

إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

(١) إذا كان $ق(س) = س^٢ - س - ٦$ ، $ل(س) = س^٢ - ٢س - ٣$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س)$

ج) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤$

هـ) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)}$ و) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

الحل:

$$أ) \lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س)) = (٦ - ١ - ١) + (٣ - ٢ - ١) = ١٠ -$$

$$ب) \lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س) = ٦ - \times ٤ - = ٢٤$$

$$ج) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٤ -}{٦ -} = \frac{٢}{٣}$$

$$د) \lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤ = (٢٢ - ٢ \times ٢ - ٣) = ٨١$$

$$هـ) \lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)} = \sqrt[٢]{٣ - - ١٢} = \sqrt[٢]{٤}$$

$$و) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{صفر}{٤ -} = \frac{٣ - ٢ + ١}{٦ - + ١ + ١} = صفر$$

(٢) إذا كانت $ن(س) = ١٠$ ، $ع(س) = ١ + س$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ن(س) + ع(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

ج) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{ن(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ع(س) - ن(س))$

الحل:

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 1 + 7 = 8 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 1 + 7 = 8 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 6 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 2 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} = 10 \leftarrow \text{س}$$

$$\frac{1}{2} = \text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} = 5 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{أ) نهاية } (2 \text{ ع (س)} + 3 \text{ ل (س)}) = 2 + 5 \times 2 = 12 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ب) نهاية } (3 \text{ ع (س)} - 2 \text{ ل (س)}) = 3 \times 5 - 2 \times 2 = 15 - 4 = 11 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ج) نهاية } \frac{2 \sqrt{\text{ل (س)}}}{5} = \frac{2 \sqrt{2}}{5} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{د) نهاية } (2 \text{ ع (س)} - 3 \text{ ل (س)}) = 2 \times 5 - 3 \times 2 = 10 - 6 = 4 \leftarrow \text{س}$$

٣) جد كلاً مما يأتي:

$$\text{ب) نهاية } |25 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{أ) نهاية } |25 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{د) نهاية } |64 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ج) نهاية } |2 - \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{و) نهاية } (س [س] + |س|) \leftarrow \text{س}$$

$$\text{هـ) نهاية } [2 - \text{ س}] \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ح) نهاية } \sqrt{2 \text{ س} - 1} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ز) نهاية } \sqrt{5 - \text{ س}} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ط) نهاية } \sqrt{4 + 2 \text{ س} + 4 \text{ س} + 4} \leftarrow \text{س}$$

الحل:

أ) نهيا $|25 - 2s|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 5 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 5 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$ $25 - 2s = \text{صفر} \iff s = \pm 12.5$

نهيا $|25 - 2s|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 5 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 5 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$ = صفر = $(25 - 2s)$

ب) نهيا $|25 - 2s|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \\ 5 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 5 \\ \leftarrow \\ - \end{matrix}$ = صفر = $(2s - 25)$

ج) نهيا $|2 - s|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \\ 2 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 2 \\ \leftarrow \\ - \end{matrix}$ = صفر = $(s - 2)$



د) نهيا $|64 - 2s|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$

نهيا $64 - 2s$ = صفر $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$

نهيا $2s - 64$ = صفر $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ - \end{matrix}$

نهيا $|64 - 2s|$ = صفر $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 8 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$

هـ) نهيا $[2 - s]$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \\ 5 \\ \leftarrow \\ 4 \\ \leftarrow \\ 3 \\ \leftarrow \\ - \end{matrix}$ $1 = 0$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 4 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 4 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} 4 - > s \geq 5 - \\ 3 - > s \geq 4 - \end{matrix} \right\} = [2 - s]$

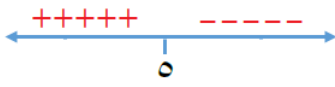
نهيا $[2 - s]$ غير موجودة $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 4 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 4 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$ $\iff \begin{cases} 6 - = [2 - s] \\ 7 - = [2 - s] \end{cases}$

و) نهيا $(s + |s|)$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \\ 1 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 1 \\ \leftarrow \\ + \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} 1 > s \geq 0 \\ 2 > s \geq 1 \end{matrix} \right\} = [s]$

