$

2) سمِّ قطرًا. $\overline{EC}$

3) سمّ وترًا لا يكون قطرًا. $\overline{ED}$

4) **دراجة هوائية:** قطر إطار دراجة هوائية يساوي 24 in. (الدرس 1-2)

a) أوجد محيط أحد إطارات الدراجة. 75.4 in

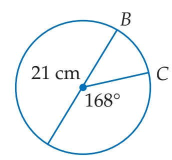
b) ما المسافة بالبوصات التي تقطعها الدراجة عندما يدور إطارها 100 دورة؟ 7540 in

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المعطى محيطها في السؤالين الآتيين، مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1–2)

5) $C = 23$ cm 3.7 cm, 7.3 cm

6) $C = 78$ ft 12.4 ft, 24.8 ft

7) **اختيار من متعدد:** ما طول $\widehat{BC}$ في الشكل أدناه؟ (الدرس 2-2) B



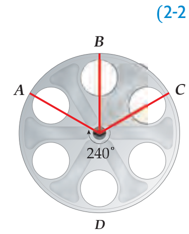
A 18°

B 2.20 cm

C 168°

D 30.79 cm

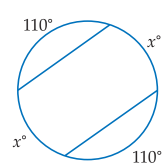
8) **أفلام:** قطر بكرة الفيلم الظاهرة في الشكل أدناه يساوي 14.5 in. (الدرس 2-2)



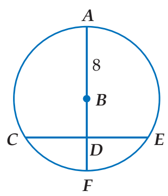
a) أوجد $m\widehat{ADC}$. 240°

b) أوجد طول $\widehat{ADC}$. 30.4 in

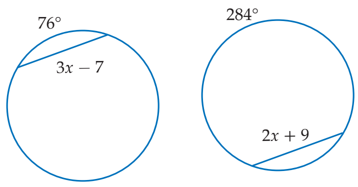
9) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. (الدرس 3-2) 70



10) إذا كان $CE = 13.5$ في $\odot B$، فأوجد BD مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-2) 4.29

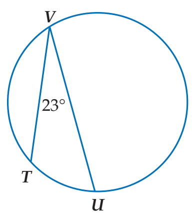


11) إذا كانت الدائرتان أدناه متطابقتين، فأوجد قيمة x وطول الوتر. (الدرس 3-2) $x = 16, 41$

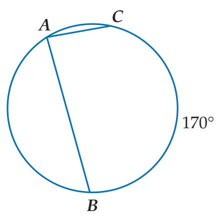


أوجد القياس المطلوب في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-2)

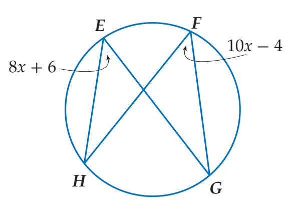
12) $m\widehat{TU}$ 46°



13) $m\angle A$ 85°



14) **اختيار من متعدّد:** ما قيمة x في الشكل أدناه؟ (الدرس 4-2) G



F 1.8

G 5

H 46

J 90

15) إذا رُسم مربع طول ضلعه 14 cm، بحيث تقع رؤوسه على دائرة، فما طول قطر هذه الدائرة؟ (الدرس 1-2) $14\sqrt{2}$ cm

---

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-2، 2-2، 3-2، 2-4	**مصادر الفصل**	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	**زيارة الموقع**	www.obeikaneducation.com
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

2-5 المماسات
Tangents

فيما سبق

درستُ استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعمل خصائص المماسات؛ لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.
- أحُلّ مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة.

المفردات الأساسية

المماس
tangent

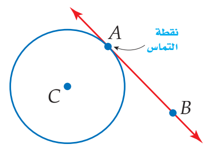
نقطة التماس
point of tangency

المماس المشترك
common tangent

www.obeikaneducation.com

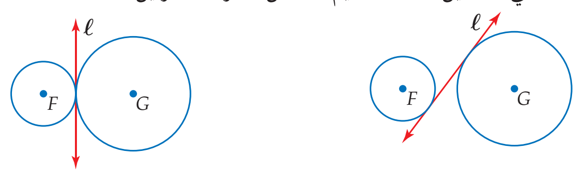
لمــاذا؟

كانت الدراجات الهوائية تُحرّك سابقًا بدفع القدم على الأرض. أمّا الدّراجات الحديثة فإنها تستعمل الدواسات والسلاسل والتروس، حيث تدور السلسلة حول تروس دائرية. ويقاس طول السلسلة بين الترسين من نقطتَي تماس السلسلة مع الترسين.



المماسات **المماس** هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة، ويقطعها في نقطة واحدة فقط تُسمّى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة $\odot C$ عند النقطة A، ويُسمّى كل من $\overline{AB}$، $\overrightarrow{AB}$ أيضًا مماسًا للدائرة.

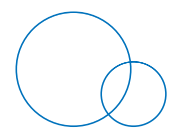
المماس المشترك هو مستقيم، أو شعاع، أو قطعة مستقيمة تمسُّ الدائرتين في المستوى نفسه. في الشكلين أدناه المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين F و G.



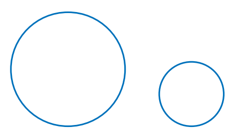
مثال 1 تحديد المماسات المشتركة

انقل الشكلين أدناه، ثم ارسم المماسات المشتركة . وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

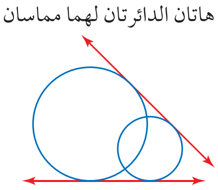
a)



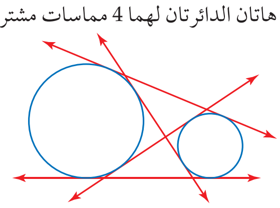
b)



هاتان الدائرتان لهما مماسان مشتركان.



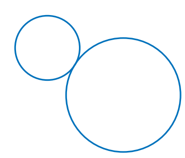
هاتان الدائرتان لهما 4 مماسات مشتركة.



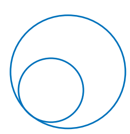
تأكد

انقل الشكلين أدناه، ثم ارسم المماسات المشتركة. وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

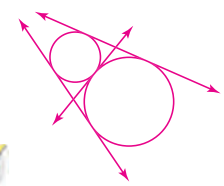
1A)



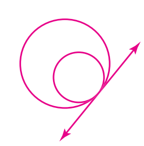
1B)



(1A



(1B



2-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

قبل الدرس 2-5

استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

الدرس 2-5

استعمال خصائص المماسات لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.

حل مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة.

ما بعد الدرس 2-5

إيجاد قياس الزوايا المتكونة من المستقيمات التي تتقاطع مع الدائرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل

- ما الشكل الذي تمثله التروس؟ دائرة
- كيف تشبه السلسلة في الدراجة الهوائية مماس الدائرة؟
  إنها تصل بين الدوائر بمستقيم.
- كيف تختلف السلسة عن المماس؟
  السلسلة تمس التروس في أكثر من نقطة، بينما المماس خط مستقيم يمس الدائرة في نقطة واحدة فقط.

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (121)	• تنويع التعليم، ص (121,122)	• تنويع التعليم، ص (122)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

المماسات

الأمثلة 4-1 تُبيّن كيفية استعمال نظريات المماس لحل المسائل التي تتضمن المماسات.

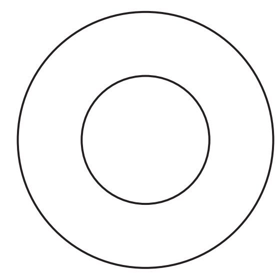
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

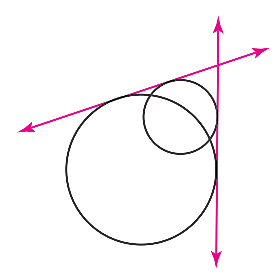
1 أنقل الشكلين أدناه، ثم ارسم المماسات المشتركة واذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتبُ "لا يوجد مماس مشترك".

(a

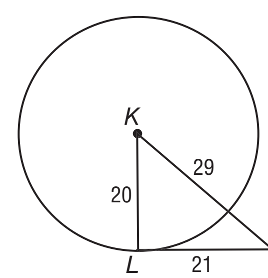


لا يوجد مماس مشترك

(b



2 $\overline{KL}$ نصف قطر في $\odot K$. حدّد إذا كان $\overline{LM}$ مماسًا لهذه الدائرة. برر إجابتك.



$\overline{LM}$ مماس للدائرة K حسب عكس نظرية فيثاغورس.

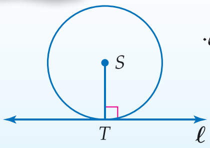
أقصر مسافة من المماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المار بنقطة التماس.

نظرية 2.10

أضف إلى مطويتك

التعبيراللفظي يكون المستقيم مماساً لدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس.

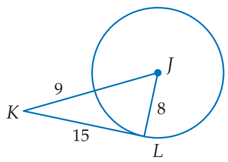
مثال يكون المستقيم ℓ مماسًا للدائرة $\odot S$، إذا وفقط إذا كان $\ell \perp \overline{ST}$.



سوف تبرهن جزأي نظرية 2.10 في التمرينين 32 و 33 على الترتيب

مثال 2 تحديد المماس

$\overline{JL}$ نصف قطر في $\odot J$. حدّد إذا كان $\overline{KL}$ مماسًا للدائرة $\odot J$. وبرّر إجابتك.



اختبر إذا كان $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس $8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8 + 9)^2$

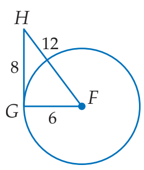
بالتبسيط $289 = 289$ ✓

وعليه، فإن $\triangle$ JKL قائم الزاوية في $\angle JLK$. أي أن $\overline{KL}$ عمودي على $\overline{JL}$ عند النقطة L.

وحسب النظرية 2.10 يكون $\overline{KL}$ مماسًا لـ $\odot J$.

تأكد

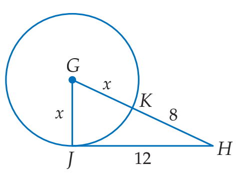
2) حدّد إذا كان $\overline{GH}$ مماسًا للدائرة $\odot F$. برّر إجابتك. لا؛ $100 \neq 324$



ويمكنك استعمال النظرية 2.10 ؛ لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 3 استعمال المماس لإيجاد القيم المجهولة

$\overline{JH}$ مماس للدائرة G عند J. أوجد قيمة x.

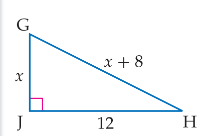


بتطبيق النظرية 2.10 ، يكون $\overline{GJ} \perp \overline{JH}$. إذن، $\triangle GHJ$ مثلث قائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس	$GJ^2 + JH^2 = GH^2$
$GJ = x, JH = 12, GH = x + 8$	$x^2 + 144 = (x + 8)^2$
بالضرب	$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$
بالتبسيط	$80 = 16x$
بقسمة الطرفين على 16	$5 = x$

إرشادات لحل المسألة

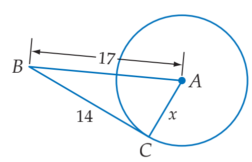
حل مسألة أبسط يمكنك استعمال استراتيجية حل مسألة أبسط، وذلك برسم المثلث القائم دون الدائرة وتسميته. يُبيّن الشكل أدناه رسم المثلث في المثال 3 .



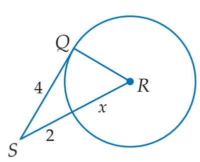
تأكد

أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو كأنها مماسًا للدائرة، هي مماس بالفعل مقرّبًا الناتج إلى منزلتين عشريتين إذا لزم ذلك.

(3A $\sqrt{93} \approx 9.64$

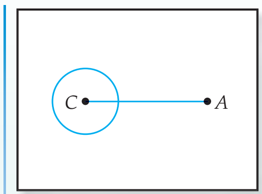


(3B 3

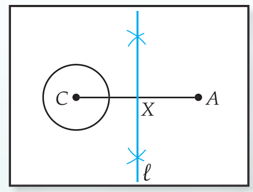


يمكنك استعمال النظريتين 2.8 و 2.10 ؛ لإنشاء مماسات الدائرة.

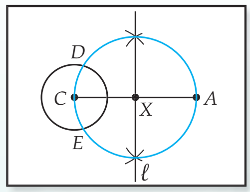
إنشاءات هندسية — رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها



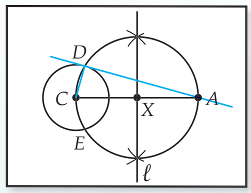
خطوة 1 ارسم الدائرة C مستعملًا الفرجار، وحدّد نقطة A خارجها، ثم ارسم $\overline{CA}$



خطوة 2 أنشئ المستقيم ℓ ، وهو عمود منصّف للقطعة المستقيمة CA ، وسمِّ نقطة التقاطع X.



خطوة 3 أنشئ الدائرة X بنصف قطر $\overline{XC}$ ، وسمِّ نقطتَي تقاطع الدائرتين D ، E.



خطوة 4 ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overline{DC}$. فيكون $\triangle ADC$ مرسومًا داخل نصف الدائرة. إذن، $\angle ADC$ قائمة، وعليه فإن $\overleftrightarrow{AD}$ مماس للدائرة C.

سوف تثبت صحة هذا الإنشاء في التمرين 36 ، وسوف تنشئ مماسًا لدائرة من نقطة عليها في التمرين 34

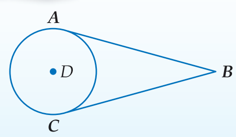
يمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة واحدة خارجها.

نظرية 2.11

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي القطعتان المستقيمتان المماستان للدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها تكونان متطابقتين.

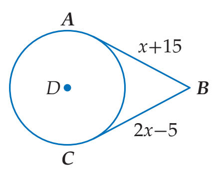
مثال إذا كان $\overline{AB}$ ، $\overline{CB}$ مماسان للدائرة D ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



سوف تبرهن نظرية 2.11 في التمرين 28

مثال 4 استعمال المماسات المتطابقة لإيجاد بعض القياسات

جبر: إذا كان $\overline{AB}$ ، $\overline{CB}$ مماسَّين للدائرة D ، فأوجد قيمة x.

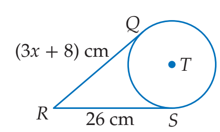


المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان	$AB = CB$
بالتعويض	$x + 15 = 2x - 5$
بطرح x من كلا الطرفين	$15 = x - 5$
بإضافة 5 لكلا الطرفين	$20 = x$

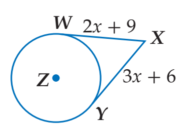
تأكد

جبر: أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه، مفترضًا أن القطعة التي تبدو مماسًّا للدائرة، هي مماس بالفعل.

(4A 6



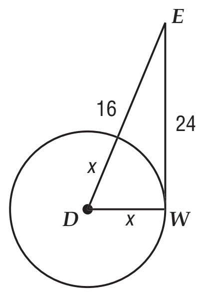
(4B 3



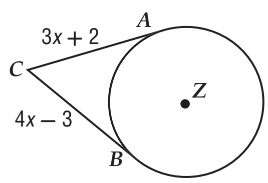
مثالان إضافيان

3 في الشكل أدناه، $\overline{WE}$ مماس للدائرة D عند W. أوجد قيمة x.

$x = 10$



4 **جبر:** إذا كان $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ مماسين للدائرة Z ، فأوجد قيمة x.



$x = 5$

تنويع التعليم

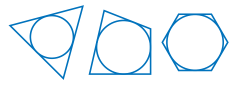
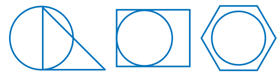
دون ضمن

المتعلمون الاجتماعيون قسّم الطلبة إلى مجموعات صغيرة. واشرح لهم أن شركة تريد أن تسّوق لعبة دائرية الشكل قطرها 5 in. ومهمة الطلبة تصميم صندوق توضع بداخله بحيث يأخذ الصندوق أقل مساحة ممكنة من الرّف، ويجب أن تكون جوانب الصندوق مسطحة وليست دائرية. اطلب إلى الطلبة أن يرسموا اللعبة الدائرية و الصندوق الذي يحيطها وأن يسجلوا القياسات على الرسم. إذا كانت أبعاد رف العرض هي 3 ft , 10 ft ، فكم صندوقًا يمكن عرضه في طبقة واحدة على هذا الرف؟ ما الشكل الذي يسمح بعرض العدد الأكبر من اللُعّب على الرف؟

تنبيــه !

تحديد المضلّعات المحيطة بدائرة
إذا مسّت الدائرة ضلعًا واحدًا أو أكثر من أضلاع المضلع، فلا يعني أن المضلع يُحيط بالدائرة، وهذا ما يتضح من المجموعة الثانية من المضلّعات في الجدول.

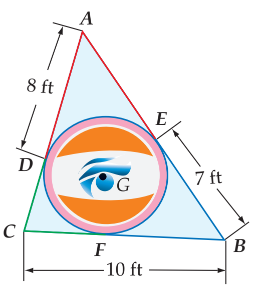
المضلّعات المحيطة بدائرة يُحيط المضلّع بالدائرة، إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماسًّا للدائرة.

مضلعات محيطة بدائرة	مضلعات ليست محيطة بدائرة
	

يمكنك استعمال النظرية 2.11 ؛ لإيجاد القياسات المجهولة للمضلّعات المحيطة بدائرة.

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد قياسات في المضلعات المحيطة بدائرة

تصميم: يعمل مصمم نسخة مكبّرة من الشعار المثلثي المبيّن في الشكل المجاور. إذا كان $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة G، فأوجد محيطه.



خطوة 1 أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة G، فإن $\overline{AE}$ ، $\overline{AD}$
مماسان للدائرة G، وكذلك $\overline{BE}$ ، $\overline{BF}$
وأيضًا $\overline{CF}$ ، $\overline{CD}$ جميعها مماسات أيضًا.

إذن، $\overline{AE} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{BF} \cong \overline{BE}$ ، $\overline{CF} \cong \overline{CD}$.

لذا، فإن $BF = BE = 7$ ft , $AE = AD = 8$ ft .

وبتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة ينتج $CF + FB = CB$

إذن، $CF = CB - FB = 10 - 7 = 3$ ft . وعليه، فإن $CD = CF = 3$ ft.

خطوة 2 أوجد محيط $\triangle ABC$.

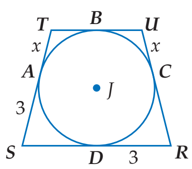
المحيط يساوي :

$AE + EB + BC + CD + DA = 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 36 ft.

تأكد

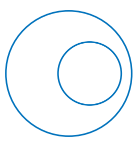
5) يُحيط الشكل الرباعي $RSTU$ بالدائرة J،
إذا كان محيطه يساوي 18 وحدة، فأوجد قيمة x . 1.5 وحدة



تأكد من فهمك

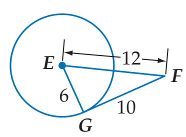
مثال 1 صفحة 121

1) انسخ الشكل المجاور في كراستك، ثم ارسم المماسات المشتركة، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك". لا يوجد مماس مشترك

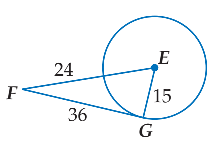


مثال 2 صفحة 122

حدّد إذا كانت $\overline{FG}$ مماسًّا للدائرة E في الشكلين أدناه. وبرّر إجابتك.

2) 

لا؛ $144 \neq 136$

3) 

انظر الهامش

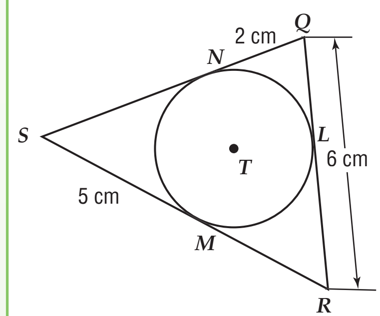
المضلعات المحيطة بدائرة

يمكن للمضلعات أيضًا أن تحيط بدائرة.

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد محيط المثلث باستعمال النظريات التي درست في هذا الدرس.

مثال إضافي

5 **تغليف:** تباع قطع بسكويت دائرية مغلفة بأغلفة مثلثية الشكل وذلك لإثارة اهتمام الزبائن. إذا أحاط $\triangle QRS$ الدائرة T ، فأوجد محيط $\triangle QRS$.



22 cm

التركيز في المحتوى الرياضي

المماسات اشرح للطلبة أنه وبالرغم من أن المماس يقطع الدائرة، إلا أنه لا يقع أي جزء منه داخل الدائرة. وإنما النقطة الوحيدة المشتركة بين الدائرة والمماس هي نقطة التماس فقط.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلبة كتابة فقرة في مدونة الفصل الإلكترونية لمناقشة الأسباب التي تجعل رسم مضلع منتظم يحيط بالدائرة ممكنًا دائمًا. يجب أن يدرك الطلبة أنه كلما زاد عدد أضلاع المضلع كان شكله أقرب إلى شكل الدائرة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع رُسمت دائرة تحيط بمربع، وكان نصف قطر الدائرة يساوي r. اطلب إلى الطلبة كتابة تعبير يمثل محيط المربع بدلالة r. $4r\sqrt{2} \approx 5.66r$

إجابة:

3

$$FG^2 + GE^2 \stackrel{?}{=} FE^2$$

$$36^2 + 15^3 \stackrel{?}{=} (24 + 15)^2$$

$$1521 = 1521$$

$\triangle EFG$ قائم الزاوية في G لذلك، $\overline{FG}$ عمودي على نصف القطر $\overline{EG}$ عند النقطة G . إذن، $\overline{FG}$ مماس للدائرة E .

3 التدريب

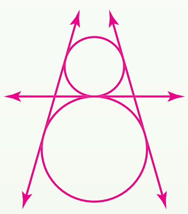
التقويم التكويني

استعمل التمارين 8–1 للتأكد من فهم الطلبة.

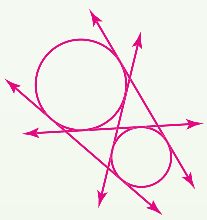
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

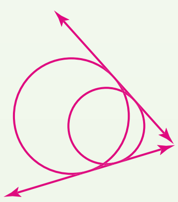
9)



11)



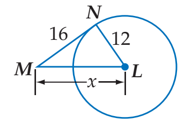
12)



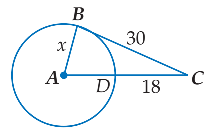
أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة، هي مماس بالفعل.

المثالان 3, 4 الصفحتان 123, 122

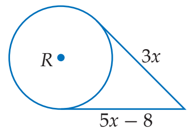
4) 20



5) 16

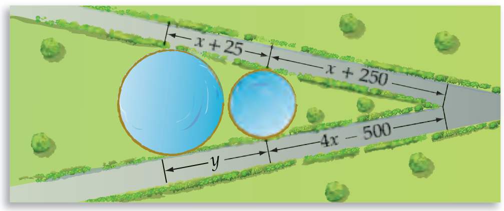


6) 4



7) **هندسة الحدائق:** خطط مهندس ممرين للمشاة يُشكّلان مماسين لبركتين دائريتين كما في الشكل أدناه. إذا كانت الأطوال المعطاة بالأقدام، فأوجد قيمة كلّ من x، y.

$x = 250, y = 275$

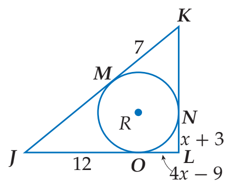


مثال 5 صفحة 124

8) **جبر:** يُحيط المثلث JKL بالدائرة R كما في الشكل المجاور.

a) أوجد قيمة x. 4

b) أوجد محيط $\triangle JKL$. 52 وحدة

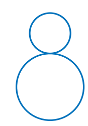


تدرب وحل المسائل

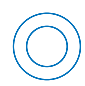
انسخ الأشكال أدناه في كراستك، وارسم المماسات المشتركة، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

مثال 1 صفحة 121

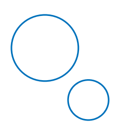
9)



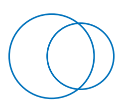
10)



11)



12)



9) انظر الهامش

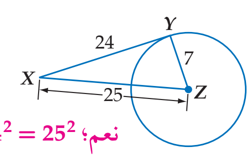
10) لا يوجد مماس مشترك

للتمرينين 12 ,11 انظر الهامش

حدّد إذا كانت $\overline{XY}$ مماسًّا للدائرة المعطاة في كل من الأشكال أدناه، وبرّر إجابتك.

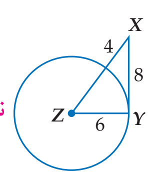
مثال 2 صفحة 122

13)



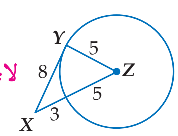
نعم؛ $7^2 + 24^2 = 25^2$

14)



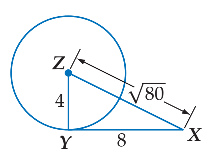
نعم؛ $6^2 + 8^2 = 10^2$

15)



لا؛ $5^2 + 8^2 \neq 8^2$

16)



نعم؛ $4^2 + 8^2 = (\sqrt{80})^2$

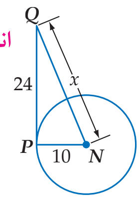
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	25–9 ، 53–36
ضمن المتوسط	27–9 فردي، 34-28 ، 53–36
فوق المتوسط	50–26 ، (اختياري : 53–51)

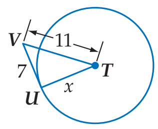
أوجد قيمة x في كل من الأشكال أدناه، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا للدائرة، هي مماس بالفعل. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر.

المثالان 3, 4
الصفحتان 122–123

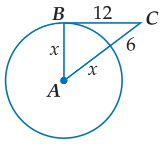
17) انظر الهامش



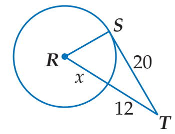
18) 8.5



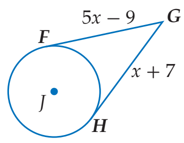
19) 9



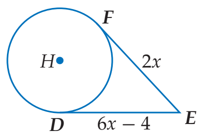
20) 10.7



21) 4



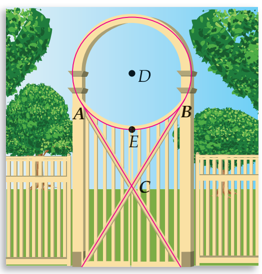
22) 1



23) **مدخل البيت:** إذا كانت $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ مماسات لِـ $\odot D$، كما في الشكل المجاور، ونصف قطر الدائرة يساوي $26\,in$ ، $EC = 20\,in$ ، فأوجد القياسين الآتيين، مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

a) AC 37.95 in

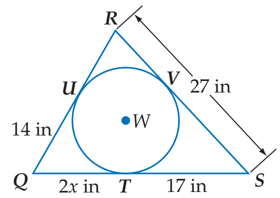
b) BC 37.95 in



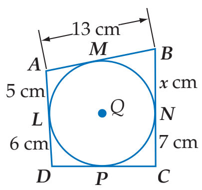
أوجد قيمة x ، ثم أوجد محيط المضلّع في كل من الشكلين أدناه:

مثال 5
صفحة 124

24) 7, 82 in

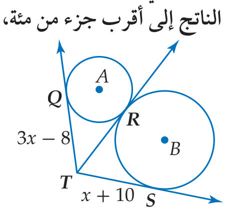


25) 8, 52 cm

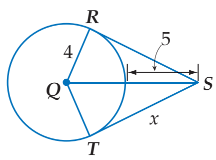


أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه. مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا للدائرة، هي مماس بالفعل. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

26) 9



27) 8.06



إرشادات للدراسة

تحديد المماسات

لا تفترض أن القطع المستقيمة مماسات لمجرد أنها تبدو في الشكل كذلك، إلا إذا طُلب إليك أن تفترضها كذلك في السؤال. فيجب أن يحتوي الشكل على رمز الزاوية القائمة، أو أن تكون الأطوال المبيَّنة على الشكل تؤكِّد أن الزاوية قائمة.

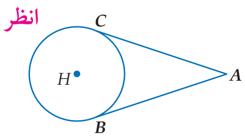
اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كل من التمرينين الآتيين: للتمرينين 28, 29 انظر ملحق الإجابات

28) برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.11

المعطيات: $\overline{AC}$ مماس للدائرة H عند النقطة C.
$\overline{AB}$ مماس للدائرة H عند النقطة B.

المطلوب: إثبات أن $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

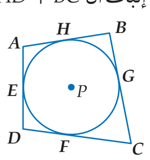
انظر الهامش



29) برهانًا ذا عمودين

المعطيات: يحيط الشكل الرباعي $ABCD$ بالدائرة P.

المطلوب: إثبات أن $AB + CD = AD + BC$

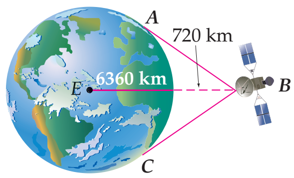


إجابة:

17) $\overline{QP}$ مماس للدائرة N عند P
$\overline{QP} \perp \overline{PN}$ ،
$\triangle PQN$ قائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس	$QP^2 + PN^2 = QN^2$
$GP = 24, PN = 10, GN = x$	$24^2 + 10^2 = x^2$
بالتبسيط	$576 + 100 = x^2$
بالتبسيط	$676 = x^2$
الجذر التربيعي للطرفين	$26 = x$

30) أقمار صناعية: يرتفع قمر صناعي مسافة 720 Km عن سطح الأرض التي نصف قطرها 6360 Km. ويمكن منه رؤية المنطقة التي تقع بين المماسين $\overline{BA}$ ، $\overline{BC}$ من سطح الأرض.
أوجد $\overline{BA}$ مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة.
3110.76 km



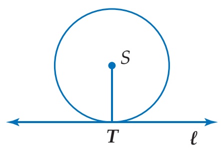
31) مخلّفات الفضاء: يُشير اسم الركام المداري، إلى مخلفات البعثات الفضائية التي لا تزال تدور حول الأرض. ففي سنة 2007 أُلقي خزان يحتوي 1400 lb من الأمونيا من إحدى البعثات الفضائية. افترض أن خزان الأمونيا يرتفع عن الأرض 435 mi ، فما المسافة بين الخزان و الأرض؟ مفترضًا أن نصف قطر الأرض 4000 mi. ومقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد صحيح. ارسم شكلًا يوضّح هذا الموقف ضمن إجابتك. انظر الهامش

32) برهان: اكتب برهانًا غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم مماسًّا للدائرة، فإنه يكون عموديًّا على نصف قطرها عند نقطة التماس (الجزء 1 من النظرية 2.10)

المعطيات: ℓ مماس للدائرة S عند T، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن $\ell \perp \overline{ST}$

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$) انظر الهامش

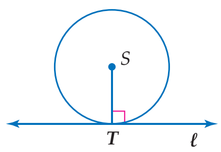


33) برهان: اكتب برهانًا غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم عموديًا على نصف قطر الدائرة عند نقطة طرفه على الدائرة، فإنه مماس لهذه الدائرة. (الجزء 2 من النظرية 2.10)

المعطيات: $\ell \perp \overline{ST}$ ، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن ℓ مماس للدائرة S.

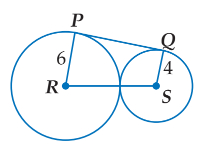
(**إرشاد:** افترض أن ℓ ليس مماسًّا للدائرة S).



34) إنشاءات هندسية: أنشئ مماسًّا للدائرة من نقطة تقع على الدائرة من خلال الخطوات الآتية: ارسم $\odot A$ مستعملًا الفرجار. اختر نقطة P على الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$ ، ثم أنشئ قطعة مستقيمة تمر بالنقطة P ، وتكون عمودية على $\overleftrightarrow{AP}$. سمِّ المماس t. فسّر كل خطوة وبرّرها. انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

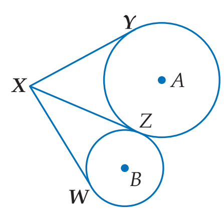
35) تحدٍّ: $\overline{PQ}$ مماس للدائرتين R ، S ، كما في الشكل المجاور، أوجد PQ. وفسّر تبريرك. انظر الهامش



36) اكتب: وضّح كل خطوة في الإنشاءات الهندسية الموجودة على صفحة 121 ، وبرّرها. انظر ملحق الإجابات

37) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثًا يُحيط بدائرة، ومثلثًا محاطًا بدائرة. انظر ملحق الإجابات

38) تبرير: $\overline{XY}$ ، $\overline{XZ}$ مماسان للدائرة A . $\overline{XZ}$ ، $\overline{XW}$ مماسان للدائرة B كما في الشكل المجاور، فسّر كيف يمكن أن تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}, \overline{XZ}, \overline{XW}$ متطابقة رغم أن نصفَي قطرَي الدائرتين مختلفان.



39) اكتب: ما عدد المماسات التي يمكن رسمها من نقطة خارج الدائرة، ومن نقطة على الدائرة، ومن نقطة داخل الدائرة؟ فسّر تبريرك.
انظر ملحق الإجابات

الربط مع واقع الحياة

يوجد أكثر من 8000 قطعة كبيرة من الركام المداري كالأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض بسرعة 8 km/sec تقريبًا. أمّا الأجسام التي تبعد عن الأرض أكثر من 700 km فسوف تبقى تدور في مداراتها لمئات، أو آلاف السنين.

المصدر: Tethers Unlimited, Inc.

33) البرهان: افرض أن ℓ ليس مماسًّا للدائرة $\odot S$. بما أن ℓ يقطع الدائرة عند T، فإنه يقطعها في نقطة أخرى، سمِّ هذه النقطة Q. إذن، $ST = SQ$. ولكـن $\overline{ST} \perp \ell$ ، ولذا، فإن $\overline{ST}$ أقصر قطعة مستقيمة من S إلى المستقيم ℓ. وبما أن T و S نقطتان مختلفتان على المستقيم ℓ، فإن $ST < SQ$ وهذا يناقض حقيقة أن أنصاف أقطار الدائرة لها الطول نفسه. إذن، الفرض بأن ℓ. ليس مماسًّا للدائرة فرض خاطئ، ويكون نفيه صحيحًا. إذن، ℓ مماس للدائرة S.

38) مماسا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها متطابقان، حسب النظرية 2.11 وعليه فإن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ وكذلك $\overline{XZ} \cong \overline{XW}$. إذن، $\overline{XY} \cong \overline{XZ} \cong \overline{XW}$.

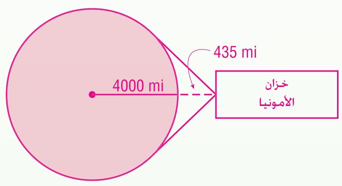
تنبيه لتمرين

الفرجار والمسطرة غير المدرجة

يتطلب التمرينان 37 , 34 استعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة.

إجابات:

31)

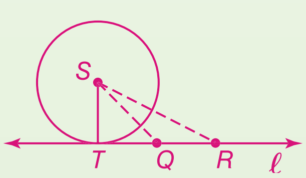


نظرية فيثاغورس
$4000^2 + x^2 = (4000 + 435)^2$

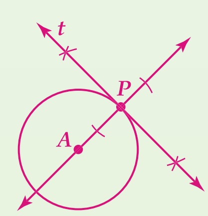
طرح 4000^2 من الطرفين
$x^2 = 3669225$

الجذر التربيعي للطرفين
$x \approx 1916\ mi$

32) البرهان: أفرض أن المستقيم ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$. إذا لم يكن ℓ عموديًّا على $\overline{ST}$ فإنه يوجد $\overline{SQ}$ أخرى تكون عمودية على ℓ. وأيضًا توجد نقطة R على $\overrightarrow{TR}$ كما يظهر في الشكل أدناه بحيث إن $\overline{QT} \cong \overline{QR}$ $\angle SQT$, $\angle SQR$ زاويتان قائمتان من تعريف التعامد ولذلك $\angle SQT \cong \angle SQR$, ضلع مشترك $\overline{SQ}$ إذن $\triangle SQT \cong \triangle SQR$ بضلعين وزاوية محصورة بينهما، لذا فإن $\overline{ST} \cong \overline{SR}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة. لذا، فإن كلًا من T, R تقع على $\odot S$. إن وجود نقطتين تقعان على ℓ وأيضًا تقعان على $\odot S$ أمرٌ يناقض الحقيقة المعطاة بأن ℓ مماس للدائرة S عند النقطة T . إذن، $\ell \perp \overline{ST}$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.



34) إجابة ممكنة:

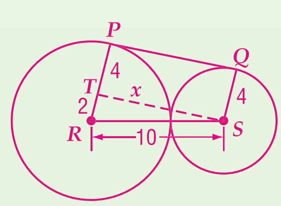


a) أرسم $\overleftrightarrow{AP}$.(كل نقطتين تحددان خطًا مستقيمًا)

b) أنشئ عمودًا على $\overleftrightarrow{AP}$ عند P. (المماس يُعامد نصف القطر عند نقطة طرفه)

35) إجابة ممكنة:

ارسم $\overline{TS}$ موازية لـ $\overline{PQ}$ كما في الشكل أدناه.



باستعمال نظرية فيثاغورس، ينتج أن $2^2 + x^2 = 102$ ، إذن $x \approx 9.8$. وبما أن $PQSR$ مستطيل، فإن $PQ = x = 9.8$.

4 التقويم

بطاقة خروج قدّم مثالًا على السبورة لمثلث يتكون من المماس و نصف القطر و المستقيم المرسوم من مركز الدائرة إلى نقطة واقعة على المماس. ضع أطوالًا على الشكل. واطلب إلى الطلبة كتابة المعادلة اللازمة لحل المسألة وأن يسلّموا الإجابة لك قبل مغادرتك غرفة الصف.

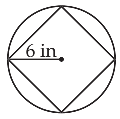
تدريب على اختبار معياري

40) نصف قطر $\odot P$ يساوي 10 cm، $\overline{ED}$ مماس للدائرة عند D، وتقع F على $\odot P$، وعلى القطعة المستقيمة $\overline{EP}$. إذا كان $ED = 24$ cm، فما طول $\overline{EF}$؟ **B**

A 10 cm   C 21.8 cm

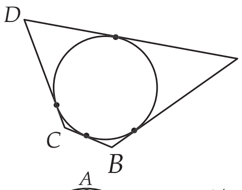
B 16 cm   D 26 cm

41) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** رُسم مربع داخل دائرة نصف قطرها 6 in، كما في الشكل المجاور. أوجد طول ضلع المربع.



$6\sqrt{2}$ أو 8.5in تقريبًا

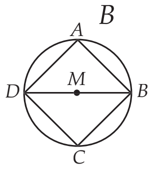
42) الشكل الرباعي $ABCD$ يحيط بدائرة، إذا كان $BC = 6$، $AB = 19$، $CD = 14$، كما في الشكل أدناه، فما طول $\overline{AD}$؟ **D**



A 11   B 20

C 25   D 27

43) إذا كان $m\angle DBC = 35°$، $m\angle ADB = 60°$ في $\odot M$، كما في الشكل المجاور، فما قياس $\angle D$؟ **J**



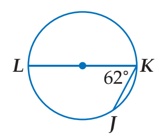
F 60°   G 95°

H 110°   J 115°

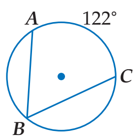
مراجعة تراكمية

أوجد قياس كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

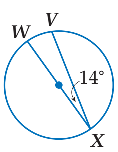
44) $m\widehat{JK}$ **56°**



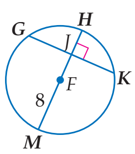
45) $m\angle B$ **61°**



46) $m\widehat{VX}$ **152°**



إذا كان $GK = 14$، و $m\,\widehat{GHK} = 142°$ في $\odot F$. فأوجد قياس كل مما يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-2)

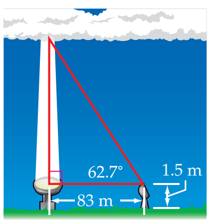


47) $\widehat{GH}$ **71°**

48) JK **7**

49) $\widehat{KM}$ **109°**

50) **علم الأرصاد الجوية:** تُسمّى قاعدة كتلة من الغيوم عند سطح الأرض "السقف". ولإيجاد ارتفاع السقف في إحدى الليالي وجّه راصد جوي كشافًا ضوئيًّا رأسيًّا إلى كتلة غيوم، واستعمل الثيودولايت وهي آلة بصرية تتكوّن من تلسكوب قابل للدوران يرتفع 1.5 m عند سطح الأرض، بالإضافة إلى كشاف ضوئي يبعد 83m عن التلسكوب، فوجد أن زاوية الارتفاع تساوي 62.7°. ما ارتفاع السقف؟ (الدرس 5-1) **162.3 m تقريبًا**



مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

51) $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$ **110**

52) $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$ **18**

53) $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$ **58**

128 الفصل 2 الدائرة

توسـع 2-5

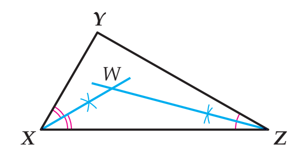
معمل الهندسة

الدوائر المحاطة بمثلث والدوائر التي يحيط بها مثلث
Inscribed and Circumscribed Circles

لقد تعلمت في دراستك السابقة أن هناك نقاطًا خاصة تنتج عن تلاقي عدة مستقيمات في المثلث، ومن هذه النقاط مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الداخل، وهي نقطة تلاقي منصّفات زوايا المثلث، وتكون على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

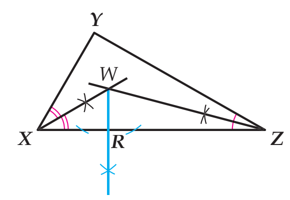
نشاط 1 إنشاء دائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل. دائرة محاطة بمثلث

خطوة 1



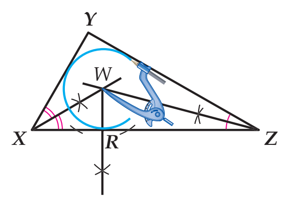
ارسم المثلث XYZ ، وأنشئ منصّفَي زاويتين فيه؛ لتحدد مركز الدائرة الداخلية للمثلث. ارمز إليه بالرمز W .

خطوة 2



أنشئ قطعة مستقيمة عمودية على أحد أضلاع المثلث من مركز الدائرة الداخلية، وسمّ نقطة التقاطع R .

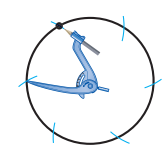
خطوة 3



افتح الفرجار فتحة تساوي طول $\overline{WR}$، وركّزه عند النقطة W، وارسم دائرة .

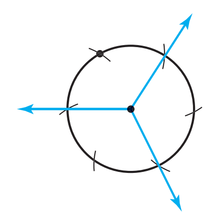
نشاط 2 إنشاء مثلث يحيط بدائرة

خطوة 1



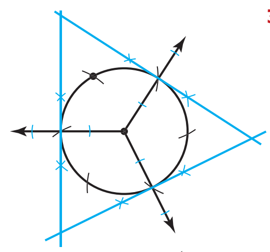
افتح الفرجار فتحة مناسبة، وارسم دائرة، ثم عيّن نقطة عليها. ومن هذه النقطة وبفتحة الفرجار التي استعملتها لرسم الدائرة، ارسم قوسًا، ثم كرّر ذلك لترسم خمسة أقواس أخرى كما في الشكل أعلاه.

خطوة 2



ارسم ثلاثة أشعة من مركز الدائرة، كما في الشكل أعلاه.

خطوة 3



ارسم مستقيمًا عموديًّا على كل شعاع عند نقطة تقاطعه مع الدائرة.

نمذجة و تحليل: للتمارين 1, 4 انظر الهامش

1) لماذا كان إنشاء عمود على أحد أضلاع المثلث في نشاط 1 ضروريًّا؟

2) ارسم مثلثًا قائم الزاوية، وارسم دائرة بداخله. للتمارين 2, 3 انظر ملحق الإجابات

3) **تحدٍّ** ارسم مثلثًا منفرج الزاوية محيطًا بدائرة. وفسّر عملك.

4) **اكتب** لماذا تُعدُّ عبارة "مركز الدائرة الداخلية للمثلث" مصطلحًا مناسبًا للنقطة التي تعرّفها؟

إجابات:

1) يبعُد مركز الدائرة الداخلية مسافات متساوية عن أضلاع المثلث. طول العمود على أحد الأضلاع يساوي طول الأعمدة الأخرى على الضلعين الاخرين.

4) إجابة ممكنة: سوف تستعمل مركز الدائرة الداخلية لرسم دائرة محاطة بالمثلث، فتكون الدائرة في مركز المثلث.

توسـع 2-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الأهداف

- إنشاء دائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل.
- إنشاء مثلث يحيط بدائرة.

المواد اللازمة

- مسطرة غير مدرجة
- فرجار

إرشادات للتدريس

اشرح للطلبة أن عليهم استعمال مركز الدائرة الداخلية للمثلث لإنشاء دائرة مُحاطة بمثلث، وأيضًا سوف يستعملون مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث لإنشاء دائرة يحيط بها مثلث. وعليهم أيضًا معرفة كيفية إنشاء مثلث متطابق الأضلاع يحيط بالدائرة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلبة في مجموعات ثلاثية أو رباعية من ذوي قدرات متفاوتة، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاطين 1, 2 وحل التمرينين 1, 2 .

تدريب اطلب إلى الطلبة أن يحلوا التمرينين 3, 4 بشكل فردي.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرينين 3, 4 لتحليل الإنشاءات والتخمينات التي وضعها الطلبة حول مصطلح "مركز الدائرة الداخلية" .

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة وضع تخمين حول سبب كون قانون محيط الدائرة هو $C = 2\pi r$ وليس $6r$ عندما يستعمل نصف القطر وتقسّم الدائرة إلى ستة أقواس متطابقة.

توسيع المفهوم

تحدى الطلبة أن يكرروا النشاطين لأنواع مختلفة من المضلعات و يتدربوا على الإنشاءات.

2-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-6

إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكونة من مماسات للدائرة.

الدرس 2-6

إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من تقاطع مستقيمات داخل الدائرة أو عليها .

إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من تقاطع مستقيمات خارج الدائرة.

ما بعد الدرس 2-6

إيجاد أطوال القطع المستقيمة التي تتقاطع داخل الدائرة وخارجها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل :

- ما النسبة المئوية للقياس °180 من الدائرة؟ 50%
- إذا كانت زاوية الرؤيا للكاميرا °50 ، فكم تقل هذه الزاوية عن مُعدّل زاوية الرؤيا للإنسان؟ °130

2-6

القاطع والمماس وقياس الزوايا
Secant, Tangent, and Angle Measure

فيما سبق

درستُ إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكونة من مماسات للدائرة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها.
- أجد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.

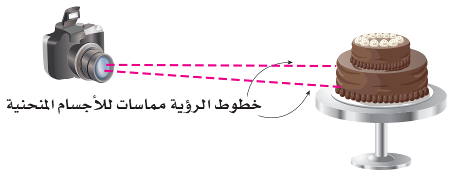
المفردات الأساسية

القاطع
secant

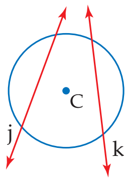
www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟

أن معدل مجال الرؤية عند الإنسان يساوي °180 تقريبًا. ولكن زاوية الرؤيا في معظم آلات التصوير أضيق من ذلك بكثير، إذ تتراوح بين °20، °50. وتحدد زاوية الرؤية في آلات التصوير مقدار ما يمكن أن تلتقطه آلة التصوير على الفيلم من الأجسام المنحنية.



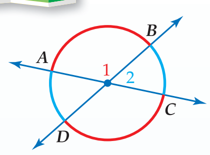
التقاطع على الدائرة أو في داخلها **القاطع** هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين بالضبط. المستقيمان j ، k قاطعان للدائرة C. عندما يتقاطع قاطعان داخل الدائرة، فإن الزوايا المتكونة ترتبط بالأقواس المحدودة بها.



نظرية 2.12

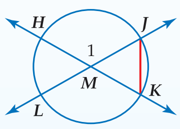
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة ، فإن قياس الزاوية المتكونة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المحدودين بهذه الزاوية، والزاوية المقابلة لها بالرأس.



مثال $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ ، $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$

البرهان



المعطيات: $\overleftrightarrow{JL}$ ، $\overleftrightarrow{HK}$ يتقاطعان في M .

المطلوب: إثبات أن $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{JH} + m\widehat{LK})$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overleftrightarrow{JL}$ ، $\overleftrightarrow{HK}$ يتقاطعان في M	1) معطيات
2) $m\angle 1 = m\angle MJK + m\angle MKJ$	2) نظرية الزاوية الخارجة للمثلث
3) $m\angle MJK = \frac{1}{2} m\widehat{LK}$, $m\angle MKJ = \frac{1}{2} m\widehat{JH}$	3) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها
4) $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{LK} + \frac{1}{2} m\widehat{JH}$	4) بالتعويض
5) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{JH} + m\widehat{LK})$	5) خاصية التوزيع

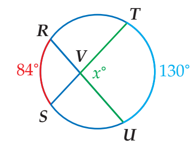
مصادر الدرس 2-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص(129, 130)	• تنويع التعليم، ص (129, 130, 136)	• تنويع التعليم، ص (129, 130, 136)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثال 1 استعمال القاطعين أو الوترين المتقاطعين

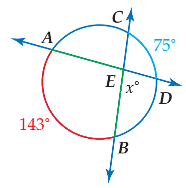
أوجد قيمة x في كل من الأشكال أدناه :

a)



النظرية 2.12	$m\angle TVU = \frac{1}{2}(m\widehat{RS} + m\widehat{TU})$
بالتعويض	$x = \frac{1}{2}(84° + 130°)$
بالتبسيط	$= \frac{1}{2}(214°) = 107°$

b)

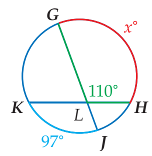


خطوة 1 أوجد $m\angle AEB$.

النظرية 2.12	$m\angle AEB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$
بالتعويض	$= \frac{1}{2}(143° + 75°)$
بالتبسيط	$= \frac{1}{2}(218°) = 109°$

خطوة 2 أوجد قيمة x، أي قياس $\angle DEB$.
$\angle AEB$ ، $\angle DEB$ زاويتان متكاملتان.
إذن ، $x = 180° - 109° = 71°$.

c)



النظرية 2.12	$m\angle GLH = \frac{1}{2}(m\widehat{GH} + m\widehat{KJ})$
بالتعويض	$110° = \frac{1}{2}(x + 97°)$
بضرب الطرفين في 2	$220° = (x + 97°)$
بطرح 97 من كلا الطرفين	$123° = x$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة
في مثال 1b، يمكن إيجاد $m\angle DEB$ ، بأن تجد أولاً مجموع قياسي $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$.

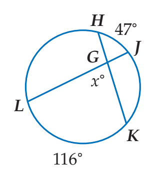
$m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$
$= 360° - (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$
$= 360° - (143° + 75°)$
$= 142°$

$m\angle DEB$
$= \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$
$= \frac{1}{2}(142°) = 71°$

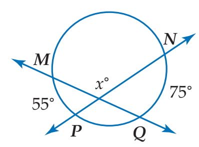
تأكد

أوجد قيمة x في كل من الأشكال أدناه :

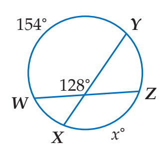
1A)



1B)



1C)



1A) 81.5
1B) 115
1C) 102

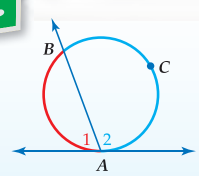
تذكر النظرية 2.6 ، والتي تنص على أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها. وتبقى هذه النظرية صحيحة إذا كان أحد أضلاع الزاوية مماسًا للدائرة.

نظرية 2.13

أضف إلى **مطويتك**

التعبير اللفظي إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكوّنة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المحدود بها.

مثال $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$ ، $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{ACB}$



سوف تبرهن نظرية 2.13 في التمرين 33

التقاطع على الدائرة أو في داخلها

المثالان 1, 2 يُبيّنان كيفية استعمال نظريات هذا الدرس؛ لإيجاد قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع قاطعين أو وترين داخل الدائرة أو عليها.

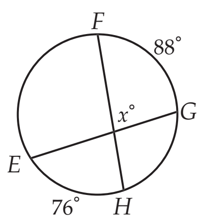
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

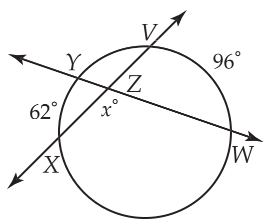
1 أوجد قيمة x في كل من الأشكال أدناه:

F)



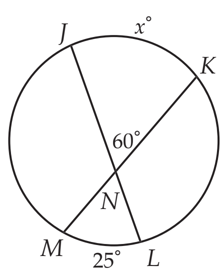
$x = 82$

b)



$x = 101$

c)



$x = 95$

تنويع التعليم

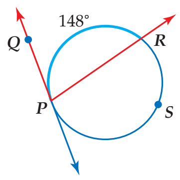
دون ضمن فوق

المتعلمون الطبيعيون وضّح للطلبة أن العلاقات التي ذُكرت وعُرِّفت في هذا الدرس هي علاقات تحدث في الطبيعة وفي حياتنا اليومية وقد تم تعريفها وشرحها رياضيًا. وأخبرهم أن العلماء على اختلاف مجالات تخصصاتهم يستعملون هذه العلاقات لفحص كل شيء من قطرة الماء وفقاعات الصابون إلى الخلايا والأحياء الدقيقة أيضًا.

مثال 2 استعمال القاطع والمماس المتقاطعين

أوجد كلًا مما يأتي:

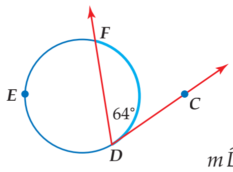
a) $m\angle QPR$



النظرية 2.13 $\quad m\angle QPR = \frac{1}{2}\, m\widehat{PR}$

بالتعويض $\quad = \frac{1}{2}(148)° = 74°$

b) $m\widehat{DEF}$



النظرية 2.13 $\quad m\angle CDF = \frac{1}{2}\, m\widehat{FD}$

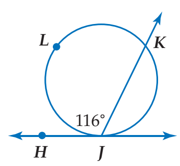
بالتعويض $\quad 64° = \frac{1}{2}\, m\widehat{FD}$

بضرب الطرفين في 2 $\quad 128° = m\widehat{FD}$

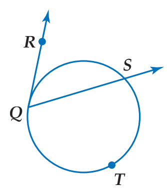
$$m\widehat{DEF} = 360° - m\widehat{FD} = 360° - 128° = 232°$$

تأكد

2A) أوجد $m\widehat{JLK}$ $\quad$ $232°$



2B) إذا كان $m\widehat{QTS} = 238°$، فأوجد $m\angle RQS$ $\quad$ $61°$



> **إرشادات للدراسة**
>
> **القيمة المطلقة**
>
> يمكن إيجاد قياس $\angle A$ في الحالات جميعها بأخذ نصف القيمة المطلقة للفرق بين قياسي القوسين، وفي هذه الحالة لا يؤثر ترتيب القوسين في نتيجة الحسابات.

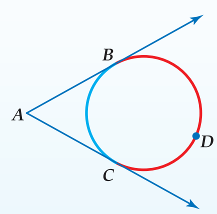
التقاطع خارج الدائرة يمكن أن يتقاطع المماسان والقاطعان خارج الدائرة أيضًا. وهنا يرتبط قياس الزوايا الناشئة بنصف قياس الأقواس المحدودة بها.

نظرية 2.14

أضف إلى **مطويتك**

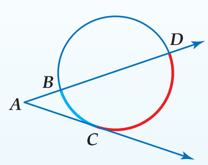
التعبير اللفظي إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المحدودين بهذه الزاوية.

أمثلة



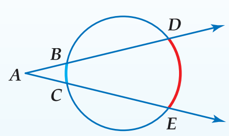
مماسان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$



قاطع ومماس

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$



قاطعان

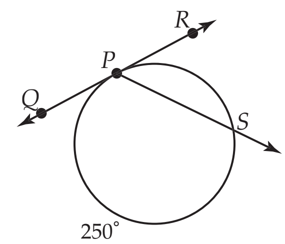
$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$

سوف تبرهن نظرية 2.14 في التمارين 32–30

مثال إضافي

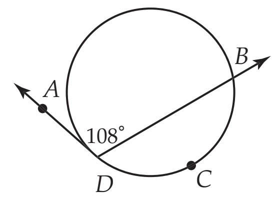
2 أوجد كلًّا مما يأتي:

a) $m\angle QPS$



$m\angle QPS = 125°$

b) $m\widehat{BCD}$



$m\widehat{BCD} = 144°$

التركيز في المحتوى الرياضي

الوتر مقابل القاطع قد يسألك بعض الطلبة عن الفرق بين الوتر والقاطع ولماذا يوجد تسميتان لشيء يقطع الدائرة في نقطتين. يتطلب هذا السؤال مراجعة أن القطعة المستقيمة هي جزء من مستقيم، وهكذا بالنسبة للوتر فهو قطعة من القاطع، فالقاطع هو مستقيم يقطع الدائرة. أخبر الطلبة أن كل وتر يقع على قاطع وأن كل قاطع يحوي وترًا.

