إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

١) إذا كان ق(س) = $س^{٢} - س - ٦$ ، ل(س) = $س^{٢} - ٢س - ٣$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim\limits_{س \to ١} \left(ق(س) + ل(س)\right)$ ب) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س) \times ل(س)$

جـ) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $\lim\limits_{س \to ٢} \left(ل(س)\right)^{٤}$

هـ) $\lim\limits_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)}$ و) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{ل(س)}{ق(س)}$

الحل:

أ) $\lim\limits_{س \to ١} \left(ق(س) + ل(س)\right) = (١-١-٦) + (١-٢-٣) = -١٠$

ب) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س) \times ل(س) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

جـ) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{ل(س)}{ق(س)} = \dfrac{-٤}{-٦} = \dfrac{٢}{٣}$

د) $\lim\limits_{س \to ٢} \left(ل(س)\right)^{٤} = (٢^{٢} - ٢ \times ٢ - ٣)^{٤} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim\limits_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)} = \sqrt[٣]{١ - -٣} = \sqrt[٣]{٤}$

و) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{ل(س)}{ق(س)} = \dfrac{١ + ٢ - ٣}{١ + ١ - ٦} = \dfrac{صفر}{-٤} = صفر$

٢)إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} ٢ع(س) = ١٠$ ، $\lim\limits_{س \to ٢} ٣ل(س) + ١ = ٧$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim\limits_{س \to ٢} \left(٢ع(س) + ل(س)\right)$ ب) $\lim\limits_{س \to ٢} \left(ع^{٣}(س) - ل^{٢}(س)\right)$

جـ) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)}$ د) $\lim\limits_{س \to ٢} \left(ع^{٢}(س) - ل^{٢}(س)\right)$

الحل:

$$\lim_{\text{س} \to ٢} ٢\,\text{ع(س)} = ١٠$$

$$\frac{٢}{٢}\lim_{\text{س} \to ٢} \left(\text{ع(س)}\right) = \frac{١٠}{٢}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ع(س)} = ٥$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} ٣\,\text{ل(س)} + ١ = ٧$$

$$٣\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ل(س)} + ١ = ٧$$

$$٣\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ل(س)} = ٦$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ل(س)} = ٢$$

أ) $\lim_{\text{س} \to ٢} \left(٢\,\text{ع(س)} + \text{ل(س)}\right) = ٢ \times ٥ + ٢ = ١٢$

ب) $\lim_{\text{س} \to ٢} \left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right) = ٥^{٣} - ٢^{٢} = ١٢٥ - ٤ = ١٢١$

جـ) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\sqrt{\text{ل (س)}}}{\text{ع (س)}} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

د) $\lim_{\text{س} \to ٢} \left(\text{ع}^{٢}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right) = ٥^{٢} - ٢^{٢} = ٢٥ - ٤ = ٢١$

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{\text{س} \to ٥^{+}} \left|\text{س}^{٢} - ٢٥\right|$

ب) $\lim_{\text{س} \to ٥^{-}} \left|\text{س}^{٢} - ٢٥\right|$

جـ) $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \left|\text{س} - ٢\right|$

د) $\lim_{\text{س} \to ٨} \left|\text{س}^{٢} - ٦٤\right|$

هـ) $\lim_{\text{س} \to -٤} [\text{س} - ٢]$

و) $\lim_{\text{س} \to ١} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}|\right)$

ز) $\lim_{\text{س} \to ٥^{-}} \sqrt{٥ - \text{س}}$

ح) $\lim_{\text{س} \to ١} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

ط) $\lim_{\text{س} \to -٢} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$

الحل:

أ) $\underset{\text{س}\to ٥^{+}}{\text{نهـا}} |\text{س}^{٢} - ٢٥|$

$\text{س}^{٢} - ٢٥ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = \pm ٥$

$\underset{\text{س}\to ٥^{+}}{\text{نهـا}} |\text{س}^{٢} - ٢٥| = \underset{\text{س}\to ٥^{+}}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ٢٥) = \text{صفر}$

ب) $\underset{\text{س}\to ٥^{-}}{\text{نهـا}} |\text{س}^{٢} - ٢٥| = \underset{\text{س}\to ٥^{-}}{\text{نهـا}} (٢٥ - \text{س}^{٢}) = \text{صفر}$

جـ) $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}} |\text{س} - ٢| = \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}} (٢ - \text{س}) = \text{صفر}$

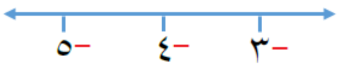
د) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} |\text{س}^{٢} - ٦٤|$

$\underset{\text{س}\to ٨^{+}}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} - ٦٤ = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to ٨^{-}}{\text{نهـا}} ٦٤ - \text{س}^{٢} = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} |\text{س}^{٢} - ٦٤| = \text{صفر}$

