

## إجابات تمارين ومسائل الدرس

### نظريات النهايات

(١) إذا كان  $ق(س) = س^٢ - س - ٦$  ،  $ل(س) = س^٢ - ٢س - ٣$  ، فجد كلاً مما يأتي:

أ)  $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س))$       ب)  $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س)$

ج)  $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$       د)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤$

هـ)  $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)}$       و)  $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

**الحل:**

$$أ) \lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س)) = (٦ - ١ - ١) + (٣ - ٢ - ١) = ١٠ -$$

$$ب) \lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س) = ٦ - \times ٤ - = ٢٤$$

$$ج) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٤ -}{٦ -} = \frac{٢}{٣}$$

$$د) \lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤ = (٢٢ - ٢ \times ٢ - ٣) = ٨١$$

$$هـ) \lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)} = \sqrt[٢]{٣ - - ١٢} = \sqrt[٢]{٤}$$

$$و) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٣ - ٢ + ١}{٦ - + ١ + ١} = \frac{\text{صفر}}{٤ -} = \text{صفر}$$

(٢) إذا كانت  $ن(س) = ١٠$  ،  $ع(س) = ١ + س$  ، فجد كلاً مما يأتي:

أ)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ن(س) + ع(س))$       ب)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

ج)  $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{ن(س)}$       د)  $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

**الحل:**

$$7 = 1 + \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$7 = 1 + \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$6 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$2 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 3 \text{ ل (س)}}$$

$$10 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 2 \text{ ع (س)}}$$

$$\frac{1}{2} = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 2 \text{ ع (س)}}$$

$$5 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } 2 \text{ ع (س)}}$$

$$12 = 2 + 5 \times 2 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } (2 \text{ ع (س) + 3 \text{ ل (س)})}}$$

$$121 = 4 - 125 = 2^2 - 5^2 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } (3 \text{ ع (س) - 2 \text{ ل (س)})}}$$

$$\frac{2}{5} = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ ل (س) ع (س)}}$$

$$21 = 4 - 25 = 2^2 - 5^2 = \underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } (2 \text{ ل (س) - 3 \text{ ع (س)})}}$$

(3) جد كلاً مما يأتي:

$$\underset{-5 \leftarrow s}{\text{نهاي } |25 - 2 \text{ س}|}$$

$$\underset{+5 \leftarrow s}{\text{نهاي } |25 - 2 \text{ س}|}$$

$$\underset{8 \leftarrow s}{\text{نهاي } |64 - 2 \text{ س}|}$$

$$\underset{-2 \leftarrow s}{\text{نهاي } |2 - \text{ س}|}$$

$$\underset{1 \leftarrow s}{\text{نهاي } (س [س] + |س|)}$$

$$\underset{4 \leftarrow s}{\text{نهاي } [2 - \text{ س}]}$$


$$\underset{1 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{2 \text{ س} - 1}}$$

$$\underset{-5 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{5 - \text{ س}}}$$

$$\underset{2 \leftarrow s}{\text{نهاي } \sqrt{4 + \text{ س} + 2 \text{ س} + 4}}$$

الحل:

أ) نهيا  $|س - ٢٥|$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٥$  ← صفر =  $٢٥ - ٢$  ← صفر =  $٥ \pm = س$



نهيا  $|س - ٢٥|$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$  = نهيا  $(س - ٢٥)$  ← صفر = صفر

ب) نهيا  $|س - ٢٥|$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$  = نهيا  $(٢٥ - س)$  ← صفر = صفر

ج) نهيا  $|س - ٢|$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$  = نهيا  $(٢ - س)$  ← صفر = صفر

د) نهيا  $|س - ٦٤|$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٨$

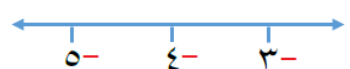


نهيا  $|س - ٦٤|$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٨$  ← صفر = صفر

نهيا  $|س - ٦٤|$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٨$  ← صفر = صفر

نهيا  $|س - ٦٤|$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٨$  ← صفر = صفر

هـ) نهيا  $[س - ٢]$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٤$  ← صفر =  $١ = ٠$



$\left. \begin{array}{l} ٥- \geq س > ٤- \\ ٦- \geq س > ٣- \end{array} \right\} = [س - ٢]$