تنويع التعليم

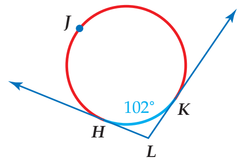
دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون امنح الطلبة الوقت الكافي؛ لتكوين أمثلة على النظريات مثل النظرية 2.14، فهناك صعوبة في تذكر هذه النظريات. فعندما يرسم الطلبة أمثلة نابعة منهم فقد يسهل عليهم تذكر هذه النظريات، ويمكن أن يكونوا قادرين على اشتقاق هذه العلاقات لاحقًا.

مثال 3 استعمال المماسات والقواطع التي تتقاطع خارج دائرة

أوجد كلًّا مما يأتي:

a) $m\angle L$

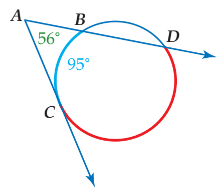


$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJK} - m\widehat{HK})$ نظرية 2.14

$= \frac{1}{2}[(360° - 102°) - 102°]$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(258° - 102°) = 78°$ بالتبسيط

b) $m\widehat{CD}$



$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - m\widehat{BC})$ نظرية 2.14

$56° = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - 95°)$ بالتعويض

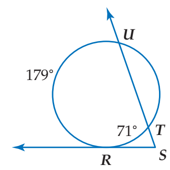
$112° = m\widehat{CD} - 95°$ بضرب الطرفين في 2

$207° = m\widehat{CD}$ بإضافة 95° لكلا الطرفين

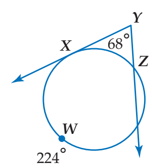
تأكد

أوجد كلًّا مما يأتي:

3A) $m\angle S$ 54°



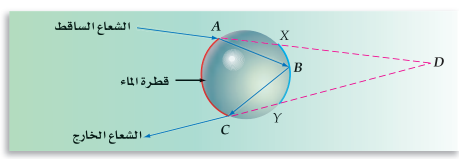
3B) $m\widehat{XZ}$ 88°



يمكنك تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة؛ لحَلّ مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة

علوم: يُبيّن الشكل أدناه مسار شعاع ضوء. عندما يسقط على قطرة ماء، وكما ترى ينكسر الشعاع أو ينحرف عن مساره عند النقاط A, B, C. إذا كان $m\widehat{AC} = 128°$ ، $m\widehat{XBY} = 84°$ ، فما قيمة $m\angle D$؟



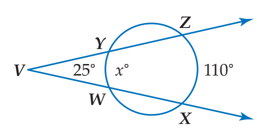
$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} - m\widehat{XBY})$ النظرية 2.14

$= \frac{1}{2}(128° - 84°)$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(44°) = 22°$ بالتبسيط

تأكد

4) أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور. 60



الربط مع واقع الحياة

يوجد اختلاف بين معامل الانكسار بين وسطين مثل الهواء والزجاج. يُعبر عن معامل الانكسار N بالمعادلة $N = \frac{C}{V}$ ، حيث C متوسط سرعة الضوء، و V سرعة الضوء في ذلك الوسط.

المصدر: Microscopy Resource Center

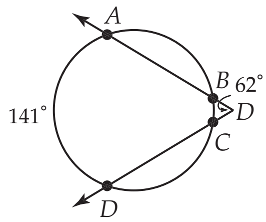
التقاطع خارج الدائرة

المثالان 3, 4 يُبيّنان كيفية استعمال النظريات المتعلقة بالقاطع والمماس؛ لإيجاد قياس الزاوية الناتجة من التقاطع خارج الدائرة.

مثالان إضافيان

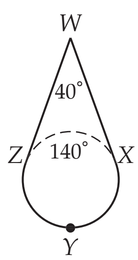
3 أوجد كلًّا مما يأتي:

a) $m\widehat{BC}$



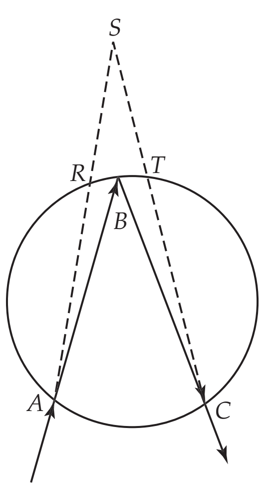
$m\widehat{BC} = 17°$

b) $m\widehat{XYZ}$



$m\widehat{XYZ} = 220°$

4 **فيزياء:** يُبيّن الشكل أدناه مسار شعاع ضوئي عندما يسقط على قطعة من الماس. يُغيِّر الشعاع مساره أو ينحرف عند النقاط A, B, C. إذا كان $m\widehat{AC} = 96°$, $m\angle S = 35°$ ، فأوجد $m\widehat{RBT}$؟



$m\widehat{RBT} = 26°$

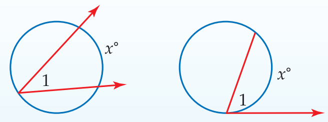
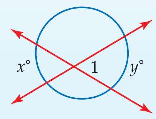
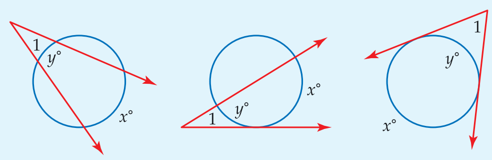
التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل فيديو اطلب إلى الطلبة العمل ضمن مجموعات لعمل مقطع فيديو لشرح النظريات الثلاثة لحالات تقاطع القواطع والمماسات خارج الدائرة. اطلب إليهم تحديد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين هذه النظريات.

ملخص نظريات الدرس

الدائرة وعلاقات الزوايا

أضف إلى مطويتك

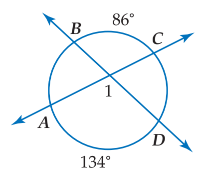
رأس الزاوية	نماذج	قياس الزاوية
على الدائرة		نصف قياس القوس المحدود بهذه الزاوية $m\angle 1 = \frac{1}{2}x$
داخل الدائرة		نصف مجموع قياسي القوسين المحدودين بالزاويتين المتقابلتين بالرأس $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x + y)$
خارج الدائرة		نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المحدودين بهذه الزاوية $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x - y)$

تأكد من فهمك

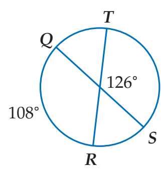
المثالان 1, 2 الصفحتان 131, 132

أوجد كلًّا مما يأتي مفترضًا أن القطعة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماس بالفعل.

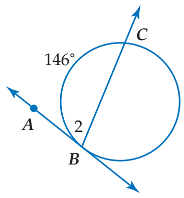
1) $m\angle 1$ 110°



2) $m\widehat{TS}$ 144°

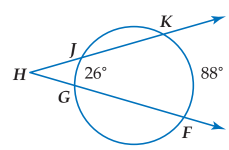


3) $m\angle 2$ 73°

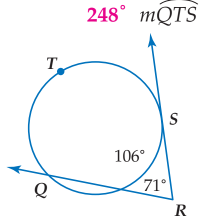


المثالان 3, 4 صفحة 133

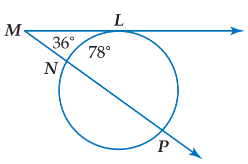
4) $m\angle H$ 31°



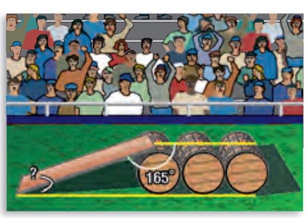
5) $m\widehat{QTS}$ 248°



6) $m\widehat{LP}$ 150°



7) **ألعاب بهلوانية:** ثُبِّت سطح منحدر على البرميل الأول من مجموعة براميل رُبطت مع بعضها؛ ليقدِّم لاعب في السيرك عروضه المثيرة على دراجة نارية.
ما قياس الزاوية الذي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض؟
انظر الهامش



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-7 للتأكد من فهم الطلبة.

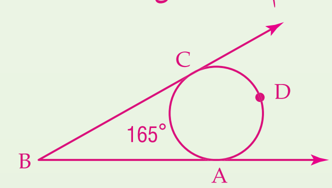
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم .

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	8-25، 36، 38، 40-57
ضمن ضمن المتوسط	9-29 فردي، 30-36، 38، 40-57
فوق فوق المتوسط	26-51، (اختياري: 52-57)

إجابة:

7) ارسم شكلًا يمثل المسألة وسَمه



النظرية 2.14 $m\angle B = \frac{1}{2}(m\widehat{CDA} - m\widehat{CA})$

بالتعويض $= \frac{1}{2}[(360 - 165) - 165]$

بالطرح $= \frac{1}{2}(195 - 165)$

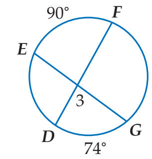
بالتبسيط $= \frac{1}{2}(30) = 15$

تدرب وحل المسائل

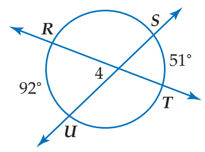
المثالان 1, 2
الصفحتان 131, 132

أوجد كل مما يأتي، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة، هي مماس بالفعل.

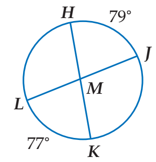
8) $m\angle 3$ 82°



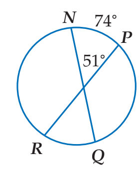
9) $m\angle 4$ 71.5°



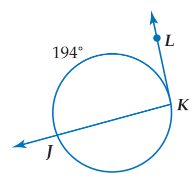
10) $m\angle JMK$ 102°



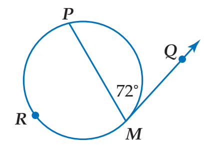
11) $m\widehat{RQ}$ انظر الهامش



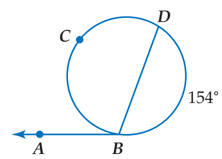
12) $m\angle K$ 97°



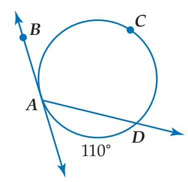
13) $m\widehat{PM}$ 144°



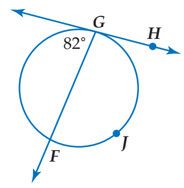
14) $m\angle ABD$ 103°



15) $m\angle DAB$ 125°



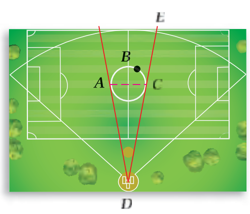
16) $m\widehat{GJF}$ 196°



17) **رياضة:** يمثّل الشكل المجاور ملعبًا رياضيًّا متعدد الأغراض، إذا كان $m\widehat{ABC} = 200^\circ$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $m\angle ACE$ 100°

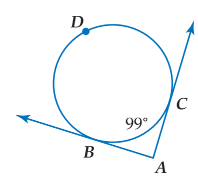
b) $m\angle ADC$ 20°



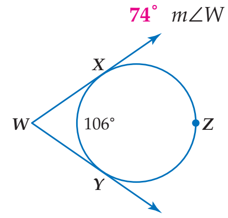
المثالان 3 ، 4
صفحة 133

أوجد كلًّا مما يأتي:

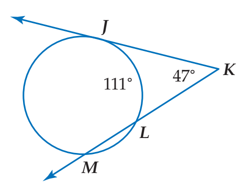
18) $m\angle A$ 81°



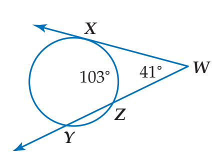
19) $m\angle W$ 74°



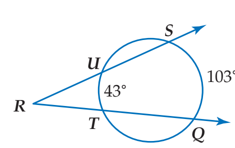
20) $m\widehat{JM}$ 205°



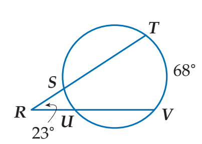
21) $m\widehat{XY}$ 185°



22) $m\angle R$ 30°



23) $m\widehat{SU}$ 22°

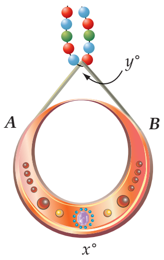


إجابة:

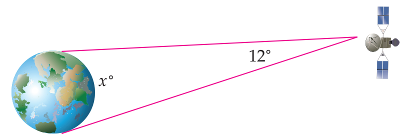
11

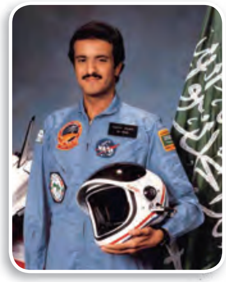
النظرية 2.12	$51 = \frac{1}{2}(m\ \widehat{RQ} + m\ \widehat{NP})$
بالتعويض	$51 = \frac{1}{2}(m\ \widehat{RQ} + 74)$
ضرب الطرفين في 2	$102 = m\ \widehat{RQ} + 74$
طرح 74 من الطرفين	$28 = m\ \widehat{RQ}$

24) **مجوهرات:** يظهر في الشكل المجاور جزء من قلادة. A و B نقطتا تماس. إذا كانت $x = 260$ ، فأوجد قيمة y؟ **80**



25) **فضاء:** يدور قمر صناعي في مدار فوق خط الاستواء. أوجد قيمة x، وهي قياس القوس المرئي من الأرض بالنسبة للقمر الصناعي. **168**



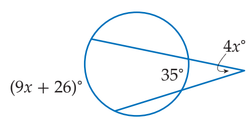


الربط مع واقع الحياة

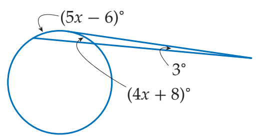
أول رائد فضاء سعودي
هو صاحب السمو الملكي الأمير سلطان بن سلمان بن عبدالعزيز على متن مكوك الفضاء (ديسكفري) رحلة رقم STS–51G في السابع عشر من حزيران عام 1985 م .

جبر: أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

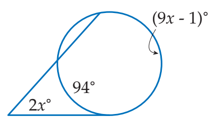
26) **9**



27) انظر الهامش



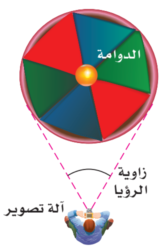
28) **19**



29) **تصوير:** استعمل مصور لالتقاط صورة بآلة التصوير للعبة الدوامة الدائرية، بحيث كان خطا النظر مماسين لها، كما في الشكل المجاور .

a) إذا كانت زاوية الرؤيا لآلة التصوير تساوي $35°$ ، فما قياس قوس الدوامة الذي سيظهر في الصورة؟ **$145°$**

b) إذا أردت التقاط صورة لقوس قياسه $150°$، فما قياس زاوية الرؤية التي يجب استعمالها؟ **$30°$**

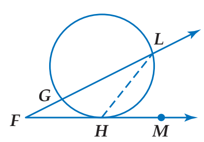


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل حالة من حالات النظرية 2.14 . للتمارين **32 - 30** انظر ملحق الإجابات

30) حالة 1

المعطيات: $\overleftrightarrow{AE}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ قاطعان

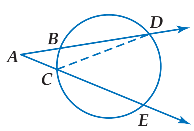
المطلوب: إثبات أن $m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



31) حالة 2

المعطيات: $\overrightarrow{FM}$ مماس، $\overrightarrow{FL}$ قاطع

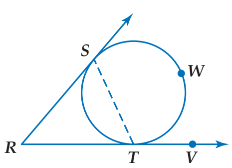
المطلوب: إثبات أن $m\angle F = \frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{GH})$



32) حالة 3

المعطيات: $\overrightarrow{RS}$ ، $\overrightarrow{RV}$ مماسان

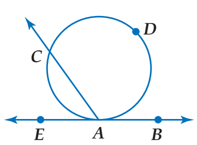
المطلوب: إثبات أن $m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\widehat{ST})$



33) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات النظرية 2.13 .

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}$ مماس، $\overrightarrow{AC}$ قاطع $\angle CAB$ منفرجة

المطلوب: إثبات أن $m\angle CAB = \frac{1}{2}m\widehat{CDA}$ انظر الهامش



إجابات:

27)

النظرية 2.14
$3 = \frac{1}{2}[(5x - 6) - (4x + 8)]$

ضرب الطرفين في 2
$6 = (5x - 6) - (4x + 8)$

بالتبسيط $6 = x - 14$

إضافة 14 للطرفين $20 = x$

33) **البرهان:**

$\angle CAB$ و $\angle CAE$ تكونان زوجًا خطيًّا ولذلك $m\angle CAB + m\angle CAE = 180$. وبما أن $\angle CAB$ منفرجة فإن $\angle CAE$ حادة. ولذلك تنطبق عليها الحالة 1 أي أن $m\angle CAE = \frac{1}{2}m\widehat{CA}$.

لكن $m\widehat{CA} + m\widehat{CDA} = 360$

إذن، $\frac{1}{2}m\widehat{CA} + \frac{1}{2}m\widehat{CDA} = 180$ (بحسب خاصية الضرب).

وهكذا، يكون $m\angle CAE + \frac{1}{2}m\widehat{CDA} = 180$ بالتعويض.

وبحسب خاصية التعدي ينتج أن

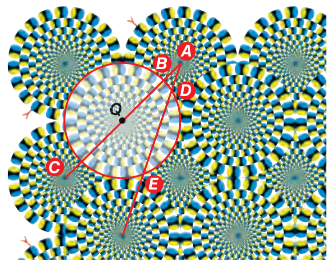
$m\angle CAE + \frac{1}{2}m\widehat{CDA}$
$m\angle CAB + m\angle CAE =$

وبحسب خاصية الطرح ينتج أن $m\angle CAB = \frac{1}{2}m\widehat{CDA}$.

الربط مع واقع الحياة

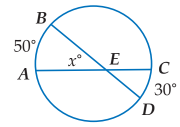
أول من استعمل الخداع البصري هم اليونانيون إذ بنوا معابدهم ، بحيث تكون أسطحها مائلة، وهذا الخداع البصري يُظهر البناء مستقيمًا. وقد بنوا الأعمدة ، بحيث تكون منتفخة لتظهر من بعيد على أنها متناسبة مع بعضها.

المصدر: Odyssey Adventures



34) **خداع بصري:** يُظهر التصميم في الشكل المجاور خداعًا بصريًا لدوائر متحركة، $\overline{BC}$ قطر في $\odot Q$. إذا كان $m\widehat{CE} = 67°$ ، $m\angle A = 26°$ ، فأوجد $m\widehat{DE}$ ؟ **98°**

35) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذا التمرين العلاقة بين النظريتين 2.12 ، 2.6 .



a) **هندسي:** انسخ الشكل المجاور في كراستك، ثم ارسم ثلاثة أشكال متتالية، بحيث يتحرك موقع D مقتربًا من C مع بقاء C, A, B ثابتة في مواقعها. **انظر الهامش**

b) **جدولة:** قدِّر قياس $\widehat{CD}$ لكلٍّ من الدوائر المتتالية، سجِّل قياسات $\widehat{CD}$ ، $\widehat{AB}$ في جدول، ثم أوجد قيمة X لكل دائرة من هذه الدوائر. **انظر الهامش**

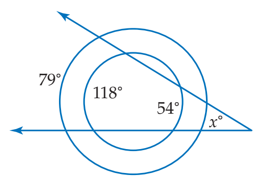
c) **تعبير لفظي:** أوجد العلاقة بين $m\widehat{AB}$ ، وقيمة x عندما يقترب $m\widehat{CD}$ من الصفر. ما نوع $\angle AEB$ عندما يكون $m\widehat{CD} = 0°$؟

d) **تحليل:** اكتب برهانًا جبريًّا ؛ لإثبات العلاقة بين النظريتين 2.11 ، 2.5 المذكور في الجزء c. **انظر الهامش**

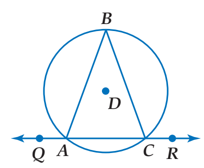
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتب:** اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية المكوَّنة من تقاطع القاطع والمماس خارج الدائرة.

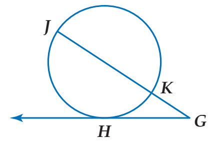
37) **تحدٍّ:** إذا كانت الدائرتان أدناه متحدتان في المركز، فما قيمة x؟ **15**



38) **تبرير:** $\triangle ABC$ متطابق الضلعين مرسوم داخل $\odot D$. ماذا تستنتج عن $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{BC}$؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**



39) **تحدٍّ:** $\overline{JK}$ قطر، و $\overleftrightarrow{GH}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور.



a) ما مدى القيم الممكنة لقياس $\angle G$. برِّر إجابتك.

b) إذا كان $m\angle G = 34°$ ، فأوجد قياسي القوسين الأصغرين HJ ، KH. برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

40) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة ومماسين يتقاطعان خارجها. واستعمل المنقلة لقياس الزاوية المتكوِّنة، ثم أوجد قياس كل من القوسين الأكبر والأصغر المتكوِّنين. برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

41) **اكتب:** رسمت دائرة محاطة بالمثلث PQR. إذا كان $m\angle P = 50°$ ، $m\angle Q = 60°$ ، فصف طريقة إيجاد قياس الأقواس الثلاثة الصغرى المتكوِّنة من نقاط التماس.

35c) تقترب قيمة x من نصف $m\widehat{AB}$ مع اقتراب قياس $\widehat{CD}$ من الصفر وتصبح $\angle AEB$ محيطية.

36) أجد الفرق بين القوسين المحدودين وأقسمه على 2.

39a) $m\angle G \leq 90$، $m\angle G < 90$ لجميع القيم إلا عندما يكون $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{JG}$ حيث يكون $m\angle G = 90°$.

41) إجابة ممكنة: باستعمال النظرية 2.14 نجد أن
$60° = \frac{1}{2}((360° - x) - x)$
وبحل المعادلة نجد أن قياس القوس الأول °120، وبتكرار هذه العملية بالنسبة للزاوية °50 نجد أن قياس القوس الثاني °130. ويمكن إيجاد قياس القوس الثالث بجمع $120° + 130°$ وطرح الناتج من °360 فيكون القوس الثالث °110

تنبيه لتمرين

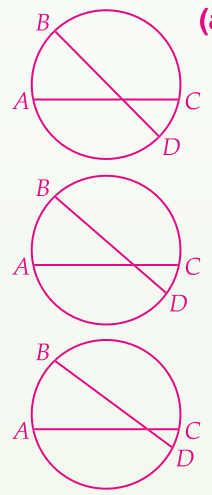
فرجار ومسطرة غير مدرجة

يتطلب التمرينان 40 ,35 استعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة.

تمثيلات متعددة في التمرين 35 يستعمل الطلبة الأشكال الهندسية، والجدول، والوصف اللفظي لاستقصاء العلاقة بين النظريتين 2.5 ، 2.11 .

إجابات:

35 (a



(b

قوس	دائرة 1	دائرة 2	دائرة 3
$\widehat{CD}$	25	15	5
$\widehat{AB}$	50	50	50
x	37.5	32.5	27.5

c) تنص النظرية 2.12 على أنه إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية التي تتشكل تساوي نصف مجموع قياس القوسين.

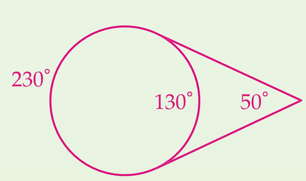
استعمل هذه النظرية بكتابة معادلة تربط بين $x, m\widehat{AB}, m\widehat{CD}$

ثم إجعل $m\widehat{CD} = 0$ وبسطها لتحصل على النظرية 2.16

$$x = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + (m\widehat{CD})$$
$$= \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + 0)$$
$$= \frac{1}{2}m\widehat{AB}$$

38) إجابة ممكنة: $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$، $m\angle BAC = m\angle BCA$ ؛ لأن المثلث متطابق الضلعين. إذن، $m\angle QAB = m\angle RCB$ ؛ لأن الزوايا المكملة لزوايا متطابقة تكون متطابقة. وبما أن $m\angle QAB = m\angle RCB$ ، فإن $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$

40) إجابة ممكنة:

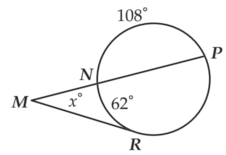


بتطبيق النظرية 2.13 يكون $m\angle 1 = \frac{1}{2}(u - t)$.
$50° = \frac{1}{2}[(360° - x) - x]$، إذن، $x = 130°$
إذن، قياس القوس الأصغر °130 .
$u = 360° - 130° = 230°$
إذن، قياس القوس الأكبر °230 .

39b) $m\widehat{KH} = 56°, m\widehat{HJ} = 124°$ ، بما أن القطر جزء من القاطع، فإن قياسي القوسين المحدودين هما $(180° - x)$ و x درجة. إذن بحل المعادلة $\frac{180° - x - x}{2} = 34°$ تحصل على $x = 56°$.

تدريب على اختيار معياري

42) إذا كان $m\widehat{NR} = 62°$ ، $m\widehat{NP} = 108°$ ، فما قيمة x؟ **C**



A $23°$ C $64°$

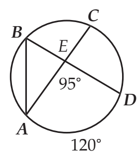
B $31°$ D $128°$

43) **جبر:** تقع النقطتان $A(-4, 8)$ و $B(6, 2)$ على الدائرة C ، $\overline{AB}$ قطر فيها، ما إحداثيا النقطة C ؟ **J**

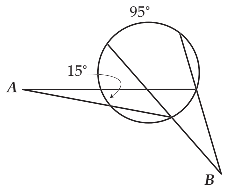
F $(2, 10)$ H $(5, -3)$

G $(10, -6)$ J $(1, 5)$

44) إذا كان $m\angle AED = 95°$ ، $m\widehat{AD} = 120°$ ، فأوجد $m\angle BAC$؟ **35°**



45) ماقياس $\angle B$ ، إذا كان $m\angle A = 10°$ ؟ **B**



A $30°$

B $35°$

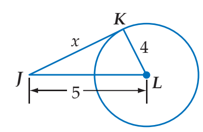
C $47.5°$

D $90°$

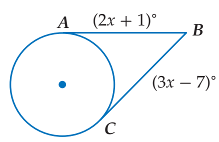
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا للدائرة هي مماس بالفعل. (الدرس 5-2)

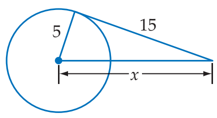
46) **3**



47) **8**



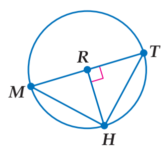
48) **$5\sqrt{10}$**



49) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 4-2)

المعطيات: $\widehat{MHT}$ نصف دائرة، $\overline{RH} \perp \overline{TM}$

المطلوب: إثبات أن $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$ **انظر الهامش**



هندسة إحداثية: أوجد قياس الزاوية في كل مما يلي باستعمال قانون المسافة بين النقطتين، ومعكوس النسب المثلثية مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر: (الدرس 4-1)

50) $\angle C$ في BCD الذي رؤوسه $B(-1, -5), C(-6, -5), D(-1, 2)$ **54.5**

51) $\angle X$ في المثلث القائم الزاوية XYZ الذي رؤوسه $X(2, 2), Y(2, -2), Z(7, -2)$ **51.3**

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ المعادلات الآتية:

52) $x^2 + 13x = -36$ **$-4, -9$**

53) $x^2 - 6x = -9$ **3**

54) $3x^2 + 15x = 0$ **$0, -5$**

55) $28 = x^2 + 3x$ **$-7, 4$**

56) $x^2 + 12x + 36 = 0$ **-6**

57) $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$ **$-\frac{5}{2}$**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع إذا حصر وتران في الدائرة نفسها قوسين قياسهما $75°$، فماذا يمكنك القول عن هذين الوترين؟

إذا وقع طرفا كل قوس على الوترين فإن الوترين، متوازيان، وأما إذا وقع طرفا كل قوس على أحد الوترين فقط، فإن الوترين متطابقان.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اختر أمثلة، وأسأل الطلبة أن يذكروا أسماء القطع المستقيمة المرسومة في الشكل قبل مغادرتك غرفة الصف.

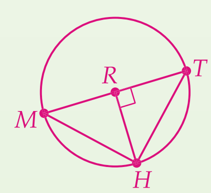
التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 5-2, 6-2 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 2.

إجابات:

49) المعطيات: $\widehat{MHT}$ نصف دائرة. $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) معطيات	$\widehat{MHT}$ نصف دائرة؛ $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.
2) الزاوية المحيطية التي تقابل نصف دائرة تكون قائمة	$\angle THM$ زاوية قائمة .
3) تعريف تعامد مستقيمين	$\angle TRH$ زاوية قائمة
4) جميع الزوايا القائمة متطابقة	$\angle THM \cong \angle TRH$
5) زاوية مشتركة	$\angle T$
6) تشابه مثلثات	$\triangle TRH \sim \triangle THM$
7) تعريف تشابه المثلثات	$\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$

2-7 قطع مستقيمة خاصّة في الدائرة
Special Segments in a Circle

فيما سبق
درستُ إيجاد قياس الأقطار التي تتقاطع داخل متوازي الأضلاع.

والآن
الأفكار الرئيسة

- أجد قياسات الأوتار التي تتقاطع داخل الدائرة.
- أجد قياسات القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج الدائرة.

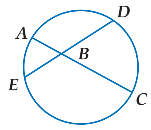
المفردات الأساسية
قطعة القاطع الخارجية
external secant segment

www.obeikaneducation.com

لمـاذا؟


قُطِّعت كعكة دائرية كبيرة طوليًّا لتكفي أكبر عدد ممكن من المدعوين إلى حفلة. ولم يبقَ منها إلا قطعة صغيرة. يمكنك من خلال الجزء المتبقي إيجاد قطر الكعكة الأصلية باستعمال الخصائص الهندسية للدائرة.

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة عندما يتقاطع وتران داخل دائرة، ينقسم كل منهما إلى جزأين. ففي الشكل المجاور انقسم الوتر $\overline{AC}$ إلى $\overline{AB}$، و $\overline{BC}$. وكذلك انقسم الوتر $\overline{ED}$ إلى $\overline{EB}$، و $\overline{BD}$.



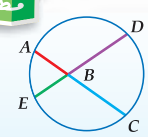
تصف النظرية الآتية العلاقة بين القطع الأربع التي تكوَّنت من تقاطع وترين داخل دائرة.

نظرية 2.15 نظرية قِطَع الوتر

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الثاني.

مثال $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

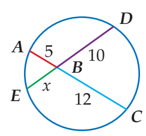


سوف تبرهن نظرية 2.15 في التمرين 22

مثال 1 استعمال تقاطع الوترين

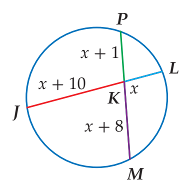
أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه.

a)



$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	نظرية 2.15
$5 \cdot 12 = x \cdot 10$	بالتعويض
$60 = 10x$	بالضرب
$6 = x$	بقسمة كل من الطرفين على 10

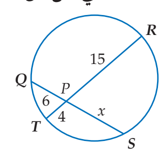
b)



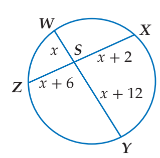
$JK \cdot KL = PK \cdot KM$	نظرية 2.15
$(x + 10) \cdot x = (x + 1)(x + 8)$	بالتعويض
$x^2 + 10x = x^2 + 9x + 8$	بالضرب
$10x = 9x + 8$	بطرح x^2 من كلا الطرفين
$x = 8$	بطرح $9x$ من كل طرف

تأكد
أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه.

(1A 10



(1B 3



2-7 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

إيجاد قياس الأقطار التي تتقاطع داخل متوازي الأضلاع.

الدرس 7-2

إيجاد قياسات القطع المستقيمة التي تتقاطع داخل الدائرة.

إيجاد قياسات القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج الدائرة.

ما بعد الدرس 7-2

كتابة معادلة الدائرة.

تمثيل الدائرة على المستوى الإحداثي بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما عناصر الدائرة التي تمثلها الحافتان المستقيمة والمنحنية لقطعة الكعك؟ وتر وقوس على الترتيب.
- ما القياسات التي عليك أن تعرفها لإيجاد قياس القوس لقطعة الكعك المتبقية؟ طول الوتر (الحافة المستقيمة لقطعة الكعك) ونصف قطر الكعكة.

مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (138, 139)	• تنويع التعليم، ص (138, 139)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

القطع المستقيمة المتقاطعة داخل الدائرة

المثالان 1,2 يُبيِّنان كيفية استعمال نظرية "قِطَع الوَتر"؛ لإيجاد أطوال القطع المستقيمة المتقاطعة داخل الدائرة.

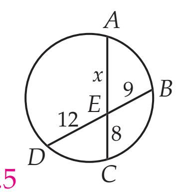
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

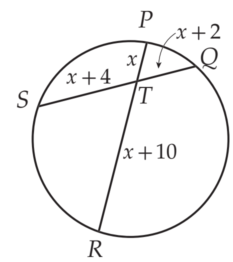
1 أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه.

a)



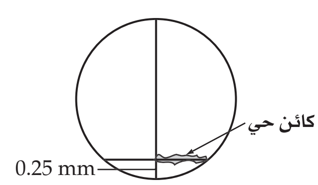
$x = 13.5$

b)



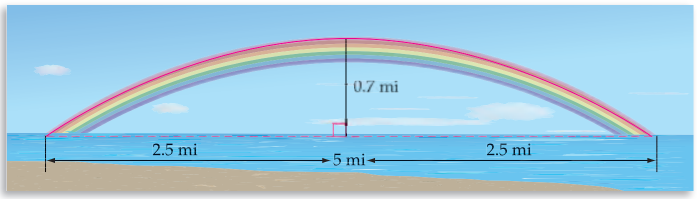
$x = 2$

2 **علم الأحياء:** يفحص البيولوجيّ الأحياء الدقيقة عادة باستعمال الميكروسكوب. تمثل الدائرة مجال الرؤيا في الميكروسكوب وقطرها يساوي 2 mm. أوجد طول الكائن الحي الدقيق إذا وضع على بُعد 0.25 mm من أسفل مجال الرؤيا. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة . 0.66 mm



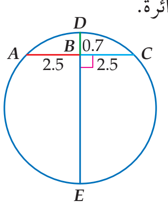
مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قياس قطع مستقيمة في الدائرة

علوم: شكل قوس المطر الحقيقي عبارة عن دائرة كاملة، ولكننا نرى الجزء الذي يظهر فوق أفق الكرة الأرضية. ما نصف قطر الدائرة التي تحوي القوس الظاهر في الشكل أدناه من قوس المطر؟



اِفهم تعلم أن قوس المطر هو جزء من قوس دائرة. $\overline{AC}$ وتر في هذه الدائرة، $\overline{DB}$ العمود المنصف للقطعة المستقيمة AC .

خطط ارسم نموذجًا للمسألة، بما أن $\overline{DE}$ تنصِّف الوتر $\overline{AC}$، فإن $\overline{DE}$ قطر في الدائرة. استعمل ناتج ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة؛ لإيجاد طول قطر الدائرة.

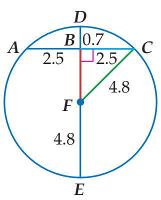


حل

نظرية 2.15	$AB \cdot BC = DB \cdot BE$
بالتعويض	$2.5 \cdot 2.5 = 0.7 \cdot BE$
بالضرب	$6.25 = 0.7\, BE$
بقسمة الطرفين على 0.7	$8.9 \approx BE$
مسلّمة جمع القطع المستقيمة	$DE = DB + BE$
بالتعويض	$= 0.7 + 8.9$
بالجمع	$= 9.6$

بما أن قطر الدائرة يساوي 9.6 mi تقريبًا، فإن نصف قطرها يساوي $4.8\,\text{mi} \approx 9.6 \div 2$.

تحقق استعمل عكس نظرية فيثاغورس؛ للتحقق من أن المثلث المتكوّن من نصف القطر ونصف الوتر وجزء من القطر في الدائرة قائم الزاوية.



مسلّمة جمع القطع المستقيمة	$DB + BF = DF$
بالتعويض	$0.7 + BF = 4.8$
بطرح 0.7 من الطرفين	$BF = 4.1$
نظرية فيثاغورس	$BF^2 + BC^2 = CF^2$
بالتعويض	$4.1^2 + 2.5^2 \stackrel{?}{=} 4.8^2$
بالتبسيط	$23.06 \approx 23.04$ ✓

الربط مع واقع الحياة

كلما كانت الشمس قريبة من الأفق، كلما زاد الجزء الذي تراه من قوس المطر. فعند غروب الشمس يمكنك رؤية نصف دائرة كاملة لقوس المطر، بحيث تصنع أعلى نقطة في هذا القوس زاوية قياسها 42° فوق الأفق .

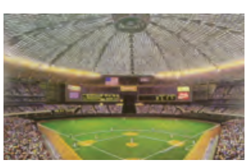
المصدر:
The National Center for Atmospheric Research

إرشادات لحل المسألة

ارسم شكلًا عندما تحُلّ المسائل اللفظية المتعلقة بالدوائر، ارسم شكلاً، وضع عليه قياسات كل عناصر الدائرة المعطاة. استعمل رموز المتغيرات؛ لتسمية القياسات المجهولة.

تأكد

2) **الأسترودوم:** هو أول ملعب بُني مسقوفًا بقبة كروية، إذا كان ارتفاع أعلى نقطة في هذه القبة يساوي 208 ft. وقطر الدائرة التي تحتوي القوس يُساوي 710 ft. فما المسافة بين طرفي القوس؟



646 ft تقريبًا

تنويع التعليم

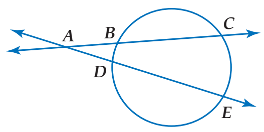
ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون وجه الطلبة بالرجوع إلى مثال 1 صفحة 137. واطلب إليهم رسم أوتار تربط بين النقاط المتقابلة التي تمثل نهايات القطع المستقيمة المتقاطعة. واطلب إليهم كتابة تخمينات حول علاقة التناسب بين المثلثات الناتجة.

إرشادات للدراسة

تبسيط نص النظرية كل طرف من طرفي المعادلة في النظرية 2.16 هو حاصل ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه.

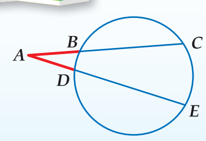
قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة القاطع هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها فقط على الدائرة. ففي الشكل المجاور $\overline{AC}$، و $\overline{AE}$ قاطعان. وتسمى قطعة القاطع التي تقع خارج الدائرة **قطعة القاطع الخارجية**. فالقطعة المستقيمة AB قطعة خارجية للقاطع $\overline{AC}$، وكذلك $\overline{AD}$ قطعة خارجية للقاطع $\overline{AE}$ كما في الشكل المجاور. تصف النظرية الآتية العلاقة بين القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.



نظرية 2.16 نظرية القاطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة، فإن حاصل ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية من هذا القاطع تساوي حاصل ضرب طول القاطع الآخر في طول القطعة الخارجية منه.



مثال $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

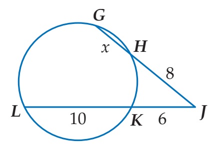
سوف تبرهن نظرية 2.16 في التمرين 23

تنبيه!

استعمال المعادلة الصحيحة تأكد من أنك تجد حاصل ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه، وليس في القطعة الداخلية منه.

مثال 3 استعمال تقاطع القاطعين

أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.

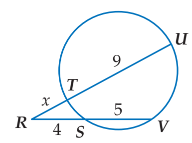


نظرية 2.16	$JG \cdot JH = JL \cdot JK$
بالتعويض	$(x + 8)8 = (10 + 6)6$
بالضرب	$8x + 64 = 96$
بطرح 64 من كلا الطرفين	$8x = 32$
بقسمة الطرفين على 8	$x = 4$

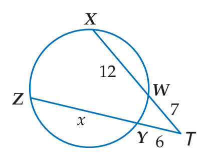
تأكد

أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه:

3A) 3



3B) $16\frac{1}{6}$

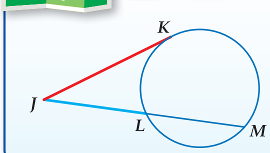


يمكن استعمال معادلة مشابهة للمعادلة الظاهرة في النظرية 2.16 عندما يتقاطع مماس وقاطع خارج الدائرة. وفي هذه الحالة يكون المماس، أو قطعة المماس التي يقع أحد طرفيها على الدائرة تمثّل قطعة المماس الخارجية، وقطعة المماس الكلية في آن معًا.

نظرية 2.17

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا تقاطع مماس وقاطع في نقطة خارج دائرة، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه.



مثال $JK^2 = JL \cdot JM$

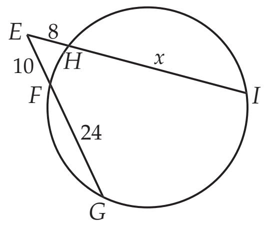
سوف تبرهن النظرية 2.17 في التمرين 24

القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة

المثالان 4 ,3 يُبيّنان كيفية استعمال الطلبة الخصائص والنظريات؛ لإيجاد أطوال قطع القاطع الخارجية.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x مستعملًا الشكل أدناه. 34.5



التركيز في المحتوى الرياضي

منصف الوتر ذكّر الطلبة أنه يمكن رسم قطر الدائرة لتنصيف أي وتر في الدائرة.

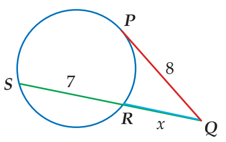
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى كل طالب أن يجد أمثلة أخرى من الحياة العملية على قطع الدائرة في الطبيعة أو الإنشاءات وأي مجال آخر. اطلب إليهم أيضًا كتابة شرح عن هذه الأمثلة التي وجدوها، مع إنشاء رسم لكل مثال ووضع القياسات الفعلية عليه إن أمكن، ثم كتابة المعادلة المناسبة لهذه القياسات.

مثال 4 استعمال المماس والقاطع

إذا كانت $\overline{PQ}$ مماسًا للدائرة، كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x، مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر .



نظرية 2.17	$PQ^2 = QR \cdot QS$
بالتعويض	$8^2 = x(x+7)$
بالضرب	$64 = x^2 + 7x$
بطرح 64 من كلا الطرفين	$0 = x^2 + 7x - 64$

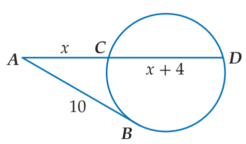
استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية؛ لأن المقدار غير قابل للتحليل.

قانون حل المعادلة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$a = 1, b = 7, c = -64$	$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-64)}}{2(1)}$
بالتبسيط	$= \frac{-7 \pm \sqrt{305}}{2}$
باستعمال الآلة الحاسبة	≈ -12.2 أو 5.2

وبما أنه لا يمكن أن تكون الأطوال سالبة، فإن قيمة x تساوي 5.2 تقريبًا.

تأكد

4) $\overline{AB}$ مماس للدائرة، كما في الشكل المجاور، أوجد قيمة x مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. **6.1**

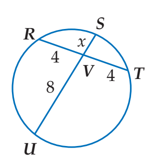


تأكد من فهمك

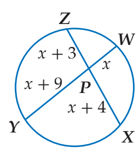
الأمثلة 1، 3، 4 الصفحات 139، 141، 142

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مفترضًا أن القطعة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماس بالفعل.

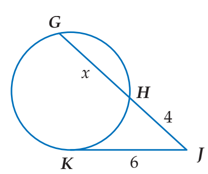
1) **2**



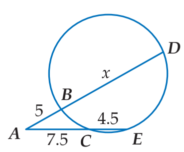
2) **6**



3) **5**

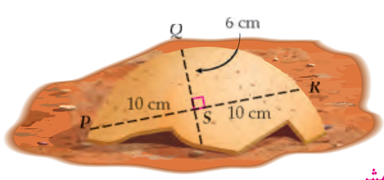


4) **13**



مثال 2 صفحة 140

5) **علم الآثار:** وُجِد جزء مكسور من إناء فخاري دائري الشكل في موقع أثري، ويظهر هذا الجزء في الشكل المجاور.

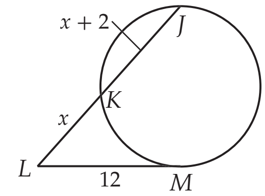


a) إذا كانت $\overline{QS}$ تقع على قطر الدائرة، فما محيط الإناء الفخاري الأصلي؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

b) اشرح طريقة تبيِّن فيها كيفية تحديد مركز الدائرة. انظر الهامش

مثال إضافي

4 إذا كان $\overline{LM}$ مماسًا للدائرة كما في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x، مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر.



8

التعليم باستعمال التقنيات

الموقع الإلكتروني انشر الملاحظات الخاصة بهذا الدرس على الموقع الإلكتروني الخاص بالصف. اعمل على أن تشمل الملاحظات النظريات المختلفة الخاصة بالمماس والقاطع والوتر في الدائرة. أضف روابط لأفضل المدخلات التي كتبها الطلبة في المدونة ولأفضل مقاطع فيديو أعدها طلبة الصف.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–5 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

5) اجعل T نهاية القطر QT المار بالنقطة S.

النظرية 2.15	$RS.SR = QS.ST$
بالتعويض	$10.10 = 6.ST$
بالتبسيط	$100 = 6.ST$
بالقسمة على 6	$\frac{100}{6} = T$
بالقسمة على 2	$\frac{30}{3} = T$
إذن، القطر في الدائرة =	$6 + \frac{50}{3}$ أو $\frac{68}{3}$ cm
قانون المحيط	$C = \pi d$
بالتعويض	$= \pi(\frac{68}{3})$
استعمال الآلة الحاسبة	≈ 71.21 cm

تنويع الواجبات المنزلية

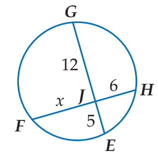
المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	6-20، 24، 25، 27-45
ضمن المتوسط	7-19 فردي، 20-25، 27-45
فوق المتوسط	20-41، (اختياري: 42-45)

تدرب وحل المسائل

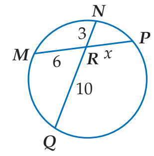
الأمثلة 4 ,3 ,1
الصفحات 139، 141، 142

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي إلى أقرب عُشر مفترضًا أن القطعة التي تبدو مماسًا للدائرة هي مماس بالفعل.

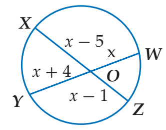
6) 10



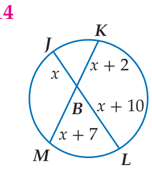
7) 5



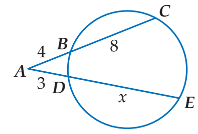
8) 0.5



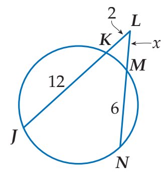
9) 14



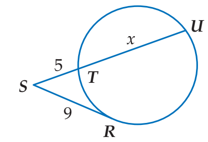
10) 13



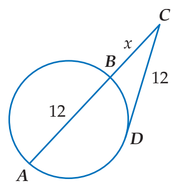
11) 3.1



12) 11.2

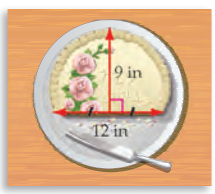


13) انظر الهامش



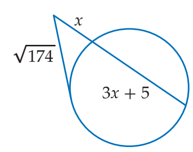
مثال 2
صفحة 140

14) **كعك:** توزّع سلمى الكعك في حفل. إذا كانت أبعاد القطعة المتبقية من الكعكة كما في الشكل المجاور ، فما قطر الكعكة الأصلية؟ **13 in**

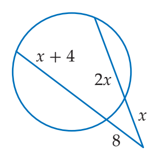


أوجد قيمة كلّ متغيّر في كل مما يأتي إلى أقرب عُشر، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا للدائرة هي مماس بالفعل.

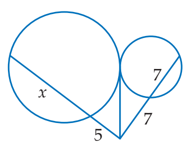
15) 6



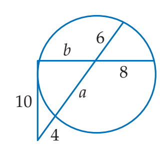
16) 7.1



17) 14.6

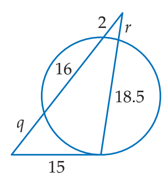


18)



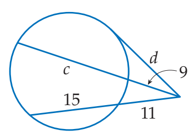
$a \approx 15, b \approx 11.3$

19)



$q \approx 9.0, r \approx 1.8$

20)



$c \approx 22.8, d \approx 16.9$

إجابة:

13) النظرية 2.17 $CD^2 = CB.CA$

بالتعويض $12^2 = x.(x + 12)$

بالتبسيط $144 = x^2 + 12x$

بطرح 144 من الطرفين $0 = x^2 + 12x - 144$

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1, b = 12, c = -144$ $= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(-144)}}{2}$

بالتبسيط $= \frac{-12 \pm \sqrt{720}}{2}$

استعمال الآلة الحاسبة ≈ 7.4

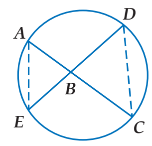
143 الدرس 7-2 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

برهان: أثبت النظريات الآتية:

21) برهان ذو عمودين للنظرية 2.15 انظر ملحق الإجابات

المعطيات: $\overline{AC}$، $\overline{DE}$ وتران متقاطعان في $\odot B$.

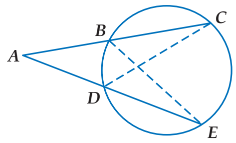
المطلوب: إثبات أن $AB \cdot BC = EB \cdot BD$



22) برهان حر للنظرية 2.16 انظر الهامش

المعطيات: $\overline{AC}$، $\overline{AE}$ قاطعان لدائرة.

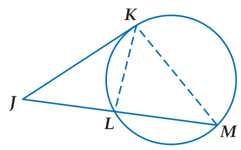
المطلوب: إثبات أن $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



23) برهان ذو عمودين للنظرية 2.17 انظر الهامش

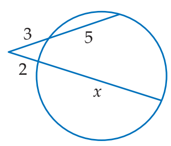
المعطيات: $\overline{JK}$ مماس، $\overline{JK}$ قاطع

المطلوب: إثبات أن $JK^2 = JL \cdot JM$



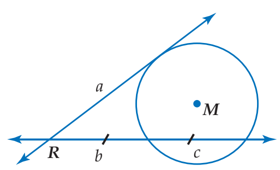
مسائل مهارات التفكير العليا

24) **اكتشف الخطأ:** يحسب خالد وعبدالعزيز قيمة x في الشكل أدناه . كتب خالد $3(5) = 2x$، بينما كتب عبدالعزيز $3(8) = 2(2 + x)$. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



25) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الطرق المستعملة؛ لإيجاد قياسات القطع في حالة تقاطع قاطعين خارج دائرة، وتلك المستعملة في حالة تقاطع قاطع ومماس خارج دائرة. انظر ملحق الإجابات

26) **تحدٍّ:** يتقاطع قاطع للدائرة M مع مماس لها عند النقطة R. أوجد قيمة a. موضحًا خطوات الحل. انظر ملحق الإجابات



27) **تبرير:** عندما يتقاطع وتران في مركز دائرة. هل يكون قياسا القوسين المحدودين متساويين أحيانًا، أو دائمًا، أو غير متساويين أبدًا؟

28) **مسألة مفتوحة:** استقصِ النظرية 2.17 ، وذلك برسم دائرة فيها قاطع، ومماس يتقاطعان خارج الدائرة. قم بقياس جزأي القاطع إلى أقرب عُشر سنتمتر، واستعمل المعادلة؛ لإيجاد طول المماس. أثبت صحة إجابتك بالقياس. انظر ملحق الإجابات

29) **اكتب:** إذا تقاطع قاطعان داخل الدائرة، فصف العلاقة بين جزأي الأول منهما والثاني. انظر ملحق الإجابات

تنبيه !

اكتشف الخطأ في التمرين 24 ، يجب أن يلاحظ الطلبة أن خالد استعمل المعادلة الخاصة بإيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة. وأن معادلة عبدالعزيز هي الصحيحة لأن القاطعان تقاطعا خارج الدائرة.

تنبيه لتمرين

الفرجار والمسطرة يتطلب التمرين 28 استعمال الفرجار والمسطرة.

إجابات:

22) البرهان:

$\overline{AC}$, $\overline{AE}$ قاطعان للدائرة.
بتطبيق خاصية الأنعكاس،
$\angle BAD \cong \angle DAB$. وبما أن
الزوايا المحيطية التي تحد القوس
نفسه من الدائرة تكون متطابقة،
فإن $\angle ACD \cong \angle AEB$. من تشابه
مثلثات فإن $\triangle AEB \sim \triangle ACD$.
ومن تعريف تشابه المثلثات ينتج أن
$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$. وبما أن
نواتج الضرب التبادلي في
التناسب تكون متساوية فإن
$AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

24) إجابة عبد العزيز صحيحة. يتقاطع قاطعان خارج الدائرة، ولذا، فإن المعادلة الصحيحة تتضمّن ناتج ضرب طول القاطع كاملاً في طول القطعة الخارجية منه.

27) يكونان متساويين أحيانًا؛ يتساوى قياسا القوسين عندما يكون الوتران متعامدين.

23) البرهان:

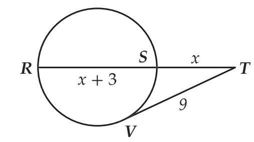
العبارات	المبررات
$\overline{JK}$ مماس و $\overline{JM}$ قاطع	1) معطيات
$m\angle KML = \frac{1}{2} m\widehat{KL}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود
$m\angle JKL = \frac{1}{2} m\widehat{KL}$	3) قياس الزاوية المتكونة من القاطع والمماس يساوي نصف قياس القوس المحدود
$m\angle KML = m\angle JKL$	4) بالتعويض
$\angle KML \cong \angle JKL$	5) تعريف الزوايا المتطابقة
$\angle J$	6) زاوية مشتركة
$\triangle JMK \sim \triangle JKL$	7) تشابه AA
$\frac{JK}{JL} = \frac{JM}{JK}$	8) تعريف تشابه المثلثات
$JK^2 = JL \cdot JM$	9) بالضرب التبادلي

تدريب على اختبار معياري

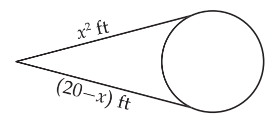
30) $\overline{TV}$ مماس للدائرة، و R، S نقطتان عليها كما في الشكل أدناه، ما قيمة x إلى أقرب عُشر؟ C

A 7.6　　C 5.7

B 6.4　　D 4.8



31) أي القيمتين محتملتان للمجهول x، بناءً على المعلومات المعطاة في الشكل أدناه: D



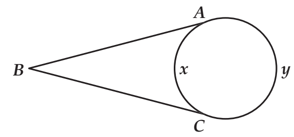
A $-5, -4$　　B $5, -4$

C $5, 4$　　D $-5, 4$

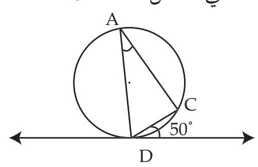
32) **سؤال ذو إجابة مطوّلة:** $\overline{BA}$، $\overline{BC}$ مماسان للدائرة، كما في الشكل أدناه. قياس القوس الأصغر $\widehat{AC}$ والقوس الأكبر $\widehat{AC}$ بالدرجات يساوي x، y على الترتيب. انظر الهامش

a) إذا كان $m\angle ABC = 70°$، فاكتب معادلتين تربطان بين x، y.

b) أوجد قيمة كلّ من x، y.



