

إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

(١) إذا كان $ق(س) = س^٢ - س - ٦$ ، $ل(س) = س^٢ - ٢س - ٣$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س)$

ج) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤$

هـ) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)}$ و) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

الحل:

$$أ) \lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س)) = (٦ - ١ - ١) + (٣ - ٢ - ١) = ١٠ -$$

$$ب) \lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س) = ٦ - \times ٤ - = ٢٤$$

$$ج) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٤ -}{٦ -} = \frac{٢}{٣}$$

$$د) \lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤ = (٢٢ - ٢ \times ٢ - ٣) = ٨١$$

$$هـ) \lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)} = \sqrt[٢]{٣ - - ١٢} = \sqrt[٢]{٤}$$

$$و) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{صفر}{٤ -} = \frac{٣ - ٢ + ١}{٦ - + ١ + ١} = \frac{صفر}{صفر}$$

(٢) إذا كانت $\lim_{س \rightarrow ٢} ق(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \rightarrow ٢} ل(س) = ٧$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ق(س) + ل(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ق(س) - ل(س))$

ج) $\lim_{س \rightarrow ٢} \frac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ق(س) - ل(س))$

الحل:

$$7 = 1 + \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$7 = 1 + \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$6 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$2 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$10 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 2 \text{ ع (س)}}$$

$$\frac{1}{2} = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 2 \text{ ع (س)}}$$

$$5 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 2 \text{ ع (س)}}$$

$$12 = 2 + 5 \times 2 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } (2 \text{ ع (س) + 3 \text{ ل (س)})}}$$

$$121 = 4 - 125 = 22 - 25 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } (3 \text{ ع (س) - 2 \text{ ل (س)})}}$$

$$\frac{2}{5} = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{2 \text{ ل (س) ع (س)}}}$$

$$21 = 4 - 25 = 22 - 25 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } (2 \text{ ع (س) - 3 \text{ ل (س)})}}$$

(3) جد كلاً مما يأتي:

$$\underset{-5 \leftarrow s}{\text{نهاي } |25 - 2 \text{ س}|}$$

$$\underset{+5 \leftarrow s}{\text{نهاي } |25 - 2 \text{ س}|}$$

$$\underset{8 \leftarrow s}{\text{نهاي } |64 - 2 \text{ س}|}$$

$$\underset{-2 \leftarrow s}{\text{نهاي } |2 - 2 \text{ س}|}$$

$$\underset{1 \leftarrow s}{\text{نهاي } (س [س] + |س|)}$$

$$\underset{4 \leftarrow s}{\text{نهاي } [2 - 2 \text{ س}]}$$


$$\underset{1 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{2 \text{ س} - 1}}$$

$$\underset{-5 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{5 - 2 \text{ س}}}$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{4 + 2 \text{ س} + 4}}$$

الحل:

أ) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٥ ← صفر = $٢٥ - ٢$ ← صفر = $٥ \pm = س$



نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(س - ٢٥)$ ← صفر = صفر

ب) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(٢٥ - س)$ ← صفر = صفر

ج) نهيا $|س - ٢|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(٢ - س)$ ← صفر = صفر



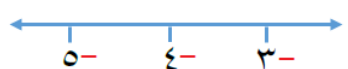
د) نهيا $|س - ٦٤|$ $\begin{matrix} ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $٦٤ - ٢$ ← صفر = $\begin{matrix} + \\ ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $٦٤ - ٢$ ← صفر = $\begin{matrix} - \\ ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

نهيا $|س - ٦٤|$ ← صفر = $\begin{matrix} ٨ \\ \leftarrow \end{matrix}$

هـ) نهيا $[س - ٢]$ $\begin{matrix} ٤ \\ \leftarrow \end{matrix}$ ← صفر = $١ = ٥$



$\left. \begin{matrix} ٥- \geq س > ٤- \\ ٦- \geq س > ٣- \end{matrix} \right\} = [س - ٢]$