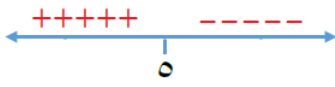
نهيا  $[س - ٢]$   $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$   $٤$  ← صفر =  $\begin{cases} ٦- = [س - ٢] \\ ٧- = [س - ٢] \end{cases}$  ← غير موجودة

و) نهيا  $(س [س] + |س|)$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$   $١$

$\left. \begin{array}{l} ٠ \geq س > ١ \\ ١ \geq س > ٢ \end{array} \right\} = [س]$

نهيا  $(س [س] + |س|)$   $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$   $١$  ← صفر =  $\begin{cases} ١ = ١ + ٠ = (س + ٠ \times س) \\ ٢ = ١ + ١ = (س + ١ \times س) \end{cases}$  ← غير موجودة

$$\begin{aligned} 5 - s &= \text{صفر} \\ s &= 5 \end{aligned}$$

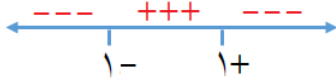


$$\text{ز) نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=5$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} =$$

$$1 \pm = s^2 \iff \text{صفر} = s^2 - 1$$

$$\text{ح) نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1$$



$$\text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 \text{ غير موجودة} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 &= \text{غير موجودة} \\ \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} &= \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} s+2 &= \text{صفر} \\ s &= -2 \end{aligned}$$



$$\text{ط) نهايا } \sqrt{s^2+4s+4} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

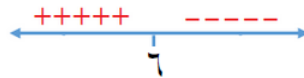
$$\text{نهايا } \sqrt{(s+2)^2} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 = |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 &= \text{صفر} \\ \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 &= \text{صفر} \end{aligned} \right.$$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهايا  $\sqrt{s-6}$  غير موجودة.

**الحل:**

$$6 - s = \text{صفر} \iff s = 6$$



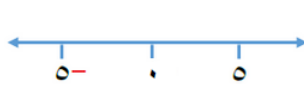
$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=6$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{غير موجودة على } ]6, \infty[$$

٥) إذا كان ق(س) = [٢, ٠[ س، فجد قيم جـ التي تجعل نهايا [٢, ٠[ س = ١-

**الحل:**

$$ق(س) = [س, ٢] = [س, \frac{٢}{١}]$$



$$٥ = \frac{١}{٢} = \frac{١}{\frac{٢}{١}} = ل$$

$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} ١ - \\ ٠ > س \geq ٥ - \end{array} \right\}$$

نهيا  $[س, ٢] = ١ -$  قيم ج هي  $(٠, ٥ -)$  س ← ج

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \quad , \quad س - ٢ \leq ٤ - أ \\ ٣ > س \quad , \quad [س - ٦] \end{array} \right\} = (٦) \text{ إذا كان ق(س)}$$

وكانت نهيا ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ. س ← ج

الحل:

$$٣ \geq س > ٢ \quad , \quad ٣ = [س - ٦]$$

$$\text{نهيا } س - ٢ \leq ٤ - أ \quad \text{نهيا } ٣ \quad \text{س ← ج} \quad \text{س ← ج}$$

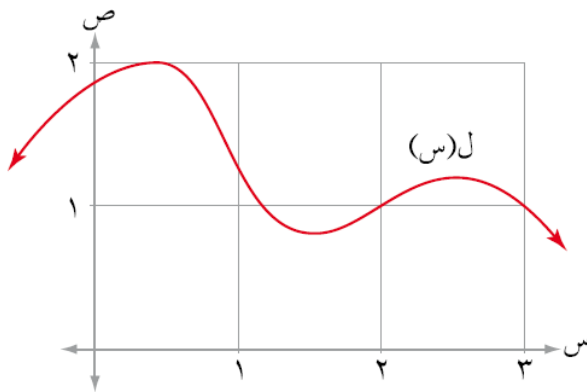
$$\frac{٦}{٤} = \frac{٤ - أ}{٤} \quad \Leftrightarrow \quad ٣ = ٤ - أ$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = أ \quad \Leftrightarrow$$

(٧) معتمداً الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:

(أ) نهيا ل(٣ - س) س ← ج

(ب) نهيا (س + ل(س)) س ← ج



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) نهيا ل ( ٣ - س )  
٣ ← س

$$٣ - س = ص$$

$$٣ ← ص \quad \leftarrow \quad ٢ ← س$$

نهيا ل ( ٣ - س ) = نهيا ل ( ص )  
٣ ← س

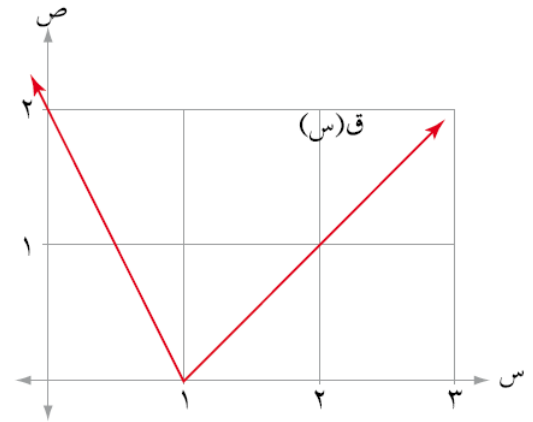
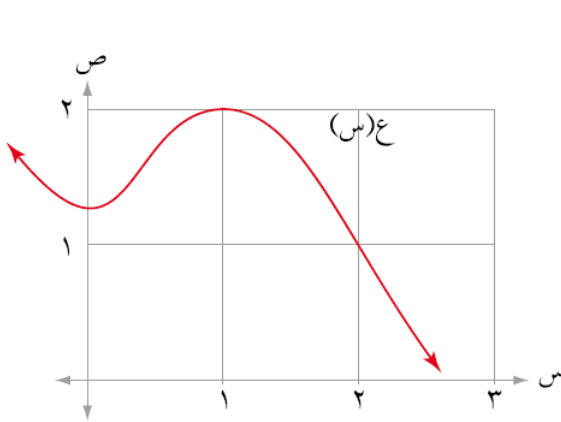
$$١ =$$

ب) نهيا ( س + ل ( س ) )  
٣ ← س

نهيا س + نهيا ل ( س )  
٣ ← س

$$٣ = ١ + ٢$$

٨) معتمداً الشكل (١-٦)، الذي يمثل منحنبي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٦)

ب) نهيا ( ق ( س ) × ع ( س ) )  
٣ ← س

أ) نهيا ( ق ( س ) + ع ( س ) )  
٣ ← س

ج) نهيا ( ٢ ق ( س - ١ ) + ع ( س ) )  
٣ ← س

الحل:

$$\text{أ) نهايا } (ق(س) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} 2$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} 2 + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} 0$$

$$2 = 2 + 0$$

$$\text{ب) نهايا } (ق(س) \times ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2} 1$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2} 1 \times \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 2} 1$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$\text{ج) نهايا } (2(ق(س) - 1) + ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} 0$$

$$2 \text{ نهايا } (ق(ص)) \leftarrow_{ص \rightarrow 0} 0 + \text{نهايا } (ع(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 1} 0$$

$$0 = 0 + 0$$

$$\begin{aligned} \text{ص} = 1 - \text{س} \\ \text{س} \leftarrow 1 \\ \text{ص} \leftarrow \text{صفر} \end{aligned}$$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة  $(-3, 4)$ ، وكانت نهايا  $(س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} 10$

$$\text{فجد نهايا } (ق^2(س) - 2ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3} 10$$

**الحل:**

ق كثير حدود يمر بالنقطة  $(-3, 4)$ ، فيكون ق  $(-3) = 4$  ومنه: نهايا ق  $(س) = 4$

$$\text{نهايا } (س - ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} 10$$

$$10 = 10 - \text{نهايا } (ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} 0$$

$$\text{نهايا } (ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 10} 0 = 10$$

$$= \text{نهايا } (ق^2(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3} 16 - \text{نهايا } (2ل(س)) \leftarrow_{س \rightarrow 3} 14$$

$$2 = 16 - 14 = 2 \times 2 - 2 \times 2$$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على  $(س - 2)$  يساوي ٥، فجد نهايا  $(3ع(س) + 4س^2)$

## الحل:

لأن  $\epsilon$  كثير حدود وباقي قسمته على  $(s-2)$  يساوي  $5$ ، فيكون  $\epsilon(2) = 5$ ، ومنها:

$$5 = \underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)}$$

إذاً:

$$\underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)} = (4s + 3)\epsilon(s)$$

$$31 = 16 + 15 = (2)4 + 5 \times 3$$