33) ما قياس $\angle A$، في الشكل أدناه؟ J

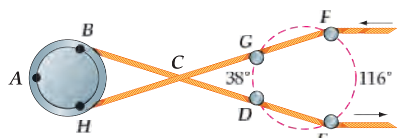


F $25°$　　G $35°$

H $40°$　　J $50°$

مراجعة تراكمية

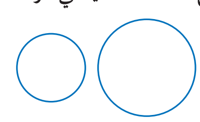
34) **نسيج:** بعد أن تتم عملية غزل الخيوط الصوفية، يتم صبغها، ثم تُمرَّر على عدة بكرات لكي تجف. ويُظهر الشكل المجاور إحدى مجموعات البكرات. لاحظ أن الغزل يبدو كأنه يتقاطع بعضه مع بعض عند النقطة C، ولكنه في الواقع غير ذلك. استعمل المعلومات من الشكل المجاور؛ لإيجاد $m\widehat{BH}$. (الدرس 6-2) 141



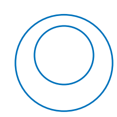
انسخ الأشكال الآتية في كراستك، وارسم المماسات المشتركة. وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك". (الدرس 5-2)

للتمارين 35-38 انظر الهامش

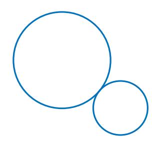
35)



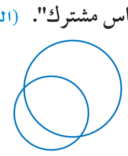
36)



37)

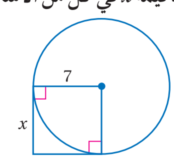


38)

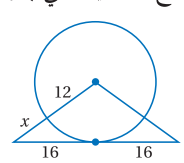


أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات هي مماسات فعلًا: (الدرس 5-2)

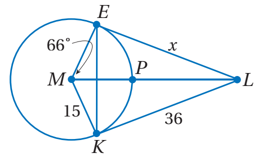
39) 7



40) 8



41) 36



مراجعة المتطلبات السابقة

اكتب بصيغة ميل – مقطع معادلة الخط المستقيم، إذا عُلِم أن:

42) $m = 3$، المقطع y يساوي -4　$y = 3x - 4$

43) $m = 2$، ويمر في $(0, 8)$　$y = 2x + 8$

44) $m = \frac{2}{9}$، المقطع y يساوي $\frac{1}{3}$　$y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$

45) $m = -1$، $b = -3$　$y = -x - 3$

4 التقويم

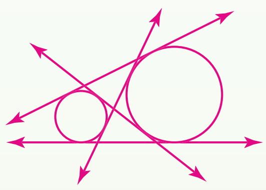
تعلم سابق اطلب إلى الطلبة أن يصفوا كيف ساعدهم الدرس المتعلق بالقاطع والمماس والزوايا في فهم الدرس المتعلق بالقطع الخاصة في الدائرة.

إجابات:

32a) $y - x = 140$, $x + y = 360$

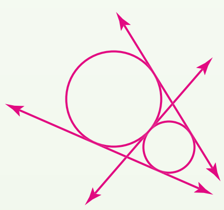
32b) $x = 110°$, $y = 250°$

35)

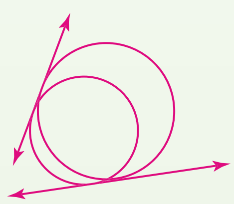


36) لا يوجد مماس مشترك

37)



38)



145 الدرس 7-2 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

2-8 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-8

كتابة معادلة المستقيم في صيغة ميل-مقطع وتمثيله بيانيًا.

الدرس 2-8

كتابة معادلة الدائرة .

تمثيل الدائرة في المستوى الإحداثي بيانيًا.

ما بعد الدرس 2-8

توسيع خصائص التشابه والتحويلات الهندسية؛ لاستكشاف وتبرير التخمينات المتعلقة بالأشكال الهندسية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- أين يوضع البُرج بالنسبة للمنطقة التي سيغطيها؟ في المركز
- ماذا تمثل المسافة بين البرج وأبعد نقطة يصلها بث البرج؟ نصف قطر الدائرة
- يبث أحد أبراج الهاتف المحمول إشارة ضمن دائرة نصف قطرها 15 mi. هناك نية لزيادة مساحة منطقة التغطية بنسبة 50%، فكم ميلًا يجب أن تزيد المسافة التي تصلها الإشارة التي يبثها البرج؟ 3.37 mi تقريبًا

2-8 معادلة الدائرة

Equation of a Circle

فيما سبق

درستُ كتابة معادلة المستقيم في صيغة ميل ـ مقطع وتمثيله بيانيًا.

والآن

الأفكار الرئيسة

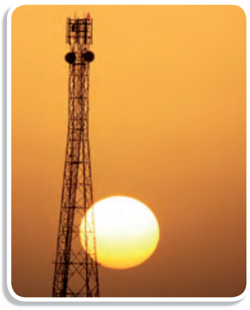
- أكتب معادلة الدائرة.
- أُمَثّل الدائرة في المستوى الإحداثي بيانيًا.

المفردات الأساسية

محل هندسي مركب

compound locus

www.obeikaneducation.com



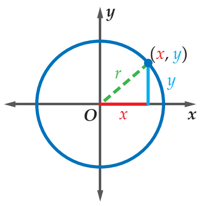
لمـــاذا؟

تستعمل أبراج الاتصالات الهاتفية إشارات الراديو لبثِّ مكالمات الهواتف النقالة.

ويغطي كل برج منطقة دائرية. وتُرتب الأبراج على أن تُلتقط إشارات البثِّ في أي مكان في منطقة التغطية.

معادلة الدائرة بما أن جميع نقاط الدائرة تبعد مسافات متساوية عن مركزها، فإنه يمكنك إيجاد معادلتها باستعمال قانون المسافة.

افترض أن مركز الدائرة لا يقع عند نقطة الأصل، ولكن عند النقطة (h, k). يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين؛ لتحصل على معادلة الدائرة.



قانون المسافة بين نقطتين $\quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = r, (x_1, y_1) = (h, k), (x_2, y_2) = (x, y) \quad r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$

بتربيع الطرفين $\quad r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

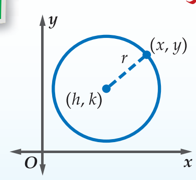
إذا كانت (x, y) نقطة على دائرة مركزها نقطة الأصل، فإن معادلة هذه الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$.

مفهوم أساسي: الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

أضف إلى مطويتك

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ، وطول نصف قطرها r هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

تسمى الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة أيضًا صيغة المركز و نصف القطر.



مثال 1 كتابة معادلة الدائرة باستعمال المركز وطول نصف القطر

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

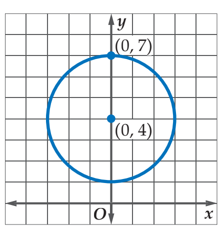
a) مركزها $(1, -8)$ ، وطول نصف قطرها 7 .

معادلة الدائرة $\quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(h, k) = (1, -8), r = 7 \quad (x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$

بالتبسيط $\quad (x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$

b) الدائرة الممثّلة بالتمثيل البياني المجاور.



مركز الدائرة $(0, 4)$ ، وطول نصف قطرها 3 .

معادلة الدائرة $\quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(h, k) = (0, 4), r = 3 \quad (x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$

بالتبسيط $\quad x^2 + (y - 4)^2 = 9$

إرشادات للدراسة

معادلة الدائرة لاحظ أن معادلة الدائرة بقيت كما هي في مثال 1 ، وليس بالضرورة فك التربيع.

1A) $x^2 + y^2 = 10$

1B) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

تأكد

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

1A) مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$. **1B)** مركزها $(4, -1)$، وطول قطرها 8 .

مصادر الدرس 2-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ، ص (146, 149)	• تنويع التعليم ، ص (146, 149)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

معادلة الدائرة

المثالان 2, 1 يُبيّنان كيفية استعمال المعلومات المعُطاة عن الدائرة لكتابة معادلتها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال 2 كتابة معادلة الدائرة باستعمال مركزها ونقطة عليها

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

a) مركزها $(-2, 4)$، وتمر بالنقطة $(-6, 7)$.

خطوة 1 أوجد المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد طول نصف القطر .

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$ $(x_1, y_1) = (-2, 4)$, $(x_2, y_2) = (-6, 7)$

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيط

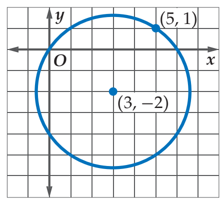
خطوة 2 اكتب معادلة الدائرة باستعمال $h = -2, k = 4, r = 5$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ $h = -2, k = 4, r = 5$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ بالتبسيط

b) الدائرة الممثّلة بالتمثيل البياني المجاور .



خطوة 1 أوجد المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد طول نصف القطر.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(5 - 3)^2 + [1 - (-2)]^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{13}$ بالتبسيط

خطوة 2 اكتب معادلة الدائرة باستعمال $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 3)^2 + [y - (-2)]^2 = (\sqrt{13})^2$ $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$ بالتبسيط

تأكد

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

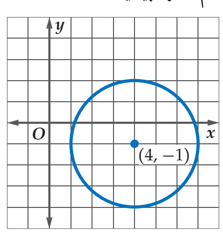
2A) مركزها $(5, 4)$، وتمر بالنقطة $(-3, 4)$. $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 64$

2B) مركزها $(-3, -5)$، وتمر بالنقطة $(0, 0)$. $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$

تمثيل الدوائر بيانيًا يمكنك تحليل معادلة الدائرة ؛ لإيجاد معلومات تساعدك على تمثيلها بيانيًا في المستوى الإحداثي.

مثال 3 تمثيل الدائرة بيانيًا

أوجد مركز، وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$، ثم مثّلها بيانيًا.



أعد كتابة المعادلة $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ ؛ لإيجاد المركز، وطول نصف القطر.

$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

وعليه فإن، $h = 4, k = -1, r = 3$.

أي أن مركز الدائرة $(4, -1)$ ، وطول نصف قطرها 3.

تأكد

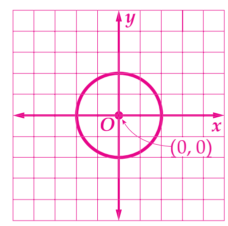
أوجد المركز، وطول نصف القطر لكل دائرة عُلمت معادلتها في كل مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًا.

3A) $x^2 + y^2 = 4$ **3B)** $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$

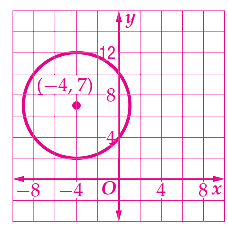
إرشادات للدراسة

صيغة الجذور في المثال 2b ، يمكنك ترك نصف القطر على صورة الجذر ؛ لأن نصف القطر سيُربع عند كتابة معادلة الدائرة.

3A) (0, 0), 2



3B) (−4, 7), 5



إرشادات للدراسة

مسلّمات إقليدس لقد درست مسلّمات إقليدس الثلاثة سابقًا. وهناك مسلّمة أخرى لإقليدس، وهي أنه باستطاعتك رسم دائرة وحيدة بنصف قطر معلوم باختيارك أي نقطة لتكون مركزًا لهذه الدائرة.

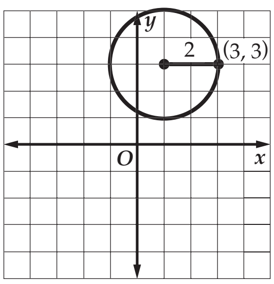
مثالان إضافيان

1 أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

a) مركزها $(3, -3)$، ونصف قطرها 6

$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 36$

b) الدائرة الممثلة بالتمثيل البياني أدناه.



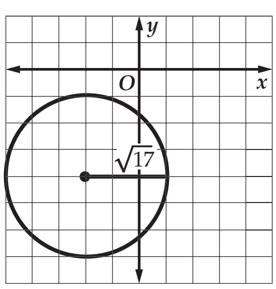
$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

2 أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

a) مركزها $(-3, -2)$، وتمر بالنقطة $(1, -2)$

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

b) الدائرة الممثلة بالتمثيل البياني أدناه.



$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 17$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض المستوى الإحداثي على السبورة ، ثم ارسم دائرة مركزها نقطة الأصل، واعرض إحداثيات المركز وطول نصف القطر ومعادلة الدائرة. اطلب إلى الطلبة أن يقوموا بالتناوب بتحريك هذه الدائرة أو تغيير نصف قطرها. احفظ هذه النتائج ووزعها على طلبة الصف.

تنبيه !

قانون المسافة بين نقطتين عند استعمال قانون المسافة بين نقطتين، ذكِّر الطلبة أن ينتبهوا إلى تعويض الإحداثي x والإحداثي y بالترتيب الصحيح والانتباه إلى إشارات هذه الإحداثيات.

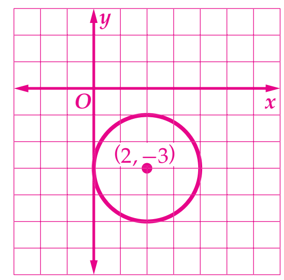
تمثيل الدوائر في المستوى الإحداثي

المثالان 3, 4 يبينان كيفية تحليل معادلة الدائرة مما يساعد على تمثيلها بيانيًّا.

مثالان إضافيان

3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة $(x-2)^2+(y+3)^2=4$. ثم مثلها بيانيًّا.

المركز $(2, -3)$ ونصف القطر يساوي 2.



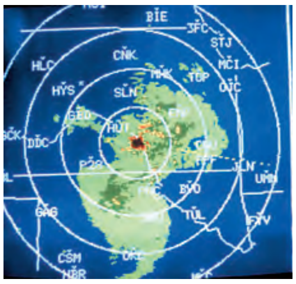
4 **رحلة فضاء:** مركبة الفضاء أبولو 8 أول مركبة فضائية حملت إنسانًا إلى مدار حول القمر، وحلقت بمدار دائري بمتوسط ارتفاع 185 km فوق سطح القمر. فإذا علمت أن طول نصف قطر القمر يساوي 1740 km. اكتب معادلة المدار الدائري الذي سلكته مركبة الفضاء معتبرًا أن مركز القمر هو نقطة الأصل. $x^2+y^2=3705625$

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال تمثيل الدائرة البياني لكتابة معادلتها

الربط مع واقع الحياة

يُسجَّل 1000 إعصار تقريبًا في الولايات المتحدة خلال السنة الواحدة. أكثر هذه الأعاصير تدميرًا هي الأعاصير التي تبلغ سرعتها 250 mi/h، أو أكثر فقد يصل عرض مساره التدميري إلى ميل، ويمتد إلى 50 mi.

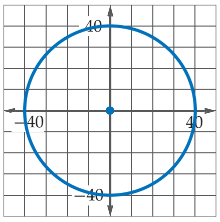
المصدر: National Oceanic & Atmospheric Administration



طقس: يراقب علماء الفلك عاصفة جوية باستعمال رادار (Doppler)، وتستعمل شبكة إحداثيات لتحديد موقعها. إذا كان مركز شاشة الرادار يمثِّل نقطة الأصل، وتبعد الحلقة الأولى 10 mi عن المركز، والبُعد بين كل حلقتين متتاليتين 10 mi أيضًا، كما في الصورة المجاورة، فما معادلة الحلقة الرابعة؟

افهم مركز الدوائر $(0,0)$، وتبعُد الدائرة الرابعة 40 mi عن المركز.

خطط ارسم شكلًا تقريبيًّا يُبيِّن هذا الموقف في المستوى الإحداثي، ومنه يمكنك استنتاج أن $r = 40$.



حُلّ اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها r.

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+y^2=40^2$$
$$x^2+y^2=1600^2$$

تحقَّق اختر نقطة تقع على الدائرة، ثم عوض بإحداثيها في المعادلة التي توصلت إليها.

مثلًا $(-40,0)$ تقع على الدائرة

$$(-40)^2+0^2 \stackrel{?}{=} 1600$$
$$1600 = 1600 \checkmark$$

تأكد

4) **بيتزا:** يقع محل صنع البيتزا على شبكة الإحداثيات في الموقع $(7, 3)$، وتصل خدمة التوصيل المجاني لهذا المحل إلى 5 mi تقريبًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمثِّل حدود منطقة خدمة التوصيل المجاني للمحل. $(x-7)^2+(y-3)^2=25$

تأكد من فهمك

المثالان 1, 2 الصفحتان 146, 147

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

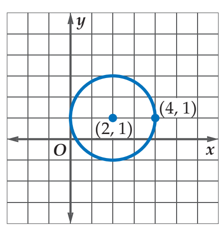
1) مركزها $(9, 0)$، وطول نصف قطرها 5

2) مركزها $(3, 1)$، وطول قطرها 14

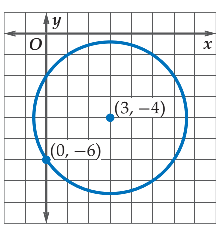
3) مركزها نقطة الأصل، وتمر بالنقطة $(2, 2)$

4) مركزها $(-5, 3)$، وتمر بالنقطة $(1, -4)$

5)



6)



1) $(x-9)^2+y^2=25$
2) $(x-3)^2+(y-1)^2=49$
3) انظر الهامش
4) $(x+5)^2+(y-3)^2=85$
5) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$
6) $(x-3)^2+(y+4)^2=13$

مثال 3 صفحة 147

عيِّن إحداثيي المركز لكلِّ دائرة عُلمت معادلتها في كل مما يأتي، وأوجد طول نصف القطر، ثم مثِّلها بيانيًّا.

للتمرينين 7, 8 انظر الهامش

7) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$

8) $x^2+(y+1)^2=4$

مثال 4 صفحة 148

9) **طقس:** يقع رادار للطقس في النقطة $(-58, 55)$، وتقع مدينة حمد في نقطة الأصل. إذا كان الرادار يغطي منطقة دائرية طول نصف قطرها 80 وحدة طول، فأوجد معادلة تلك الدائرة، وهل مدينة حمد مشمولة بتأثير ذلك الرادار؟ $(x+58)^2+(y-55)^2=1600$، مدينة حمد مشمولة؛ لأن المسافة بينها وبين مركز التأثير يساوي 79.9 وحدة طول وهذه أقل من 80 وحدة طول.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون وضّح للطلبة أنهم سيعتمدون كثيرًا على معلوماتهم الهندسية ومهارات التبرير لحل المسائل في هذا الدرس. اسمح لهم أن يستكشفوا ويتعاونوا مع بعضهم أثناء حلهم للأسئلة والأسئلة. حثهم على استذكار التعريفات والمفاهيم والنظريات، لمساعدتهم على تفسير سبب استعمالهم طريقة معينة في حل الأسئلة.

إجابات

3 قانون المسافة بين نقطتين

$(x_1,y_1)=(0,0), (x_2,y_2)=(2,2)$

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}$$

معادلة الدائرة

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

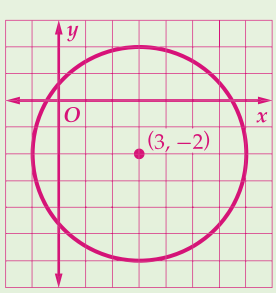
$h=0, k=0, r=\sqrt{8}$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{8})^2$$

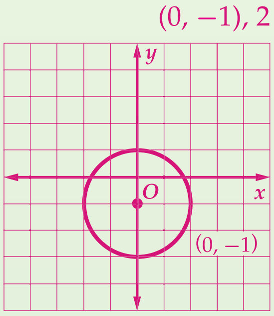
بالتبسيط

$$x^2+y^2=8$$

7) $(3, -2), 4$



8) $(0, -1), 2$



تدرب وحل المسائل

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

المثالان 2 ، 1 الصفحتان 147 ، 146

10) مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 4

11) مركزها (1 ,6)، وطول نصف قطرها 7

12) مركزها (0 ,2−)، وطول قطرها 16

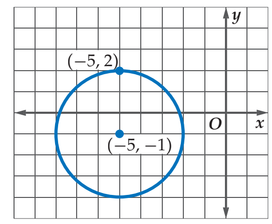
13) مركزها (9− ,8)، وطول نصف قطرها $\sqrt{11}$

14) مركزها (6 ,3−)، وتمر بالنقطة (0, 6)

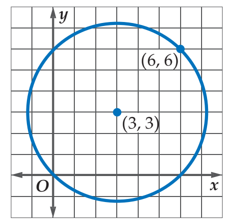
15) مركزها (2− ,1)، وتمر بالنقطة (3, −4)

10) $x^2 + y^2 = 16$
11) $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 49$
12) $(x+2)^2 + y^2 = 64$
13) $(x-8)^2 + (y+9)^2 = 11$
14) $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 9$
15) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$
16) $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 9$
17) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$

16)



17)



للتمارين 21 – 18 انظر ملحق الإجابات

أوجد المركز، وطول نصف القطر لكل دائرة عُلمت معادلتها في كل مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًا.

مثال 3 صفحة 147

18) $x^2 + y^2 = 36$

19) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

20) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

21) $(x-8)^2 + y^2 = 64$

22) **طقس:** أظهرت شاشة رادار حلقات دائرية مركزها، إحدى العواصف. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل، وتبعُد كل حلقة عن الحلقة السابقة لها بمقدار 15mi، فما معادلة الدائرة التي تُمثّل الحلقة الثالثة؟ انظر الهامش

23) **بَسْتَنة:** يسقي رشاش ماء منطقة دائرية طول قطرها 10ft. إذا كان بُعد رشاش الماء عن المنزل 20ft إلى الشمال، ويقع المنزل عند نقطة الأصل، فما معادلة الدائرة التي تُمثّل المنطقة التي تُسقى؟ $x^2 + (y-20)^2 = 25$

مثال 4 صفحة 148

أوجد معادلة الدائرة في كل مما يأتي :

24) طرفا قطر فيها (0, 4) ، (6, −4) . $(x-3)^2 + y^2 = 25$

25) طول قطرها 22 وحدة طول، ومركزها النقطة الناتجة عن انسحاب بمقدار 13 وحدة إلى اليسار، و 6 وحدات إلى أعلى من نقطة الأصل. $(x+13)^2 + (y-6)^2 = 121$

26) **صواريخ:** اختلاف حجم محرك الصاروخ يؤدي إلى وصوله إلى ارتفاعات مختلفة، وكلما زاد الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ كلما كبرت الدائرة التي سيهبط فيها، وفي ظروف الرياح الطبيعية يكون طول نصف قطر دائرة الهبوط يساوي ثلاثة أمثال ارتفاع الصاروخ.

a) أوجد معادلة دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 300ft . $x^2 + y^2 = 810000$

b) ما طول نصف قطر دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 1000ft؟ افترض أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل. 3000 ft

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 9-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لتمرين

ورق الرسم البياني تتطلب التمارين 21-18 ، 27 ، 28 ، 34 استعمال ورق الرسم البياني.

إجابة :

22 نصف قطر الحلقة الثالثة يساوي

$15 + 15 + 15 = 45$

معادلة الدائرة

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 45^2$

$h = 0, k = 0, r = 45$

بالتبسيط $x^2 + y^2 = 2025$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	10-23 ، 33-47
ضمن المتوسط	10-24 زوجي ، 26-29 ، 31 ، 33-47
فوق المتوسط	24-47

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يتناوبوا في كتابة معادلة دائرة، ثم اطلب إليهم تسمية المركز، وتحديد طول نصف قطر الدائرة.

التقويم التكويني

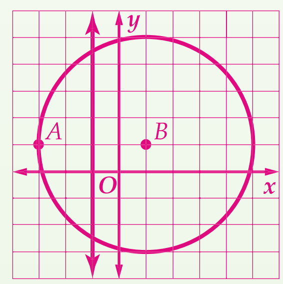
تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 8-2 ,7-2 بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 2.

تمثيلات متعددة في التمرين 28، يستعمل الطلبة الجدول والتمثيل البياني والوصف اللفظي؛ لاستقصاء المحل الهندسي المركب لزوج من النقاط.

إجابات:

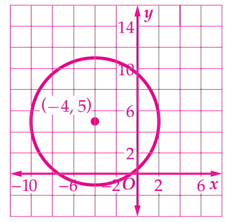
28c) مستقيم، وهو العمود المنصف للقطعة الواصلة بين هاتين النقطتين

28d) إجابة ممكنة:



28e) المحل الهندسي للنقاط في المستوى التي تبعُد مسافات متساوية عن نقطة معلومة هو دائرة. والمحل الهندسي للنقاط التي تبعُد مسافات متساوية من النقطتين A, B وتبعد مسافة AB عن B هو تقاطع المحل الهندسي للنقاط التي تبعُد مسافات متساوية عن A, B والمحل الهندسي للنقاط التي تبعُد مسافة AB عن B. يمثل بيانيًا هذا المحل الهندسي المركب كنقطتين.

27a) $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$



27b) إجابة ممكنة: تمثل الدائرة حدود منطقة خدمة التوصيل المجاني. تحصل جميع المنازل الواقعة ضمن هذه الدائرة على خدمة التوصيل المجاني. وبما أن منزل خالد الواقع عند $(0, 0)$ يقع خارج هذه الدائرة فلن يستفيد خالد من خدمة التوصيل المجاني.

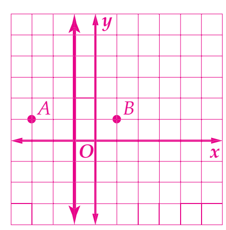
إرشادات للاختبارات

استعمال الصيغ
تذكر أنه إذا كان السؤال يوظف المستوى الإحداثي استعمل قانوني المسافة ونقطة المنتصف وقانون الميل لحل السؤال، وللتأكد من صحة الحل.

28a) إجابة ممكنة:

x	y
−1	−3
−1	−1
−1	0
−1	2
−1	4

28b) إجابة ممكنة:

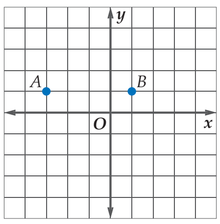


27) **خدمة التوصيل:** قدَّم مطعم عَرْضًا للتوصيل المجاني للمناطق التي تبعُد عنه 6 km. ويقع المطعم على بُعد 4 km غربًا، و 5 km شمالًا من منزل خالد.

a) إذا كان منزل خالد يقع عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، فأوجد المعادلة التي تمثِّل الموقف ومثِّلها بيانيًا.

b) ماذا يمثِّل هذا المنحنى؟ وهل يمكن أن يحصل خالد على خدمة التوصيل المجاني من هذا المطعم؟ اشرح الطريقة التي عرفت بها.

28) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين المحل الهندسي المركب لنقطتين. والمحل الهندسي المركب يحقق أكثر من مجموعة متمايزة من الشروط. للفروع c-e انظر الهامش



a) **جدولة:** اختر نقطتين A، B في المستوى الإحداثي، واكتب إحداثيات 5 نقاط في المستوى تبعُد مسافات متساوية عن كل من A، B.

b) **تمثيل بياني:** مثِّل بيانيًا المحل الهندسي لهذه النقاط.

c) **تعبير لفظي:** صِفْ المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعُد مسافات متساوية عن زوج من النقاط.

d) **تمثيل بياني:** استعمل التمثيل البياني الذي حصلت عليه من الفرع b؛ لتحدد المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعُد مسافة AB عن النقطة B، ومثِّله بيانيًا.

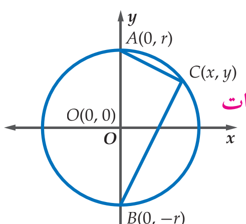
e) **تعبير لفظي:** صف المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعُد مسافات متساوية عن نقطة واحدة. ثم صِفْ المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعُد مسافات متساوية عن A، B، وتبعُد مسافة AB عن B. كيف يُمثَّل المحل الهندسي المركب بيانيًّا؟

29) أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$. انظر الهامش

30) إذا كان طرفا أحد أقطار دائرة هما النقطتين $(-6, 15)$، $(2, 7)$، فأوجد معادلتها. $(x + 2)^2 + (y - 11)^2 = 32$

31) أوجد معادلة الدائرة التي طول قطرها 12، ويقع مركزها في الربع الثاني من المستوى الإحداثي، وتمس كلًّا من المستقيمين $y = -4$، $x = 1$. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 36$

مسائل مهارات التفكير العليا



32) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا إحداثيًا ؛ لإثبات أنه إذا قابلت الزاوية المحيطية قطرًا في الدائرة.كما في الشكل المجاور ، فإنها تكون قائمة. انظر ملحق الإجابات

33) **تبرير:** إذا أُجريت إزاحة لمركز الدائرة التي معادلتها $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، و 9 وحدات إلى أعلى، فما معادلتها الجديدة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

34) **مسألة مفتوحة:** عيِّن ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي ليست على استقامة واحدة، وارسم مثلثًا رؤوسه هذه النقاط، ثم أنشئ الدائرة التي تحيط به. انظر ملحق الإجابات

35) **اكتب:** اشرح العلاقة بين قانون المسافة بين نقطتين، ومعادلة الدائرة. انظر الهامش

36) **اكتب:** إذا سحبت الدائرة مقدار a وحدة إلى اليمين، و b وحدة إلى أسفل، فصِف كيف تتغيَّر معادلتها. انظر الهامش

29) كتابة معادلة الدائرة

$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$

على الصورة

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

المعادلة الأصلية

$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$

الخاصية التجميعية

$(x^2 + 6x + ?) + (y^2 - 2y + 1) = 15$

بإضافة 1،9 للطرفين

$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$

بالتبسيط $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

إذن، مركز الدائرة $(-3,1)$ وطول نصف قطرها 5.

33) $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 16$، الدائرة الأولى يقع مركزها عند $(5, -7)$. إذا أزحنا الدائرة 3 وحدات لليمين و 9 وحدات إلى أعلى، سيكون المركز الجديد لهذه الدائرة عند $(8, 2)$، وتصبح المعادلة الجديدة $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

35) إجابة ممكنة: الدائرة هي المحل الهندسي لكل النقاط في المستوى الإحداثي التي تبعُد مسافات متساوية (نصف القطر) عن نقطة مُعطاة (المركز). ويمكن اشتقاق معادلة الدائرة من قانون المسافة باستعمال هذه النقطة المعطاة ونصف القطر المعطى أيضًا.

36) إجابة ممكنة: معادلة الدائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. عند إزاحة الدائرة a وحدة لليمين يصبح الاحداثي للمركز $h + a$. وعند ازاحة الدائرة b وحدة إلى أسفل، فإن الإحداثي y لنقطة المركز هو $k - b$.
$[x - (h + a)]^2 + [y - (k - b)]^2 = r^2$ أو
$(x - h - a)^2 + (y - k + b)^2 = r^2$.

تدريب على اختبار معياري

37) أيٌّ المعادلات الآتية تُمثِّل معادلة الدائرة التي مركزها $(6, 5)$ ، وتمر بالنقطة $(2, 8)$؟ **A**

A $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$

B $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$

C $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$

D $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

38) أي المعادلات الآتية تُمثِّل دائرةً مركزُها $(7, -2)$، وطول قطرها 18؟ **B**

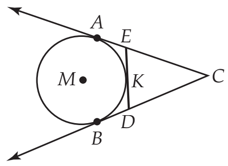
A $x^2+y^2-4x+14y+53=324$

B $x^2+y^2+4x-14y+53=81$

C $x^2+y^2-4x+14y+53=18$

D $x^2+y^2+4x-14y+53=3$

39) إذا كان $\overline{DE}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ مماسات للدائرة M كما في الشكل أدناه، $CB = 6\,cm$ ، فما محيط $\triangle CED$ ؟ **F**



F $12\,cm$

H $16\,cm$

G $14\,cm$

J $18\,cm$

40) إذا كانت $(-4, 0)$ مركز $\odot F$، وطول نصف قطرها 4 ، فأي النقاط الآتية تقع على $\odot F$؟ **D**

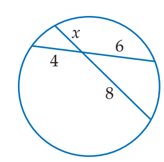
A $(4, 0)$ **C** $(4, 3)$

B $(0, 4)$ **D** $(-4, 4)$

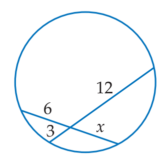
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كل مما يأتي : (الدرس 7-2)

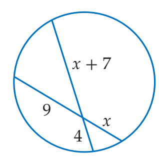
41) **3**



42) **6**

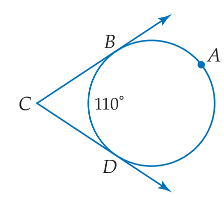


43) **5.6**

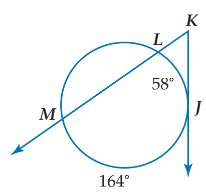


أوجد قياس كل مما يأتي : (الدرس 6-2)

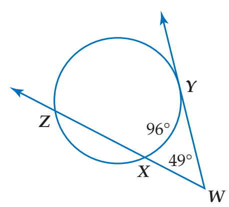
44) $\angle C$ **70°**



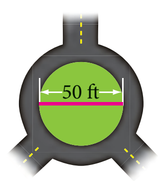
45) $\angle K$ **53°**



46) $\widehat{YZ}$ **194°**



47) **شوارع:** يسكن فارس بالقرب من دوار تتوسطه حديقة، إذا ركب دراجته الهوائية، ودار مرة واحدة حول حافة الحديقة التي تتوسط الدوار، كما في الشكل المجاور، فما المسافة التي قطعها على دراجته؟ (الدرس 1-2) **157 ft**



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ما العلاقة بين الدوائر المتحدة بالمركز التي يكون لها نصف القطر نفسه؟ فسّر.

هي الدائرة نفسها؛ لأن الدائرة تتحدد تماماً بمعرفة المركز ونصف القطر. الدائران اللتان تشتركان بالمركز نفسه ويكون لهما نصف القطر نفسه يجب أن تكونا منطبقتين.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدائرة ومحيطها (الدرس 1-2)

- محيط الدائرة يساوي πd أو $2\pi r$.

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية (الدروس 2-2 إلى 2-4)

- مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة يساوي $360°$.
- طول القوس يتناسب مع طول المحيط.
- الأقطار العمودية على الأوتار تنصّفها وتنصّف الأقواس المقابلة لها.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها.

المماس والقاطع وقياس الزوايا (الدرسان 2-5 ، 2-6)

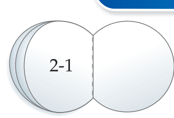
- يقطع المماس الدائرة في نقطة واحدة فقط، ويكون عموديًّا على نصف القطر المار في نقطة التماس.
- مماسا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها يكونان متطابقين.
- قياس الزاوية المتكوِّنة من قاطعين للدائرة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المحدودين بها.
- قياس الزاوية المتكوِّنة من القاطع والمماس يساوي نصف قياس القوس المحدود بها.

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة ومعادلة الدائرة (الدرسان 2-7 ، 2-8)

- يمكن إيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة في الدائرة باستعمال حاصل ضرب أطوال القطع المكوِّنة لها.
- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، وطول نصف قطرها r هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

مطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



المفردات الأساسية

الدائرة ص 86	**القوس الأصغر** ص 96
المركز ص 86	**القوس الأكبر** ص 96
نصف القطر ص 86	**نصف الدائرة** ص 96
الوتر ص 86	**الأقواس المتطابقة** ص 96
القطر ص 86	**الأقواس المتجاورة** ص 97
الدوائر المتطابقة ص 87	**طول القوس** ص 98
الدوائر المتحدة بالمركز ص 87	**الزاوية المحيطية** ص 112
محيط الدائرة ص 88	**القوس المحدود** ص 112
باي (π) ص 88	**المماس** ص 121
محاط بـ ص 89	**نقطة التماس** ص 121
مُحيطة بـ ص 89	**المماس المشترك** ص 121
الزاوية المركزية ص 95	**القاطع** ص 130
القوس ص 95	**قطعة القاطع الخارجية** ص 141
	المحل الهندسي المركب ص 150

اختبر مفرداتك

بيِّن ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة، أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل الكلمة، أو ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة.

1) أي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة هي نصف قطر للدائرة. خطأ ، وتر
2) الوتر المار بمركز الدائرة هو قطر فيها. صحيحة
3) الزاوية المركزية يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة. صحيحة
4) القوس الذي قياسه أقل من $180°$ هو القوس الأكبر. خطأ، القوس الأصغر
5) القوس المحدود هو القوس الذي يقع طرفاه على ضلعي الزاوية المحيطية، ويقع داخلها. صحيحة
6) المماس المشترك هو النقطة التي يتقاطع فيها مستقيم مع دائرة في المستوى نفسه. خطأ، نقطة التماس
7) القاطع هو المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط. خطأ، نقطتان
8) قطعة القاطع الخارجية هي قطعة من القطر يقع أحد طرفيها على الدائرة. خطأ ، القاطع
9) تكون الدائرتان متحدتين بالمركز إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين. خطأ، متطابقتين

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1-9، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

مطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتأكد من تدوين جميع المفاهيم الأساسية في مواقعها الصحيحة في مطوياتهم.

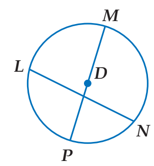
اقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم أثناء حلّهم أسئلة دليل الدراسة والمراجعة. وبيّن لهم أن مطوياتهم يمكن أن تكون وسيلة مناسبة للمراجعة السريعة أثناء دراستهم استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

2–1 الدائرة ومحيطها (الصفحات 94–86)

لحل التمارين 12–10 ، ارجع إلى $\odot D$:



10) سمِّ الدائرة. $\odot D$

11) سمِّ نصف قطر للدائرة. $\overline{DP}$ أو $\overline{DM}$

12) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا. $\overline{LN}$

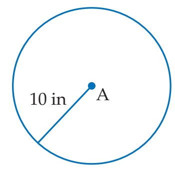
أوجد طول قطر الدائرة، وطول نصف قطرها التي عُلِم محيطها في كل مما يأتي، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة. للتمارين 16–13 انظر الهامش

13) $C = 43$ cm　14) $C = 26.7$ yd

15) $C = 108.5$ ft　16) $C = 225.9$ mm

مثال 1

أوجد محيط $\odot A$ أدناه.



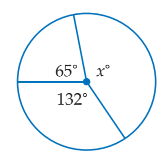
صيغة محيط الدائرة	$C = 2\pi r$
بالتعويض	$= 2\pi(10)$
باستعمال الآلة الحاسبة	≈ 62.83

محيط $\odot A$ يساوي 62.83 in تقريبًا.

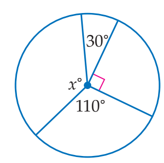
2–2 قياس الزوايا والأقواس (الصفحات 103–95)

أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه. 17) 163　18) 130

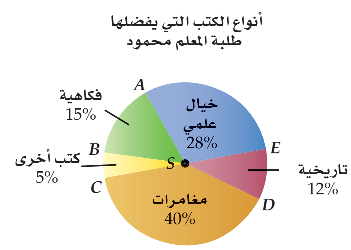
17)



18)



19) **كتب:** أجرى المعلم محمود استطلاعًا لطلبته حول نوعية الكتب التي يفضِّلون قراءتها، ومثَّل النتائج التي حصل عليها بالقطاعات الدائرية، كما في الشكل أدناه. أجب عمّا يأتي:

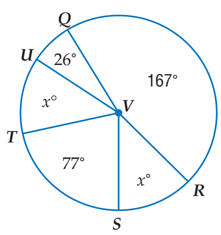


a) أوجد $m\widehat{AE}$ 100.8°　b) أوجد $m\widehat{BC}$ 18°

c) صف نوع القوس الذي تمثله فئة المغامرات. قوس أصغر

مثال 2

أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



مجموع قياسات الزوايا المركزية	$m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT + m\angle TVU + m\angle UVQ = 360°$
بالتعويض	$167° + x + 77° + x + 26° = 360°$
بالتبسيط	$270° + 2x = 360°$
بالطرح	$2x = 90°$
بالقسمة	$x = 45°$

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

المعالجة إن كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها التمارين، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

13) 13.69 cm, 6.84 cm

14) 8.5 yd, 4.25 yd

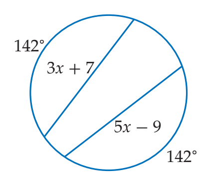
15) 34.54 ft, 17.27 ft

16) 71.9 mm, 35.95 mm

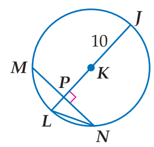
الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

2-3 الأقواس والأوتار (الصفحات 104-111)

20) أوجد قيمة x في الشكل أدناه. 8



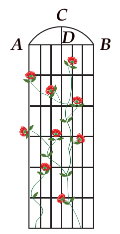
إذا كان $MN = 16$ ، $m\widehat{MLN} = 98°$ في $\odot K$ ، فأوجد قياس كل ما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة:



21) $\widehat{NJ}$ 131°

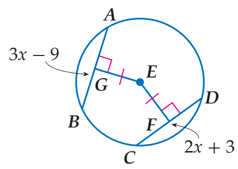
22) LN 8.94

23) **بستنة:** يُبيِّن الشكل المجاور عريشة يعلوها قوس من دائرة، إذا كانت $\overline{CD}$ جزءًا من قطرها، و $m\widehat{ACB}$ يساوي 28% من الدائرة كاملةً، فأوجد $m\widehat{CB}$ ؟ 50.4°



مثال 3

جبر: إذا كان $EG = EF$ في $\odot E$، فأوجد AB .



بما أن الوترين $\overline{EG}$ ، $\overline{EF}$ متطابقان ، فإن بُعديهما عن E متساويان إذن، $AB = CD$.

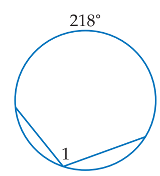
نظرية 2.5	$AB = CD$
بالتعويض	$3x - 9 = 2x + 3$
بإضافة 9 للطرفين	$3x = 2x + 12$
بطرح $2x$ من الطرفين	$x = 12$

إذن، $AB = 3(12) - 9 = 27$.

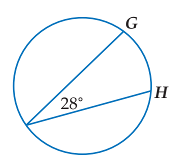
2-4 الزوايا المحيطية (الصفحات 112-119)

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين في كل شكل مما يأتي:

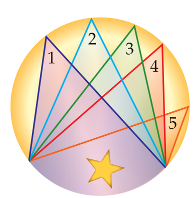
24) $\angle 1$ 109°



25) $\widehat{GH}$ 56°

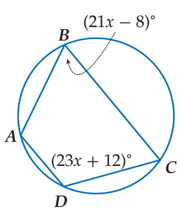


26) **تسويق:** إذا كان $m\angle 1 = 42°$ في الشعار المجاور، فأوجد $m\angle 5$. 42°



مثال 4

أوجد $m\angle D$ ، $m\angle B$ في الشكل المجاور.



بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، فالزاويتان المتقابلتان متكاملتان.

تعريف الزوايا المتكاملة	$m\angle D + m\angle B = 180°$
بالتعويض	$23x + 12° + 21x - 8° = 180°$
بالتبسيط	$44x + 4° = 180°$
بالطرح	$44x = 176°$
بالقسمة	$x = 4°$

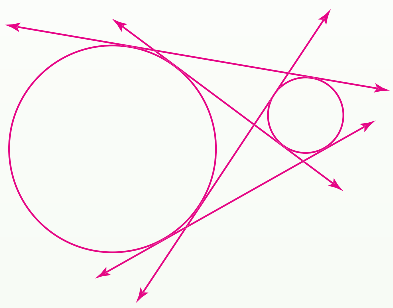
إذن، $m\angle D = (23(4) + 12)° = 104°$ ، $m\angle B = (21(4) - 8)° = 76°$.

154 الفصل 2 الدائرة

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

إجابة:

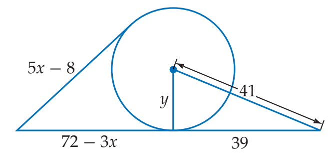
(27



2-5 المماسات (الصفحات 121-128)

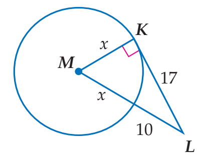
27) خيال علمي: كتب جابر قصة قصيرة، وذكر فيها أن الانتقال أو السفر الفوري بين كوكب معين ثنائي الأبعاد وقمره يكون ممكنًا، إذا كان مسار الانتقال مماسًّا. انسخ الشكل أدناه في كراستك، وارسم جميع المسارات الممكنة. انظر الهامش

28) أوجد قيمة كل من x، y، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر.
$x = 10, y = 12.6$



مثال 5

إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا للدائرة M عند K، كما في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x.



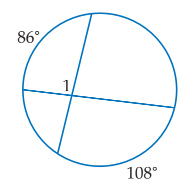
من النظرية 2.9 $\overline{MK} \perp \overline{KL}$. إذن، $\triangle MKL$ قائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس	$KM^2 + KL^2 = ML^2$
بالتعويض	$x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$
بالضرب	$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$
بالتبسيط	$289 = 20x + 100$
بالطرح	$189 = 20x$
بالقسمة	$9.45 = x$

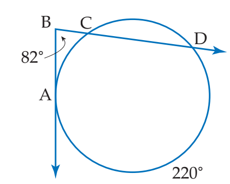
2-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا (الصفحات 130-138)

أوجد القياسين الآتيين، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

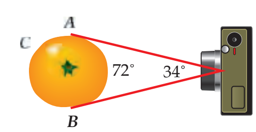
29) $\angle 1$ 97°



30) $\widehat{AC}$ 56°

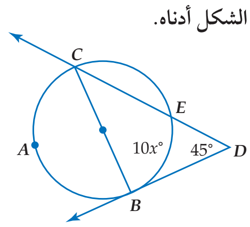


31) تصوير: أراد أحمد أن يأخذ صورة لبرتقالة فأخذ اللقطة كما يظهر في الشكل أدناه، حيث كان خطا النظر مماسَّين لها. إذا كان قياس زاوية الرؤية لآلة التصوير يساوي 34°، فأوجد $m\widehat{ACB}$. 146°



مثال 6

أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



$\widehat{CAB}$ نصف دائرة؛ لأن $\overline{CB}$ قطر فيها.

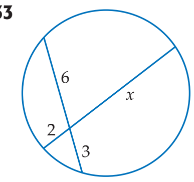
إذن، $m\widehat{CAB} = 180^\circ$.

نظرية 2.14	$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$
بالتعويض	$45^\circ = \frac{1}{2}(180^\circ - 10x)$
بالضرب	$90^\circ = 180^\circ - 10x$
بالطرح	$-90^\circ = -10x$
بالقسمة	$9^\circ = x$

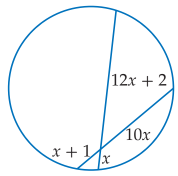
2–7 قطع مستقيمة خاصّة في الدائرة (الصفحات 139–145)

أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه.

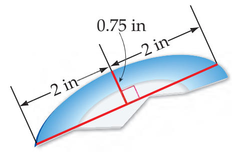
32) **9**



33) **4**

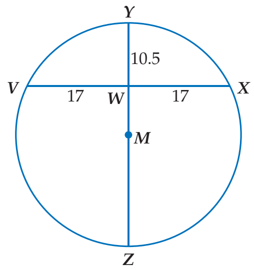


34) **علم الآثار:** وجد حمزة جزءًا من طبق مكسور أثناء حَفره حفرةً لزراعة شجرة كما في الشكل أدناه. ما محيط الطبق الأصلي؟ مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة. **19.1 in**



مثال 6

أوجد طول قطر الدائرة M.



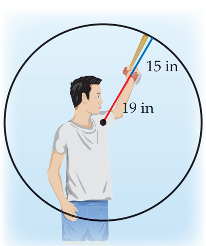
نظرية 2.14	$VW \cdot WX = YW \cdot WZ$
بالتعويض	$17 \cdot 17 = 10.5 \cdot WZ$
بالتبسيط	$289 = 10.5 \cdot WZ$
بقسمة الطرفين على 10.5	$27.5 \approx WZ$
مسلّمة جمع القطع المستقيمة	$YZ = YW + WZ$
بالتعويض	$YZ = 10.5 + 27.5$
بالتبسيط	$YZ = 38$

2–8 معادلة الدائرة (الصفحات 146–150)

اكتب معادلة كل من الدائرتين الآتيتين، إذا عُلم:

35) المركز $(-2, 4)$، وطول نصف القطر 5 **$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$**

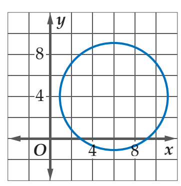
36) المركز $(1, 2)$، وطول قطرها 14 **$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 49$**



37) **أخشاب:** يتعلم أحمد في موقع تدريب خارج البيت إجراءات السلامة عند قطع الأخشاب، يتضمن هذا التدريب تكوين دائرة بذراعه الممدودة؛ للتأكد من عدم إصابة أي شيء فوقه عندما يقطع الأخشاب. إذا كان امتداد ذراعه يصل إلى $19\,in$، وطول مقبض آلة قطع الخشب $15\,in$، فما معادلة دائرة السلامة بالنسبة لأحمد؟ **انظر الهامش**

مثال 7

اكتب معادلة الدائرة الممثَّلة بالتمثيل البياني أدناه:



المركز $(6, 4)$، وطول نصف قطرها 5 .

معادلة الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
$(h, k) = (6, 4), r = 5$	$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 5^2$
بالتبسيط	$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة فذكرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 2 ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 2 .

إجابة:

37) نصف قطر الدائرة يساوي $19 + 15 = 34\,in$ و (h, k) تساوي $(0, 0)$. إذن معادلة الدائرة هي $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 34^2$ أو $x^2 + y^2 = 34^2$.

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل **2** متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابة:

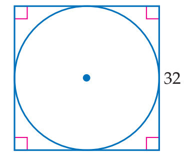
10) لا؛ $\triangle EFG$ ليس مثلثًا قائم الزاوية، إذن $\angle G$ ليست زاوية قائمة و لا يمكن أن يكون $\overline{FG}$ مماسًا للدائرة.

الفصل 2

اختبار الفصل

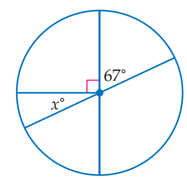
1) برك سباحة: عمق بركة سباحة دائرية الشكل في مركز رياضي 4 ft، وطول قطرها 25 ft. أوجد محيط هذه البركة إلى أقرب قدم؟ **79 ft**

2) أوجد المحيط الفعلي للدائرة في الشكل أدناه: **32π**

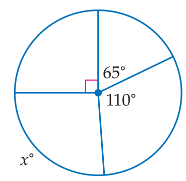


أوجد قيمة x في كل شكل أدناه.

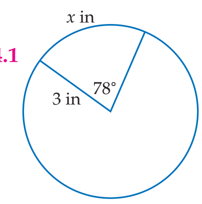
3) **23**



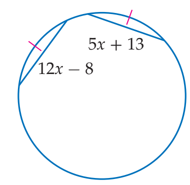
4) **95**



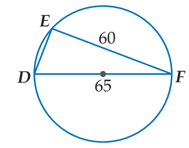
5) **4.1**



6) **3**



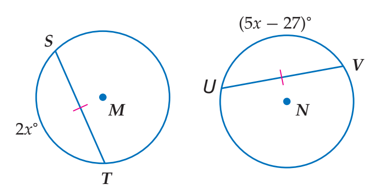
7) اختيار من متعدد: ما طول $\overline{ED}$ في الشكل أدناه؟ **B**



A 5   C 25

B 15   D 88.5

8) إذا كانت $\odot M \cong \odot N$، فأوجد قيمة x. **9**

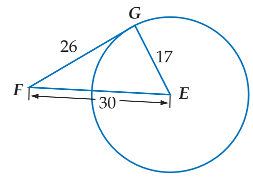


9) اختيار من متعدد: ما عدد النقاط المشتركة بين الدائرتين المتحدتين بالمركز؟ **A**

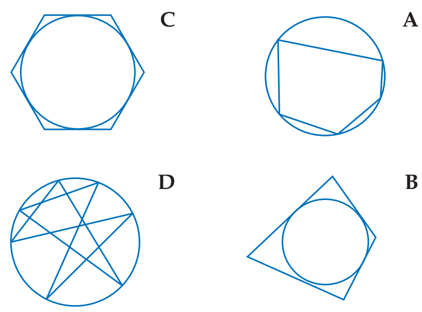
A 0   C 2

B 1   D عدد لا نهائي من النقاط

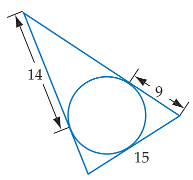
10) حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ مماسًا لـ $\odot E$ في الشكل أدناه. برّر إجابتك. **انظر الهامش**



11) اختيار من متعدد: أي من الأشكال أدناه يُمثّل مضلعًا يُحيط بدائرة؟ **C**

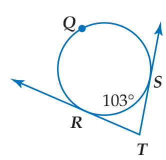


12) أوجد محيط المثلث في الشكل المجاور مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. **58**

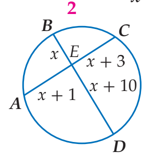


أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

13) $\angle T$ **77°**



14) x **$\frac{1}{2}$**



15) أزهار: أرادت حليمة أن تحوِّط جذع شجرة بحوض من الأزهار. إذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل، وأرادت حليمة أن يمتد الحوض 3 ft من مركز الشجرة، فما المعادلة التي تُمثّل حوض الأزهار؟ **$x^2 + y^2 = 9$**

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصادرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-2، 2-2، 3-2، 4-2، 5-2، 6-2، 7-2، 8-2	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

الفصل 2 التهيئة للاختبارات المعيارية

1 التركيز

الهدف تعيين عناصر الدائرة وكتابة معادلتها وإيجاد قياس القوس والزاوية والقطع في الدائرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

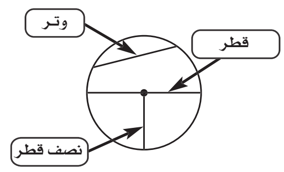
اسأل:

- كيف تجد محيط الدائرة إذا علمت نصف قطرها؟
- ما الفرق بين الوتر والمماس والقاطع؟
- في الدائرة الواحدة أو في الدائرتين المتطابقتين، إذا تطابق وتران، فما العلاقة بين بُعديهما عن المركز؟

الفصل 2 التهيئة للاختبارات المعيارية

خصائص الدائرة

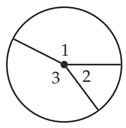
الدائرة هي الشكل الوحيد الذي تكون فيه للزوايا والأقواس والقطع المستقيمة التي تقطعها خصائصُ وعلاقات خاصة. ويُفترض أن تكون قادرًا على تعيين عناصر الدائرة، وكتابة معادلتها، وإيجاد قياسات الأقواس والزوايا والقطع المستقيمة في الدائرة.



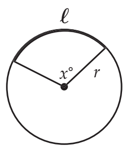
$r = \frac{1}{2}d$

$d = 2r$

$C = 2\pi r$ أو πd



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$



$\ell = \frac{x}{360°} \cdot 2\pi r$

استراتيجية لتطبيق خصائص الدائرة

الخطوة 1

مراجعة عناصر الدائرة والعلاقات بينها.

- تتضمن العناصر الأساسية: نصف القطر والقطر والوتر والقوس والمماس والقاطع.
- ادرس النظريات الأساسية للدائرة وخصائصها، بالإضافة للعلاقة بين عناصرها.

الخطوة 2

أقرأ نص المسألة، وادرس أي شكل مُعطى بدقة وعناية.

- حدّد المطلوب من المسألة.
- ضع على الشكل المعلومات التي تتضمنها المسألة، وأي معلومات أخرى يمكن أن تحدِّدها.
- حدّد أي النظريات أو الخصائص التي يمكن تطبيقها في حالة هذه المسألة.

الخطوة 3

حُلّ المسألة، وتحقّق من حلّك.

- طبّق النظريات أو الخصائص لحَلّ المسألة.
- تحقّق من إجابتك وتأكّد من كونها مقبولة ومنطقية.

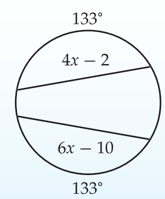
الفصل 2 التهيئة للاختبارات المعيارية

مثال

اقرأ المسألة، وحدِّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات لحَلّها.

ما قيمة x في الشكل المجاور؟

A 2	C 4
B 3	D 6



اقرأ السؤال، وادرس الشكل جيدًا. أُعطيت دائرة فيها وتران مقابلان لقوسين متطابقين، ويكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان القوسان الأصغران المقابلان لهما متطابقين. ويمكنك استعمال هذه الخاصية؛ لتكوين معادلة بدلالة x، ومن ثم حلّها.

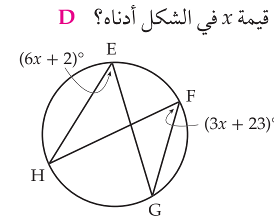
تعريف القطع المتطابقة	$4x - 2 = 6x - 10$
بالطرح	$4x - 6x = -10 + 2$
بالتبسيط	$-2x = -8$
بقسمة كل من الطرفين على -2	$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$
بالتبسيط	$x = 4$

إذن، قيمة x تساوي 4 ، أي أن البديل الصحيح هو C. تحقَّق من إجابتك بتعويض 4 في كلٍّ من تعبيري الوترين، فتجد أن طولي الوترين متساويان.

