

إجابات تدريبات الدرس

نظريات النهايات

تدريب ١

إذا كان $q = 2s$ ، $h = 3s$ ، فجد كلاً مما يأتي:

$$(1) \text{ نهايا } \left(\frac{q}{s} + h \right) \text{ نهايا } \left(\frac{q}{s} \right) \text{ نهايا } \left(\frac{q}{s} \right) \text{ نهايا } \left(\frac{q}{s} \right)$$

$$(3) \text{ نهايا } \left(\sqrt{3 + \frac{q}{s}} + \sqrt{\frac{q}{s}} \right) + 15$$

الحل:

$$(1) \text{ نهايا } \left(\frac{q}{s} + h \right) + \text{نهايا } \left(\frac{q}{s} \right) + \text{نهايا } \left(\frac{q}{s} \right) + \text{نهايا } \left(\frac{q}{s} \right)$$

$$2^{-} \times (2^{-} + 2(2^{-})) + 2^{-} \times 2 =$$

$$20 + 4^{-} = 2^{-} \times 10^{-} + 4^{-} =$$

$$16 =$$

$$(2) \text{ نهايا } \left(\frac{q}{s} \right) = \frac{1 \times 2}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \text{ نهايا } \left(\sqrt{3 + \frac{q}{s}} + \sqrt{\frac{q}{s}} \right) + 15$$

$$15 + \sqrt{1 + 1} \sqrt{3 + 1 \times 2} +$$

$$15 + \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$15 + \sqrt{2} \sqrt{4}$$

تدريب ٢

جد كلاً مما يأتي:

$$(2) \text{ نهايا } |s - 16|$$

$$(1) \text{ نهايا } |s - 8|$$

$$(3) \text{ نهايا } |s^2 - 16|$$

الحل:

$$(1) \text{ نهيا } |8 - 0| = |8 - 0|$$

$$|8 - 0| =$$

$$|8| =$$

تعويض مباشر؛ لأن الصفر ليس جذر (صفر) للاقتزان ما داخل المطلق.

$$(2) \text{ نهيا } |16 - 0| = |16 - 0|$$

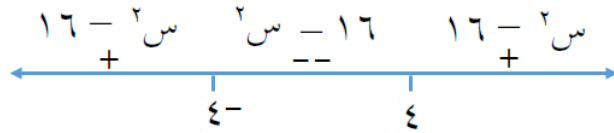
$$16 - 0 = 16 = \text{صفر} \leftarrow 16 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 16 \leq 0, \text{ نهيا } |16 - 0| \\ 16 > 0, \text{ نهيا } |16 - 0| \end{array} \right\} = |16 - 0|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نهيا } |16 - 0| = \text{صفر} \\ \text{نهيا } |16 - 0| = \text{صفر} \end{array} \right\} \iff \text{نهيا } |16 - 0| = \text{صفر}$$

$$(3) \text{ نهيا } |16 - 4| = |16 - 4|$$

$$16 - 4 = 12 = \text{صفر} \leftarrow 16 - 4 = 12$$



$$\text{نهيا } |16 - 4| = \text{صفر}$$

$$\text{نهيا } |16 - 4| = \text{صفر}$$

$$\text{نهيا } |16 - 4| = \text{صفر}$$

تدريب 3

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(1) \text{ نهيا } [2 - 4]$$

$$(2) \text{ نهيا } [2 - 1]$$

$$(3) \text{ نهيا } [0, 25]$$

$$(4) \text{ نهيا } [1 + 1]$$

الحل:

(١) نهيا [س - ٢] $\leftarrow_{١}$ نعيد التعريف حول النقطة س = ١

$$\leftarrow \begin{array}{c} | \\ \cdot \\ | \\ ١ \\ | \\ ٢ \\ | \\ \cdot \\ | \\ \cdot \end{array} \rightarrow \quad ١ = \frac{١}{|\text{معامل س}|} = \text{ل}$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ > \text{س} \geq ١, \quad ١ - \\ ١ > \text{س} \geq ٠, \quad ٢ - \end{array} \right\} = [\text{س} - ٢]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نهيا } [٢ - \text{س}] \leftarrow_{١} = ١ - \\ \text{نهيا } [٢ - \text{س}] \leftarrow_{١} = ٢ - \end{array} \right. \Rightarrow \text{نهيا } [٢ - \text{س}] \leftarrow_{١} \text{ غير موجودة}$$

$$\leftarrow \begin{array}{c} | \\ \cdot \\ | \\ ٠,٥ \\ | \\ ١ \\ | \\ ١,٥ \\ | \\ ٢ \\ | \\ \cdot \\ | \\ \cdot \end{array} \rightarrow \quad \frac{١}{٢} = \text{ل} \quad (٢) \text{ نهيا } [٢ - ٤] \leftarrow_{١,٥}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{صفر}, \quad ٢ \geq \text{س} > ١,٥ \\ ١, \quad ١,٥ \geq \text{س} \geq ١ \end{array} \right\} = [٢ - ٤]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نهيا } [٢ - ٤] \leftarrow_{١,٥} = \text{صفر} \\ \text{نهيا } [٢ - ٤] \leftarrow_{١,٥} = ١ \end{array} \right. \Rightarrow \text{نهيا } [٢ - ٤] \leftarrow_{١,٥} = ١ \text{ غير موجودة}$$