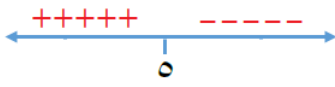
نهيا $[س - ٢]$ ← صفر = $\begin{cases} ٦- = [س - ٢] \begin{matrix} + \\ ٤ \\ \leftarrow \end{matrix} \\ ٧- = [س - ٢] \begin{matrix} - \\ ٤ \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$ ← غير موجودة

و) نهيا $(س [س] + |س|)$ $\begin{matrix} ١ \\ \leftarrow \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} ١ > س \geq ٠ \\ ٢ > س \geq ١ \end{matrix} \right\} = [س]$ ← صفر =

نهيا $(س [س] + |س|)$ ← صفر = $\begin{cases} ١ = ١ + ٠ = (س + ٠ \times س) \begin{matrix} - \\ ١ \\ \leftarrow \end{matrix} \\ ٢ = ١ + ١ = (س + ١ \times س) \begin{matrix} + \\ ١ \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$ ← غير موجودة

$$\begin{aligned} 5 - s &= \text{صفر} \\ s &= 5 \end{aligned}$$

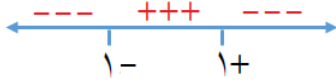


$$\text{ز) نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=5$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} =$$

$$1 \pm = s^2 \iff \text{صفر} = s^2 - 1$$

$$\text{ح) نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1$$



$$\text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 \text{ غير موجودة} = \begin{cases} \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 \text{ غير موجودة} \\ \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} = \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s + 2 &= \text{صفر} \\ s &= -2 \end{aligned}$$



$$\text{ط) نهايا } \sqrt{s^2+4s+4} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

$$\text{نهايا } \sqrt{(s+2)^2} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 = |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

$$\begin{cases} \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 \text{ صفر} = \\ \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 \text{ صفر} = \end{cases}$$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهايا $\sqrt{s-6}$ غير موجودة.

الحل:

$$6 = s \iff \text{صفر} = s - 6$$



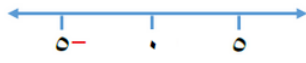
$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=6$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{غير موجودة على }]6, \infty[$$

٥) إذا كان ق(س) = [٢, ٠[، فجد قيم جـ التي تجعل نهايا [٢, ٠[س] = ١-

الحل:

$$[س] = [س, ٢] = [س, \frac{٢}{١٠}]$$

$$٥ = \frac{١٠}{٢} = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = ل$$


$$٥ - \leq س < ١ - \} = (س)$$

نهيا $[س, ٢] = ١ -$ قيم ج هي $(٥-, ٠)$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \quad , \quad س - ٢ \leq ٤ - أ \\ ٣ > س \quad , \quad [س - ٦] \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق}$$

وكانت نهيا ق (س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل:

$$٣ \geq س > ٢ \quad , \quad ٣ = [س - ٦]$$

$$\begin{array}{l} \text{نهيا } س - ٢ \text{ نهيا } ٤ - أ \\ \text{نهيا } ٣ \end{array}$$

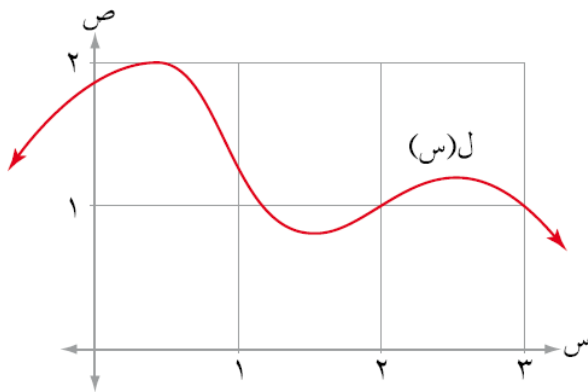
$$\frac{٦}{٤} = \frac{٤ - أ}{٤} \iff ٣ = ٤ - أ$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = أ \iff$$

(٧) معتمداً الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:

(أ) نهيا ل (٣ - س)

(ب) نهيا (س + ل) (س)