تمارين

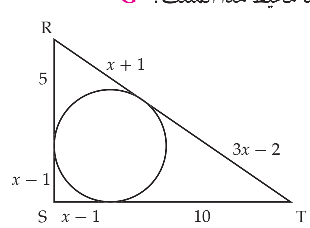
اقرأ المسألة، وحدِّد المطلوب، ثم استعمل المعلومات المعطاة لحلّها.

1) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ D



A 4	C 6
B 5	D 7

2) يحيط المثلث RST بالدائرة في الشكل أدناه. ما محيط هذا المثلث؟ G

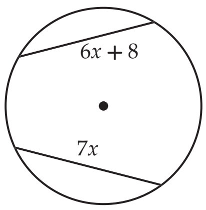


F 33 وحدة	H 37 وحدة
G 36 وحدة	J 40 وحدة

مثال إضافي

1 التدريب على اختبار معياري

اقرأ المسألة، ثم حدّد ما الذي عليك معرفته. ثم استعمل المعلومات المعُطاة في المسألة لإيجاد قيمة x.



أنت تحتاج لمعرفة ما إذا كانت القطع المستقيمة متطابقة. لا توجد معلومات كافية لإيجاد قيمة x.

3 التقويم

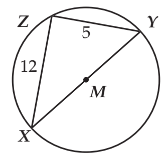
استعمل التمرينين 2 , 1 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

الفصل 2 اختبار معياري تراكمي
للفصلين 1, 2

أسئلة الاختيار من متعدد

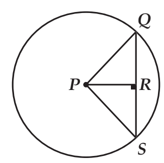
اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) إذا كانت $\overline{XY}$ قطرًا في الدائرة M كما في الشكل أدناه، فما محيطها؟ **D**



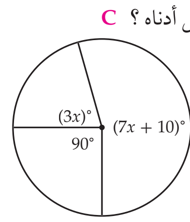
A 5π B 7π C 7.5π D 13π

2) إذا كان طول نصف قطر $\odot P$ يساوي 5، و $PR = 3$ كما في الشكل أدناه، فما طول $\overline{QS}$؟ **C**



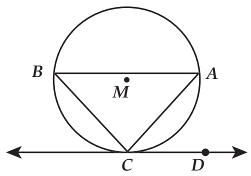
A 4 B 5 C 8 D 10

3) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ **C**



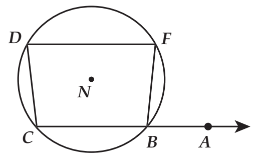
A 19 B 23 C 26 D 28

4) إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CA}$ في $\odot M$، $\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة M عند النقطة C، كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle ACD$؟ **B**



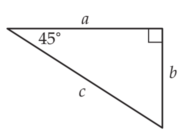
A 30° B 60° C 90° D 120°

5) إذا كان $m\angle FBA = 75°$ في $\odot N$، $\overline{DF} \parallel \overrightarrow{CA}$، كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle BCD$؟ **C**



A 75° B 85° C 105° D 115°

6) إذا كان $a = 5\sqrt{2}$ في المثلث قائم الزاوية أدناه، فما قيمة c؟ **J**



F $5\sqrt{6}$ G $10\sqrt{2}$ H 5 J 10

إرشادات للاختبارات

سؤال 3 استعمل خصائص الدائرة لكتابة المعادلة، وحلها لإيجاد قيمة x.

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملاً لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) A خمّن
B خطأ حسابي
C خطأ حسابي
D الإجابة الصحيحة

2) A خمّن
B خطأ حسابي
C الإجابة الصحيحة
D خطأ حسابي

3) A استعمل المجموع 290° بدلًا من المجموع 360°
B استعمل المجموع 330° بدلًا من المجموع 360°
C الإجابة الصحيحة
D استعمل المجموع 380° بدلًا من المجموع 360°

4) A خمّن
B الإجابة الصحيحة
C خطأ حسابي
D خطأ في خواص المثلث المتطابق الأضلاع

5) A خمّن
B خطأ حسابي
C الإجابة الصحيحة
D خمّن

6) F خطأ حسابي
G خطأ حسابي
H خمّن
J الإجابة الصحيحة

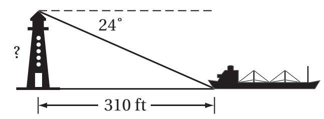
الفصل 2 اختبار معياري تراكمي
للفصلين 1, 2

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

سجّل إجاباتك على ورقة .

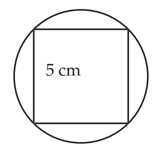
7) تبعد سفينة مبحرة عن أسفل قاعدة منارة على الشاطئ مسافة 310 ft كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن زاوية انخفاض السفينة من أعلى المنارة تساوي °24 ، فما ارتفاع المنارة بالأقدام مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة؟



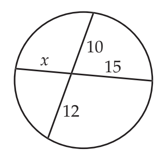
$\sin 24° \approx 0.41$
$\cos 24° \approx 0.91$
$\tan 24° \approx 0.45$

139.5 ft

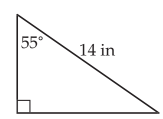
8) رُسم مربع طول ضلعه 5 cm داخل دائرة. ما محيط هذه الدائرة مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر سنتمتر؟ 22.2



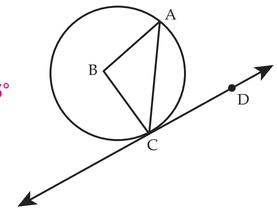
9) أوجد قيمة x في الشكل المجاور مُبيّنًا خطوات الحلّ. 8



10) ما محيط المثلث القائم الزاوية في الشكل أدناه مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر؟ 33.5



11) $\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة B عند النقطة C، $\overline{BC}$ نصف قطر في الدائرة. إذا كان $m\angle ACB = 35°$ كما في الشكل أدناه، فأوجد $m\angle ACD$ ؟



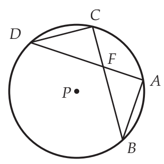
55°

12) اكتب برهانًا ذا عمودين مستعملًا الشكل المجاور.

المعطيات: $\odot P$

المطلوب: إثبات أن $\triangle AFB \sim \triangle CFD$ ؟

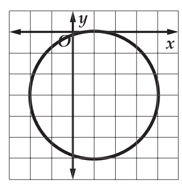
انظر الهامش



أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عما يأتي موضحًا خطوات الحلّ:

13) استعمل الدائرة في الشكل أدناه؛ لحل الأسئلة الآتية:



a) ما مركز هذه الدائرة؟ $(1, -3)$

b) ما طول نصف قطر هذه الدائرة؟ 3 وحدات

c) اكتب معادلة هذه الدائرة. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 32$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
اذهب إلى الدرس ...	2.1	2.3	2.2	2.6	2.4	1.4	1.6	2.1	2.7	1.5	2.5	2.4	2.8

التقويم التكويني

يمكن استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

بناء الاختبارات
التقــويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP.

التدريب على استعمال نموذج الإجابة

اطلب إلى الطلبة محاكاة أداء اختبار معياري وذلك بتسجيل إجاباتهم على النموذج التدريبي الخاص الموجود في مصادر الفصل 2 .

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل الثالث عيّن الأسئلة الواردة في صفحة 161 واجبًا منزليًّا للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم المتطلبات السابقة للفصل 3.

إجابة :

12) المعطيات: $\odot P$

المطلوب اثبات أن $\triangle AFB \sim \triangle CFD$

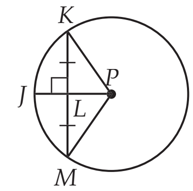
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle DCB \cong \angle DAB$	1) زاويتان محيطيتان تقابلان نفس القوس
2) $\angle CDA \cong \angle CBA$	2) زاويتان محيطيتان تقابلان نفس القوس
3) $\angle DFC \cong \angle BFA$	3) زاويتان متقابلتان بالرأس
4) $\triangle AFB \sim \triangle CFD$	4) نظرية التشابه بثلاث زوايا

الدرس 3-2 ص 110 , 109

24) المعطيات: $\overline{KM} \perp \overline{JP}$, $\odot P$

المطلوب: إثبات أن $\overline{JP}$ تنصف $\overline{KM}$ و $\widehat{KM}$.



البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overline{KM} \perp \overline{JP}$
2) كل نقطتين تحددان مستقيمًا	2) رسم نصفي القطر $\overline{PK}$, $\overline{PM}$
3) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	3) $\overline{PK} \cong \overline{PM}$
4) ضلع مشترك	4) $\overline{PL}$
5) تعريف التعامد	5) $\angle PLM$ و $\angle PLK$ قائمتان
6) جميع الزوايا القائمة متطابقة	6) $\angle PLM \cong \angle PLK$
7) يتطابق مثلثان قائمان بوتر وضلع	7) $\triangle PLM \cong \triangle PLK$
8) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	8) $\overline{ML} \cong \overline{KL}$
9) تعريف المنصف	9) $\overline{PJ}$ ينصف $\overline{KM}$
10) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	10) $\angle MPJ \cong \angle KPJ$
11) في الدائرة نفسها، يتطابق القوسان إذا تطابقت الزوايا المركزية المناظرة لهما	11) $\widehat{MJ} \cong \widehat{KJ}$
12) تعريف المنصف	12) $\overline{JP}$ ينصف $\widehat{KM}$

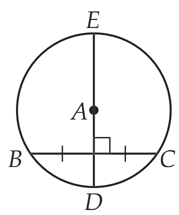
25) البرهان:
بما أن جميع أنصاف الأقطار تكون متطابقة فإن $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$. ومن المعطيات تعلم أن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ إذن، $\triangle PQR \cong \triangle PST$ بحسب SSS. إذن، $\angle QPR \cong \angle SPT$. لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة. ولأن للزوايا المركزية القياس نفسه فإن للأقواس المحدودة بها القياس نفسه أيضًا ومن ثم فهي متطابقة ولذلك فإن $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$.

26) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\odot C$, $\overline{AB} \perp \overline{XY}$
2) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	2) $\overline{CX} \cong \overline{CY}$
3) ضلع مشترك	3) $\overline{CZ}$
4) تعريف المستقيمين المتعامدين	4) $\angle XZC$ و $\angle YZC$ قائمتان
5) يتطابق مثلثين قائمين بوتر وضلع	5) $\triangle XZC \cong \triangle YZC$
6) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	6) $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$, $\angle XCZ \cong \angle YZC$
7) إذا تطابقت زاويتان مركزيتان، فإن القوسين المحدودين بهما متطابقان	7) $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$

28) المعطيات: $\odot A$, $\overline{AD}$ المنصف العمودي لـ $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{ED}$ قطر في $\odot A$.

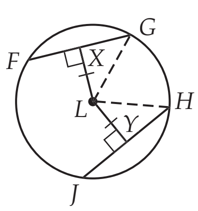


البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overline{ED}$ المنصف العمودي لـ $\overline{BC}$
2) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	2) تقع A على بُعدين متساويين عن B, C
3) عكس نظرية المنصف العمودي	3) تقع A على المنصف العمودي لِـ $\overline{BC}$
4) تعريف القطر	4) $\overline{ED}$ قطر للدائرة A.

29) المعطيات:
$\odot L$, $\overline{LX} \perp \overline{FG}$, $\overline{LY} \perp \overline{JH}$, $\overline{LX} \cong \overline{LY}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{FG} \cong \overline{JH}$



البرهان:

المبررات	العبارات
1) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	1) $\overline{LG} \cong \overline{LH}$
2) معطيات	2) $\overline{LX} \perp \overline{FG}$, $\overline{LY} \perp \overline{JH}$, $\overline{LX} \cong \overline{LY}$
3) تعريف المستقيمات المتعامدة	3) $\angle LXG$, $\angle LYH$ قائمتان
4) تطابق المثلثات	4) $\triangle XGL \cong \triangle YHL$
5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	5) $\overline{XG} \cong \overline{YH}$

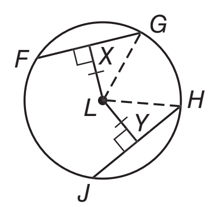
6) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$XG = YH$ (6
7) خاصية الضرب	$2(XG) = 2(YH)$ (7
8) نصف القطر العمودي على الوتر ينصف هذا الوتر	$\overline{LX}$ (8 ينصف $\overline{FG}$ ؛ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$
9) تعريف منصف القطعة المستقيمة	$FG = 2(XG), JH = 2(YH)$ (9
10) بالتعويض	$FG = JH$ (10
11) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$\overline{FG} \cong \overline{JH}$ (11

30) المعطيات: $\odot L$, $\overline{FG} \cong \overline{JH}$

$\overline{LG}$, $\overline{LH}$ أنصاف أقطار .

$\overline{LX} \perp \overline{FG}$, $\overline{LY} \perp \overline{JH}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{LX} \cong \overline{LY}$

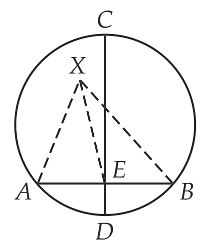


البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	$\odot L$, $\overline{FG} \cong \overline{JH}$, (1 $\overline{LG}$, $\overline{LH}$ أنصاف أقطار . $\overline{LX} \perp \overline{FG}$, $\overline{LY} \perp \overline{JH}$
2) $\overline{LX}$, $\overline{LY}$ محتواتان في نصفي قطرين، وأنصاف الأقطار التي تكون عمودية على الوتر	$\overline{LX}$ (2 تنصف $\overline{FG}$ ، $\overline{LY}$ تنصف $\overline{JH}$
3) تعريف المنصف	$XG = \frac{1}{2} FG, YH = \frac{1}{2} JH$ (3
4) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$FG = JH$ (4
5) خاصية الضرب	$\frac{1}{2} FG = \frac{1}{2} JH$ (5
6) بالتعويض	$XG = YH$ (6
7) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$\overline{XG} \cong \overline{YH}$ (7
8) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	$\overline{LG} \cong \overline{LH}$ (8
9) تعريف المستقيمات المتعامدة	$\angle GXL$ ، $\angle HYL$ (9 قائمتان
10) تطابق مثلثات	$\triangle XLG \cong \triangle YLH$ (10
11) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة	$\overline{LX} \cong \overline{LY}$ (11

34) 17.3 تقريبًا، P و Q تبعُدان مسافات متساوية عن نقطتي طرفي $\overline{AB}$ ، إذن كلاهما واقعة على المنصف العمودي للقطعة المستقيمة AB ؛ إذن $\overline{PQ}$ هي المنصف العمودي للقطعة المستقيمة AB؛ لذا طول كل جزء من القطعة المستقيمة AB يساوي 5. بما أن $\overline{PS}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$؛ فالزاوية PSA هي زاوية قائمة. إذن المثلث PSA قائم الزاوية. وبتطبيق نظرية فيثاغورس $PS = \sqrt{PA^2 - AS^2}$.وبالتعويض، $PS = \sqrt{11^2 - 5^2} = \sqrt{96}$. وبالطريقة نفسها $\triangle ASQ$ قائم الزاوية فيه $SQ = \sqrt{(AQ)^2 - (AS)^2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56}$ وبما أن $PQ = PS + SQ$ فإن $PQ = \sqrt{96} + \sqrt{56} \approx 17.3$

36) a) المعطيات: $\overline{CD}$ العمود المنصف للوتر $\overline{AB}$ في $\odot X$.

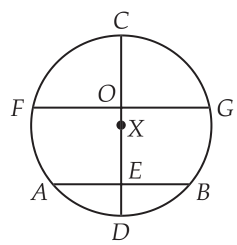


المطلوب: إثبات أن $\overline{CD}$ يحوي النقطة X.

البرهان:

أفرض أن X لا تقع على $\overline{CD}$. ارسم $\overline{XE}$ وأنصاف الأقطار $\overline{XB}$, $\overline{XA}$. بما أن $\overline{CD}$ هو المنصف العمودي لـ $\overline{AB}$ و E نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ وكذلك $\overline{XA} \cong \overline{XB}$ ؛ لأن جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة، $\overline{XE}$ ضلع مشترك؛ لذا؛ $\triangle AXE \cong \triangle BXE$. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، فإن $\angle XEA \cong \angle XEB$. وبما أن $\angle XEA$, $\angle XEB$ زاويتان متجاورتان متطابقتان تكوّنان $\angle AEB$، فإن كلًّا من $\overline{CD}$, $XE \perp \overline{AB}$ ، لكن $\overline{XE}$ أيضًا منصف عمودي على $\overline{AB}$ ، وهذا يناقض كون المنصف العمودي للقطعة المستقيمة وحيدًا؛ لذا؛ فالفرض خطأ. والمركز X يجب أن يقع على $\overline{CD}$.

b) المعطيات: في $\odot X$، X تقع على $\overline{CD}$ ، $\overline{FG}$ تنصف $\overline{CD}$ عند O.

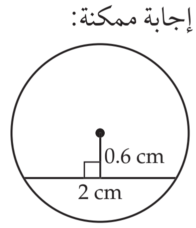


المطلوب: إثبات أن O هي النقطة X.

البرهان:

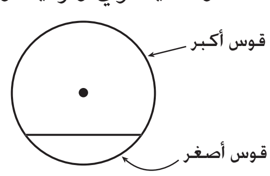
بما أن النقطة X تقع على $\overline{CD}$، C, D تقعان على $\odot X$، فإن $\overline{CD}$ قطرٌ للدائرة X. بما أن $\overline{FG}$ تنصف $\overline{CD}$ عند O، O نقطة منتصف $\overline{CD}$. وبما أن نقطة منتصف القطر هي مركز الدائرة، فإن O هي مركز الدائرة. لذلك فالنقطة O هي النقطة X.

37) إجابة ممكنة:



نصف القطر 1.2 cm تقريبًا

38) لا؛ إجابة ممكنة: في دائرة نصف قطرها 12 ، القوس الذي قياسه 60° يحتوي وترًا طوله 12. إذا أصبح القوس ثلاثة أمثال الأصلي أي أصبح 180°، وهذا يحتوي وترًا يساوي 24، وهذا لا يساوي ثلاثة أمثال 12.



الدرس: 4 - 2 ص 117, 118

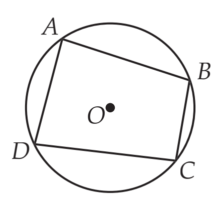
21) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	$m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$ (1
2) خاصية الضرب	$m\angle S = 2m\angle T$ (2
3) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود.	$m\angle S = \frac{1}{2} m\widehat{TUR}$, (3 $m\angle T = \frac{1}{2} m\widehat{URS}$
4) بالتعويض	$\frac{1}{2} m\widehat{TUR} = 2\left(\frac{1}{2} m\widehat{URS}\right)$(4
5) خاصية الضرب	$m\widehat{TUR} = 2m\widehat{URS}$ (5

22) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	$\odot C$ (1
2) الزوايا المحيطية التي تحد القوس نفسه متطابقة	$\angle H \cong \angle L$ (2
3) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان	$\angle KML \cong \angle JM$ (3
4) تشابه مثلثات	$\triangle KML \sim \triangle JMH$ (4

27) المعطيات: الرباعي $ABCD$ محاط بالدائرة O.



المطلوب: إثبات أن $\angle C$, $\angle A$ متكاملتان.
وأن $\angle B$ ، $\angle D$ زاويتان متكاملتان.

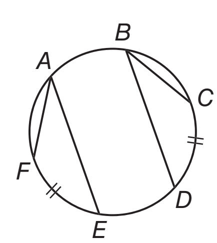
البرهان: بتطبيق مسلمة جمع الأقواس
وتعريف قياس القوس ومجموع الزوايا
المركزية، يكون $m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB} = 360^\circ$

وبما أن $m\angle C = \frac{1}{2} m\widehat{DAB}$ ، $m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{DCB}$ فإن

$m\angle C + m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB})$,
ولكن $m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB} = 360^\circ$

إذن. $m\angle C + m\angle A = \frac{1}{2}(360^\circ) = 180^\circ$
وهذا يثبت أن $\angle C$ ، $\angle A$ زاويتان متكاملتان. ولأن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي يساوي 360° فإن
$m\angle A + m\angle C + m\angle B + m\angle D = 360^\circ$
ولكن، $m\angle A + m\angle C = 180$. إذن، $m\angle B + m\angle D = 180$ وهذا يثبت أن هاتين الزاويتين متكاملتان أيضًا.

35) المعطيات: $\angle FAE$ ، $\angle CBD$



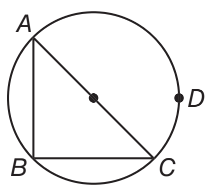
زاويتان محيطيتان، $\widehat{EF} \cong \widehat{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\angle FAE \cong \angle CBD$

البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\angle FAE$ و $\angle CBD$ محيطيتان، $\widehat{EF} \cong \widehat{DC}$
2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود	$m\angle FAE = \frac{1}{2} m\widehat{EF}$ (2 $m\angle CBD = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$
3) تعريف الأقواس المتطابقة	$m\widehat{EF} = m\widehat{DC}$ (3
4) خاصية الضرب	$\frac{1}{2} m\widehat{EF} = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$ (4
5) بالتعويض	$m\angle FAE = m\angle CBD$ (5
6) تعريف الزوايا المتطابقة	$\angle FAE \cong \angle CBD$ (6

36) المعطيات: $\widehat{ADC}$ نصف دائرة.



المطلوب: إثبات أن $\angle ABC$ قائمة.

البرهان: $\widehat{ADC}$ نصف دائرة ،
$m\widehat{ADC} = 180^\circ$ ، $\angle ABC$ محيطية،
$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{ADC} = 90$
وهذا يعني أن $\angle ABC$ قائمة.

الجزء II : المعطيات: $\angle ABC$ قائمة.

المطلوب: إثبات أن $\widehat{ADC}$ نصف دائرة.

البرهان: بما أن $m\angle ABC = 90^\circ$ ، فإن قياس القوس المحدود بها يساوي 180°. وبما أن قياس القوس المقابل يساوي 180° فهو نصف دائرة.

38) صحيحة دائمًا، المربع تكون جميع زواياه قوائم عند رؤوسه. إذن الزوايا المتقابلة سوف تكون محيطية مرسومة في نصف دائرة.

39) صحيحة دائمًا، المستطيل له زوايا قائمة عند رؤوسه إذن الزوايا المتقابلة سوف تكون محيطية مرسومة في نصف دائرة.

40) صحيحة أحيانًا يمكن أن يكون متوازي الأضلاع محاطًا بدائرة، إذا كان مستطيلاً.

41) صحيحة أحيانًا، يمكن أن يكون المعيّن محاطًا بدائرة، إذا كان مربعًا. بما أن الزوايا المتقابلة في المعين الذي لا يكون مربعًا ليست متكاملة، إذن لا يمكن أن يحاط هذا المعين بدائرة.

42) صحيحة أحيانًا في حالة كون الزوايا المتقابلة متكاملة.

44) المثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ يُحاط بدائرة يكون فيها قوسين أصغرين متساويين كل منهما يساوي 90° والآخر نصف دائرة من نظرية 2.7 . الزاوية المحيطية للمثلث تقابل قطرًا في الدائرة إذا كانت زاوية قائمة. إذن وتر المثلث القائم الزاوية يساوي قطر الدائرة. وباستعمال المثلثات، طول ضلع المثلث يساوي $\sin 45^\circ \cdot 2r = \sqrt{2}r$.

46) الزاوية المحيطية يقع رأسها على الدائرة. أما الزاوية المركزية فيقع رأسها على مركز الدائرة. وإذا كانت الزاوية المحيطية والزاوية المركزية تحدان القوس نفسه، فإن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية.

الدرس 5-2 ص 126, 127

28) البرهان:

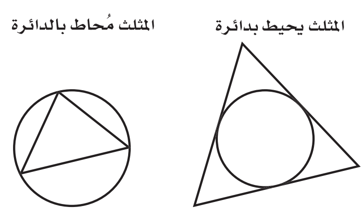
المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overline{AC}$ مماس للدائرة H عند C، $\overline{AC}$ مماس للدائرة H عند B.
2) يمر مستقيم واحد خلال نقطتين	2) ارسم $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$
3) مماس الدائرة يكون عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس	3) $\overline{AC} \perp \overline{CH}, \overline{AB} \perp \overline{BH}$
4) تعريف المستقيمات المتعامدة	4) $\angle ABH$ ، $\angle ACH$ قائمتان
5) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة	5) $\overline{CH} \cong \overline{BH}$
6) ضلع مشترك	6) $\overline{AH}$
7) تطابق مثلثات	7) $\triangle ACH \cong \triangle ABH$
8) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة	8) $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

29) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) الرباعي $ABCD$ يحيط $\odot P$
2) تعريف المضلع الذي يحيط بدائرة	2) الأضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ مماسات لـ $\odot P$ عند النقاط H, G, F, E على الترتيب.
3) القطعتان المستقيمتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها متطابقتان	3) $\overline{EA} \cong \overline{AH}, \overline{HB} \cong \overline{BG},$ $\overline{GC} \cong \overline{CF}, \overline{FD} \cong \overline{DE}$
4) مسلمة جمع القطع المستقيمة	4) $AB = AH + HB, BC = BG + GC,$ $CD = CF + FD, DA = DE + EA$
5) بالتعويض	5) $AB + CD = AH + HB + CF + FD;$ $DA + BC = DE + EA + BG + GC$
6) بالتعويض	6) $AB + CD = AH + BG + GC + FD;$ $DA + BC = FD + AH + BG + GC$
7) خاصية الابدال للجمع	7) $AB + CD = FD + AH + BG + GC$
8) بالتعويض	8) $AB + CD = DA + BC$

36) أولاً، تُرسم الدائرة C بواسطة الفرجار وتُعين نقطة A خارجها ثم ترسم القطعة المستقيمة CA ، يوجد مستقيم واحد بين A , C. بعد ذلك، نقوم بإنشاء المستقيم ℓ المنصف العمودي للقطعة المستقيمة CA . ومن تعريف المنصف العمودي. فإن المستقيم ℓ يمر بالضبط في منتصف المسافة بين A ، C . ثم تُرسم دائرة ثانية X، بنصف قطر $\overline{XC}$ تتقاطع مع الدائرة C في النقطتين D , E. تتقاطع الدائرتان في نقطتين على الأكثر. ثم يُرسم المستقيمان $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{DC}$ ، $\triangle ADC$ مرسوم داخل نصف الدائرة. فتكون $\angle ADC$ قائمة، و يكون $\overleftrightarrow{AD}$ مماسًا للدائرة C. $\overleftrightarrow{AD}$ مماس للدائرة C عند النقطة D ؛ لأنه يقطعها في نقطة واحدة بالضبط.

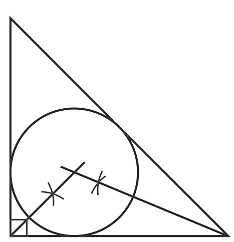
37) إجابة ممكنة:



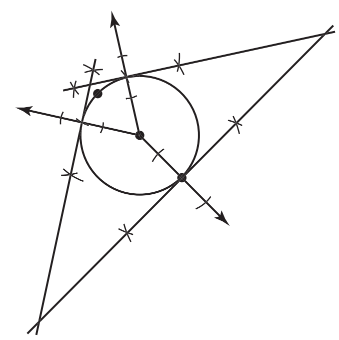
39) من نقطة خارج الدائرة، يمكن رسم مماسين. أما من نقطة على الدائرة فيمكن رسم مماس واحد فقط. بينما من نقطة داخل الدائرة لا يمكن رسم أي مماس؛ لأن المستقيم المار داخل الدائرة يقطعها في نقطتين.

توسّع 5-2 ص 129

2) إجابة ممكنة:



3) إجابة ممكنة:



إجابة ممكنة: لقد رسمت دائرة واخترت نقطة عليها، وبفتحة فرجار أقل من تلك التي رُسمت بها الدائرة، رَسمتَ قوسًا على كل من جهتي النقطة، ثم اخترت نقطة على الجهة الثانية من الدائرة، ورسمت أشعة من المركز مارة بالنقاط الثلاث، ثم أنشأت مستقيمات تعامد هذه الأشعة من النقاط الثلاث لتكوين المثلث المنفرج الزاوية.

الدرس 6-2 ص 136

30) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة
2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تحدده	2) $m\angle DCE = \frac{1}{2}m\widehat{DE}$, $m\angle ADC = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$
3) نظرية الزاوية الخارجية	3) $m\angle DCE = m\angle ADC + m\angle A$
4) بالتعويض	4) $\frac{1}{2}m\widehat{DE} = \frac{1}{2}m\widehat{BC} + m\angle A$
5) خاصية الطرح	5) $\frac{1}{2}m\widehat{DE} - \frac{1}{2}m\widehat{BC} = m\angle A$
6) خاصية التوزيع	6) $\frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC}) = m\angle A$

31) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overline{FM}$ مماس للدائرة و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها
2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحدود بها	2) $m\angle FLH = \frac{1}{2}m\widehat{HG}$, $m\angle LHM = \frac{1}{2}m\widehat{LH}$
3) نظرية الزاوية الخارجية	3) $m\angle LHM = m\angle FLH + m\angle F$
4) بالتعويض	4) $\frac{1}{2}m\widehat{LH} = \frac{1}{2}m\widehat{HG} + m\angle F$
5) خاصية الطرح	5) $\frac{1}{2}m\widehat{LH} - \frac{1}{2}m\widehat{HG} = m\angle F$
6) خاصية التوزيع	6) $\frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{HG}) = m\angle F$

32) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RV}$ مماسان للدائرة
2) قياس الزاوية بين المماس والقاطع يساوي نصف قياس القوس المحدود	2) $m\angle STV = \frac{1}{2}m\widehat{SWT}$, $m\angle RST = \frac{1}{2}m\widehat{ST}$
3) نظرية الزاوية الخارجية	3) $m\angle STV = m\angle RST + m\angle R$
4) بالتعويض	4) $\frac{1}{2}m\widehat{SWT} = \frac{1}{2}m\widehat{ST} + m\angle R$
5) خاصية الطرح	5) $\frac{1}{2}m\widehat{SWT} - \frac{1}{2}m\widehat{ST} = m\angle R$
6) خاصية التوزيع	6) $\frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\widehat{ST}) = m\angle R$

الدرس 7-2 ص 144

21) البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overline{AC}, \overline{DE}$ وتران يتقاطعان في B
2) الزوايا المحيطية التي تحد القوس نفسه تكون متطابقة	2) $\angle A \cong \angle D, \angle E \cong \angle C$
3) تشابه المثلثات	3) $\triangle ABE \sim \triangle DBC$
4) تعريف تشابه المثلثات	4) $\frac{AB}{BD} = \frac{EB}{BC}$
5) الضرب التبادلي	5) $AB \cdot BC = EB \cdot BD$

25) إجابة ممكنة: عندما يتقاطع قاطعان في نقطة خارج الدائرة، فإن حاصل ضرب القطعة الخارجية بالقطعة كاملةً للقاطع الأول يساوي حاصل ضرب القطعة الخارجية بالقطعة كاملة للقاطع الثاني. وعندما يتقاطع قاطع مع مماس، فإن حاصل الضرب المتعلق بالمماس يصبح $(\text{قياس قطعة المماس})^2$؛ لأن القطعة الخارجية والقطعة كاملةً في حالة المماس متطابقتان.

26) $b = c$

$$a^2 = b(b + c)$$

$$a^2 = b(b + b)$$

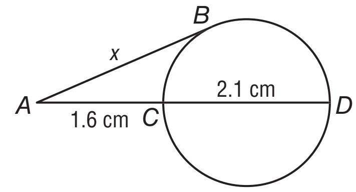
$$a^2 = b(2b)$$

$$a^2 = 2b^2$$

$$a = \pm\sqrt{2b^2}$$

$a = \sqrt{2}b$ لا يكون طول القطع المستقيمة سالباً.

28) إجابة ممكنة:

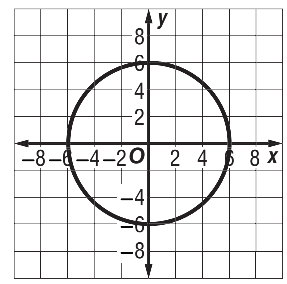


$x \approx 2.4$ cm

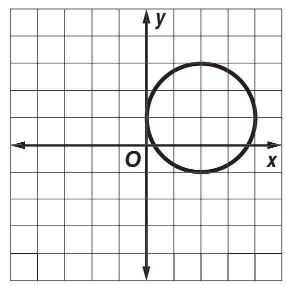
29) إجابة ممكنة: حاصل ضرب طولي جزأي أحد الوترين المتقاطعين، يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأخر.

الدرس 8-2 ص 150 , 149

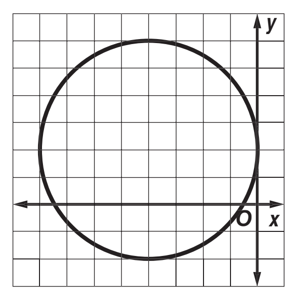
18) $(0, 0), 6$



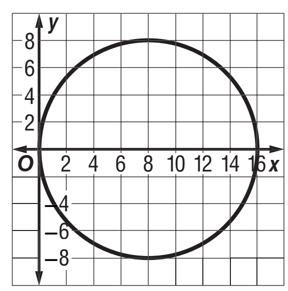
19) $(2, 1), 2$



20) $(-4, 2), 4$

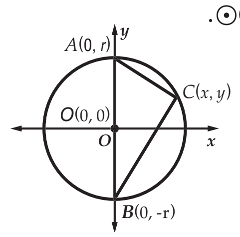


21) $(8, 0), 8$



32) المعطيات: $\overline{AB}$ قطر في $\odot O$ ، C نقطة على $\odot O$.

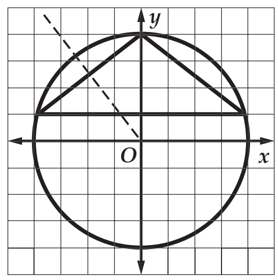
المطلوب: إثبات أن $\angle ABC$ قائمة.



البرهان:

المبررات	العبارات
1) ميل $\overline{AC}$	$\frac{y-r}{x}$ (1
2) ميل $\overline{CB}$	$\frac{y-(-r)}{x} = \frac{y+r}{x}$ (2
3) بالضرب	$\frac{y-r}{x} \cdot \frac{y+r}{x} = \frac{y^2-r^2}{x^2}$ (3
$r^2 = x^2 + y^2$ (4	$= \frac{y^2-(x^2+y^2)}{x^2}$ (4
$-(x^2+y^2) = -x^2 - y^2$ (5	$= \frac{y^2-x^2-y^2}{x^2}$ (5
6) بالتبسيط	$= \frac{-x^2}{x^2} = -1$ (6
7) حاصل ضرب ميلي $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ يساوي -1	$\overline{AC} \perp \overline{CB}$ (7
8) تعريف المستقيمات المتعامدة	$\angle ACB$ قائمة (8

34) إجابة ممكنة:



الفصل 3

مخطط الفصل

	الدرس 3-1 حصة ونصف	الدرس 3-2 حصتان ونصف
	التقويم التشخيصي اختبار سريع، ص (529)	
العنوان	**خصائص الأعداد الحقيقية**	**حَلّ معادلات القيمة المطلقة**
الأهداف	• تصنيف الأعداد الحقيقية. • استعمال خصائص الأعداد الحقيقية؛ لحساب قيم التعابير الجبرية.	• حساب تعابير تحتوي قيمًا مطلقة. • حَلّ معادلات القيم المطلقة.
المفردات الأساسية	الأعداد الحقيقية الأعداد النسبية الأعداد غير النسبية الأعداد الصحيحة الأعداد الكلية الأعداد الطبيعية	القيمة المطلقة المجموعة الخالية الحَلّ المرفوض
تمثيلات متعددة	ص (166)	ص (172)
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (19) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الجداول الإلكترونية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية	السبورة التفاعلية
تنويع التعليم	ص (163, 164, 167)	ص (170 ,173)
		التقويم التكويني اختبار منتصف الفصل ص (174)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المعادلات والمتباينات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(10.5) حصة	(2.5) حصة	(13) حصة

الدرس 3-3 حصتان ونصف	استكشاف 3-4 حصة	الدرس 3-4 ثلاث حصص
حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد	**معمل الجبر: رمز الفترة**	**حَلّ المتباينات المركبة ومتباينات القيمة المطلقة**
• حَلّ متباينات بخطوة واحدة. • حَلّ متباينات بعدة خطوات.	• استعمال رمز الفترة لوصف مجموعات من الأعداد.	• حَلّ متباينات مركبة. • حَلّ متباينات القيمة المطلقة.
الصفة المميزة للمجموعة		المتباينة المركبة التقاطع الاتحاد
ص (180)		
مصادر الفصل 3 • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (20) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر إضافية** • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (21) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن
مدونة		الكاميرا التوثيقية
ص (177, 181)		ص (184 , 186)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (190-192)
- اختبار الفصل ص (193)

الفصل 3

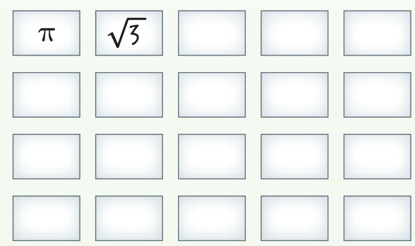
التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 3**	**المرجع**		**المرجع**
	التهيئة للفصل الثالث، ص (161)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (161)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	تنبيه!	دليل المعلم	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل ص (174)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 3، ص (190-192)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (193)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري تراكمي، ص (196 , 197)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 3**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

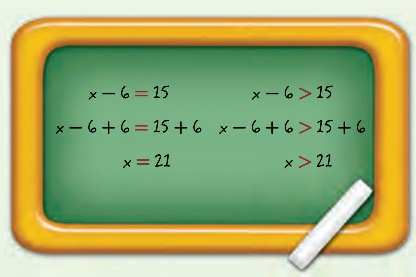
الطلبة الحركيون قسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، واطلب إلى كل مجموعة عمل بطاقات مرقمة تحمل كل منها عددًا حقيقيًّا، بحيث يكون هناك أربع بطاقات لكل نوع من أنواع الأعداد الحقيقية (نسبي، غير نسبي، صحيح، طبيعي، كلّي). يضع الطلبة البطاقات مقلوبة. يختار أحد طلبة المجموعة بطاقتين، فإن كانت البطاقتان تحملان عددين من النوع نفسه، فيتم استبعادهما من مجموعة البطاقات، وإن لم تكونا كذلك تعادان مكانهما. يتبادل طلبة المجموعة الأدوار.



المتعلمون الفرديون قسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية أو مجموعات صغيرة، وحدّد لكل مجموعة متباينة مثل المتباينات الواردة في التمارين 21 – 10 صفحة 179 واطلب إليهم حلّها. ذكِّر الطلبة بإمكانهم استعمال المفهوم الأساسي في الصفحتين 175 و 176، وناقشهم في أي الخصائص هي الأفضل لحَلِّ كل متباينة. تأكد من مشاركة كل طلبة المجموعة في النقاش.

البديل 2 دون المتوسط دون

اكتب المعادلة $x - 6 = 15$ على السبورة. راجع خاصيتي الجمع والطرح للمساواة خلال حَلّ المعادلة، ثم قم بمسح جميع رموز المساواة واستبدلها بالرمز $>$.



ناقش أوجة الشبه، ثم أعد الخطوات نفسها مستعملًا الرمز $<$.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى مجموعات من الطلبة كتابة خطوات حَلّ المتباينات المختلفة، على أن تتضمَّن الخطوات بيان متى يجب أن يقلب رمز المتباينة، وكيف يمكن تحديد ما إذا كان تمثيل مجموعة الحَلّ على خط الأعداد يبدأ بدائرة مظللة أو غير مظللة.

الفصل 3

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال الرموز للتعبير عن القيم المجهولة والمتغيرات.
- استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط التعابير الجبرية.
- كتابة معادلات ومتباينات خطية تُمثّل مسائل مختلفة، ثم حلها.

الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال خصائص الأعداد الحقيقية؛ لإيجاد قيم التعابير والصيغ.
- تصنيف الأعداد الحقيقية.
- استعمال خصائص المساواة؛ لحَلّ المعادلات.
- حَلّ معادلات القيمة المطلقة.
- حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد، والمتباينات المركبة، ومتباينات القيمة المطلقة.

مابعد الفصل 3

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- تعريف الدوال، وصف خواص الدوال، وترجمة الجمل اللفظية، والعددية، والبيانية، والتعابير الرمزية للدوال.

نظرة على الدروس

3-1 خصائص الأعداد الحقيقية

يرتبط كل عدد حقيقي بنقطة واحدة فقط على خط الأعداد ، وتُمثّل كل نقطة على خط الأعداد عددًا حقيقيًّا واحدًا فقط. وتصنّف الأعداد الحقيقية بوصفها أعدادًا نسبية، أو غير نسبية. ويمكن التعبير عن العدد النسبي بصورة نسبة $\frac{m}{n}$، حيث m و n عددان صحيحان و n لا يساوي الصفر. وكل عدد حقيقي لا يمكن كتابته بهذه الصورة يكون عددًا غير نسبي.

وتستعمل خصائص الأعداد الحقيقية في تبرير الخطوات المستعملة في حَلّ المعادلات ووصف العلاقات الرياضية.

وتتضمن خصائص الأعداد الحقيقية ما يأتي:

- الخصائص الابدالية للجمع والضرب.
- الخصائص التجميعية للجمع والضرب.
- خاصية التوزيع.

تتضمن مجموعة الأعداد الحقيقية العنصرين المحايدين لعمليتي الجمع والضرب، والنظير الجمعي لكل عدد حقيقي، والنظير الضربي لكل عدد حقيقي ما عدا الصفر.

3-2 حَلّ معادلات القيمة المطلقة

القيمة المطلقة لعدد عبارة عن بعده عن الصفر على خط الأعداد. وتشبه رموز القيمة المطلقة رموز الأقواس. فمثلًا، لإيجاد قيمة التعبير $|15 - 31| \cdot 2$، يجب حساب ما بداخل رموز القيمة المطلقة أولًا.

$$2 \cdot |15 - 31| = 2 \cdot |-16|$$
$$= 2 \cdot (16)$$
$$= 32$$

ويمكن تفسير المعادلة $|a - 6| = 4$ على أنها المسافة بين العدد a والعدد 6 التي تساوي 4 وحدات. فالقيمة $a - 6$ تساوي 4، أو -4 . ولهذا، كان $a - 6 = 4$، فإن $a = 10$. وإذا كان $a - 6 = -4$، فإن $a = 2$. الحلان هما $2, 10$. المعادلة مثل $|x| = -2$ ليست صحيحة أبدًا، لذا ليس لها حَلّ.

المعادلات والمتباينات

3-3 حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد

تُسمى الجملة المفتوحة التي تتضمن الرموز $\ge, >, \le, <$ متباينة، لأي عددين حقيقين a,b تكون واحدة من العبارات الآتية صحيحة: $a<b, a=b, a>b$. حَلّ متباينة يتضمن استعمال خصائص المتباينات لكتابة سلسلة من المتباينات المتكافئة، تنتهي بواحدة تعزل المتغيّر. وتتضمن هذه الخصائص ما يأتي:

- خاصية الجمع للمتباينة.
- خاصية الطرح للمتباينة.
- خاصية الضرب للمتباينة.
- خاصية القسمة للمتباينة.

وبشكل عام، فإن إضافة العدد نفسه أو طرحه من كل طرف للمتباينة، أو ضرب كل طرف في عدد موجب، أو قسمته على عدد موجب لا يغير صحة المتباينة. ولكن ضرب متباينة في عدد سالب، أو قسمتها على عدد سالب يعكس اتجاه رمز المتباينة.

يوجد عدد غير منته من الحلول للمتباينة. ويمكن التعبير عنها بأكثر من طريقة:

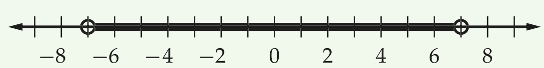
- **التمثيل على خط الأعداد** عند تمثيل حَلّ المتباينة على خط الأعداد فإنك تستعمل دائرة غير مظللة لتدل على وجود قيمة غير متضمنة في الحلّ، بينما تدل الدائرة المظللة على قيمة متضمنة في الحلّ. وتستعمل الدوائر غير المظللة في حالة استعمال الرموز $<, >$، بينما تستعمل الدوائر المظللة في حالة استعمال $\ge, \le$.
- **الصفة المميزة للمجموعة** يمكن كتابة حلول المتباينات باستعمال الصفة المميزة للمجموعة. فمثلًا، يمكن كتابة الحَلّ مثل $x \ge 4$ على الصورة $\{x \mid x \ge 4\}$ ، وتقرأ مجموعة قيم x بحيث إن x أكبر أو تساوي 4 .

3-4 حَلّ المتباينات المركبة ومتباينات القيمة المطلقة

تسمّى المتباينة التي تتكوّن من متباينتين مرتبطتين بأداة الربط (و)، أو بأداة الربط (أو) متباينة مركبة. ولحَلّ المتباينة المركبة، يجب حَلّ كل متباينة فيها على حِدَة.

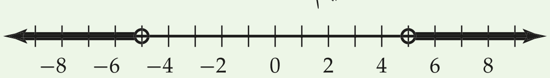
- تُمثّل مجموعة الحَلّ للمتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و) على خط الأعداد تقاطع مجموعتي الحَلّ للمتباينتين المُكونّتين لها.
- تُمثّل مجموعة الحَلّ للمتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (أو) على خط الأعداد اتحاد مجموعتي الحل للمتباينتين المُكوّنتين لها.
- توجد ارتباطات مهمة بين المتباينات المركبة، ومتباينات القيمة المطلقة.
- ترتبط متباينة القيمة المطلقة المتضمنة $<$ أو $\le$ بالمتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و). فمثلًا، التفكير في $|a| < 7$ مثل $|a - 0| < 7$ ، إذن تكون قيمة a أيّ عدد يكون بُعده عن الصفر أقل من 7 وحدات.

القيم الممكنة لـ a



- ترتبط متباينة القيمة المطلقة المتضمنة $>$ أو $\ge$ بالمتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (أو). فمثلًا، التفكير في $|b| > 5$ مثل $|b - 0| > 5$ ، إذنْ تكون قيمة b أيّ عدد يكون بُعده عن الصفر أكبر من 5 وحدات.

القيم الممكنة لـ b



مشروع الفصل

القوة الشرائية

يستعمل الطلبة ما تعلموه عن المعادلات والمتباينات، في مشترياتهم ومعاملاتهم المالية.

- يقدم معرض لبيع السيارات عرضًا لتخفيض 15٪ من قيمة كل سيارة.
- اطلب إلى كل طالب تحديد السيارة التي يرغب في شرائها عند زمن معين في المستقبل.
- اطلب إلى كل منهم البحث عن اسعار بيع السيارة التي اختارها دون خصم، و كذلك تعيين المدى P للأسعار المتاحة من الأدنى إلى الأعلى، ثم كتابة متباينة مركبة تُمثّل مدى السعر.
- اطلب إلى كل منهم بعد ذلك، إضافة الخصم إلى مدى الأسعار، وكتابة المتباينة المعدلة للمدى الفعلي للأسعار.
- في النهاية، اطلب إلى كل منهم، تحديد المبلغ الذي يدخره كل أسبوع من مصادر مختلفة ، ثم كتابة وحَلّ معادلة فيها المتغير N هو عدد الأسابيع التي تمكنه من توفير المبلغ الكافي لشراء السيارة التي يريد شرائها، باستعمال كلا السعرين الأعلى والأدنى.

المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: القيمة المطلقة لعدد هي المسافة بينه وبين الصفر على خط الأعداد، ويرمز لها بالرمز $|x|$.

مثال: $|-7| = 7$

سؤال: هل يمكن أن تكون القيمة المطلقة لعدد سالبة ؟ فسر إجابتك. لا؛ لأن المسافة دائمًا غير سالبة.

الفصل 3 المعادلات والمتباينات
Equations and Inequalities

فيما سبق

درستُ تعابير جبرية في متغيرات.

والآن

الأفكار العامة

- أحُلّ معادلات القيمة المطلقة.
- أحُلّ المتباينات وأمثّلها على خط الأعداد.

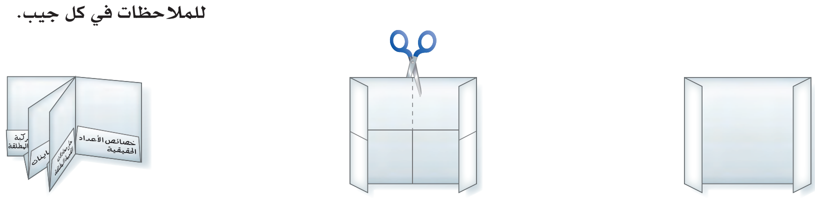
لماذا؟

مال يُعدُّ ربط المال بالرياضيات أحد أكثر المهارات التدريبية التي يمكن أن تتعلمها. وطالما أنك تستعمل المال، فإنك سوف تستعمل الرياضيات، وستكتشف في هذا الفصل مواضيع مالية، مثل معاملات البيع والشراء والضرائب، والدخل ، وميزانية الأسرة.

مطوياتك منظم أفكار

المعادلات والمتباينات: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الثالث حول المعادلات والمتباينات. ابدأ بورقة واحدة بعداها "11 in × 17 in".

1. **اطوِ الورقة** بعرض 2 in من كلا الجانبين القصيرين.
2. **اطوِ الورقة** إلى نصفين طوليًا وعرضيًا. ثم افتحها وقصّها كما في الشكل أدناه.
3. **أعد الطيّ** عرضيًا كما في الشكل أدناه. وثبّت الجيوب، ثم عنونها بعناوين دروس الفصل، وضع بطاقات مرقّمة للملاحظات في كل جيب.



مطوياتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة ملاحظاتهم أثناء دراستهم للمعادلات والمتباينات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل؛ لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

CRM **مسرد مفردات الطالب**

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضاً للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومُخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	**ضمن المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
دليل المعلم	مشروع الفصل ص (160)
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من التمارين،
فقم	بزيارة الموقع www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كل مقدار مما يأتي: (مهارة سابقة)

1) $15.7 + (-3.45)$ **12.25**

2) $-18.54 - (-32.05)$ **13.51**

3) -9.8×6.75 **-66.15**

4) $4 \div (-0.5)$ **-8**

5) $3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$ **$1\frac{13}{15}$**

6) $\frac{54}{7} - \frac{26}{6}$ **$3\frac{8}{21}$**

7) $\left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)$ **$-1\frac{1}{3}$**

8) $-3 \div \frac{7}{8}$ **$-3\frac{3}{7}$**

9) **حرف يدوية:** تحتاج نجلاء إلى $\frac{7}{8}$ yd من القماش؛ لعمل غطاء وسادة، ما كمية القماش التي تحتاج إليها لعمل 12 غطاءً ؟ (مهارة سابقة) **$10\frac{1}{2}$ yd**

احسب كل قوة مما يأتي: (مهارة سابقة)

10) 6^3 **216**

11) $(-4)^3$ **-64**

12) $-(0.6)^2$ **-0.36**

13) $-(-2.5)^3$ **15.625**

14) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ **$\frac{16}{25}$**

15) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$ **$\frac{2401}{81}$**

16) $\left(-\frac{7}{10}\right)^2$ **$\frac{49}{100}$**

17) $\left(-\frac{15}{2}\right)^3$ **$-\frac{3375}{8}$**

18) **طعام:** يستعمل في مطعم للشطائر 3 أنواع من الخبز، و3 أنواع من اللحم، و3 أنواع من الجبن. فكم نوعًا مختلفًا من الشطائر يمكن عملها على أن تحتوي كل شطيرة نوعًا واحدًا فقط من الخبز و اللحم و الجبن ؟ (مهارة سابقة) **$3^3 = 27$**

حدّد ما إذا كانت العبارة صحيحة أو خاطئة في كل ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

19) $-7 \geq -6$ **صحيحة**

20) $8 > -5$ **صحيحة**

21) $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{9}$ **خاطئة**

22) $\frac{5}{6} \leq \frac{25}{30}$ **صحيحة**

23) **قياس:** لدى سعيد لوح خشبيّ طوله 0.6 m، وآخر طوله $\frac{2}{3}$ m. قال سعيد: $\frac{2}{3} < 0.6$، هل قوله صحيح؟ **نعم**

مراجعة سريعة

مثال 1

بسط $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$.

بضرب البسط في البسط والمقام في المقام: $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3(4)}{16(5)}$

بالتبسيط: $= -\frac{12}{80}$

بقسمة البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر (ع. م. أ) ويساوي 4: $= -\frac{12 \div 4}{80 \div 4}$

بالتبسيط: $= -\frac{3}{20}$

مثال 2

احسب قيمة $(-1.5)^3$.

$(-1.5)^3$ تعني أن -1.5 مضروبة في نفسها 3 مرات: $(-1.5)^3 = (-1.5)(-1.5)(-1.5)$

بالتبسيط: $= -3.375$

مثال 3

حدّد ما إذا كانت العبارة $\frac{12}{24} > \frac{3}{8}$ صحيحة ، أو خاطئة.

بقسمة كل من البسط والمقام على 3 لتحصل على العدد 8 في المقام: $\frac{12 \div 3}{24 \div 3} \overset{?}{>} \frac{3}{8}$

بالتبسيط: $\frac{4}{8} \ngtr \frac{3}{8}$

$\frac{4}{8} \ngtr \frac{3}{8}$ ؛ لأن $\frac{3}{8} < \frac{4}{8}$ ، إذن فالعبارة خاطئة.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

3-1 خصائص الأعداد الحقيقية
Properties of Real Numbers

فيما سبق
درستُ خصائص الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أصنف الأعداد الحقيقية.
- أستعمل خصائص الأعداد الحقيقية؛ لحساب قيم التعابير الجبرية.

المفردات الأساسية
- الأعداد الحقيقية real numbers
- الأعداد النسبية rational numbers
- الأعداد غير النسبية irrational numbers
- الأعداد الصحيحة integers
- الأعداد الكلية whole numbers
- الأعداد الطبيعية natural numbers

www.obeikaneducation.com

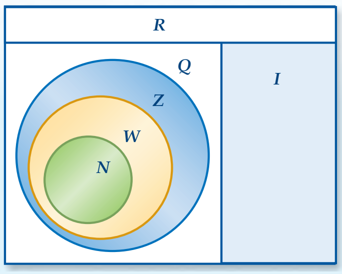
لماذا؟
يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أصناف بالسعر نفسه. حيث إنّ شراء عدة أصناف لكل منها السعر نفسه، يسهّل إيجاد المبلغ الكلي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

الأعداد الحقيقية تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد.

- **الأعداد النسبية** هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a وَ b عددان صحيحان، والعدد b لا يساوي صفرًا. وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عددًا عشريًّا منتهيًا، أو دوريًّا.
- الصورة العشرية **للعدد غير النسبي** ليست منتهية، وليست دورية. الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد غير نسبية.
- مجموعة **الأعداد الصحيحة** هي $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ، و مجموعة **الأعداد الكلية** هي $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ، ومجموعة **الأعداد الطبيعية** هي $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ، وكل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ وذلك لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$.

مفهوم أساسي — الأعداد الحقيقية (R)
أضف إلى مطويتك

المجموعة	أمثلة	الرمز
الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\dots$	Q
الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159\dots$ $\sqrt{3} = 1.73205\dots$	I
الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$	Z
الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$	W
الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$	N



مثال 1 تصنيف الأعداد
سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي:

a) -23 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z) ، ومجموعة الأعداد النسبية(Q) ، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R) .

b) $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I) ، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R) .

c) $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q) ، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R) .

تأكد

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1A) -185 Z, Q, R   1B) $-\sqrt{49}$ Z, Q, R   1C) $\sqrt{95}$ I, R   1D) $-\frac{7}{8}$ Q, R

3-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي
ما قبل الدرس 3-1

استعمال خصائص الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها.

ضمن الدرس 3-1

تصنف الأعداد الحقيقية.

استعمال خصائص الأعداد الحقيقية؛ لحساب قيم تعابير جبرية.