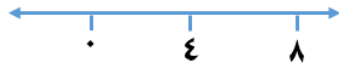
(٣) نهيا [س + ١] $\leftarrow_{٠,١}$

$$\leftarrow \begin{array}{c} | \\ \cdot \\ | \\ ١ \\ | \\ \cdot \\ | \\ \cdot \end{array} \rightarrow \quad ١ = \text{ل}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{صفر}, \quad ١ > \text{س} \geq \text{صفر} \\ ١ \end{array} \right\} = [١ + \text{س}]$$

نهيا [س + ١] $\leftarrow_{٠,١} = ١$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$



$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq s < 4 \\ 4 \leq s < 8 \end{array} \right\} = [0, 25]$$

$$1 = [0, 25]_{\varepsilon}$$

$$0 = [0, 25]_{\varepsilon}$$

$$[0, 25]_{\varepsilon} = \text{غير موجودة}$$

تدريب ٤

إذا كان $q(s) = [2 - s]$ ، فأجب عن كل مما يأتي:

(١) جد قيم a التي تجعل نهاية $q(s)$ غير موجودة

(٢) جد قيم a التي تجعل نهاية $q(s) = 1$

الحل:

(١) قيم a هي جميع قيم a حيث:

$$a \in \mathbb{R}$$

(٢) قيم a هي $(2, 3)$

تدريب ٥

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(٢) \lim_{s \rightarrow 7} \sqrt{s-7}$$

$$(١) \lim_{s \rightarrow 7} \sqrt{s-7}$$

$$(٤) \lim_{s \rightarrow 25} \sqrt{s-25}$$

$$(٣) \lim_{s \rightarrow 25} \sqrt{s-25}$$

الحل:

(1) نهاية $\sqrt{s-7}$ في $s=7$ ← س = 7 = صفر ← س = 7

غير موجودة = $\sqrt{s-7}$ نهاية في $s=7$ ← س = 7 = صفر

غير موجودة = $\sqrt{s-7}$ نهاية في $s=7$ ← س = 7 = صفر

(2) نهاية $\sqrt{s-7}$ في $s=7$ ← س = 7 = صفر ← س = 7

(3) نهاية $\sqrt{s^2-25}$ في $s=5$ ← س = 5 = صفر ← س = 5



غير موجودة = $\sqrt{s^2-25}$ نهاية في $s=5$ ← س = 5 = صفر

غير موجودة = $\sqrt{s^2-25}$ نهاية في $s=5$ ← س = 5 = صفر

(4) نهاية $\sqrt{s^2-49}$ في $s=7$ ← س = 7 = صفر ← س = 7

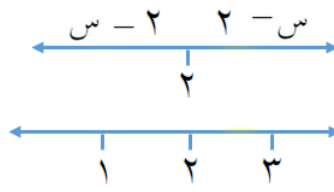
تدريب 6

إذا كان $Q(s)$ = $\left. \begin{array}{l} |s-2| \\ [s-6] \end{array} \right\}$ ، $s \leq 2$ ، $s > 2$

فجد نهاية $Q(s)$ في $s=2$

الحل:

$$س - ٢ = \text{صفر} \leftarrow س = ٢$$



$$\left. \begin{array}{l} ٣ \geq س > ٢ , ٣ \\ ٢ \geq س > ١ , ٤ \end{array} \right\} = [س - ٦]$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ < س , ٢ - س \\ ٢ \geq س > ١ , ٤ \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نهاق(س)} = \text{صفر} \\ \text{نهاق(س)} = ٤ \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{نهاق(س)} = \text{غير موجودة} \\ \text{نهاق(س)} = ٤ \end{array} \right.$$

تدريب ٧

إذا كان ق(س) = [س + ٥] ، ل(س) = [س - ٤] ، فجد كلاً مما يأتي:

(١) نهاق(س) (٢) نهاق(س)

(٣) نهاق(س) + ل(س)

ماذا تلاحظ؟

الحل:

(١) نهايات (س) $1 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 > s \geq 1, \quad 6 \\ 1 > s \geq 0, \quad 5 \end{array} \right\} = [5 + s]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 = \text{نهايات (س)}_{+1} \\ 5 = \text{نهايات (س)}_{-1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{نهايات (س)}_{\pm 1} = \text{غير موجودة}$$

(٢) نهايات (س)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \geq s > 1, \quad 2 \\ 1 \geq s > 0, \quad 3 \end{array} \right\} = [s - 4]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = \text{نهايات (س)}_{+1} \\ 3 = \text{نهايات (س)}_{-1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{نهايات (س)}_{\pm 1} = \text{غير موجودة}$$

(٣) نهايات (س) + (س) ل

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 > s > 1, \quad 8 \\ 1 > s > 0, \quad 8 \\ 1 = s, \quad 9 \end{array} \right\} = (س) ل + (س) ق$$

$$8 = \left((س) ل + (س) ق \right)_{\pm 1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8 = \text{نهايات (س) ل + (س) ق}_{+1} \\ 8 = \text{نهايات (س) ل + (س) ق}_{-1} \end{array} \right.$$

لاحظ أنه قد تكون نهاية أحد الاقترانين أو كلاهما غير موجودة، ولكن قد تصبح النهاية موجودة بعد تطبيق عملية حسابية عليها.