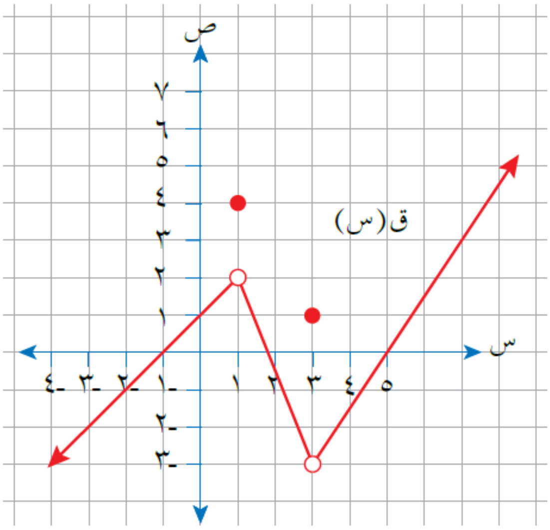
إجابات أسئلة الدرس

الاتصال عند نقطة

١) اعتمادًا على الشكل (١–١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، حدد قيم س التي يكون الاقتران ق عندها غير متصل.



الشكل (١–١٥).

الحل:

قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل هي س = ١ ، س = ٣

---

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - ١ ، & \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} ، & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

الحل:

١) ق (١) = ٢ × ١ = ٢

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهــا}}$ ق (س) = ٢ × ١ = ٢

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}}$ ق (س) = ١ – ١ = صفر

$\Leftarrow$ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق (س) غير موجودة $\Leftarrow$ ق (س) غير متصل عند س = ١

٣) إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \frac{٥}{س + ١} &، س \neq ١ \\ ٣ &، س = ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ١

الحل:

١) هـ (١) = ٣

٢) $\lim_{س \to ١}$ هـ (س) = $\frac{٥}{١ + ١} = \frac{٥}{٢}$

٣) $\lim_{س \to ١}$ هـ (س) $\neq$ هـ (١)

∴ هـ غير متصل عند س = ١

٤) إذا علمت أن ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٣ &، س < -١ \\ ٥ - س &، -١ \leq س < ١ \\ س^٣ + ٣ &، س \geq ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما:

أ) س = ١ ب) س = -١

الحل:

أ- عند س = ١

١) ق (١) = ١^٣ + ٣ = ٤

٢) $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق (س) = ٤

$\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق (س) = ٥ – ١ = ٤

$\lim_{س \leftarrow ١}$ ق (س) = ٤

٣) $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق (س) ≠ ق (١)

∴ ق (س) غير متصل عند س = ١

ب- عند س = -١

١) ق (-١) = ٥ - -١ = ٦

٢) $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق (س) = ٦

$\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق (س) = ١ + ٣ = ٤

⇐ $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق (س) = غير موجودة

∴ ق (س) غير متصل عند س = -١

---

٥) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{٣ - س}{س - ٣} & ، \ س \neq ٣ \\ م\ س + ٢ & ، \ س = ٣ \end{cases}$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٣، فجد قيمة الثابت م.

الحل:

هـ متصل عند س = ٣ ⟸ $\lim\limits_{س \to ٣}$ هـ(س) = هـ(٣)

$\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\cancel{٣ - س}^{\,-١}}{\cancel{س - ٣}} = م \times ٣ + ٢$

$\lim\limits_{س \to ٣} -١ = ٣م + ٢$

$-١ = ٣م + ٢$

$-٢ \qquad -٢$

$\dfrac{٣م}{٣} = \dfrac{-٣}{٣}$

م = -١.

---

٦) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س + أ & ، \quad س < ٢ \\ ٨ & ، \quad س = ٢ \\ ب س + ٦ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

وكان الاقتران هـ متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة كل من الثابتين: أ ، ب.

الحل:

هـ متصل عند س = ٢ ⟸

$$\lim_{\text{س}\to ٢^+} \text{هـ(س)} = \lim_{\text{س}\to ٢^-} \text{هـ(س)} = \text{هـ(٢)}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢^+} \text{هـ(س)} = \text{هـ(٢)}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢^+} \text{ب س} + ٦ = ٨$$

$$٢\text{ب} + ٦ = ٨ \Leftarrow \frac{٢\text{ب}}{٢} = \frac{٢}{٢}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{ب} = ١}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢^-} \text{هـ(س)} = \text{هـ(٢)}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢^-} (\text{س} + \text{أ}) = ٨$$

$$٢ + \text{أ} = ٨ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٦}$$

---

٧) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \text{أ س} - \text{ب} & ، \text{س} < ١ \\ ٤ & ، \text{س} = ١ \\ \text{أ س}^٣ + \text{ب} + ٢ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

وكان الاقتران ل متصلا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

الحل:

ل متصل عندما س = ١

$\lim\limits_{س \to 1^+}$ ل(س) = $\lim\limits_{س \to 1^-}$ ل(س) = ل(١)

$\lim\limits_{س \to 1^+}$ ل(س) = ل(١) .

أ + ب + ٢ = ٤ ⟸ أ + ب = ٢ --- ①
　　　　 −٢　 −٢

$\lim\limits_{س \to 1^-}$ ل(س) = ل(١)

أ − ب = ٤ --- ②

بجمع المعادلتين ① + ② .

أ + ب = ٢
أ − ب = ٤ +

٢أ / ٢ = ٦ / ٢ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ٣}$.

نعوض في معادلة ①

أ + ب = ٢
٣ + ب = ٢ ⟸ $\boxed{\text{ب} = -١}$
−٣　　 −٣

٨) إذا كان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٢، وكانت $\lim\limits_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦ ، فجد قيمة ق(٢).

الحل:

ق متصل عند س = ٢ ⟸

نهـا ق(س) = ق(٢) .
س←٢

نهـا ٢ق(س) + س = ٦
س←٢

٢ نهـا ق(س) + نهـا س = ٦
س←٢ س←٢

٢ نهـا ق(س) + ٢ = ٦
س←٢
−٢ −٢

$\frac{٢}{٢}$ نهـا ق(س) = $\frac{٤}{٢}$
س←٢

نهـا ق(س) = ٢
س←٢

∴ ق(٢) = نهـا ق(س) = ٢
س←٢