ما بعد الدرس 3-1

استعمال خصائص الأعداد الحقيقية؛ لحل معادلات ومتباينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- كم سعر كل صنف؟ BD3
- كم سعر الأصناف الثلاثة معًا؟ BD9
- اكتب تعبيرًا باستعمال الخاصية التوزيعية، يمكن استعماله لحساب سعر كُرتَي سلة، وكرة قدم. $2(3) + 3 = 3(3)$

الأعداد الحقيقية
مثال 1 يُبيِّن كيفية تصنيف الأعداد.

مصادر الدرس 3-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (164)	• تنويع التعليم، ص (163,164, 167)	• تنويع التعليم، ص (163 ,167)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

إرشادات للدراسة

الأعداد الحقيقية يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد، فمثلًا، يُعدّ أي عدد طبيعي عددًا كليًا، وصحيحًا، ونسبيًا، وحقيقيًا.

خصائص الأعداد الحقيقية يلخص الجدول أدناه بعض خصائص الأعداد الحقيقية.

ملخص المفهوم — **خصائص الأعداد الحقيقية** — أضف إلى مطويتك

لأي أعداد حقيقية a, b, c:

الخاصية	الجمع	الضرب
الإبدالية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a,\ a \neq 0$
الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي	$a \cdot b$ عدد حقيقي
التوزيعية	$(b + c)a = ba + ca$ و $a(b + c) = ab + ac$	

مثال 2 **تسمية خصائص الأعداد الحقيقية**

سمّ الخاصية في $5 \cdot (4 \cdot 13) = (5 \cdot 4) \cdot 13$.

الخاصية التجميعية لعملية الضرب.

وتنص الخاصية التجميعية لعملية الضرب على أن حاصل الضرب لا يتأثر بالطريقة التي يتم بها تجميع العوامل.

تأكد

2) سمّ الخاصية في $2(x + 3) = 2x + 6$. الخاصية التوزيعية

يمكن استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتسهيل إيجاد قيم التعابير.

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي والنظير الضربي إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد، أمّا إشارة النظير الضربي لعدد، فهي إشارة ذلك العدد نفسها.

مثال 3 **النظير الجمعي و النظير الضربي**

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$.

بما أن، $-\frac{5}{8} + \frac{5}{8} = 0$، فإن النظير الجمعي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $\frac{5}{8}$.

وبما أن، $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) = 1$، فإن النظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $-\frac{8}{5}$.

تأكد

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد ممّا يأتي:

3A) 1.25 -1.25، 0.8

3B) $2\frac{1}{2}$ $-2\frac{1}{2}$، $\frac{2}{5}$

تتطلب الكثير من التطبيقات الحياتية التعامل مع الأعداد الحقيقية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

خصائص الأعداد الحقيقية

مثال 2 يُبيّن كيفية تحديد خصائص الأعداد الحقيقية.

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد النظير الجمعي والنظير الضربي للأعداد الحقيقية.

مثال إضافي

1 سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلُّ عدد مما يأتي:

a) $\sqrt{6}$ I, R

b) 5   N, W, Z, Q, R

c) $-\frac{2}{3}$ Q, R

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية ارسم شكل ڤن على السبورة التفاعلية مبيِّنًا كيفية تقسيم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى أعداد نسبية، وغير نسبية، وصحيحة، وكلية، وطبيعية.

اكتب قائمة من 12 عددًا، واختر طالبًا ليسحب كل عدد إلى داخل مجموعة الأعداد المناسبة.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة ذكر الطلبة بأن $\sqrt{9}$ على سبيل المثال يعني الجذر الموجب فقط؛ أي $\sqrt{9} = 3$. أما الجذران الموجب والسالب للمعادلة $x^2 = 9$ هما: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

تنويع التعليم ضمن فوق

توسّع ناقش الطلبة في سبب كوّن العدد π غير نسبي، واطلب إليهم البحث في تاريخ العدد π .

خصائص الأعداد الحقيقية

مثال 4 يُبيِّن كيفية استعمال الخاصية التوزيعية لحَلّ مسألة حياتيَّة.

مثال 5 يُبيِّن كيفية استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط تعابير جبرية.

أمثلة إضافية

2 سمِّ الخاصية الموضحة فيما يأتي: $(-8 + 8) + 15 = 0 + 15$.
خاصية النظير الجمعي

3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد -7 .
النظير الجمعي 7
النظير الضربي $-\frac{1}{7}$

4 **نقود:** مع عيسى 7 أوراق نقدية من فئة BD 5 ، و7 أخرى من فئة BD 10 . كم دينارًا مع عيسى؟
BD 105

5 بسِّط التعبير:
$4(3a - b) + 2(b + 3a)$
$18a - 2b$

إرشادات للمعلم الجديد

القراءة ساعد الطلبة على تذكر خاصية التوزيع بربطها بجملة تحتوي كلمة وزِّع مثل "وزِّع ورقة على كل طالب في الفصل". وركِّز على أنه يتم ضرب العامل خارج الأقواس بكل حدٍّ داخلها.

مثال 4 من واقع الحياة — الخاصية التوزيعية

الربط مع واقع الحياة

زادت ملحقات أجهزة الحاسوب على نحو مطرد في السنوات الأخيرة، حتى أصبح الحاسوب يقوم مقام الكثير من الأجهزة الإلكترونية كآلات التصوير والتسجيل وغيرها.

مبيعات: يُبيِّن الجدول المجاور أسعار جهاز حاسوب وملحقاته في أحد العروض. إذا زاد السعر الأصلي للجهاز وملحقاته، بنسبة 6% ، فأوجد قيمة هذه الزيادة.

الجهاز أو الملحق	السعر (BD)
حاسوب	100
شاشة	60
آلة طابعة	50
كاميرا رقمية	15
برمجيات ملحقة	30

يمكن إيجاد قيمة هذه الزيادة بطريقتين هما:

الطريقة 1 اضرب ثم اجمع.

اضرب كل قيمة في 6%، أو 0.06، ثم اجمع.

$$T = 0.06(100) + 0.06(60) + 0.06(50) + 0.06(15) + 0.06(30)$$
$$= 6 + 3.6 + 3 + 0.9 + 1.8$$
$$= 15.3$$

الطريقة 2 اجمع ثم اضرب.

أوجد السعر الكلي لجهاز الحاسوب وملحقاته قبل الزيادة، ثم اضربه في العدد 0.06

$$T = 0.06(100 + 60 + 50 + 15 + 30)$$
$$= 0.06(255)$$
$$= 15.3$$

فتكون قيمة الزيادة BD 15.3. لاحظ أن النتيجة متساوية في كلتا الطريقتين.

تأكد

4) **أعمال:** يتقاضى إبراهيم BD 2 عن كل ساعة عمل في محل تجاري. إذا كانت ساعات عمل إبراهيم في أحد الأسابيع هي 4 ,1 ,2 ,2.5 ,3 ، فما المبلغ الذي حصل عليه إبراهيم في ذلك الأسبوع؟ BD 25

تستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط التعابير الجبرية.

مثال 5 تبسيط التعابير الجبرية

بسّط التعبير $3(2q + r) + 5(4q - 7r)$.

$3(2q + r) + 5(4q - 7r)$	
$= 3(2q) + 3(r) + 5(4q) - 5(7r)$	الخاصية التوزيعية
$= 6q + 3r + 20q - 35r$	بالضرب
$= 6q + 20q + 3r - 35r$	الخاصية الإبدالية على الجمع
$= (6 + 20)q + (3 - 35)r$	الخاصية التوزيعية
$= 26q - 32r$	بالتبسيط

تأكد

5) بسّط التعبير $3(4x - 2y) - 2(3x + y)$. $6x - 8y$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجَه بعض الطلبة صعوبة في تذكر اسم الخاصية.

فاطلب إليهم الربط بين كلمة "الإبدالية" والجملة "تبديل مكان الجلوس في الفصل"، وكذلك الربط بين كلمة "التجميعية" والجملة "تجمع طلابي في الفصل".

166 الفصل 3 المعادلات والمتباينات

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 164

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 62 **N, W, Z, Q, R** 2) $\frac{5}{4}$ **Q, R** 3) $\sqrt{11}$ **I, R** 4) -12 **Z, Q, R**

مثال 2 صفحة 165

سمِّ الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي:

5) $(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6 \cdot (8 \cdot 5)$ **التجميعية (×)** 6) $7(9-5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$ **التوزيعية**

7) $84 + 16 = 16 + 84$ **الإبدالية (+)** 8) $(12+5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$ **التوزيعية**

مثال 3 صفحة 165

أوجد النظير الجمعي، والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

9) -7 **$7, -\frac{1}{7}$** 10) $\frac{4}{9}$ **$-\frac{4}{9}, \frac{9}{4}$** 11) 3.8 **$-3.8, \frac{1}{3.8}$** 12) $\sqrt{5}$ **$-\sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}$**

مثال 4 صفحة 166

13) **مال:** يعمل جاسم خياطًا للأثواب، ويكسب BD 4.4 عن كل ثوب يخيطه، ويخطط لجمع مبلغ BD 130 لشراء آلة خياطة جديدة، ويُبيّن الجدول المجاور عدد الثياب التي خاطها في كل يوم من أيام أسبوع معين.

اليوم	عدد الأثواب المخيطة
السبت	2
الأحد	4
الاثنين	3
الثلاثاء	1
الأربعاء	5
الخميس	6
الجمعة	7

a) اكتب تعبيرًا يمثِّل إجمالي المبلغ الذي كسبهُ جاسم في ذلك الأسبوع.

b) احسب قيمة التعبير في الفرع a باستعمال الخاصية التوزيعية. **BD 123.2**

c) متى يكسب جاسم المبلغ الذي يخطط لجمعه؟ تحقق من معقوليّة إجابتك. **انظر الهامش**

13a) $4.4(2+4+3+1+5+6+7)$ **أو** $4.4(2)+4.4(4)+4.4(3)+4.4(1)+4.4(5)+4.4(6)+4.4(7)$

مثال 5 صفحة 166

بسّط كل تعبير مما يأتي:

14) $5(3x+6y)+4(2x-9y)$ **$23x-6y$** 15) $6(6a+5b)-3(4a+7b)$ **$24a+9b$**

16) $-4(6c-3d)-5(-2c-4d)$ **$-14c+32d$** 17) $-5(8x-2y)-4(-6x-3y)$ **$-16x+22y$**

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 164

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

18) $-\frac{4}{3}$ **Q, R** 19) -8.13 **Q, R** 20) $\sqrt{25}$ **N, W, Z, Q, R** 21) $0.\overline{61}$ **Q, R**

22) $\frac{9}{3}$ **N, W, Z, Q, R** 23) $-\sqrt{144}$ **انظر الهامش** 24) $\frac{21}{7}$ **N, W, Z, Q, R** 25) $\sqrt{17}$ **I, R**

مثال 2 صفحة 165

سمِّ الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي:

26) $-7y + 7y = 0$ **النظير الجمعي** 27) $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8+5)\sqrt{11}$ **التوزيعية**

28) $(16+7)+23 = 16+(7+23)$ **التجميعية (+)** 29) $\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1$ **النظير الضربي**

مثال 3 صفحة 165

أوجد النظير الجمعي، والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

30) -8 **$8, -\frac{1}{8}$** 31) 12.1 **$-12.1, \frac{1}{12.1}$** 32) -0.25 **$0.25, -4$**

33) $\frac{6}{13}$ **$-\frac{6}{13}, \frac{13}{6}$** 34) $-\frac{3}{8}$ **$\frac{3}{8}, -\frac{8}{3}$** 35) $\sqrt{15}$ **$-\sqrt{15}, \frac{1}{\sqrt{15}}$**

مثال 4 صفحة 166

36) **مبيعات:** يُبيّن الجدول المجاور أسعار ثلاثة أدوات مكتبية. إذا انخفض سعر كل منها بنسبة 15%، فأوجد قيمة الانخفاض في أسعار الأصناف الثلاثة معًا. **BD 1.575**

الصنف	السعر (BD)
قلم حبر	0.5
آلة حاسبة	6
قاموس	4

التركيز في المحتوى الرياضي

الأعداد غير النسبية يسمى العدد العشري غير المنتهي، والذي لا تظهر أرقامه بنمط معين عددًا غير نسبي، كما في العدد ...0.010010001، أو العدد ...1.232233222333

النظير الجمعي والنظير الضربي تحقق من استيعاب الطلبة لحقيقة أن ناتج جمع العدد ونظيره الجمعي يساوي 0، وأن ناتج ضرب العدد ونظيره الضربي يساوي 1، وأن العدد 0 ليس له نظير ضربي.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–17 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

13c) إذا استمر في خياطة العدد نفسه من الأثواب، فإنه سيحصل على المبلغ الذي يريده في نهاية يوم السبت من الأسبوع الثاني.

وربما لا يتحقق ذلك؛ لأنه ليس من الضروري أن تتكرر أعداد الأثواب بالنمط ذاته.

23) $-\sqrt{144} = -12$، -12 تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، وإلى مجموعة الأعداد النسبية (Q)، وإلى مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	18-42، 51، 53-65
ضمن المتوسط	19-41 فردي، 43، 44، 46، 48-51، 53-65
فوق المتوسط	43-61، (اختياري: 62-65)

مثال 5 صفحة 166

بسّط كل تعبير مما يأتي:

37) $8b - 3c + 4b + 9c$ $\quad 12b + 6c$

38) $-2a + 9d - 5a - 6d$ $\quad -7a + 3d$

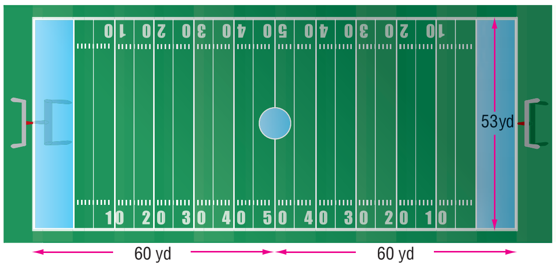
39) $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$ $\quad 40x - 20y$

40) $6(9a - 3b) - 8(2a + 4b)$ $\quad 38a - 50b$

41) $-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k)$ $\quad 28g - 48k$

42) $-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z)$ $\quad -74x + 2z$

43) **كرة قدم:** وضح الخاصية التوزيعية من خلال كتابة تعبيرين يمثّلان مساحة سطح الملعب في الشكل أدناه، ثم أوجد مساحة سطح الملعب. $53(60+60) = 53(60) + 53\,(60) = 6360\ \text{yd}^2$



44) **تخفيضات:** يُبيّن الجدول المجاور نسبة التخفيض لأسعار بعض الأجهزة الكهربائية في أحد المحالّ. أراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكنسة ومروحة.

التخفيضات		
السعر السابق (BD)	نسبة التخفيض	نوع السلعة
17	30%	جهاز تسجيل
35	30%	مكنسة
11	30%	مروحة

a) وضِّح الخاصية التوزيعية من خلال كتابة تعبيرين يمثّل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد. $63 - (17 + 35 + 11)\,(0.30)\,,\ 63 - [17(0.30) + 35\,(0.30) + 11\,(0.30)]$

b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملًا خصائص الأعداد الحقيقية. BD 44.1

بسّط كل تعبير مما يأتي:

45) $\frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{4}(6x - 2y)$ $\quad \frac{19}{6}x + \frac{13}{6}y$

46) $\frac{2}{5}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d)$ $\quad \frac{27}{5}c - \frac{199}{20}d$

47) $-6(3a + 5b) - 3(6a - 8c)$ $\quad -36a - 30b + 24c$

48) $-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z)$ $\quad -42x - 72y - 30z$

49) **ستائر:** تريد أمينة شراء 5 ستائر لنوافذ منزلها الخمس، النافذتان الكبيرتان لهما القياس نفسه، والثلاث نوافذ الصغيرة لها القياس نفسه. إذا كانت النافذة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}$m من القماش، في حين تحتاج النافذة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{3}$m.

a) كم مترًا من القماش تحتاج إليه أمينة؟ $14\frac{1}{2}$ m

b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبيِّن كيف يمكن لأمينة حساب كمية القماش التي تحتاج إليها ذهنيًّا. انظر الهامش.

50) **تمثيلات متعددة:** أجب عمّا يأتي مستعملًا الأعداد $-\sqrt{6}, 3, \frac{-15}{3}, 4.1, \pi, 0, \frac{3}{8}, \sqrt{36}$

a) **جدولة:** نظِّم هذه الأعداد في جدول وفقًا لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها. انظر الهامش.

b) **جبري:** اكتب كلًّا من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتِّبها تصاعديًّا.

c) **تمثيل بياني:** مثِّل كلًّا من الأعداد على خط الأعداد. انظر الهامش.

d) **تعبير لفظي:** اكتب تخمينًا حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

50b) $-\sqrt{6} \approx -2.449,\ 3 = 3,\ \frac{-15}{3} = -5,\ 4.1 = 4.1,\ \pi \approx 3.14,\ 0 = 0,\ \frac{3}{8} = 0.375,\ \sqrt{36} = 6,\ \frac{-15}{3}, -\sqrt{6}, 0, \frac{3}{8}, \pi, 4.1, \sqrt{36}$

50d) إجابة ممكنة: يمكن بسهولة مقارنة الأعداد الحقيقية، وترتيبها عن طريق كتابتها على الصورة العشرية.

تنبيه!

أخطاء شائعة إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في تحديد الخصائص، فاقترح عليهم النظر أولًا إلى التغير الذي يحصل في العبارة، فإذا كان التغيّر في التجميع، فإن الخاصية هي التجميعية، وإذا كان التغير في الموقع، فإن الخاصية هي الإبدالية.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في السؤال 50 معلومات منظمة في جدول، وخط الأعداد، والجبر؛ لمقارنة وترتيب أعداد حقيقية.

إجابات:

49b) $2\left(3\frac{3}{4}\right) + 3\left(2\frac{1}{3}\right)$

تعريف العدد الكسري

$= 2\left(3 + \frac{3}{4}\right) + 3\left(2 + \frac{1}{3}\right)$

الخاصية التوزيعية

$= 2(3) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3(2) + 3\left(\frac{1}{3}\right)$

$= 6 + \frac{3}{2} + 6 + 1$ بالضرب

الخاصية الإبدالية (+)

$= 6 + 6 + 1 + \frac{3}{2}$

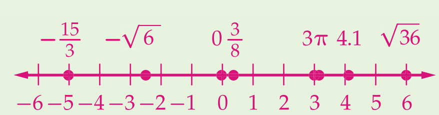
$= 13 + \frac{3}{2}$ بالجمع

$= 14\frac{1}{2}$ بالجمع

50a)

الأعداد الطبيعية	الأعداد الكلية	الأعداد الصحيحة	الأعداد النسبية	الأعداد غير النسبية
$3, \sqrt{36}$	$3, 0, \sqrt{36}$	$3, \frac{-15}{3}, 0, \sqrt{36}$	$3, \frac{-15}{3}, 4.1, 0, \frac{3}{8}, \sqrt{36}$	$-\sqrt{6}, \pi$

50c)



مسائل مهارات التفكير العليا

51) **أيها لا ينتمي؟** ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

$\sqrt{21}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{67}$	$\sqrt{81}$

52) **تحدٍّ:** أوجد قيمة التعبير $48(30r + 36t)$ بدلالة w، علمًا بأن $w = 12(5r + 6t)$. $24w$

53) **اكتشف الخطأ:** بسّطت كل من نور وخديجة التعبير $B4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$. أيهما تبسيطها صحيح؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

نور	خديجة
$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$	$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$
$56a - 40b - 6b + 24a$	$56a - 40b - 6a - 24b$
$80a - 46b$	$50a - 64b$

54) **تبرير:** هل التعبير الآتي صحيح أحيانًا، أو صحيح دائمًا، أو غير صحيح أبدًا. وضِّح إجابتك.

"العدد غير النسبي يتضمن إشارة الجذر" . انظر الهامش

55) **مسألة مفتوحة:** حدّد إذا كانت خاصية الانغلاق للضرب تنطبق على الأعداد غير النسبية. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثالاً مضاداً. انظر الهامش

56) **اكتب:** اشرح وأعطِ أمثلة توضح لماذا عمليتا الطرح والقسمة لا تحققان الخاصية الإبدالية. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

57) إذا كان a, b عددين صحيحين بحيث $a < b$, $b \neq 0$ فأي مما يأتي لا يكون عددًا صحيحًا؟ D

A $a + b$ C $a - b$
B $a\,b$ D $\frac{a}{b}$

58) ما مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{3}$ ؟ C

A Z, Q C I, R
B W, Q D N, W, Q

مراجعة تراكمية

59) احسب قيمة $8(4 - 2)^3$. (مهارة سابقة) 64

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

60) $(x + 2)(x - 3)$ $x^2 - x - 6$

61) $(b - 7)(b - 3)$ $b^2 - 10b + 21$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد النظير الجمعي لكل عدد أو تعبير مما يأتي:

62) $-4\frac{1}{5}$ $4\frac{1}{5}$

63) 3.5 -3.5

64) $-2x$ $2x$

65) $6 - 7x$ $7x - 6$

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى كل طالب كتابة اسم خاصية من الخصائص الواردة في هذا الدرس ومثال عليها وتسليمها لك قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 1-3 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

51) $\sqrt{81}$ ؛ لأنه عدد نسبي، في حين أن باقي الأعداد هي أعداد غير نسبية.

53) ليس أيهما، لم تضرب نور الحد الثاني من القوس الثاني في العدد 6– بل ضربته في العدد 6 . وبدلت خديجة معاملات a, b عند ضرب القوس الثاني في العدد 6–، والإجابة الصحيحة هي $32a - 46b$.

54) أحيانًا؛ π عدد غير نسبي، ولا يتضمن رمز الجذر.

55) إجابة ممكنة: لا تنطبق؛مثال: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$ ، و 5 عدد نسبي .

56) إجابة ممكنة: لا تنطبق الخاصية الإبدالية على عمليتي الطرح والقسمة؛ وذلك لأن الترتيب في هاتين العمليتين مهم. بينما في عمليتي الجمع والضرب الترتيب غير مهم.

مثال: $2 + 4 = 4 + 2$ و $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$. بينما في عملية الطرح، $2 - 4 \neq 4 - 2$، وكذلك في عمليه القسمة، $\frac{4}{2} \neq \frac{2}{4}$.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع تعتبر مجموعة الأعداد الكلية مجموع مغلقة بالنسبة لعملية الضرب؛ وذلك لأن حاصل ضرب عددين كليَّين هو عدد كليٌّ أيضًا. وهذا مثال على خاصية الانغلاق.

بيِّن إذا كانت الجمل الآتية صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا:

a) مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة بالنسبة لعملية الضرب. صحيحة

b) مجموعة الأعداد الكلية مغلقه بالنسبة لعملية الطرح. خاطئة مثال: $1 - 6 = -5$

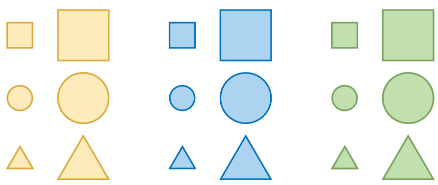
c) مجموعة الأعداد الكلية مغلقة بالنسبة لعملية القسمة. خاطئة مثال: $1 \div 5 = 0.2$

المجموعات
Sets

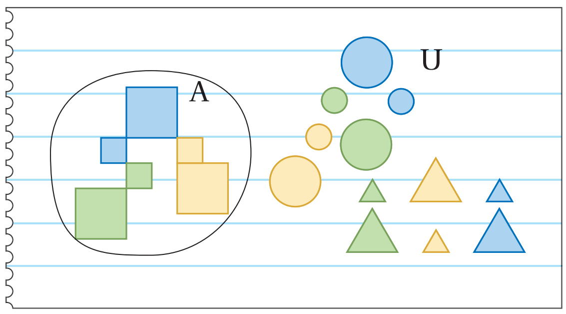
المجموعة أي تجمع من الأشياء. وتُسمى المجموعة التي تحتوي على جميع الأشياء **المجموعة الشاملة**، ويرمز إليها عادة بالرمز U . ويُسمى كل شيء في المجموعة **عنصرًا**.

نشاط 1

الخطوة 1 قُصّ 6 قطع من الورق لكل لون كما في الشكل المجاور. ارسم الأشكال المبيَّنة على اليسار.



الخطوة 2 حوِّط جميع الأشكال بخيط وسمها المجموعة U، ثم حوِّط مجموعة الأشكال المربعة بخيط على صورة حلقة، وسمها المجموعة A، كما في الشكل أدناه.



تُسمى مجموعة المربعات **مجموعة جزئية** من U ، وتُسمى المجموعة التي لا تحوي شيئًا **المجموعة الخالية**، ويُرمز إليها بالرمز { } أو ∅ ، وهي مجموعة جزئية من أي مجموعة، كما أنها مجموعة جزئية من نفسها. ويمكن كتابة ذلك بالرموز الرياضية على النحو الآتي: $A \subseteq U, A \subseteq A, \varnothing \subseteq U$.

الخطوة 3 يمكن تحديد المجموعة، بكتابة وصف لها داخل قوسين مثل {المربعات}. ضع الخيط حول {دوائر} = B وسمّها $\overline{B}$. لاحظ أن $B \subseteq U$.

الخطوة 4 إذا كانت {المربعات} = A ، فإن **متممة** A تُكتب $\overline{A}$ ، وهي جميع العناصر الموجودة في U، وغير الموجودة في A، وعليه فإن {دوائر ومثلثات} = $\overline{A}$، أو {الأشكال التي ليست مربعات} = $\overline{A}$. ارسم عناصر المجموعة $\overline{B}$. واكتب وصفًا للمجموعة $\overline{B}$ داخل قوسين.

النموذج والتحليل:

1) لتكن {المثلثات} = C. اكتب وصفًا لمتممة C داخل قوسين. $\overline{C}$ = { المربعات والدوائر }

2) لتكن {الأشكال الصفراء} = R . اكتب وصفًا لمتممة المجموعة R داخل قوسين . إجابة ممكنة؛ $\overline{R}$ = { المربعات غير الصفراء، الدوائر، المثلثات } .

3) لتكن {المربعات} = U. تحتوي المجموعات الجزئية للمجموعة U على عناصر عددها 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6. كم مجموعة جزئية للمجموعة U تتكون من عنصرين فقط؟ وما عدد المجموعات الجزئية كلها؟
يوجد 15 مجموعة جزئية ذات عنصرين. وعدد المجموعات الجزئية جميعها يساوي 64.

1 التركيز

الهدف

تحديد وكتابة وصف لمجموعة جزئية محددة من مجموعة أشكال.

المواد اللازمة

- ورق (1 ورقة)
- مقصات
- خيط (4 قطع، طول أحدها يكفي لإحاطة جميع الأشكال)
- أقلام ملونة (أزرق، أخضر، أصفر)

إرشادات للتدريس

- وضّح للطلبة أنهم يحتاجون لقص 8 قطع من الورق لتسمية المجموعات في النشاطين 1, 2 .
- ركز على أهمية تلوين الأشكال كما هو مبيّن في الشكل المجاور، حيث أن اللون هو من السمات المستخدمة؛ لتحديد عناصر المجموعة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية أو ثلاثية لإتمام خطوات النشاط الأول من 5–1، وحل التدريبات 3–1، وتنفيذ خطوات النشاط 2 من 6–1.

في النشاط الأول، تأكد من أن الطلبة فهموا أن كل من A و B هي مجموعات، وأن كل منها هي مجموعة جزئية من المجموعة U . حيث أن جميع عناصر كل منها هي عناصر للمجموعة U .

اسأل:

- هل من الممكن أن تكون المجموعة U مجموعة جزئية من A؟ وضّح إجابتك.
لا؛ لأن المثلثات والدوائر موجودة في المجموعة U وغير موجودة في المجموعة A. لذا، فإن المجموعة U ليست مجموعة جزئية من المجموعة A.

- هل المجموعة الجزئية تحتوي دائمًا عدد أقل من عناصر المجموعة الكلية؟ وضّح إجابتك.
لا، المجموعة U هي مجموعة جزئية من U ، فالمجموعة الجزئية هنا تحتوي نفس عدد العناصر للمجموعة الكلية.

في النشاط 2، ذكّر الطلبة أن المجموعة U هي المجموعة الشاملة، وأنها تضم جميع عناصر المجموعتين L، Q ، إضافة إلى 3 دوائر كبيرة و3 مثلثات كبيرة.

اسأل:

- كم عدد عناصر المجموعة $L \cup Q$؟ 12
- كم عدد عناصر المجموعة $\overline{L \cup Q}$؟ 6

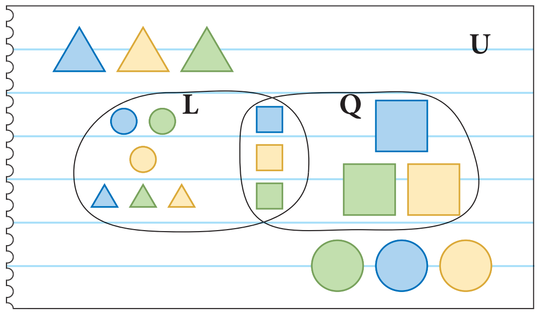
- ما العلاقة بين عدد عناصر المجموعة $L \cup Q$ ومتممتها $\overline{L \cup Q}$ ، والمجموعة الشاملة U؟
عدد عناصر المجموعة $L \cup Q$ + عدد عناصر المجموعة $\overline{L \cup Q}$ = عدد عناصر المجموعة U.

- كيف تستعمل العلاقة بين عدد عناصر مجموعة وعدد عناصر متممتها، وعدد عناصر المجموعة الشاملة للتحقق من رسمك في الخطوتين 5, 6 .
عدد العناصر في الخطوة 5 هو 3–18 أو 15، وفي الخطوة 6 هو 12–18 أو 6 .

تدريب اطلب إلى الطلبة أن يحلوا التمارين 4-15، اقترح عليهم العمل في مجموعات ثنائية أو ثلاثية لحل التمرين 16 .

نشاط 2

يمكنك إجراء العمليات على عددين أو أكثر، مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة، إلَّا أن متممة المجموعة تُجرى على مجموعة واحدة فقط. غير أنه يمكنك أيضًا إجراء بعض العمليات على مجموعتين أو أكثر في الوقت نفسه.



الخطوة 1 استعمل U من الخطوة 2 في النشاط 1. ورتِّب الأشكال كما هو مبين في الشكل المجاور، ثم سمّ المجموعات، واكتب وصفًا لكلٍّ من المجموعتين L, Q داخل قوسين.

الخطوة 2 في الشكل الوارد في الخطوة 1، ظلّل منطقة تقاطع المجموعتين L, Q. وصِفِ المنطقة المظلّلة.

الخطوة 3 **تقاطع** مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما فقط. ويرمز لهذه العملية بالرمز $\cap$. ويعني التقاطع أن العنصر يكون في المجموعتين L, Q معًا. ارسم عناصر $L \cap Q$.

الخطوة 4 **اتحاد** مجموعتين هو مجموعة جميع عناصر المجموعة الأولى والثانية دون تكرار، ويرمز لهذه العملية بالرمز $\cup$. فكّر في هذه العملية على أنها جمع أو تجميع العناصر في مجموعتين أو أكثر. وارسم عناصر المجموعة $L \cup Q$.

الخطوة 5 تذكّر أن إيجاد المتممة هي عملية على مجموعة واحدة فقط. ارسم عناصر المجموعة $\overline{L \cap Q}$.

الخطوة 6 ارسم عناصر المجموعة $\overline{L \cup Q}$.

8) $T \cap M$ = {الدوائر الصغيرة}

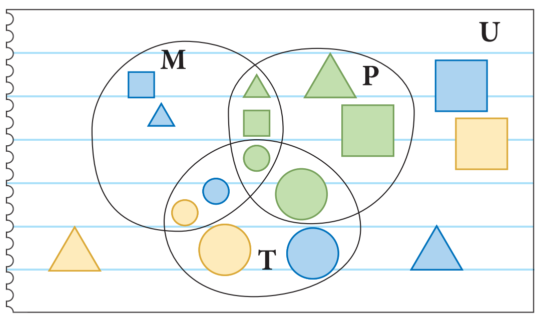
10) $M \cup P$ = {الأشكال الخضراء أو الصغيرة}

9) $T \cap P$ = {الدوائر الخضراء}

11) $M \cup T$ = {الأشكال الصغيرة أو الدوائر}

تمارين:

اكتب وصفًا للأشكال في كل مجموعة ممَّا يأتي، مستعملًا شكل ڤن المجاور:



4) M M = {الأشكال الصغيرة}

5) P P = {الأشكال الخضراء}

6) T T = {الدوائر}

7) $M \cap P$ $P \cap M$ = {الأشكال الخضراء الصغيرة}

8) $T \cap M$

9) $P \cap T$

10) $M \cup P$

11) $M \cup T$

12) $P \cup T$

13) $M \cap P \cap T$

14) $M \cup P \cup T$

15) $\overline{M \cup P \cup T}$

15) $\overline{T \cup P \cup M}$ = {المربعات أو المثلثات الكبيرة الصفراء أو الزرقاء}

16) **تحدٍّ:** استعمل U في الخطوة 2 من النشاط 1؛ لإيجاد المجموعتين $Z، W$ على أن تكون $W \cap Z = \varnothing$. ثم ارسم شكلًا يمثل المجموعات $U، Z، W$، وسمِّ جميع الأشكال المبينة فيه. اكتب وصفًا لكلٍّ من المجموعات $Z، W$، $\overline{W \cup Z}$ داخل قوسين.

انظر ملحق الإجابات

12) $P \cup T$ = {الأشكال الخضراء أو الدوائر}

13) $M \cap P \cap T$ = {الدائرة الصغيرة الخضراء}

14) $M \cup P \cup T$ = {الأشكال الصغيرة أو الأشكال الخضراء أو الدوائر}

3 التقويم

التقويم التكويني

- استعمل التمرين 5 ؛ لتقويم ما إذا فهم الطلبة كيف يستعملون الأقواس لكتابة وصف للمجموعة.
- استعمل التمرين 12 ؛ لتقويم ما إذا فهم الطلبة الفرق بين اتحاد وتقاطع مجموعتين.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل:

اجعل جميع طلاب صفك يمثلون المجموعة الشاملة U ، أوجد مجموعتين جزئيتين A، B، واكتب وصفًا للمجموعات الآتية: A ، B ، $A \cup B$ ، $A \cap B$.

إجابة ممكنة:

A = {الطلاب الّذين أطوالهم 160 cm}

B = {الطلاب الّذين أطوالهم 155 cm}

$A \cup B$ = {الطلاب الّذين أطوالهم 155 cm أو 160 cm}

$A \cap B = \varnothing$

3-2 حَلّ معادلات القيمة المطلقة
Solving Absolute Value Equations

فيما سبق
درستُ حَلّ معادلات مستعملًا خصائص المساواة.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أحسب تعابير تحتوي قيمًا مطلقة.
- أحلّ معادلات القيم المطلقة.

المفردات الأساسية
القيمة المطلقة
absolute value
المجموعة الخالية
empty set
الحل المرفوض
extraneous solution

www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟

يستعمل البحارة جهازًا يعتمد على مدى أشعة الليزر لتحديد البعد عن الشاطئ. إذا كانت دقة قياس هذا الجهاز صحيحة إلى $\pm 0.5\,yd$ ، فذلك يعني أنه إذا كان مؤشر الجهاز يؤشر إلى مسافة $323.1\,yd$ عن الشاطئ فإن المسافة الفعلية عن الشاطئ ليست أقل من $323.6\,yd$ ، أو أكبر من $323.6\,yd$. ويمكن التعبير عن هاتين القيمتين بالمعادلة

$$|E - 323.1| = 0.5$$

تعابير القيمة المطلقة **القيمة المطلقة** لعدد هي بعد ذلك العدد عن الصفر على خط الأعداد. وبما أن البُعد دائماً موجب أو صفر، فإن القيمة المطلقة لعدد ما هي قيمة غير سالبة دائمًا. ويستعمل الرمز $|x|$ للدلالة على القيمة المطلقة للعدد x .

مفهوم أساسي **القيمة المطلقة** أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي a ، هي a إذا كان العدد a موجبًا أو صفرًا. وتكون $-a$ إذا كان العدد a سالبًا.

الرموز لأي عدد حقيقي a يكون
$|a| = a,\ a \geq 0$
$|a| = -a,\ a < 0$

نموذج

مثال $|-4| = 4,\ |4| = 4$

عند حساب قيم تعابير تحتوي قيمة مطلقة، فإن رمز القيمة المطلقة يُعامل معاملة الأقواس، إذ يجب إجراء العمليات داخل رمز القيمة المطلقة أولاً.

مثال 1 حساب تعابير تحتوي قيمة مطلقة

اذا كانت $n = 7.5$ ، فاحسب قيمة $8.4 - |2n + 5|$.

$8.4 - \|2n + 5\| = 8.4 - \|2(-7.5) + 5\|$	بالتعويض عن n بالعدد -7.5
$= 8.4 - \|-15 + 5\|$	بضرب 2 في -7.5
$= 8.4 - \|-10\|$	بإضافة -15 إلى 5
$= 8.4 - 10$	$\|-10\| = 10$
$= -1.6$	بطرح 10 من 8.4

تأكد

(1A إذا كانت $x = -2$ ، فاحسب قيمة $|4x + 3| - 3\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$

(1B إذا كانت $y = -\frac{2}{3}$ ، فاحسب قيمة $1\frac{1}{3} - |2y + 1|$. 1

3-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2
حَلّ معادلات باستعمال خصائص المساواة.

الدرس 3-2
حساب قيم تعابير تحتوي قيمًا مطلقة.
حَلّ معادلات القيمة المطلقة.

ما بعد الدرس 3-2
حَلّ متباينات القيمة المطلقة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إلامَ يرمز الحرف E في المعادلة $|E - 323.1| = 0.5$ ؟ المسافة الفعلية عن الشاطئ.
- ماذا يعني العدد 0.5 في المعادلة؟ مقدار الخطأ في تقدير المسافة عن الشاطئ.
- ماذا يمكن أن تكون معادلة المسافة عن الشاطئ إذا كانت المسافة المقدرة هي $962.3\,yd$ ؟ $|E - 962.3| = 0.5$
- كيف يمكن أن تُمثّل هذه المعادلة على خط الأعداد؟

مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (170)	• تنويع التعليم، ص (170, 173)	• تنويع التعليم، ص (173)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

معادلات القيمة المطلقة تحتوي بعض المعادلات تعابير قيمة مطلقة، وعندئذٍ يستعمل تعريف القيمة المطلقة لحل هذه المعادلات. فإذا كان a , b عددين حقيقيين، حيث $b \geq 0$، وكان $|a| = b$، فإن $a = b$ أو $-a = b$ ، وتكتب المعادلة الثانية عادةً على الصورة $a = -b$.

مثال 2 معادلات القيمة المطلقة

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من صحة حلّك:

a) $|f + 5| = 17$

الحالة 1 $a = b$

$f + 5 = 17$

$f + 5 + (-5) = 17 + (-5)$

$f = 12$

الحالة 2 $a = -b$

$f + 5 = -17$

$f + 5 + (-5) = -17 + (-5)$

$f = -22$

تحقق:

$|f + 5| = 17$

$|12 + 5| \stackrel{?}{=} 17$

$|17| \stackrel{?}{=} 17$

$17 = 17$ ✔

تحقق:

$|f + 5| = 17$

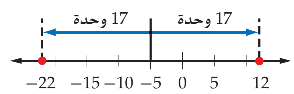
$|-22 + 5| \stackrel{?}{=} 17$

$|-17| \stackrel{?}{=} 17$

$17 = 17$ ✔

إذن الحلان هما 12 ,22− . وبذلك تكون مجموعة الحل هي $\{12, -22\}$.

يمكنك ملاحظة أن كل حَلّ يَبعُد 17 وحدة عن العدد 5− على خط الأعداد.



b) $|3x - 2| + 8 = 1$

المعادلة الأصلية $|3x - 2| + 8 = 1$

بطرح 8 من الطرفين $|3x - 2| + 8 - 8 = 1 - 8$

بالتبسيط $|3x - 2| = -7$

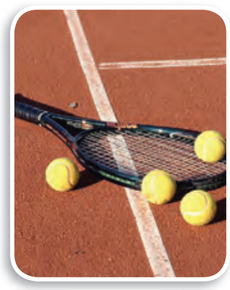
بما أن القيمة المطلقة لأي عدد هي دائمًا قيمة موجبة أو صفر، لذا فإن هذه المعادلة ليس ثمة قيمة تحقّقها. ولذا، فإن مجموعة حلها هي **المجموعة الخالية**، والتي يُرمز لها بأحد الرمزين { } أو ∅ .

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من صحة حلّك:

2A) $2|3a| = 6$ $\{-1, 1\}$

2B) $|4b + 1| + 8 = 0$ ∅



الربط مع واقع الحياة

كان لاعبو التنس في الأصل يرتدون قفازات جلدية لضرب كرة التنس، حتى استبدلت هذه القفازات بمضارب ذات مقابض.

المصدر:

The Cliff Richard Tennis Foundation

تستعمل معادلات القيمة المطلقة في حَلّ كثير من المسائل الحياتية.

مثال 3 حَلّ معادلات القيمة المطلقة

تنس: المساحة القياسية لوجه مضرب التنس هي $100\ in^2$ بزيادة أو نقصان $20\ in^2$ ، تبعًا لنوع المضرب. اكتب معادلة قيمة مطلقة تمثّل المساحة، ثم حُلّها لإيجاد أكبر وأصغر مساحة لوجه مضرب التنس.

افهم: المطلوب حساب أكبر وأصغر مساحة ممكنة لوجه مضرب التنس علمًا بأن متوسط المساحة معطى، وكذلك أُعطي مدى الزيادة والنقصان.

تعابير القيمة المطلقة

مثال 1 يُبيّن كيفية حساب تعابير تحتوي قيمًا مطلقة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من فهم الطلبة مفاهيم الدرس.

مثال إضافي

1 إذا كانت $x = 4$، فاحسب قيمة $2.7 + |6 - 2x|$. 4.7

إرشادات للمعلم الجديد

قراءة ربما يجد الطلبة أنه من المفيد لهم قراءة الخط الأول من رمز القيمة المطلقة على أنه (بُعد)، والخط الثاني على أنه (عن نقطة الصفر) بغض النظر عن الاتجاه. فمثلًا، $|6 - 2x|$ تُقرأ على أنها بُعد $6 - 2x$ عن نقطة الصفر بغض النظر عن الاتجاه.

معادلات القيمة المطلقة

الأمثلة 4-2 تُبيّن كيفية حَلّ معادلات قيمة مطلقة لها حلان، أو حَلّ واحد، أو ليس لها حَلّ.

مثال إضافي:

2 حُلّ $|y + 3| = 8$، ثم تحقق من صحة حلك. $\{-11, 5\}$

خطط: لكتابة معادلة القيمة المطلقة، فإن القيمة المتوسطة تُوضع داخل رمز القيمة المطلقة. ويُوضع مدى الزيادة أو النقصان في الطرف الآخر منها.

القيمة المتوسطة — مدى الزيادة أو النقصان

$|x - c| = r$

حُل: معادلة القيمة المطلقة $|x - c| = r$

$c = 100,\ r = 20$ $\qquad |x - 100| = 20$

الحالة 1 $a = b$

$x - 100 = 20$

$x - 100 + 100 = 20 + 100$

$x = 120$

الحالة 2 $a = -b$

$x - 100 = -20$

$x - 100 + 100 = -20 + 100$

$x = 80$

تحقق:

$|x - 100| = 20$

$|120 - 100| \stackrel{?}{=} 20$

$|20| \stackrel{?}{=} 20$

$20 = 20$ ✔

تحقق:

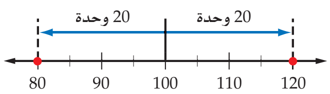
$|x - 100| = 20$

$|80 - 100| \stackrel{?}{=} 20$

$|-20| \stackrel{?}{=} 20$

$20 = 20$ ✔

يمكنك التأكد من أن كلا الحلَّين يقعان على بُعد 20 وحدة من العدد 100 على خط الأعداد.



الحلان هما 120 ، 80 . لذا فإن أكبر مساحة هي $120\ \text{in}^2$ ، وأصغر مساحة هي $80\ \text{in}^2$.

✓ **تأكد**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلك:

3A) $|x + 12| = 9$ $\quad \{-21, -3\}$

3B) $|y + 5| = 8$ $\quad \{-13, 3\}$

من الضروري أن تتحقق من صحة إجابتك عند حَلّ معادلات القيمة المطلقة، ففي بعض الحالات تكون خطوات الحل صحيحة إلا أن الإجابة لا تحقق المعادلة الأصلية. وتُسمى الإجابة في هذه الحالة **الحل المرفوض**.

مثال 4 معادلات لها حَل واحد

حُلّ المعادلة $|x + 10| = 4x - 8$، ثم تحقق من صحة حلك.

الحالة 1 $a = b$

$x + 10 = 4x - 8$

$10 = 3x - 8$

$18 = 3x$

$6 = x$

الحالة 2 $a = -b$

$x + 10 = -(4x - 8)$

$x + 10 = -4x + 8$

$5x + 10 = 8$

$5x = -2$

$x = -\frac{2}{5}$

إرشادات لحل المسألة

كتابة معادلة من أفضل الطرق لحل المسألة هي استعمال المعلومات فيها لكتابة معادلة ، ثم حلها.

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة من الممكن أن تجد لمعادلة القيمة المطلقة حلًا واحدًا فقط. لكن تذكَّر أنه يوجد حالتان، ثم تحقق من صحة حلك.

مثالان إضافيان

3 حُلّ $|6 - 4t| + 5 = 0$. $\varnothing$

4 حُلّ $|8 + y| = 2y - 3$، ثم تحقق من صحة حلك. $\{11\}$

التركيز في المحتوى الرياضي

القيمة المطلقة القيمة المطلقة لعدد ما هي بُعد ذلك العدد عن الصفر على خط الأعداد. لذا، فالعبارة: "القيمة المطلقة للعدد x تساوي دائمًا x" هي عبارة خاطئة. فمثلًا، إذا كانت $x = -3$ ، فإن القيمة المطلقة لها هي 3 .

تنبيه !

تجنّب الأخطاء ذكّر الطلبة بالتفكير في معنى الجملة الرياضية قبل البدء في الحَل وبعده؛ لمعرفة مدى منطقية إجاباتهم. ووضح لهم إمكانية حَل بعض المسائل اللفظية مثل التمارين (5, 22, 33)، عندما يسألون عن كلمات غير مفهومة بالنسبة لهم، وامنحهم وقتًا كافيًا للقراءة، والفهم، والتخطيط، واستعمال رسم توضيحي للمساعدة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حُل أمثلة متنوعة على السبورة التفاعلية حول معادلات القيم المطلقة. احفظ الأمثلة في ملف، ثم أرسله إلكترونيًّا إلى جميع الطلبة؛ لاتخاذها مصدرًا آخر خارج الفصل.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه الطلبة بعض الأفكار المربكة،

فاطلب إليهم تدوين اثنتين أو ثلاثة من هذه الأفكار على بطاقات، ثم اطلب إليهم كتابة توضيح لكلٍّ منها بلغتهم الخاصة أو أمثلة عليها. يستعمل الطلبة هذه البطاقات في المراجعة لاحقًا.

يبدو أن هناك حلّين هما $6, -\frac{2}{5}$

تحقق: عوِّض بكلٍّ من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$|x + 10| = 4x - 8 \qquad\qquad |x + 10| = 4x - 8$$

$$x + 10 \stackrel{?}{=} 4\left(-\frac{2}{5}\right) - 8 \qquad\qquad |6 + 10| \stackrel{?}{=} 4(6) - 8$$

$$\left|9\frac{3}{5}\right| \stackrel{?}{=} -1\frac{3}{5} - 8 \qquad\qquad |16| \stackrel{?}{=} 24 - 8$$

$$9\frac{3}{5} \neq -9\frac{3}{5} \ ✘ \qquad\qquad 16 = 16 \ ✔$$

بما أن $9\frac{3}{5} \neq -9\frac{3}{5}$ ، فيوجد حَل واحد للمعادلة هو 6 . إذن، مجموعة الحل هي {6} .

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين، ثم تحقّق من صحة حلّك:

4A) $2|x + 1| - x = 3x - 4$ **3**

4B) $3|2x + 2| - 2x = x + 3$ **−1**

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 172

إذا كانت $x = -4, y = -9$ ، فاحسب قيمة كل مما يأتي :

1) $|x - 8|$ **12**

2) $|7y|$ **63**

3) $-3|xy|$ **−108**

4) $-2|3x + 8| - 4$ **−12**

5) **أسماك:** تعيش أسماك الزينة في أحواض ذات مياه عذبة ودرجة حرارة متوسطها 78°F ، بمدى زيادة أو نقصان عن المتوسط يبلغ 2°F .

a) اكتب معادلة لتحديد أكبر وأصغر درجة حرارة يمكن أن تعيش فيها أسماك الزينة. $|x - 78| = 2$

b) حُلّ المعادلة التي كتبتها في الفرع a. **أدنى درجة حرارة: 76°F، أعلى درجة حرارة: 80°F**

c) إذا كان لديك ميزان لقياس الحرارة بدقة لا تزيد عن 1°F ولا تنقص عنها، فكم يجب أن تكون قراءة الميزان لدرجة حرارة الماء لتضمن بقاءها ضمن الحد الأدنى للحرارة؟ وضِّح إجابتك. **انظر الهامش**

الأمثلة 2-4 الصفحات 171-173

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من حلّك:

6) $|x + 8| = 12$ **{4, −20}**

7) $|y - 4| = 11$ **{15, −7}**

8) $|a - 5| + 4 = 9$ **{10, 0}**

9) $|b - 3| + 8 = 3$ **∅**

10) $3|2x - 3| - 5 = 4$ **{3, 0}**

11) $-2|5y - 1| = -10$ $\left\{\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$

12) $|a - 4| = 3a - 6$ **2.5**

13) $|b + 5| = 2b + 3$ **2**

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 172

اذا كان $a = -3, b = -5, c = 4.2$ ، فاحسب قيمة كل مما يأتي:

14) $|-3c|$ **12.6**

15) $|5b|$ **25**

16) $|a - b|$ **2**

17) $|b - c|$ **9.2**

18) $|3b - 4a|$ **3**

19) $2|4a - 3c|$ **49.2**

20) $-|3c - a|$ **−15.6**

21) $-|abc|$ **−63**

22) **كاكاو:** لتحضير مسحوق الكاكاو فإنه يتم قلي بذور الكاكاو. إذا كانت درجة الحرارة المثالية لقلي البذور هي 300°F، بزيادة أو نقصان 25°F ، فاكتب معادلة لإيجاد أعلى وأدنى درجة حرارة ممكنة لقلي بذور الكاكاو، ثم حُلّها. **انظر الهامش**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-13 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

5c) القراءة 77°F تضمن بقاء درجة الحرارة ضمن الحد الأدنى وهو 76°F .

22) $|x - 300| = 25$ ؛ أدنى درجة حرارة: 275°F أعلى درجة حرارة: 325°F

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	14-32، 43، 45 - 65
ضمن المتوسط	15-41فردي، 42، 43، 45-65
فوق المتوسط	33-59، (اختياري: 60-65)

حُل كلَّ معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

الأمثلة 2-4
الصفحات 173-174

23) $|z-13|=21$ **{34, −8}**

24) $|w+9|=17$ **{8, −26}**

25) $35=|x-6|$ **{−29, 41}**

26) $-3|r+4|=-21$ **{3, −11}**

27) $3|2a-4|=0$ **2**

28) $8|5w-1|=0$ **$\frac{1}{5}$**

29) $2|3x-4|+8=6$ **انظر ملحق الإجابات**

30) $4|7y+2|-8=-7$ **$\{-\frac{1}{4}, -\frac{9}{28}\}$**

31) $-3|3t-2|-12=-6$ **$\varnothing$**

32) $-5|3z+8|-5=-20$ **$\{-\frac{5}{3}, -\frac{11}{3}\}$**

33) **مال:** تنتج إحدى الدول قطعًا نقدية معدنية بوزن معياري يساوي 5.67 g للقطعة. وتوزن كل قطعة بعد الإنتاج، إذا كان الفرق بين وزن القطعة يختلف عن الوزن المعياري بزيادة أو نقصان 0.02 g ترفض القطعة، فاكتب معادلة لإيجاد أثقل وأخف قطعة يتم قبولها، ثم حُلَّها. **$|x-5.67|=0.02$ ، أخف قطعة 5.65 g ، أثقل قطعة 5.69 g**

إذا كانت $q=-8, r=-6, t=3$ ، فاحسب قيمة كل مما يأتي:

34) $12-t|3r+2|$ **−36**

35) $2q+|2rt+q|$ **28**

36) $-5t-q|8r-t|$ **393**

حُلَّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

37) $8x=2|6x-2|$ **$\{1, \frac{1}{5}\}$**

38) $-6y+4=|4y+12|$ **$-\frac{4}{5}$**

39) $8z+20=-|2z+4|$ **$-\frac{8}{3}$**

40) $-3y-2=|6y+25|$ **$\{-3, -\frac{23}{3}\}$**

41) **مستوى سطح البحر:** يبلغ متوسط ارتفاع جزيرة عن مستوى سطح البحر 245 ft ، ويتباين هذا الارتفاع من مكان إلى آخر في هذه الجزيرة بزيادة أو نقصان 75 ft . اكتب معادلة لايجاد أعلى وأقل ارتفاع لهذه الجزيرة عن مستوى سطح البحر، ثم حُلَّها. **انظر ملحق الإجابات**

الربط مع واقع الحياة

ارتفع مستوى سطح البحر خلال القرن الماضي في بعض مناطق العالم فوق المتوسط العالمي بمقدار 6 in تقريبًا.

المصدر:
Environmental Protection Agency

42) **تمثيلات متعددة:** ارسم خط الأعداد. **للفرع a انظر الهامش**

a) **هندسي:** اختر خمسة أعداد صحيحة على خط الأعداد، وارمز إليها بالرموز A, B, C, D, F .

b) **جدولة:** املأ الفراغات في الجدولين أدناه مستعملاً أحد الرمزين < أو > ، وذلك بالاعتماد على قيم الأعداد التي اخترتها في الفرع a .

$A \underline{<} B$	$A-C \underline{<} B-C$ $A-D \underline{<} B-D$ $A-F \underline{<} B-F$
$B \underline{>} A$	$B-C \underline{>} A-C$ $B-D \underline{>} A-D$ $B-F \underline{>} A-F$

$A \underline{<} B$	$A+C \underline{<} B+C$ $A+D \underline{<} B+D$ $A+F \underline{<} B+F$
$B \underline{>} A$	$B+C \underline{>} A+C$ $B+D \underline{>} A+D$ $B+F \underline{>} A+F$

c) **تعبير لفظي:** صف النمط في الجدولين السابقين. **انظر الهامش**

d) **جبري:** صف النمط السابق جبريًّا باستعمال المتغير x مكان كل من C, D, F . **انظر الهامش**

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **اكتشف الخطأ:** قامت كل من ليلى وعلياء بحل المعادلة $|3x+14|=-6x$ كما يأتي. أيُّهما حلُّها صحيح؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

ليلى

$|3x+14|=-6x$

$3x+14=-6x$ أو $3x+14=6x$

$9x=-14$ $\quad$ $14=3x$

$x=-\frac{14}{9}$ ✓ $\quad$ $x=\frac{14}{3}$ ✓

علياء

$|3x+14|=-6x$

$3x+14=-6x$ أو $3x+14=6x$

$9x=-14$ $\quad$ $14=3x$

$x=-\frac{14}{9}$ ✓ $\quad$ $x=\frac{14}{3}$ ✗

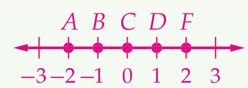
تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 42 ، خط الأعداد، ومعلومات منظمة في جدول، والجبر لتحليل متباينات.

تنبيه !

اكتشف الخطأ في التمرين 43، يجب على الطلبة ملاحظة أن هناك اختلافًا بين حلَي كلٍّ من ليلى وعلياء. ويجب أن يحددوا من التي تحققت من حلها.