نهيا $(s + |s|)$ غير موجودة $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \\ 1 \\ \leftarrow \\ 0 \\ \leftarrow \\ 1 \\ \leftarrow \\ - \end{matrix}$ $\iff \begin{cases} 1 = 1 + 0 = (s + 0 \times s) \\ 2 = 1 + 1 = (s + 1 \times s) \end{cases}$

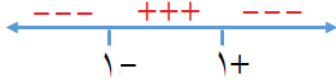
$$\begin{aligned} 5 - s &= \text{صفر} \\ s &= 5 \end{aligned}$$



$$\text{ز) نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-5} = \text{صفر} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$1 \pm = s^2 \iff \text{صفر} = s^2 - 1$$



$$\text{ح) نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s^2-1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{cases} \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} = \text{غير موجودة} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \\ \text{نهايا } \sqrt{s^2-1} = \text{صفر} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s + 2 &= \text{صفر} \\ s &= -2 \end{aligned}$$



$$\text{ط) نهايا } \sqrt{s^2+4s+4} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\text{نهايا } \sqrt{(s+2)^2} = |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{cases} \text{نهايا } |s+2| = \text{صفر} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \\ \text{نهايا } |s+2| = \text{صفر} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \end{cases}$$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهايا $\sqrt{s-6}$ غير موجودة.

الحل:

$$6 - s = \text{صفر} \iff s = 6$$



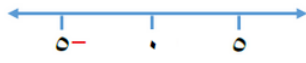
$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{ غير موجودة على }]6, \infty)$$

٥) إذا كان ق(س) = [٢, ٠] س، فجد قيم جـ التي تجعل نهايا [٢, ٠] س = ١-

الحل:

$$[س] = [س, ٢] = [س, \frac{٢}{١٠}]$$

$$٥ = \frac{١٠}{٢} = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = ل$$


$$٥ - \geq س > ٠, \quad ١ - \left. \vphantom{٥} \right\} = (س)$$

نهيا $[س, ٢] = ١ -$ قيم ج هي $(٠, ٥ -)$ س ←

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \quad , \quad ٤ - ٢ س \text{ نهيا} \\ ٣ > س \quad , \quad [س - ٦] \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق}$$

وكانت نهيا ق (س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ. س ←

الحل:

$$٣ \geq س > ٢ \quad , \quad ٣ = [س - ٦]$$

$$\begin{array}{l} \text{نهيا} \text{ نهيا} \\ \text{س} \text{ س} \\ \text{+} \text{ -} \\ \text{س} \text{ س} \\ \text{←} \text{ ←} \\ \text{٣} \text{ ٣} \end{array} = ٤ - ٢ س$$

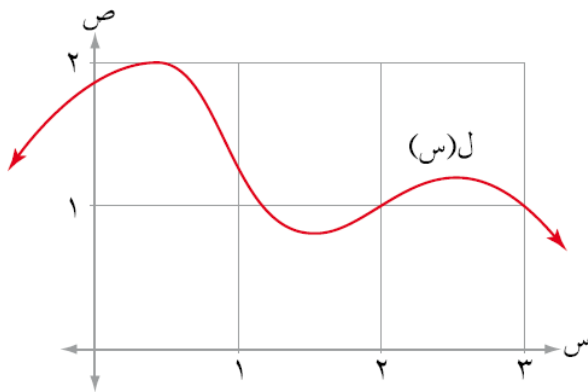
$$\frac{٦}{٤} = \frac{٤ - ٢ س}{٤} \iff ٣ = ٤ - ٢ س$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = أ \iff$$

(٧) معتمداً الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:

(أ) نهيا ل (٣ - س) س ←

(ب) نهيا (س + ل) (س) س ←



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) نهاية $(3 - s)$ من $s \leftarrow 2$

$$3 - s = 3 - 2 = 1$$

$$3 \leftarrow s \quad \leftarrow \quad 2 \leftarrow s$$

نهاية $(3 - s)$ من $s \leftarrow 2$ = نهاية $(3 - s)$ من $s \leftarrow 3$

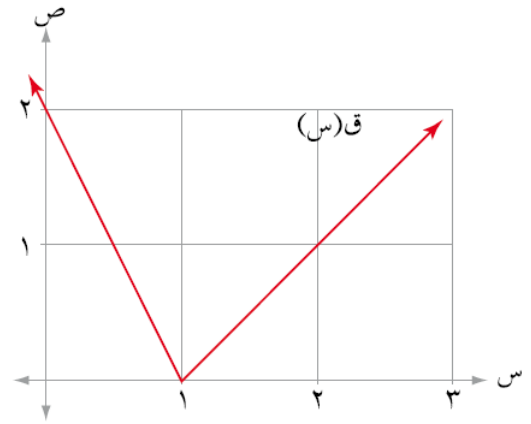
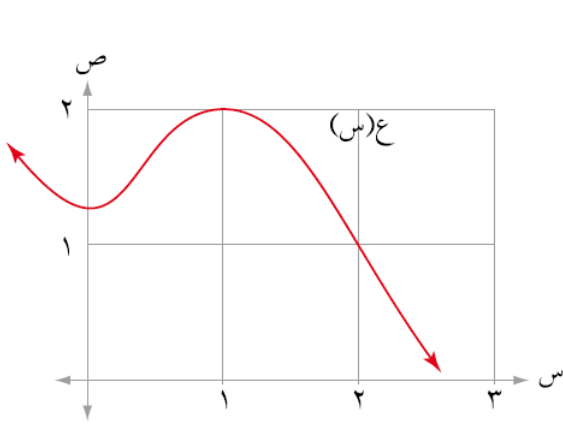
$$1 =$$

ب) نهاية $(s + 1)$ من $s \leftarrow 2$

نهاية s من $s \leftarrow 2$ + نهاية 1 من $s \leftarrow 2$

$$3 = 1 + 2$$

٨) معتمداً الشكل (١-٦)، الذي يمثل منحنبي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٦)

ب) نهاية $(ق(س) \times ع(س))$ من $s \leftarrow 2$

أ) نهاية $(ق(س) + ع(س))$ من $s \leftarrow 1$

ج) نهاية $2(ق(س) + (1 - ع(س)))$ من $s \leftarrow 1$

الحل:

$$\text{أ) نهايا } (ق(س) + ع(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 1}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 1} + \text{نهايا } (ع(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 1}$$

$$صفر = 2 + 2$$

$$\text{ب) نهايا } (ق(س) \times ع(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 2}$$

$$= \text{نهايا } (ق(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 2} \times \text{نهايا } (ع(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 2}$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$\text{ج) نهايا } (2(ق(س) - 1) + ع(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 1}$$

$$2 \text{ نهايا } (ق(ص)) \xrightarrow{ص \rightarrow 0} + \text{نهايا } (ع(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 1}$$

$$6 = 2 + 2 \times 2$$

$$\begin{aligned} ص = 1 - س \\ س \leftarrow 1 \\ ص \leftarrow صفر \end{aligned}$$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، وكانت نهايا $(س - ل(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 3} = 10$

$$\text{فجد نهايا } (ق^2(س) - 2ل(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 3}$$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، فيكون ق $(-3) = 4$ ومنه: نهايا ق $(س) \xrightarrow{س \rightarrow 3} = 4$

$$\text{نهايا } (س - ل(س)) \xrightarrow{س \rightarrow 3} = 10$$

$$10 = 3 - \text{نهايا } ل(س) \xrightarrow{س \rightarrow 3}$$

$$\text{نهايا } ل(س) \xrightarrow{س \rightarrow 3} = 7$$

$$= \text{نهايا } ق^2(س) \xrightarrow{س \rightarrow 3} - \text{نهايا } 2ل(س) \xrightarrow{س \rightarrow 3}$$

$$24 = 14 - 16 = 7 \times 2 - 2$$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على $(س - 2)$ يساوي ٥، فجد نهايا $(3ع(س) + 4س^2) \xrightarrow{س \rightarrow 2}$

الحل:

لأن ϵ كثير حدود وباقي قسمته على $(s-2)$ يساوي 5 ، فيكون $\epsilon(2) = 5$ ، ومنها:

$$5 = \underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)}$$

إذاً:

$$\underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)} = (4s + 3)\epsilon(s)$$

$$31 = 16 + 15 = (2)4 + 5 \times 3$$