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) نهيا ل (٣ - س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

$$ص = ٣ - س$$

$$س \xrightarrow{٢} \leftarrow ٣ \quad \leftarrow \leftarrow ٣ \xrightarrow{ص}$$

نهيا ل (٣ - س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$ = نهيا ل (ص) $\xrightarrow{ص \rightarrow ٣}$

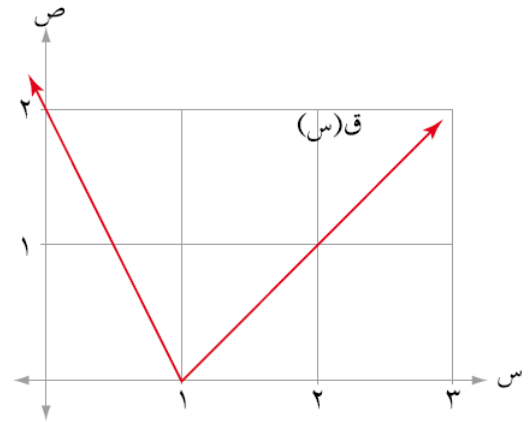
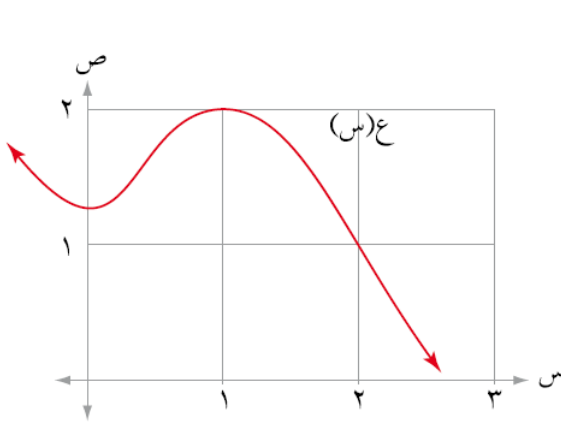
$$١ =$$

ب) نهيا ل (س + ل (س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

نهيا ل (س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$ + نهيا ل (س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

$$٣ = ١ + ٢$$

٨) معتمداً الشكل (١-٦)، الذي يمثل منحنبي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٦)

ب) نهيا ل (ق(س) × ع(س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ٢}$

أ) نهيا ل (ق(س) + ع(س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ١}$

ج) نهيا ل (٢ ق(س) + (١ - س) ع(س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ١}$

الحل:

$$\text{أ) نهايا } (ق(س) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$صفر = 2 + 2$$

$$\text{ب) نهايا } (ق(س) \times ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2} \times \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2}$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$\text{ج) نهايا } (2(ق(س) - 1) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$2 \text{ نهايا } (ق(ص)) \leftarrow_{ص \rightarrow 0} + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1}$$

$$6 = 2 + 2 \times 2$$

$$\begin{aligned} 1 - س &= ص \\ س &\leftarrow 1 \\ ص &\leftarrow صفر \end{aligned}$$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، وكانت نهايا $(س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} = 10$

$$\text{فجد نهايا } (ق^2(س) - 2ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3}$$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، فيكون ق $(-3) = 4$ ومنه: نهايا ق $(س) = 4$

$$\text{نهايا } (س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} = 10$$

$$10 = 3 - \text{نهايا } ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 10}$$

$$\text{نهايا } ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 10} = 7$$

$$= \text{نهايا } ق^2(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3} - \text{نهايا } 2ل(س) \leftarrow_{س \rightarrow 3}$$

$$24 = 14 - 16 = 7 \times 2 - 2$$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على $(س - 2)$ يساوي ٥، فجد نهايا $(3ع(س) + 4س^2)$

الحل:

لأن ϵ كثير حدود وباقي قسمته على $(s-2)$ يساوي 5 ، فيكون $\epsilon(2) = 5$ ، ومنها:

$$5 = \underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)}$$

إذاً:

$$\underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)} = (4s + 3)\epsilon(s)$$

$$31 = 16 + 15 = (2)4 + 5 \times 3$$