إجابات:

42a) إجابة ممكنة:



42c) إجابة ممكنة: إذا كان A أقل من B، فإن ناتج جمع أي عدد إلى A أقل من ناتج جمع ذلك العدد إلى B ، وكذلك ناتج طرح أي عدد من A أقل من ناتج طرح ذلك العدد من B .

42d) إذا كان $A<B$ ، فإن $A+x<B+x$ ، $A-x<B-x$. وإذا كان $B>A$ ، فإن $B+x>A+x$ ، $B-x>A-x$.

43) علياء؛ افترضت ليلى أن $+\frac{14}{9}$ يُمثّل حلاً، على حين أنه حَلّ مرفوض. وقد وقعت في هذا الخطأ؛ لأنها لم تتحقق من إجابتها بتعويض القيم في المعادلة الأصلية.

176 الفصل 3 المعادلات والمتباينات

44) **تحدٍّ:** أوجد جميع حلول المعادلة $|2x-1|+3=|5-x|$. (**إرشاد:** هناك أربع حالات ممكنة للحل).

تبرير: إذا كانت a, x, y ثلاثة أعداد حقيقية، فأي العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

45) إذا كان $|a|>7$، فإن $|a+3|>10$.

46) إذا كان $|x|<3$، فإن $|x+3|>0$. للتمارين 45–47 انظر ملحق الإجابات

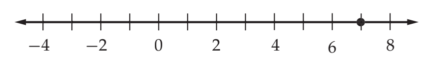
47) إذا كان $1<y<5$، فإن $|y-3|\le 2$.

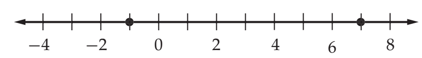
48) **مسألة مفتوحة:** إذا كان كل من $a, b, c, d \neq 0$، فاكتب معادلة قيمة مطلقة على الصورة $|ax+b|=cx+d$، بحيث تكون مجموعة حلها $\emptyset$. انظر ملحق الإجابات

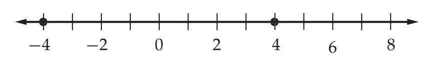
49) **اكتب:** بخطوات مفصّلة كيفية حَلّ معادلة على الصورة $a|x-b|+c=d$ لإيجاد قيمة x. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

50) أي تمثيل بياني مما يأتي يمثّل حَلّ المعادلة $|x-3|-4=0$؟ B

A


B


C


D


51) **مراجعة** أي مما يأتي يمثّل تبسيطًا للتعبير: $3(15x-9y)+5(4y-x)$ A

A $40x-7y$

B $50x+47y$

C $50x-47y$

D $40x+7y$

مراجعة تراكمية

سمِّ الخاصية في كل من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 1-3)

52) $(1+8)+11=11+(1+8)$ الأبدالية (+)

53) $z(9-4)=z\cdot 9-z\cdot 4$ التوزيعية

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 1-3)

54) $7a+3b-4a-5b$ $3a-2b$

55) $3x+5y+7x-3y$ $10x+2y$

56) $3(15x-9y)+5(4y-x)$ $40x-7y$

57) $2(10m-7a)+3(8a-3m)$ $11m+10a$

58) $8(r+7t)-4(13t+5r)$ $-12r+4t$

59) $4(14c-10d)-6(d+4c)$ $32c-46d$

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

60) $15x+5=35$ 2

61) $2.4y+4.6=20$ 6.417 تقريبًا

62) $8a+9=6a-7$ -8

63) $3(w-1)=2w-6$ -3

64) $\frac{1}{2}(2b-4)=2+8b$ $-\frac{4}{7}$

65) $\frac{1}{3}(6p-24)=18+3p$ -26

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف يعرفون أن ما تعلموه في الدرس 2-3 سوف يرتبط بما سيتعلمونه في الدرس 3-3 (حل المتباينات الخطية في متغير واحد)

إرشادات للمعلم الجديد

نظرة إلى الأمام يقدم الدرس 3-3 حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد بخطوات شبيهة بما يستعمل في حَلّ المعادلات. لذا، يجب استعمال التمارين (60-65) لتحديد مدى معرفة الطلبة بحَلّ المعادلات.

إجابات:

44) جميع حالات الحل هي:

1) $(2x-1)\ge 0$ ، $(5-x)\ge 0$

2) $(2x-1)\ge 0$ ، $(5-x)<0$

3) $(2x-1)<0$ ، $(5-x)\ge 0$

4) $(2x-1)<0$ ، $(5-x)<0$

والحلول المناظرة لهذه الحالات هي:

1) $2x-1+3=5-x, x=1$

2) $2x-1+3=x-5, x=-7$

3) $1-2x+3=5-x, x=-1$

4) $1-2x+3=x-5, x=3$

يمكن قبول الحلين الناتجين عن الحالتين 1, 3 . أما الحلان الآخران فهما مرفوضان. إذن، مجموعة الحل هي $\{-1, 1\}$

49) اجعل $|x-b|$ وحدها في طرف المعادلة الأيسر؛ وذلك بطرح c من كلا الطرفين، ثم قسمة كلٍّ منهما على a. سينتج عن ذلك معادلة في طرفها الأيسر $|x-b|$ ، وفي الطرف الآخر تعبير جبري. اكتب المعادلة دون استعمال رمز القيمة المطلقة؛ وذلك بتحويل المعادلة إلى معادلتين، ثم حُل كلاًّ منهما بالنسبة لـ x. تحقق من صحة حلك بتعويضه في المعادلة الأصلية.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع تحتاج المعادلات التي تحتوي قيمة مطلقة واحدة إلى حالتين لحلها، وتحتاج المعادلات التي تحتوي قيمتين مطلقتين إلى (4) حالات لحلها. كم حالة نحتاج إليها لحَلّ معادلة تحتوي ثلاث قيم مطلقة؟ 8

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل، للتحقق من مدى فهم الطلبة.

للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات التقـويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

مطويات متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حلّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدرسين 1-3 ، 2-3 .

إجابة:

8) غير صحيح، مثال مضاد: $36 \div (12+6) \neq (36 \div 12) + (36 \div 6)$؛ لأن $9 \neq 2$.

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-3)

1) $\frac{25}{11}$ **Q, R**

2) $-\frac{128}{32}$ **Z, Q, R**

3) $\sqrt{50}$ **I, R**

4) -32.4 **Q, R**

5) سمِّ الخاصية في $(4+15)7 = 4 \cdot 7 + 15 \cdot 7$ (الدرس 1-3)
التوزيعية

6) بسّط التعبير $-3(7a-4b)+2(-3a+b)$. (الدرس 1-3)
$\mathbf{-27a+14b}$

7) **ملابس:** يريد سعد شراء 3 قمصان، و 3 بناطيل، إذا كان سعر القميص الواحد 6.5 BD، وسعر البنطال الواحد 7 BD، فاستعمل خاصيّة التوزيع لكتابة تعبيرين يمثّل كل منهما المبلغ الذي سوف يدفعه سعد. (الدرس 1-3) **$3(6.5)+3(7)$ أو $3(6.5+7)$**

8) هل تتوزّع عملية القسمة على عملية الجمع من اليسار في المسألة الآتية $a \div (b+c) = (a \div b) + (a \div c)$ لجميع الأعداد الحقيقية a, b, c، حيث $b \neq -c$ ، $b \neq 0 \neq c$؟ وإذا كانت كذلك، فأعطِ مثالًا يبيِّن صحتها، وإذا لم تكن صحيحة، فأعطِ مثالًا مضادًا. (الدرس 1-3) **انظر الهامش**

9) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ التعبير $\frac{2}{3}(4m-5n)+\frac{1}{5}(2m+n)$؟ (الدرس 1-3) **F**

F $\frac{46}{15}m - \frac{47}{15}n$

G $46m - 47n$

H $-\frac{mn}{15}$

J $\frac{5}{4}m - \frac{9}{8}n$

10) **ألعاب مسلية:** تلعب جميلة وهند لعبة، حيث تطلب جميلة من هند أن تقدِّر طولها. تفوز هند إذا قدَّرت طول جميلة بخطأ لا يتعدى 3 cm عن طولها الحقيقي. إذا علمت أن طول جميلة 128 cm. فاكتب معادلة تعطي أصغر وأكبر طول تقديري لجميلة، بحيث تفوز هند بهذه اللعبة ثم حلها. (الدرس 2-3)
$\mathbf{|x-128| = 3}$
أصغر طول هو 125 cm وأكبر طول هو 131 cm

إذا كانت $a=-3, b=5, c=-4$ فأوجد قيمة كل ممّا يأتي: (الدرس 2-3)

11) $|a-2|$ **5**

12) $8|c+7|$ **24**

13) $3|a-b|-1$ **23**

14) $|c+b|-|a|$ **−2**

15) يقيس ميزان نابضي الأوزان بزيادة أو نقصان مقدارها 0.005 kg، ما أكبر وزن حقيقي ممكن لجسم وزنه 13 kg باستعمال هذا الميزان؟ (الدرس 2-3) **13.005 kg**

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

16) $|2x-3| = 5$ $\mathbf{\{-1, 4\}}$

17) $|x+1| = 2x-6$ $\mathbf{\{7\}}$

18) $|x+17| = -1$ $\mathbf{\varnothing}$

19) $3x+1 = |4x-2|$ $\mathbf{\{3, \frac{1}{7}\}}$

20) إذا كان a عددًا حقيقيًّا يحقق $|a| = -a$، فماذا يعني ذلك؟ (الدرس 2-3) $\mathbf{a < 0}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدرسان 1-3 ، 2-3	**مصادر الفصل**	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	**زيارة الموقع**	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (160)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

3-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

حَلّ معادلات تحتوي قيمًا مطلقة.

الدرس 3-3

حَلّ متباينات بخطوة واحدة.
حَلّ متباينات بعدة خطوات.

ما بعد الدرس 3-3

حَلّ نظام من المتباينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إذا علمت خولة أنها لن تستعمل أكثر من 400 دقيقة في الشهر، فأيُّ العرضين أفضل لها؟ العرض الأول
- كم ستدفع إذا استعملت 800 دقيقة في الشهر على العرض الأول، وكم ستدفع إذا استعملت العرض الثاني؟ BD 30 ، BD 25.2
- إذا استعملت 1000 دقيقة في الشهر، فأي العرضين أفضل لها؟ العرض الثاني

3-3 حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد

Solving Linear Inequalities in One Variable

فيما سبق

درستُ حَلّ معادلات تحتوي قيمًا مطلقة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحلّ متباينات بخطوة واحدة.
- أحلّ متباينات بعدة خطوات.

المفردات الأساسية

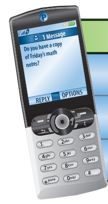
الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تفاضل خولة بين عرضين مقدّمين من شركة اتصالات، ويُبيّن الجدول أدناه تفاصيل كل من العرضين.

	العرض الأول	العرض الثاني
الاشتراك الشهري	BD 12	BD 30
عدد الدقائق ضمن العرض	400	2000
سعر الدقيقة الإضافية الواحدة	BD 0.033	BD 0.030



للمقارنة بين العرضين واختيار العرض الأفضل يمكنك استعمال المتباينات. تلاحظ أن الاشتراك الشهري للعرض الأول أقل منه للعرض الثاني، حيث BD 30 > BD 12. في حين أن سعر الدقيقة الواحدة في العرض الأول أكبر منها في العرض الثاني، حيث BD 0.033 > BD 0.030.

حَلّ متباينات بخطوة واحدة: لأي عددين حقيقيين a, b تكون واحدة من العبارات الآتية صحيحة:

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

إضافة العدد نفسه أو طرحه من كلا طرفي المتباينة لا يغير صحة المتباينة.

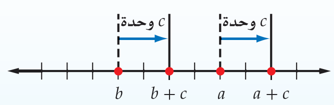
مفهوم أساسي: خصائص التباين

أضف إلى مطويتك

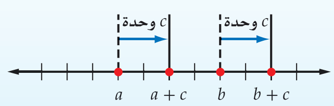
خاصية الجمع للمتباينات

التعبير اللفظي لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c: **النموذج**

إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.



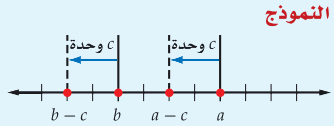
إذا كان $a < b$، فإن $a + c < b + c$.



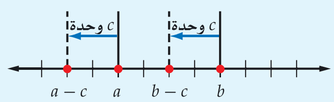
خاصية الطرح للمتباينات

التعبير اللفظي لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c: **النموذج**

إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.



إذا كان $a < b$، فإن $a - c < b - c$.



هذه الخصائص صحيحة أيضًا في حالة $\le$ ، $\ge$ ، $\ne$

قراءة الرياضيات

الصفة المميزة للمجموعة
تقرأ $\{y \mid y < 9\}$ مجموعة كل الأعداد y، حيث y أقل من 9.

يمكن استعمال هذه الخصائص لحل المتباينات، كما يمكن تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة في متغير واحد على خط الأعداد، وتكتب مجموعة حَلّ المتباينة باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**.

مصادر الدرس 3-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (177)	• تنويع التعليم، ص (177, 181)	• تنويع التعليم، ص (177, 181)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

حلّ متباينات بخطوة واحدة

مثال 1 يُبيّن كيفية حَلّ متباينة باستعمال الجمع أو الطرح.

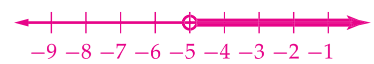
مثال 2 يُبيّن كيفية حَلّ متباينة باستعمال الضرب أو القسمة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد مجموعة حل المتباينة $4y - 3 < 5y + 2$، ثم مثّلها على خط الأعداد. $\{y | y > -5\}$

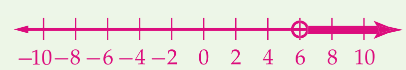


تنبيه !

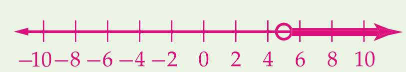
تجنب الأخطاء اسأل الطلبة هل يوجد اختلاف بين رموز التباين $\leq, \geq, <, >$ عند استعمال خاصيتي الجمع والطرح للمتباينات؟ لا يوجد اختلاف في الحسابات، ولكن يوجد اختلاف في اتجاه وبداية تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد.

إجابات:

1A) $\{w | w > 6\}$



1B) $\{x | x > 5\}$



مراجعة المفاهيم

رموز المتباينات

$>$ أكبر من، أو أكثر من.

$<$ أقل من، أو أصغر من.

$\geq$ أكبر من أو يساوي، على الأقل، ليس أقل من.

$\leq$ أقل من أو يساوي، على الأكثر، لا يزيد عن.

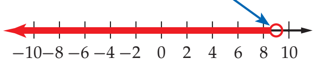
مثال 1 حَلّ المتباينات باستعمال خاصيتي الجمع والطرح

أوجد مجموعة حل المتباينة $y - 6 < 3$، ثم مثّلها على خط الأعداد.

المتباينة الأصلية	$y - 6 < 3$
بإضافة 6 إلى طرفي المتباينة	$y - 6 + 6 < 3 + 6$
بالتبسيط	$y < 9$

أي عدد حقيقي أقل من 9 هو حَلّ للمتباينة ويمكن كتابة مجموعة الحل باستعمال الصفة المميزة للمجموعة على النحو $\{y | y < 9\}$. ويمكن تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد كما في الشكل المجاور.

تعني الدائرة غير المظللة أن هذه النقطة لا تنتمي إلى مجموعة الحل



تحقق: عوّض بـ 8 ثم 10 عن y في المتباينة الأصلية $y - 6 < 3$. يجب أن تكون المتباينة صحيحة عندما $y = 8$، وخاطئة عندما $y = 10$.

تأكد

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: **1A, 1B** انظر الهامش

1A) $5w + 3 > 4w + 9$ **1B)** $5x - 3 > 4x + 2$

إرشادات للدراسة

تمثيل المتباينات على خط الأعداد عندما تحتوي المتباينة أحد الرمزين $<$ أو $>$، فإننا نستعمل دائرة غير مظللة؛ لتمثيل مجموعة الحل. أما إذا احتوت أحد الرمزين $\leq$ أو $\geq$، فإننا نستعمل دائرة مظللة لتمثيل مجموعة الحل.

إن ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد موجب، أو قسمتهما عليه لا يغير من اتجاه رمز المتباينة، على حين أن الضرب في عدد سالب، أو القسمة عليه يتطلّب عكس اتجاه رمز المتباينة. فعلى سبيل المثال يُعكس الرمز $\leq$ إلى $\geq$.

مفهوم أساسي خصائص التباين

أضف إلى مطويتك

خاصية الضرب للمتباينات

التعبير اللفظي لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

التعبير اللفظي		أمثلة
حيث c عدد موجب	إذا كان $a > b$، فإن $ac > bc$. إذا كان $a < b$، فإن $ac < bc$.	$-5 < -3$ $-5(6) < -3(6)$ $-30 < -18$
حيث c عدد سالب	إذا كان $a > b$، فإن $ac < bc$. إذا كان $a < b$، فإن $ac > bc$.	$12 > -7$ $12(-4) < -7(-4)$ $-48 < 28$

خاصية القسمة للمتباينات

التعبير اللفظي لأي ثلاثة أعداد حقيقية c, b, a

التعبير اللفظي		أمثلة
حيث c عدد موجب	إذا كان $a > b$، فإن $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. إذا كان $a < b$، فإن $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	$-12 < -8$ $\frac{-12}{4} < \frac{-8}{4}$ $-3 < -2$
حيث c عدد سالب	إذا كان $a > b$، فإن $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. إذا كان $a < b$، فإن $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	$-21 < -14$ $\frac{-21}{-7} > \frac{-14}{-7}$ $3 > 2$

هذه الخصائص صحيحة أيضًا في حالة $\leq$ ، $\geq$ ، $\neq$

مثال 2 حَلّ متباينة باستعمال خاصيتي الضرب أو القسمة

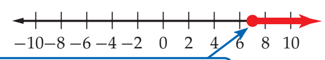
أوجد مجموعة حل المتباينة $-4.2x \le -29.4$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد.

$-4.2x \le -29.4$ المتباينة الأصلية

$\frac{-4.2x}{-4.2} \ge \frac{-29.4}{-4.2}$ بقسمة كلا الطرفين على -4.2 ، وعكس اتجاه رمز المتباينة

$x \ge 7$ بالتبسيط

مجموعة الحل هي $\{x | x \ge 7\}$ ، وتمثيلها على خط الأعداد مبيّن أدناه.



تحقق: عوّض بـ 6، ثم 8 عن x في المتباينة الأصلية $-4.2x \le 29.4$ ، يجب أن تكون المتباينة صحيحة عندما $x = 8$ ، وخاطئة عندما $x = 6$. ✓

تأكد (2A, 2B) انظر ملحق الإجابات

أوجد مجموعة حل كلًا من المتباينتين الآتيتين، ثم مثّلها على خط الأعداد:

(2A $-4x \ge -24$

(2B $-9.2y < 23$

إرشادات للدراسة

عند الضرب في عدد سالب، أو القسمة على عدد سالب، تذكّر أن تعكس اتجاه رمز المتباينة.

حَلّ المتباينات بعدة خطوات يشبه حَلّ المتباينات بعدة خطوات حَلّ المعادلات بعدة خطوات.

مثال 3 حَلّ المتباينات بعدة خطوات

أوجد مجموعة حل المتباينة $-4c \le \frac{5c+58}{6}$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد.

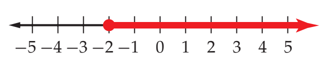
$-4c \le \frac{5c+58}{6}$ المتباينة الأصلية

$-24c \le 5c + 58$ بضرب كلا الطرفين في 6

$-29c \le 58$ بإضافة $-5c$ لكلا الطرفين

$c \ge -2$ بقسمة كلا الطرفين على -29 ، وعكس اتجاه رمز المتباينة

مجموعة الحل هي $\{c | c \ge -2\}$ ، وتمثيلها على خط الأعداد مبيّن أدناه.



تحقق: عوّض بـ -3 ، ثم -1 بدلًا من x في المتباينة الأصلية $-4c \le \frac{5c+58}{6}$ ، يجب أن تكون المتباينة صحيحة عندما $x = -1$ ، وغير صحيحة عندما $x = -3$. ✓

تأكد

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: للتدريبات 3A-3D انظر ملحق الإجابات

(3A $-3x \le \frac{-4x+22}{5}$

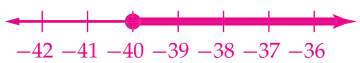
(3B $8y \ge \frac{-5y+9}{-4}$

(3C $-6(-4v+3) \le 2(10v+3)$

(3D $-5(3d-7) > 3(2d+14)$

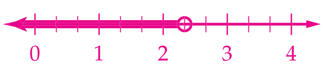
مثال إضافي

2 أوجد مجموعة حل المتباينة $12 \ge -0.3p$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد. $\{p | p \ge -40\}$



مثال إضافي

3 أوجد مجموعة حل المتباينة $-x > \frac{x-7}{2}$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد. $\left\{x \mid x < \frac{7}{3}\right\}$



تنبيه !

تجنّب الأخطاء ذكّر الطلبة بأنه لتبقى المتباينة أثناء الحَلّ مطابقة للمتباينة الأصلية، فإنه يجب أن تترافق عملية القسمة على عدد سالب مع عكس اتجاه رمز التباين في الخطوة نفسها.

حَلّ المتباينات بعدة خطوات

مثال 3 يُبيّن كيفية حَلّ متباينات بعدة خطوات.

مثال 4 يُبيّن كيفية كتابة المتباينة، واستعمالها في حَلّ مسائل حياتية.

التركيز في المحتوى الرياضي

خصائص التباين إضافة العدد نفسه، أو طرحه من طرفي المتباينة لا يغيّر صحة المتباينة. كما أن ضرب طرفي المتباينة في عدد موجب، أو قسمتها على عدد موجب لا يغيّر صحة المتباينة أيضًا، ولكن ضرب طرفي المتباينة في عدد سالب، أو قسمتها على عدد سالب يغيّر صحة المتباينة.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

اجتماعي اطلب إلى الطلبة مناقشة الفرق بين حَلّ المعادلة وحَلّ المتباينة، ثم ناقش معهم كيف أن إجراءات الحَلّ هي نفسها.

مثال 4 كتابة المتباينة وحلها

دعاية إلكترونية: تدفع إحدى الشركات مبلغ BD 75 أجرة شهرية مقابل وضع إعلان لها على أحد مواقع الدعاية الإلكترونية، بالإضافة إلى BD 0.25 عن كل زائر للموقع يقرأ هذا الإعلان، ما أقل عدد من الزوّار يجب أن يقرأ الإعلان ليحصل الموقع الدعائي على BD 250 أو أكثر شهريًا من هذه الشركة؟

افهم: افترض أن c هو عدد الزوار الذين يقرؤون الإعلان. يحصل الموقع على BD 75 شهريًا، بالإضافة إلى BD 0.25 عن كل زائر يقرأ الإعلان. يريد القائمون على الموقع الحصول على مبلغ لا يقل عن BD 250 مقابل هذا الإعلان.

خطط: اكتب متباينة.

التعبير اللفظي الدخل الشهري هو BD75 ، بالإضافة إلى BD0.25 عن كل زائر . والدخل الكلي يجب أن يكون BD250 على الأقل .

الرموز افترض أن c تمثّل عدد الزوار الذين يقرؤون الإعلان شهريًا.

المتباينة

250 دينارًا	يساوي على الأقل	أجرة إضافية عن كل زائر	بالإضافة إلى	الأجرة الشهرية
250	$\geq$	$0.25c$	+	75

حُلّ:

$75 + 0.25c \geq 250$ المتباينة الأصلية

$0.25c \geq 175$ بطرح 75 من كلا الطرفين

$c \geq 700$ بقسمة كلا الطرفين على 0.25

تحقق:

$75 + 0.25c \geq 250$ المتباينة الأصلية

$75 + 0.25(700) \overset{?}{\geq} 250$ بتعويض c مكان 700

$75 + 175 \overset{?}{\geq} 250$ بالضرب

$250 \geq 250$ ✓ بالجمع

للحصول على مبلغ شهري من هذا الإعلان أكثر من أو يساوي BD 250 ، يجب أن يكون عدد زوار الموقع الذين يقرؤون الإعلان شهريًا 700 زائر على الأقل.

الربط مع واقع الحياة

كان عدد مواقع الإنترنت المختلفة عام 2007 108000000 موقع.

تأكد

4) اشترك أسامة في أحد عروض الهاتف المحمول، فكان عليه أن يدفع اشتراكًا شهريًا مقداره BD 5 ، بالإضافة إلى BD 0.02 عن كل دقيقة اتصال فوق عدد الدقائق المسموح بها في العرض. كم دقيقة اتصال يمكن أن يجريها أسامة، على ألا تزيد التكلفة الشهرية عن BD 7 ؟ 100 دقيقة

تأكد من فهمك

الأمثلة 1-3 الصفحتان 180، 181

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: انظر الهامش

1) $b + 6 < 14$ 2) $12 - d > -8$

3) $18 \leq -3x$ 4) $-5y \geq -35$

5) $-4w - 13 > -21$ 6) $8z - 9 \geq -15$

7) $s \geq \frac{s+6}{5}$ انظر ملحق الإجابات 8) $\frac{2x-9}{4} \leq x + 2$

مثال 4 صفحة 182

9) **حمولة:** جمع عبدالكريم منتجات مزرعته من التمور في صناديق يزن كل منها 24 kg، ويريد نقلها إلى السوق في شاحنة، على ألّا تزيد حمولة الشاحنة عن 1000 kg، ويريد أيضًا اصطحاب أرضية خشبية تزن 34 kg ليعرض عليها منتجاته، ما أكبر عدد من الصناديق التي يمكن أن ينقلها عبدالكريم بأمان في كل حمولة؟ 40 صندوقًا على الأكثر

مثال إضافي

4 **سعر البيع:** ذهبت مريم إلى أحد محلات المواد الغذائية وكان معها BD 15 . اشترت كيسًا من رقائق البطاطس، وكوب عصير بـ BD 1.59 ، وأرادت أن تشتري علبًا من البسكويت، إذا كان سعر العلبة الواحدة BD 2.89 ، فما أكبر عدد من علب البسكويت يمكن أن تشتريها مريم؟ بما أن مريم لا تستطيع شراء جزء من علبة، فإنها لا تستطيع شراء أكثر من 4 علب.

3 التدريب

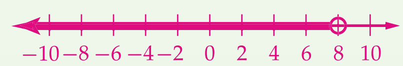
التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–9 للتأكد من فهم الطلبة.

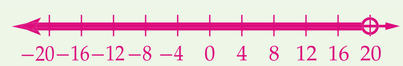
ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

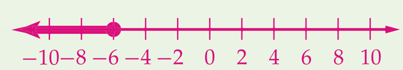
1) $\{b \mid b < 8\}$



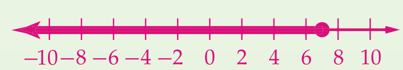
2) $\{d \mid d < 20\}$



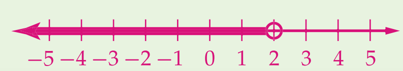
3) $\{x \mid x \leq -6\}$



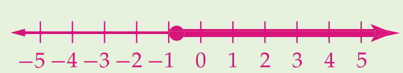
4) $\{y \mid y \leq 7\}$



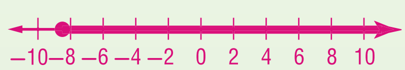
5) $\{w \mid w < 2\}$



6) $\{z \mid z \geq -\frac{3}{4}\}$



8) $\{x \mid x \geq -8.5\}$



تمارين ومسائل

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: للتمارين 21-10 انظر ملحق الإجابات

الأمثلة 3-1 الصفحتان 180، 181

10) $m - 8 > -12$ 11) $n + 6 \leq 3$ 12) $6r < -36$

13) $-12t \geq -6$ 14) $-\frac{w}{4} \leq -7$ 15) $\frac{k}{3} - 14 < -5$

16) $4x - 15 \leq 21$ 17) $-6z - 14 > -32$ 18) $-16 \geq 5(2z - 11)$

19) $12 < -4(3c - 6)$ 20) $\frac{3y - 4}{0.2} - 8 > 12$ 21) $\frac{9z + 5}{4} + 18 < 26$

مثال 4 صفحة 182

22) **رياضة:** تُحتسب درجة المتسابق النهائية في إحدى المسابقات الرياضية بإضافة 75% من درجة إتقان المهارات الرياضية إلى 25% من درجة اللياقة البدنية، على أن تكون درجة المتسابق النهائية من 10. إذا حصل أحد المتسابقين على 7.6 درجات في إتقان المهارات، فكم يجب أن تكون درجته في اللياقة البدنية لتكون درجته النهائية 8 على الأقل؟ 9.2

عرّف متغيرًا واستعمله في التعبير عن كل مما يأتي بمتباينة، ثم حلها:

23) ثلاثة أمثال عدد ما مطروحًا منه 12 أقل من 21. $3x - 12 < 21,\ x < 11$

24) ناتج قسمة ثلاثة أمثال عدد ما على 4 يساوي 16− على الأقل. $\frac{3x}{4} \geq -16,\ x \geq -\frac{64}{3}$

25) ناتج طرح العدد 6 من خمسة أمثال عدد ما أكبر من العدد. $5x - 6 > x,\ x > 1.5$

26) ناتج جمع عدد ما إلى 3 مقسومًا على 6 أقل من 2− . $\frac{x + 3}{6} < -2,\ x < -15$

27) **نزهة برية:** قطع أحمد ما لا يقل عن 18 km سيرًا على الأقدام في نزهة برية، إذا كان معدل سرعته 3 km/h، واستراح ساعتين في أثناء النزهة، فحُلّ المتباينة $3(x - 2) \geq 18$ لمعرفة عدد الساعات التي أمضاها أحمد في هذه النزهة. 8 h

الربط مع واقع الحياة

يُعد درب الأبالاش البري الممتد بطول 2175 mi بين ولايتي جورجيا وماين الأمريكيتين الأطول في العالم، ويمر عبر غابات وسلاسل جبلية.

المصدر: Appalachian Trial Conservancy

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: للتمارين 36-28 انظر الهامش

28) $18 - 3x < 12$ 29) $-8(4x + 6) < -24$ 30) $\frac{1}{4}n + 12 \geq \frac{3}{4}n - 4$

31) $0.24y - 0.64 > 3.86$ 32) $10x - 6 \leq 4x + 42$ 33) $-6v + 8 > -14v - 28$

34) $n > \frac{-3n - 15}{8}$ 35) $-2r < \frac{6 - 2r}{5}$ 36) $\frac{9z - 4}{5} \leq \frac{7z + 2}{4}$

37) **مال:** يعمل يوسف مندوبًا للمبيعات، ويتقاضى راتبًا أسبوعيًا يبلغ 60 BD، بالإضافة إلى 2% من قيمة كل صفقة يجريها. إذا كان متوسط قيمة الصفقات التي يجريها 200 BD، فكم صفقة يجب أن يجري يوسف أسبوعيًا للحصول على راتب أسبوعي لا يقل عن 180 BD؟

a) اكتب متباينة تصف هذا الموقف. $60 + 0.02(200a) \geq 180$

b) حُلّ المتباينة في الفرع a، وبرِّر إجابتك. 30 صفقة على الأقل

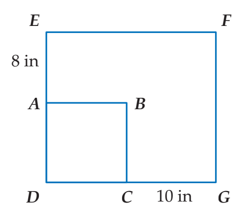
عرّف متغيّرًا، واستعمله في التعبير عن كل من التمرينين 38، 39 بمتباينة، ثم حُلّها.

38) ناتج جمع خمسة أمثال عدد ما إلى 3 مقسومًا على 3، أقل من ناتج جمع ستة أمثال العدد نفسه إلى 5 مقسومًا على 4. $\frac{5n + 3}{3} < \frac{6n + 5}{4},\ n < 1.5$

39) مجموع ثلث عدد ما إلى 4 يساوي على الأكثر ناتج جمع مثلي ذلك العدد إلى 12 .

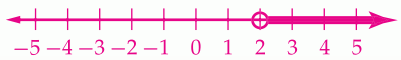
39) $\frac{x}{3} + 4 \leq 2x + 12,\ x \geq -4.8$

40) **هندسة:** تمدد المربع $ABCD$ بصورة غير منتظمة ليصبح المستطيل $DEFG$. وكان محيط المستطيل الناتج يساوي مثلي محيط المربع على الأقل، ما أكبر طول ممكن لضلع المربع $ABCD$؟ 9 in

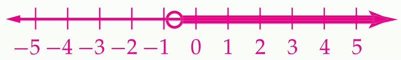


إجابات:

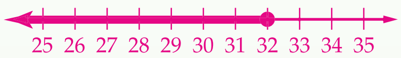
28) $\{x \mid x > 2\}$



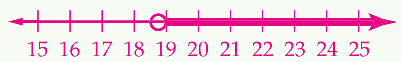
29) $\{x \mid x > -\frac{3}{4}\}$



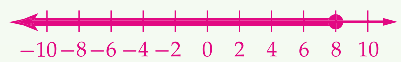
30) $\{n \mid n \leq 32\}$



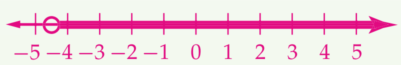
31) $\{y \mid y > 18.75\}$



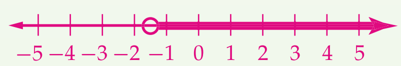
32) $\{x \mid x \leq 8\}$



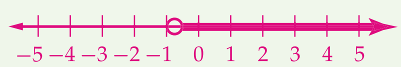
33) $\{v \mid v > -4.5\}$



34) $\{n \mid n > -\frac{15}{11}\}$



35) $\{r \mid r > -\frac{3}{4}\}$



36) $\{z \mid z \leq 26\}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	22-10، 62-45
ضمن ضمن المتوسط	21-11 فردي، 27-22، 35-29 فردي، 43-37، 62-45
فوق فوق المتوسط	56-23، (اختياري: 62-57)

41) **ماراثون:** يتدرب عبدالعزيز ليكون قادرًا على المشاركة في سباق ماراثون البحرين، والذي مسافته 26.2 mi، وبحسب النصائح الرياضية، يكون للمتسابق القدرة على إنهاء سباق طوله 3 أمثال مسافة التدريب التي يجريها يوميًّا.

a) إذا كان عبدالعزيز يتدرَّب يوميًّا على الجري مسافة 5 mi، فاكتب متباينة تُبيِّن عدد الأميال التي يتعيّن على عبدالعزيز زيادتها على مسافة التدريب اليومي؛ ليكون قادرًا على إنهاء السباق. انظر ملحق الإجابات

b) حُلّ المتباينة في الفرع a. انظر ملحق الإجابات

الربط مع واقع الحياة

يُعد سباق ماراثون البحرين أقدم سباقات الجري في الشرق الأوسط، ويشارك فيه رياضيّون من البحرين والمنطقة.

42) **مال:** يُبيّن الجدول المجاور عرضين مختلفين لسعر استئجار سيارة. ما المسافة التي يكون عندها سعر العرض B أقل منه للعرض A؟ استعمل المتباينة $13 + 0.05x < 11 + 0.10x$. ووضّح لماذا تكون هذه المتباينة مناسبة. انظر الهامش

أجرة استئجار سيارة

العرض	الأجرة اليومية	أجرة الكيلومترات المقطوعة
A	BD 11	BD 0.10
B	BD 13	BD 0.05

43) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذا التمرين كيفية تمثيل المتباينات بيانيًّا.

a) **جدولة:** عوّض 5 أزواج مرتبة في المتباينة $y \ge -\frac{1}{2}x + 3$ ورتِّب النواتج في جدول، وحدّد ما إذا كانت النقاط تحقق المتباينة أو لا بالإجابة بـ "نعم" أو "لا". انظر الهامش

b) **تمثيل بياني:** مثّل المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 3$ بيانيًّا في المستوى نفسه، ثم مثّل النقاط الخمس في الفرع a، وحدّد ما إذا كانت النقاط تحقق المعادلة أو لا بالإجابة بـ "نعم" أو "لا". انظر الهامش

c) **تعبير لفظي:** صف النمط في النقاط التي اخترتها. وقدّم تخمينًا للنقاط التي تجعل المتباينة صحيحة، والأخرى التي تجعلها خاطئة. انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **تحدٍّ:** إذا كان $-4 < x < 5$, $0.25 < y < 4$، فإن $a < \frac{x}{y} < b$. مما قيمة $a + b$؟ 4

45) **اكتشف الخطأ:** قارنت أسماء ونور بين حلّيهما لسؤال الواجب المنزلي، أيهما حلُّها صحيح؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

أسماء

$\frac{4x+5}{-2} - 1 > -3$

$\frac{4x+5}{-2} < -2$

$4x + 5 > 4$

$4x > -1$

$x > -\frac{1}{4}$

نور

$\frac{4x+5}{-2} - 1 > -3$

$\frac{4x+5}{-2} > -2$

$4x + 5 > 4$

$4x > -1$

$x > -\frac{1}{4}$

46) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

"النظير الجمعي للقيمة المطلقة لعدد سالب أقل من النظير الجمعي لذلك العدد."

47) **مسألة مفتوحة:** اكتب متباينة على الصورة $ax + b > c(x + d)$ على أن تكون مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الحقيقية. فسّر كيف عرفت ذلك؟ انظر ملحق الإجابات

48) **اكتب:** لماذا يجب عكس اتجاه رمز المتباينة عند الضرب، أو القسمة على عدد حقيقي سالب؟ انظر ملحق الإجابات

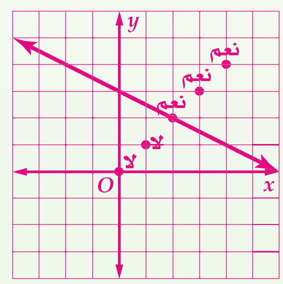
إجابات:

42) العرض B أقل سعرًا للمسافة التي تزيد على 40 km، هذه المتباينة مناسبة لأنها تُبيِّن المسافة التي يكون عندها العرض B أقل سعرًا من العرض A.

43a) إجابة ممكنة:

النقطة	ناتج التعويض	هل تحقق المتباينة؟
(0, 0)	$0 \ge 3$	لا
(1, 1)	$1 \ge \frac{5}{2}$	لا
(2, 2)	$2 \ge 2$	نعم
(3, 3)	$3 \ge \frac{3}{2}$	نعم
(4, 4)	$4 \ge 1$	نعم

43b) إجابة ممكنة:



43c) إجابة ممكنة: النقاط الواقعة على المستقيم أو فوقه تحقق المتباينة، أما النقاط التي تقع تحت المستقيم فلا تحققها. وهذا صحيح لجميع نقاط المستوى الإحداثي.

45) ليس أيهما، إجابة ممكنة: عكست أسماء رمز التباين عندما أضافت 1 لكلا الطرفين، بينما لم تعكس نور رمز التباين على الإطلاق.

46) إجابة ممكنة: دائمًا، عكس إشارة القيمة المطلقة لعدد سالب سوف يكون دائمًا سالبًا، بينما عكس إشارة عدد سالب هو دائمًا موجب. والقيمة السالبة دائمًا أقل من القيمة الموجبة.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلبة عمل مدونة يُبيّنون فيها كيفية حَلّ متباينات بعدة خطوات. تأكد من بيانهم للحالات التي يُعكَس فيها رمز التباين.

184 الفصل 3 المعادلات والمتباينات

تدريب على اختبار معياري

49) a, b, c ثلاثة أعداد حقيقيّة، حيث $c > 0$. إذا كانت $a < b$، فأي مما يأتي صحيح؟ **F**

F $ac > bc$ H $a - b > b - c$

G $a + c > b + c$ J $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

50) ما حَلّ المعادلة $40 = |8 - 4x|$ ؟ **D**

A $x = 8 , x = 12$

B $x = 8 , x = -12$

C $x = -8 , x = -12$

D $x = -8 , x = 12$

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من صحة حلّك: (الدرس 2-3)

51) $|x - 5| = 12$ **$\{-7, 17\}$** 52) $7|3y - 4| = 35$ **$\{-\frac{1}{3}, 3\}$** 53) $|a + 6| = a$ **$\varnothing$**

54) **فضاء:** يدور كوكب بلوتو حول الشمس في مسار بيضوي. إذا كانت أبعد مسافة بينه وبين الشمس في مساره 4539 مليون ميل، وأقرب مسافة 2756 مليون ميل. اكتب معادلة يمكن حلها لإيجاد أبعد مسافة وأقرب مسافة بين الشمس وكوكب بلوتو. (الدرس 2-3) **$|t - 3647.5| = 891.5$**

$26 \cdot 17 = 26(10 + 7) = 280 + 182 = 442$

55) **هندسة:** صيغة مساحة سطح الأسطوانة هو $SA = 2\pi r^2 + 2\pi rh$، حيث r نصف قطر القاعدة، h الارتفاع (الدرس 1-3)

a) استعمل الخاصية التوزيعية لإعادة كتابة الصيغة، وذلك بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) . **$SA = 2\pi r(r + h)$**

b) أوجد باستعمال الصيغتين مساحة سطح أسطوانة نصف قطر قاعدتها 3 cm، وارتفاعها 10 cm . لتكن الإجابة بدلالة π . **$78\pi\ cm^2$**

c) أيّ الصيغتين أفضل في رأيك؟ وضّح إجابتك. **إجابه ممكنة : الطريقة في الفرع b أسرع**

56) **بناء:** صمّم مهندس صالة رياضية مستطيلة الشكل بُعداها 17 m, 26 m . بيّن كيف يمكنك استعمال الخاصية التوزيعية لحساب مساحة سطحها ذهنيًّا. (الدرس 1-3) **$26 \cdot 17 = 26(10 + 7) = 260 + 182 = 442$**

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من صحة حلّك:

57) $|x| = 9$ **$\{-9, 9\}$** 58) $|x + 3| = 10$ **$\{-13, 7\}$** 59) $|4y - 15| = 13$ **$\{\frac{1}{2}, 7\}$**

60) $18 = |3x - 9|$ **$\{-3, 9\}$** 61) $16 = 4|w + 2|$ **$\{-6, 2\}$** 62) $|y + 3| + 4 = 20$ **$\{-19, 13\}$**

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 43، جدول القيم، والتمثيل البياني؛ لاستكشاف تمّثيل المتباينات بيانيًّا.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى كل طالب كتابة قائمة بمتباينات وحلولها، بحيث يحدّد في القائمة متى يعكس رمز التباين، وكيف يُمثّل مجموعة الحَلّ على خط الأعداد، ويسلمها قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 3-3 ,3-2، بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 3.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع حُلّ المتباينة $\frac{6}{x} \geq 2$. (إرشاد: اضرب كلا الطرفين في x . ادرس الحالتين $x > 0$ ، $x < 0$ كلاًّ على حدة) **x أكبر من صفر وأقل من أو تساوي 3 .**

استكشاف **3-4**

معمل الجبر:

رمز الفترة

Interval Notation

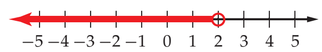
الهدف: استعمل رمز الفترة لوصف مجموعات من الأعداد.

يمكن استعمال رمز الفترة للتعبير عن مجموعة حَلّ متباينة. ويستعمل رمز اللانهاية أدناه للدلالة على أن المجموعة غير محدودة في الاتجاه الموجب أو الاتجاه السالب.

موجب مالانهاية ← $+\infty$ سالب مالانهاية ← $-\infty$

يستعمل الرمز) أو (للدلالة على أن الفترة لا تحتوي نقطة البداية أو نقطة النهاية. وكذلك يستعملان مع $+\infty$ و $-\infty$.

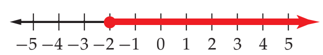
$x < 2$



رمز الفترة
$(-\infty, 2)$

ويستعمل الرمز] أو [للدلالة على أن الفترة تحتوي نقطة البداية أو نقطة النهاية.

$x \geq -2$



رمز الفترة
$[-2, +\infty)$

تكتب المتباينة المركبة $y \leq -7$ أو $y > -1$ باستعمال الفترات على الصورة $(-\infty, -7] \cup (-1, +\infty)$.

تمارين:

عبّر عن كل مجموعة مما يأتي باستعمال رمز الفترة:

1) $\{a \mid a \leq -3\}$ **$(-\infty, -3]$**

2) $\{n \mid n > -8\}$ **$(-8, +\infty)$**

3) $\{y \mid y < 2$ أو $y \geq 14\}$ **$(-\infty, 2) \cup [14, +\infty)$**

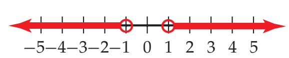
4) $\{b \mid b \leq -9$ أو $b > 1\}$ **$(-\infty, -9] \cup (1, +\infty)$**

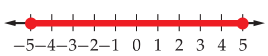
5) $\{t \mid 1 < t < 3\}$ **$(1, 3)$**

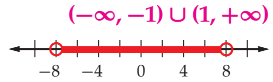
6) $\{m \mid m \geq 4$ أو $m \leq -7\}$ **$(-\infty, -7] \cup [4, +\infty)$**

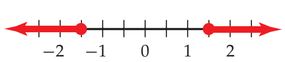
7) $\{x \mid x \geq 0\}$ **$[0, +\infty)$**

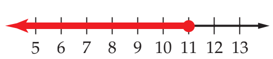
8) $\{r \mid -3 < r < 4\}$ **$(-3, 4)$**

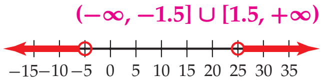
9)  **$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$**

10)  **$[-5, 5]$**

11)  **$(-8, 8)$**

12)  **$(-\infty, -1.5] \cup [1.5, +\infty)$**

13)  **$(-\infty, 11]$**

14)  **$(-\infty, -5) \cup (25, +\infty)$**

مثّل كل مجموعة حَلّ ممّا يأتي على خط الأعداد: **للتمارين 15–17 انظر الهامش**

15) $(-1, \infty)$

16) $(-\infty, 4]$

17) $(-\infty, 5] \cup (7, +\infty)$

18) **اكتب:** اكتب وصفًا لـ $(-\infty, 3) \cup [10, +\infty)$، ثم اكتب المتباينة المركبة التي تمثّلها. **انظر الهامش**

1 التركيز

الهدف استعمال رمز الفترة؛ لوصف مجموعة من الأعداد.

إرشادات للتدريس

قبل بدء هذا النشاط، اطلب إلى الطلبة التفكير في رموز رياضية استعملوها في دراسة الرياضيات سابقًا.

بعض الأمثلة يمكن أن تكون، رمز الجذر، أو رمز القطعة المستقيمة، أو رمز القسمة، وهكذا.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزِّع الطلبة في مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة، ثم اطلب إلى كل مجموعة حَلّ التمارين 1-5 .

بالنظر إلى كوْن الرموز في الرياضيات تستعمل للتعبير عن اللغة العددية للمفاهيم، فإن مهارة اللغة مهمة جدًّا. وإن أحد الطرق لتقديم المساعدة على فهم رموز الرياضيات هي ربط الرموز الجديدة بالرموز المعروفة لدى الطالب. فعلى سبيل المثال: في الرمز $+\infty$ ، الرمز المرتبط به والمعروف لدى الطالب هو +.

اطلب إلى الطلبة قراءة الرموز في التمارين بصوت مرتفع. تأكد أن الطلبة يستعملون لغة سليمة للتعبير عن الرموز. فعلى سبيل المثال، يجب أن يقول الطلبة: "موجب مالانهاية" عندما يرون $+\infty$ في التمارين.

تدريب اطلب إلى الطلبة أن يكملوا حَلّ التمارين 6-18 .

3 التقويم

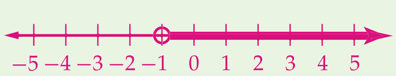
التقويم التكويني

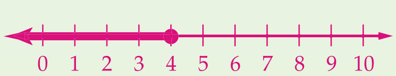
استعمل التمرين 18 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة لرموز الفترات، وما إذا كانوا يستطيعون كتابة متباينة مركبة إذا أُعطوا رمز الفترة.

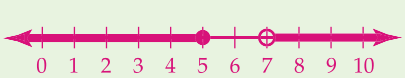
من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة تلخيص ما تعلموه عن الرموز المستعملة في التعبير عن الفترة. واطلب إليهم إعطاء مثال على كلٍّ منها.

إجابات:

15) 

16) 

17) 

18) جميع الأعداد الأقل من 3 تنتمي إلى مجموعة الحَلّ، وكذلك جميع الأعداد الأكبر من أو تساوي عشرة. $x < 3$ أو $x \geq 10$.

3-4 حَلّ المتباينات المركّبة ومتباينات القيمة المطلقة
Solving Compound and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درستُ حَلّ متباينات بخطوة واحدة وأخرى بعدة خطوات.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحُلّ متباينات مركّبة.
- أحُلّ متباينات القيمة المطلقة.

المفردات الأساسية

المتباينة المركبة
compound inequality
التقاطع
intersection
الاتحاد
union

www.obeikaneducation.com

لمــاذا؟

يقوم علماء الأحياء المائية بتكثير الدلافين، وذلك بنقلها من بيئتها الطبيعية إلى برك ذات ظروف مثالية، حيث درجة حرارة الماء لا تقل عن 22°C، ولا تزيد على 29°C. وهي درجة حرارة الماء t المثالية لعيش الدلافين، والتي يمكن التعبير عنها بالمتباينة المركبة الآتية:

$t \geq 22$ و $t \leq 29$

المتباينات المركبة تتكوّن **المتباينة المركبة** من متباينتين بينهما أداة الربط (و) أو (أو). ولحل المتباينة المركبة، يجب حَلّ المتباينتين المكوّنتين لها كل على حدة.

مفهوم أساسي — المتباينات المركبة التي تحتوي أداة الربط (و)

أضف إلى مطويتك

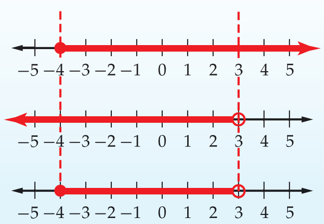
التعبير اللفظي تكون المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) صحيحة إذًا وفقط إذا كانت المتباينتان المكوّنتان لها صحيحتين. وتمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) على خط الأعداد هو **تقاطع** مجموعتي حَل المتباينتين المكوّنتين لها.

مثال

$x \geq -4$

$x < 3$

$x \geq -4$ و $x < 3$



يمكن كتابة المتباينة المركبة $x \geq -4$ و $x < 3$ على الصورة $-4 \leq x < 3$، وكلا الصورتين تقرآن x أكبر من أو يساوي -4 وأقل من 3.

مثال 1 حَلّ متباينة مركبة تحتوي على أداة الربط (و)

أوجد مجموعة حَلّ كلّ متباينة مركبة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد.

a) $-2 \leq x - 3 < 4$

الطريقة 1: أعد كتابة المتباينة باستعمال أداة الربط (و)، ثم حُلّ كل متباينة على حدة.

اكتب المتباينتين: $-2 \leq x - 3$ و $x - 3 < 4$

بإضافة العدد 3 لطرفي المتباينة: $-2 + 3 \leq x - 3 + 3$ ، $x - 3 + 3 < 4 + 3$

بالتبسيط: $1 \leq x$ ، $x < 7$

$1 \leq x < 7$

الطريقة 2: حُلّ المتباينتين معًا.

أضف العدد 3 إلى كل جزء في المتباينة.

$-2 + 3 \leq x - 3 + 3 < 4 + 3$

بالتبسيط: $1 \leq x < 7$

مجموعة الحل هي $\{x \mid 1 \leq x < 7\}$

3-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

حَلّ متباينات بخطوة واحدة وأخرى بعدة خطوات.

الدرس 3-4

حَلّ متباينات مركبة.

حَلّ متباينات القيمة المطلقة.

ما بعد الدرس 3-4

حَلّ نظام من المتباينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- هل درجة حرارة الماء المثالية لعيش الدلافين أكبر من 22°C أم أقل منها؟ أكبر من
- هل درجة حرارة الماء المثالية لعيش الدلافين أكبر من 29°C أم أقل منها؟ أقل من
- اكتب جملة لفظية تصف درجة حرارة الماء المثالية لعيش الدلافين، والتي تُمثّل المتباينة المركبة $t \geq 22$ و $t \leq 29$. درجة حرارة الماء المثالية لعيش الدلافين هي بين 22°C و 29°C.

مصادر الدرس 3-4

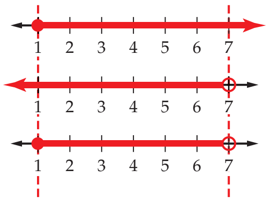
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (184)	• تنويع التعليم، ص (184،186)	• تنويع التعليم، ص (186)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

والآن مثّل مجموعة الحل.

مثّل $1 \le x$ على خط الأعداد

مثّل $x < 7$ على خط الأعداد

حدّد منطقة التقاطع



b) $8 < 5 - 3y \le 23$

الطريقة 1: أعد كتابة المتباينة باستعمال أداة الربط (و)، ثم حُلّ كل متباينة على حدة.

	$8 < 5 - 3y$	و $5 - 3y \le 23$
إضافة العدد (-5) لطرفي المتباينة	$8+(-5)<(-5)+5-3y$	$(-5)+5-3y\le 23+(-5)$
بالتبسيط	$3 < -3y$	$-3y \le 18$
بالقسمة على -3	$-1 > y$	$y \ge -6$

$-6 \le y < -1$

الطريقة 2: حُلّ المتباينتين معًا.

أضف العدد (-5) لكل جزء في المتباينة، ثم اقسم على -3

$8+(-5) < (-5)+5 - 3y \le 23+(-5)$

بالتبسيط $3 < -3y \le 18$

$-6 \le y < -1$

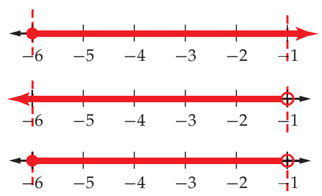
مجموعة الحل هي $\{y \mid -6 \le y < -1\}$

والآن مثّل مجموعة الحل.

مثّل $-6 \le y$ على خط الأعداد

مثّل $y < -1$ على خط الأعداد

حدّد منطقة التقاطع



تأكد 1A - 1C انظر ملحق الإجابات

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مركبة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

1A) $y-3 \ge -11$ و $y-3 \le -8$ **1B)** $-12 \le 4x + 8 \le 32$ **1C)** $-5 \ge -z - 2 > -14$

والآن ستتعرف على المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو).

مفهوم أساسي المتباينات المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو)

اضف إلى مطويتك

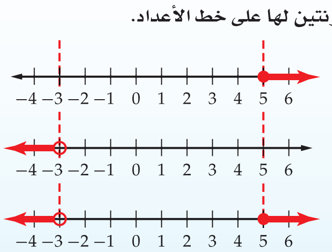
التعبير اللفظي تكون المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو) صحيحة، إذا كانت إحدى المتباينتين المكوّنتين لها أو أكثر صحيحة.
تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو) على خط الأعداد هو **اتحاد** مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوّنتين لها على خط الأعداد.

مثال

$x \ge 5$

$x < -3$

$x \ge 5$ أو $x < -3$



المتباينات المركبة

مثال 1 يُبيّن كيفية حَلّ متباينات مركبة تحتوي أداة الربط "و".

مثال 2 يُبيّن كيفية حَلّ متباينات مركبة تحتوي أداة الربط "أو".

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

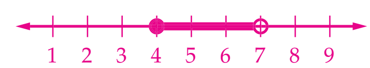
1 أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مركبة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

a) $f - 6 < 5$ and $f - 4 \ge 2$

$\{f \mid 6 \le f < 11\}$

b) $10 \le 3y - 2 < 19$

$\{y \mid 4 \le y < 7\}$



2 أوجد مجموعة حَلّ المتباينة المركبة $-x \le -4$ أو $x + 3 < 2$، ثم مثّلها على خط الأعداد.

$\{x \mid x < -1$ أو $x \ge 4\}$

تنبيه !

تجنب الأخطاء ذكر الطلبة بأن استعمال "و" في الطريقة 1 يعني أن قيمة $7 - 3y$ يجب أن تحقق كلا الشرطين، وهما أن تكون أكبر من 8 وأقل من أو تساوي 23 . يجب أن تكتب المتباينات المركبة التي تحتوي أداة الربط "أو" بصورة متباينتين مفصولتين أو أكثر تربط بينهما "أو"، ولا يمكن اختصارهما بمتباينة واحدة ثنائية. وضّح سبب عدم منطقية كتابة $x < 2$ أو $x > 7$ بصورة $7 < x < 2$.