هـ) $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢]$ $\quad$ ل = ١



$$[\text{س} - ٢] = \begin{cases} -٧ \quad ، \quad -٥ \le \text{س} < -٤ \\ -٦ \quad ، \quad -٤ \le \text{س} < -٣ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\text{س}\to -٤^{+}}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] = -٦ \\ \underset{\text{س}\to -٤^{-}}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] = -٧ \end{cases} \Leftarrow \underset{\text{س}\to -٤}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢] \ \textbf{غير موجودة}$$

و) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\text{س} [\text{س}] + |\text{س}|\right)$

$$[\text{س}] = \begin{cases} \text{صفر} \quad ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ ١ \quad ، \quad ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}} \left(\text{س} \times ٠ + \text{س}\right) = ٠ + ١ = ١ \\ \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \left(\text{س} \times ١ + \text{س}\right) = ١ + ١ = ٢ \end{cases} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\text{س} [\text{س}] + |\text{س}|\right) \ \textbf{غير موجودة}$$

ز) $\lim\limits_{س \to ٥^-} \sqrt{٥ - س}$

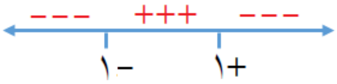
$٥ - س = \text{صفر}$

$س = ٥$

$\lim\limits_{س \to ٥^-} \sqrt{٥ - س} = \text{صفر}$

ح) $\lim\limits_{س \to ١} \sqrt{١ - س^{٢}}$

$١ - س^{٢} = \text{صفر} \Leftarrow س^{٢} = ±١$



$\lim\limits_{س \to ١^+} \sqrt{١ - س^{٢}} = $ **غير موجودة**

$\lim\limits_{س \to ١^-} \sqrt{١ - س^{٢}} = \text{صفر}$

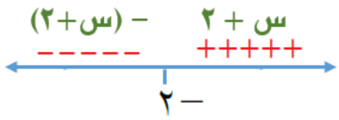
$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ١} \sqrt{١ - س^{٢}} = $ **غير موجودة**

ط) $\lim\limits_{س \to -٢} \sqrt{س^{٢} + ٤س + ٤}$

$س + ٢ = \text{صفر}$

$س = -٢$

$\lim\limits_{س \to -٢} \sqrt{(س + ٢)^{٢}} = \lim\limits_{س \to -٢} |س + ٢|$



$\lim\limits_{س \to -٢^+} |س + ٢| = \text{صفر}$

$\lim\limits_{س \to -٢^-} |س + ٢| = \text{صفر}$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to -٢} |س + ٢| = \text{صفر}$

٤) جد قيم جـ التي تجعل $\lim\limits_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة.

الحل:

$\lim\limits_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$

$٦ - س = \text{صفر} \Leftarrow س = ٦$

$\lim\limits_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة على $]٦ ، \infty)$

٥) إذا كان ق(س)= [٢,٠س]، فجد قيم جـ التي تجعل $\lim\limits_{س \to جـ} [٢,٠س] = -١$

الحل:

$$ق(س) = [٢,٠ س] = [\frac{٢}{١٠} س]$$

$$ل = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = \frac{١٠}{٢} = ٥$$

$$ق(س) = \begin{cases} -١ &،\quad -٥ \leq س < ٠ \end{cases}$$

$\lim\limits_{س \leftarrow جـ}$ [٢,٠ س] = -١   **قيم جـ هي** (-٥ ، ٠)

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٤ أ &،\quad س \geq ٣ \\ [٦ - س] &،\quad س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل:

$[٦ - س] = ٣$ ، $٢ < س \leq ٣$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣^+} س^٢ - ٤ أ = \lim\limits_{س \leftarrow ٣^-} ٣$

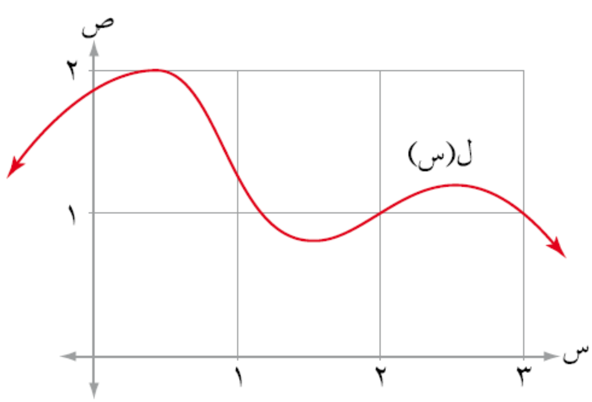
$٩ - ٤ أ = ٣ \Leftarrow \frac{٤ أ}{٤} = \frac{٦}{٤}$