188 الفصل 3 المعادلات والمتباينات

مثال 2 حَلّ متباينة مركبة تحتوي أداة الربط (أو)

أوجد مجموعة حَلّ المتباينة المركبة $k + 6 < -4$ أو $3k \geq 14$، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

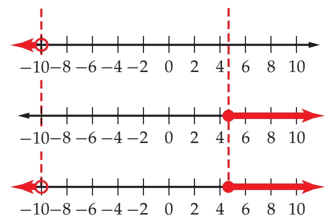
حُلّ كلًا من المتباينتين المكوّنتين للمتباينة المركبة على حدة .

$3k \geq 14$ أو $k + 6 < -4$

$k \geq \frac{14}{3}$ $k < -10$

$k < -10$ أو $k \geq \frac{14}{3}$

مجموعة الحل هي $\{k | k < -10$ أو $k \geq \frac{14}{3}\}$



تأكد للفرعين 2A, 2B انظر ملحق الإجابات

أوجد مجموعة حَلّ كلٍّ من المتباينتين المركبتين الآتيتين، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

2A) $5j \geq 15$ أو $-3j \geq 21$

2B) $g - 6 > -11$ أو $2g + 4 < -15$

عند حل مسائل حياتية على المتباينات استعمل أحد الرمزين ≤ أو ≥ عند وجود كلمات تدل على تضمين طرف المتباينة في الحل مثل على الأكثر، أو على الأقل. واستعمل أحد الرمزين > أو < عند ورود كلمات مثل بين، أقل من، أكبر من.

مثال 3 من واقع الحياة كتابة متباينة مركبة وتمثيلها على خط الأعداد

صوت: يمكن أن تسمع أُذن الإنسان الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هرتز ولايزيد على 20000 هرتز. **اكتب المتباينة المركّبة التي تمثّل الترددات التي لا يسمعها الإنسان، ومثّلها على خط الأعداد.**

تبين هذه المسألة الترددات التي يسمعها الإنسان، وعلينا أن نجد الترددات التي لا يسمعها الإنسان.

التعبير اللفظي	التردد	أقل من	20 هرتز	أو التردد أكبر من 20000 هرتز
الرموز	افترض أن f تمثل التردد			
المتباينة	f	$<$	20	أو $f > 20000$

والآن مثّل مجموعة الحل على خطّ الأعداد.

مثال إضافي

3 زواحف: تعيش معظم الأفاعي في المناطق التي تتراوح درجات الحرارة فيها من 75°F إلى 90°F. اكتب متباينة تمثل درجات الحرارة التي لا يمكن للأفاعي التعايش معها، ثم مثلها على خط الأعداد.

$t < 75$ أو $t > 90$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا أخطأ الطلبة في الربط بين كلمة اتحاد والحرف "و"؛ لأن كلمة اتحاد غالبًا ما تدل على ربط شيئين أو أكثر بعضهما ببعض،

فزوّد الطلبة ببعض الأفكار التي تساعدهم على التذكر مثل: " أو " تحتوي على الألف وهو الحرف الأول من كلمة "اتحاد"، في حين أن حرف الواو غير موجود في كلمة اتحاد.

متباينات القيمة المطلقة

المثالان 5-4 يُبيّنان كيفية حَلّ متباينات القيمة المطلقة.

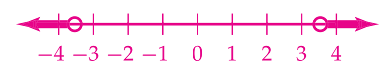
مثال إضافي

4 a) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|d| < 2$، ثم مثلها على خط الأعداد.

$\{d \mid -2 < d < 2\}$

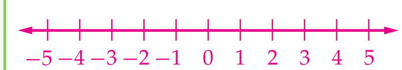
b) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|d| > \frac{7}{2}$، ثم مثلها على خط الأعداد.

$\{d \mid d < -3.5$ أو $d > 3.5\}$



c) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|d| \leq -\frac{3}{4}$ ثم مثلها على خط الأعداد.

$\varnothing$



إرشادات للمعلم الجديد

قراءة احرص على أن يفهم الطلبة معنى المثالين 4، 5 قبل أن يستمروا في الدرس. اطلب إليهم أن يقرؤوا المسألة بعبارة لفظية. (مثال 4: المسافة من 0 إلى x بغض النظر عن الاتجاه أقل من 4)، وبيِّن لهم أين يمكن تحديد x على خط الأعداد.

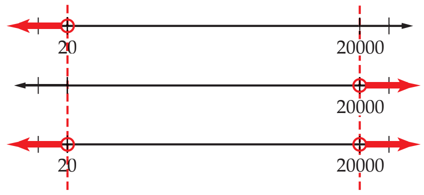
التركيز في المحتوى الرياضي

المتباينات المركبة يكون العدد حلًّا للمتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط "و"، إذا كان هذا العدد حلًّا لكلا المتباينتين فيها. ويكون العدد حلًّا للمتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط "أو"، إذا كان هذا العدد حلًّا لأي متباينة فيها.

مثّل $f < 20$ على خط الأعداد

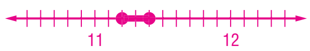
مثّل $f > 20000$ على خط الأعداد

حدّد منطقة الاتحاد



لاحظ أن التمثيلين لا يتقاطعان. أي أن الإنسان لا يستطيع سماع الأصوات التي ترددها أقل من 20 هرتز، أو التي ترددها أكبر من 20000 هرتز. والمتباينة المركبة هي: $f < 20$ أو $f > 20000$

$11.2 \leq f \leq 11.4$



تأكد

3) **صناعة:** تنتج شركة جهازًا لا يقل طوله عن 11.2cm، ولا يزيد عن 11.4cm. اكتب متباينة مركبة تصف الأطوال الممكنة لهذا الجهاز، ومثّلها على خط الأعداد.

متباينات القيمة المطلقة تعلمت في الدرس 2–3 أن القيمة المطلقة لأي عدد هي البُعد بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، ويمكنك الآن استعمال هذا التعريف لحل متباينات تحتوي قيمًا مطلقة.

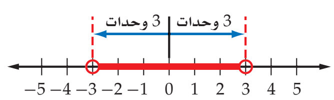
مثال 4 حَلّ متباينات القيمة المطلقة

أوجد مجموعة حَلّ كلٍّ من المتباينات الآتية، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

a) $|x| < 3$

تعني المتباينة $|x| < 3$، أن المسافة بين العدد x والصفر أقل من 3 وحدات على خط الأعداد. ولتكن $|x| < 3$ صحيحة، عوّض عن x بأعداد تبعُد مسافة أقل من 3 وحدات عن الصفر.

لاحظ أن تمثيل مجموعة الحل للمتباينة $|x| < 3$ على خط الأعداد هو التمثيل نفسه لمجموعة حل المتباينة المركبة $x > -3$ و $x < 3$.

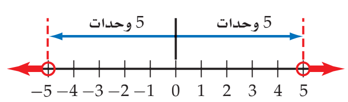


جميع الأعداد الواقعة بين -3 و 3 تبعُد مسافة أقل من 3 وحدات عن الصفر. أي أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -3 < x < 3\}$.

b) $|x| > 5$

تعني المتباينة $|x| > 5$، أن المسافة بين العدد x والصفر على خط الأعداد أكبر من 5 وحدات. ولتكن $|x| > 5$ صحيحة. عوّض عن x بأعداد تبعُد مسافة أكبر من 5 وحدات عن الصفر.

لاحظ أن تمثيل مجموعة الحل للمتباينة $|x| > 5$ على خط الأعداد هو التمثيل نفسه لمجموعة حل المتباينة المركبة $x < -5$ أو $x > 5$.



جميع الأعداد الواقعة بين -5 و 5 بما فيها العددان -5 و 5 هي على مسافة لا تزيد على 5 وحدات عن الصفر. أي أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x < -5$ أو $x > 5\}$.

c) $|y| < -4$

تعني المتباينة $|y| < -4$ ، أن المسافة بين العدد y والصفر على خط الأعداد أقل من -4 وحدات، وحيث أن المسافة هي قيمة موجبة دائمًا، فإن مجموعة الحل هي ϕ .

تأكد

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: للفروع 4A–4D انظر الهامش

4A) $|t| < 6$ 4B) $|u| < -3$

4C) $|t| > 3$ 4D) $|u| > -2$

إن المثال 3 يُبيّن أنه يمكن حَلّ متباينة القيمة المطلقة عن طريق إعادة كتابتها على صورة متباينة مركبة.

مفهوم أساسي متباينات القيمة المطلقة

أضف إلى مطويتك

إذا كانت a, b, c, x أعدادًا حقيقية، وكان $c > 0$ ، فإن العبارات الآتية صحيحة:

متباينة القيمة المطلقة	المتباينة المركّبة	مثال
$\|ax + b\| > c$	$ax + b > c$ أو $ax + b < -c$	إذا كان $\|4x + 5\| > 7$ ، فإن $4x + 5 < -7$ أو $4x + 5 > 7$.
$\|ax + b\| < c$	$-c < ax + b < c$	إذا كان $\|4x + 5\| < 7$ ، فإن $-7 < 4x + 5 < 7$.

هذه العبارات صحيحة أيضًا في حالة ≤ و ≥

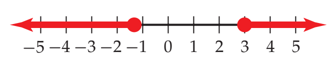
مثال 5 حَلّ متباينات القيمة المطلقة بعدة خطوات

أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|6y - 5| \geq 13$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد.

متباينة القيمة المطلقة $|6y - 5| \geq 13$ تكافئ المتباينة المركبة $6y - 5 \leq -13$ أو $6y - 5 \geq 13$.
حُلّ كل من المتباينتين على حدة.

بإعادة كتابة المتباينة	$6y - 5 \leq -13$	أو	$6y - 5 \geq 13$
بإضافة العدد 5 لكلا الطرفين	$6y \leq -8$		$6y \geq 18$
بقسمة كلا الطرفين على 6	$y \leq -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$		$y \geq 3$

مجموعة الحل هي $\left\{y \middle| y \leq -\frac{4}{3} \text{ أو } y \geq 3\right\}$ وتمثيلها على خط الأعداد مبيّن أدناه.



تأكد

أوجد مجموعة حَلّ كلٍّ من المتباينتين الآتيتين، ثم مثّلها على خط الأعداد: انظر الهامش

5A) $|4x - 7| > 13$ 5B) $|5z + 2| \leq 17$

يمكن استعمال متباينات القيمة المطلقة لحل مسائل حياتية.

إرشادات للدراسة

متباينات القيمة المطلقة بما أن القيمة المطلقة لأي عدد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|x| < -5$ ليس لها حَلّ. على حين أن حَلّ المتباينة $|x| > -5$ هو جميع الأعداد الحقيقية.

مثالان إضافيان

5 أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|2x - 2| \geq 4$ ، ثم مثلها على خط أعداد.
$\{x | x \leq -1 \text{ أو } x \geq 3\}$

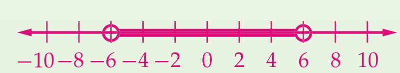
6 **البحث عن وظيفة:** قامت ليلى في أثناء استعدادها لمقابلات من أجل وظيفة ما بإجراء دراسة حول الوظائف المتوافرة وراتب كل منها، فوجدت أن متوسط الراتب السنوي الذي تبدأ به وظيفة ما هو BD 3850 ، ولكن القيمة الحقيقية للراتب يمكن أن تختلف عن متوسط قيمة الراتب بمقدار يقل عن أو يساوي BD 245 .

a) عبِّر عن الموقف بمتباينة قيمة مطلقة، معتبرًا قيمة الراتب الذي تبدأ به الوظيفة هي x .
$|3850 - x| \leq 245$

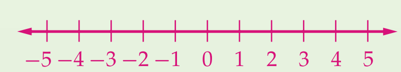
b) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة التي تُمثّل المدى المقبول لقيمة الراتب الذي تبدأ به الوظيفة.
$\{x | 3605 \leq x \leq 4095\}$.
إذن، سوف يكون الراتب ضمن BD 3605 و BD 4045

إجابات:

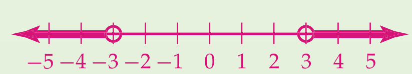
4A) $\{t \mid -6 < t < 6\}$



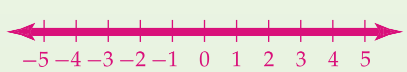
4B) $\varnothing$



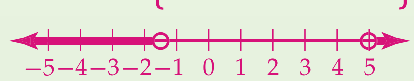
4C) $\{t \mid t > 3 \text{ أو } t < -3\}$



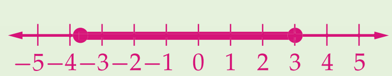
4D) جميع الأعداد الحقيقية (R)



5A) $\left\{x \middle| x < -\frac{3}{2} \text{ أو } x > 5\right\}$



5B) $\{z | -3.8 \leq z \leq 3\}$



مثال 6 كتابة متباينة القيمة المطلقة وحلها

الربط مع واقع الحياة

حقّقت حكومتنا الرشيدة إنجازات كبيرة في مجال الخدمات الإسكانية من الوحدات، والقسائم، والقروض السكنية ودعم لبرنامج علاوة الإيجار.

سكن: يبحث علي عن شقة صغيرة للإيجار في إحدى المناطق السكنية، وخلال بحثه وجد أن متوسط الأجرة الشهرية للشقة الصغيرة في تلك المنطقة هو BD 150، مع اختلاف مقداره BD 20 عن الأجرة الشهرية الفعلية.

a) اكتب متباينة قيمة مطلقة تصف المسألة.

افترض أن r هي الأجرة الشهرية الفعلية للشقة.

$|150 - r| \leq 20$

b) حُلّ المتباينة لإيجاد المدى المقبول للإيجار الشهري.

أعد كتابة متباينة القيمة المطلقة على صورة متباينة مركبة، ثم حُلَّها لتجد قيمة r.

$-20 \leq 150 - r \leq 20$

$-20 - 150 \leq 150 - r - 150 \leq 20 - 150$

$-170 \leq -r \leq -130$

$130 \leq r \leq 170$

مجموعة الحل هي $\{r \,|\, 130 \leq r \leq 170\}$، أيْ أن الإيجار الشهري الفعلي للشقة يتراوح من BD 130 إلى BD 170.

تأكد

6) **نادٍ رياضي:** تخطِّط زينب للانضمام إلى أحد الأندية الرياضية خلال الإجازة الصيفية، فوجدت أن متوسط رسوم الدورات الرياضية التي يعقدها BD 127 مع تفاوت بمقدار BD 12 عن قيمة الرسوم الفعلية. اكتب متباينة قيمة مطلقة تصف المسألة، ثم حُلَّها لإيجاد المدى المقبول لرسوم الدورات التي يعقدها النادي.

$|t - 127| \leq 12, \{t \,|\, 115 \leq t \leq 139\}$

تأكد من فهمك

الأمثلة 1, 2, 4, 5
الصفحات 187-191

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد: للتمارين 1-8 انظر الهامش

1) $4 \leq p - 8$ و $p - 14 \leq 2$ **2)** $-9 \leq 4y - 3 \leq 13$

3) $m - 7 \geq -3$ أو $-2m + 1 \geq 11$ **4)** $|c| \geq 8$

5) $|q| \geq -1$ **6)** $|x| \leq -4$

7) $|3v + 5| > 14$ **8)** $|-2t - 3| \leq 7$

مثال 3
صفحة 189

9) **درّاجات:** ينصح صانعوا الدراجات الجبلية بأن يكون ضغط الهواء في الإطارات $16\,kg/in^2$ على الأقل، وألا يزيد عن $36\,kg/in^2$. إذا كان ضغط الهواء في إطارات دراجة $11\,kg/in^2$، فما مدى الضغط الذي ينصح بإضافته إلى الإطارات؟ انظر الهامش

مثال 6
صفحة 192

10) **مال:** يختار خالد طلاءً لغرفته من بين الأنواع المُبيّنة في الجدول المجاور، وقدّر أنه يحتاج من 2 L إلى 3 L من أحد أنواع الطلاء. اكتب متباينة مركبة، لتقدّر المبلغ الذي سيدفعه اعتمادًا على الأسعار المُبيّنة في الجدول.

$4.8 \leq c \leq 10.5$، ما بين BD 4.8 و BD 10.5

نوع الطلاء	السعر للتر الواحد
مائي غير لامع	BD 3
مائي لامع	BD 2.4
زيتي غير لامع	BD 2.6
زيتي لامع	BD 3.5

مثال 6 يُبيّن كيفية كتابة متباينة قيمة مطلقة في مسألة حياتية وحلها.

التعليم باستعمال التقنيات

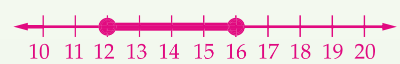
الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا ليقوم بحَلّ مثال باستعمال الكاميرا التوثيقية. تأكد من أن الطالب قد استعمل التمثيل على خط الأعداد؛ لإيجاد حَلّ المتباينة.

تنبيه !

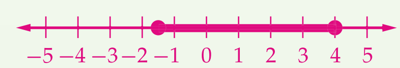
تجنب الأخطاء عند تفسير رمز القيمة المطلقة فإنه يجب إعادة كتابة الجملة الرياضية التي تحتوي على رمز القيمة المطلقة باستعمال جمل مكافئة لا تستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

إجابات:

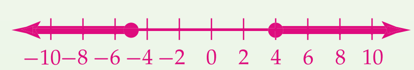
1) $\{p \,|\, 12 \leq p \leq 16\}$



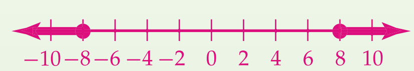
2) $\{y \,|\, -1.5 \leq y \leq 4\}$



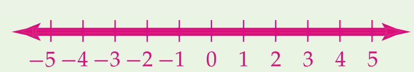
3) $\{m \,|\, m \geq 4$ أو $m \leq -5\}$



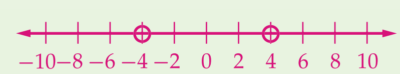
4) $\{c \,|\, c \geq 8$ أو $c \leq -8\}$



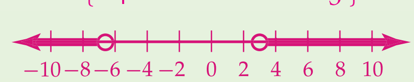
5) جميع الأعداد الحقيقية



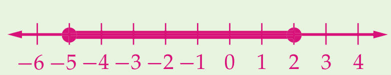
6) $\varnothing$



7) $\{v \,|\, v > 3$ أو $v < -\frac{19}{3}\}$



8) $\{t \,|\, -5 \leq t \leq 2\}$



9) $5kg/in^2 \leq p \leq 25kg/in^2$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|x - 2| > x + 4$. $\{x \,|\, x < -1\}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 10-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيّن الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1, 2, 4, 5 الصفحات 191-187

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: للتمارين 20-11 انظر ملحق الإجابات

11) $n+2 \le -5, n+6 \ge -6$

12) $-7 \le 4d-3 \le -1$

13) $3r-7>2$ أو $4r+3<-6$

14) $6y-3<-27$ أو $-4y+2<-26$

15) $|6h|<12$

16) $|-9n-3|<6$

17) $|-5j-4| \ge 12$

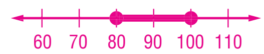
18) $|3w+2| \le 5$

19) $|6r-3|<21$

20) $|8t+3| \le 4$

مثال 3 صفحة 189

21) **سرعة:** تبين اللوحتان المجاورتان أقصى سرعة وأدنى سرعة على أحد الطرق. عبّر عن ذلك بمتباينة، ثم مثلها على خط الأعداد.
افترض أن z تمثل السرعة، $80 \le z \le 100$



مثال 6 صفحة 192

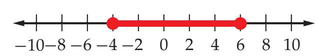
حدود السرعة: للتمرينين 20، 21، استعمل المعلومات الآتية:

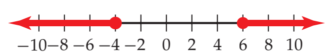
في أحد الطرق السريعة بمملكة البحرين، أقصى سرعة مسموح بها للسيارات 100 km/h. لكن بعض المركبات الثقيلة لا تتجاوز السرعة المسموح بها 80 km/h، مع العلم بأن أقل سرعة لجميع المركبات هي 60 km/h.

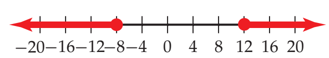
22) اكتب متباينة توضّح مقدار السرعة المسموح بها لسيارة تسير على هذا الطريق. $60 \le s \le 100$

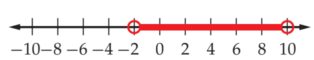
23) اكتب متباينة توضّح مقدار السرعة المسموح بها لمركبة ثقيلة تسير على هذا الطريق. $60 \le s \le 80$

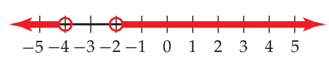
اكتب متباينة قيمة مطلقة تُعبّر عن كل تمثيل مما يأتي:

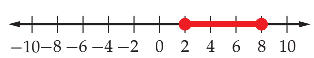
24) 

25) 

26) 

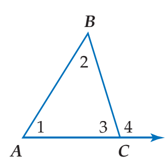
27) 

28) 

29) 

24) $|x-1| \le 5$
25) $|x-1| \ge 5$
26) $|x-2| \ge 10$
27) $|x-4| < 6$
28) $|x+3| > 1$
29) $|x-5| \le 3$

30) **هندسة:** تنص نظرية متباينة الزاوية الخارجة عن المثلث، على أن قياس الزاوية الخارجة عن المثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها في المثلث. اكتب متباينتين تصفان العلاقة بين قياسات زوايا $\triangle ABC$، والزاوية الخارجة عنه. $m\angle 4 > m\angle 1, m\angle 4 > m\angle 2$



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	11-23، 43، 45-58
ضمن المتوسط	13-21 فردي، 22، 29-23 فردي، 30، 38-32 زوجي، 39، 41، 42، 43، 45-58
فوق المتوسط	24-58

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد: للتمارين 36-29 انظر ملحق الإجابات

31) $-|-5k| > 15$

32) $3|2z - 4| - 6 > 12$

33) $\frac{|5f - 2|}{6} > 4$

34) $\frac{|2w + 8|}{5} \geq 3$

35) $y + 7 < 2y + 2 < 0$

36) $2x + 6 < 3(x - 1) \leq 2(x + 3)$

37) $4g + 8 \geq g + 6$ أو $7g - 14 \geq 2g - 4$

38) $5t + 7 > 2t + 4$ و $3t + 3 < 24 - 4t$

اكتب تعبيرًا جبريًّا لكل مما يأتي:

39) الأعداد التي تبعُد 4 وحدات، على الأقل عن العدد -5 على خط الأعداد. $|x + 5| \geq 4$

40) الأعداد التي لا يزيد بُعدها عن العدد 1 بمقدار $\frac{3}{8}$ وحدة على خط الأعداد. $|x - 1| \leq \frac{3}{8}$

41) الأعداد التي لا يقل بُعدها عن 6 وحدات، ولا يزيد على 10 وحدات عن العدد 2 على خط الأعداد. $6 \leq |x - 2| \leq 10$

42) **صحة:** يُعدُّ ارتفاع أو انخفاض مستوى السكر في الدم عن المعدل الطبيعي الذي يبلغ 88mg بمقدار 38mg خطرًا صحيًّا. اكتب متباينة قيمة مطلقة تصف مستوى السكر في الدم الذي يشكّل خطرًا صحيًّا، ثم حلّها.
$|s - 88| > 38$, $\{s \mid s > 126$ أو $s < 50\}$

الربط مع واقع الحياة

يُعد مرض السكري من أكثر الأمراض شيوعًا في العالم؛ إذ بلغت نسبة المصابين به في العالم عام 2009 م حوالي 9.5% فيما بلغت نسبة المصابين بهذا المرض في البحرين 10% في العام نفسه.

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **اكتشف الخطأ:** قام كل من نبيل ومصطفى بحلّ المتباينة $4|-5x - 3| - 6 \geq 34$. أيهما حلُّه صحيح؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

مصطفى	نبيل
$4\|-5x - 3\| - 6 \geq 34$	$4\|-5x - 3\| - 6 \geq 34$
$\|-5x - 3\| \geq 10$	$\|-5x - 3\| \geq 10$
$-5x - 3 \geq -10$ أو $-5x - 3 \leq 10$	$-5x - 3 \leq -10$ أو $-5x - 3 \geq 10$
$-5x \geq -7$, $-5x \leq 13$	$-5x \leq -7$, $-5x \geq 13$
$x \leq \frac{7}{5}$, $x \geq -\frac{13}{5}$	$x \geq \frac{7}{5}$, $x \leq -\frac{13}{5}$

44) **تحدٍّ:** حُلّ المتباينة $|x + 2| - |x - 2| > x$. $x < 0$

تبرير: حدّد ما إذا كانت أي من العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وإذا كانت العبارة غير صحيحة، فأعطِ مثالًا مضادًّا:

45) تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) على خط الأعداد محدود من اليسار ومن اليمين بقيمتين للمتغير x. انظر الهامش

46) تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو) على خط الأعداد يحتوي قيمًا لا تمثّل حلولاً للمتباينة. انظر الهامش

47) تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) على خط الأعداد يحتوي قيمًا تجعل كل أجزاء التعبير صحيحة. صحيحة

تنبيه !

اكتشف الخطأ في تمرين 43، اطلب إلى الطلبة الانتباه بشكل خاص إلى اتجاه رموز التباين.

إجابات:

43) إجابة ممكنة: نبيل؛ لأن مصطفى كتب المتباينات بصورة غير صحيحة عندما قام بتحويل متباينة القيمة المطلقة إلى متباينتين.

45) خاطئة؛ إجابة ممكنة: تمثيل المتباينة المركبة $x > 2$ و $x > 5$ على خط الأعداد، هو شعاع محدود من طرف واحد.

46) خاطئة؛ إجابة ممكنة: تمثيل المتباينة المركبة $x > 2$ أو $x < 3$ على خط الأعداد يتضمن الأعداد الحقيقية بالكامل.

194 الفصل 3 المعادلات والمتباينات

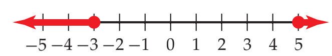
قراءة الرياضيات

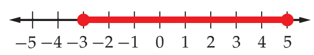
قارن لوصف أوجه **التشابه** بين شيئين أو أكثر.

فاضل لوصف أوجه **الاختلاف** بين شيئين أو أكثر.

48) **اكتب:** التعريف البديل للقيمة المطلقة هو أن تُعرَّفَ $|a-b|$ على أنها المسافة بين a، b على خط الأعداد. وضّح كيف يمكنك استعمال هذا التعريف لحل المتباينات التي على الصورة $|x-c|<r$. **انظر الهامش**

49) **تبرير:** يمثّل الشكلان أدناه مجموعتي الحل لمتباينتي قيمة مطلقة مختلفتين على خط الأعداد. قارن بين المتباينتين، وفاضل بينهما. **انظر الهامش.**





50) **مسألة مفتوحة:** اكتب متباينة قيمة مطلقة، على أن تكون مجموعة حلها على الصورة $a \le x \le b$. **انظر الهامش**

51) **أيها لا ينتمي؟** أي المتباينات المركبة الآتية تختلف عن باقي المتباينات؟

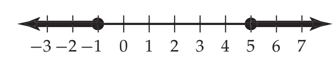
$-3 < x < 5$	$x > 2$ و $x < 3$	$x > 5$ و $x < 1$	$x > -4$ و $x > -2$

51) جميعها لها مجموعة حلّ غير خالية ما عدا المتباينة $x > 5$ و $x < 1$. حيث لا توجد أعداد حقيقية أكبر من 5 وأقل من 1 في الوقت نفسه.

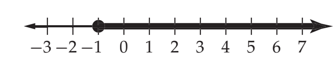
52) **اكتب:** لخّص أوجه الاختلاف بين المتباينات المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) وبين التي تحتوي أداة الربط (أو). **انظر الهامش.**

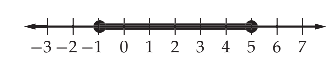
تدريب على اختبار معياري

53) أي مما يأتي يمثّل مجموعة حَلّ المتباينة $|3x-6|+8 \ge 17$؟ **A**

A 

B 

C 

D 

54) **مراجعة:** ما مجموعة الحل للمتباينة $-20 < 4x - 8 < 12$؟ **G**

F $\{x \mid -7 < x < 1\}$

G $\{x \mid -3 < x < 5\}$

H $\{x \mid -7 < x < 5\}$

J $\{x \mid -3 < x < 1\}$

مراجعة تراكمية

55) **صحة:** يوصي أطباء القلب أن يكون أقل من 30% من السعرات الحرارية اليومية التي يحصل عليها الجسم مصدرها من الدهون. حيث إن 1 g من الدهون يعطي 9 سعرات. إذا كان المعدل اليومي لعدد السعرات الحرارية التي يحصل عليها جسم شخص عمره 21 عامًا ما بين 2500 إلى 3300 سعر حراري، فأجب عن كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

a) اكتب متباينة تمثّل كمية الدهون التي يُنصح هذا الشخص بتناولها. $83.3 \le x \le 110$

b) ما أكبر كمية من الدهون يُنصح لهذا الشخص بتناولها؟ **110 g**

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقّق من صحة حلّك: (الدرس 3-2)

56) $4|x-5|=20$ $\{0, 10\}$

57) $|3y+10|=25$ $\{-\frac{35}{3}, 5\}$

58) $|7z+8|=-9$ $\varnothing$

4 التقويم

بطاقة خروج دع كل طالب يخبر زميله أو يكتب له خطوات حَلّ المتباينة $|x-4|<3$، واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 4-3 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

48) إجابة ممكنة: $|x-c|$ تُمثّل المسافة بين بعض القيم غير المعلومة للمتغير x، والنقطة c على خط الأعداد. ومجموعة حَلّ المتباينة هي مجموعة كل الأعداد، بحيث إن المسافة بين هذه الأعداد و c أقل من r وحدة. استعمل خط الأعداد؛ لتجد الأعداد التي تبعُد مسافة c وحدة عن r في أي الاتجاهين.

49) إجابة ممكنة: الشكل الذي عن اليسار مجموعة حَلّ تحتوي الأعداد من -3 إلى 5. أما الشكل الذي عن اليمين فيُمثّل مجموعة حَلّ تحتوي على الأعداد التي هي أقل أو تساوي -3 أو أكبر من أو تساوي 5.

50) إجابة ممكنة:

$$\left|x-\frac{a+b}{2}\right| \le b-\frac{a+b}{2}$$

51) إجابة ممكنة: المتباينة المركبة التي تحوي أداة الربط "و" تكون صحيحة، إذا وفقط إذا كانت المتباينتان المكونتان لها صحيحتين. بينما تكون المتباينة التي تحوي أداة الربط "أو" صحيحة، إذا كانت إحدى المتباينتين المكوّنتين لها صحيحة.

الدرس 4-3 حَلّ المتباينات المركّبة ومتباينات القيمة المطلقة 195

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

خصائص الأعداد الحقيقية (الدرس 1-3)

- تقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعتين، هما: مجموعة الأعداد النسبية (Q) ومجموعة الأعداد غير النسبية (I). أما مجموعة الأعداد النسبية فتحتوي مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد الكلية (W)، ومجموعة الأعداد الطبيعية (N) .

حَلّ معادلات القيمة المطلقة (الدرس 2-3)

- القيمة المطلقة لعدد ، هي عدد الوحدات التي يبعُدها ذلك العدد عن الصفر على خط الأعداد.
- لأي عددين حقيقيين a , b، حيث $b \geq 0$، إذا كان $|a| = b$، فإن $a = b$ أو $a = -b$.

حَلّ المتباينات الخطية في متغيِّر واحد (الدرس 3-3)

- إضافة أو طرح العدد نفسه من كلا طرفي المتباينة لا يغير صحتها.
- عند ضرب كلا طرفي متباينة في عدد سالب يجب أن يعكس اتجاه رمز المتباينة.

حَلّ المتباينات المركبة ومتباينات القيمة المطلقة (الدرس 4-3)

- عند تمثيل مجموعة الحل لمتباينة مركبة تحتوي أداة الربط (و)، فإن مجموعة الحل هي المجموعة الناتجة عن تقاطع مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوِّنتين لها. أما المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و)، فإن لها مجموعة حَلّ هي المجموعة الناتجة عن اتحاد مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوّنتين لها.
- يمكن كتابة المتباينة التي تحتوي أداة الربط (أو) بطريقتين مختلفتين. فمثلًا، يمكن كتابة المتباينة $-2 \leq x \leq 3$ على الصورة $x \leq 3$ و $x \geq -2$.
- العبارتان الآتيتان صحيحتان لأي عددين حقيقيين a , b، $b > 0$
  1) إذا كان $|a| < b$ ، فإن $-b < a < b$.
  2) إذا كان $|a| > b$ ، فإن $a < -b$ أو $a > b$.

مطـويـاتك منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

الأعداد الحقيقية ص 164	المجموعة الجزئية ص 170
الأعداد النسبية ص 164	المتممة ص 170
الأعداد غير النسبية ص 164	المجموعة الخالية ص 170
الأعداد الصحيحة ص 164	التقاطع ص 171
الأعداد الكلية ص 164	الاتحاد ص 171
الأعداد الطبيعية ص 164	القيمة المطلقة ص 172
المجموعة ص 170	الحل المرفوض ص 174
المجموعة الشاملة ص 170	الصفة المميزة للمجموعة ص 179
العنصر ص 170	المتباينة المركبة ص 187

اختبار المفردات:

حدّد إذا كانت العبارات الآتية صحيحة. وإذا كانت خاطئة، فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) القيمة المطلقة لأي عدد سالبة دائمًا. خطأ، غير سالبة

2) $\sqrt{12}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية. خطأ، غير النسبية

3) المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر. صحيحة

4) تمثِّل مجموعة الحل لمتباينة مركبة تحتوي أداة الربط و على خط الأعداد هو اتحاد مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوّنتين لها. خطأ، أو

5) تحتوي مجموعة الأعداد النسبية على الكسور العشرية المنتهية، والدورية. صحيحة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبة في حلّ الأسئلة 5-1 فنبّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات، ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

مطـويـاتك منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة. وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل من (ص190-192) يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على الجزء من الفصل الذي مازال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

مراجعة الدروس

3-1 خصائص الأعداد الحقيقية (الصفحات 164-169)

سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي:

6) $1.\overline{3}$ Q, R

7) $\sqrt{4}$ N, W, Z, Q, R

8) $-\frac{3}{4}$ Q, R

بسّط كل تعبير مما يأتي:

9) $4x - 3y + 7x + 5y$ $11x + 2y$

10) $2(a + 3) - 4a + 8b$ $-2a + 8b + 6$

11) $4(2m + 5n) - 3(m - 7n)$ $5m + 41n$

12) **مال:** اشترى سعود 3 شطائر بسعر BD 0.35 للشطيرة الواحدة، و 3 علب عصير بسعر BD 0.25 للعلبة الواحدة.

a) استعمل الخاصية التوزيعية لتكتب تعبيرين يمثّل كل منهما المبلغ الذي دفعه سعود.
$3(0.35 + 0.25) = 3(0.35) + 3(0.25)$

b) أوجد المبلغ الذي دفعه سعود باستعمال الخاصية التوزيعية.
BD1.8

مثال 1

سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{50}$.

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مثال 2

بسّط التعبير $-4(a + 3b) + 5b$.

التعبير الأصلي	$-4(a + 3b) + 5b$
الخاصية التوزيعية	$= -4(a) + -4(3b) + 5b$
بالضرب	$= -4a - 12b + 5b$
بالتبسيط	$= -4a - 7b$

3-2 حَلّ معادلات القيمة المطلقة (الصفحات 172-177)

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من صحة حلّك:

13) $|r + 5| = 12$ $\{7, -17\}$

14) $4|a - 6| = 16$ $\{2, 10\}$

15) $|3x + 7| = -15$ $\varnothing$

16) $|b + 5| = 2b - 9$ $\{14\}$

17) **قياسات:** تقوم عائشة بتقطيع شريط زينة إلى أجزاء صغيرة طول كل منها $\frac{3}{4}$ in. إذا كان طول القطعة يزيد أو ينقص بمقدار $\frac{1}{16}$ in، فكم طول القطعة الأطول، وطول القطعة الأقصر؟
$\frac{11}{16}$ in, $\frac{13}{16}$ in

مثال 3

حُلّ المعادلة $|3m + 7| = 13$.

الحالة 1	الحالة 2
$a = b$	$a = -b$
$3m + 7 = 13$	$3m + 7 = -13$
$3m = 6$	$3m = -20$
$m = 2$	$m = -\frac{20}{3}$

الحلان هما 2، $-\frac{20}{3}$.

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-3 حَل المتباينات الخطية في متغير واحد (الصفحات 179-185)

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

18) $-4a \leq 24$ للتمارين 18-21 انظر الهامش

19) $\frac{r}{5} - 8 > 3$

20) $4 - 7x \geq 2(x+3)$

21) $-p - 13 < 3(5 + 4p) - 2$

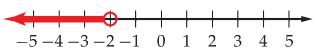
22) **مال:** زارت بعض طالبات الصف الرابع الابتدائي منتزه عين عذاري برفقة معلمتهن. وكان على كل طالبة أن تدفع BD 0.5 رسمًا لدخول المنتزه، بالإضافة إلى أجرة الحافلة التي أقلّتهن جميعًا وهي BD 57. كم يمكن أن يكون عدد الطالبات على ألا تزيد التكلفة الكلية للزيارة عن BD 84. **54 طالبة**

مثال 4

أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $2m - 7 < -11$، ثم مثّلها على خط الأعداد.

المتباينة الأصلية	$2m - 7 < -11$
بإضافة 7 إلى كلا الطرفين	$2m < -4$
بقسمة كلا طرفي المتباينة على 2	$m < -2$

مجموعة الحل هي $\{m \mid m < -2\}$، وتمثيلها على خط الأعداد مُبيَّن أدناه.



3-4 حَل المتباينات المركبة ومتباينات القيمة المطلقة (الصفحات 187-195)

أوجد مجموعة حَلّ كلٍّ من المتباينات الآتية، ومثّلها على خط الأعداد: للتمارين 23-30 انظر الهامش

23) $2m + 4 < 7$ أو $3m + 5 > 14$

24) $-5 < 4x + 3 < 19$

25) $6y - 1 > 17$ أو $8y - 6 \leq -10$

26) $-2 \leq 5(m - 3) < 9$

27) $|a| + 2 < 15$

28) $|14 - p| \leq 19$

29) $|2r + 7| < -1$

30) $\frac{1}{3}|8q + 5| \geq 7$

31) **مال:** تريد سارة نظم عقد من الخرز الكبير والصغير، على ألا تقل تكلفته عن BD 2.4، ولا تزيد عن BD 3. إذا كان سعر الخرزة الكبيرة BD 0.2، والخرزة الصغيرة BD 0.12، واشترت 3 خرزات كبيرة، فكم خرزة صغيرة يمكن أن تشتري؟ اكتب متباينة مركبة تمثل المسألة، ثم حلها.
$2.4 \leq 0.12b + 3(0.2) \leq 3, 15 \leq b \leq 20$

مثال 5

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

a) $-14 \leq 3x - 8 < 16$

المتباينة الأصلية	$-14 \leq 3x - 8 < 16$
بإضافة 8 إلى كلا الطرفين	$-6 \leq 3x < 24$
بقسمة كلا الطرفين على 3	$-2 \leq x < 8$

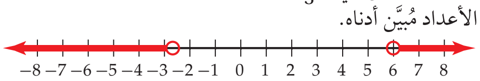
مجموعة الحل هي $\{x \mid -2 \leq x < 8\}$، وتمثيلها على خط الأعداد مبين أدناه.

b) $|3a - 5| > 13$

متباينة القيمة المطلقة $|3a - 5| > 13$ تكافئ المتباينة المركبة:
$3a - 5 < -13$ أو $3a - 5 > 13$.

بالطرح	$3a < -8$	$3a > 18$
بالقسمة	$a < -\frac{8}{3}$	$a > 6$

مجموعة الحل هي $\{a \mid a < -\frac{8}{3}$ أو $a > 6\}$، وتمثيلها على خط الأعداد مُبيَّن أدناه.



مراجعة حل المسائل

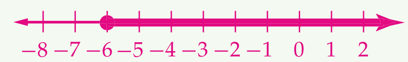
إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة فذكرهم بخطوات حَلّ المسألة، وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

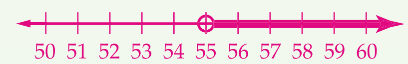
اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 3 ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 3.

إجابات:

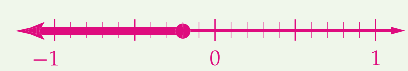
18) $a \geq -6$



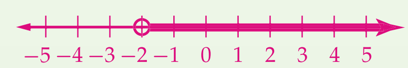
19) $r > 55$



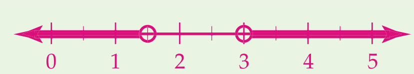
20) $x \leq -\frac{2}{9}$



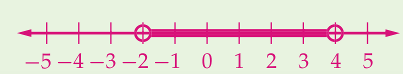
21) $p > -2$



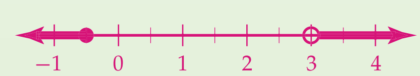
23) $\left\{m \middle| m < \frac{3}{2} \text{ أو } m > 3\right\}$



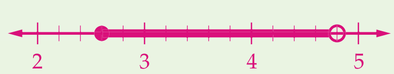
24) $\{x \mid -2 < x < 4\}$



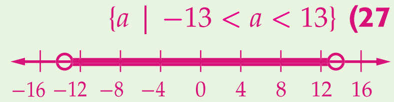
25) $\left\{y \middle| y \leq -\frac{1}{2} \text{ أو } y > 3\right\}$



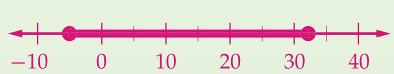
26) $\left\{m \middle| \frac{13}{5} \leq m < \frac{24}{5}\right\}$



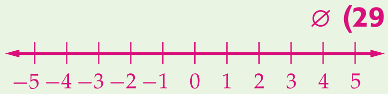
27) $\{a \mid -13 < a < 13\}$



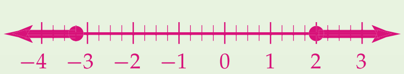
28) $\{p \mid -5 \leq p \leq 33\}$



29) $\varnothing$



30) $\left\{q \middle| q \leq -\frac{13}{4} \text{ أو } q \geq 2\right\}$



اختبار الفصل

1) بسّط $-4(3a + b) - 2(a - 5b)$. $-14a + 6b$

سمّ الخاصية في كل مما يأتي:

2) $-2\sqrt{3} + 11\sqrt{3} = \sqrt{3}(-2 + 11)$ التوزيعية

3) $\left(\frac{17}{6}\right)\left(\frac{6}{17}\right) = 1$ النظير الضربي

4) احسب قيمة $y + 2|3y - 8|$ عندما $y = 2.5$. 3.5

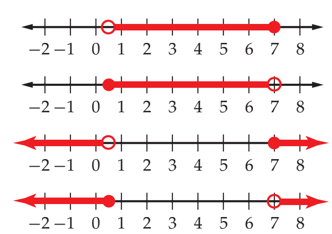
5) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $\frac{18 - b}{5} > -2b$، ثم مثّلها على خط الأعداد. انظر الهامش

6) **مال:** مع محمد BD 3.5 ، ويريد أن يشتري كتابًا سعره BD 2.6، ويشتري بما تبقى لديه أقلامًا سعر الواحد منها BD 0.35. اكتب متباينة توضِّح عدد الأقلام التي يمكن لمحمد شراؤها.
$3.5 \geq 2.6 + 0.35n$

7) أوجد مجموعة حلّ المتباينة $4r + 1 > 15$ أو $-5 > 3 - r$، ثم مثّلها على خط الأعداد. انظر الهامش.

8) أوجد مجموعة حلّ المتباينة $|p - 4| \leq 11$، ثم مثّلها على خط الأعداد. انظر الهامش.

9) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي تمثيل لمجموعة حلّ المتباينة $4 < 6t + 1 \leq 43$؟ F



F
G
H
J

10) **مال:** تخطط أمل لشراء هاتف محمول من أحد الأنواع، فوجدت أن متوسط سعر ذلك الهاتف هو BD 68 باختلاف BD 5 عن السعر الفعلي. اكتب متباينة تصف المسألة، ثم حلها.
$|p - 68| \leq 5,\ 63 \leq p \leq 73$

11) **سياج:** يريد ياسر أن يبني سورًا حول قطعة أرض مستطيلة الشكل ، ويريد أن يكون محيطها من 17 m إلى 20 m . إذا كان عرض قطعة الأرض 5 m، فاكتب المتباينة المركبة التي تعطي طول القطعة، ثم حُلَّها. $17 \leq 2(5 + x) \leq 20,\ \frac{7}{2} \leq x \leq 5$

حُلّ كل معادلة ممّا يأتي:

12) $|x + 4| = 3$ $\{-7, -1\}$

13) $|3m + 2| = 1$ $\left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$

14) $|3a + 2| = -4$ $\varnothing$

15) $|2t + 5| - 7 = 4$ $\{-8, 3\}$

16) $|5n - 2| - 6 = -3$ $\left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$

17) $|p + 6| + 9 = 8$ $\varnothing$

18) أوجد مجموعة حلّ المتباينة $-3b - 5 \geq -6b - 13$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد. انظر الهامش

19) سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $-\frac{1}{3}$. Q , R

20) **زينة:** يبيع متجران نوعًا من عقود الخرز المنظومة في سلسلة معدنية، ويبيّن الجدول أدناه السعر في المتجرين. كم عدد الخرزات الذي يجعل تكلفة العقد في المتجر الأول أقل؟ استعمل المتباينة $1.5 + 0.325b < 2 + 0.25b$.

تكلفة الخرزة الواحدة	تكلفة السلسلة	المتجر
BD 0.325	BD 1.5	الأول
BD 0.25	BD 2	الثاني

عند شراء 6 خرزات أو أقل، يكون سعر العقد من المتجر الأول أفضل.

الفصل 3

اختبار الفصل

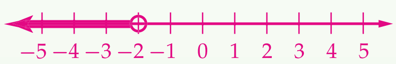
بناء الاختبارات

التقــويم

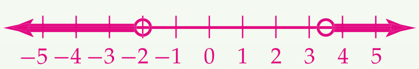
أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 3 متوافرة في برامج بناء الاختبارات.

إجابات:

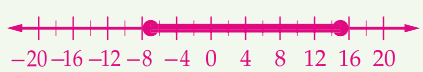
5) $b < -2$



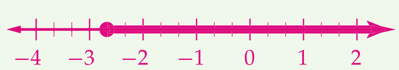
7) $\left\{r \,\middle|\, r < -2 \text{ أو } r > \frac{7}{2}\right\}$



8) $\{p \mid -7 \leq p \leq 15\}$



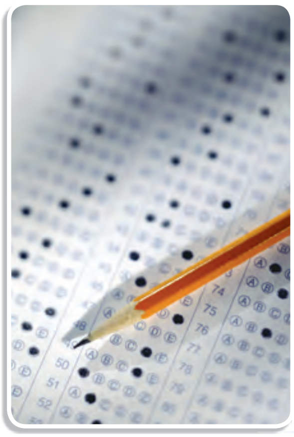
18) $b \geq -\frac{8}{3}$



مخطط المعالجة

المستوى 2	دون المتوسط	المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة.	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة.
فقم		فاختر	أحد المصادر الآتية:
		كتاب الطالب	الدروس 1-3، 2-3، 3-3، 4-3
		مصادر الفصل	تدريبات المهارات
بزيارة الموقع	www.obeikaneducation.com	دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (160)
		زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

حذف الإجابات غير المنطقية



عند حل أسئلة الاختيار من متعدد احذف الإجابات غير المنطقية؛ لأن ذلك يساعدك على التوصل إلى الإجابة الصحيحة.

استراتيجيات حذف الإجابات غير المنطقية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية لتعرف ما المطلوب.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حلّه؟
- ما شكل الإجابة الصحيحة: هل هي (كسر، أو عدد، أو عدد عشري، أو نسبة ، أو تمثيل بياني) ؟
- ما وحدات الإجابة الصحيحة (إن كان لها وحدات) ؟

الخطوة 2

اقرأ الإجابات بعناية لتقويم منطقية الإجابات.

- حدّد الإجابات التي يتضح عدم صحتها، واحذفها .
- احذف الإجابات ذات الشكل غير المناسب كما ورد في الخطوة **1**.
- احذف الإجابات التي لا تحتوي على الوحدة الصحيحة.

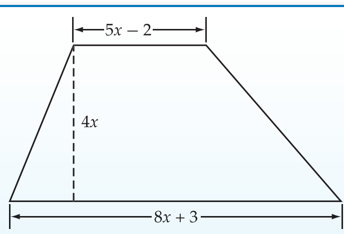
الخطوة 3

حل المسألة، واختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المتبقية، وتحقَّق من صحة حلِّك.

مثال

أقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلّها.

يُعبّر عن مساحة السطح A لشبه المنحرف الذي ارتفاعه h ، وطول كل من قاعدتيه b_1 , b_2 بالصيغة : $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$. أي تعبير مما يأتي يمثّل مساحة سطح شبه المنحرف في الشكل المجاور ؟



A $26x^2 + 2x$ **C** $13x + 1$

B $52x^2 + 4x$ **D** $28x + 10$

الفصل 3 التهيئة للاختبارات المعيارية

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية حذف الإجابات غير المنطقية عند حَلّ أسئلة الاختيار من متعدد في الاختبارات المعيارية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

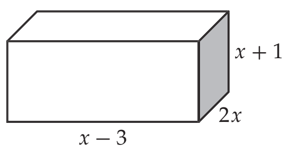
اسأل:

- هل لاحظت بوضوح يومًا أن بعض بدائل الإجابة غير صحيحة؟
تختلف إجابات الطلبة.
- ما بعض دلالات عدم صحة الإجابة المختارة؟
تختلف إجابات الطلبة. إجابة ممكنة: احتواء الإجابة على قوة خاطئة، أو مساواة خاطئة ، أو رمز تباين خاطئ.

200 الفصل 3 المعادلات والمتباينات

مثال إضافي

يعطى حجم متوازي المستطيلات بالصيغة $V = \ell wh$ ، حيث ℓ الطول، w العرض، h الارتفاع. اكتب تعبيرًا يُمثّل حجم متوازي المستطيلات أدناه. B



A $4x - 2$

B $2x^3 - 4x^2 - 6x$

C $2x^2 - 4x - 6$

D $2x^3 - 6x^2 - 4x$

3 التقويم

استعمل التمارين 6-1 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

لحساب مساحة سطح شبه المنحرف عليك ضرب نصف الارتفاع $2x$ في عامل خطي آخر متغيره x. ولذا، فإن الإجابة الصحيحة يجب أن تحتوي x^2. وبما أن الخيارين C ، D كلاهما لا يحتوي x^2 . لذا يمكنك حذفهما. الإجابة الصحيحة هي إما A أو B. استعمل الضرب لتجد تعبير المساحة.

$$A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$$

$$A = \frac{4x}{2}(8x + 3 + 5x - 2)$$

$$A = 2x(13x + 1)$$

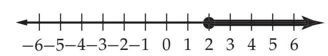
$$A = 26x^2 + 2x$$

الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، واحذف الإجابات غير المنطقية. ثم استعمل المعلومات لحل المسألة:

1) أيّ المتباينات الآتية لها التمثيل على خط الأعداد أدناه؟ C



A $8x - 9 \leq 5x - 3$

B $8x - 9 < 5x - 3$

C $8x - 9 \geq 5x - 3$

D $8x - 9 > 5x - 3$

2) تربط معادلة آينشتاين في النسبية طاقة الجسم E بكتلته m ، وسرعة الضوء c، وذلك حسب المعادلة $E = mc^2$. ما حَلّ المعادلة بالنسبة للمتغير m؟ G

F $m = \frac{c^2}{E}$ **H** $m = \frac{c}{E^2}$

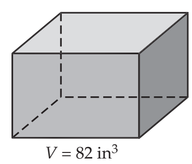
G $m = \frac{E}{c^2}$ **J** $m = \frac{E^2}{c}$

3) مستطيل طوله 8 in، ومحيطه 30 in. ما محيط مستطيل آخر مشابه غير أن طوله 12 in؟ B

A 40 in **C** 48 in

B 45 in **D** 360 in

4) حجم متوازي المستطيلات أدناه $82\ in^3$. إذا تضاعفت أبعاده مرتين ، فكم يصبح حجمه؟ J



F $41\ in^3$

G $164\ in^3$

H $482\ in^3$

J $656\ in^3$

5) إذا كان $a = 3$ ، $b = 2$ ، فما قيمة $a + (b + 1)^2$؟ C

A −6

B −1

C 12

D 15

6) أيّ ممّا يأتي يمثّل مجموعة حل المتباينة $|x - 17| < -1$ ؟ G

F $\{x \mid 16 < x < 18\}$ **H** $\{x \mid x < 17\}$

G $\{\ \}$ **J** $\{x \mid x > 0\}$

201 الفصل 3 التهيئة للاختبارات المعيارية

تشخيص أخطاء الطلبة

أجرِ مسحًا شاملاً لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) A صحيحة
B أخطأ في حَلّ المعادلتين الخطيتين الناتجتين عن معادلة القيمة المطلقة.
C أخطأ في حَلّ إحدى المعادلتين الخطيتين الناتجتين عن معادلة القيمة المطلقة.
D أخطأ في حَلّ إحدى المعادلتين الخطيتين الناتجتين عن معادلة القيمة المطلقة.

2) A استعمل رمز تباين غير صحيح
B استعمل رمز تباين غير صحيح
C صحيحة
D استعمل رمز تباين غير صحيح

3) A أخطأ في كتابة تعريف $\cos 54^\circ$
B أخطأ في كتابة تعريف $\cos 54^\circ$
C صحيحة
D أخطأ في كتابة تعريف $\sin 54^\circ$

4) F استعمل المتباينة الخاطئة.
G صحيحة.
H خمَّن الإجابة.
J عكس موقعي 0.2 و 81.5

5) A افترض أن الزاوية المحيطية تساوي ضعف الزاوية المركزية المرسومة معها على نفس القوس.
B افترض أن الزاوية المحيطية تساوي الزاوية المركزية المرسومة معها على نفس القوس.
C صحيحة
D خمَّن الإجابة

6) F صحيحة.
G بسط المتباينة بشكل خاطئ.
H عكس رمز التباين.
J بسط المتباينة بشكل خاطئ.

7) A كتب 2 أقل من ناتج جمع عدد ما إلى 7 مقسومًا على 11.
B كتب 2 أكبر من ناتج جمع عدد ما إلى 11 مقسومًا على 7.
C كتب 7 أقل من ناتج جمع عدد ما إلى 2 مقسومًا على 11.
D صحيحة.

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

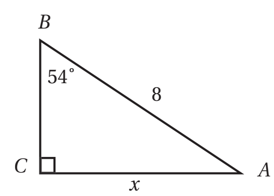
1) ما حل المعادلة $\left|2x+\frac{11}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ؟ A

A $x=-3$ أو $x=-2\frac{1}{2}$
B $x=3$ أو $x=2\frac{1}{2}$
C $x=-3$ أو $x=2\frac{1}{2}$
D $x=3$ أو $x=-2\frac{1}{2}$

2) ما مجموعة حل المتباينة $|x+2|+3\geq 8$ ؟ C

A $\{x \mid x\leq -7$ أو $x>3\}$
B $\{x \mid x<-7$ أو $x\leq 3\}$
C $\{x \mid x\leq -7$ أو $x\geq 3\}$
D $\{x \mid x\geq -7$ أو $x\geq 3\}$

3) في الشكل أدناه ، أي المعادلات الآتية يمكن استعمالها لإيجاد قيمة x ؟ C

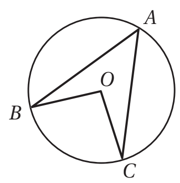


A $x=\frac{8}{\cos 54^\circ}$
B $x=8\cos 45^\circ$
C $x=8\sin 54^\circ$
D $x=\frac{8}{\sin 54^\circ}$

4) يقيس ميزان زئبقي الحرارة بزيادة أو نقصان مقدارها 0.2°F عن درجة الحرارة الفعلية. إذا كانت قراءة الميزان في أحد الأيام 81.5°F ، فأي متباينات القيمة المطلقة أدناه تمثّل المدى المقبول لدرجة الحرارة الفعلية T؟ G

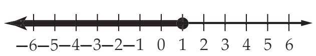
F $|T-81.5|<0.2$
G $|T-81.5|\leq 0.2$
H $|T-0.2|<81.5$
J $|T-0.2|\leq 81.5$

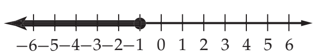
5) في الدائرة $\odot O$ إذا كان $m\angle BAC=46^\circ$ ، فما قياس $\angle BOC$ ؟ C

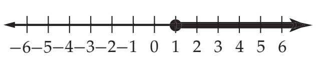


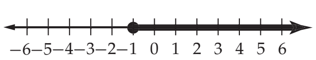
A 23°
B 46°
C 92°
D 111°

6) أي تمثيل أدناه يمثّل مجموعة حل المتباينة $2n-3\geq 5n-6$ على خط الأعداد؟ F

F


G


H


J


7) ما المتباينة التي تصف العبارة الآتية:
"ناتج جمع عدد ما إلى 7 مقسومًا على 2 أقل من 11"؟ D

A $\frac{x+7}{11}>2$
B $\frac{x+11}{7}<2$
C $\frac{x+2}{11}>7$
D $\frac{x+7}{2}<11$

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

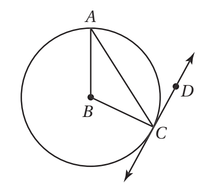
8) اعتمد على معادلة القيمة المطلقة أدناه للإجابة عما يأتي:

$$|x-3|-2=0$$

a) ما عدد حلول المعادلة؟ **2**

b) حُلّ المعادلة. $\mathbf{x=1,5}$

9) $\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة B عند C، و $\overline{BC}$ نصف قطر في الدائرة. إذا كانت $m\angle ACB=35°$، فما $m\angle ACD$ مستعملاً الشكل أدناه؟ **55°**



10) ما معادلة الدائرة التي مركزها $(-2, 3)$، وطول قطرها 4 وحدات؟ $\mathbf{(x+2)^2+(y-3)^2=4}$

11) يفضل عُمَر شواء اللحم في الفرن عند درجة حرارة 415°c، بزيادة أو نقصان 15°.

a) اكتب متباينة قيمة مطلقة تصف المسألة مفترضًا أن t هي درجة حرارة الفرن. $\mathbf{|t-415|\le 15}$

b) ما المدى المقبول لدرجة الحرارة التي يفضل عُمَر أن يشوي اللحم عندها؟ $\mathbf{400\le t\le 430}$

12) في $\triangle KLM$، أوجد قياس الزاوية M إلى أقرب درجة إذا كان: $k=10$, $m=4.8$, $m\angle K=96°$. **29°**

أسئلة ذات إجابات مطوّلة

13) يرتكز سُلَّم متغير الطول على جدار رأسي، وتبعُد قاعدته 12 ft عن الجدار، ويلمس طرفه العلوي الجدار عند ارتفاع 16 ft عن سطح الأرض.

a) ارسم شكلاً يمثّل هذه الحالة. ما طول السلم؟ **انظر الهامش**

b) للأمان، يجب ألا تزيد زاوية الصعود (زاوية ميل السلم) عن 75°. هل زاوية صعود هذا السلم آمنة؟ **انظر الهامش**

c) إذا لم تكن كذلك، فعلى أي بُعد عن الجدار يجب وضع السُّلم حتى يكون في أمان؛ بحيث يبقى طرفه العلوي عند ارتفاع 16 ft، وزاوية صعوده 75°؟ وإلى أي طول يجب تعديل طول السلم؟ **انظر ملحق الإجابات**

14) يُبيّن الجدول المجاور الدرجات التي حصل عليها جلال في خمسة اختبارات قصيرة لإحدى المساقات كل منها من 100 درجة، وبقي عليه أن يتقدم لاختبار سادس مشابه.

الاختبار	الدرجة
1	86
2	79
3	80
4	85
5	77

a) يجب أن يكون معدل درجات جلال 82 أو أكثر ليحصل على الرتبة B. اكتب متباينة؛ لإيجاد أقل علامة ممكنة له في الاختبار السادس ليحصل على الرتبة B. **انظر الهامش**

b) حُلّ المتباينة التي حصلت عليها في الفرع a. $\mathbf{n\ge 85}$

c) ما معنى الحل؟

يجب أن يحصل جلال على درجة لا تقل عن 85 في الاختبار السادس للحصول على الرتبة B .

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
اذهب إلى الدرس...	3-2	3-4	1-4	3-4	2-2	2-3	3-3	3-2	2-6	2-8	3-4	1-6	1-5	3-3

التقويم التكويني

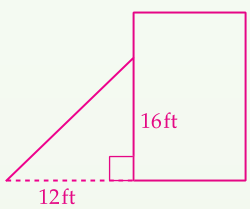
يمكنك استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

بناء الاختبارات
التقـــويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات؛ لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP .

إجابات:

13a)



افرض ℓ = طول السلم.

$$12^2+16^2=\ell^2$$
$$144+256=\ell^2$$
$$400=\ell^2$$
$$\pm\sqrt{400}=\ell$$
$$\pm 20=\ell$$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا. لذا، فإن طول السلم يساوي 20 ft .

13b) افرض أن الزاوية التي يصنعها السلم مع سطح الأرض هي $\angle A$.

$$\tan\angle A=\frac{16}{12}$$
$$\tan\angle A=\frac{4}{3}$$
$$m\angle A=\tan^{-1}\frac{4}{3}$$
$$\angle A\approx 53°$$

بما أن $75° < 53°$، فإن زاوية ميل السلم آمنة.

14a)

$$\frac{86+79+80+85+77+n}{6}\ge 82$$

الدرس 2-3 ص 176, 177

29 المعادلة المعطاة $2\,|3x-4|+8=6$
بطرح 8 من كلا الطرفين $2\,|3x-4|=6-8$
بالتبسيط $2\,|3x-4|=-2$
بقسمة كلا الطرفين على 2 $|3x-4|=-1$

وبما أن القيمة المطلقة موجبة دائمًا، أو صفر، فإن هذه المعادلة ليس لها حَلّ. لذا، فإن مجموعة حلها هي المجموعة الخالية $\varnothing$.

41 متوسط الإرتفاع c يساوي 245 ft، ومدى الزيادة أو النقصان يساوي 75 ft.

معادلة القيمة المطلقة $|x-c|=r$
$c=245,\ r=75$ $|x-245|=75$
$x-245=75$ أو $x-245=-75$

الحالة (1)
$x-245=75$
$x=75+245$
$=320$

الحالة (2)
$x-245=-75$
$x=-75+245$
$=170$

الحلان هما 320 و 170، ويعنيان أن أعلى موقع على سطح الجزيرة يرتفع 320 ft عن مستوى سطح البحر، وأخفض موقع على سطح الجزيرة يرتفع 170 ft عن مستوى سطح البحر.

45) صحيحة أحيانًا، هذه العبارة صحيحة لبعض القيم فقط، فعلى سبيل المثال العبارة صحيحة عندما $a=8$؛ فإذا كان $7<8$، فإن $10<11$. في حين هي خاطئة عندما $a=-8$؛ فإذا كان $7<8$، فإن $10 \not< 5$.

46) صحيحة دائمًا؛ إذا كانت $|x|<3$، فإن قيمة x بين -3 و 3. وجمع العدد 3 لأي من قيم x يكون ناتجه عددًا موجبًا.

47) دائمًا؛ إذا كانت $1<y<5$ فإن ناتج طرح العدد 3 من y ينتج عنه أعداد بين -2 و 2 والقيمة المطلقة لهذه الأعداد أقل أو تساوي 2.

48) إجابة ممكنة:

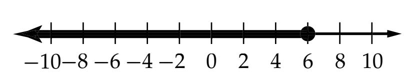
$|2x+1|=x-3$،

أو $|3x+10|=x-5$،

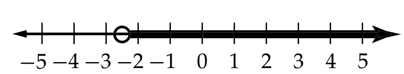
أو $|x-1|=\frac{1}{2}x-4$

الدرس 3-3 (تأكد) ص 177

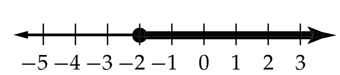
2A) $x \le 6$



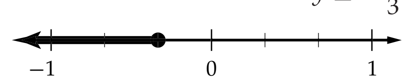
2B) $y > -2.5$



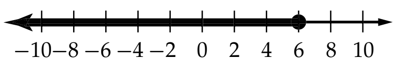
3A) $x \ge -2$



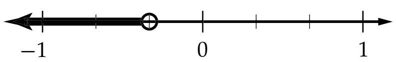
3B) $y \le -\frac{1}{3}$



3C) $v \le 6$

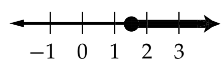


3D) $d < -\frac{1}{3}$

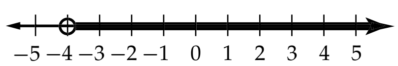


الدرس 3-3، ص 182 - 184

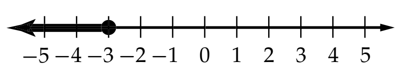
7 المتباينة المعطاة $s \ge \frac{s+6}{5}$
بضرب كلا الطرفين في 5 $5s \ge s+6$
بطرح 5 من كلا الطرفين $4s \ge 6$
بقسمة كلا من الطرفين على 4 $s \ge 1.5$
مجموعة الحل هي $\{s \mid s \ge 1.5\}$



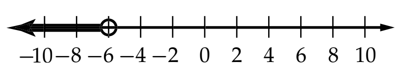
10) $m > -4$



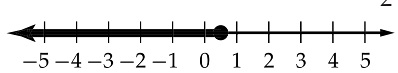
11) $n \le -3$



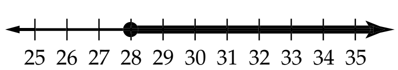
12) $r < -6$



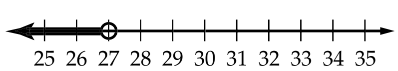
13) $t \le \frac{1}{2}$



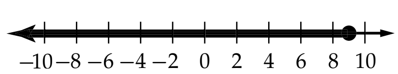
14) $w \ge 28$



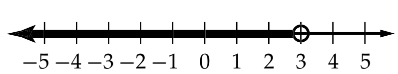
15) $k < 27$



16) $x \le 9$



17) $z < 3$



18) $z \le 3.9$

19) المتباينة المعطاة $12 < -4(3c - 6)$

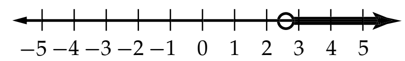
بقسمة كلا الطرفين على -4، وعكس اتجاه رمز التباين $-3 > 3c - 6$

بإضافة 6 إلى كلا الطرفين $3 > 3c$

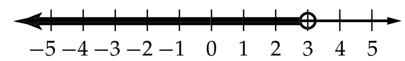
بقسمة كلا الطرفين على 3 $1 > c$

مجموعة الحل هي $\{c \mid c < 1\}$

20) $y > \frac{8}{3}$



21) $z < 3$



41) a) ليكن d عدد الأميال التي يتعيّن على عبدالعزيز زيادتها على مسافة التدريب اليومي، ومن ذلك يكون عدد أميال التدريب اليومي بعد الزيادة $5 + d$ mi.

طول الماراثون	أكبر أو تساوي	مسافة التدريب اليومي	3 أمثال
26.2	$\geq$	$(5 + d)$	3 .

إذن، المتباينة هي $3(5 + d) \geq 26.2$

b) المتباينة المعطاة $3(5 + d) \geq 26.2$

بقسمة كلا الطرفين على 3، ثم التقريب إلى أقرب جزء من مئة $5 + d \geq 8.73$

بطرح 5 من كلا الطرفين $d \geq 3.75$

لكي يكون عبدالعزيز قادرًا على إنهاء السباق، فإن عليه زيادة مسافة التدريب اليومي 3.73 mi على الأقل.

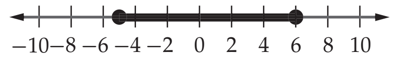
47) إجابة ممكنة: $4x + 5 > 4(x + 1)$؛ مجموعة حَلّ هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية، إذ ينتج عن تبسيط هذه المتباينة $5 > 4$، وذلك يعني أنه لأي قيمة حقيقية للمتغير x، فإن ناتج تبسيط المتباينة هو $1 > 0$، وهذا يعني أن الجانب الأيسر للمتباينة يزيد بواحد عن الجانب الأيمن.

48) إجابة ممكنة: إذا كان a, b عددين حقيقيين، حيث a أكبر من b، فإن a يقع إلى يمين b على خط الأعداد، وعند ضرب هذين العددين في عدد سالب، فإنه يتم عكس الترتيب، أي أن ناتج ضرب العدد السالب في a يقع إلى يسار ناتج ضرب العدد السالب في b على خط الأعداد. وبذلك يجب عكس اتجاه رمز التباين بين العددين الناتجين.

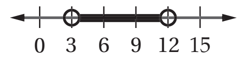
الدرس 4-3 (تأكد) ص 188, 189

1A) $\{y \mid -8 \leq y \leq -5\}$

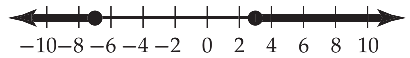
1B) $\{x \mid -5 \leq x \leq 6\}$



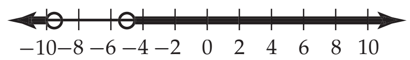
1C) $\{z \mid 3 < z < 12\}$



2A) $\{j \mid j \geq 3$ أو $j \leq -7\}$



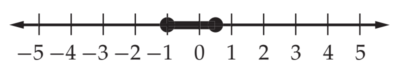
2B) $\{g \mid g > -5$ أو $g < -9.5\}$



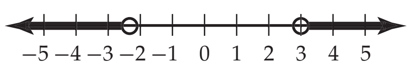
الدرس 4-3، ص 193, 194

11) $\{n \mid -12 \leq n \leq -7\}$

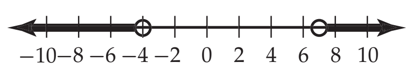
12) $\{d \mid -1 \leq d \leq 0.5\}$



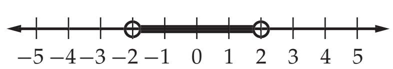
13) $\left\{r \middle| r < -\frac{9}{4}\right.$ أو $\left. r > 3\right\}$



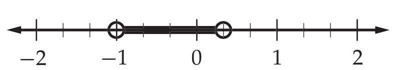
14) $\{y \mid y < -4$ أو $y > 7\}$



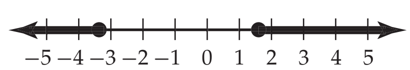
15) $\{h \mid -2 < h < 2\}$



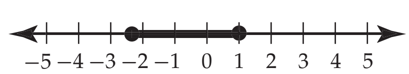
16) $\left\{n \middle| -1 < n < \frac{1}{3}\right\}$



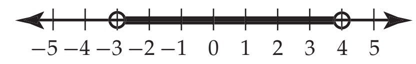
17) $\left\{j \middle| j \geq \frac{8}{5}\right.$ أو $\left. j \leq -\frac{16}{5}\right\}$



18) $\left\{w \middle| \frac{-7}{3} \leq w \leq 1\right\}$

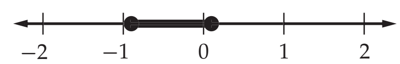


19) $\left\{r \,\middle|\, -3 < r < 4\right\}$

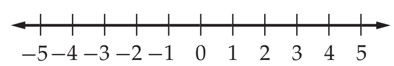


20) $|8t + 3| \leq 4$ تكافئ $-4 \leq 8t + 3 \leq 4$

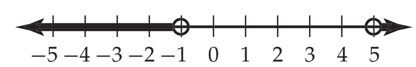
$$-4 \leq 8t + 3 \leq 4$$
$$-4 - 3 \leq 8t \leq 4 - 3$$
$$-7 \leq 8t \leq 1$$
$$-\frac{7}{8} \leq \frac{8t}{8} \leq \frac{1}{8}$$
$$-\frac{7}{8} \leq t \leq \frac{1}{8}$$
$$\left\{t \,\middle|\, -\frac{7}{8} \leq t \leq \frac{1}{8}\right\}$$



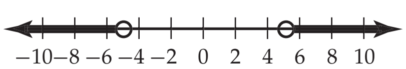
31) $\varnothing$



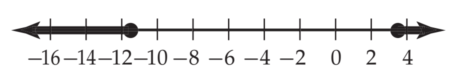
32) $\{z \mid z < -1$ أو $z > 5\}$



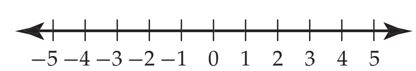
33) $\left\{f \,\middle|\, f > \frac{26}{5}\right.$ أو $\left. f < -\frac{22}{5}\right\}$



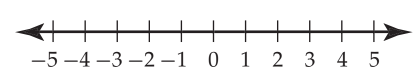
34) $\left\{w \,\middle|\, w \leq -\frac{23}{2}\right.$ أو $\left. w \geq \frac{7}{2}\right\}$



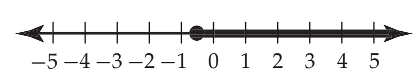
35) $\varnothing$



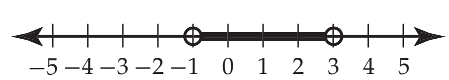
36) $\varnothing$



37) $\left\{g \,\middle|\, g \geq -\frac{2}{3}\right\}$



38) $\{t \mid -1 \leq t < 3\}$



اختبار معياري تراكمي ص 203

13c) افرض d تساوي بُعد طرف السلم عن البيت.

$$\tan 75^\circ = \frac{16}{d}$$
$$d \tan 75^\circ = 16$$
$$d = \frac{16}{\tan 75^\circ}$$
$$d \approx 4.3 \text{ ft}$$

إذن، يجب أن يرتكز السلم على بعُد 4.3 ft من البيت.

ولإيجاد طول السلم الجديد، استعمل نظرية فيثاغورس ثانية.

$$4.3^2 + 16^2 = \ell^2$$
$$18.49 + 256 = \ell^2$$
$$274.49 = \ell^2$$
$$\pm\sqrt{274.49} = \ell$$
$$\pm 16.6 \approx \ell$$

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، فيجب أن يُعدل السلم ليكون طوله 16.6 ft .

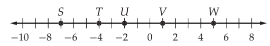
ملاحظات المعلم

الفصل 3 ملحق الإجابات

ملحق إجابات كتاب التمارين

1-1 المسافة ونقطة المنتصف

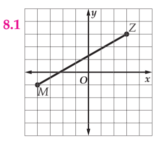
استعمل خط الأعداد المجاور لإيجاد كل مما يأتي :



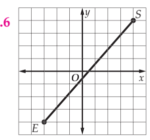
1) VW **4**　　2) TV **5**

3) ST **3**　　4) SV **8**

أوجد المسافة بين كل نقطتين في كل مما يأتي :

5) 

$\sqrt{65} \approx 8.1$

6) 

$\sqrt{113} \approx 10.6$

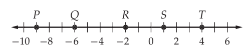
7) $L(-7, 0), Y(5, 9)$ **15**

8) $U(1, 3), B(4, 6)$ **$\sqrt{18} \approx 4.2$**

9) $V(-2, 5), M(0, -4)$ **$\sqrt{85} \approx 9.2$**

10) $C(-2, -1), K(8, 3)$ **$\sqrt{116} \approx 10.8$**

استعمل خط الأعداد المجاور لإيجاد إحداثي نقطة منتصف كلٍّ ممّا يأتي:



11) $\overline{RT}$ **1**　　12) $\overline{QR}$ **-4**

13) $\overline{ST}$ **$2\frac{1}{2}$**　　14) $\overline{PR}$ **$-5\frac{1}{2}$**

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها معطاة في كل مما يأتي:

15) $K(-9, 3), H(5, 7)$ **$(-2, 5)$**

16) $W(-12, -7), T(-8, -4)$ **$(-10, -5.5)$**

أوجد إحداثيي النقطة المجهولة ، إذا كانت E منتصف $\overline{DF}$ في كل مما يأتي :

17) $F(5, 8), E(4, 3)$ **$D(3, -2)$**

18) $F(2, 9), E(-1, 6)$ **$D(-4, 3)$**

19) $D(-3, -8), E(1, -2)$ **$F(5, 4)$**

20) **محيط:** رؤوس مضلع رباعي هي $R(-1, 3), S(3, 3), T(5, -1), U(-2, -1)$.
أوجد محيطه إلى أقرب عُشر . **19.6 وحدة**

1-2 الوسط الهندسي

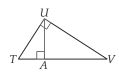
أوجد الوسط الهندسي لكل زوج من الأعداد الآتية :

1) 8 و 12 **$\sqrt{96} = 4\sqrt{6} \approx 9.8$**

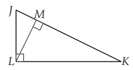
2) 3 و 15 **$\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6.7$**

3) $\frac{4}{5}$ و 2 **$\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \approx 1.3$**

اكتب عبارة تشابه، تعيّن فيها المثلثات الثلاثة المتشابهة في كل من الشكلين الآتيين :

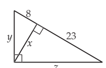
4) 

$\triangle VUT \sim \triangle UAT \sim \triangle VAU$

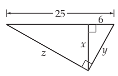
5) 

$\triangle JLK \sim \triangle LMK \sim \triangle JML$

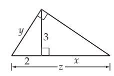
أوجد قيمة كل من x ، y ، z في كل مما يأتي :

6) 

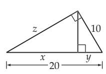
$x = \sqrt{184} = 2\sqrt{46} \approx 13.6$
$y = \sqrt{248} = 2\sqrt{62} \approx 15.7$
$z = \sqrt{713} \approx 26.7$

7) 

$x = \sqrt{114} \approx 10.7$
$y = \sqrt{150} = 5\sqrt{6} \approx 12.2$
$z = \sqrt{475} = 5\sqrt{19} \approx 21.8$

8) 

$x = 4.5$
$y = \sqrt{13} \approx 3.6$
$z = 6.5$

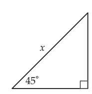
9) 

$x = 15$
$y = 5$
$z = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17.3$

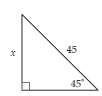
10) **هندسة مدنية:** يُشكّل مطار ومصنع ومركز تجاري رؤوس مثلث قائم الزاوية أضلاعه تمثل ثلاث طرق رئيسة. حيث يبعُد المطار عن المصنع مسافة 9.0 km، ويبعُد كل منهما عن المركز التجاري 5.4 km ، و 7.2 km على الترتيب. يراد إنشاء طريق خدمات من المركز التجاري إلى الطريق الرئيس الذي يصل بين المطار والمصنع. ما أقصر طول ممكن لهذا الطريق؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة. **4.32 km**

1-3 المثلثات القائمة الخاصة

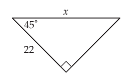
أوجد قيمة x في كل مما يأتي :

1) 

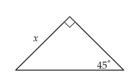
$14\sqrt{2}$

2) 

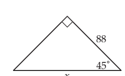
$\frac{45\sqrt{2}}{2}$ أو $22.5\sqrt{2}$

3) 

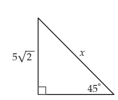
$22\sqrt{2}$

4) 

$105\sqrt{2}$

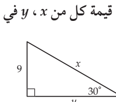
5) 

$88\sqrt{2}$

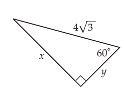
6) 

10

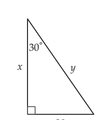
أوجد قيمة كل من x ، y في كل مما يأتي :

7) 

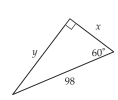
$x = 18$
$y = 9\sqrt{3}$

8) 

$x = 6$
$y = 2\sqrt{3}$

9) 

$x = 20\sqrt{3}$
$y = 40$

10) 

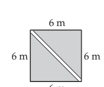
$x = 49$
$y = 49\sqrt{3}$

11) أوجد طول ضلع المثلث $90° - 45° - 45°$ ، إذا كان طول وتره 38 . **$19\sqrt{2}$**

12) أوجد طول وتر المثلث $90° - 45° - 45°$ ، إذا كان طول ضلعه 77 cm. **$77\sqrt{2}$ cm**

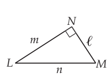
13) إذا كان ارتفاع مثلث متطابق الأضلاع 33 ft، فأوجد طول ضلعه. **$22\sqrt{3}$ ft**

14) **حدائق نباتية:** أُنشئت إحدى حدائق النباتات الطبية على شكل مربع طول ضلعه 6 m . يمكن للزوار مشاهدة نباتات الحديقة على جانبي ممر قطري خلال الحديقة، كما في الشكل المجاور، ما طول هذا الممر؟ **$6\sqrt{2} \approx 8.49$ m**



1-4 حساب المثلثات

استعمل ΔLNM لإيجاد قيمة كلٍّ من $\sin L, \cos L, \tan L, \sin M, \cos M, \tan M$.
ثم عبّر عن كل نسبة على صورة كسر اعتيادي، وكسر عشري إلى أقرب جزء من مئة :



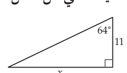
1) $\ell = 15, m = 36, n = 39$

$\sin L = \frac{15}{39} = \frac{5}{13} \approx 0.38$
$\cos L = \frac{36}{39} = \frac{12}{13} \approx 0.92$
$\tan L = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0.42$
$\sin M = \frac{36}{39} = \frac{12}{13} \approx 0.92$
$\cos M = \frac{15}{39} = \frac{5}{13} \approx 0.38$
$\tan M = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} \approx 2.4$

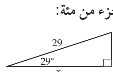
2) $\ell = 12, m = 12\sqrt{3}, n = 24$

$\sin L = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0.50$
$\cos L = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$
$\tan L = \frac{12}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$
$\sin M = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$
$\cos M = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0.50$
$\tan M = \frac{12\sqrt{3}}{12} = \sqrt{3} \approx 1.73$

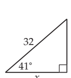
أوجد قيمة x في كل شكل أدناه إلى أقرب جزء من مئة:

3) 

12.24

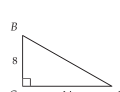
4) 

25.36

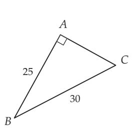
5) 

24.15

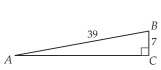
استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle B$ في كل شكل أدناه إلى أقرب عُشر:

6) 

60.3°

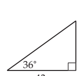
7) 

33.6°

8) 

79.7°

9) **جغرافيا:** استعمل سعود الثيودولايت لرسم خريطة تُبيِّن تضاريس منطقة ما، ولتحديد ارتفاع صخرة رأسية، قاس بُعده عن قاعدة الصخرة فكان 43 m، وكانت الزاوية بين سطح الأرض وخط النظر إلى قمة الصخرة 36°، فما ارتفاع الصخرة إلى أقرب متر ؟

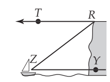


31 m

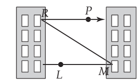
ملحق إجابات كتاب التمارين

1-5 زوايا الارتفاع والانخفاض

سَمِّ زاوية الانخفاض وزاوية الارتفاع في كل شكل من الشكلين الآتيين :

1) 

$\angle TRZ, \angle YZR$

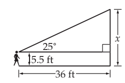
2) 

$\angle PRM, \angle LMR$

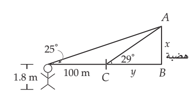
3) **خزان مياه:** ينظر أحمد إلى خزان مياه فوق سطح مدرسته يبعُد عنه 110 ft، إذا كان ارتفاع الخزان عن سطح الأرض 32.5 ft، وارتفاع مستوى نظر أحمد 6 ft فوق مستوى سطح الأرض، فما قياس زاوية ارتفاع الخزان بالنسبة لأحمد؟ قرب الناتج إلى أقرب عُشر. **13.5° تقريباً**

4) **إنشاءات:** يقوم عامل بصيانة سقف منزل فثبّت سلمًا على الحائط، بحيث تصل قمته ارتفاع 8 ft عن سطح الأرض. إذا كانت زاوية الارتفاع من قاعدة السلم إلى قمته تساوي 75°، فكم تبعُد قاعدة السلم عن قاعدة الحائط؟ قرّب الناتج إلى أقرب قدم. **21 ft تقريباً**

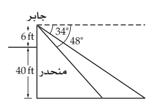
5) **قوانين بلدية:** تحدّد البلدية في إحدى المدن ارتفاع سارية العلم 25 ft فوق أي مبنى حكومي. أرادت مديرة مدرسة في هذه المدينة أن تتحقق من مدى التزام مدرستها بتنفيذ القانون على نحوٍ صحيح. إذا كان ارتفاع مستوى نظرها عن سطح الأرض 5.5 ft، وعندما كانت تقف على بُعد 36 ft من قاعدة سارية العلم كانت زاوية ارتفاع قمة السارية 25° تقريبًا. فما ارتفاع سارية العلم إلى أقرب عُشر؟ **22.3 ft تقريباً**



6) **جغرافيا:** وقف إبراهيم الذي يبلغ طوله 1.8 m أمام هضبة، فشاهد قمتها بزاوية ارتفاع قياسها 29°. ثم رجع إبراهيم إلى الخلف مسافة 100 m ونظر إلى الهضبة فكانت زاوية ارتفاعها 25°، ما ارتفاع الهضبة؟ **296 m تقريباً**

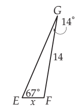


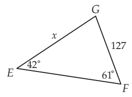
7) **قياس غير مباشر:** يقف جابر أعلى منحدر يرتفع 40 ft فوق سطح البحر، فشاهد طفلين يلعبان على الشاطئ. إذا كان ارتفاع مستوى نظره 6 ft فوق سطح الأرض، وكانت زاويتا انخفاض الطفلين 34°، 48° على الترتيب، فأوجد المسافة بين الطفلين إلى أقرب قدم. **27 ft تقريباً**

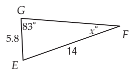


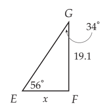
1-6 قانون الجيب وقانون جيب التمام

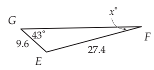
أوجد قيمة x في كل شكل أدناه، مقرّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة، وأطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر :

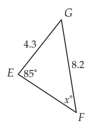
1) 
3.7

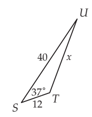
2) 
166

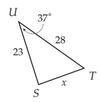
3) 
24

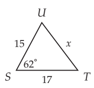
4) 
12.9

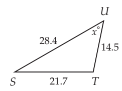
5) 
14

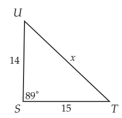
6) 
31

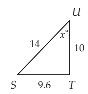
7) 
31.3

8) 
16.9

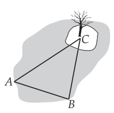
9) 
16.6

10) 
48

11) 
20.3

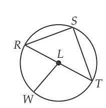
12) 
43

13) **قياس غير مباشر:** كوّن محمد مثلثًا كما في الشكل المجاور لإيجاد المسافة من حافة بحيرة إلى شجرة على إحدى الجزر، إذا كانت المسافة من الموقع A إلى الموقع B تساوي 85 m، وكان قياس الزاويتين عند A ، B يساوي 51° ، 83° على الترتيب. فما المسافة من حافة البحيرة عند B إلى قاعدة الشجرة عند C ؟ **91.8 m تقريبًا**



2-1 الدائرة ومحيطها

أجب عن التمارين 1-7 مستعملاً $\odot L$:



1) سمّ الدائرة. **$\odot L$**

2) سمّ نصف قطر للدائرة. **$\overline{LR}$ أو $\overline{LT}$ أو $\overline{LW}$**

3) سمّ وترًا في الدائرة. **$\overline{RT}$ أو $\overline{RS}$ أو $\overline{ST}$**

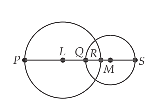
4) سمّ قطرًا للدائرة. **$\overline{RT}$**

5) سمّ نصف قطر لا يكون مرسومًا كجزء من قطر للدائرة. **$\overline{LW}$**

6) ليكن طول نصف قطر الدائرة يساوي 3.5 m، أوجد طول قطرها. **7 m**

7) إذا كان $RT = 19$ m، فأوجد LW . **9.5 m**

إذا كان طولا قطري الدائرتين $\odot L$ ، $\odot M$ هما 20 ، 13 وحدة على الترتيب، $QR = 4$. كما في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:



8) LQ **6 وحدة**

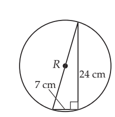
9) RM **2.5 وحدة**

أوجد طول القطر ونصفه للدائرتين اللتين أُعطي محيطاهما فيما يأتي، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

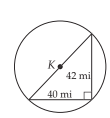
10) $C = 21.2$ ft **6.75 ft, 3.37 ft**

11) $C = 5.9$ m **1.88 m, 0.94 m**

أوجد القيمة الفعلية لمحيط كل من الدائرتين أدناه:

12) 

25π cm

13) 

58π mi

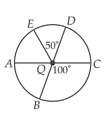
14) **ساعة شمسية (المزولة):** اشترى عمر ساعة شمسية دائرية الشكل لوضعها في مركز حديقة منزله. إذا كان طول قطر هذه الساعة يساوي 9.5 in، فأوجد:

a) نصف قطر الساعة. **4.75 in**

b) محيط الساعة إلى أقرب جزء من مئة. **29.85 in**

2-2 قياس الزوايا والأقواس

إذا كان $\overline{AC}$ ، $\overline{DB}$ قطرين في $\odot Q$ كما في الشكل المجاور، فحدّد ما إذا كان القوس المعطى في كل مما يأتي قوس أصغر أو قوس أكبر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه :



1) $\widehat{AE}$ **قوس أصغر، 50**

2) $\widehat{AB}$ **قوس أصغر، 80**

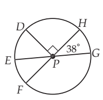
3) $\widehat{EDC}$ **قوس أصغر، 130**

4) $\widehat{ADC}$ **نصف دائرة، 180**

5) $\widehat{ABC}$ **نصف دائرة، 180**

6) $\widehat{BC}$ **قوس أصغر، 100**

إذا كان $\overline{FH}$ ، $\overline{EG}$ قطرين في $\odot P$ كما في الشكل المجاور ، فأوجد كلًّا مما يأتي:



7) $m\widehat{EF}$ **38**

8) $m\widehat{DE}$ **52**

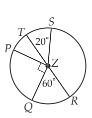
9) $m\widehat{FG}$ **142**

10) $m\widehat{DHG}$ **128**

11) $m\widehat{DFG}$ **232**

12) $m\widehat{DGE}$ **308**

استعمل $\odot Z$ في الشكل أدناه لإيجاد طول كل قوس مما يأتي، مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة :



13) $\widehat{QPT}$ ، حيث $QZ = 10$ in **20.94 in**

14) $\widehat{QR}$ ، حيث $PZ = 12$ ft **12.57 ft**

15) $\widehat{PQR}$ ، حيث $TR = 15$ m **19.63 m**

16) $\widehat{QPS}$ ، حيث $ZQ = 7$ cm **17.10 cm**

17) **واجب منزلي:** اعتمد الجدول المجاور الذي يُبيّن عدد الساعات التي يقضيها طلاب مدرسة ما في حل واجباتهم المنزلية كل ليلة للإجابة عمّا يأتي:

الواجب المنزلي	
أقل من الساعة	8%
1-2 ساعة	29%
2-3 ساعات	58%
3-4 ساعات	3%
أكثر من 4 ساعات	2%

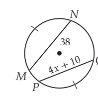
a) إذا مُثِّلت البيانات باستعمال القطاعات الدائرية، فكم درجة تقابل كل فئة؟ **28.8, 104.4, 208.8, 10.8, 7.2**

b) صِف القوس الذي يقابل كل فئة. **القوس المقابل للفئة 2-3 ساعات هوالقوس الأكبر، والأقواس المقابلة للفئات الأخرى هي أقواس صغيرة**

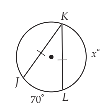
2-3 الأقواس والأوتار

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من الدوائر الآتية:

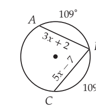
1) 7



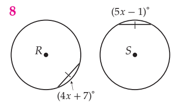
2) 145



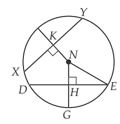
3) 4.5



4) $\odot R \cong \odot S$ 8



إذا كان طول نصف قطر $\odot N$ في الشكل المجاور يساوي 18، $m\widehat{DE} = 120°$، $NK = 9$. فأوجد كلاًّ مما يأتي:



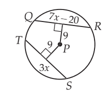
5) $m\widehat{GE}$ 60°

6) $m\angle HNE$ 60°

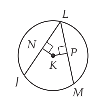
7) $m\angle HEN$ 30°

8) HN 9

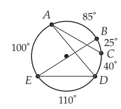
9) إذا كان $QR = (7x - 20)$، $TS = 3x$ في $\odot P$ المبينة أدناه، فما قيمة x؟ 5



10) إذا كان $\overline{JL} \cong \overline{LM}$، $KN = (3x - 2)$، $KP = (2x + 1)$ في $\odot K$ المبينة أدناه، فما قيمة x؟ 3



11) **ممرات حديقة:** حديقة دائرية الشكل تحيط بها ممرات محددة بأطوال الأقواس التي تظهر في الشكل المجاور. ولها أيضًا أربعة ممرات داخلية محددة بالقطع المستقيمة $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BE}, \overline{DE}$، أي الممرات المستقيمة لها الطول نفسه؟ $\overline{DE}$، $\overline{AC}$

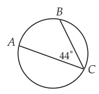


12

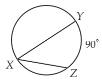
2-4 الزوايا المحيطية

أوجد كلًّا مما يأتي:

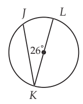
1) $m\widehat{AB}$ 88°



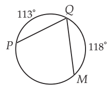
2) $m\angle X$ 45°



3) $m\widehat{JK}$ 128°



4) $m\angle Q$ 64.5°



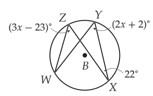
جبر: أوجد كلًّا مما يأتي:

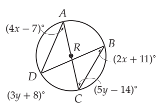
5) $m\angle W$ 22°

6) $m\angle A$ 29°

7) $m\angle Y$ 52°

8) $m\angle D$ 41°





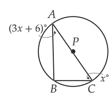
جبر: أوجد كلًّا مما يأتي:

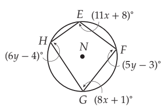
9) $m\angle A$ 69°

10) $m\angle G$ 73°

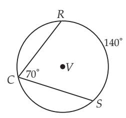
11) $m\angle C$ 21°

12) $m\angle H$ 98°





13) **احتمال:** عُينت النقطة C عشوائيًا على $\odot V$ في الشكل المجاور، بحيث لا تنطبق على أيٍّ من النقطتين R أو S. إذا كان $m\widehat{RS} = 140°$، فما احتمال أن يكون $m\angle RCS = 70°$؟ $\frac{11}{18}$

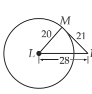


13

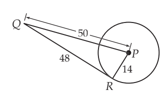
2-5 المماسات

حدِّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة معطاة في التمرينين 1، 2 تمثل مماسًا للدائرة أدناه:

1) $\overline{MP}$ لا؛ $20^2 + 21^2 \neq 28^2$

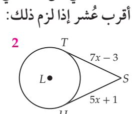


2) $\overline{QR}$ نعم؛ $14^2 + 48^2 = 50^2$

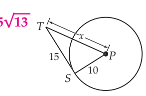


أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا للدائرة هي مماس بالفعل، مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك:

3) 2

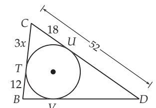


4) $5\sqrt{13}$

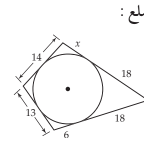


أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه، ثم أوجد محيط كل مضلع:

5) 6, 128



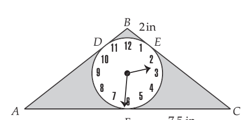
5) 7, 76



6) **ساعات:** يمثّل التصميم في الشكل المجاور وجه ساعة دائرية مثبتة داخل قاعدة مثلثة الشكل. إذا كان AF، FC متساويين، فأوجد:

a) AB. 9.5 in

b) محيط القاعدة مثلثة الشكل. 34 in

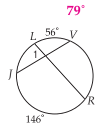


14

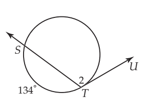
2-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

أوجد كلاًّ مما يأتي، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا هي مماس بالفعل:

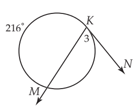
1) $m\angle 1$ 79°



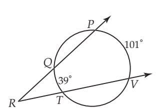
2) $m\angle 2$ 113°



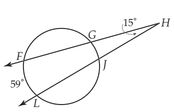
3) $m\angle 3$ 72°



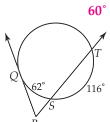
4) $m\angle R$ 31°



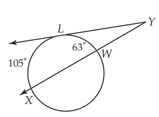
5) $m\widehat{GJ}$ 29°



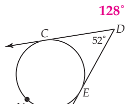
6) $m\angle R$ 60°



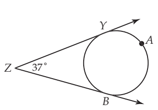
7) $m\angle Y$ 21°



8) $m\widehat{CE}$ 128°

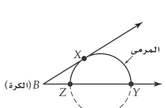


9) $m\widehat{YAB}$ 217°



10) **رياضة:** يتعيَّن على إبراهيم في لعبة ركل الكرة أن يركلها داخل مرمى على هيئة نصف دائرة، إذا كان $m\widehat{XZ} = 58°$، $m\widehat{XY} = 122°$، فما قياس الزاوية التي يجب عليه أن يركل الكرة خلالها لتسجيل هدف؟ برّر إجابتك.

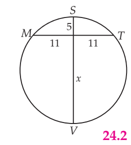
يجب على إبراهيم أن يركل الكرة بزاوية أقل من 32°؛ لأن قياس الزاوية التي يصنعها المماس المرسوم من موقع الكرة على سطح الأرض إلى القوس الذي يمثل حدود المرمى يساوي 32°.



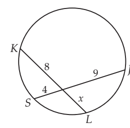
15

2-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

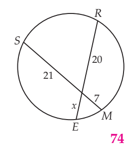
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماس بالفعل :

1)


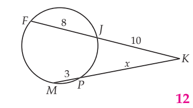
24.2

2)


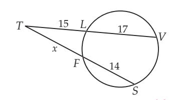
4.5

3)


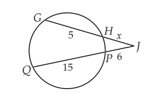
74

4)


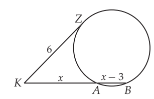
12

5)


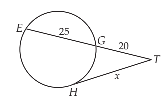
16

6)


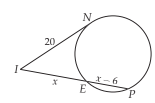
9

7)


5.1

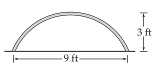
8)


30

9)


15.7

10) **بناء:** بُني فوق مدخل عمارة قوس ارتفاعه 3 ft وعرضه 9 ft كما في الشكل المجاور. أوجد طول نصف قطر الدائرة التي تحوي هذا القوس. **4.875 ft**



2-8 معادلة الدائرة

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي إذا كان :

1) مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 7 .
$x^2 + y^2 = 49$

2) مركزها $(0, 0)$ ، وطول قطرها 81 .
$x^2 + y^2 = 81$

3) مركزها $(-7, 11)$ ، وطول نصف قطرها 8.
$(x+7)^2 + (y-11)^2 = 64$

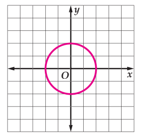
4) مركزها $(12, -9)$ ، وطول قطرها 22 .
$(x-12)^2 + (y+9)^2 = 121$

5) مركزها $(-1, 8)$ وتمر بالنقطة $(9, 3)$.
$(x+1)^2 + (y-8)^2 = 125$

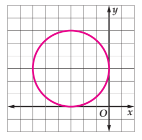
6) مركزها $(-3, -3)$ ، وتمر بالنقطة $(-2, 3)$.
$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 37$

أوجد إحداثيي المركز وطول نصف القطر لكل من الدائرتين الآتيتين اللتين عُلمت معادلاتهما، ثم مثّل الدائرة في المستوى الإحداثي :

7) $x^2 + y^2 = 4$
$(0, 0), 2$



8) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$
$(-3, 3), 3$



9) **زلازل:** يطلق الزلزال عند حدوثه أمواجًا زلزالية تتحرك على شكل دوائر متحدة في مركز حدوثه. وتعمل محطات رصد الزلازل على تسجيل شدة الزلزال وتحديد مركزه. افرض أن محطة رصد حدّدت أن مركز حدوث زلزال يقع على بُعد 50 km من المحطة التي تقع عند نقطة الأصل، اكتب معادلة الدائرة التي تمثل إحدى الدوائر المتحدة في المركز من أمواج الزلزال. **$x^2 + y^2 = 2500$**

3-1 خصائص الأعداد الحقيقية

سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 6425 **N, W, Z, Q, R**

2) $\sqrt{7}$ **I, R**

3) 2π **I, R**

4) 0 **W, Z, Q, R**

5) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ **Q, R**

6) $-\sqrt{16}$ **Z, Q, R**

7) -35 **Z, Q, R**

8) -31.8 **Q, R**

سمّ الخاصية في كل مما يأتي:

9) $5x \cdot (4y + 3x) = 5x \cdot (3x + 4y)$
الخاصية الإبدالية لعملية الجمع

10) $7x + (9x + 8) = (7x + 9x) + 8$
الخاصية التجميعية لعملية الجمع

11) $5(3x + y) = 5(3x + 1y)$
العنصر المحايد لعملية الضرب

12) $7n + 2n = (7 + 2)18n$
الخاصية التوزيعية

13) $3(2x)y = (3 \cdot 2)(xy)$
الخاصية التجميعية لعملية الضرب

14) $3x \cdot 2y = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y$
الخاصية الإبدالية لعملية الضرب

15) $(6 + -6)y = 0y$
النظير الجمعي

16) $\frac{1}{4} \cdot 4y = 1y$
النظير الضربي

17) $5(x + y) = 5x + 5y$
الخاصية التوزيعية

18) $4n + 0 = 4n$
العنصر المحايد لعملية الجمع

أوجد النظير الجمعي، والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي :

19) 0.4 **$-0.4, 2.5$**

20) -1.6 **$1.6, -0.625$**

21) $-\frac{11}{16}$ **$\frac{11}{16}, -\frac{16}{11}$**

22) $5\frac{5}{6}$ **$-5\frac{5}{6}, \frac{6}{35}$**

بسّط كل تعبير مما يأتي :

23) $5x - 3y - 2x + 3y$ **$3x$**

24) $-11a - 13b + 7a - 3b$ **$-4a - 16b$**

25) $8x - 7y - (3 - 6y)$ **$8x - y - 3$**

26) $4c - 2c - (4c + 2c)$ **$-4c$**

27) $3(r - 10t) - 4(7t + 2r)$ **$-5r - 58t$**

28) $\frac{1}{5}(10a - 15b) + \frac{1}{2}(8b + 4a)$ **$4a + b$**

29) $2(4z - 2x + y) - 4(5z + x - y)$
$-12z - 8x + 6y$

30) $\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}x + 12y\right) - \frac{1}{4}(2x - 12y)$ **$13y$**

31) **سفر:** قاد علي سيارته بسرعة 60 mi/h مدة t ساعة، بينما قاد سعيد سيارته بسرعة 50 mi/h مدة $(t + 2)$ ساعة. اكتب تعبيرًا في أبسط صورة لمجموع المسافتين اللتين قطعهما علي وسعيد. **$(110t + 100)$ mi**

32) **نظرية الأعداد:** استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لبيان فيما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة:
إذا كان $a \neq 0, b \neq 0$ ، وكان $a > b$ ، فإن $a\left(\frac{1}{a}\right) > b\left(\frac{1}{b}\right)$. برر إجابتك. **خاطئة، مثال مضاد: $5\left(\frac{1}{5}\right) \not> 4\left(\frac{1}{4}\right)$**

3-2 حَل معادلات القيمة المطلقة

احسب قيمة كل تعبير مما يأتي إذا كان $a = -1, b = -8, c = 5, d = -1.4$:

1) $|6a|$ **6**

2) $|2b + 4|$ **12**

3) $-|10d + a|$ **−15**

4) $|17c| + |3b - 5|$ **114**

5) $-6|10a - 12|$ **−132**

6) $|2b - 1| - |-8b + 5|$ **−52**

7) $|5a - 7| + |3c - 4|$ **23**

8) $|1 - 7c| - |a|$ **33**

9) $-3|0.5c + 2| - |-0.5b|$ **−17.5**

10) $|4d| + |5 - 2a|$ **12.6**

11) $|a - b| + |b - a|$ **14**

12) $|2 - 2d| - 3|b|$ **−19.2**

حُلّ كل معادلة مما يأتي ، ثم تحقّق من صحة حلك:

13) $|n - 4| = 13$ **$\{-9, 17\}$**

14) $|x - 13| = 2$ **$\{11, 15\}$**

15) $|2y - 3| = 29$ **$\{-13, 16\}$**

16) $7|x + 3| = 42$ **$\{-9, 3\}$**

17) $|3u - 6| = 42$ **$\{-12, 16\}$**

18) $|5x - 4| = -6$ **$\varnothing$**

19) $-3|4x - 9| = 24$ **$\varnothing$**

20) $-6|5 - 2y| = -9$ **$\{1.75, 3.25\}$**

21) $|8 + p| = 2p - 3$ **$\{11\}$**

22) $|4w - 1| = 5w + 37$ **$\{-38\}$**

23) $4|2y - 7| + 5 = 9$ **$\{3, 4\}$**

24) $-2|7 - 3y| - 6 = -14$ **$\left\{1, 3\frac{2}{3}\right\}$**

25) $2|4 - n| = -3n$ **$\{-8\}$**

26) $5 - 3|2 + 2w| = -7$ **$\{-3, 1\}$**

27) $5|2r + 3| - 5 = 0$ **$\{-2, -1\}$**

28) $3 - 5|2d - 3| = 4$ **$\varnothing$**

29) **طقس:** دُرِّج ميزان حرارة بحيث تختلف درجة الحرارة التي يقيسها عن درجة الحرارة الحقيقية بما لا يزيد على 1.5 درجة فهرنهايتية. اكتب معادلة لإيجاد الحد الأدنى والحد الأعلى الحقيقيين عندما تكون قراءة الميزان 87.4°F، ثم حلها.
$|x - 87.4| = 1.5$، الحد الأدنى = 85.9، الحد الأعلى = 88.9

30) **استطلاعات الرأي العام:** تُعطى استطلاعات الرأي العام المنشورة في الجرائد عادة هامشًا للخطأ. فمثلًا استطلاع الرأي الذي يكون هامش الخطأ فيه ±5% من القيمة الحقيقية يعتبر دقيقًا ضمن هذا الهامش. إذا أفاد استطلاع ما بأن أحد المرشحين سيحصل على ما نسبته 51% من الأصوات القادمة، وكان هامش الخطأ يبلغ ±3%، فاكتب المعادلة التي تصف الحد الأدنى والحد الأعلى لنسبة أصوات المقترعين المتوقع أن يكسبها ذلك المرشح.
$|x - 51| = 3$، الحد الأدنى = 48، الحد الأعلى = 54

ملحق إجابات كتاب التمارين

3-3 حل المتباينات الخطية في متغير واحد

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

1) $8x - 6 \geq 10$ $\{x \mid x \geq 2\}$

2) $23 - 4u < 11$ $\{u \mid u > 3\}$

3) $-16 - 8r \geq 0$ $\{r \mid r \leq -2\}$

4) $14c < 9c + 5$ $\{c \mid c < 1\}$

5) $9x - 11 > 6x - 9$ $\left\{x \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

6) $-3(4w - 1) > 18$ $\left\{w \mid w < -\frac{5}{4}\right\}$

7) $1 - 8u \leq 3u - 10$ $\{u \mid u \geq 1\}$

8) $17.5 < 19 - 2.5x$ $\{x \mid x < 0.6\}$

9) $9(2r - 5) - 3 < 7r - 4$ $\{r \mid r < 4\}$

10) $1 + 5(x - 8) \leq 2 - (x + 5)$ $\{x \mid x \leq 6\}$

11) $\frac{4x - 3}{2} \geq -3.5$ $\{x \mid x \geq -1\}$

12) $q - 2(2 - q) \leq 0$ $\left\{q \mid q \leq \frac{4}{3}\right\}$

13) $-36 - 2(w + 77) > -4(2w + 52)$ $\{w \mid w > -3\}$

14) $4n - 5(n - 3) > 3(n + 1) - 4$ $\{n \mid n < 4\}$

عرِّف متغيّرًا واستعمله في التعبير عن كلٍّ مما يأتي بمتباينة، ثم حلَّها:

15) ناتج طرح 20 من عدد ما أكبر من مثلي ذلك العدد. $n - 20 > 2n, n < -20$

16) أربعة أمثال ناتج جمع مثلي عدد إلى 3– أقل من ناتج ضرب 5.5 في ذلك العدد.
$4[2n + (-3)] < 5.5n, n < 4.8$

17) **مال:** لدى أحمد BD 3800 في حسابه البنكي، منها BD 750 يدَّخرها لابنه خالد. إذا أراد أحمد أن يسحب من حسابه مبلغًا معينًا، بحيث يبقى BD 500 على الأقل في حسابه، بالإضافة إلى مدخرات خالد، فاكتب متباينة تُبيّن المبلغ الذي يمكنه سحبه من الرصيد ويبقى محققًا الشروط المعطاة، ثم حلَّها.
$3800 - 750 - w \geq 500, w \leq 2550$

الفصل الثالث: المعادلات والمتباينات

20

3-4 حل المتباينات المركبة ومتباينات القيمة المطلقة

اكتب متباينة قيمة مطلقة تُعبِّر عن كل تمثيل مما يأتي:

1) $|x| \leq 50$

2) $|x| \geq 25$

3) $|n| \geq 10$

4) $|n| < \frac{4}{3}$

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

5) $2c - 4 > -6$ و $3c + 1 < 13$ $\{c \mid -2 < c < 4\}$

6) $-8 \leq 3y - 20 < 52$ $\{y \mid 4 \leq y < 24\}$

7) $6x - 4 > 4 + 5x$ أو $3(5x - 2) < 24$ $\{x \mid x < 2$ أو $x > 8\}$

8) $5x + 6 \geq -14$ و $15 - 5x \leq 0$ $\{x \mid x \geq 3\}$

9) $|2w| \geq 5$ $\left\{w \mid w \leq -\frac{5}{2}\right.$ أو $\left.w \geq \frac{5}{2}\right\}$

10) $|y + 5| < 2$ $\{y \mid -7 < y < -3\}$

11) $|x - 8| \geq 3$ $\{x \mid x \leq 5$ أو $x \geq 11\}$

12) $|2z - 2| \leq 3$ $\left\{z \mid -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{5}{2}\right\}$

13) $|2x + 2| - 7 \leq -5$ $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$

14) $|x| > x - 1$ جميع الأعداد الحقيقية (R)

15) $|3b + 5| \leq -2$ $\varnothing$

16) $|3n - 2| - 2 < 1$ $\left\{n \mid -\frac{1}{3} < n < \frac{5}{3}\right\}$

17) **تساقط الأمطار:** تغيَّرت كميات سقوط الأمطار في منطقة ساحلية معينة في 90% من السنوات الثلاثين الأخيرة، فقد سجّلت كمية الأمطار بما لا يزيد على 6.5 in من القيمة المتوسطة البالغة 24 in. اكتب متباينة قيمة مطلقة لوصف كمية الأمطار الـ 10% الأخرى في السنوات الثلاثين الأخيرة، ثم حلها.
$|r - 24| > 6.5, \{r \mid r < 17.5$ أو $r > 30.5\}$

18) **تصنيع:** تتطلب تعليمات شركة ألّا يختلف حجم كل عبوة حساء منتجة عن الكمية المقررة 14.5 أونصة من السائل إلا بمقدار لا يزيد عن 0.08 أونصة. اكتب متباينة قيمة مطلقة لوصف الحجم المقبول من العبوات، ثم حُلّها.
$|v - 14.5| \leq 0.08, \{v \mid 14.42 \leq v \leq 14.58\}$

الفصل الثالث: المعادلات والمتباينات

21

ملاحظات المعلم

الرياضيات ١

للمرحلة الثانوية

المحتويات

الفصل الأول:

المثلثات القائمة وحساب المثلثات

الفصل الثاني:

الدائرة

الفصل الثالث:

المعادلات والمتباينات

McGraw Hill Education

www.obeikaneducation.com

التعليم مستقبل البحرين