$\Leftarrow أ = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

٧) معتمدًا الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ل(٣ س - ٣)

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ (س + ل (س))



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) $\lim\limits_{س \to ٢}$ ل (٣ س – ٣)

ص = ٣ س – ٣

س ← ٢ ⇐ ص ← ٣

$\lim\limits_{س \to ٢}$ ل (٣ س – ٣) = $\lim\limits_{ص \to ٣}$ ل (ص)

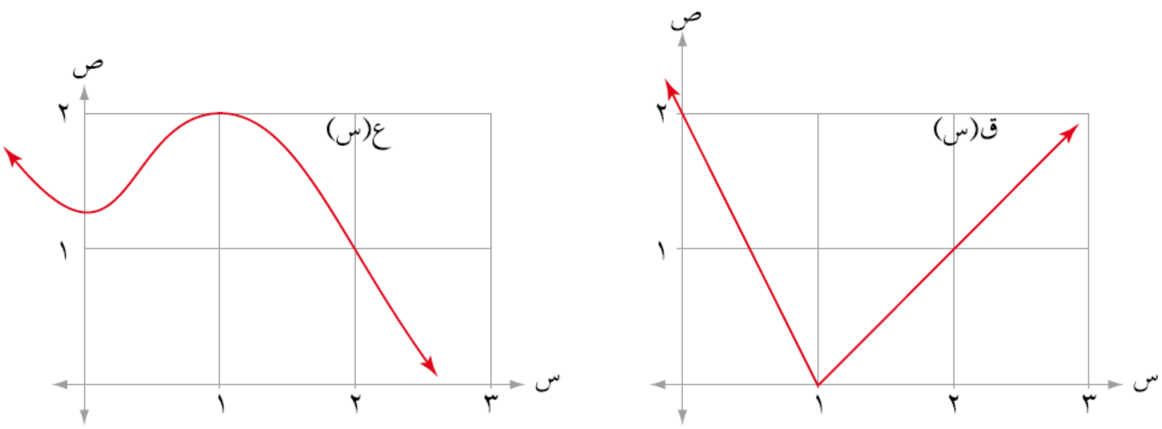
= ١

ب) $\lim\limits_{س \to ٢}$ (س + ل (س))

$\lim\limits_{س \to ٢}$ س + $\lim\limits_{س \to ٢}$ ل (س)

٢ + ١ = ٣

٨) معتمدًا الشكل (١–١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–١٦)

أ) $\lim\limits_{س \to ١}$ (ق(س) + ع(س))

ب) $\lim\limits_{س \to ٢}$ (ق(س) × ع(س))

جـ) $\lim\limits_{س \to ١}$ (٢ ق(س–١) + ع(س))

الحل:

أ) $\lim_{س \to 1} \left(ق(س) + ع(س) \right)$

$\lim_{س \to 1} ق(س) + \lim_{س \to 1} ع(س) =$

صفر + ٢ = ٢

ب) $\lim_{س \to 2} \left(ق(س) \times ع(س) \right)$

$\lim_{س \to 2} ق(س) \times \lim_{س \to 2} ع(س) =$

١ × ١ = ١

جـ) $\lim_{س \to 1} \left(٢ ق(س-١) + ع(س) \right)$

$٢ \lim_{ص \to 0} ق(ص) + \lim_{س \to 1} ع(س)$

٢ × ٢ + ٢ = ٦

ص = س-١

س ← ١

ص ← صفر

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (-٣ ، ٤)، وكانت $\lim_{س \to -3} \left(س - ل(س) \right) = -١٠$

فجد $\lim_{س \to -3} \left(ق^٢(س) - ٢ ل(س) \right)$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة (-٣ ، ٤)، فيكون ق (-٣) = ٤ ومنه : $\lim_{س \to -3} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to -3} \left(س - ل(س) \right) = -١٠$

$-٣ - \lim_{س \to -3} ل(س) = -١٠$

$\lim_{س \to -3} ل(س) = ٧$

$\lim_{س \to -3} ق^٢(س) - \lim_{س \to -3} ٢ ل(س) =$

٤^٢ - ٢ × ٧ = ١٦ - ١٤ = ٢

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س-٢) يساوي٥ ، فجد $\lim_{س \to 2} \left(٣ ع(س) + ٤ س^٢ \right)$

الحل:

لأن ع كثير حدود وباقي قسمته على (س−٢) يساوي ٥ ، فيكون ع(٢) = ٥ ، ومنها:

$$\lim_{س \leftarrow ٢} ع(س) = ٥$$

إذاً:

$$\lim_{س \leftarrow ٢} (٣ ع(س) + ٤ س^{٢}) =$$

$$٣ \times ٥ + ٤ (٢)^{٢} = ١٥ + ١٦ = ٣١$$